

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇARPIMSAL ANALİZİN q -GENİŞLEMESİ :
 q -ÇARPIMSAL ANALİZ VE UYGULAMALARI**

GÖKHAN YENER

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. İBRAHİM EMİROĞLU**

İSTANBUL, 2016

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇARPIMSAL ANALİZİN q -GENİŞLEMESİ:
 q -ÇARPIMSAL ANALİZ VE UYGULAMALARI**

Gökhan YENER tarafından hazırlanan tez çalışması 05.08.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fatih TAŞÇI

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. İsmail Müfit GİRESUNLU

İstanbul Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Üsküdar Üniversitesi

Çarpımsal Analiz, klasik analize alternatif olarak Newton ve Lipchitz tarafından ortaya konup, matematiksel birçok probleme farklı bakış açıları sunmaktadır. q -Analiz de geçmişi Euler'e kadar uzanan soyut ve uygulamalı matematiğin birçok alanı ile ilişkili geniş bir konudur. Biz, bu çalışma kapsamında, bu iki analiz arasında bağıntılar kurarak, yeni tanımlar ve bu tanımlar doğrultusunda teoremler ve nümerik yöntemler ortaya koyduk. Bu çalışmanın hazırlanması sırasında benden hiçbir yardımı esirgemeyen Saygıdeğer Hocam Sayın Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU' na, en içten duygularıyla sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bununla birlikte, tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli aileme, çalışma arkadaşlarıma ve özellikle eşime en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ağustos, 2016

Gökhan YENER

İÇİNDEKİLER

SAYFA

SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT.....	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Orjinal Katkı.....	3
BÖLÜM 2	
q -ANALİZ.....	4
2.1 q -Analizdeki Ön Kavramlar ve Notasyonlar	4
2.2 q -Türev.....	6
2.2.1 q -İntegral	12
BÖLÜM 3	
ÇARPIMSAL ANALİZ.....	15
3.1 Çarpımsal Türev	15
3.1.1 Çarpımsal Türev Alma Kuralları	19
3.2 Çarpımsal İntegral	21
3.2.1 Çarpımsal İntegral Alma Kuralları	22
BÖLÜM 4	
q -ÇARPIMSAL ANALİZ.....	23
4.1 q -Çarpımsal Türev	23
4.1.1 q -Çarpımsal Türev Alma Kuralları	29
4.2 q -Çarpımsal İntegral.....	43
4.2.1 q -Çarpımsal İntegral Alma Kuralları.....	52

BÖLÜM 5

q -ÇARPIMSAL NÜMERİK YAKLAŞIMLAR.....	57
5.1 Tek Değişkenli Denklemlerin Köklerinin Yaklaşık Hesabı için Bazı q -Çarpımsal Yöntemler	57
5.1.1 q -Çarpımsal Newton-Raphson Yöntemi	59
5.1.2 q -Çarpımsal Chebyshev Yöntemi	61
5.2 İnterpolasyon Teorisi	70
5.2.1 Çarpımsal İnterpolasyon.....	70
5.2.2 q -Çarpımsal interpolasyon Yaklaşımı	75

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER.....	91
KAYNAKLAR.....	92
ÖZGEÇMİŞ	94

SİMGE LİSTESİ

$[n]_q$	n tam sayısının q -benzeri
e_q^x	Üstel fonksiyonun q -benzeri
E_q^x	Üstel fonksiyonun q -benzeri
D_q	q -Türev Operatörü
D_q^*	q -Çarpımsal Türev Operatörü
E_h	Üstel yaklaşım fonksiyonu
Δ^*	Çarpımsal İleri Bölüm Operatörü
∇^*	Çarpımsal Geri Bölüm Operatörü
Δ_q^*	q -Çarpımsal Bölüm Operatörü
$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$	Çarpımsal Kuvvet-Bölüm
Ω_q	Lineer operatör

KISALTMA LİSTESİ

CM	Chebsyhev Metot
ÇNM	Çarpımsal Newton Metot
ÇCM	Çarpımsal Chebsyhev Metot
$\log(x)$	10 tabanında logaritma
NM	Newton Metot
q -Analiz	Kuantum Analiz
q -ÇNM	q -Çarpımsal Newton Metot
q -ÇCM	q -Çarpımsal Chebsyhev Metot

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 4.1 Bazı fonksiyonların çarpımsal ve q -çarpımsal türevleri.....	34
Çizelge 4.2 Bazı fonksiyonların çarpımsal ve q -çarpımsal integralleri	55
Çizelge 5.1 q -çarpımsal Newton-Raphson ve Chebyshev metotları için elde edilen değerleri.....	66
Çizelge 5.2 q -çarpımsal Newton-Raphson ve Chebyshev metotları için elde edilen değerler.....	67
Çizelge 5.3 q -çarpımsal Newton-Raphson ve Chebyshev metotları için elde edilen değerler.....	68
Çizelge 5.4 q -çarpımsal Newton-Raphson ve Chebyshev metotları için elde edilen değerler.....	69

**ÇARPIMSAL ANALİZİN q -GENİŞLEMESİ:
 q -ÇARPIMSAL ANALİZ VE UYGULAMALARI**

Gökhan YENER

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU

Bu çalışmada, klasik analize alternatif olarak ortaya konan iki farklı analiz incelenmiştir. Bu analizler, yıllardan beri süre gelen q -analiz ile, son zamanlarda popüleritesi artan çarpımsal analizdir. Çalışmamızın temel düşüncesi ise, bu iki analiz arasındaki bağıntılar incelenerek, çarpımsal analizde mevcut olan tanım ve kavramları, q -teorisini kullanarak yeni tanımlar ortaya koymaktır. Tezin akışı sırasında öncelikle q -analiz ve çarpımsal analiz kavramları ortaya konup daha sonra tezimizin özgün kısmı olan q -çarpımsal analiz kavramları verilecektir. En son kısımda da bu yeni tanımlar doğrultusunda sayısal yaklaşım ifadeleri uygulamaları ile birlikte gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Çarpımsal Analiz, Non-Newtonian, Çarpımsal interpolasyon, Çarpımsal Yaklaşım, q -Analiz, Kuantum Analiz, q -benzer, q -fark, q -operatör

**q -ANALOGUES OF THE MULTIPLICATIVE CALCULUS:
 q -MULTIPLICATIVE CALCULUS AND ITS APPLICATIONS**

Gökhan YENER

Department of Mathematical Engineering

Ph.D Thesis

Adviser: Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU

In this study, two different analyzes put forward as alternatives to classical analysis were examined. These analyzes are q -analysis which has come over the years, and multiplicative analysis whose popularity has been increasing recently. The basic idea of this study was to examine the relationship between these two analyzes and put forward new definitions by using the definitions and concepts present in the multiplicative analysis and q -operator. During the course of the thesis, concepts of q analysis and multiplicative analysis will be explained initially and then the concepts of q -multiplicative analysis, which are the original focus of the thesis, will be given. In the last part, numerical approach statements will be shown with its applications through these new definitions.

Keywords: Multiplicative Calculus, Non-Newtonian, Multiplicative interpolation, Multiplicative Approximation, q -Calculus, Quantum Calculus, q -analog, q -difference, q -operator

1.1 Literatür Özeti

Günümüzde en çok kullanılan matematiksel teori olan klasik analizin temelleri, 17. Yüzyılın 2. yarısında Gottfried Leibnitz ve Isaac Newton tarafından atılmıştır. Bu analizde toplama işlemi en temel işlem olduğu düşünülerek bu analize toplamsal (klasik) analizde denilmiştir. Klasik analizden yola çıkarak farklı aritmetik işlemlerle yeni analizler ortaya konulmuştur. Bunlara örnek olarak q -Analiz (q -Calculus) ve çarpımsal analiz (Multiplicative Calculus) bunlardan sadece ikisidir.

q -Analiz ya da Kuantum Analiz, geçmiş Euler'e kadar uzanan en az dört yüz yıllık tarihi olan soyut ve uygulamalı matematiğin birçok alanı ile ilişkili geniş bir konudur. Fakat modern anlamada q -Analizin ortaya çıkışı Jackson tarafından q -integrallerin tanımının geliştirildiği [1] makalesi ile olmuştur. Günümüzde q -Analizin matematikte uygulama alanları olarak ortogonal polinomlar, özel fonksiyonlar ile Lie cebirleri verilebilir. Ayrıca fizikte de genel rölativite kuantum kromo dinamiği, sicim teorisi, moleküler ve nükleer spektroskopi gibi uygulama alanları mevcuttur [2].

Klasik q -teorisi negatif olmayan tamsayıların q -benzerlerini tanımlamakla başlamıştır. Bir n tamsayısının q -benzeri $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - q^n}{1 - q} = n$$

eşitliğinden esinlenerek tanımlanmıştır.

q -Analiz son yıllarda araştırma konularının odağı olmasıyla birlikte klasik anlamdaki birçok teori ve metodlar q -Analiz sayesinde bir q reel parametresine bağlı olarak

tanımlanması ya da genişletilmesidir. Fakat $q \rightarrow 1^-$ limiti için klasik anlamdaki sonuçlar elde edilmektedir. q -Analizdeki bu q reel parametresi kullanılarak elde edilen yeni tanımların en temel noktası ise herhangi bir fonksiyonun türevinin, limiti alınmadan

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q - 1)x}$$

farklar şeklinde ifade edilmesidir.

Klasik analize alternatif olarak çarpımsal analiz, ilk temelleri 1887 yılında Vito Volterra tarafından atılmıştır [2]. Klasik analizde nasıl ki en temel işlem toplama ise çarpımsal analizde de ise çarpma işlemidir.

Bu analizde de türev tanımı klasik analizden farklı, çarpımsal anlamda

$$f^*(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

şeklinde ifade edilerek ilham alınmış ve yeni tanımlar ortaya konmuştur. Dolayısıyla çarpımsal analiz ismini buradan almaktadır. Çarpımsal analiz, her ne kadar eski tarihlerden itibaren var olmuş olsada, matematikçiler tarafından yeterince önem verilmemiştir. Michal Grossman ve Robert Katz tarafından 1967 ve 1970 yılları arasında yapılan çalışmalar sonucunda, geometrik analiz, bigeometrik analiz, anageometrik analiz tanımlanmıştır. Bu analizler Non-Newtonian olarak da bilinmektedir. [4] de 1972 yılında Grossman ve Katz tarafından bu analizle ilgili yeni tanım, kavram ve uygulamalara yer verilmiştir. 1999 yılında, Dicks Stanley tarafından geometrik analiz çarpımsal(multiplicative) analiz olarak ifade edilmiştir [5]. .Bu analizin hangi alanlarda kullanılabileceği ortaya çıktıkça her geçen gün matematikçilerin ilgisini üzerine çekmiştir. 2008 yılında Bashirov, A.E., Misirli and E., Ozyapici, A tarafından [6] da verilen çarpımsal analizin temel kavramlarının tanımlandığı ve bazı uygulamalarının yer aldığı çalışma ortaya konmuştur. 2009 yılındaki bir çalışmada çarpımsal analizin farklı bilim dallarındaki problemlere yeni bir bakış açısı sunduğu görülmüştür [7]. Özellikle ekonomi ve finans alanında birçok problemlerde yer almaktadır. Bununla birlikte çarpımsal difarensiyel denklemlerin konusuna giren oransal büyüme problemleri de yine bu analiz ile çözülebilmektedir. Yine 2009 yılında, [8] de çarpımsal sonlu farklar

yöntemi, ikinci mertebe Volterra tipi çarpımsal diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerine yönelik bir yöntem olarak literatüre geçmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, q -Analiz ve çarpımsal analizin temel kavramları ele alınıp, bu ikisi arasındaki ilişki incelenmiştir. Çarpımsal analizin q -genişlemesini ortaya koymak ve buna ek olarak çarpımsal analize ait bazı nümerik yöntemlerin, q -operatör karşılıklarının bulunması amaçlanmıştır.

1.3 Orjinal Katkı

[9] da verilen çarpımsal analizin temel tanım ve kavramların q -calculus ile ilişkisi incelenerek çarpımsal analizin q -genişlemesi elde edilecektir. Bu durum özellikle çarpımsal analiz konuları üzerinde çalışan araştırmacılar için “ q ” parametresi kullanılarak farklı açılardan ele alabileceği kaynak bir çalışma olacağı öngörülmektedir.

BÖLÜM 2

***q*-ANALİZ**

Bu kısımda *q*-analiz ait temel tanımlar olan, *q*-doğal sayısı, *q*-faktöriyel, *q*-binom katsayıları, *q*-Taylor formülü, *q*-türev ve *q*-integral gibi kavramlar tanımlanıp bazı uygulamalara yer verilecektir. *q*-Analize ait bu kavramları [10] da daha detaylı bir şekilde bulmak mümkündür.

2.1 *q*-Analizdeki Ön Kavramlar ve Notasyonlar

Klasik *q*-teorisi, negatif olmayan tamsayıların *q*-benzerlerini tanımlamakla başlar. Bir *n* doğal sayısının *q*-benzeri $0 < q < 1$ için

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - q^n}{1 - q} = n$$

eşitliğinden esinlenerek ortaya çıkmıştır. Bu tez boyunca aksi ifade edilmediği sürece $0 < q < 1$ kabul edilecektir.

Tanım 2.1

Bir *n* pozitif tamsayısının *q*-benzeri, $0 < q < 1$ olmak üzere $[n]_q$ veya $[n]$ şeklinde gösterilir ve

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Literatürde (2.1) ifadesi *q-analog* (*q-analogue*) yada *q-genişleme* (*q-extension*) olarak da yer almaktadır. (2.1) ifadesini reel ve kompleks sayılar için tanımlamakta mümkündür. Herhangi bir reel yada kompleks α sayısı için

$$[a]_q = \frac{1 - q^a}{1 - q}$$

şeklinde q -benzeri tanımlanır. Ayrıca bu son eşitlikte $\alpha \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$[\infty] = \frac{1}{1 - q}$$

klasik analizdeki sonsuz kavramının q -benzeri elde edilir [10].

Tanım 2.2

Pozitif bir n tamsayısı için

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q [n-1]_q \dots 1 & n = 1, 2, \dots \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

ifadesine n sayısının q -faktöriyeli denir. (2.2) ifadesinin $q \rightarrow 1$ yaklaşımı için

$$\lim_{q \rightarrow 1} [n]_q! = n!$$

olduğu açıkça görülmektedir.

Tanım 2.3

$k = 0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\binom{n}{k}$ binom katsayısının q -benzeri

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir. q -binom katsayısına örnek olarak $(x + y)^n$ iki terimlisinin açılımının q -analizindeki karşılığı

$$(x + y)_q^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k$$

verilebilir.

Bu kısma kadar q -türev ve integral kavramları içerisinde yer alan bazı kavramları verdik. Şimdi de q -türev ve q -integralin tanımları ifade edelim.

2.2 q -Türev

Tanım 2.5

Herhangi bir f fonksiyonunun q -diferansiyeli $d_q f$ şeklinde gösterilir ve

$$d_q f = f(qx) - f(x)$$

$$d_q x = qx - x$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6

Bir f fonksiyonunun q -türevi $D_q f$ ile gösterilir ve

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}, x \neq 0$$

şeklinde iki diferansiyelin oranı olarak tanımlanır. Burada D_q q -fark operatörüdür.

Klasik analizde ki türevde yer alan artım miktarına Δx dersek, q -analizde onun yerine $\Delta x = qx - x$ yer almıştır ve limit kavramı q -türevde mevcut değildir.

$x = 0$ noktasında f fonksiyonu için q -türev $f'(x)$ olarak tanımlanır. Buna göre bir f fonksiyonun q -türevi literatürde

$$D_q f(x) = \begin{cases} \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$$

yada

$$D_q f(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$$

tanımlanır. $q \rightarrow 1$ için

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

dir. Yüksek mertebeden q -türev, $D_q^n[f(x)]$ şeklinde gösterilir ve $D_q^0[f(x)] = f(x)$,

$D_q^n[f(x)] = D_q^{n-1}[D_q f(x)]$ eşitlikleri vardır.

Tanım 2.7

Herhangi bir f fonksiyonunun n . mertebeden q -türevi

$$D_q^n[f(x)] = (q-1)^{-n} x^{-n} q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^n [n]_q \binom{n}{k}_q (-1)^k q^{\binom{k}{2}} f(q^{n-k}x),$$

$$\{q^k x, k = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

şeklindedir.

Örnek 2.8

$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ fonksiyonun q -türevini bulalım.

$$\begin{aligned} D_q f(x) &= \frac{(qx)^n - x^n}{qx - x} = \frac{x^n(q^n - 1)}{x(q - 1)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1} \\ &= [n]_q x^{n-1} \end{aligned}$$

Ayrıca yukardaki ifade de eşitliğin her iki tarafının $q \rightarrow 1$ limiti alınırsa klasik analizdeki

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q x^n = \lim_{q \rightarrow 1} [n]_q x^{n-1} = n x^{n-1}$$

elde edilir.

Örnek 2.9

$f(x) = \ln x$ fonksiyonun q -türevini bulalım.

$$D_q \ln x = \frac{\ln(qx) - \ln x}{qx - x} = \frac{\ln q}{x(q - 1)}$$

Şimdi de q -Türev ait temel özellikleri ifade edelim. Bunun için aşağıda bazı eşitlikler verilmiştir ve ispatları q -türev tanımından elde edilebilir. Biz sadece birkaçını göstereceğiz.

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon ve α da bir sabit olsun. O halde

$$1) D_q(\alpha) = 0$$

$$2) D_q(\alpha f(x)) = \alpha(D_q f)(x)$$

$$3) D_q[f(x) \pm g(x)] = D_q f(x) \pm D_q g(x)$$

$$4) D_q[f(x)g(x)] = f(qx)D_qg(x) + g(x)D_qf(x)$$

$$5) D_q \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)D_qf(x) - f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}, \quad g(x)g(qx) \neq 0$$

$$6) D_q(f \circ g)(x) = D_{q,g}(f(g(x)))D_{q,x}(g(x))$$

Özellik 4 için

$$\begin{aligned} D_q[f(x)g(x)] &= \frac{f(qx)g(qx) - f(x)g(x)}{qx - x} \\ &= \frac{f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) + f(qx)g(x) - f(x)g(x)}{qx - x} \\ &= f(qx) \frac{g(qx) - g(x)}{qx - x} + g(x) \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \\ &= f(qx)D_qg(x) + g(x)D_qf(x) \end{aligned}$$

şeklinde Leibniz kuralı ispatlanır. Özellik 6 için ispat ise

$$\begin{aligned} D_q[f \circ g](x) &= \frac{f(g(qx)) - f(g(x))}{qx - x} \\ &= \frac{f(g(qx)) - f(g(x))}{g(qx) - g(x)} \frac{g(qx) - g(x)}{qx - x} \\ &= D_{q,g}f(g(x))D_{q,x}g(x) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.10

$(x - a)^n$ polinomunun q -benzeri aşağıdaki şekildeki gibi tanımlanır.

$$(x - a)_q^n = \begin{cases} (x - a)(x - qa) \dots (x - q^{n-1}a) & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Yukardaki tanım özellikle q -Taylor serisinin tanımında faydalı olacaktır. Yalnız bu polinomun bir özelliğini vermekte fayda vardır. m ve n iki tam sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$(x - a)_q^{n+k} = (x - a)_q^n (x - q^n a)_q^k$$

İspatı ise

$$(x - a)_q^{n+k} = (x - a)(x - qa) \dots (x - q^{n-1}a)(x - q^n a) \dots (x - q^{n+k-1}a)$$

$$\begin{aligned}
&= ((x-a)(x-qa) \dots (x-q^{n-1}a))((x-q^na)(x-q(q^na)) \dots (x \\
&\quad - q^{k-1}(q^na)) \\
&= (x-a)_q^n (x-q^na)_q^k
\end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca $(x-a)^n$ nin başka bir özelliği ise

$$(a-x)_q^n \neq (-1)^n (x-a)_q^n$$

olmasıdır. Bunun yerine

$$(a-x)_q^n = (-1)^n q^{n(n-1)/2} (x-q^{1-n}a)_q^n$$

eşitliği geçerlidir.

Örnek 2.11

$(a-x)_q^n$ polinomunun q -türevini bulalım.

$$\begin{aligned}
D_q(a-x)_q^n &= D_q \left((-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (x-q^{1-n}a)_q^n \right) \\
&= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} [n]_q (x-q^{1-n}a)_q^{n-1} \\
&= (-1)(-1)^{n-1} [n]_q q^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (x-q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1} (-1)^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (x-q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1} (aq^{-1} - x)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q (a-qx)_q^{n-1}
\end{aligned}$$

Örnek 2.12

$(x-a)_q^n$, $n \geq 1$ için

$$D_q(x-a)_q^n = [n]_q (x-a)_q^{n-1}$$

bulunur. Çözümü için [10] bakılabilir.

Sonuç itibarıyla örnek 2.11 ve örnek 2.12 ye bakıldığında $D_q(x-a)_q^n \neq D_q(a-x)_q^n$ olmadığı görülür.

Şimdi de bir f fonksiyonun Taylor açılımının q -analizdeki karşılığını görelim.

Tanım 2.13 (q -Taylor Formülü)

$f(x)$, (a, b) aralığında sürekli bir fonksiyon ve $c \in [a, b]$ olsun. O halde q -Taylor formülü [10]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D_q^k[f(c)] \frac{(x-c)_q^k}{[k]_q!}$$

gösterilir.

Örnek 2.14

$f(x) = x^n$ fonksiyonunun $c = 1$ için q -Taylor gösterimini bulalım.

$$D_q f(x) = [n]_q x^{n-1}$$

$$D_q^2 f(x) = [n]_q [n-1]_q x^{n-2}$$

...

...

$$D_q^j f(x) = [n]_q [n-1]_q \dots [n-j+1]_q x^{n-j}$$

$$D_q^j f(1) = [n]_q [n-1]_q \dots [n-j+1]_q$$

olur. Buna göre $f(x)$ in $x = 1$ noktası civarındaki q -Taylor formülü

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{[n]_q [n-1]_q \dots [n-k+1]_q}{[k]_q!} (x-1)_q^k = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-1)_q^k$$

şeklinde olur.

Tanım 2.15

e^x exponansiyel fonksiyonunun q -Taylor açılımı 2 şekilde gösterilmektedir.

$$e_q^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!} \quad (2.5)$$

$$E_q^x = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{[k]_q!}$$

Bu iki q -exponansiyel fonksiyon eşitliğinden, ilerleyen bölümlerde (2.5) ifadesi kullanılacaktır.

Örnek 2.16

Klasik anlamda e^{nx} exponansiyel fonksiyonunun Taylor açılımı

$$e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k x^k}{k!}$$

dir ve bu seri $\mathbb{R}'$ de düzgün yakınsaktır. Şimdi yukardaki exponansiyel ifadenin q -türevine bakalım.

$$\begin{aligned} D_q[e^{nx}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} D_q[x^k] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{k!} [k]_q x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \frac{1-q^k}{1-q} x^{k-1} \\ &= n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^{k-1}}{k!} \frac{1-q^k}{1-q} \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{(k+1)!} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{(k+1)!} [k+1]_q! \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum $q \rightarrow 1$ yaklaşımı için klasik anlamdaki sonucu verir.

Tanım 2.17

q -Trigonometrik fonksiyonlar q -üstel fonksiyonların yardımıyla aşağıdaki şekildeki gibi tanımlanır.

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}, \quad \cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2i}$$

ve bunların q -türevleri

$$D_q[\sin_q ax] = \frac{\alpha}{1-q} \cos_q ax \text{ ve } D_q[\cos_q ax] = -\frac{\alpha}{1-q} \sin_q ax$$

şeklindedir.

2.2.1 q -İntegral

Tanım 2.18

$D_q F(x) = f(x)$ ise F' 'ye f nin q -karşıt türevi denir ve

$$\int f(x) d_q x$$

şeklinde gösterilir.

q -integralin tanımı 1910 yılında Jackson tarafından verilmiştir[1]. Buna göre f , $[0, a]$ aralığında sürekli olmak üzere $f(x)$ in bu aralıktaki belirli q -integrali

$$\int_0^a f(x) d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n - aq^{n+1}) = a(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(aq^n)$$

eşitliği ile tanımlanır. $0 < a < b$ keyfi sayılar olmak üzere

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x$$

şeklinde gösterilir. Burada $q \rightarrow 1$ iken limit durumunda

$$\lim_{q \rightarrow 1} \int_0^a f(x) d_q x = \int_0^a f(x) dx$$

elde edilir.

Örnek 2.19

$f(x) = x^n$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$\begin{aligned} \int x^n d_q x &= (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j q^{jn} x^n \\ &= (1-q)x^{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(n+1)} \\ &= \frac{1-q}{1-q^{n+1}} x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{[n+1]_q} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukardaki örnekte $n = 3$ ve $(0, \alpha)$ aralığında $f(x) = x^3$ fonksiyonu göz önüne alınırsa

$$\int_0^{\alpha} x^3 d_q x = \frac{(1-q)}{1-q^4} a^4$$

olur. Burada $q \rightarrow 1$ yaklaşımı yapılırsa

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(1-q)}{1-q^4} a^4 = \frac{a^4}{4}$$

klasik analizdeki

$$\int_0^{\alpha} x^3 dx = \frac{a^4}{4}$$

eşitiğine indirgenmiş olur.

Örnek 2.20

$f(x) = \ln(x)$ fonksiyonun $(0,1)$ aralığında q -integralini bulalım.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(x) d_q x &= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \ln(q^n) \\ &= (1-q) \frac{q \ln q}{(1-q)^2} \\ &= \frac{q \ln q}{1-q} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $|q| < 1$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = q \frac{d}{dq} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = q \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \frac{q}{(1-q)^2}$ ifadesini kullandık.

Tanım 2.21 (q -integralin temel teoremi)

$0 < a < b < \infty$ ve f fonksiyonunun bir karşıt türevi F olsun. $F, x = 0$ da sürekliyse,

$$\int_a^b f(x) d_q x = F(b) - F(a)$$

dir. Yukardaki eşitliğin bir sonucu olarak, $x = 0$ noktasının bir komşuluğunda $f'(x)$ varsa ve $x = 0$ da sürekli ise

$$\int_a^b D_q f(x) d_q x = f(b) - f(a)$$

dir.

ÇARPIMSAL ANALİZ

Bu bölümde çarpımsal analizin en temel kavramlarından olan çarpımsal türev ve çarpımsal integral kavramlarının tanımları, bazı özellikleri, türev ve integral alma kuralları verilecektir. Ayrıca bazı teorem ve uygulamaları gösterilmiştir. Çarpımsal analize ait daha kapsamlı bilgi için [4], [5], [6] bakılabilir.

3.1 Çarpımsal Türev

Öncelikli olarak çarpımsal türevi anlamamızı kolaylaştıracak olan klasik analizdeki türev tanımı ortaya koyalım ve aralarındaki bağı göstermeye çalışalım. Klasik türev

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.1)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Bu bağıntıda görüleceği üzere, herhangi bir fonksiyondaki değişim oranı, o fonksiyonun klasik türevi olarak ifade edilir. Aslında pek çok problemde ortaya çıkan bu değişim türev kavramı olarak ifade edilir. Şimdi bu değişimi günümüz problemlerinden bir uygulamayla açalım.

Diyelim ki bankaya yatırılan a liranın bir yıl sonra b lira olduğu düşünülürse, bir yıldaki paranın değişim oranı b/a olacaktır başka bir deyişle b/a kat değişmiş olacaktır. Şimdi bu paranın 1 ayda kaç kat değiştiğini bulalım. Bunun için bir aylık değişim tablosu yapalım. Burda aylık değişim oranı p olursa

$$1 \text{ aylık değişim} \rightarrow ap^1$$

$$2 \text{ aylık değişim} \rightarrow ap^2$$

...

12 aylık değişim $\rightarrow ap^{12}$

olur. Burada ki p değeri

$$p = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{12}}$$

olarak hesaplanır.

Bu sayede bankaya yatırılan günlük, saatlik, dakikalık v.s değiştiği ve farklı zamanlardaki anlık değerinin f fonksiyonu ile ifade edildiği düşünülürse, miktarın anlık x zamanda kaç kat değiştiği

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} \quad (3.2)$$

ifadesi kullanılarak elde edilebilir.

Eğer (3.2) ifadesi tanımlı ise, f fonksiyonunun x değişkenine bağlı *çarpımsal türevi* olarak adlandırılır ve $f^*(x)$ sembolü ile gösterilir. $A \subseteq \mathbb{R}$ açık kümelerindeki tüm x değerleri için $f^*(x)$ fonksiyonu $f^*(x): A \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. f nin pozitif bir fonksiyon olduğu varsayılarak çarpımsal türev

$$f^*(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} \quad (3.3)$$

yada düzenlenirse

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{\ln \left(\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(f(x + \Delta x)) - \ln(f(x))}{\Delta x}} \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Yukarıdaki ifadeden de görüleceği gibi çarpımsal türevin klasik türeve bağlı gösterimi

$$\begin{aligned} f^*(x) &= e^{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x + \Delta x)) - \ln(f(x))}{\Delta x}} \\ &= e^{\frac{d}{dx} \ln(f(x))} \\ &= e^{(\ln \circ f)'(x)} \end{aligned}$$

$$= e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\ln \circ f$ fonksiyonu logaritmik fonksiyon ile f fonksiyonunun bileşkesi olarak tanımlanır ve bazı kaynaklarda $\ln f$ olarak da geçmektedir. Biz çalışmamızda $\ln f$ gösterimini kullanacağız.

Teorem 3.1

Pozitif bir f fonksiyonu, ancak ve ancak, herhangi bir x_0 noktasında klasik anlamda diferansiyellenebilir ise yine aynı noktada çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir.

Teorem 3.2

Eğer f , x_0 noktasında çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir ise x_0 noktasında süreklidir.

Teorem 3.3

Eğer f^* fonksiyonun türevi varsa, f fonksiyonunun ikinci mertebeden çarpımsal türevi olarak isimlendirilir ve f^{**} ile gösterilir. Benzer şekilde n . dereceden çarpımsal türevi $f^{*(n)}$ notasyonu şeklinde gösterilir.

Ayrıca, f fonksiyonunun x noktasında ikinci mertebeden klasik türevi mevcut ise

$$f^{**}(x) = e^{(\ln f^*)'} = e^{(\ln f)''(x)}$$

dir. Burada $f''(x)$ var olduğu için $(\ln f)''$ de vardır. f pozitif bir fonksiyon ve f nin x noktasında n . mertebeden klasik türevi de varsa

$$f^{*(n)}(x) = e^{(\ln f)^{(n)}} \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilir. İşlem kolaylığı açısından çarpımsal türev için (3.2) bağıntısını kullanmaktansa (3.4) tercih edilebilir.

Teorem 3.4

Eğer pozitif bir f fonksiyonu x noktasında çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir ve klasik anlamda da diferansiyellenebilir ise

$$f'(x) = f(x) \ln f^*(x)$$

şeklinde klasik türev, çarpımsal türev cinsinden gösterilebilir.

Önerme 3.5

Üstel bir fonksiyonun çarpımsal türevi sabite eşittir.

İspat: Herhangi bir üstel fonksiyon $f(x) = Ab^x$ ve $b > 0$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{Ab^{(x+\Delta x)}}{Ab^x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (b^{\Delta x})^{1/\Delta x} = b \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Önerme 3.6

k sabit bir sayı olmak üzere $f(x) = kg(x)$ ise bu fonksiyonların çarpımsal türevleri $f^*(x) = g^*(x)$ eşitliği vardır.

Örnek 3.7

$f(x) = 5x^3$ ve $g(x) = 8x^3$ fonksiyonlarını ele alalım ve çarpımsal türevlerinin aynı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= e^{(\ln(5x^3))'} \\ &= e^{(\ln 5 + \ln x^3)'} \\ &= e^{3/x} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g^*(x) &= e^{(\ln 8x^3)'} \\ &= e^{(\ln 8 + \ln x^3)'} \\ &= e^{3/x} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f^*(x) = g^*(x)$ elde edilir.

3.1.1 Çarpımsal Türev Alma Kuralları

f ve g çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. λ bir sabit olmak üzere aşağıdaki eşitlikler verilebilir.

$$1) (\lambda f)^*(x) = f^*(x),$$

$$2) (fg)^*(x) = f^*(x)g^*(x),$$

$$3) (f + g)^*(x) = f^*(x)^{\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}} g^*(x)^{\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}},$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)^*(x) = \frac{f^*(x)}{g^*(x)},$$

$$5) (f^g)^*(x) = f^*(x)^{g(x)} f(x)^{g'(x)}$$

İspat: Yukardaki eşitliklerin 3. ve 5. ifadeler ispatlanacaktır. Benzer yaklaşımlarla diğer bağıntılarda kolaylıkla ispatlanabilir.

3. özellik için, f ve g çarpımsal diferansiyellenebilir fonksiyonlar olma üzere

$$\begin{aligned} (f + g)^*(x) &= e^{(\ln(f+g))'(x)} \\ &= e^{\frac{(f+g)'(x)}{f(x)+g(x)}} \\ &= e^{\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}} \\ &= f^*(x)^{\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}} g^*(x)^{\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}} \end{aligned}$$

bulunur.

5. özellik için, f ve g çarpımsal diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} (f^g)^*(x) &= e^{(g \ln f)'(x)} \\ &= e^{(g'(\ln f) + g(\ln f)')(x)} \\ &= e^{g'(x)(\ln f)(x) + g(x)(\ln f)'(x)} \\ &= e^{g'(x)(\ln f)(x)} e^{g(x)(\ln f)'(x)} \\ &= f^*(x)^{g(x)} f(x)^{g'(x)} \end{aligned}$$

bulunur.

Çarpımsal analiz avantajları olduğu kadar dezavantajları da mevcuttur. Örneğin $(f - g)^*(x)$ için formülün çarpımsal analizde zorlaştırıldığı söylenebilir. Bunun sebebi de çarpımsal analizin temel işlemlerinin çarpma ve onun ters işlemi bölme olmasıdır.

Tanım 3.8

$S \subset \mathbb{R}^+$ ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 1$ için

$$x \in S \text{ ve } \left| \frac{x}{a} \right|^* < \delta \text{ iken } \left| \frac{f(x)}{f(a)} \right|^* < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 1$ varsa f fonksiyonunun $a \in S$ noktasında çarpımsal süreklidir.

Önerme 3.9

Her $x \in (a, b)$ için ancak ve ancak $f^*(x) = 1$ olduğunda, (a, b) açık aralığında ki $f(x) = \lambda > 0$ sabit fonksiyon olur.

Şimdi çarpımsal türev için ortalama değer teoremini ifade edelim. Ortalama değer teoremi bilindiği üzere birçok matematiksel problemin çözümünde önemli bir yer tutar. Yalnız bunu gösterirken dikkat edilmesi gereken önemli kısımlardan bir tanesi klasik analizde yer alan "0" ın yerini çarpımsal analizde "1" in tutmasıdır.

Önerme 3.10

Pozitif f fonksiyonu için, ancak ve ancak, $f^*(x) = 1$ ise $f'(x) = 0$ olur.

İspat: Eğer $f'(x) = 0$ ise

$$f^*(x) = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = e^0 = 1$$

elde edilir. Eğer $f^*(x) = 1$ ise $f'(x) = 0$ için

$$e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = e^0$$

eşitliği elde edilebilir.

Teorem 3.11 (Çarpımsal Rolle Teoremi)

f fonksiyonu (a, b) aralığında çarpımsal diferansiyellenebilir olsun. Eğer pozitif f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $f(a) = f(b)$ ise

$$f^*(c) = 1$$

olacak şekilde (a, b) aralığında bir c sayısı vardır.

Teorem 3.12 (Çarpımsal Ortalama Değer Teoremi)

Eğer f , $[a, b]$ aralığında çarpımsal anlamda sürekli, pozitif ve (a, b) aralığında çarpımsal anlamda türevli bir fonksiyon ise (a, b) aralığındaki öyle bir c sayısı için

$$f^*(c) = \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{b-a}}$$

bağıntısı elde edilir.

3.2 Çarpımsal İntegral

Bu kısımda çarpımsal terstürev tanımı ile çarpımsal ve klasik terstürev arasındaki bağıntı verilecektir. Daha sonra çarpımsal belirli integral tanımlanacaktır ve bazı temel özellikleri ve çarpımsal integral alma kuralları ifade edilecektir.

Teorem 3.13

Her $x \in (a, b)$ için $g^*(x) = f(x)$ ise $g(x)$ fonksiyonuna, $f(x)$ fonksiyonunun bir çarpımsal terstürevi olduğu söylenebilir. Bu kavram için gösterim

$$\int f(x)^{dx} = g(x)$$

şeklinededir. Burada dikkat edilmesi gereken durumlardan biri diferansiyel " dx " gösterimi çarpım durumunda değil üstel durumdadır. Ayrıca klasik terstürevde nasıl ki daima keyfi bir sabit ekleme var olduğu gibi çarpımsal terstürevde de sabit bir çarpan vardır.

Teorem 3.14

Eğer f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında pozitif ve sürekli ise (a, b) açık aralığında çarpımsal anlamda integrallenebilir ve

$$\int_a^b f(x)^{dx} = e^{\int_a^b \ln(f(x)) dx}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.1 Çarpımsal İntegral Alma Kuralları

f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında çarpımsal anlamda integrallenebilir ve (a, b) aralığında pozitif ve sürekli olsunlar. O zaman $k \in \mathbb{R}$ ve $a \leq c \leq b$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonlar çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir ve çarpımsal integralleri

$$1) \int_a^b ((f(x))^k)^{dx} = \left(\int_a^b (f(x))^{dx} \right)^k$$

$$2) \int_a^b (f(x)g(x))^{dx} = \int_a^b (f(x))^{dx} \int_a^b (g(x))^{dx}$$

$$3) \int_a^b \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^{dx} = \frac{\int_a^b (f(x))^{dx}}{\int_a^b (g(x))^{dx}}$$

$$4) \int_a^b (f(x))^{dx} = \int_a^c (f(x))^{dx} \int_c^b (f(x))^{dx}, \quad a \leq c \leq b$$

dir.

Teorem 3.15 (Çarpımsal Analiz'in Temel Teoremi)

$f(x) > 0$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $F(x)$

$$F(x) = \int_a^b f(x)^{dx}, \quad a \leq x \leq b$$

olacak şekilde $[a, b]$ aralığında tanımlı olsun. Bu durumda F, f nin çarpımsal terstürevlerinden biri olur. Eğer $G(x)$, f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında herhangi bir terstürevi ise

$$\int_a^b f(x)^{dx} = \frac{G(b)}{G(a)}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.16 (Çarpımsal Kısmi İntegral)

$f: [a, b] \rightarrow R^+$ ve $g: [a, b] \rightarrow R^+$ çarpımsal diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Böylece f^g de çarpımsal diferansiyellenebilir ve aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\int_a^b (f^*(x)^{g(x)})^{dx} = \frac{f(b)^{g(b)}}{f(a)^{g(a)}} \frac{1}{\int_a^b (f(x)^{g'(x)})^{dx}}$$

q -ÇARPIMSAL ANALİZ

Bölüm 2 ve 3 de q -analiz ve çarpımsal analize dair temel bilgiler verildi. Bu bölümde ise tezimizin özgün kısmı olan, bu iki analiz arasındaki tanımlardan yola çıkılarak çarpımsal analizin q - benzeri(analog) yani ismini verdiğimiz q -çarpımsal analize ait tanım, teorem ve uygulamalar ifade edilecektir. Özellikle q -çarpımsal türev ve q -çarpımsal integral tanımları verilerek, çarpımsal analize ait birçok kavramın q -genişlemesi gösterilecektir. Bu tanımlara ait bilgiler için [9] incelenebilir.

4.1 q -Çarpımsal Türev

q -Çarpımsal türeve geçmeden önce (3.3) de ifade edilen çarpımsal türeve bir göz atalım

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} .$$

Klasik türev ile arasındaki farklılık, görüleceği üzerine $f(x + \Delta x) - f(x)$ aradaki fark yerine bölüm ifadesi $\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}$, ve payda da yer alan artım miktarıda, $1/\Delta x$ olarak üstel olarak gelmiştir. Bu benzerliklerden yola çıkılarak [9] da, yukardaki kavramların q -teorisiyle olan ilişkisi ortaya konmuştur.

Tanım 4.1 (q -Çarpımsal Türev)

$f(x)$ fonksiyonu pozitif ve $q \in (0,1)$ olsun. O halde çarpımsal türevin q -benzeri

$$D_q^*[f(x)] = \left(\frac{f(qx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad (4.1)$$

tanımlanır ve q -çarpımsal türev olarak adlandırılır. (4.1) ifadesi $S \subseteq \mathbb{R}$ açık kümesindeki her $x \in A$ için $D_q^*[f(x)]$ varsa $D_q^*[f(x)]: S \rightarrow \mathbb{R}$ olarak tanımlanır.

Bu tanımda klasik türevde yer alan $x + \Delta x$ yerine qx yani $x + \Delta x = qx$, ayrıca Δx yerine de payda da $qx - x = (q - 1)x$ ifadesi konmuştur. Dolayısıyla (4.1) ifadesinin üstel kısmından dolayı $x = 0$ noktasında diferansiyellenebilir olması gerekir. (4.1) ifadesine dikkat edilirse çarpımsal türevde yer alan fakat q -türev de bulunmayan limit kavramı mevcut değildir.

n . dereceden q -çarpımsal türev ise $D_q^{*(n)}[f(x)]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ yada $f_q^{*(n)}(x)$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca q -çarpımsal türev kısaca q^* türev olarak da ifade edilmektedir. Tanım 4.1 sayesinde q -çarpımsal analiz teorisine doğru adım adım ilerleyebiliriz. Aslında yapacağımız tanım ve teoremler çarpımsal analizin genişletilmiş hali olacaktır. Nasıl ki q -analizde $q \rightarrow 1$ durumu için klasik analize indirgenmektedir aynı şekilde q -çarpımsal analizde de çarpımsal analize indirgenmektedir. Şimdi q -çarpımsal türev tanımını kullanarak çarpımsal analizin temel kavramların q -benzerlerini ifade edelim.

Teorem 4.2

$q \in (0, 1)$ ve $f(x)$ fonksiyonu q -diferansiyellenebilen pozitif bir fonksiyon olsun.

O halde $f(x)$ in q -çarpımsal türevi

$$D_q^*[f(x)] = e_q^{D_q[\ln f(x)]} \quad (4.2)$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: (4.1) ifadesini kullanarak

$$\begin{aligned} D_q^*[f(x)] &= e_q^{\ln \left(\left(\frac{f(qx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{q-1}} \right)} \\ &= e_q^{\frac{1}{(q-1)x} \ln \left(\frac{f(qx)}{f(x)} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e_q^{\frac{\ln f(qx) - \ln f(x)}{(q-1)x}} \\
&= e_q^{D_q[\ln f(x)]}
\end{aligned}$$

bulunur.

Açıkça görülmektedir ki, (4.1) de verilen q -çarpımsal türevin genel tanımından problemleri çözmeye çalışmak, bazı durumlarda işlemlerin zorlaşmasına sebep olabilir. Bu yüzden (4.2) ifadesini kullanmak problem çözümünde daha kolaylık sağlayacaktır. Aynı zamanda (4.2) ifadesinde yer alan $\ln f(x)$, fonksiyonun pozitif olması gerektiğini açıkça göstermektedir.

(4.2) kullanılarak, (4.1) ifadesinde $q \rightarrow 1$ yaklaşımı uygulanırsa

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q^*[f(x)] = \lim_{q \rightarrow 1} e_q^{D_q[\ln f(x)]} = e_q^{\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln f(qx) - \ln f(x)}{(q-1)x}}$$

ve üstel kısımda yer alan belirsizliği yok etmek için L'Hopital kuralından

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q^*[f(x)] = e_q^{\frac{(q-1)f'(x)}{(q-1)f(x)}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = f^*(x)$$

klasik anlamda ki çarpımsal türeve indirgenmektedir.

Ayrıca gözardı edilmemesi gereken bir başka durum ise $f(x)$ pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$D_q^*[f(x)] = e_q^{D_q[\ln f(x)]} \neq e_q^{\frac{D_q[f(x)]}{f(x)}}$$

eşitsizliği vardır. Örneğin $f(x) = x$ fonksiyonun q -çarpımsal türevi

$$D_q^*[f(x)] = e_q^{D_q[\ln f(x)]} = e_q^{\frac{\ln q}{(q-1)x}}$$

olmasına karşın

$$e_q^{\frac{D_q[x]}{x}} = e_q^{\frac{1}{x}}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.3

$q \in (0,1)$ ve $f(x)$ fonksiyonu pozitif bir fonksiyon olsun. O halde $f(x)$ in n . dereceden q -çarpımsal türevi

$$D_q^{*(n)}[f(x)] = e_q^{D_q^{(n)}[\ln f(x)]} \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

dir.

İspat: Teorem 4.2 kullanarak $f(x)$ in 2. dereceden q -çarpımsal türevini bulalım. Buna göre

$$\begin{aligned} D_q^{**}[f(x)] &= e_q^{D_q[\ln(e_q^{D_q[\ln f(x)]})]} \\ &= e_q^{D_q[D_q[\ln f(x)]]} \\ &= e_q^{D_q^2[\ln f(x)]} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de 3. dereceden q -çarpımsal türevini bulalım.

$$\begin{aligned} D_q^{*(3)}[f(x)] &= e_q^{D_q[\ln(e_q^{D_q^2[\ln f(x)]})]} \\ &= e_q^{D_q[D_q^2[\ln f(x)]]} \\ &= e_q^{D_q^3[\ln f(x)]} \end{aligned}$$

Bu işlemlere n kez tekrar edildiği takdirde, $f(x)$ in x noktasında n . mertebeden q -çarpımsal türevi varsa

$$D_q^{*(n)}[f(x)] = e_q^{D_q^{(n)}[\ln f(x)]}$$

elde edilir.

Teorem 4.4

$q \in (0,1)$ ve $f(x)$ pozitif fonksiyon olsun. O halde

$$D_q^{*(n)}[f(x)] = e_q^{(q-1)^{-n}x^{-n}q^{-\binom{n}{2}}\sum_{k=0}^n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q(-1)^kq^{\binom{k}{2}}\ln f(q^{n-k}x)},$$

dir.

İspat: Tanım 2.7 kullanılarak ifadenin ispatı kolaylıkla gösterilebilir.

q -Türev tanımına bakıldığında klasik analizle ilgili olarak sadece $x = 0$ noktasındaki türevi $D_q f(0) = f'(0)$ olduğu görülmektedir. İşte bu ilişkiden yola çıkarak q -çarpımsal türev ile klasik türev arasındaki bağıntıyı $x = 0$ noktası için inceleyelim.

Teorem 4.5

$q \in (0,1)$ ve $f(x)$ pozitif fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında n . dereceden q -çarpımsal türevi

$$D_q^{*(n)}[f(0)] = e_q^{\frac{[n]_q! f^{(n)}(0)}{n! f'(0)}}$$

dir.

İspat: Teorem 4.4 den

$$\begin{aligned} D_q^{*(n)}[f(0)] &= \lim_{x \rightarrow 0} e_q^{(q-1)^{-n}x^{-n}q^{-\binom{n}{2}}\sum_{k=0}^n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q(-1)^kq^{\binom{k}{2}}\ln f(q^{n-k}x)} \\ &= e_q^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q(-1)^kq^{\binom{k}{2}}\ln f(q^{n-k}x)}{(q-1)^n x^n q^{\binom{n}{2}}}} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0}$ olduğu için L'Hôpital kuralını n kez uygulayalım. O halde

$$\begin{aligned} D_q^{*(n)}[f(0)] &= e_q^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q(-1)^kq^{\binom{k}{2}}q^{n(n-k)}f^{(n)}(q^{n-k}x)}{(q-1)^n n! q^{\binom{n}{2}} f(q^{n-k}x)}} \\ &= e_q^{\frac{(-1)^n(1-q^n)(q-q^n)(q-q^{2n})\dots(q^{n-1}-q^n)f^{(n)}(0)}{(q-1)^n n! q^{\binom{n}{2}} f(0)}} \\ &= e_q^{\frac{[n]_q! f^{(n)}(0)}{n! f(0)}} \end{aligned}$$

bulunur.

Özel bir durum $n = 1$ değeri için yukardaki ifadeden

$$f_q^*(x) = e^{\frac{f'(0)}{f(0)}} \rightarrow f'(0) = f(0) \ln f_q^*(0)$$

şeklinde klasik türevin q -çarpımsal türev cinsinden ifadesine ulaşılır.

Örnek 4.6

$f(x)$ üstel fonksiyonu için

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

düşünelim. $\mathbb{R}$ üzerinde $f(x)$ fonksiyonun n kez diferansiyeli ele alındığı takdirde Teorem 4.4 den

$$D_q^{*(n)}[f(x)] = \frac{(-1)^{n+1} [n+1]_q!}{q^{\binom{n}{2}} x^{n+2}}$$

bulunur. Fakat burda özellikle üzerinde durmak istediğimiz kısım, sonsuz kez diferansiyeli alındığında $x \neq 0$ durumunda ispatlamak kolay olmakla birlikte, $x = 0$ durumunda $f(x)$ fonksiyonunun türevinin sıfır olduğunu göstermenin bir o kadar zor olduğudur. İşte burda q -çarpımsal türevin avantajını kullanarak bunu göstermeye çalışalım. Teorem 4.5 den

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{[n]_q!} f(0) \ln D_q^{*(n)}[f(0)]$$

yazılabilir. Dolayısıyla $f(0) = 0$ olduğundan dolayı $f^{(n)}(0) = 0$ denilebilir ve doğruluğu gösterilmiş olur.

Teorem 4.6

$q \in (0,1)$ ve $f(x)$ pozitif fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında q -diferansiyeli varsa yine $x_0 = 0$ noktasında q -çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir.

İspat: $f(x)$ fonksiyonu pozitif ve $x_0 = 0$ noktasında q -çarpımsal diferansiyellenebilir olsun. O halde (4.2) bağıntısından $\ln f(x)$ de $x_0 = 0$ noktasında q -diferansiyeli vardır. Böylelikle $f(x)$ fonksiyonu da $x_0 = 0$ noktasında q -diferansiyeli mevcut olur. Diğer

tarafdan $f(x)$, $x_0 = 0$ noktasında q -diferansiyeli varsa aynı zamanda $\ln f(x)$ in q -diferansiyeli vardır ve dolayısıyla (4.2) bağıntısındaki $e_q^{D_q[\ln f(x)]}$ gerçekleşir olup, $f(x)$ q -çarpımsal diferansiyeli mevcut olur.

Not: Teorem 4.6 de özellikle $x_0 = 0$ noktası alınmıştır. Çünkü q -diferansiyel tanımına bakıldığında $x = 0$ için $f'(0)$ varsa o fonksiyonun q -diferansiyeli mevcut olmaktadır. Ayrıca teorem 4.6 ispatında geçen q -diferansiyel kavramının varlığı aslında klasik analizden bildiğimiz $f'(0)$ ifadesinin varlığı ile ilgilidir.

4.1.1 q -Çarpımsal Türev Alma Kuralları

Bu bölüme kadar q -çarpımsal türev ile ilgili genel tanımlar verildi. Şimdi ise q -çarpımsal türeve ait bazı kurallar ispatları ile birlikte verilecektir. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları q -diferansiyellenebilir ve α, β da pozitif sabitler olsun. O halde aşağıdaki fonksiyonların q -çarpımsal türevleri

- 1)Sabit kuralı : $D_q^*[\alpha f(x)] = D_q^*[f(x)]$,
- 2)Çarpım kuralı: $D_q^*[f(x)g(x)] = D_q^*[f(x)]D_q^*[g(x)]$,
- 3)Bölüm kuralı : $D_q^*[f(x)/g(x)] = D_q^*[f(x)]/D_q^*[g(x)]$,
- 4)Zincir kuralı : $D_q^*[(f \circ g)(x)] = (D_{q,g}[f(g(x))])^{g_q(x)}$,
- 5)Kuvvet Kuralı : $D_q^*[f(x)^{g(x)}] = (D_q^*[f(x)])^{g_q(x)} f(x)^{D_q[g(x)]}$.

şeklindedir.

İspat:

1. f fonksiyonu q -çarpımsal diferansiyellenebilir fonksiyon ve α bir sabit olsun. O halde

$$\begin{aligned} D_q^*[\alpha f(x)] &= \left[\frac{\alpha f(qx)}{\alpha f(x)} \right]^{\frac{1}{qx-x}} \\ &= \left[\frac{f(qx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{qx-x}} \\ &= D_q^*[f(x)] \end{aligned}$$

bulunur.

2. f ve g fonksiyonu q -çarpımsal diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. O halde

$$\begin{aligned}
D_q^*[f(x)g(x)] &= e^{D_q[\ln(f(x)g(x))]} \\
&= e^{D_q[\ln f(x)] + D_q[\ln g(x)]} \\
&= e^{D_q[\ln f(x)]} e^{D_q[\ln g(x)]} \\
&= D_q^*[f(x)] D_q^*[g(x)]
\end{aligned}$$

bulunur.

3. f ve g fonksiyonu q -çarpımsal diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. O halde

$$\begin{aligned}
D_q^*\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= e^{D_q\left[\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\right]} \\
&= e^{D_q[\ln f(x)] - D_q[\ln g(x)]} \\
&= e^{D_q[\ln f(x)]} e^{-D_q[\ln g(x)]} \\
&= \frac{e^{D_q[\ln f(x)]}}{e^{D_q[\ln g(x)]}} \\
&= \frac{D_q^*[f(x)]}{D_q^*[g(x)]}
\end{aligned}$$

bulunur.

4. f ve g fonksiyonu q -çarpımsal diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. O halde

$$\begin{aligned}
D_q^*[(f \circ g)(x)] &= \left(\frac{f(g(qx))}{f(g(x))}\right)^{\frac{1}{qx-x}} \\
&= \left(\frac{f(g(qx))}{f(g(x))}\right)^{\frac{1}{g(qx)-g(x)} \frac{g(qx)-g(x)}{qx-x}} \\
&= D_{q,g}[f(g(x))]^{g_q(x)}
\end{aligned}$$

bulunur.

5. f ve g fonksiyonu q -çarpımsal diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. O halde

$$\begin{aligned}
D_q^*[f(x)^{g(x)}] &= e^{D_q[\ln(f(x)^{g(x)})]} \\
&= e^{D_q[g(x)\ln f(x)]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e_q^{g(qx)D_q[\ln f(x)] + \ln f(x)D_q[g(x)]} \\
&= e_q^{g(qx)D_q[\ln f(x)]} e_q^{\ln f(x)D_q[g(x)]} \\
&= (D_q^*[f(x)])^{g(qx)} f(x)^{D_q[g(x)]}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.7

$f(x)$ ve $g(x)$ iki fonksiyon olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$D_q^{*(n)}[f(x)g(x)] = e_q^{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q D_q^k[\ln f(q^{n-k}x)] D_q^{n-k}[g(x)]} \quad (4.4)$$

dir.

İspat: Öncelikle (4.4) ifadesindeki eşitlik için 1. mertebe q -çarpımsal türevini bulalım.

$$\begin{aligned}
D_q^*[f(x)g(x)] &= e_q^{D_q[\ln(f(x)g(x))]} \\
&= e_q^{D_q[g(x)\ln f(x)]} \\
&= e_q^{\ln f(qx)D_q[g(x)] + g(x)D_q[\ln f(x)]}
\end{aligned}$$

Şimdide 2.mertebeden q -çarpımsal türevi için

$$\begin{aligned}
D_q^{**}[f(x)g(x)] &= e_q^{D_q[\ln f(qx)D_q[g(x)] + g(x)D_q[\ln f(x)]]} \\
&= e_q^{\ln f(q^2x)D_q^2[g(x)] + [2]_q D_q[g(x)]D_q[\ln f(qx)] + g(x)D_q^2[\ln f(x)]}
\end{aligned}$$

3.mertebe türevi için

$$\begin{aligned}
D_q^{*(3)}[f(x)g(x)] &= e_q^{D_q[\ln f(q^2x)D_q^2[g(x)] + [2]_q D_q[g(x)]D_q[\ln f(qx)] + g(x)D_q^2[\ln f(x)]]} \\
&= e_q^{\ln f(q^3x)D_q^3[g(x)] + [3]_q D_q[g(x)]D_q^2[\ln f(qx)] + [3]_q D_q^2[g(x)]D_q[\ln f(q^2x)] + g(x)D_q^3[\ln f(x)]}
\end{aligned}$$

bulunur. Aynı işlemler n kez tekrar edildiği takdirde

$$D_q^{*(n)}[f(x)g(x)] = e_q^{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q D_q^k[\ln f(q^{n-k}x)] D_q^{n-k}[g(x)]}$$

elde edilir.

Örnek 4.8

$f(x) = [\alpha]_q \lambda^x$ ve $\lambda > 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun q -çarpımsal türevini bulalım.

$$\begin{aligned} D_q^*[f(x)] &= e_q^{D_q[\ln[\alpha]_q \lambda^x]} \\ &= e_q^{D_q[\ln \lambda^x]} \\ &= e_q^{\ln \lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Bu örnekte görüleceği üzere, üstel bir fonksiyonun q -çarpımsal türevinden sabit elde edilmektedir. Bu sabite aynı zamanda q -çarpımsal analiz de, çarpımsal oran olarak ifade edilebiliriz yada başka bir tabirle λ ya, birim zamandaki çarpımsal faktör denilebilir.

Önerme 4.9

$f(x) = [\alpha]_q \lambda^x$ ve $\lambda > 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonu için

$$f(x+1) = D_q^*[f(x)]f(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Örnek 4.8 den $f(x) = [\alpha]_q \lambda^x$ olduğundan $D_q^*[[\alpha]_q \lambda^x] = \lambda$ olur. Dolayısıyla

$$f(x+1) = [\alpha]_q \lambda^{x+1} = [\alpha]_q \lambda^x \lambda = f(x) D_q^*[f(x)]$$

elde edilir.

Örnek 4.10

$f(x) = [5]_q e^x$ olsun. f üstel bir fonksiyon olduğu için yukardaki önerme ve örnekten

$$f(x+1) = D_q^*[f(x)]f(x) = e \cdot [5]_q e^x = [5]_q e^{x+1}$$

bulunur.

Önerme 4.11

$f(x)$ ve $g(x)$ iki pozitif fonksiyon olmak üzere eğer bir fonksiyon diğerinin sabit bir çarpımına eşitse yani $f(x) = \lambda g(x)$ ise

$$D_q^*[f(x)] = D_q^*[g(x)]$$

bağıntısı sağlanır.

İspat: $f(x) = \lambda g(x)$ olsun. O halde q -çarpımsal türev tanımından

$$\begin{aligned} D_q^*[f(x)] &= \left(\frac{f(qx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{qx-x}} \\ &= \left(\frac{\lambda g(qx)}{\lambda g(x)} \right)^{\frac{1}{qx-x}} \\ &= \left(\frac{g(qx)}{g(x)} \right)^{\frac{1}{qx-x}} \\ &= D_q^*[g(x)] \end{aligned}$$

İspat tamamlanmış olur.

Örnek 4.12

$f(x) = 5x^2$ ve $g(x) = 8x^2$ fonksiyonlarının q -çarpımsal türevlerini inceleyelim.

$$\begin{aligned} D_q^*[f(x)] &= \left(\frac{5q^2x^2}{5x^2} \right)^{\frac{1}{qx-x}} \\ &= q^{\frac{2}{(q-1)x}} \end{aligned}$$

ve $g(x)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} D_q^*[g(x)] &= \left(\frac{8q^2x^2}{8x^2} \right)^{\frac{1}{qx-x}} \\ &= q^{\frac{2}{(q-1)x}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$D_q^*[f(x)] = D_q^*[g(x)]$$

dir.

Önerme 4.13

$f(x) = \lambda > 0$ ve her $x \in (a, b)$ için ancak ve ancak $D_q^*f(x) = 1$ olduğunda (a, b) aralığında sabit bir fonksiyon olur.

İspat: (a, b) aralığında $f(x) = \lambda > 0$ olsun. O halde

$$D_q^*f(x) = e^{D_q[\ln \lambda]} = e^0 = 1, \quad x \in (a, b)$$

dir. Tersi olarak, her $x \in (a, b)$ için

$$D_q^* f(x) = 1$$

İse

$$D_q^* f(x) = e^{D_q[\ln f(x)]} = 1$$

dir. Buradan

$$D_q[\ln f(x)] = 0 \text{ ve } f(x) = \lambda > 0 \text{ olduğu aşıkardır.}$$

Aşağıdaki tabloda sıklıkla kullanılan bazı fonksiyonlar için çarpımsal ve q -çarpımsal türevleri verildi. Bu eşitlikler incelendiğinde, bazı fonksiyonların türevlerinin birbirine eşit olduğu da gözlemlenmektedir.

Çizelge 4. 1 Bazı fonksiyonların çarpımsal ve q -çarpımsal türevleri

$f(x)$	$f^*(x)$	$f_q^*(x)$
k	1	1
ke^{nx}	e^k	$e_q^{[k]_q}$
kb^x	b	b
kx^n	$e^{\frac{1}{x}}$	$e_q^{\frac{[k]_q \ln q}{(q-1)x}}$
$ke^{g(x)}$	$(g^*(x))^{g(x)}$	$e_q^{g_q(x)}$
$\frac{1}{g(x)}$	$\frac{1}{g^*(x)}$	$\frac{1}{g_q^*(x)}$
$cg(x)^k$	$(g^*(x))^k$	$(g_q^*(x))^k$
$(g(x))^{h(x)}$	$(g^*(x))^{h(x)} (g(x))^{h'(x)}$	$(g_q^*(x))^{h(qx)} (g(x))^{h_q(x)}$
$e^{\sin \alpha x}$	$e^{\alpha \cos \alpha x}$	$e_q^{\frac{\alpha}{1-q} \cos \alpha x}$

Çizelge 4. 2 Bazı fonksiyonların çarpımsal ve q -çarpımsal türevleri (Devamı)

$e^{\cos \alpha x}$	$e^{\alpha \sin \alpha x}$	$e_q^{-\frac{\alpha}{1-q} \sin \alpha x}$
---------------------	----------------------------	---

Şimdi de, q -çarpımsal analiz de sürekli fonksiyonların bazı özelliklerini ifade edelim. Öncelikle lokal ekstremum noktalarının komşuluğunda q -çarpımsal türevin davranışlarının nasıl olduğu aşağıdaki teoremlerde görebiliriz. q -Analize ait yerel maksimum ve minimum nokta için ayrıca [11] incelenebilir.

Teoremlere geçmeden önce Çarpımsal analize ait bir hususu ifade etmekte fayda vardır. Klasik analizdeki 0 sayısının rolünü çarpımsal analizde 1 sayısı üstlenmektedir.

Önerme 4.14

$f(x)$ pozitif fonksiyonu için ancak ve ancak $D_q^* f(x) = 1$ ise $D_q f(x) = 0$ dir.

İspat: $D_q^* f(x) = 1$ ise

$$D_q^* f(x) = e^{D_q[\ln f(x)]} = 1 = e^0$$

$$D_q[\ln f(x)] = 0$$

$$\frac{\ln f(qx) - \ln f(x)}{qx - x} = 0$$

$$\frac{f(qx)}{f(x)} = e^0 = 1$$

$$f(qx) - f(x) = 0 \rightarrow \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} = 0 \rightarrow D_q f(x) = 0$$

bulunur. Şimdi de tersinden $D_q f(x) = 0$ olsun. O halde

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} = 0$$

$$f(qx) - f(x) = 0$$

$$\frac{f(qx)}{f(x)} = 1$$

$$\ln \frac{f(qx)}{f(x)} = \ln 1 = 0$$

$$D_q^* f(x) = e^{D_q \ln f(x)} = e^{\frac{1}{qx-x} \ln \frac{f(qx)}{f(x)}}$$

$$D_q^* f(x) = e^{\frac{1}{qx-x} \ln 1} = e^0 = 1$$

bulunur.

Teorem 4.15

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $c \in (a, b)$ de yerel maksimum nokta olsun. O halde

i. $0 < a < b$ olmak üzere eğer $\mu \in (0,1)$ varsa, o halde

$$D_q^*[f(c)] \begin{cases} \geq 1 & \forall q \in (\mu, 1) \\ \leq 1 & \forall q \in (1, \mu^{-1}) \end{cases}$$

dir.

ii. $a < b < 0$ olmak üzere eğer $\mu \in (0,1)$ varsa, o halde

$$D_q^*[f(c)] \begin{cases} \leq 1 & \forall q \in (\mu, 1) \\ \geq 1 & \forall q \in (1, \mu^{-1}) \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla $(\forall q \in (\mu, \mu^{-1}))(\exists \xi \in (a, b)) : D_q^*[f(\xi)] = 1$ dir.

İspat: i ve ii eşitliklerinin ispatları benzer olduğu için yalnızca ilkinin göstereceğiz. $c \in (a, b)$, $f(x)$ fonksiyonunun maksimum noktası olduğundan $\varepsilon > 0$ vardır. Dolayısıyla $f(x) \leq f(c)$ ifadesi bütün $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset (a, b)$ için yazılabilir. Farz edelim ki $0 < a < b$, $q_0 \in (0,1)$ olsun o halde $c - \varepsilon < q_0 < c$ dir. Bütün $q \in (q_0, 1)$ için $qc < c$ ve $\frac{1}{qc-c} < 0$ geçerlidir.

$$\frac{f(qc)}{f(c)} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{f(qc)}{f(c)} \right)^{\frac{1}{qc-c}} \geq 1^{\frac{1}{qc-c}} = 1 \quad (4.5)$$

$$D_q^*[f(c)] \geq 1.$$

Benzer şekilde $q_1 \in (0,1)$ için $c < \frac{c}{q_1} < c + \varepsilon$ yazılabilir ve öyle ki bütün $q \in (1, q_1^{-1})$

için $qc > c \Rightarrow \frac{1}{qc-c} > 0$ geçerlidir.

$$\frac{f(qc)}{f(c)} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{f(qc)}{f(c)} \right)^{\frac{1}{qc-c}} \leq 1^{\frac{1}{qc-c}} = 1 \quad (4.6)$$

$$D_q^*[f(c)] \leq 1$$

Sonuç itibariyle , $\mu = \max\{q_0, q_1\}$ elde edilir.

Şimdi de $c \in (a, b)$, $f(x)$ fonksiyonunun maksimum noktası olsun.

$a < b < 0$, $q_2 \in (0,1)$ için $cq_2 \in (c, c + \varepsilon)$ vardır. Bütün $q \in (q_2, 1)$ için $qc > c \Rightarrow \frac{1}{qc-c} > 0$ geçerlidir.

$$\frac{f(qc)}{f(c)} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{f(qc)}{f(c)} \right)^{\frac{1}{qc-c}} \leq 1^{\frac{1}{qc-c}} = 1 \quad (4.7)$$

$$D_q^*[f(c)] \leq 1$$

Benzer şekilde $q_3 \in (0,1)$ için $c - \varepsilon < \frac{c}{q_3} < c$ yazılabilir ve öyle ki bütün $q \in (1, q_3^{-1})$ için $qc < c \Rightarrow \frac{1}{qc-c} < 0$ geçerlidir.

$$\frac{f(qc)}{f(c)} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{f(qc)}{f(c)} \right)^{\frac{1}{qc-c}} \geq 1^{\frac{1}{qc-c}} = 1 \quad (4.8)$$

$$D_q^*[f(c)] \geq 1$$

Sonuç itibariyle , $\mu = \max\{q_2, q_3\}$ elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu c noktasında türevi mevcut olduğundan sağdan ve soldan q -çarpımsal türevi birbirine eşittir.(4.5) – (4.8) ifadelerini gözününe alırsak

$$c \in (a, b), \quad D_q^*[f(c)] \geq 1, \quad D_q^*[f(c)] \leq 1 \quad \Rightarrow \quad D_q^*[f(c)] = 1$$

elde edilir.

Teorem 4.16

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $c \in (a, b)$ de yerel minumum nokta olsun. O halde

i. $0 < a < b$ olmak üzere eğer $\mu \in (0,1)$ varsa, o halde

$$D_q^*[f(c)] \begin{cases} \leq 1 & \forall q \in (\mu, 1) \\ \geq 1 & \forall q \in (1, \mu^{-1}) \end{cases}$$

dir.

ii. $a < b < 0$ olmak üzere eğer $\mu \in (0,1)$ varsa, o halde

$$D_q^*[f(c)] \begin{cases} \geq 1 & \forall q \in (\mu, 1) \\ \leq 1 & \forall q \in (1, \mu^{-1}) \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla $(\forall q \in (\mu, \mu^{-1}))(\exists \xi \in (a, b)) : D_q^*[f(\xi)] = 1$ dir.

İspat: Teorem 4.15 ispatından faydalananarak benzer şekilde yapılabilir.

Not: Daha önce ifade edildiği üzere f fonksiyonu $x \in (a, b)$ de diferansiyellenebilir ise $\lim_{q \rightarrow 1} D_q^*[f(x)] = f^*(x)$ dir. O halde $c \in (a, b)$ noktası f fonksiyonunun yerel ekstremum noktası için $f^*(c) = D_1^*[f(c)] = 1$ dir.

Örnek 4.17

$f(x) = -x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunu düşünelim.

$f(x)$ fonksiyonunun maksimum noktası $c = 2$ dir. Teorem 4.15 den q -çarpımsal türevinin 1 olması için

$$D_q^*f(x) = \left(\frac{-q^2x^2 + 4qx - 1}{-x^2 + 4x - 1} \right)^{\frac{1}{qx-x}} = 1$$

$$\left(\frac{-q^2x^2 + 4qx - 1}{-x^2 + 4x - 1} \right) = 1^{qx-x}$$

$$-q^2x^2 + qx - 1 = -x^2 + 4x - 1$$

$$x^2(1 - q^2) = 4x(1 - q)$$

$$x = \frac{4}{1+q}$$

elde edilir. Dolayısıyla q -çarpımsal anlamda maksimum nokta için $D_q^*[f(\xi)] = 1$ eşitliğinden

$$\xi = \frac{4}{1+q}$$

elde edilir. O halde $\mu \in (0,1)$ olmak üzere $\mu = 1/3$ olsun. Dolayısıyla $q = \frac{3}{4} \in (\mu, 1)$ için q -çarpımsal türev ifadesinden

$$D_{\frac{3}{4}}^*[f(2)] = \left(\frac{-\left(\frac{3}{4}\right)^2 2^2 + 4\frac{3}{4}2 - 1}{-2^2 + 4x2 - 1} \right)^{\frac{1}{\frac{3}{4}2-2}} = 1.19$$

ve

$$\xi = \frac{4}{1+q} = \frac{4}{1+(3/4)} = \frac{16}{7} = 2.28$$

bulunur. Sonuç itibariyle $q = 3/4$ değeri için örneğimiz $D_{\frac{3}{4}}^*[f(2)]$ ifadesinin karşılığı olarak 1.19 değerini üretti. Bu örneği klasik q -analiz yerel maksimum teorisi ile ve q nun yine aynı değeriyle yapıldığında yani $D_{\frac{3}{4}}f(2)$ olarak bulunduğunda sonuç 0.5 değerini vermektedir. Bu iki ayrı sonuç için q -analiz için extremum noktalar bulmada 1.türev karşılığı 0 a eşitlenirken [11], q -çarpımsal analizde ise Teorem 4.15 ifade edildiği gibi 1 eşitlenmektedir.

Teorem 4.18 (q -Çarpımsal Rolle)

$f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $f(a) = f(b)$ olsun. O halde $\mu \in (0,1)$ için

$$(\forall q \in (\mu, \mu^{-1}))(\exists \xi \in (a, b)) : D_q^*[f(\xi)] = 1$$

dir.

İspat: Eğer $f(x)$ sabit bir fonksiyon ise $D_q^*[f(x)] = 1$ elde edilir. $f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında bir ekstremum noktaya sahip olduğu takdirde ise teorem 4.15 ve teorem

4.16 göre kolaylıkla

$$\xi \in (a, b) \text{ için } D_q^*[f(\xi)] = 1 \text{ bulunur.}$$

Teorem 4.19 (q -Çarpımsal Ortalama Değer Teoremi)

$f(x)$ fonksiyonu kapalı $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve açık (a, b) aralığının her noktasında q -çarpımsal diferansiyeli mevcut olsun. O halde $\mu \in (0,1)$ için

$$(\forall q \in (\mu, \mu^{-1}))(\exists \xi \in (a, b)) : D_q^*[f(\xi)] = \left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

dir.

İspat: $G(x)$ fonksiyonu

$$G(x) = \frac{f(x)}{f(a)} \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{\frac{x-a}{b-a}} \quad \forall x \in [a, b]$$

$[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında q -çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca $G(a) = G(b)$ olduğu kolaylıkla görülmektedir. Rolle teoremi hipotezine göre $\xi \in (a, b)$ için $D_q^*[G(\xi)] = 1$ dir. Şimdi $G(x)$ fonksiyonun q -çarpımsal türevini alalım.

$$D_q^*[G(x)] = D_q^*[f(x)] \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

bulunur. $D_q^*[G(\xi)] = 1$ ifadesini yukarda yerine yazdığımız takdirde

$$1 = D_q^*[f(\xi)] \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

$$D_q^*[f(\xi)] = \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

elde edilir.

Önerme 4.20

$f(x)$, (a, b) aralığında q -çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\mu \in (0, 1)$ olmak üzere

1. $\forall q \in (\mu, \mu^{-1})$, $\xi \in (a, b)$ için $D_q^*[f(\xi)] > 1$ ise f artan bir fonksiyondur.
2. $\forall q \in (\mu, \mu^{-1})$, $\xi \in (a, b)$ için $D_q^*[f(\xi)] \geq 1$ ise f monoton artan bir fonksiyondur.
3. $\forall q \in (\mu, \mu^{-1})$, $\xi \in (a, b)$ için $D_q^*[f(\xi)] < 1$ ise f azalan bir fonksiyondur.

4. $\forall q \in (\mu, \mu^{-1})$, $\xi \in (a, b)$ için $D_q^*[f(\xi)] \leq 1$ ise f monoton azalan bir fonksiyondur.

İspat:

1. $x_1, x_2 \in (a, b)$ ve $x_1 < x_2$ şeklinde seçelim. $f(x)$, $[x_1, x_2]$ aralığında sürekli ve q -çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere Teorem 4.19 deki q -çarpımsal ortalama değer teoreminden ($\exists \xi \in (x_1, x_2)$) için

$$(D_q^*[f(\xi)])^{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$$

bulunur. $D_q^*[f(\xi)] > 1$ olduğundan

$$\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} > 1 \quad \rightarrow \quad \frac{f(x_2)}{f(x_1)} > 1$$

dolyısıyla

$$f(x_2) > f(x_1)$$

elde edilir.

2. $x_1, x_2 \in (a, b)$ ve $x_1 < x_2$ şeklinde seçelim. $f(x)$, $[x_1, x_2]$ aralığında sürekli ve q -çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere Teorem 4.19 deki q -çarpımsal ortalama değer teoreminden ($\exists \xi \in (x_1, x_2)$) için ve $D_q^*[f(\xi)] \geq 1$ olduğundan

$$\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} \geq 1 \quad \rightarrow \quad \frac{f(x_2)}{f(x_1)} \geq 1$$

olur ve sonuç itibariyle

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$

elde edilir.

3. $x_1, x_2 \in (a, b)$ ve $x_1 < x_2$ şeklinde seçelim. $f(x)$, $[x_1, x_2]$ aralığında sürekli ve q -çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere Teorem 4.19 deki q -çarpımsal ortalama değer teoreminden ($\exists \xi \in (x_1, x_2)$) için

$$(D_q^*[f(\xi)])^{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$$

gösterilebilir. $D_q^*[f(\xi)] < 1$ olduğundan

$$\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} < 1 \quad \rightarrow \quad \frac{f(x_2)}{f(x_1)} < 1$$

yazılır ve sonuç itibariyle

$$f(x_2) < f(x_1)$$

gösterilmiş olur.

4. $x_1, x_2 \in (a, b)$ ve $x_1 < x_2$ şeklinde seçelim. $f(x)$, $[x_1, x_2]$ aralığında sürekli ve q -çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere Teorem 4.19 deki q -çarpımsal ortalama değer teoreminden $(\exists \xi \in (x_1, x_2))$ için ve $D_q^*[f(\xi)] \leq 1$ olduğundan

$$\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} \leq 1 \quad \rightarrow \quad \frac{f(x_2)}{f(x_1)} \leq 1$$

gösterilebilir ve sonuç itibariyle

$$f(x_2) \leq f(x_1)$$

elde edilir.

Teorem 4.21 (q -Çarpımsal Taylor Teoremi)

$f(x)$, (a, b) aralığında sürekli bir fonksiyon ve $c \in [a, b]$ olsun. O halde q -Taylor Teoremi

$$f(x) = \prod_{k=0}^n \left(D_q^{*(k)}[f(c)] \right)^{\frac{(x-c)_q^k}{[k]_q!}} \cdot R_{k+1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$(x-c)_q^0 = 1, \quad (x-c)_q^k = \prod_{i=0}^{k-1} (x - cq^i), \quad k \in \mathbb{N}$$

dir. Ayrıca R_{k+1} q -çarpımsal Taylor formülünün kalan terimidir ve

$$(\mu \in (0,1))(\forall q \in (\mu, 1)), (\exists \xi \in (a, b)), \quad R_{k+1} = \left(D_q^{*(k+1)}[f(\xi)] \right)^{\frac{(x-c)_q^k}{[k]_q!}}$$

dir.

Örnek 4.22

$f(x) = e^{x^n}$ fonksiyonun $x = 1$ komşuluğunda q -çarpımsal Taylor açılımına bakalım.
 $k \leq n$ olmak üzere

$$D_q^*[f(x)] = e^{D_q[\ln e^{x^n}]} = e^{D_q[x^n]} = e^{[n]_q x^{n-1}}$$

$$D_q^{**}[f(x)] = e^{D_q^{(2)}[\ln e^{x^n}]} = e^{D_q[\ln e^{[n]_q x^{n-1}}]} = e^{[n]_q [n-1]_q x^{n-2}}$$

...

...

$$D_q^{*(k)}[f(x)] = e^{[n]_q [n-1]_q \dots [n-k+1]_q x^{n-k}}$$

$x = 1$ için

$$D_q^{*(k)}[f(1)] = e^{[n]_q [n-1]_q \dots [n-k+1]_q}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} e^{x^n} &= \prod_{k=0}^n \left(e^{[n]_q [n-1]_q \dots [n-k+1]_q} \right)^{\frac{(x-1)_q^k}{[k]_q!}} \\ &= \prod_{k=0}^n e_q^{\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q (x-1)_q^k} \end{aligned}$$

bulunur.

4.2 q -Çarpımsal İntegral

Bu kısımda öncelikle çarpımsal integral tanımı verilecektir ve daha sonra bu tanımdan yola çıkarak çarpımsal integralin q -genişlemesi yani q -çarpımsal integral bağıntısı tanımlanacaktır.

Riemann çarpımsal integrali literatürde şu şekilde ifade edilir. f , $[a, b]$ aralığında pozitif bir fonksiyon olsun. $W = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, $k = 1, 2, \dots, m$, $[a, b]$ aralığının bölüntülerinden oluşmak üzere ξ_k da x_{k-1} ile x_k arasındaki herhangi bir nokta ve $\Delta s_k = x_k - x_{k-1}$ olsun. Bashirov[6] tarafından verilen integral çarpımı

$$P(f, W) = \prod_{k=1}^m f(\xi_k)^{\Delta s_k}$$

şeklindedir. Dolayısıyla Teorem 3.14 de verilen çarpımsal integral

$$\int_a^b f(x)^{dx} = e^{\int_a^b \ln(f(x)) dx}$$

ifadesi gözönüne alındığı takdirde $[a, b]$ aralığındaki $\ln f$ in Riemann integrali

$$\prod_{k=1}^m f(\xi_k)^{\Delta s_k} = e^{\sum_{k=1}^m (\ln f)(\xi_k) \Delta s_k}$$

şeklinde verilir.

Tanım 4.23 (q - Çarpımsal İntegral)

$f(x)$, $0 < a < b$ aralığında sınırlı ve pozitif bir fonksiyon olsun. O halde çarpımsal integralin q -benzeri

$$I_q^*(f) = \int f(x)^{d_q x} = e_q^{\int \ln f(x) d_q x}, \quad q \in (0,1) \quad (4.9)$$

şeklindedir ve q -çarpımsal integral olarak adlandırılır. Belirli q -çarpımsal integral ise

$$I_q^*(f) = \int_a^b f(x)^{d_q x} = e_q^{\int_a^b \ln f(x) d_q x - \int_a^a \ln f(x) d_q x} \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanır. q -Çarpımsal integral kısaca q^* -integral olarak da ifade edilebilir.

Şimdi q -çarpımsal integralin Riemann toplamını gösterelim. Ω_q lineer operatörü

$\Omega_q(F(x)) = F(qx)$ şeklinde tanımlı olsun [10]. D_q nın tanımından $D_q[F(x)] = f(x)$

verilebilir. Farzedelim ki $F(x) = \int \ln f(x) d_q x$ olsun. O halde $D_q[F(x)] = \ln f(x)$ dir.

Dolayısıyla

$$\frac{1}{(q-1)x} (\Omega_q - 1)F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = \ln f(x)$$

ifadesin den $F(x)$ i çaktığımız takdirde

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{(1 - \Omega_q)} ((1 - q)x \ln f(x)) \\
&= (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} \Omega_q^i (x \ln f(x)) \\
&= (1 - q)(x \ln f(x) + qx \ln f(qx) + q^2x \ln f(q^2x) + \dots) \\
&= (1 - q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x) \tag{4.11}
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. (4.9)ifadesinde (4.11) bağıntısı koyulduğu takdirde q -çarpımsal integral için Riemann toplamı gösterimi

$$I_q^*(f) = \int f(x)^{d_q x} = e_q^{\int \ln f(x) d_q x} = e_q^{(1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)} \tag{4.12}$$

olur.

(4.9) ifadesi $q \rightarrow 1$ için limit alınırsa

$$I^*(f) = \lim_{q \rightarrow 1} \int_a^b f(x)^{d_q x} = \int_a^b f(x)^{dx} \tag{4.13}$$

çarpımsal analizdeki integral tanımı elde edilmektedir.

Şimdide q -çarpımsal integral için Jackson integralinin hangi koşullar altında yakınsadığına bakalım.

Teorem 4.24

$0 < q < 1$ ve $f(x) > 0$ olsun. $0 < \alpha < 1$ olacak şekilde $|x^\alpha \ln f(x)|$, $(0, S]$ aralığında sınırlı ise

$$\int f(x)^{d_q x} = e_q^{(1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)} \tag{4.14}$$

bağıntısı $(0, S]$ aralığında f fonksiyonunun q -çarpımsal türevi olan F fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca $F(0) = 1$ olacak şekilde $x = 0$ noktasında süreklidir.

İspat : $(0, S]$ aralığında $|x^\alpha \ln f(x)| < M$ olsun. Herhangi $0 < x < S$, $i \in \mathbb{Z}^+$ için

$$|(q^i x)^\alpha \ln f(q^i x)| < M$$

$$(q^i x)^\alpha |\ln f(q^i x)| < M$$

$$|\ln f(q^i x)| < M(q^i x)^{-\alpha}$$

dir. Böylece $0 < x < S$ için

$$|q^i \ln f(q^i x)| = q^i |\ln f(q^i x)| < M(q^i x)^{-\alpha} q^i = Mx^{-\alpha} (q^{1-\alpha})^i$$

(4.14) deki üstel kısımdaki serinin yakınsaklığını incelemektense, $1 - \alpha > 0$ ve $0 < q < 1$ olduğundan

$$\sum_{j=0}^{\infty} Mx^{-\alpha} (q^{1-\alpha})^j \quad (4.15)$$

geometrik serisi incelenebilir. (4.15) serisinde de $1 - \alpha > 0$ ve $|q^{1-\alpha}| < 1$ olacağından bu seri yakınsak olur. Seriler için karşılaştırma testini düşünersek

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)$$

serisinde yakınsak olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $f(x)$ in çarpımsal anlamda Jackson integralinin bir $F(x)$ fonksiyonuna yakınsayacaktır. Yani

$$F(x) = e_q^{(1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)}$$

dir. Yukardaki ifadede $x = 0$ için $F(0) = 1$ olduğu açıktır. Şimdi de $x = 0$ da $F(x)$ in sürekli olduğunu gösterelim. Tanım 3.8 den $\forall \varepsilon > 1$ için $\left| \frac{x}{x_0} \right| < \delta$ olduğunda

$$\left| \frac{f(x)}{f(x_0)} \right| < \varepsilon \text{ olacak şekilde bir } \delta > 1 \text{ sayısı bulunabiliyorsa, } x \rightarrow x_0 \text{ için } f(x) \rightarrow l \text{ dir}$$

denir. Buna göre $x_0 = 0$ için

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x)}{F(0)} \right| &= \left| \frac{e_q^{(1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)}}{e_q^0} \right| \\ &< e_q^{(1-q)|x| \sum_{i=0}^{\infty} Mx^{-\alpha} (q^{1-\alpha})^i} \\ &< e_q^{\frac{M\delta^{1-\alpha}(1-q)}{1-q^{1-\alpha}}} < \varepsilon \\ &\frac{M\delta^{1-\alpha}(1-q)}{1-q^{1-\alpha}} < \ln \varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

olacak şekilde $\delta > 1$ sayısı bulunabilir. O halde $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 1$ olacağından $F(x)$, $x = 0$ noktasında sürekli olur. Şimdi de $F(x)$ fonksiyonunun $f(x)$ in q -çarpımsal antitürevi olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} D_q^*[F(x)] &= D_q^* \left[e_q^{(1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)} \right] \\ &= e_q^{D_q[(1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)]} \end{aligned}$$

q -türev için çarpımın türevinden

$$\begin{aligned} D_q^*[F(x)] &= e_q^{(1-q)qx D_q[\sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)] + \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)(1-q) D_q x} \\ &= e_q^{(1-q)qx \sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{\ln f(q^{i+1}x) - \ln f(q^i x)}{(q-1)x} + (1-q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)} \\ &= e_q^{\frac{(1-q)qx}{(q-1)x} (\sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^{i+1}x) - \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)) + (1-q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)} \\ &= e_q^{-\sum_{i=0}^{\infty} q^{i+1} \ln f(q^{i+1}x) + \sum_{i=0}^{\infty} q^{i+1} \ln f(q^i x) - \sum_{i=0}^{\infty} q^{i+1} \ln f(q^i x) + \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)} \\ &= e_q^{-\sum_{i=0}^{\infty} q^{i+1} \ln f(q^{i+1}x) + \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)} \\ &= e_q^{\sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i x) - \sum_{i=1}^{\infty} q^i \ln f(q^i x)} \\ &= e_q^{\ln f(x)} = f(x) \end{aligned}$$

Böylelikle F fonksiyonun q -çarpımsal karşıt türevi gösterilmiş oldu.

Örnek 4.25

$f(x) = e_q^{1/x}$ fonksiyonu için çarpımsal anlamda Jackson integralini inceleyelim.

$D_q^*[F(x)] = f(x)$ bağıntısından

$$D_q^* \left[e_q^{\frac{\log q 1}{q-1} x} \right] = e_q^{\frac{\log q 1}{q-1} x}$$

bulunur. O halde

$$\int \left(e_q^{\frac{\log q 1}{q-1} x} \right)^{d_q x} = f(x)$$

q -çarpımsal kuvvet kuralından

$$\int \left(e_q^{\frac{\log q}{q-1} x} \right)^{d_q x} = \left(\int \left(e_q^{\frac{1}{x}} \right)^{d_q x} \right)^{\frac{\log q}{q-1}} = e_q^{\log x}$$

$$\int \left(e_q^{\frac{1}{x}} \right)^{d_q x} = e_q^{\frac{q-1}{\log q} \log x}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere $f(x)$ fonksiyonun integrali bulunmuş oldu. Şimdi de q -çarpımsal integrali (4.14) verilen Riemann toplamı şeklinde bulalım.

$$\int \left(e_q^{\frac{1}{x}} \right)^{d_q x} = e_q^{(1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln e^{1/q^i x}} = e_q^{(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{1}{q^i}} = e_q^{(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} 1} \rightarrow \infty$$

Sonuç itibarıyla $f(x)$ in çarpımsal anlamda Riemann toplamında, Jackson integralinin olmadığını göstermektedir. Bu sonucu bir önceki teoremden, $x^\alpha \ln f(x)$ fonksiyonun $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $x \in (0, S]$ olmak üzere sınırlı olup olmadığına bakalım.

$$x^\alpha \ln f(x) = x^\alpha \ln e^{1/x} = x^\alpha \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x} \right)^{1-\alpha} = g(x)$$

$g(x)$ fonksiyonunda x yeterince küçük seçilerek istenildiği kadar büyük yapılabilir buda $g(x)$ in bir üst sınırı olmadığı göstermekle birlikte sınırlı olmayacaktır. O halde yukardaki teoreme görede $f(x)$ in çarpımsal anlamda Jackson integrali $F(x)$ e yakınsamayacaktır.

Teorem 4.26 (q -Çarpımsal Analizin Temel Teoremi)

$f(x)$, fonksiyonu $0 \leq a \leq b$ aralığında pozitif ve sürekli ve $D_q^*[F(x)] = f(x)$ olsun. O halde

$$\int_a^b f(x) d_q x = \frac{F(b)}{F(a)}$$

dir.

İspat: $[a, b]$ aralığında $F(x)$ sürekli ve $D_q^*[F(x)] = f(x)$ olsun. $f(x)$ fonksiyonu pozitif olduğundan

$$e_q^{\int_0^b \ln f(x) d_q x} = e_q^{(1-q)b \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i b)} = F(b)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Benzer şekilde

$$e_q^{\int_0^a \ln f(x) d_q x} = e_q^{(1-q)a \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(q^i a)} = F(a)$$

ifade edilir.

Şimdi q -çarpımsal bağıntısı (4.10) dan

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) d_q x &= e_q^{\int_0^b \ln f(x) d_q x - \int_0^a \ln f(x) d_q x} \\ &= \frac{e_q^{\int_0^b \ln f(x) d_q x}}{e_q^{\int_0^a \ln f(x) d_q x}} \\ &= \frac{F(b)}{F(a)} \end{aligned}$$

teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.27

$f(x)$, q -çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir ve $D_q^*[f(x)]$, $[a, b]$ aralığında q -çarpımsal integrallenebilir olsun. O halde

$$\int_a^b (D_q^*[f(x)]) d_q x = \frac{f(b)}{f(a)} \quad (4.16)$$

dır.

İspat:

$$\int_a^b (D_q^*[f(x)]) d_q x = \int_a^b (e^{D_q[\ln f(x)]}) d_q x = e_q^{\int_a^b D_q[\ln f(x)] d_q x}$$

Teorem 2.21 den

$$\begin{aligned} \int_a^b (D_q^*[f(x)]) d_q x &= e_q^{\int_a^b D_q[\ln f(x)] d_q x} \\ &= e_q^{\ln f(b) - \ln f(a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e_q^{\ln \frac{f(b)}{f(a)}} \\
&= \frac{f(b)}{f(a)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.28 (q -Çarpımsal Kısmi İntegral)

$0 \leq a \leq b$ aralığında $f(x)$, q -çarpımsal diferansiyellenebilir ve $g(x)$ q -diferansiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olsunlar. O halde

$$\int_a^b \left((D_q^*[f(x)])^{g(x)} \right)^{d_q x} = \frac{f(b)^{g(b)}}{f(a)^{g(a)}} \frac{1}{\int_a^b (f(qx)^{g_q(x)})^{d_q x}}$$

dir.

İspat: q -Çarpımsal integralin tanımını kullanarak

$$\int_a^b \left((D_q^*[f(x)])^{g(x)} \right)^{d_q x} = \int_a^b \left(e_q^{g(x)D_q[\ln f(x)]} \right)^{d_q x} = e_q^{\int_a^b g(x)D_q[\ln f(x)]d_q x}$$

elde edilir. Aynı zamanda q -türevde iki fonksiyonun çarpımı için

$$e_q^{D_q[g(x)\ln f(x)]} = e_q^{\ln f(qx)D_q[g(x)] + g(x)D_q[\ln f(x)]}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak (4.16) ifadesinde yerine konulduğunda

$$\begin{aligned}
e_q^{g(b)\ln f(b) - g(a)\ln f(b) - g(a)\ln f(a)} &= e_q^{\int_a^b \ln f(qx)D_q[g(x)]d_q x + \int_a^b g(x)D_q[\ln f(x)]d_q x} \\
e_q^{\int_a^b g(x)D_q[\ln f(x)]d_q x} &= \frac{e_q^{g(b)\ln f(b) - g(a)\ln f(a)}}{e_q^{\int_a^b \ln f(qx)D_q[g(x)]d_q x}} \\
&= \frac{e_q^{g(b)\ln f(b)}}{e_q^{g(a)\ln f(a)}} \frac{1}{\int_a^b \left((f(qx))^{g(x)} \right)^{d_q x}} \\
&= \frac{f(b)^{g(b)}}{f(a)^{g(a)}} \frac{1}{\int_a^b (f(qx)^{g_q(x)})^{d_q x}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.29

$f(x)$, $(0, a]$ aralığında sürekli, pozitif bir fonksiyon olsun ($a > 0$). O halde

$$(\forall q \in (0,1)) (\exists \xi \in [0, a]) : I_q^*(f) = \int_0^a f(x)^{d_q x} = f(\xi)^a \quad (4.17)$$

dir.

İspat: $f(x)$, $[0, a]$ aralığında sürekli olsun. O halde bu aralıkta maksimum M ve minimum m değerleri mevcuttur. $q \in (0,1)$ olduğundan dolayı $0 < aq^i < a$ ve $m \leq f(aq^i) \leq M \rightarrow \ln m \leq \ln f(aq^i) \leq \ln M$ yazılır. O halde (4.12) den

$$e_q^{(1-q)a \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln m} \leq e_q^{(1-q)a \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(aq^i)} \leq e_q^{(1-q)a \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln M}$$

dir. Buradan

$$m^a \leq e_q^{(1-q)a \sum_{i=0}^{\infty} q^i \ln f(aq^i)} \leq M^a \rightarrow m \leq \left(I_q^*(f) \right)^{\left(\frac{1}{a} \right)} \leq M \quad (a > 0)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\xi \in [0, a]$ olacak şekilde

$$I_q^*(f) = f(\xi)^a$$

vardır.

(4.17) bağıntısından aşağıdaki teorem gösterilebilir.

Teorem 30 (q -Çarpımsal İntegral Ortalama Değer Teoremi)

$f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli, pozitif bir fonksiyon olsun. O halde

$$(\forall q \in (\mu, 1)) (\exists \xi \in [a, b]) : I_q^*(f) = \int_a^b f(x)^{d_q x} = f(\xi)^{(b-a)}$$

olmak üzere $\mu \in (0,1)$ ve $\xi \in [a, b]$ vardır.

İspat: Klasik analizdeki integraller için ortalama değer teoremine göre aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$(\exists \xi \in (a, b)) : \int_a^b \ln f(x) dx = (b-a) \ln f(\xi)$$

Buradan da

$$(\exists \xi \in (a, b)) : I^*(f) = e^{\int_a^b \ln f(x) dx} = e^{(b-a) \ln f(\xi)} = f(\xi)^{(b-a)} \quad (4.18)$$

elde edilir.

$\lim_{q \rightarrow 1} I_q^*(f) = I^*(f)$ olduğu (4.13) bağıntısında ifade edilmişti. O halde

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists q_0 \in (0,1))(\forall q \in (q_0, 1)) : I^*(f) - \varepsilon < I_q^*(f) < I^*(f) + \varepsilon \quad (4.19)$$

yazılabilir.

$f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $[a, b]$ aralığında maksimum-minimum nokta olarak M, m alabilsin ve $c \in (a, b)$ olsun. Dolayısıyla (4.18) ve (4.19) dan

$$f(c)^{(b-a)} - \varepsilon < I_q^*(f) < f(c)^{(b-a)} + \varepsilon$$

$$(\exists \mu \in (0,1))(\forall q \in (\mu, 1)) : f(c) - \varepsilon < \left(I_q^*(f)\right)^{\frac{1}{b-a}} < f(c) + \varepsilon$$

yazılabilir ve

$$m < \left(I_q^*(f)\right)^{\frac{1}{b-a}} < M$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$(\exists \xi \in (a, b)) : I_q^*(f) = f(\xi)^{(b-a)}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

4.2.1 q -Çarpımsal İntegral Alma Kuralları

Buraya kadar q -çarpımsal integral ile ilgili genel tanımlar verildi. Şimdi ise q -çarpımsal integrale ait bazı özellikler ispatları ile birlikte verilecektir.

$f(x)$ ve $g(x)$, $[a, b]$ aralığında q -çarpımsal anlamda integrallenebilir ve (a, b) aralığında pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun. O halde aşağıdaki fonksiyonların q -çarpımsal integralleri

$$1) \text{ Kuvvet kuralı : } \int_a^b (f(x)^k)^{d_q x} = \left(\int_a^b f(x)^{d_q x} \right)^k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ Çarpım Kuralı : } \int_a^b (f(x)g(x))^{d_q x} = \int_a^b f(x)^{d_q x} \int_a^b g(x)^{d_q x}$$

$$3) \text{ Bölüm Kuralı : } \int_a^b (f(x)/g(x))^{d_q x} = \int_a^b f(x)^{d_q x} / \int_a^b g(x)^{d_q x}$$

$$4) \int_a^b f(x)^{d_q x} = \int_a^c f(x)^{d_q x} \int_c^b f(x)^{d_q x} \quad a \leq c \leq b$$

şeklindedir.

İspat:

1. f , q -çarpımsal olarak integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f pozitif ve sürekli olduğundan $k \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x))^k d_q x &= e^{\int_a^b (\ln(f(x)))^k d_q x} \\ &= e^{k \int_a^b \ln f(x) d_q x} \\ &= \left(e^{\int_a^b \ln f(x) d_q x} \right)^k \end{aligned}$$

bağıntısı bulunur.

2. f ve g q -çarpımsal olarak integrallenebilir fonksiyonlar olsun. O halde

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x)g(x))^{d_q x} &= e^{\int_a^b \ln(f(x)g(x)) d_q x} \\ &= e^{\int_a^b (\ln f(x) + \ln g(x)) d_q x} \\ &= e^{\int_a^b \ln f(x) d_q x + \int_a^b \ln g(x) d_q x} \\ &= \int_a^b f(x)^{d_q x} \int_a^b g(x)^{d_q x} \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir.

3. f ve g q -çarpımsal olarak integrallenebilir fonksiyonlar olsun. O halde

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^{d_q x} &= e^{\int_a^b \ln(f(x)/g(x)) d_q x} \\ &= e^{\int_a^b (\ln f(x) - \ln g(x)) d_q x} \\ &= e^{\int_a^b \ln f(x) d_q x - \int_a^b \ln g(x) d_q x} \\ &= \frac{\int_a^b f(x)^{d_q x}}{\int_a^b g(x)^{d_q x}} \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir.

4. f , q -çarpımsal olarak integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $a \leq c \leq b$ olacak şekilde sabit bir c sayısı için

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) d_q x &= e^{\int_a^b \ln f(x) d_q x} \\
 &= e^{\int_a^c \ln f(x) d_q x + \int_c^b \ln f(x) d_q x} \\
 &= e^{\int_a^c \ln f(x) d_q x} e^{\int_c^b \ln f(x) d_q x} \\
 &= \int_a^c f(x) d_q x \int_c^b f(x) d_q x
 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (4.10) bağıntısı kullanılarak, c sayısının a ve b arasında kabul edildiği için yukardaki ifade şu şekilde de yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) d_q x &= e^{\int_0^b \ln f(x) d_q x - \int_0^a \ln f(x) d_q x} \\
 &= e^{\int_c^b \ln f(x) d_q x + \int_0^c \ln f(x) d_q x - \int_0^a \ln f(x) d_q x} \\
 &= \frac{e^{\int_c^b \ln f(x) d_q x} e^{\int_0^c \ln f(x) d_q x}}{e^{\int_0^a \ln f(x) d_q x}} \\
 &= \frac{\int_c^b f(x) d_q x \int_0^c f(x) d_q x}{\int_0^a f(x) d_q x}
 \end{aligned}$$

Örnek 4.31

$f(x) = e_q^{kx}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ fonksiyonun q -çarpımsal integralini bulalım.

$$\begin{aligned}
 \int (e_q^{kx}) d_q x &= e_q^{\int \ln e_q^{kx} d_q x} \\
 &= e_q^{k(1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i q^i x} \\
 &= e_q^{k(1-q)x^2 (1 + (q^2) + (q^2)^2 + (q^2)^3 + \dots)} \\
 &= e_q^{kx^2 \frac{1-q}{1-q^2}} \\
 &= e_q^{\frac{kx^2}{1+q}}.
 \end{aligned}$$

Dikkat edilmeli ki, eğer $q \rightarrow 1$ için yukardaki ifadenin limiti alınırsa

$$\lim_{q \rightarrow 1} \int (e_q^{kx})^{d_q x} = e^{\frac{kx^2}{2}}$$

elde edilir. Bu sonuç Çizelge 4.2 de yer alan c seçeneği ile aynıdır.

Örnek 4.32

$f(x) = e_q^{\sin_q(kx)}$, k sabit olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun q -çarpımsal integralini bulalım.

$$\begin{aligned} \int (e_q^{\sin_q(kx)})^{d_q x} &= e_q^{\int \ln e_q^{\sin_q(kx)} d_q x} \\ &= e_q^{\int \sin_q(kx) d_q x} \\ &= e_q^{-\frac{1}{k} \cos_q(kx)} \end{aligned}$$

Aşağıda Çizelge 4.2 de, sıklıkla kullanılan bazı fonksiyonlar için q -çarpımsal integral karşılıkları verildi. Bu eşitlikler verilirken özellikle karşılaştırma olanağı olması için çarpımsal integralleri de eklendi.

Çizelge 4. 2 Bazı fonksiyonların çarpımsal ve q -çarpımsal integralleri

$I^*(f)$	$I_q^*(f)$
$\int (1)^{dx} = c$	$\int (1)^{d_q x} = c$
$\int (k)^{dx} = ck^x$	$\int (k)^{d_q x} = ck^x$
$\int (e^{kx})^{dx} = ce^{\frac{kx^2}{2}}$	$\int (e_q^{kx^n})^{d_q x} = ce_q^{\frac{kx^2}{1+q}}$
$\int (e^{kx^n})^{dx} = ce^{\frac{kx^{n+1}}{n+1}}$	$\int (e_q^{kx^n})^{d_q x} = ce_q^{\frac{kx^{n+1}}{[n+1]_q}}$
$\int (e^{\cos x})^{dx} = ce^{\sin x}$	$\int (e_q^{\cos x})^{d_q x} = ce_q^{\sin_q x}$

Çizelge 4. 2 Bazı fonksiyonların çarpımsal ve q -çarpımsal integralleri (Devamı)

$\int (e^{-\sin x})^{dx} = ce^{\cos x}$	$\int (e_q^{-\sin_q x})^{d_q x} = ce_q^{\cos_q x}$
---	--

q -ÇARPIMSAL NÜMERİK YAKLAŞIMLAR

Bu bölümde klasik analizde yer alan bazı nümerik yaklaşımların, çarpımsal analizdeki karşılıklarının q -benzerleri gösterilecektir. Uygulamalarla birlikte elde edilen sonuçların klasik, çarpımsal ve q -çarpımsal anlamda karşılaştırılmaları ifade edilecektir. Çarpımsal analize ait nümerik yaklaşımlar için daha detaylı bilgiyi [12], [13] ve q -analize ait nümerik yaklaşımlar için ise [14], [15] ve [16] referanslarında bulunabilir.

5.1 Tek Değişkenli Denklemlerin Köklerinin Yaklaşık Hesabı için Bazı q -Çarpımsal Yöntemler

Klasik analizde tek değişkenli fonksiyonların çarpanlarına ayrılabilir bir polinom olması halinde, $f(x) = 0$ denkleminin köklerini tam olarak bulabiliriz. Eğer $f(x) = 0$ denklemi bir polinom değilse bu durumda da $f(\tilde{x})$ i küçük yapan bir $\tilde{x}$ değeri bulmak gerekir. Bu tür kökleri bulmak için çeşitli yöntemler vardır. Şimdi bu yöntemlerin bazıları için q -çarpımsal analizde nasıl ifade edilebileceğini görelim. Fakat yöntemlere başlamadan önce aşağıdaki iki önemli teoremi verelim.

Tanım 5.1

Klasik analizde $f: I = (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \leq x_0 \leq b$ olmak üzere $f(x_0) = 0$ 'ı sağlayan x_0 değerine o denklemin kökü denir.

Tanım 5.2

Çarpımsal analizde $f: I = (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $a \leq x_0 \leq b$ olmak üzere $f(x_0) + 1 = g(x_0)$ eşitliğini $g(x_0) = 1$ için sağlayan çarpımsal denklemin x_0 değerine o denklemin kökü denir.

Kök bulma yöntemlerinden bazıları kökün bulunduğu aralık belirlendikten sonra uygulanır. Bu tip yöntemler genelde yavaş yakınsarlar, buna karşın mutlaka yakınsar. İkinci grup yöntemlerde ise kökün bulunduğu aralığın belirlenmesi gerekmez. Bu tip yöntemler, genelde, yakınsadığı zaman hızlı yakınsarlar fakat yakınsamayabilirler.

Öncelikle denklemlerin kökünü bulmak için çarpımsal anlamda nasıl ifade edildikleri ve gerekli durumları gösterelim.

$f(x)$ fonksiyonunun kökü $[a, b]$ aralığında ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ için $f(x) = 1$ denklemin kökü olsun. Bu denklemi sağlayan $[a, b]$ aralığına ait $\tilde{x}$ değerleri için aşağıdaki koşullar vardır.

i) Eğer $f_1(a) < 1$ ve $f_1(b) > 1$ ise

ii) Eğer $f_2(a) > 1$ ve $f_2(b) < 1$ ise

yada daha genel anlamda

i) $\ln(f_1(a)) < \ln 1 = 0$ ve $\ln(f_1(b)) > \ln 1 = 0$

ii) $\ln(f_2(a)) > \ln 1 = 0$ ve $\ln(f_2(b)) < \ln 1 = 0$

koşulları gerçekleşir. Bu bağıntılardan

$$\ln(f(a)) \ln(f(b)) < 0 \quad (5.1)$$

yazılabilir. Bu koşullar altında (5.1) bağıntısını sağlayan $[a, b]$ aralığında çarpımsal denklemin bir kökü vardır. Dolayısıyla ifade edilecek yöntemler için, verilen denklemin yukardaki koşullar altında olmasına dikkat edilmelidir.

Tanım 5.3

$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi herhangi bir α sayısına yakınsasın ve $e_n = \alpha_n - \alpha$ olduğunu kabul edelim. $n \geq 0$ değerleri için

$$\frac{|\alpha_{n+1} - \alpha|}{|\alpha_n - \alpha|^r} = \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} < c \quad (5.2)$$

olacak şekilde bir pozitif c ve r sayıları varsa $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi α ya, c asimptotik hata sabitiyle r mertebeden yakınsaktır denir.

Eğer $\{\alpha_n\}$ dizisi $\alpha = g(\alpha)$ çözümüne r mertebeden yakınsak ise, $\alpha_n = g(\alpha_{n-1})$ iterasyon fonksiyonuna α mertebededir denir. Yakınsaklığın mertebesi ile ilgili olarak bazı özel durumlar vardır.

I. $r = 1$ için lineer yakınsaklık

II. $r = 2$ için kuadratik yakınsaklık

III. $r = 3$ için kübik yakınsaklık

olarak adlandırılır.

5.1.1 q -Çarpımsal Newton-Raphson Yöntemi

Newton-Raphson yöntemi yada diğer bilinen ismiyle Newton yöntemini q -çarpımsal Taylor serisinden çıkarabiliriz. Teorem 4.21 deki tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonun x_0 noktasında Taylor serisine açılımını gözönüne alalım. Buradaki açılımda x_0 yerine x_n , x yerine x_{n+1} yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) \left(f_q^*(x_n) \right)^{\frac{(x_{n+1}-x_n)_q}{[1]_q}} \left(f_q^{*(2)}(\xi) \right)^{\frac{(x_{n+1}-x_n)_q^2}{[2]_q!}} \quad (5.3)$$

Burada ξ , x_i ile x_{i+1} arasında bir değerdir. 1. mertebeden türevi içeren terimlerden sonraki ifadeler ihmal edilir ve $f(x_{n+1}) = 1$ olarak alınır

$$1 \cong f(x_n) f_q^*(x_n)^{(x_{n+1}-x_n)}$$

eşitliği yazılır. Sonuç itibariyle aşağıdaki denklem elde edilir.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \quad (5.4)$$

Ayrıca (5.4) düzenlenirse

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\ln f(x_n)}{\frac{\ln f(x_n) - \ln f(qx_n)}{x_n - qx_n}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n(1-q) \ln f(x_n)}{\ln f(x_n) - \ln f(qx_n)} \quad (5.5)$$

elde edilir. Yukardaki (5.4) ve (5.5) formülleri q -çarpımsal Newton-Raphson formülü olarak adlandırılır.

Şimdi de q -çarpımsal Newton-Raphson yönteminin yakınsaklık mertebesine bakalım.

$f(x)$ fonksiyonunun gerçek kökü ε olsun. q -çarpımsal Newton-Raphson formülünden

$$x_{n+1} - \varepsilon = x_n - \varepsilon - \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)}$$

yazılabilir. Buradan

$$\ln f(x_n) + (\varepsilon - x_n) \ln f_q^*(x_n) = \ln f_q^*(x_n) (\varepsilon - x_{n+1}) \quad (5.6)$$

elde edilir. $n = 2$. mertebe ve x_n noktası için q -çarpımsal Taylor formülünden

$$f(\varepsilon) = f(x_n) f_q^*(x_n)^{(\varepsilon - x_n)} f_q^{**}(x_n)^{\frac{(\varepsilon - x_n)^2}{[2]_q}}$$

ve $f(\varepsilon) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} -\ln f(x_n) &= (\varepsilon - x_n) \ln f_q^*(x_n) + \frac{(\varepsilon - x_n)^2}{[2]_q} \ln f_q^{**}(x_n) \\ \ln f(x_n) + (\varepsilon - x_n) \ln f_q^*(x_n) &= -\frac{(\varepsilon - x_n)^2}{[2]_q} \ln f_q^{**}(x_n) \end{aligned} \quad (5.7)$$

(5.6) bağıntısında gerekli düzenlemeler yapılır ve (5.7) denkleminde yerine konursa

$$\begin{aligned} (\varepsilon - x_{n+1}) \ln f_q^*(x_n) &= -\frac{(\varepsilon - x_n)^2}{[2]_q} \ln f_q^{**}(x_n) \\ (\varepsilon - x_{n+1}) &= -\frac{1}{(1+q)} \frac{\ln f_q^{**}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} (\varepsilon - x_n)^2 \end{aligned}$$

bulunur. (5.2) den

$$|\varepsilon - x_{n+1}| < \frac{1}{(1+q)} \frac{|\ln f_q^{**}(x_n)|}{|\ln f_q^*(x_n)|} |(\varepsilon - x_n)^2|$$

yazılabilir. Böylece q -çarpımsal Newton-Raphson yönteminin yakınsaklık mertebesinin 2 olduğu görülmüş olur.

5.1.2 q -Çarpımsal Chebyshev Yöntemi

Chebyshev yöntemi ikinci mertebe türevlere dayanmaktadır ve ancak ikinci mertebe türevlerin hesabı zor olmadığında etkili olabilmektedir. Buna karşın bazı durumlarda ikinci mertebe türevlerin hesabı çok zor yapılmaktadır. Bu kısımda klasik anlamda Chebyshev metodunun q -çarpımsal gösterimini ifade edeceğiz.

Öncelikle $f(x)$ fonksiyonunu q -çarpımsal Taylor serisine açalım.

$$f(x) = f(x_n) \left(f_q^*(x)\right)^{(x_{n+1}-x_n)_q} \left(f_q^{*(2)}(x)\right)^{\frac{(x_{n+1}-x_n)_q^2}{[2]_q}} \dots$$

$f(x) = 1$ çarpımsal denklemin kökü olmak üzere

$$1 \approx f(x_n) \left(f_q^*(x)\right)^{(x_{n+1}-x_n)_q} \left(f_q^{*(2)}(x)\right)^{\frac{(x_{n+1}-x_n)_q^2}{[2]_q}}$$

şeklinde 2. dereceden q -Taylor açılımını ele alalım. O halde

$$\begin{aligned} 1 &= f(x_n) \left(f_q^*(x)\right)^{(x_{n+1}-x_n)_q} \left(f_q^{*(2)}(x)\right)^{\frac{(x_{n+1}-x_n)_q^2}{[2]_q}} \\ \ln\left(\frac{1}{f(x_n)}\right) &= \ln\left(\left(f_q^*(x_n)\right)^{(x_{n+1}-x_n)_q} \left(f_q^{*(2)}(x_n)\right)^{\frac{(x_{n+1}-x_n)_q^2}{[2]_q}}\right) \\ -\ln f(x_n) &= \ln\left(f_q^*(x_n)\right)^{(x_{n+1}-x_n)_q} + \ln\left(f_q^{*(2)}(x_n)\right)^{\frac{(x_{n+1}-x_n)_q^2}{[2]_q}} \\ -\ln f(x_n) &= (x_{n+1} - x_n)_q \ln f_q^*(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)_q^2}{[2]_q} \ln f_q^{*(2)}(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} - \frac{(x_{n+1} - x_n)_q^2}{[2]_q} \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

ifadesine ulaşılır. Şimdide daha önce tanımladığımız q -çarpımsal Newton ifadesi olan

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)}$$

bağıntısını (5.8) de yerine koyalım. O zaman

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} - \frac{1}{[2]_q} \left(\frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \right)^2 \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)}$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} - \frac{1}{[2]_q} \left(\frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \right)^2 \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \left(1 + \frac{1}{[2]_q} \frac{\ln f(x_n) \ln f_q^{*(2)}(x_n)}{(\ln f_q^*(x_n))^2} \right) \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

elde edilir. Eğer yukardaki eşitlik daha basit şekilde, türevleri alınarak yazılırsa

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n(1-q)\ln f(x_n)}{\ln f(x_n) - \ln f(qx_n)} \\ &\quad - \frac{x_n}{[2]_q} \frac{(1-q)\ln f(q^2x_n) - [2]_q \ln f(qx_n) + q \ln f(x_n)}{q(\ln f(x_n) - \ln f(qx_n))^3} (\ln f(x_n))^2 \end{aligned}$$

iterasyon formülü elde edilir. Elde edilen bu bağıntıya ise q -çarpımsal Chebyshev formülü denir.

Görüldüğü üzere elde edilen (5.9) bağıntısı ikinci mertebe türev içermektedir ve metodun uygulanışı zorlaşmaktadır. Bundan dolayı lineer olmayan denklemlerde, hesaplanması daha kolay olması açısından q -çarpımsal Newton metodu daha çok tercih edilebilir. Fakat q -Çarpımsal Cheyshev yöntemi için ikinci türevden bağımsız farklı iteratif gösterim geliştirebiliriz. q -çarpımsal Taylor açılımından

$$f_q^*(y_n) \cong f_q^*(x_n) \left(f_q^{**}(x) \right)^{(y_n - x_n)_q}$$

yazılır ve buradan

$$\ln f_q^*(x_n) \cong \frac{\ln f_q^*(y_n) - f_q^*(x_n)}{y_n - x_n}$$

olmak üzere (5.9) ifadesi

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 - \frac{1}{[2]_q} \frac{\ln f_q^*(y_n) - \ln f_q^*(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \right) \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \quad (5.10)$$

şeklinde de ikinci türevden bağımsız ifade edilebilir.

Şimdi de q -çarpımsal Chebyshev yönteminin yakınsaklık analizine bakalım.

$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve f fonksiyonunun D açık aralığındaki kökü $\varepsilon \in D$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun D aralığında birinci, ikinci ve üçüncü türevleri mevcut olsun. İşlemlerimizi kolaylaştırmak amacıyla

$e_n = (x_n - \varepsilon)_q$ ve $d_n = y_n - x_n$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunu q -çarpımsal Taylor serisine açalım.

$$f(\varepsilon) = f(x_n) \left(f_q^*(x_n)\right)^{-e_n} \left(f_q^{*(2)}(x_n)\right)^{\frac{e_n^2}{[2]_q!}} \left(f_q^{*(3)}(x_n)\right)^{-\frac{e_n^3}{[3]_q!}} O(e_n^4) \quad (5.11)$$

$$\ln f(\varepsilon) = \ln f(x_n) - (e_n)_q \ln f_q^*(x_n) + \frac{e_n^2}{[2]_q!} \ln f_q^{*(2)}(x_n) - \frac{e_n^3}{[3]_q!} \ln f_q^{*(3)}(x_n) + O(e_n^4)$$

ve $f(\varepsilon) = 1$ alınıp düzenlenirse

$$\ln f(x_n) = e_n \ln f_q^*(x_n) - \frac{e_n^2}{[2]_q!} \ln f_q^{*(2)}(x_n) + \frac{e_n^3}{[3]_q!} \ln f_q^{*(3)}(x_n) + O(e_n^4)$$

ve eşitliğin her iki tarafı $\ln f_q^*(x_n)$ bölünürse

$$\frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} = e_n - \frac{e_n^2}{[2]_q!} \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} + \frac{e_n^3}{[3]_q!} \frac{\ln f_q^{*(3)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} + O(e_n^4) \quad (5.12)$$

elde edilir. (5.12) bağıntısı

$$d_n = \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} = e_n - \frac{e_n^2}{[2]_q!} \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} + O(e_n^3) \quad (5.13)$$

şeklinde yazılabilir ve $f_q^*(y_n)$ nin Taylor açılımı

$$f_q^*(y_n) = f_q^*(x_n) \left(f_q^{**}(x_n)\right)^{d_n} \left(f_q^{*(3)}(x_n)\right)^{\frac{d_n^2}{[2]_q!}} O(d_n^3)$$

$$\ln f_q^*(y_n) = \ln f_q^*(x_n) + d_n \ln f_q^{*(2)}(x_n) + \frac{d_n^2}{[2]_q!} \ln f_q^{*(3)}(x_n) + O(d_n^3)$$

(5.13) ifadesinden

$$\ln f_q^*(y_n) = \ln f_q^*(x_n) + e_n \ln f_q^{*(2)}(x_n) - \frac{e_n^2}{[2]_q!} \frac{(\ln f_q^{*(2)}(x_n))^2}{\ln f_q^*(x_n)} + \frac{e_n^2}{[2]_q!} \ln f_q^{*(3)}(x_n) + O(e_n^3)$$

ve son düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{[2]_q!} \frac{\ln f_q^*(y_n) - \ln f_q^*(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} &= \frac{e_n}{[2]_q!} \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \\ &\quad - \frac{e_n^2}{([2]_q!)^2} \frac{(\ln f_q^{*(2)}(x_n))^2}{(\ln f_q^*(x_n))^2} \\ &\quad + \frac{e_n^2}{([2]_q!)^2} \ln f_q^{*(3)}(x_n) + O(e_n^3) \end{aligned} \quad (5.14)$$

elde edilir. (5.11) ve (5.14) den

$$\begin{aligned} \frac{1}{[2]_q!} \frac{\ln f_q^*(y_n) - \ln f_q^*(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} &= \left\{ \frac{e_n}{[2]_q!} \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} - \frac{e_n^2}{([2]_q!)^2} \frac{(\ln f_q^{*(2)}(x_n))^2}{(\ln f_q^*(x_n))^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e_n^2}{([2]_q!)^2} \ln f_q^{*(3)}(x_n) \right\} \times \left\{ e_n - \frac{e_n^2}{[2]_q!} \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \right\} + O(e_n^4) \\ &= \frac{e_n^2}{[2]_q!} \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} - \frac{e_n^3}{[2]_q!} \frac{(\ln f_q^{*(2)}(x_n))^2}{(\ln f_q^*(x_n))^2} \\ &\quad + \frac{e_n^3}{([2]_q!)^2} \frac{\ln f_q^{*(3)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} + O(e_n^4) \end{aligned} \quad (5.15)$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \left(1 - \frac{1}{[2]_q} \frac{\ln f_q^*(y_n) - \ln f_q^*(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \right) \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \\ e_{n+1} &= e_n - \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} - \frac{1}{[2]_q} \frac{\ln f_q^*(y_n) - \ln f_q^*(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \frac{\ln f(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \end{aligned}$$

(5.11) ve (5.15) den

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - \left\{ e_n - \frac{e_n^2}{[2]_q!} \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} + \frac{e_n^3}{[3]_q!} \frac{\ln f_q^{*(3)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \right\} \\
&\quad - \left\{ \frac{e_n^2}{[2]_q!} \frac{\ln f_q^{*(2)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} - \frac{e_n^3}{[2]_q!} \frac{(\ln f_q^{*(2)}(x_n))^2}{(\ln f_q^*(x_n))^2} + \frac{e_n^3}{([2]_q!)^2} \frac{\ln f_q^{*(3)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \right\} \\
&\quad + O(e_n^4) \\
&= \frac{e_n^3}{[2]_q!} \frac{(\ln f_q^{*(2)}(x_n))^2}{(\ln f_q^*(x_n))^2} - e_n^3 \left(\frac{1}{[3]_q!} + \frac{1}{[2]_q!} \right) \frac{\ln f_q^{*(3)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} + O(e_n^4)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\left| \frac{e_{n+1}}{e_n^3} \right| = \left| \frac{(\varepsilon - x_{n+1})_q}{(\varepsilon - x_n)_q^3} \right| < \left| \frac{1}{[2]_q!} \frac{(\ln f_q^{*(2)}(x_n))^2}{(\ln f_q^*(x_n))^2} - \left(\frac{1}{[3]_q!} + \frac{1}{[2]_q!} \right) \frac{\ln f_q^{*(3)}(x_n)}{\ln f_q^*(x_n)} \right|$$

elde edilir ve q -çarpımsal Chebyshev metodu için kübik olarak yakınsamaktadır denir.

Örnek 5.4

$f(x) = xe^x - 1$ fonksiyonunun $(0, 1]$ aralığındaki kökünü çarpımsal olarak tanımlı yöntemlerle hesaplayalım. Başlangıç koşulu ise $x_0 = 1$ olsun.

Öncelikle Tanım 5.2 ye göre $f(x) + 1 = g(x)$ dönüşümü ile

$$f(x) + 1 = xe^x - 1 + 1 = xe^x = g(x) \quad (5.16)$$

şeklinde çarpımsal bir denklem elde edilir. Şimdi de $g(x)$ fonksiyonunun tanımlanan aralıkta kökünün varlığını inceleyelim.

$$\ln g(0.1) = -2.20 \text{ ve } \ln g(1) = 1$$

elde edilir. Böylece

$$\ln g(0,1) \cdot \ln g(1) = -2.2 < 0$$

koşulu sağlanır ve verilen aralıkta denklemin kökü vardır.

Şimdi (5.16) çarpımsal denklemini, $q \in (0,1)$ aralığındaki değerlere karşılık gelen x_1 değerlerini tablo şeklinde gösterelim. Bu değerlerin bulunmasında Matlab programı kullanılmıştır.

Çizelge 5. 1 q -çarpımsal Newton-Raphson ve Chebyshev metotları için elde edilen değerler

	q-çarpımsal Newton- Raphson	q-çarpımsal Chebyshev		q-çarpımsal Newton- Raphson	q-çarpımsal Chebyshev
q	x_1	x_1		x_2	x_2
0.9999	0.5000125005	0.5625203128		0.5643813207	0.5671431468
0.999	0.5001250521	0.5627032527		0.564371689	0.5671418869
0.98	0.5025210655	0.5666143307		0.5641783103	0.5671398946
0.97	0.5037976638	0.5687112792		0.5640843588	0.5671585
0.96	0.5050852155	0.5708355864		0.5639959811	0.5671913973
0.95	0.5063839092	0.5729879069		0.5639133176	0.5672391886
0.94	0.5076939385	0.5751689179		0.5638365133	0.5673025069
0.93	0.5090155024	0.5773793207		0.5637657181	0.5673820176
0.92	0.5103488054	0.5796198414		0.5637010863	0.5674784208
0.91	0.5116940578	0.5818912324		0.5636427776	0.567592453
0.90	0.5130514759	0.5841942734		0.563590957	0.5677248901
0.80	0.527347163	0.6091594738		0.5634701497	0.5702656998
0.70	0.5431529667	0.6384143344		0.5642295066	0.5759171741
0.60	0.5608380028	0.6735099251		0.5661736255	0.5867783876
0.50	0.5809402158	0.716966285		0.5697678883	0.6070143612
0.40	0.604297522	0.7732639123		0.575773396	0.6459162399
0.30	0.6323476898	0.8515100293		0.5855644604	0.7281522518
0.20	0.6679723533	0.9748008842		0.6020508139	0.9413692701
0.10	0.718977022	1.235162746		0.6336293644	1.865040168

Çizelge 5. 2 q -çarpımsal Newton-Raphson ve Chebyshev metotları için elde edilen değerler

	q-ÇNM	q-ÇCM		q-ÇNM	q-ÇCM
q	x_3	x_3		x_4	x_4
0.9999	0.5671388962	0.5671432904		0.5671432903	0.5671432904
0.999	0.5671380695	0.56714329		0.5671432887	0.5671432904
0.98	0.5671192704	0.5671432686		0.5671431357	0.5671432903
0.97	0.5671084118	0.5671434375		0.5671429523	0.5671432918
0.96	0.5670969517	0.5671439131		0.5671426894	0.5671432985
0.95	0.5670849419	0.5671448478		0.5671423411	0.5671433157
0.94	0.5670724368	0.5671464048		0.567141902	0.5671433513
0.93	0.5670594935	0.567148759		0.5671413677	0.5671434156
0.92	0.5670461719	0.5671520979		0.5671407343	0.5671435217
0.91	0.5670325346	0.5671566222		0.5671399989	0.5671436858
0.90	0.5670186476	0.5671625475		0.5671391592	0.5671439273
0.80	0.5668830646	0.5673593479		0.5671253584	0.5671581536
0.70	0.5668250285	0.5681051592		0.5671089948	0.5672469858
0.60	0.5669970864	0.5702290567		0.5671213135	0.5676102877
0.50	0.5676585111	0.5758295896		0.5672450292	0.5689000704
0.40	0.5692755779	0.5913298076		0.5676775493	0.5736593404
0.30	0.5727674086	0.6428891255		0.5688972496	0.5968640087
0.20	0.5802528707	0.8983302005		0.572202559	0.8453479963
0.10	0.5984273844	3.918986867		0.5823187144	10.08874322

Çizelge 5. 3 q -çarpımsal Newton-Raphson ve Chebyshev metotları için elde edilen değerler

x_i	NM	ÇNM	q -ÇNM	CM	q -ÇCM
x_1	0.6839397206	0.5	0.5000125005	0.6090191454	0.5625203128
x_2	0.5774544772	0.5643823935	0.5643813207	0.5672093227	0.5671431468
x_3	0.5672297377	0.5671389877	0.5671388962	0.5671432904	0.5671432904
x_4	0.5671432965	0.5671432904	0.5671432903	0.5671432904	0.5671432904
x_5	0.5671432904	0.5671432904	0.5671432904	0.5671432904	0.5671432904
x_6	0.5671432904	0.5671432904	0.5671432904	0.5671432904	0.5671432904

Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2 de $(0,1)$ aralığındaki q değerleri için x_1, x_2, x_3, x_4 değerleri q -çarpımsal Newton-Raphson ve Chebyshev yöntemleri uygulanarak bulundu. İşlemler sonucunda 3. iterasyon sonunda denklemin kökü $x_3 = 0.5671432904$ değeri, ilk olarak $q = 0.9999$ değerine karşılık olarak q -çarpımsal Chebyshev yöntemi tarafından hesaplandı. Ayrıca farklı bir q değeri için $q = 0.999$ değerinin 4. iterasyon sonunda istenen kök yine ilk olarak q -çarpımsal Chebyshev yöntemi ile bulundu.

Bu iki tablodan çıkan sonuç, q -çarpımsal iteratif yöntemlerde q değerlerinin genel olarak ne kadar 1 e yaklaşık değerler alınırsa o kadar az iterasyon sayısı ile kökün hesaplandığı görülmüştür.

Çizelge 5.3 de ise $f(x)$ fonksiyonunun $q = 0.999$ değeri alınarak, klasik yöntemlerle elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.3 de kök, ilk olarak çarpımsal ve q -çarpımsal yöntemler tarafından 3. iterasyon sonunda bulunduğu görülmektedir. Klasik Newton metodunda ise 5. iterasyon sonunda istenen köke ulaşılmıştır. Bu örnek için q -çarpımsal iteratif yöntemlerin klasik yöntemlere göre daha başarılı olduğu gözlemlenmektedir.

Örnek 5.5

$f(x) = \ln x - \sin(x)$ denkleminin $[2,3]$ aralığındaki kökünü çarpımsal anlamda başlangıç koşulu $x_0 = 2$ olacak şekilde hesaplayalım.

$f(x) + 1 = g(x)$ dönüşümü ile

$$g(x) = \ln x - \sin(x) + 1$$

şeklinde çarpımsal bir denklem elde edilir. Şimdi de $g(x)$ fonksiyonunun tanımlanan aralıkta kökünün varlığını inceleyelim.

$$\ln g(2) = -0.243537918 \text{ ve } \ln g(3) = 0.671664205$$

elde edilir. Böylece

$$\ln g(2) \cdot \ln g(3) = -0.163575702 < 0$$

koşulu sağlanır ve verilen aralıkta denklemin kökü vardır.

Aşağıdaki Çizelge 5.4 de $f(x)$ fonksiyonunun $q = 0.99999$ değeri alınarak, yaklaşık kökler elde edilmiştir.

Çizelge 5. 4 q -çarpımsal Newton-Raphson ve Chebyshev metotları için elde edilen değerler

x_i	q-ÇN	q-ÇC
x_1	2.20836865	2.198618478
x_2	2.219078905	2.218903656
x_3	2.219107149	2.219107127
x_4	2.219107149	2.219107149
x_5	2.219107149	2.219107149
x_6	2.219107149	2.219107149

Çizelge 5.4 de görüldüğü gibi elde ettiğimiz yeni yöntemlerle denklemin köküne yaklaşık olarak ulaşılmaktadır. Yöntemlerdeki iterasyon sayıları birbirinden farklı olmakla birlikte ilk olarak 3. iterasyon sonunda q -çarpımsal Newton yöntemiyle sonuca ulaşılmıştır.

5.2 İnterpolasyon Teorisi

İnterpolasyon kelimesi, bir fonksiyonun verilmiş değerleri için, bu fonksiyonun yine verilen aralıkta bilinmeyen değerlerinin hesaplanması işlemidir. Başka bir anlamda interpolasyon, verilen herhangi fonksiyonun özellikleri bilinen daha basit bir fonksiyona indirgenmesi ve yerine kullanılması işlemidir. Bir $f(x)$ fonksiyonuna uygun $f(x)$ e yaklaşık olarak eşit $g(x)$ fonksiyonuna yaklaşım fonksiyonu denir aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f(x) \cong g(x)$$

Çarpımsal analiz ve q -analizin özellikle matematik dünyasında yer edinmesi ile birlikte interpolasyon teorisi için de yeni kavramlar ortaya çıkmıştır. Özellikle bu kavramları kullanarak sayısal analiz için de etkin bir şekilde kullanılabilecek yeni yöntemler geliştirilmiştir. Bu analizlerde ifade edilen Taylor formülü sayesinde, Taylor açılımı yapılarak sayısal analizde kullanılabilecek birçok yöntem ortaya konabilir. Özellikle temelinde üstel fonksiyonların kullanıldığı problemlerde çarpımsal analiz, sayısal olarak çok daha iyi sonuçlar vermektedir [12]. Bu bölümde q -çarpımsal interpolasyon kavramları üzerinde durulacaktır ve uygulamalardaki sonuçların klasik yöntemlerle olan farklılıkları gösterilecektir. Dolayısıyla bu yöntemlerin klasik yöntemlere alternatif olarak da düşünülebilir.

Öncelikle interpolasyon teorisinde yer alan tanımların çarpımsal olarak karşılıklarını ifade edelim.

5.2.1 Çarpımsal İnterpolasyon

2009 yılında Misirli ve Ozyapici tarafından [12] de verilen üstel fonksiyon yöntemleri için farklı bakış açıları sunan tanımlar, q teorisinde uygulanabilirliği açısından bu bölümde ele alındı. Tanımlara geçmeden önce bahsetmek gerekir ki, üstel fonksiyon yöntemleri sadece pozitif fonksiyonlar üzerine uygulanabilir. Bu durum her ne kadar dezavantaj gibi gözüksede kullanılan problemlerde üstel fonksiyonlar için daha iyi sonuçlar vermesi de avantaj sağlamaktadır.

Tanım 5.6 (Çarpımsal Lagrange İnterpolasyon Formülü)

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, farklı noktalar olsun ve n . dereceden

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

polinomlarını gözönüne alalım ve burada

$$L_{n,k}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } k \neq i \\ 1 & \text{eğer } k = i \end{cases}$$

dir. O halde $E_n(x)$ üstel fonksiyonu olmak üzere $n + 1$ farklı nokta için çarpımsal (üstel) Lagrange interpolasyon formülü

$$E_n(x) = [f(x_0)]^{L_{n,0}(x)} \dots [f(x_n)]^{L_{n,n}(x)}$$

$$= \prod_{k=0}^n [f(x_k)]^{L_{n,k}(x)} \quad (5.17)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.7

f fonksiyonu $[a, b]$ de $n + 1$ kez çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde çarpımsal Lagrange yöntemi için hata formülü

$$E(x) = [f^{*(n+1)}(\varepsilon)] \prod_{i=0}^n \frac{(x_i - x_k)}{(n+1)!} \quad (5.18)$$

olacak şekilde $\varepsilon \in (a, b)$ noktası vardır.

$f(x)$ fonksiyonu eşit aralıklar olduğu durumda üstel interpolasyon çok terimli değişik formda yazılabilir. Şimdi de bu formun üstel fonksiyonlar için çarpımsal anlamda nasıl ifade edildiğini gösterelim. Ayrıca, klasik analizde geçen ileri yada geri fark operatörü çarpımsal analizde ileri yada geri bölüm operatörü olarak ve yine klasik analizde ki bölünmüş fark formülleri çarpımsal analizde çarpımsal kuvvet-bölüm formülü olarak tanımlanmaktadır.

Tanım 5.8

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $h \neq 0$ ve $x_k = x_0 + kh$ olmak üzere x_k noktasında ileriye doğru bölüm gösterimi $\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)}$ şeklinde tanımlanır ve $\Delta^* f(x_k)$ veya $\Delta^* f_k$ ile gösterilir.

Bu ifadenin ileriye doğru bölüm operatörü notasyonu

$$\Delta^* f(x_k) = \frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.19)$$

şeklindedir. İleriye doğru ikinci dereceden bölüm operatörü $\Delta^{*(2)}f(x_k)$ veya $\Delta^{*(2)}f_k$ şeklinde gösterilir ve

$$\Delta^{*(2)}f(x_k) = \Delta^*(\Delta^*f(x_k)) = \frac{\Delta^*f(x_{k+1})}{\Delta^*f(x_k)} = \frac{f(x_{k+2})f(x_k)}{(f(x_{k+1}))^2}$$

dir ve $n + 1$. mertebe gösterimi

$$\begin{aligned} \Delta^{*(n+1)}f(x_k) &= \Delta^{*(n)}(\Delta^*f(x_k)) \\ &= \Delta^{*(n)}\left(\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)}\right) \\ &= \frac{\Delta^{*(n)}f(x_{k+1})}{\Delta^{*(n)}f(x_k)} \end{aligned}$$

şeklindedir. Geriye doğru bölüm operatörü ∇^* şeklinde gösterilir ve $x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0$ aralık noktaları olmak üzere

$$\nabla^* f(x_k) = \frac{f(x_k)}{f(x_{k-1})} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.9

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, n tane nokta olmak üzere $f(x)$ fonksiyonun n . mertebeden çarpımsal kuvvet-bölüm formülü

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] = \left(\frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+j}]}{f[x_i, x_{i+2}, \dots, x_{i+j-1}]} \right)^{\frac{1}{x_{i+j} - x_i}} \quad (5.20)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi de ileri bölüm operatörünün kuvvet-bölüm rekürsif bağıntısı cinsinden ifadesine çarpımsal anlamda göz atalım. x' ’in $x_0, x_1, x_2, \dots$, değerleri için sıra ile $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$ değerlerini alan bir fonksiyon ele alalım. $f(x)$ ‘in herhangi iki değeri $f(x_k)$ ve $f(x_m)$ olmak üzere, birinci mertebe gösterimi

$$f[x_k, x_m] = \left(\frac{f(x_m)}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{x_m - x_k}} \quad (5.21)$$

formu ile tanımlanır. Bu formda x_m ve x_k değerlerinin ardışık değerler olarak alınmasına dikkat edilmelidir.

Buna benzer olarak $f(x)$ 'in iki kez çarpımsal anlamda kuvvet-bölüm gösterimi $f[x_k, x_m]$ ve $f[x_m, x_n]$ ise ikinci mertebeden ifadesi

$$f[x_k, x_m, x_n] = \left(\frac{f[x_m, x_n]}{f[x_k, x_m]} \right)^{\frac{1}{x_n - x_k}}$$

formu ile tanımlanır. O halde

$$\Delta^* f(x_k) = \frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)}$$

olmak üzere (5.21) bağıntısından

$$f[x_k, x_{k+1}] = \left(\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{x_{k+1} - x_k}}$$

$$f[x_k, x_{k+1}] = (\Delta^* f(x_k))^{\frac{1}{x_{k+1} - x_k}}$$

ulaşılır. 2. mertebe için, x_k ve x_n ardışık değerler olmak üzere $h = x_k - x_n$ şeklinde kabul edilirse

$$\Delta^{*(2)} f(x_k) = \frac{\Delta^* f(x_{k+1})}{\Delta^* f(x_k)}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] &= \left(\frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}]}{f[x_k, x_{k+1}]} \right)^{\frac{1}{x_{k+2} - x_k}} \\ &= \left(\frac{\left(\frac{f(x_{k+2})}{f(x_{k+1})} \right)^{\frac{1}{x_{k+2} - x_{k+1}}}}{\left(\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{x_{k+1} - x_k}}} \right)^{\frac{1}{x_{k+2} - x_k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{(\Delta^* f(x_{k+1}))^{\frac{1}{h}}}{(\Delta^* f(x_k))^{\frac{1}{h}}} \right)^{\frac{1}{2h}} \\
&= (\Delta^{*(2)} f(x_k))^{\frac{1}{2h^2}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç olarak bu işlemlere n kez devam edildiğinde

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] = (\Delta^{*(k)} f(x_k))^{\frac{1}{k!h^k}} \quad (5.22)$$

bağıntısına ulaşılır. Eğer $x_k = k$ alınırsa $x_{k+1} - x_k = k + 1 - k = 1 = h$ bulunur ve (5.22) bağıntısı

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] = (\Delta^{*(k)} f(x_k))^{\frac{1}{k!}} \quad (5.23)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 5.10

$x_0, x_1, \dots, x_k$, $k + 1$ tane nokta olmak üstel interpolasyon yaklaşımı

$$E_k(x) = f[x_0] \prod_{i=1}^k \left((f[x_1, \dots, x_i])^{\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)} \right) \quad (5.24)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca (5.17) ve (5.24) bağıntılarından

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \prod_{i=0}^k (f(x_i))^{\frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)}} \quad (5.25)$$

yazılabilir.

Tanım 5.11

$x_0, x_1, \dots, x_k$, $k + 1$ nokta $[a, b]$ aralığında ayrık noktalar olmak üzere f fonksiyonu (a, b) de n kez çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = (f^{*(k)}(\varepsilon))^{1/k!} \quad (5.26)$$

olacak şekilde tek bir $\varepsilon \in (a, b)$ noktası vardır.

Tanım 5.12

$j \geq 0$ ve $x_j = x_0 + jh$ verildiğinde $x = x_0 + sh$ değişken değiştirilmesi yapılarak ileri bölüm operatörlerine bağlı üstel interpolasyon yaklaşımı

$$E_n(x) = \exp \left[\sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \ln \left(\Delta^{*(k)} f(x_0) \right) \right] \quad (5.27)$$

aynı şekilde veri noktaları $x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0$ olmak üzere geri bölüm operatörlerine bağlı üstel interpolasyon yaklaşımı

$$E_n(x) = \exp \left[\sum_{k=0}^{s+n-1} \binom{s+k-1}{k} \ln \left(\nabla^{*(k)} f(x_0) \right) \right]$$

şeklinde tanımlanır.

5.2.2 q -Çarpımsal interpolasyon Yaklaşımı

Bir önceki kısımda çarpımsal üstel interpolasyona ait bazı kavramlar verildi. Şimdide bu kavramların q -analizle olan ilişkisi gözönüne alınarak yeni kavram ve uygulamalardan bahsedeceğiz. Bu kısımda interpolasyon yaklaşımının özel bir durumu düşünüldü. Genellikle matematiksel tablolarda fonksiyonlar eşit aralıklarla ifade edilir. Bu da, eşit aralıklı noktalarda interpolasyon üzerinde çalışma güdüsü vermektedir. Biz de burdan yola çıkarak ardışık noktalar arasındaki aralıkların eşit olmadığı ancak geometrik bir artış içinde olduğu değişimi göz önüne alınarak yeni bir interpolasyon formunu ele aldık. İşte bu ortak ilerleme oranı (geometrik artış) da " q " ile gösterilecektir.

Öncelikle sonlu bölüm analizine geçmeden önce q -analize ait birkaç tanım üzerinde duralım. n tamsayı olmak üzere, verilen bir $q > 0$ için

$$[n] = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \\ n & q = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır, $[n]$ q -doğal sayısı olarak adlandırılır. Bu tanımlı n 'yi herhangi bir reel sayı kabul ederek de genişletebiliriz. Bu durumda $[n]$, q -reel olarak adlandırılır [14].

Örneğin $q > 0$ için $M = \{[n]: n \in \mathbb{N}\}$ tanımlı olsun. O halde M kümesi

$M = \{0, 1, 1 + q, 1 + q + q^2, 1 + q + q^2 + q^3, \dots\}$ dir. M kümesini incelediğimizde

→ Eğer $q > 1$ ise aralıklar giderek artacak

→ Eğer $0 < q < 1$ ise aralıklar giderek küçülecek

→ Eğer $q = 1$ olduğu takdirde de n -tamsayılar kümesi doğal sayılar kümesine eşit olacaktır.

Tanım 5.13

n ve k tamsayıları ve $n \geq k \geq 0$ olmak üzere

$$[n]_k = \frac{[n][n-1] \dots [n-k+1]}{[k]} = \frac{[n]!}{[k]! [n-k]!}$$

olarak tanımlanır ve bu ifadeye q -binom katsayısı denir.

Şimdi de birkaç tanımdan sonra çarpımsal analize ait interpolasyon kavramlarının q -genişlemelerini gösterelim.

(5.20) bağıntısına göz attığımızda üstel kısmın paydasında yer alan ve iki nokta arasındaki farkı gösteren $x_k - x_m$ ifadesindeki $x_k = [k]$ şekilde tanımlayalım.

$$x_0 = [0], \quad x_1 = [1], \dots, \quad x_n = [n]$$

bu durumda $x_k = [k]$ alındığında iki nokta arasındaki fark

$$\begin{aligned} x_{k+m+1} - x_k &= [k+m+1] - [k] \\ &= \frac{1 - q^{k+m+1}}{1 - q} - \frac{1 - q^k}{1 - q} \\ &= \frac{q^k(1 - q^{m+1})}{1 - q} \\ &= q^k[m+1] \end{aligned}$$

$$x_{k+m+1} - x_k = q^k[m+1] \tag{5.28}$$

(5.28) den, ardışık iki nokta için q -çarpımsal-kuvvet formülü

$$f[x_k, x_{k+1}] = \left(\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{x_{k+1} - x_k}}$$

$$= \left(\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{q^k}}$$

şeklinde olur. Daha genel olarak yazılırsa herhangi iki nokta $m \geq k$ olmak üzere birinci merteye ileri bölüm formülünün q -çarpımsal ifadesi

$$f[x_k, x_m] = \left(\frac{f(x_m)}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{q^{k[m-k]}}} \quad (5.29)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi de çarpımsal ileri bölüm operatörünün q -fark operatörüyle ilişkisini kuralım.

q -çarpımsal ileri bölüm operatörü Δ_q^* olmak üzere

$$\Delta_q^* = \frac{f(x_k)}{f(x_m)}$$

şeklinde ifade edelim. O halde ileri bölüm operatörünün kuvvet-bölüm gösterimi

$$f[x_k, x_{k+1}] = (\Delta_q^* f(x_k))^{\frac{1}{q^k}}$$

yada

$$\Delta_q^* f(x_k) = (f[x_k, x_{k+1}])^{q^k}$$

dir. Burada $k = 0$ yada $q = 1$ için $\Delta_q^* f(x_k)$ ifadesinin birinci mertebeden $\Delta^* f(x_k)$ ile aynıdır.

Şimdide daha yüksek mertebeden kuvvet-bölüm bağıntısını inceleyelim. (5.20) bağıntısından

$$\begin{aligned} f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] &= \left(\frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}]}{f[x_k, x_{k+1}]} \right)^{\frac{1}{x_{k+2}-x_k}} \\ &= \left(\frac{\left(\frac{f(x_{k+2})}{f(x_{k+1})} \right)^{\frac{1}{x_{k+2}-x_{k+1}}}}{\left(\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{x_{k+1}-x_k}}} \right)^{\frac{1}{x_{k+2}-x_k}} \end{aligned}$$

Burada (5.28) den $x_{k+2} - x_k = q^k[2]$ olduğundan

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \left(\frac{(\Delta_q^* f(x_{k+1}))^{\frac{1}{q^{k+1}}}}{(\Delta_q^* f(x_k))^{\frac{1}{q^k}}} \right)^{\frac{1}{q^{k[2]}}}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \left(\frac{(\Delta_q^* f(x_{k+1}))^{\frac{1}{q}}}{\Delta_q^* f(x_k)} \right)^{\frac{1}{q^{2k[2]}}} \quad (5.30)$$

şeklinde ikinci mertebe kuvvet-bölüm bağıntısı yazılabilir. Eğer (5.30) bağıntısında

$$\Delta_q^{*(2)} f(x_k) = \frac{(\Delta_q^* f(x_{k+1}))^{\frac{1}{q}}}{\Delta_q^* f(x_k)}$$

yazılırsa ikinci mertebe kuvvet-bölüm bağıntısının ileri bölüm operatörü gösterimi

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \left(\Delta_q^{*(2)} f(x_k) \right)^{\frac{1}{q^{2k[2]}}}$$

şeklinde yazılır. Şimdide bu ilişkiyi güçlendirmek adına üçüncü mertebeden kuvvet-bölüm bağıntısının ifadesine bakalım.

$$\begin{aligned} f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] &= \left(\frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]}{f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]} \right)^{\frac{1}{x_{k+3}-x_k}} \\ &= \left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{f(x_{k+3})}{f(x_{k+2})} \right)^{\frac{1}{x_{k+3}-x_{k+2}}}}{\left(\frac{f(x_{k+2})}{f(x_{k+1})} \right)^{\frac{1}{x_{k+2}-x_{k+1}}}} \right)^{\frac{1}{x_{k+3}-x_{k+1}}}}{\left(\frac{\left(\frac{f(x_{k+2})}{f(x_{k+1})} \right)^{\frac{1}{x_{k+2}-x_{k+1}}}}{\left(\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{x_{k+1}-x_k}}} \right)^{\frac{1}{x_{k+2}-x_k}}} \right)^{\frac{1}{x_{k+3}-x_k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\left(\frac{(\Delta_q^* f(x_{k+2}))^{\frac{1}{q^{k+2}}}}{(\Delta_q^* f(x_{k+1}))^{\frac{1}{q^{k+1}}}} \right)^{\frac{1}{q^{k+1}[2]}}}{\left(\frac{(\Delta_q^* f(x_{k+1}))^{\frac{1}{q^{k+1}}}}{(\Delta_q^* f(x_k))^{\frac{1}{q^k}}} \right)^{\frac{1}{q^k[2]}}} \right)^{\frac{1}{q^k[3]}} \\
&= \left(\frac{(\Delta_q^{*(2)} f(x_{k+1}))^{\frac{1}{q^{2k+2}[2]}}}{(\Delta_q^{*(2)} f(x_k))^{\frac{1}{q^{2k}[2]}}} \right)^{\frac{1}{q^k[3]}} \\
&= \left(\frac{(\Delta_q^{*(2)} f(x_{k+1}))^{\frac{1}{q^2}}}{(\Delta_q^{*(2)} f(x_k))} \right)^{\frac{1}{q^{3k}[3]!}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $[3]! = [3][2][1]$ şeklinde q - faktöriyel sayısıdır. O halde yukardaki eşitliklerden aşağıdaki tanıımı yapabiliriz.

Tanım 5.14

f herhangi bir fonksiyon ve $k = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $n + 1$. mertebeden q -çarpımsal ileri bölüm operatörü ifadesi

$$\Delta_q^{*(n+1)} f(x_k) = \frac{(\Delta_q^{*(n)} f(x_{k+1}))^{\frac{1}{q^n}}}{(\Delta_q^{*(n)} f(x_k))} \quad (5.31)$$

şeklinde tanımlanır. n tamsayısının 0 ve 1 değerleri için $\Delta_q^{*(0)} f(x_k) = f(x_k)$ ve $\Delta_q^{*(1)} f(x_k) = \Delta_q^* f(x_k)$ dir.

Dikkat edilirse $q = 1$ değeri için çarpımsal analizdeki ileri bölüm bağıntısına ulaşılır. Ancak $q = 1$ olmadığı takdirde, $k \geq 2$. mertebeden $\Delta_q^{*(k)} f(x_k)$ ile $\Delta^* f(x_k)$ aynı değildir.

Önerme 5.15

f, g iki fonksiyon ve α, β sabitler olmak üzere q -çarpımsal bölüm operatörü için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

1. $\Delta_q^* \left((\alpha f(x_k)) \cdot (\beta g(x_k)) \right) = \Delta_q^* f(x_k) \cdot \Delta_q^* g(x_k),$
2. $\Delta_q^* \left(\frac{\alpha f(x_k)}{\beta g(x_k)} \right) = \frac{\Delta_q^* f(x_k)}{\Delta_q^* g(x_k)},$
3. f sabit ise $\Delta_q^* f(x_k) = 1$ dir,

Teorem 5.16

Bütün $m, k \geq 0$, $[m]! = [m][m-1] \dots [1]$ ve $x_k = [k]$ olmak üzere

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}] = \left(\Delta_q^{*(m)} f(x_k) \right)^{\frac{1}{q^{km}[m]!}} \quad (5.32)$$

dir.

İspat: İspatı tümevarım kullanarak yapılabilir.

I. $m = 0$ için

$$f[x_k] = \left(\Delta_q^{*(0)} f(x_k) \right)^{\frac{1}{q^{0[0]!}}} = f(x_k)$$

doğrudur.

II. m için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, x_{k+m}] = \left(\Delta_q^{*(m)} f(x_k) \right)^{\frac{1}{q^{km}[m]!}}$$

dır.

III. $m + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, x_{k+m+1}] = \left(\Delta_q^{*(m+1)} f(x_k) \right)^{\frac{1}{q^{k(m+1)}[m+1]!}}$$

olduğunu bulmamız gerek.

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, x_{k+m+1}] = \left(\frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+m+1}]}{f[x_k, \dots, x_{k+m}]} \right)^{\frac{1}{x_{k+m+1} - x_k}}$$

yazılır. (5.31) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}
 f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, x_{k+m+1}] &= \left(\frac{\left(\Delta_q^{*(m)} f(x_{k+1}) \right)^{\frac{1}{q^{(k+1)m}[m]!}}}{\left(\Delta_q^{*(m)} f(x_k) \right)^{\frac{1}{q^{km}[m]!}}} \right)^{\frac{1}{q^{k[m+1]}}} \\
 &= \left(\frac{\left(\Delta_q^{*(m)} f(x_{k+1}) \right)^{\frac{1}{q^m}}}{\Delta_q^{*(m)} f(x_k)} \right)^{\frac{1}{q^{k(m+1)[m+1]!}}} \\
 &= \left(\Delta_q^{*(m+1)} f(x_k) \right)^{\frac{1}{q^{k(m+1)[m+1]!}}}
 \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Şimdide yukardaki tanımları kullanarak çarpımsal Lagrange yönteminin q -benzerini gösterelim. (5.24) deki çarpımsal üstel interpolasyon yaklaşım ifadesinde yer alan noktalar $x_k = [k]$ şeklinde olsun.

$$\pi_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} x_n - x_k = x(x - [1])(x - [1])(x - [2]) \dots (x - [n - 1]), \quad n > 0$$

$$\pi_0(x) = 1$$

O zaman $x = [r]$ yazılırsa, $k = 1, 2, \dots, n - 1$ için

$$x - [k] = [r] - [k] = \frac{1 - q^r}{1 - q} - \frac{1 - q^k}{1 - q} = q^k \frac{1 - q^{r-k}}{1 - q} = q^k [r - k] \quad (5.33)$$

$$\pi_n([r]) = \prod_{k=0}^{n-1} [r] - [k] = [r]([r] - [1])([r] - [2]) \dots ([r] - [n - 1]) \quad (5.34)$$

olduğundan

$$\pi_n([r]) = [r]q^1[r - 1]q^2[r - 2] \dots q^{n-1}[r - n + 1]$$

$$\pi_n([r]) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} [r][r - 1][r - 2] \dots [r - n + 1] \quad (5.35)$$

elde edilir. O halde (5.32) ve (5.35) kullanılarak

$$(f[x_0, x_1, \dots, x_n])^{\pi_n([r])} = \left(\left(\Delta_q^{*(n)} f(x_0) \right)^{\frac{1}{[n]!}} \right)^{q^{\frac{n(n-1)}{2} [r][r-1][r-2] \dots [r-n+1]}}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} (f[x_0, x_1, \dots, x_n])^{\pi_n([r])} &= \left(\left(\Delta_q^{*(n)} f(x_0) \right)^{\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2} [r][r-1][r-2] \dots [r-n+1]}}{[n]!}} \right) \\ &= \left(\Delta_q^{*(n)} f(x_0) \right)^{q^{\frac{n(n-1)}{2} [r]} [n]} \end{aligned}$$

Sonuç itibariyle $x_r = [r]$ için

$$E_{q,n}(x) = E_{q,n}([r]) = \prod_{k=0}^n \left(\Delta_q^{*(k)} f(x_0) \right)^{q^{\frac{k(k-1)}{2} [r]} [k]} \quad (5.36)$$

elde edilir. Bu ifade ise çarpımsal analizde yer alan üstel interpolasyon yaklaşım bağıntısının q -benzeridir. $q \rightarrow 1$ için limit alınırca çarpımsal üstel interpolasyon yaklaşımı elde edilir.

Tanım 5.17

Bütün $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f \in C[a, b]$ olsun. $x_0, x_1, \dots, x_n$ farklı noktalar, $[a, b]$ aralığında olmak üzere $\forall x \in (a, b)$ için $f^{*(n)}(x)$ var olsun. O halde

$$(f^{*(k)}(\varepsilon))^{1/k!} = \left(\Delta_q^{*(k)} f(x_0) \right)^{\frac{1}{[k]!}}$$

olacak şekilde $\varepsilon \in (x_0, x_n)$ vardır.

İspat: (5.32) den

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \left(\Delta_q^{*(k)} f(x_j) \right)^{\frac{1}{q^{jk} [k]!}}$$

$j = 0$ için

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \left(\Delta_q^{*(k)} f(x_0) \right)^{\frac{1}{[k]!}}$$

yazılabilir. Ayrıca (5.26) da

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = (f^{*(k)}(\varepsilon))^{1/k!}$$

olduğundan dolayı

$$(f^{*(k)}(\varepsilon))^{1/k!} = \left(\Delta_q^{*(k)} f(x_0) \right)^{\frac{1}{[k]!}}$$

elde edilir.

Önerme 5.18

Aralık noktaları $x_j = x_0, x_1, \dots, x_n$ $j = 0, 1, 2, \dots, n$, $q > 0$ olmak üzere, $x_k = [k]$ noktası sabit bir tamsayı ve $0 \leq k \leq n$ için

$$\prod_{j \neq k} x_k - x_j = (-1)^{n-k} q^{k(2n-k-1)/2} [k]! [n-k]!$$

eşitliği sağlanır.

İspat $0 \leq k \leq n$ ve $k \neq j$ olduğundan eşitliğimizi 2 kısma ayıralım. 1. kısımda j değeri 0 dan $k-1$ kadar 2. kısımda ise $k+1$ den n ye kadar olsun. O halde

$$\prod_{j \neq k} x_k - x_j = \prod_{j=0}^{k-1} x_k - x_j \prod_{j=k+1}^n x_k - x_j$$

dir. 1. kısım için

$$\prod_{j=0}^{k-1} x_k - x_j = \prod_{j=0}^{k-1} [k] - [j] = [k]([k] - [1])([k] - [2]) \dots ([k] - [k-1])$$

(5.28) den

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{k-1} [k] - [j] &= [k]q^1[k-1]q^2[k-2] \dots q^{k-1}[1] \\ &= q^{\frac{k(k-1)}{2}} [k]! \end{aligned} \tag{5.37}$$

2. kısım için

$$\prod_{j=k+1}^n [k] - [j] = ([k] - [k+1])([k] - [k+2]) \dots ([k] - [n])$$

Bu kısımda $j > k$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\prod_{j=k+1}^n [k] - [j] &= \left(\frac{q^{k+1} - q^k}{q - 1} \right) \left(\frac{q^{k+2} - q^k}{q - 1} \right) \cdots \left(\frac{q^n - q^k}{q - 1} \right) \\
&= \frac{q^k(q-1)}{q-1} \frac{q^k(q^2-1)}{q-1} \cdots \frac{q^k(q^{n-k}-1)}{q-1} \\
&= (-1)^{n-k} q^{k(n-k)} [1][2] \cdots [n-k] \\
&= (-1)^{n-k} q^{k(n-k)} [n-k]!
\end{aligned} \tag{5.38}$$

(5.37) ve (5.38) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\prod_{j \neq k} x_k - x_j &= (-1)^{n-k} q^{\frac{k(k-1)}{2}} [k]! q^{k(n-k)} [n-k]! \\
&= (-1)^{n-k} q^{k(2n-k-1)/2} [k]! [n-k]!
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 5.19

Aralık noktaları $x_j = x_0, x_1, \dots, x_n$ $j = 0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $q > 0$ ve $x_k = [k]$ noktası sabit bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta_q^{*(n)} f(x_0) = \prod_{k=0}^n (f(x_k))^{(-1)^{n-k} q^{k(k-2n+1)/2} [n]} \tag{5.39}$$

dir.

İspat (5.25) ve (5.32) bağıntılarından

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \left(\Delta_q^{*(n)} f(x_0) \right)^{\frac{1}{[n]!}}$$

eşitliğin sağ tarafındaki üstel kısmı, aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Delta_q^{*(n)} f(x_0) = \prod_{k=0}^n (f(x_k))^{\frac{[n]!}{\prod_{j=0, j \neq k}^n x_k - x_j}}$$

ve aynı zamanda önerme 5.18 den

$$\begin{aligned}\Delta_q^{*(n)} f(x_0) &= \prod_{k=0}^n (f(x_k))^{(-1)^{n-k} q^{k(2n-k-1)/2} [k]! [n-k]!} \\ &= \prod_{k=0}^n (f(x_k))^{(-1)^{n-k} q^{k(k-2n+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 5.20

$f(x) = x^2 e^{(-\frac{x}{2})}$ olsun. Öncelikle q' nun herhangi keyfi değeri için q -doğalsayı noktalarını oluşturalım.

$q = 0.5$ için

$$x_0 = [2] = \frac{1 - (0.5)^2}{1 - 0.5} = 1.5$$

$$x_1 = [4] = \frac{1 - (0.5)^4}{1 - 0.5} = 1.875$$

$$x_2 = [5] = \frac{1 - (0.5)^5}{1 - 0.5} = 1.9375$$

$$x_3 = [8] = \frac{1 - (0.5)^8}{1 - 0.5} = 1.9921875$$

$$x_4 = [10] = \frac{1 - (0.5)^{10}}{1 - 0.5} = 1.998046875$$

Yukardaki $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ noktalarındaki değerlere göre f fonksiyonunda karşılık gelen değerler aşağıdaki gibi olur.

$$f(x_0) = f(1.5) = 1.062825$$

$$f(x_1) = f(1.875) = 1.376739$$

$$f(x_2) = f(1.9375) = 1.424822$$

$$f(x_3) = f(1.9921875) = 1.465758$$

$$f(x_4) = f(1.998046875) = 1.470080$$

Şimdi de çarpımsal kuvvet-bölüm karşılıklarını ifade edelim.

$$f[x_0, x_1] = \left(\frac{f[x_1]}{f[x_0]} \right)^{\frac{1}{x_1 - x_0}} = 1.993913329739197$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \left(\frac{f[x_1, x_2]}{f[x_0, x_1]} \right)^{\frac{1}{x_2 - x_0}} = 0.724770323133711$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \left(\frac{f[x_1, x_2, x_3]}{f[x_0, x_1, x_2]} \right)^{\frac{1}{x_3 - x_0}} = 1.117528486760500$$

(5.24) deki çarpımsal üstel yaklaşımı formülünde $n = 3$ için

$$\begin{aligned} E_3(x) &= 1.062825x(1.993913329739197)^{(x-1.5)} \\ &\quad x(0.724770323133711)^{(x-1.5)(x-1.875)} \\ &\quad x(1.1175284867605)^{(x-1.5)(x-1.875)(x-1.9375)} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$[6] = \frac{1-0.5^6}{1-0.5} = 1.96875 \text{ için } E_3(1.96875) \text{ değerini bulalım.}$$

$$\begin{aligned} E_3(1.96875) &= 1.062825x(1.993913329739197)^{(1.96875-1.5)} \\ &\quad x(0.724770323133711)^{(1.96875-1.5)(1.96875-1.875)} \\ &\quad x(1.1175284867605)^{(1.96875-1.5)(1.96875-1.875)(1.96875-1.9375)} \end{aligned}$$

$$E_3(1.96875) = 1.448344300791526$$

(5.18) den

$$E_4(x) = [f^{*(4)}(\varepsilon)]^{\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{4!}}$$

yazılır. Mutlak hata için

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = (f^{*(k)}(\varepsilon))^{1/k!}$$

olduğundan

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = (f^{*(4)}(\varepsilon))^{1/4!}$$

o halde

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0.971189638465264$$

$$\begin{aligned} E_4(1.96875) \\ \cong 0.971189638465264^{(1.96875-1.5)(1.96875-1.875)(1.96875-1.9375)(1.96875-1.9921875)(1.96875-1.998046875)} \end{aligned}$$

$$E_4(1.96875) \cong 0.9999999724$$

Şimdi de üstel interpolasyon formülünün q -benzer formülünü kullanarak $E_{q,3}([6]) = E_3(1.96875)$ değerini bulalım.

$$E_{q,n}([r]) = \prod_{k=0}^n \left(\Delta_q^{*(k)} f(x_0) \right)^{q^{\frac{k(k-1)}{2}} [r]_k}$$

formülünden

$$E_3([6]) = \left(\Delta_q^{*(0)} f(x_0) \right)^{[6]_0} \left(\Delta_q^{*(1)} f(x_0) \right)^{[6]_1} \left(\Delta_q^{*(2)} f(x_0) \right)^{q [6]_2} \left(\Delta_q^{*(3)} f(x_0) \right)^{q^3 [6]_3}$$

(5.39) dan

$$\Delta_q^{*(0)} f(x_0) = 1.062825$$

$$\begin{aligned} \Delta_q^{*(1)} f(x_0) &= \frac{f(x_1)}{f(x_0)} \\ &= 1.295358125749771 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_q^{*(2)} f(x_0) &= \frac{f(x_0) f(x_2)^{\frac{1}{q}}}{f(x_1)^{\frac{[2]}{q}}} \\ &= 0.826852683683331 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_q^{*(3)} f(x_0) &= \frac{f(x_1)^{\frac{[3]}{q^2}} f(x_3)^{\frac{1}{q^3}}}{f(x_0) f(x_2)^{\frac{[3]}{q^3}}} \\ &= 1.322358341966941 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_q^{*(4)} f(x_0) &= \frac{f(x_0) f(x_2)^{\frac{[6]}{q^5}} f(x_4)^{\frac{1}{q^6}}}{f(x_1)^{\frac{[4]}{q^3}} f(x_3)^{\frac{[4]}{q^6}}} \\ &= 0.025879468145896 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
E_{q,3}([6]) &= 1.062825 \times (1.295358125749771)^{1.96875} \\
&\quad \times (0.826852683683331)^{0.999969482421875} \\
&\quad \times (1.322358341966941)^{0.249999761581421} \\
&= 1.568545810621158
\end{aligned}$$

(5.32) kullanılarak

$$(f^{*(k)}(\varepsilon))^{1/k!} = \left(\Delta_q^{*(k)} f(x_0) \right)^{\frac{1}{[k]!}}$$

yazılır ve q -çarpımsal mutlak hata

$$E_{q,4}([6]) \cong \left(\left(\Delta_q^{*(4)} f(x_0) \right)^{\frac{1}{4!}} \right)^{([6]-x_0)([6]-x_1)([6]-x_2)([6]-x_3)}$$

$$\begin{aligned}
E_{q,4}([6]) &\cong (0.025879468145896)^{\frac{(0.46875)(0.09375)(0.03125)(-0.0234375)}{24}} \\
&\cong 1.000004900817399
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 5.21

Bu örnekte q -çarpımsal üstel yaklaşımı ve Newton bölünmüş fark interpolasyon formlarını karşılaştıralım.

$q = 0.5$ keyfi q -doğal sayısı için noktalar

$$x_0 = [2] = 1.5$$

$$x_1 = [4] = 1.875$$

$$x_2 = [5] = 1.9375$$

$$x_3 = [8] = 1.9921875$$

$$x_4 = [10] = 1.998046875$$

ve f fonksiyonun bu noktalarda aldığı değerler

$$x_0 = 1.5 \quad \rightarrow \quad f(x_0) = 4.13$$

$$x_1 = 1.875 \quad \rightarrow \quad f(x_1) = 4.22$$

$$x_2 = 1.9375 \quad \rightarrow \quad f(x_2) = 4.31$$

$$x_3 = 1.9921875 \quad \rightarrow \quad f(x_3) = 4.39$$

$$x_4 = 1.998046875 \rightarrow f(x_4) = 4.46$$

$$x_5 = 1.999755859 \rightarrow f(x_5) = 4.53$$

şeklinde olsun. Newton bölünmüş fark formülü [14] için 4.mertebeden açılımı

$$g_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

şeklindedir.

Buna göre [6] için

$$[6] = \frac{1 - 0.5^6}{1 - 0.5} = 1.96875$$

bulunur. O halde Newton bölünmüş fark formülü

$$g_3(1.96875) = 4.13 + 0.24(1.96875 - 1.5) \\ + 2.742857143(1.96875 - 1.5)(1.96875 - 1.875) \\ - 5.176501888(1.96875 - 1.5)(1.96875 - 1.875)(1.96875 - 1.9375)$$

Sonuç itibariyle

$$g_3(1.96875) = 4.355926870756836$$

bulunur. Bu fonksiyon için mutlak hata [14] verilen bağıntıya göre

$$f(x) - g_3(x) \cong f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$f(1.96875) - g_3(1.96875) \cong 2832.654075x(0.46875)x(0.09375)$$

$$x(0.03125)x(-0.0234375)$$

$$= -0.091173243552446$$

Şimdi de q -çarpımsal interpolasyon formülünü uygulayarak $E_3(1.96875) = E_3([6])$ değerini hesaplayalım. (5.36) bağıntısından

$$E_{q,3}([6]) = \left(\Delta_q^{*(0)} f(x_0)\right)^{[6]_0} x \left(\Delta_q^{*(1)} f(x_0)\right)^{[6]_1} x \left(\Delta_q^{*(2)} f(x_0)\right)^{q[6]_2} \\ x \left(\Delta_q^{*(3)} f(x_0)\right)^{q^3[6]_3}$$

yazılabilir. q -çarpımsal ileri bölüm operatörü karşılıklarını bulalım. (5.39) dan

$$\Delta_q^{*(0)}f(x_0) = 4.13$$

$$\Delta_q^{*(1)}f(x_0) = 1.021791767554479$$

$$\Delta_q^{*(2)}f(x_0) = 1.020862472270661$$

$$\Delta_q^{*(3)}f(x_0) = 1.042969203190113$$

$$\Delta_q^{*(4)}f(x_0) = 0.000046775650502$$

Elde edilir. O halde

$$E_{q,3}([6]) = 4.13x(1.021791767554479)^{[6]}x(1.020862472270661)^{q[15]} \\ x(1.042969203190113)^{q^3[20]}$$

$$E_{q,3}([6]) = 4.445464101746742$$

bulunur. f fonksiyonu için mutlak hata ise

$$E_{q,4}([6]) \cong \left(\left(\Delta_q^{*(4)}f(x_0) \right)^{\frac{1}{4!}} \right)^{([6]-x_0)([6]-x_1)([6]-x_2)([6]-x_3)}$$

$$E_{q,4}(x) = 0.000046775650502^{\frac{(0.46875)(0.09375)(0.03125)(-0.0234375)}{24}}$$

$$E_{q,4}(x) = 1.000013371099519$$

bulunur.

Sonuç itibariyle bu iki örneğe bakığımızda özellikle üstel fonksiyonlar için çarpımsal nümerik formüller daha etkili olmaktadır. Mutlak hatanın klasik analiz için sıfıra, q -çarpımsal analiz için 1'e yakınlığına göre bakılmak üzere, ilk örneğimizdeki q -çarpımsal nümerik yöntem için $q = 0.5$ değeri alındığında bulunan sonuç, çarpımsal yöntemle göre daha etkili olamamıştır fakat q nun farklı değerleri için daha iyi sonuçlar elde edilebilir. İkinci örneğimizde de q -çarpımsal üstel yaklaşım metodu, Newton interpolasyonuna göre daha etkili sonuç verdiği görülmektedir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma kapsamında çarpımsal analizin ve q -analizin temel kavramları, bazı özellikleri verilmiş olup temelinde çarpımsal analiz olmak üzere onun q -genişlemesi yani q -çarpımsal analiz ortaya konulmuştur. Özellikle literatüre katkı anlamında yeni olarak tanımlanan q -çarpımsal türev ve q -çarpımsal integral tanımlarıyla birlikte çarpımsal analize ait teorik kavramlar farklı noktalardan yeniden inşaa edilmiştir. Son yıllarda yapılan çalışmalar doğrultusunda, birçok klasik analize ait kavram ve yöntemlerinin q -genişlemesinin ortaya çıkması, bundan sonraki süreçte q -çarpımsal analiz tanımlarıyla araştırmacılara farklı bakış açısı sunacağı görüşündeyiz. Buna bir örnek olarak çalışmamızın son kısmında da, q -çarpımsal anlamda nümerik analize ait yöntemler sunduk ve bunları problemlerle pekiştirerek karşılaştırmalar yaptık. Her ne kadar problemler pozitif fonksiyonlar için geçerli olsada elde edilen sonuçların klasik yöntemlere göre daha iyi sonuç vermesi q -çarpımsal analizin avantajı olarak görülebilir. Sonuç itibariyle q -çarpımsal analiz özellikle matematik olmak üzere uygulamalı bilim dallarında birçok konunun modellenmesinde ve problem çözümünde farklı bakış açıları sunacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Jackson, F. H. , (1910). “On q -definite integrals”, Quart. J. Pure Appl. Math., (41):193–203.
- [2] Ernst, T., (2012). A comprehensive treatment of q -calculus, Birkhauser/Springer Basel AG, Basel.
- [3] Volterra, V. ve Hostinsky, B., (1938). Operations Infinitesimales Lineares, Herman, Paris.
- [4] Grossman, M. ve Katz, R., (1972). Non-Newtonian Calculus, Pigeon Cove, Lee Press, Mass.
- [5] Stanley, D., (1999). A multiplicative calculus., Primus IX, (4): 310-326.
- [6] Bashirov, A.E., Misirli ve E., Ozyapici, A., (2008). “Multiplicative calculus and its applications”, J. Math. Anal. Appl., (337):36-48.
- [7] Englehardt, J., Swartout, J. ve Loewenstine, C., (2009). “A New Theoretical Discrete Growth Distribution with Verification for Microbial Counts in Water”, Risk Analysis , 29(6):841-856.
- [8] Riza, M., Ozyapici, A. ve Misirli, E., (2009). “Multiplicative finite difference Methods”, Quarterly of Applied Mathematics.
- [9] Yener, G., ve Emiroglu, I. (2015). “A q -analogue of the multiplicative calculus: q -Multiplicative Calculus”. Discrete And Continuous Dynamical Systems-Series S, 8(6):1435-1450.
- [10] Kac, V. ve Cheung, P., (2002). Quantum Calculus, Universitex, Springer-Verlag, New York.
- [11] Rajkovic , P. M., Stankovic, M. S. ve Markovic, S. D., (2002) , “Mean value theorems in q -calculus”, Mat. Vesnik, (54):171–178.
- [12] Misirli, E. ve Ozyapici, A., (2009). “Exponential approximations on multiplicative calculus”, Proc. Jang jeon Math. Soc., (12):227–236.
- [13] Riza, M., Ozyapici, A. ve Misirli, E. , (2009). “Multiplicative Finite Difference Methods”, Q. Appl. Math., (67):745–754.

- [14] Phillips, G.M.,(2003), Interpolation and Approximation by Polynomials, Springer, New York.
- [15] Kim, M.S. ve Son, J.W., (2002), "A Note On q -difference Operators", Korean Math. Soc., 17(3):423-430.
- [16] Area, I., Godoy, E., Marcellán, F. ve Moreno Balcázar, J.J.,(2000) "Inner products involving q -differences: the little q -Laguerre-Sobolev polynomials", Journal of Computational and Applied Mathematics, 118:1-22.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Gökhan YENER
Doğum Tarihi ve Yeri : 27.10.1982 / Kayseri
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : gyener@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniv.	2009
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniv.	2006
Lise	Fen Bilimleri	Fevzi Çakmak Lisesi	2000

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2009	Yıldız Teknik Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Yener, G., ve Emiroglu, I. (2015). A q-Analogue of the multiplicative calculus : q-Multiplicative Calculus. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S, 8(6), 1435-1450.
2. Yener, G., ve Emiroglu, I. (2014). q-Deformed Lane Emden differential equations and its solution by q-differential transform method. Int. Journal of Contemp. Math. Sciences.