

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YENİ BİR CİSİM ÜZERİNDEKİ DİZİ UZAYLARI

AHMET FARUK ÇAKMAK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. FEYZİ BAŞAR

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YENİ BİR CİSİM ÜZERİNDEKİ DİZİ UZAYLARI

Ahmet Faruk ÇAKMAK tarafından hazırlanan tez çalışması 14.01.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR
Fatih Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR
Fatih Üniversitesi

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK
İstanbul Ticaret Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında ve akademik hayatımın şekillenmesinde büyük katkıları olan çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Feyzi BAŞAR'a şükranlarımı bir borç bilir, kendisinin tabiri ile güzel Türkiye'min bir münevver evladı olabilmeyi ve böyle evlatlar yetiştirebilmeyi kendime hedef olarak belirledim. Ayrıca bu çalışmanın resmi formatta L^AT_EX'in inceliklerinden yararlanarak bana yardımcı olan kıymetli hocamız Dr. Nerhun YILDIZ'a çok teşekkür ediyor, akademik hayatında hep başarılar temenni ediyorum. Son olarak, bu tezi, güçlükleri benimle paylaşan, sabır ve sevgiyle bana hep destek olan eşim Nergis'e ithaf ediyorum.

Ocak, 2014

Ahmet Faruk ÇAKMAK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Orijinal Katkı	4
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Newtonyen Olmayan Hesaba Giriş.....	5
BÖLÜM 3	
NEWTONYEN OLMAYAN CİSİM ve ÜZERİNDEKİ DİZİ UZAYLARI	14
3.1 *-Reel Cismi Üzerinde Yeni Dizi Uzayları	14
3.2 *-Kompleks Cismi Üzerinde Yeni Dizi Uzayları.....	27
BÖLÜM 4	
ÇARPMAYA DAYANAN HESAP ve UYGULAMALARI.....	30
4.1 Çarpmaya Dayanan Hesap ve Özellikleri	30
4.2 Çarpmaya Dayanan Hesaba Göre Dizi Uzayları	32

BÖLÜM 5

ÇARPMAYA DAYANAN HESABA GÖRE FARK DİZİ UZAYLARI.....	36
5.1 Fark Dizi Uzaylarının Yapısı	36
5.2 Dual Uzaylar	40
5.3 β -dual ve $\aleph$ -dualler	47

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER.....	52
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGE LİSTESİ

A	A cümlesi
X	X uzayı
x, y	x ve y elemanları
$\dot{+}, \ddot{+}$	Newtonyen olmayan manada toplama işlemleri
$\dot{-}, \ddot{-}$	Newtonyen olmayan manada çıkarma işlemleri
$\dot{\times}, \ddot{\times}$	Newtonyen olmayan manada çarpma işlemleri
$\dot{/}, \ddot{/}$	Newtonyen olmayan manada bölme işlemleri
$\dot{<}, \ddot{<}$	Newtonyen olmayan manada küçük olma işlemleri
$\dot{>}, \ddot{>}$	Newtonyen olmayan manada büyük olma işlemleri
$\mathbb{Z}^*$	Newtonyen olmayan manada tam sayılar cümlesi
$\mathbb{Z}_-^*$	Newtonyen olmayan manada negatif tam sayılar cümlesi
$\mathbb{Z}_+^*$	Newtonyen olmayan manada pozitif tam sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^*$	Newtonyen olmayan manada reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}_-^*$	Newtonyen olmayan manada negatif reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}_+^*$	Newtonyen olmayan manada pozitif reel sayılar cümlesi
$\mathbb{N}^*$	Newtonyen olmayan manada doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^{*n}$	Newtonyen olmayan manada n -boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{C}^*$	Newtonyen olmayan manada kompleks sayılar cümlesi
$ \cdot ^*$	Newtonyen olmayan manada mutlak değer fonksiyonu
(u_n)	u_n genel terimli bir dizi
ε	Keyfi bir sayı
$*-$	Newtonyen olmayan manada işlemler
ι	iyota fonksiyonu
$[a, b]$	Newtonyen olmayan manada bölüntüye sahip aralık
D^*	Newtonyen olmayan manada türev operatörü
f	f fonksiyonu
M_b^{*a}	$[a, b]$ aralığındaki Newtonyen olmayan manada ortalama operatörü
$\int_b^{*a}$	$[a, b]$ aralığındaki Newtonyen olmayan manada integral operatörü
G_b^{*a}	$[a, b]$ aralığındaki Newtonyen olmayan manada gradiyent operatörü
x^{p^*}	Bir x sayısının Newtonyen olmayan manada p . kuvveti
$\sqrt{x}^*$	Bir x sayısının Newtonyen olmayan manada karekökü
$*\div*$	Newtonyen olmayan manada bölme veya oran
d^*	Newtonyen olmayan manada bir metrik fonksiyonu
(X, d^*)	Newtonyen olmayan manada bir metrik uzay
$\ \cdot\ ^*$	Newtonyen olmayan manada norm fonksiyonu
w^*	$\mathbb{R}^*$ cismi üzerindeki bütün dizilerin uzayı
ℓ_∞^*	$\mathbb{R}^*$ cismi üzerindeki bütün sınırlı dizilerin uzayı

c^*	$\mathbb{R}^*$ cismi üzerindeki bütün yakınsak dizilerin uzayı
c_0^*	$\mathbb{R}^*$ cismi üzerindeki bütün $*$ -sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_p^*	$\mathbb{R}^*$ cismi üzerindeki bütün p^* -mutlak toplanabilen dizilerin uzayı
λ	$\mathbb{R}^*$ cismi üzerindeki bütün dizilerin keyfi bir uzayı
$\sup$	supremum fonksiyonu
$\max$	maksimum fonksiyonu
d_∞^*	ℓ_∞^* uzayının tabii metriği
$\ \cdot\ _\infty^*$	ℓ_∞^* uzayının tabii normu
d_p^*	ℓ_p^* uzayının tabii metriği
$\ \cdot\ _p^*$	ℓ_p^* uzayının tabii normu
$\oplus$	Newtonyen olmayan manada kompleks toplama işlemi
$\odot$	Newtonyen olmayan manada kompleks çarpma işlemi
θ^*	Newtonyen olmayan manada kompleks sıfır vektörü
Δ	İleri fark operatörü
Δ^*	Newtonyen olmayan manada ileri fark operatörü
Π	Çarpma operatörü
$\sum^*$	Newtonyen olmayan manada toplam operatörü
$\ \cdot\ _{\Delta^*}^*$	$\mathbb{R}^*$ cismi üzerindeki dizilerin Δ^* operatörüne göre normu
T	Bir lineer operatör
$\subset$	Altcümle bağıntısı
$\supset$	Kapsama bağıntısı
X'	X uzayının sürekli duali
X^α	X uzayının α -duali
X^β	X uzayının β -duali
X^γ	X uzayının γ -duali
$X^\aleph$	X uzayının $\aleph$ -duali
$O(\iota(k))$	Newtonyen olmayan manada sınırlılık
$o(1)$	Newtonyen olmayan manada sıfıra yakınsama
bs^*	$*$ —sınırlı reel terimli serilerin uzayı

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 2.1 α -aritmetik ve β -aritmetik notasyonları.	8

YENİ BİR CİSİM ÜZERİNDEKİ DİZİ UZAYLARI

Ahmet Faruk ÇAKMAK

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez danışmanı: Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

Bu tezde, 1972 yılında Michael Grossman ve Robert Katz tarafından ortaya atılan Newtonyen olmayan hesap argümanları en temel fonksiyonel analiz kavramları ile özdeşleştirilerek matematik, fizik, finans biyomatematik vs. problemlerin çözüm metodları hakkında muhakeme kabiliyeti geliştirilmeye çalışıldı. Kullanımı yaygın olan, çeşitli sahalarda ve problemlerde klâsik hesaba nazaran daha iyi sonuçlar veren çarpmaya dayanan hesap temel alınarak, fark dizi uzayları inşa edilerek bunların dualleri tayin edildi. Bunlar yapılırken tezin ilk bölümlerinde ve ilgili eserlerde neşredilen geçerli kurallar kullanıldı. Bu çalışmaların devamı olan Newtonyen olmayan manada matris dönüşümleri için bir altyapı teşkil edildi.

Anahtar Kelimeler: Newtonyen olmayan hesap, dual uzaylar, dizi uzayları, toplanabilme, Banach uzayları.

ABSTRACT

ON SOME NEW SEQUENCE SPACES OVER A NEW FIELD

Ahmet Faruk ÇAKMAK

Department of Mathematical Engineering

Ph.D. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

By identification of the arguments of the non-Newtonian Calculus, introduced by Michael Grossman and Robert Katz in the year 1972, with the basic concepts of Functional Analysis the approach for solving the problems in Mathematics, Physics, Finance and Biomathematics is given in this study. by using The Multiplicative Calculus which has an advantage and given the better results then the usual calculus the spaces of difference sequences have been constructed and determined their duals with respect to the rules of Multiplicative Calculus. Therefore, the background is presented for the matrix transformations between the sequence spaces over the non-Newtonian real or complex field.

Keywords: Non-Newtonian Calculus, dual space, sequence spaces, summability, Banach spaces.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Newtonyen olmayan hesap, ilk defa Grossman ve Katz [1] tarafından ortaya atılmış ve ilerleyen yıllarda, özellikle çarpmaya dayanan hesap yaygın olarak kullanılmıştır. Grossman ve Katz 1972 yılında "Non-Newtonian Calculus" [1] adlı kitabı yayımladılar. Bu kitapta dokuz çeşit Newtonyen olmayan hesabın genel karakteristik özellikleri mevcuttur. Ayrıca yine aynı kaynakta Newtonyen olmayan hesap çeşitleri için çözümleyici metodlar sıralanmıştır.

Meginniss [2] tarafından çıkartılan, insan davranışları ve karar verme mekanizması hakkında bir istatistiki teori inşa etmek için Newtonyen olmayan hesap kullanılmıştır.

Filip ve Piatecki [3] çalışmasında, "neoklâsik (Slow-Swan) dış kaynaklı ekonomik büyüme modellerine bir Newtonyen olmayan hesap nasıl uygulanabilir?" sorusuna cevap aramışlardır. Yine Filip ve Piatecki [4] çalışmasında, belirtildiği üzere 15. yüzyılda da Luca Pacioli tarafından ortaya atılan çift kayıt sistemi ile muhasebe tutma modelini çarpmaya dayalı hesap argümanlarıyla yeniden ele almışlardır.

Florack ve van Assen, biyomedikal görüntü analizinde klâsik hesap tarzına alternatif olarak çarpmaya dayanan hesap kullandılar. [5] numaralı çalışmada çarpmaya dayalı hesabın, pozitif görüntü ve pozitifliği koruyan operatörler ihtiva eden problemlerde tabii bir iskelet çatısı meydana getirdiği görülmüştür. [6] numaralı çalışmanın amacı da çarpmaya dayalı hesabın pozitif tanımlı matris cisimlerinin regülerizasyonuna uygulanabilirliğini göstermektir.

Özyapıcı ve Bilgehan [7] çarpmaya dayalı hesabı temel alarak, sinyallerin gösterimi üzerinde çalıştılar. Bu çalışmada, çarpmaya dayalı hesap gösterimlerinin üstel tipli sinyallerin gösterimlerine son derece uygun bir metod olduğu görülmüştür. Buna ek olarak çarpmaya dayalı en küçük kareler metodunu, bir alternatif seri açılım ile sunmuşlardır.

Bashirov, Rıza, Tandoğdu, Mısırlı Kurpınar, Gürefe ve Özyapıcı; Kompleks Analiz, Differensiyel Denklemler, Sonlu-Farklar Metodu ve Çok Değişkenli Fonksiyonlar ile ilgili çalışmalar kaleme almışlardır; [8], [9], [10], [11], [12],[13],[14] ve [15]. Bu çalışmalarda çarpmaya dayalı hesap esas alınmıştır.

Uzer [16] kompleks değişkenli, kompleks değerli fonksiyonlar için çarpmaya dayalı hesap geliştirdi. Devamında [17] çalışmasında bu geliştirilen hesap kullanılarak elektromanyetik dalga problemlerinde bir takım seri çözümlemeler elde etti.

Türkmen ve Başar [18], çarpmaya dayalı hesabı kullanarak fonksiyonel analiz metodları elde etmeye çalışıp dizi uzayları üzerine yeni teoriler geliştirmişlerdir.

Çakmak ve Başar [19], en genel hâlde Newtonyen olmayan hesabı kullanarak fonksiyonel analiz metodlarını ele alıp klâsik dizi uzayları olarak bilinen sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzaylarının birer Banach uzayı teşkil ettiklerini göstermişlerdir.

Aniszewska ve Rybaczuk [20], çarpmaya dayalı dinamik sistemlerde kaos üzerinde çalıştılar. Bu çalışmada, bütün klâsik kaos davranışlarını ilgilendiren şartların çarpmaya dayalı karşılığı elde edilmektedir. Örnek olarak bir-boyutlu lojistik denklemin çarpmaya dayalı karşılığı, çok-boyutlu non-lineer dinamik sistemlerin bigeometrik türev metodu ile tanımlanması gibi konular tartışılmaktadır.

Rybaczuk ve Stoppel [21], bigeometrik hesabı fraktallar ve malzeme bilimlerinde kullanmışlardır.

Ağırlaştırılmış Newtonyen olmayan hesap [22] numaralı çalışmada, Liu ve Guo tarafından eğrileri düzleştirme için kullanılmıştır. Yine ağırlaştırılmış Newtonyen olmayan hesap, Baqae [23]'de zamanlar arası kararın aksiyomatik temelleri hakkındaki bir çalışmada kullanılmıştır.

Sınırlı ve sürekli fonksiyon uzaylarının yapısını Çakır [24], çarpmaya dayalı kompleks cisim üzerinde ele almıştır.

Tekin ve Başar [25], klâsik dizi uzaylarını Newtonyen olmayan kompleks cisim üzerine genişlettiler.

Özavşar ve Çevikel [26]'da çarpmaya dayalı metrik uzay ve daralma dönüşüm prensibini ele almışlardır.

Kadak, Başar ve Efe [27], klâsik dizi uzaylarının Newtonyen olmayan manada α -, β - ve γ - duallerini incelediler.

Son olarak Çakmak ve Başar [28] numaralı çalışmada kompleks cisim üzerinde Newtonyen olmayan manada sürekli fonksiyon uzaylarını tanımlayıp çarpmaya dayalı hesap manasında iç çarpım uzaylarına genişlettiler.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında öncelikle Newtonyen olmayan hesabın temelleri ve bu yeni matematik yapının klâsik hesap tarzıyla olan ilişkisi incelenmektedir. Verilen doğurucu fonksiyonların seçilişine bağlı olarak Newtonyen olmayan hesabın istenilen sayıda çoğaltılması mümkündür. Bu sebeple klâsik ve Newtonyen olmayan hesap arasındaki tercih, tamamen çalışılması gereken problemlerin yapısına bağlıdır. Daha sonra Newtonyen olmayan reel sayılar cümlesinin kendisine has toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisim olduğunu ve fonksiyonel analiz kavramları göz önünde bulundurularak ehemmiyet arz eden bazı eşitsizliklerin ispatı verilmiştir. Metrik ve normlu uzay özellikleri ele alınıp Newtonyen olmayan $\mathbb{R}^*$ reel sayılar cümlesinin $*$ -mutlak değer metriğine göre tamlığı ve daha sonra bu metriğin indirgendiği norma göre $\mathbb{R}^*$ 'ın bir Banach uzayı olduğu gösterilmektedir.

Klâsik dizi uzayları olarakta bilinen sırasıyla bütün, sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve p -mutlak toplanabilen dizilerin w, ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p uzaylarının Newtonyen olmayan manada karşılıkları verilip w cümlesinin $\mathbb{R}^*$ cismi üzerinde bir vektör uzayı teşkil ettiği ve üzerindeki tabii d^* metriğine göre bir metrik uzay olduğu ispatlanmaktadır. Daha sonra ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p klâsik dizi uzaylarının Newtonyen olmayan karşılıklarının üzerlerindeki metriğe

göre birer Banach uzayı oldukları gösterilmektedir. Newtonyen olmayan reel sayılar için yapılan bu tartışmaların yine Newtonyen olmayan kompleks sayılara ne suretle genişletileceği izah edilmektedir.

Newtonyen olmayan hesap çeşitleri arasında en yaygın olan çarpmaya dayalı hesabın kuralları ve uygulama sahaları hakkında bilgiler hülâsa edildikten sonra çarpmaya dayalı hesaba dayanan fark operatörünün tanımladığı dizi uzaylarının yapısı incelenmektedir. Kızmaz'ın [29] de ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzayları üzerine yapmış olduğu tartışmalar burada Newtonyen olmayan karşılıkları bakımından yapılmaktadır. Daha sonra, tarif edilen yeni fark dizi uzaylarının dualleri hakkındaki sonuçlar verilmektedir.

1.3 Orijinal Katkı

Newtonyen olmayan hesap argümanları temel fonksiyonel analiz kavramları ile birleştirilerek matematik, fizik, finans, biyomatematik vs. problemlerin çözüm metodları hakkında muhakeme kabiliyeti geliştirilmeye çalışılmıştır. Kullanımı yaygın olan, çeşitli sahalarda ve problemlerde kâlsik hesaba nispetle daha iyi sonuçlar veren bir hesap tarzı olan çarpmaya dayalı hesap temel alınarak, fark dizi uzayları inşa edilerek bunların dualleri bulunmuştur. Bunlar yapılırken tezin ilk bölümlerinde ve ilgili eserlerde verilen kurallara bağlı kalınmıştır. Bu çalışmaların devamı olarak Newtonyen olmayan matris dönüşümleri için bir altyapı teşkil edilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde; Newtonyen olmayan aritmetik sistemler ve yapısı, bu aritmetiklerin doğruduğu $*$ -hesap diye adlandırılan yeni bir hesap tarzı inşa edilmektedir. Daha sonra $*$ -hesap yardımıyla teşkil edilen matematik yapıların ve eşitsizliklerin önce reel sayılar sonra da kompleks sayılar cismi üzerinde haiz oldukları genel karakteristik özellikler hülâsa edilmektedir.

2.1 Newtonyen Olmayan Hesaba Giriş

Boş olmayan bir X cümlesi, üzerindeki işlemlerle bir cisim yapısına malik olsun. Eğer bütün $x, y \in X$ 'ler için x ve y karşılaştırılabilir ise X cümlesine *tam sıralı cümle* ve X *tam sıralı cisim bölgesi* denir. Meselâ $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi tam sıralı bir cisimdir. Tam sıralı bir cismin bölgesi eğer $\mathbb{R}$ 'nin bir altcümlesi ise ona, bir *aritmetik* denir.

Tanım cümlesi $\mathbb{R}$ ve görüntü cümlesi $\mathbb{R}$ 'nin bir altcümlesi olan bir bire-bir ve örten (bijektif) fonksiyona *doğurucu* denir. Meselâ; I birim fonksiyon, e^x fonksiyonu, x^3 fonksiyonu, vs. birer doğurucudurlar.

Rönesans boyunca, aralarında Galileo'nun da bulunduğu, birçok bilim adamı aşağıdaki problem üzerinde düşünmüşlerdir: "*Bir atın fiyatı hakkında iki tahmin vardır. Biri 10 para birimi diğeri de 1000 para birimidir. Hangi tahmin bu atın gerçek değeri olan 100 para biriminden daha fazla sapma göstermiştir?*" Bu sapmaların farklarla ölçülmesi kanaatinde olan bilim adamları için, 10 tahmini atın gerçek değerine daha yakındır. Mamafih, Galileo en sonunda bu sapmaların oranlarla ölçülmesi kanaatine varmış ve bu iki tahminin, gerçek değere olan sapmasının eşit olduğu sonucuna ulaşmıştı. İşte bu adım artık alışıla

gelen hesap dışında, adına "çarpmaya dayalı hesap" denilen, bir hesap tarzı ortaya çıkarmıştır. Bu sistematikte doğurucu fonksiyon, e^x fonksiyonudur. Çarpmaya dayalı hesap gibi doğurucu fonksiyolarının çeşitliliğine göre değişik hesap tarzları inşa edilebilir. En genel manasıyla bunlara Newtonyen olmayan hesap tarzları denilir. Nitekim çarpmaya dayalı hesap, bir çeşit Newtonyen olmayan hesap örneğidir.

Şimdi α , tanım cümlesi A olan bir doğurucu olsun. A cümlesi üzerinde tanımlı işlemler ve sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi olan aritmetiğe α aritmetik denir. Bütün $x, y \in A$ 'lar için; $+$ toplama, $-$ fark, $\times$ çarpma, $/$ bölme ve $<$ sıralama işlemleri,

$$\alpha - \text{toplama} \quad x+y = \alpha[\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)]$$

$$\alpha - \text{çıkarma} \quad x-y = \alpha[\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)]$$

$$\alpha - \text{çarpma} \quad x \times y = \alpha[\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)]$$

$$\alpha - \text{bölme} \quad x/y = \alpha[\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)]$$

$$\alpha - \text{sıralama} \quad x < y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

olarak tanımlanır. Bu işlemler altında $(A, +, -, \times, /, <)$, tam sıralı bir cisim yani bir aritmetiktir. Bu aritmetiği α fonksiyonu doğurduğu için buna α -aritmetik denir. Her bir α doğurucu tam olarak bir α -aritmetik doğurur. Meselâ, birim fonksiyon olan $I(x) = x$ bilinen klâsik aritmetiği doğurduğu gibi, $\alpha(x) = e^x$ fonksiyonu da geometrik (veya çarpmaya dayanan) aritmetiği üretir.

Klâsik aritmetikteki her bir işlemin doğal bir karşılığını α -aritmetikte bulmak mümkündür. Şimdi bunlardan bazılarının üzerinde duralım:

$x \in A$ için eğer $0 < x$ ise x sayısına α -pozitif sayı, eğer $x < 0$ ise x sayısına α -negatif sayı denir. 0 sayısına α -sıfır, 1 sayısına da α -bir denir ve bunların klâsik hesaptaki karşılıklarının sırasıyla $\alpha(0)$ ve $\alpha(1)$ olduğu görülür. 0 sayısı ve 0 sayısına α -toplama ile 1 ekleyerek ve α -çıkarma ile 1 çıkartarak elde edilen ardışık yeni sayılar cümlesine α -tamsayılar cümlesi denir, $\mathbb{Z}^*$ ile gösterilir. Yani,

$$\dots, \alpha(-3), \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \dots$$

Buna göre; α -tam sayıların $\mathbb{Z}^*$ cümlesi,

$$\mathbb{Z}^* = \{n | n = \alpha(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

olarak tanımlanır.

Bir $x \in A$ sayısının $|x|^*$ Newtonyen olmayan mutlak değeri,

$$|x|^* = \begin{cases} x & , \quad x \dot{>} \alpha(0), \\ \alpha(0) & , \quad x = \alpha(0), \\ \alpha(0) \dot{-} x & , \quad x \dot{<} \alpha(0). \end{cases}$$

olarak tanımlanır, x 'in α -mutlak değeri (veya $*$ -mutlak değeri) diye isimlendirilir.

$A \subset \mathbb{R}^*$ cümlesinden alınan herhangi a ve b sayıları için eğer $a \dot{<} b$ ise, $a \dot{\leq} x \dot{\leq} b$ olacak şekilde bulunan bütün x sayılarının cümlesine α -aralığı denir ve $[a, b]$ ile gösterilir. Bu aralığın α -uzunluğu $b \dot{-} a$ dır ve $a \dot{<} x \dot{<} b$ olacak şekildeki A 'da bulunan bütün x sayılarının cümlesine de bu aralığın α -içi denir.

Tanım 2.1.1 (u_n) , $A \subset \mathbb{R}^*$ 'da bulunan sayıların bir sonsuz dizisi olsun. Bu taktirde A 'da en fazla bir u sayısı mevcuttur öyle ki; u 'yu ihtiva eden her bir α -aralığının α -içi (u_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri haricindeki terimlerini ihtiva eder. Eğer böyle bir u sayısı varsa, (u_n) dizisi u sayısına α -yakınsaktır denir. Buradaki u sayısına da (u_n) dizisinin α -limiti denir ve $* - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ yazılır. Başka bir ifade ile:

$$* - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \Leftrightarrow \forall \varepsilon \dot{>} 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n \dot{-} u|^* \dot{<} \varepsilon.$$

Şimdi de bir $x_0 \in A$ noktasının delinmiş r -komşuluğunu tarif edelim.

Tanım 2.1.2 $x_0 \in A$ ve $r > 0$ olsun. Bu durumda; $0 \dot{<} |x \dot{-} x_0|^* \dot{<} r$ eşitliğini sağlayan $x \in A$ 'ların cümlesi, x_0 noktasının delinmiş r -komşuluğu olarak adlandırılır.

α ve β seçilmiş keyfi iki doğurucu olsunlar ve $(\alpha$ -aritmetik, β -aritmetik) de $*$ -aritmetiğe göre sıralanmış bir aritmetik çifti olsun. Aşağıdaki işlemler α -aritmetik ve β -aritmetik için kullanılırlar. α -aritmetik için verilen tanımlar β -aritmetik için de geçerlidir. Meselâ β -yakınsaklık; β -aralıklar ve onların β -içleri yardımıyla tanımlanır.

Tablo 2.1 α -aritmetik ve β -aritmetik notasyonları.

	α -arithmetik	β -arithmetik
Tanım Bölgesi	A	B
Toplama	$\dot{+}$	$\ddot{+}$
Çıkarma	$\dot{-}$	$\ddot{-}$
Çarpma	$\dot{\times}$	$\ddot{\times}$
Bölme	$\dot{/}$	$\ddot{/}$
Sıralama	$\dot{\leq}$	$\ddot{\leq}$

*-hesap tarzında α -aritmetik değişkenler için, β -aritmetik ise değerler için kullanılır. Bunun gibi, değişkenlerde ve değerlerde meydana gelen değişimler sırasıyla α -fark ve β -fark ile ölçülürler. *-hesabın işlemleri, değişkenleri A'da ve değerleri B'de olan fonksiyonlara uygulanır.

Artık Tanım 2.1.2'yi kullanarak bir fonksiyonun Newtonyen olmayan manada bir noktadaki limitini tanımlayabiliriz.

Tanım 2.1.3 $A, B \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \rightarrow B$ olsun. Bu durumda; istenildiği kadar küçük seçilebilen her $\varepsilon > 0$ ve $x_0 \in A$ noktasının delinmiş δ -komşuluğundaki bütün x noktaları için $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı ve bir $y_0 \in B$ noktası mevcut ise o zaman " f fonksiyonunun x_0 noktası civarındaki limiti y_0 'dır" denir ve $f(x) \xrightarrow{*} y_0, x \xrightarrow{*} x_0$ veya $* - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ yazılır.

Başka bir ifade ile A cümlesindeki noktaların bir (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsarken onun $\{f(x_n)\}$ görüntüler dizisi y_0 limitine ulaşıyorsa o zaman " f fonksiyonunun x_0 noktasındaki *-limiti y_0 'dır" denir.

$x \xrightarrow{*} x_0$ için $f_1(x) \xrightarrow{*} L_1$ ve $f_2(x) \xrightarrow{*} L_2$ ise bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

- (i) $f_1(x) \dot{+} f_2(x) \xrightarrow{*} L_1 \dot{+} L_2, x \xrightarrow{*} x_0.$
- (ii) $f_1(x) \dot{\times} f_2(x) \xrightarrow{*} L_1 \dot{\times} L_2, x \xrightarrow{*} x_0.$
- (iii) $f_1(x) \dot{/} f_2(x) \xrightarrow{*} L_1 \dot{/} L_2, x \xrightarrow{*} x_0, L_2 \neq 0.$

Tanım 2.1.4 Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu, $* - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ olması halinde $a \in A$ noktasında *-süreklidir denir. f , A cümlesinin her noktasında *-sürekli ise o zaman " f , A üzerinde *-süreklidir" denir.

Bir $[a, b]$ aralığından $*$ -sürekli f_1 ve f_2 fonksiyonlarının $f_1 \dot{+} f_2$ toplamının ve $\alpha \dot{\times} f_1$ skalarla çarpımının da $*$ -sürekli olduğu kolayca gösterileceğinden $[a, b]$ aralığında $*$ -sürekli fonksiyonların cümlesinin fonksiyonların Newtonyen olmayan manada toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile bir vektör uzayı teşkil ettiği açıktır.

Eğer α ve β fonksiyonlarının her ikisi aynı anda I birim fonksiyonuna eşit olması özel halinde, $*$ -limit ve $*$ -süreklilik kavramları, klâsik limit ve klâsik süreklilik kavramlarına indirgenir.

Tanım 2.1.5 α -aritmetikten β -aritmetiğe olan izomorfizma aşağıdaki özelliklere sahip birtek ι (iota) fonksiyonudur:

- (i) ι fonksiyonu, bire birdir.
- (ii) ι fonksiyonu, A 'dan B üzerinedir.
- (iii) A 'dan seçilmiş herhangi u ve v 'ler için,

$$\begin{aligned}\iota(u \dot{+} v) &= \iota(u) \dot{+} \iota(v) \\ \iota(u \dot{-} v) &= \iota(u) \dot{-} \iota(v) \\ \iota(u \dot{\times} v) &= \iota(u) \dot{\times} \iota(v) \\ \iota(u \dot{/} v) &= \iota(u) \dot{/} \iota(v); \quad v \neq \dot{0} \\ u \dot{\leq} v &\Leftrightarrow \iota(u) \dot{\leq} \iota(v).\end{aligned}$$

bağıntıları geçerlidir.

Kolayca görüleceği gibi; bütün $x \in A$ 'lar için $\iota(x) = \beta[\alpha^{-1}(x)]$ ve bütün $n \in \mathbb{Z}$ 'ler için $\iota(\dot{n}) = \ddot{n}$ olur. Meselâ $u \dot{+} v = \iota(u) \dot{+} \iota(v)$ olduğundan, α -aritmetik ile yapılan işlemi, kolaylıkla β -aritmetiğe taşımanın mümkün olduğunu görürüz.

Bir f fonksiyonunun $[a, b]$ α -aralığındaki β -değişimi B cümlesinde $f(s) \dot{-} f(r)$ farkına eşittir.

Tanım 2.1.6 A cümlesinden alınan bir fonksiyon $*$ -sürekli ve eşit α -uzunluklu iki α -aralıkta aynı β -değişime sahip ise bu fonksiyona $*$ -lineer fonksiyon denir.

Bütün $x \in A$ 'lar için bir $*$ -lineer fonksiyon, $\iota(m \dot{\times} x \dot{+} c)$ şeklindedir. Burada m ve c , A cümlesinden alınan birer sabittir. $m = \dot{1}$ ve $c = \dot{0}$ alındığında ι fonksiyonunun $*$ -lineer olduğunu görmek mümkündür. $*$ -lineer bir fonksiyon için değişkenlerdeki her α -ilerlemesine karşılık gelen değerler dizisi bir β -ilerlemedir.

$*$ -lineer bir fonksiyonun, α -uzunluğu $\dot{1}$ olan her bir α -aralığındaki β -değişimine bu fonksiyonun $*$ -eğimi denir. Meselâ, $\iota(m \dot{\times} x \dot{+} c)$ fonksiyonunun $*$ -eğimi $\iota(m)$ olur. Özellikle $\iota(x)$ fonksiyonunun $*$ -eğimi $\dot{1}$ olur ve A cümlesinde sabit bir fonksiyonun $*$ -eğimi $\dot{0}$ olur.

Tanım 2.1.7 Bir f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını ihtiva eden $*$ -lineer fonksiyonun $*$ -eğimine $*$ -gradiyent denir;

$$[f(b) \dot{-} f(a)] \dot{+} [\iota(b) \dot{-} \iota(a)]$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.8 Bir f fonksiyonunun eğer a noktasında

$$* - \lim_{x \rightarrow \infty} \{ [f(x) \dot{-} f(a)] \dot{+} [\iota(x) \dot{-} \iota(a)] \}$$

$*$ -limiti mevcutsa f fonksiyonu a noktasında $*$ -türevlenebilir denir. Bu $*$ -limite f fonksiyonunun a noktasındaki $*$ -türevi denir ve $[D^* f](a)$ ile gösterilir.

D^* operatörü; $D^*(f \dot{+} g) = D^* f \dot{+} D^* g$ olduğundan β -toplamsallık ve c sabit bir sayı olmak üzere $D^*(c \dot{\times} f) = c \dot{\times} D^* f$ olması sebebi ile de β -homojenlik özelliklerine sahiptir.

$[a, b]$ aralığında $*$ -türevi mevcut fonksiyonların cümlesi, Newtonyen olmayan toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile bir vektör uzayıdır.

$(Df)(a)$ klâsik türev ve $(D^* f)(a)$ $*$ -türevi her ikisi aynı zamanda mevcut ve eşit olmak zorunda değildir. Ancak aşağıdaki türevler aynı anda a noktasında mevcutsa

$$[D(\alpha^{-1})](a), [D(\alpha)](\alpha^{-1}(a)), [D(\beta^{-1})](f(a)), [D\beta]\{\beta^{-1}(f(a))\}$$

$(Df)(a)$ ve $(D^* f)(a)$ aynı zamanda mevcut olurlar ve $(a, f(a))$ noktasındaki $*$ -türev klâsik türeve eşit olur.

Şimdi f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında $\int^* f$ belirsiz $*$ -integral tanımı yazılacak.

Tanım 2.1.9 $\ast$ -sürekli bir f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki $M_a^{\ast b} f$ $\ast$ -ortalaması, $[a, b]$ aralığındaki $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sonlu dizisinin $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ görüntüler dizisinin β -limitine denir.

$[a, b]$ aralığında $\ast$ -lineer bir fonksiyonun $\ast$ -ortalaması onun a ve b noktasındaki değerlerinin β -ortalamasına eşittir ve aynı zamanda a ve b noktalarının α -ortalamasına eşittir.

$\ast$ -ortalamanın aşağıdaki özellikleri mevcuttur:

- (i) $[a, b]$ aralığında $h(x) = b$ ise $M_a^{\ast b} h = b$ eşitliği geçerlidir.
- (ii) $[a, b]$ aralığında $\ast$ -sürekli f ve g fonksiyonları için eğer $f(x) \prec g(x)$ ise $M_a^{\ast b} f \prec M_a^{\ast b} g$ eşitsizliği geçerlidir.
- (iii) $a \prec b \prec c$ olsun. Bütün $a, b, c \in A$ 'lar için f fonksiyonu $[a, c]$ aralığında sürekli ise

$$[\iota(b) \dot{-} \iota(a)] \times M_a^{\ast b} f \dot{+} [\iota(c) \dot{-} \iota(b)] \times M_b^{\ast c} f = [\iota(c) \dot{-} \iota(a)] \times M_a^{\ast c} f$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.1.10 $[a, b]$ aralığında bulunan $\ast$ -sürekli bir f fonksiyonunun $\ast$ -integrali, B cümlesindeki $[\iota(b) \dot{-} \iota(a)] \times M_a^{\ast b} f$ değerine eşittir ve $\int_a^{\ast b} f$ şeklinde gösterilir.

$\ast$ -integralinin ağırlaştırılmış $\ast$ -ortalama olduğunu

$$\int_a^{\ast b} f = [\iota(b) \dot{-} \iota(a)] \times M_a^{\ast b} f$$

bağıntısından görmek kolaydır. Daha belirgin bir tanım yapacak olursak $\int_a^{\ast b} f$ değeri, n .terimi, $[a, b]$ aralığının $a_1, a_2, \dots, a_n$ bir α -parçalanışı ve bu parçalanışın $k_n = a_2 \dot{-} a_1 = \dots = a_n \dot{-} a_{n-1}$ ortak değeri olmak üzere

$$[\iota(k_n) \times f(a_1)] \dot{+} \dots \dot{+} [\iota(k_n) \times f(a_{n-1})]$$

β -yakınsak dizisinin limitine eşittir. Eğer α klâsik manada sürekli bir fonksiyon ve $\beta = I$ ise, $\ast$ -integrali Matematik Analiz'den bildiğimiz Steiltjes integralidir.

Teorem 2.1.1 $\ast$ -türev ve $\ast$ -integral, aşağıda olduğu gibi ters bir ilişki ile birbirine bağlıdır.

(i) Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $*$ -sürekli ise ve her $x \in [a, b]$ için

$$g(x) = \int_a^x f(x) dx$$

ise, her $x \in [a, b]$ için $D^*g(x) = f(x)$ eşitliği geçerlidir.

(ii) Eğer $[a, b]$ aralığında D^*h fonksiyonu $*$ -sürekli ise

$$\int_a^{*b} D^*h = h(b) - h(a)$$

olur.

Buraya kadar olan kısımda kısaca $*$ -hesap tarzı incelendi. Şimdi klâsik hesap tarzı ile $*$ -hesap tarzı arasındaki ilişkiyi görmeye çalışalım. Dolayısıyla $*$ -hesap tarzındaki notasyonların aslında klâsik hesap tarzındaki karşılıklarına bakılması, tezin ilerleyen bölümleri için faydalı olacaktır.

Her $c \in A$ için $\bar{c} = \alpha^{-1}(c)$ olsun. f , değişkenleri A cümlesinden ve değerleri de B cümlesinden alınan bir fonksiyon ve $\bar{f}(t) = \beta^{-1}\{f[\alpha(t)]\}$ olsun. Bu taktirde $* - \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ve $\lim_{t \rightarrow \bar{c}} \bar{f}(t)$ limitleri aynı zamanda mevcuttur ve bu limitlerin mevcut olması şartıyla,

$$* - \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \beta \left[\lim_{t \rightarrow \bar{c}} \bar{f}(t) \right]$$

eşitliği geçerlidir. Şu hâlde; f fonksiyonu c noktasında $*$ -sürekli ancak ve ancak $\bar{f}$ fonksiyonu $\bar{c}$ noktasında klâsik manada sürekli ise.

Bir f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında $G_a^{*b}f$ $*$ -gradiyenti

$$G_a^{*b}f = \beta \left(G_{\bar{a}}^{\bar{b}}\bar{f} \right)$$

eşitliğini sağlar. Burada $G_{\bar{a}}^{\bar{b}}\bar{f}$, $[a, b]$ aralığında $\bar{f}$ fonksiyonunun klâsik gradiyentidir.

Eğer $(D^*f)(a)$ ve $(D\bar{f})(\bar{a})$ aynı anda mevcut ise

$$(D^*f)(a) = \beta \left[(D\bar{f})(\bar{a}) \right]$$

eşitliği geçerlidir.

Eğer, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $*$ -sürekli ise

$$M_a^{*b}f = \beta \left(M_{\bar{a}}^{\bar{b}}\bar{f} \right)$$

ve

$$\int_a^{*b} f = \beta \left(\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{f} \right)$$

eşitliklerinin geçerliliği aşîkârdır.

BÖLÜM 3

NEWTONYEN OLMAYAN CİSİM ve ÜZERİNDEKİ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, $\mathbb{R}^*$ Newtonyen olmayan reel ve $\mathbb{C}^*$ Newtonyen olmayan kompleks cisimleri inşa edilecektir. Bunun yanında 4. Bölümde ihtiyaç duyulacak bazı önemli eşitsizlikler, ifade ve ispat edilecektir.

3.1 *-Reel Cismi Üzerinde Yeni Dizi Uzayları

$\mathbb{R}^*$ Newtonyen olmayan reel sayılar cümlesi üzerinde $(\dot{+})$ toplama ve $(\dot{\times})$ çarpma işlemleri,

$$\begin{aligned}\dot{+} : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \dot{+} y = \alpha [\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\dot{\times} : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \dot{\times} y = \alpha [\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)]\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.1.1 $(\mathbb{R}^*, \dot{+}, \dot{\times})$, bir tam cisimdir.

İspat $(\mathbb{R}^*, \dot{+}, \dot{\times})$ üçlüsünün cisim aksiyomlarını sağladığı, rutin işlemlerle kolayca gösterilebildiğinden teferruatlı ispatı vermeyerek bunu, okuyucuya bırakıyoruz.

$A \subseteq \mathbb{R}^*$ cümlesinde α doğurucusu ile oluşturulmuş hesap için, A 'dan alınan bir x sayısının $x^{2^*}, x^{3^*}, x^{4^*}, \dots$ *-kuvvetleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} x^{2^*} = x \dot{\times} x &= \alpha [\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x)] = \alpha [\alpha^{-1}(x)]^2 \\ x^{3^*} = x^{2^*} \dot{\times} x &= \alpha \{ \alpha^{-1} \{ \alpha [\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x)] \} \times \alpha^{-1}(x) \} = \alpha \{ [\alpha^{-1}(x)]^3 \} \\ &\vdots \\ x^{p^*} = x^{(p-1)^*} \dot{\times} x &= \alpha \{ [\alpha^{-1}(x)]^p \} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Buna göre, bir x sayısının $\sqrt{x^*}$ karekökü,

$$\sqrt{x^*} = \alpha \left[\sqrt{\alpha^{-1}(x)} \right]$$

olarak tanımlanır. Burada, daha önce $\alpha [|\alpha^{-1}(x)|]$ olarak tanımlanan bir $x \in \mathbb{R}^*$ sayısının $|x|^*$ *-mutlak değerini dikkate alarak

$$\sqrt{x^{2^*}} = |x|^* = \alpha [|\alpha^{-1}(x)|] \quad (3.1)$$

eşitliği elde edilir.

x_1 ve x_2 gibi herhangi iki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ noktaları arasındaki $|x_1 \dot{-} x_2|^*$ *-uzaklığı,

$$\begin{aligned} |x_1 \dot{-} x_2|^* &= \alpha [|\alpha^{-1}(x_1) - \alpha^{-1}(x_2)|] \\ &= \alpha [|\alpha^{-1}(x_2) - \alpha^{-1}(x_1)|] \\ &= |x_2 \dot{-} x_1|^* \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

$x \in \mathbb{R}^*$ keyfi bir sayı olsun. Eğer $x \dot{>} \dot{0}$ ise x 'e bir pozitif non-Newtonyen sayı ve eğer $x \dot{<} \dot{0}$ ise x 'e bir negatif non-Newtonyen sayı denir. $\mathbb{R}_-^*$ ve $\mathbb{R}_+^*$ ile sırasıyla Newtonyen olmayan negatif ve pozitif *-reel sayı cümleleri gösterilecektir.

Şimdi, Matematik Analizde üçgen eşitsizliği olarak iyi bilinen bir eşitsizliğin Newtonyen olmayan karşılığını verelim.

Lemma 3.1.1 [$*$ -Üçgen Eşitsizliği] $x, y \in \mathbb{R}^*$ için,

$$|x \dot{+} y|^* \leq |x|^* \dot{+} |y|^* \quad (3.2)$$

$*$ -üçgen eşitsizliği geçerlidir.

İspat $x, y \in \mathbb{R}^*$ olsun. (3.1)'deki $*$ -mutlak değer tanımını kullanılarak

$$\begin{aligned} |x \dot{+} y|^* &= \alpha[|\alpha^{-1}(x \dot{+} y)|] \\ &= \alpha\{ |(\alpha^{-1} \circ \alpha)[\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)]| \} \\ &= \alpha[|\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)|] \end{aligned} \quad (3.3)$$

olduğu görülür. Böylece, (3.3) eşitliğine α^{-1} fonksiyonunu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(|x \dot{+} y|^*) &= |\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)| \\ &\leq |\alpha^{-1}(x)| + |\alpha^{-1}(y)| \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu da,

$$\begin{aligned} |x \dot{+} y|^* &\leq \alpha[|\alpha^{-1}(x)| + |\alpha^{-1}(y)|] \\ &= \alpha\{(\alpha^{-1} \circ \alpha)[|\alpha^{-1}(x)|] + (\alpha^{-1} \circ \alpha)[|\alpha^{-1}(y)|]\} \\ &= \alpha[\alpha^{-1}(|x|^*) + \alpha^{-1}(|y|^*)] \\ &= |x|^* \dot{+} |y|^* \end{aligned}$$

eşitsizliğinin yani (3.2) $*$ -üçgen eşitsizliğinin doğruluğunu verir.

Lemma 3.1.2 $u, v \in \mathbb{R}^*$ için

$$*\frac{|u \dot{+} v|^*}{\alpha(1) \dot{+} |u \dot{+} v|^*} * \leq * \frac{|u|^*}{\alpha(1) \dot{+} |u|^*} * \dot{+} * \frac{|v|^*}{\alpha(1) \dot{+} |v|^*} * \quad (3.4)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat $u, v \in \mathbb{R}^*$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
z = * \frac{|u \dot{+} v|^*}{\alpha(1) \dot{+} |u \dot{+} v|^*} * &= * \frac{|\alpha[\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)]|^*}{\alpha(1) \dot{+} |\alpha[\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)]|^*} * \\
&= * \frac{\alpha\{[(\alpha^{-1} \circ \alpha)[\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)]]^*\}}{\alpha(1) \dot{+} \alpha\{[(\alpha^{-1} \circ \alpha)[\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)]]^*\}} * \\
&= * \frac{\alpha[|\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)|]}{(\alpha^{-1} \circ \alpha)[\alpha(1)] + (\alpha^{-1} \circ \alpha)[\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)]} * \\
&= * \frac{\alpha[|\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)|]}{\alpha[1 + |\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)|]} * \\
&= \frac{\phi}{\psi} N = \alpha\{\alpha^{-1}(\phi)/\alpha^{-1}(\psi)\} \\
&= \frac{\alpha\{(\alpha^{-1} \circ \alpha)[|\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)|]\}}{(\alpha^{-1} \circ \alpha)[1 + |\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)|]} \\
&= \alpha\left\{ \frac{|\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)|}{[1 + |\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)|]} \right\}
\end{aligned}$$

eşitliğine α^{-1} fonksiyonu uygulanmakla,

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(z) &= \frac{|\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)|}{1 + |\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)|} \\
&\leq \frac{|\alpha^{-1}(u)|}{1 + |\alpha^{-1}(u)|} + \frac{|\alpha^{-1}(v)|}{1 + |\alpha^{-1}(v)|}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
z &\leq \alpha \left[\frac{|\alpha^{-1}(u)|}{1+|\alpha^{-1}(u)|} + \frac{|\alpha^{-1}(v)|}{1+|\alpha^{-1}(v)|} \right] \\
&= \alpha \left[\frac{(\alpha^{-1} \circ \alpha)|\alpha^{-1}(u)|}{1+(\alpha^{-1} \circ \alpha)|\alpha^{-1}(u)|} + \frac{(\alpha^{-1} \circ \alpha)|\alpha^{-1}(v)|}{1+(\alpha^{-1} \circ \alpha)|\alpha^{-1}(v)|} \right] \\
&= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}[\alpha(|\alpha^{-1}(u)|)]}{1+\alpha^{-1}[\alpha(|\alpha^{-1}(u)|)]} + \frac{\alpha^{-1}[\alpha(|\alpha^{-1}(v)|)]}{1+\alpha^{-1}[\alpha(|\alpha^{-1}(v)|)]} \right\} \\
&= \alpha \left[\frac{\alpha^{-1}(|u|^*)}{1+\alpha^{-1}(|u|^*)} \right] + \alpha \left[\frac{\alpha^{-1}(|v|^*)}{1+\alpha^{-1}(|v|^*)} \right] \\
&= \alpha \left[\frac{\alpha^{-1}(|u|^*)}{(\alpha^{-1} \circ \alpha)(1) + \alpha^{-1}(|u|^*)} \right] + \alpha \left[\frac{\alpha^{-1}(|v|^*)}{(\alpha^{-1} \circ \alpha)(1) + \alpha^{-1}(|v|^*)} \right] \\
&= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(|u|^*)}{\alpha^{-1}[\alpha(1)] + \alpha^{-1}(|u|^*)} \right\} + \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(|v|^*)}{\alpha^{-1}[\alpha(1)] + \alpha^{-1}(|v|^*)} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(|u|^*)}{(\alpha^{-1} \circ \alpha)\alpha^{-1}(\alpha(1)) + \alpha^{-1}(|u|^*)} \right\} + \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(|v|^*)}{(\alpha^{-1} \circ \alpha)\alpha^{-1}(\alpha(1)) + \alpha^{-1}(|v|^*)} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(|u|^*)}{(\alpha^{-1} \circ \alpha)\{\alpha^{-1}[\alpha(1)] + \alpha^{-1}(|u|^*)\}} + \frac{\alpha^{-1}(|v|^*)}{(\alpha^{-1} \circ \alpha)\{\alpha^{-1}[\alpha(1)] + \alpha^{-1}(|v|^*)\}} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(|u|^*)}{\alpha^{-1}[\alpha(1) \dot{+} |u|^*]} + \frac{\alpha^{-1}(|v|^*)}{\alpha^{-1}[\alpha(1) \dot{+} |v|^*]} \right\} \\
&= \alpha \left\{ (\alpha^{-1} \circ \alpha) \left\{ \frac{\alpha^{-1}(|u|^*)}{\alpha^{-1}[\alpha(1) \dot{+} |u|^*]} \right\} + (\alpha^{-1} \circ \alpha) \left\{ \frac{\alpha^{-1}(|v|^*)}{\alpha^{-1}[\alpha(1) \dot{+} |v|^*]} \right\} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left[* \frac{|u|^*}{\alpha(1) \dot{+} |u|^*} * \right] + \alpha^{-1} \left[* \frac{|v|^*}{\alpha(1) \dot{+} |v|^*} * \right] \right\} \\
&= * \frac{|u|^*}{\alpha(1) \dot{+} |u|^*} * \dot{+} * \frac{|v|^*}{\alpha(1) \dot{+} |v|^*} *
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.3 [$*$ -Minkowski Eşitsizliği] $p > 1$ ve $k = 1, 2, 3, \dots, n$ için $a_k, b_k \in \mathbb{R}_+^*$ olmak üzere,

$$\sqrt[p]{* \sum_{k=1}^n (a_k \dot{+} b_k)^{p^*}}^* \leq \sqrt[p]{* \sum_{k=1}^n a_k^{p^*}}^* \dot{+} \sqrt[p]{* \sum_{k=1}^n b_k^{p^*}}^* .$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat $p > 1$ ve $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ için $a_k, b_k \in \mathbb{R}_+^*$ olmak üzere

$$u = \sqrt[p]{* \sum_{k=1}^n (a_k \dot{+} b_k)^{p^*}}^* = \left\{ * \sum_{k=1}^n \left\{ \alpha [\alpha^{-1}(a_k) + \alpha^{-1}(b_k)] \right\}^{p^*} \right\}^{(1/p)^*}$$

kabul edelim. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
u^{p^*} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \alpha \left[\alpha^{-1}(a_k) + \alpha^{-1}(b_k) \right] \right\}^{p^*} \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha \left\{ \left[\alpha^{-1} \left[\alpha \left[\alpha^{-1}(a_k) + \alpha^{-1}(b_k) \right] \right] \right]^p \right\} \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha \left\{ \left[\alpha^{-1}(a_k) + \alpha^{-1}(b_k) \right]^p \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \left[\alpha^{-1}(a_1) + \alpha^{-1}(b_1) \right]^p \right\} \right) + \cdots + \alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \left[\alpha^{-1}(a_n) + \alpha^{-1}(b_n) \right]^p \right\} \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \left[\alpha^{-1}(a_1) + \alpha^{-1}(b_1) \right]^p + \cdots + \left[\alpha^{-1}(a_n) + \alpha^{-1}(b_n) \right]^p \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\alpha^{-1}(a_k) + \alpha^{-1}(b_k) \right]^p \right\}
\end{aligned}$$

eşitliğine α^{-1} fonksiyonu uygulanmasıyla,

$$\alpha^{-1}(u^{p^*}) = \sum_{k=1}^n \left[\alpha^{-1}(a_k) + \alpha^{-1}(b_k) \right]^p$$

elde edilir ki buradan klâsik manada Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left[\alpha^{-1}(u^{p^*}) \right]^{1/p} &= \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\alpha^{-1}(a_k) + \alpha^{-1}(b_k) \right]^p \right\}^{1/p} \\
&\leq \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\alpha^{-1}(a_k) \right]^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\alpha^{-1}(b_k) \right]^p \right\}^{1/p}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Elde edilen bu eşitsizliğe α^{-1} fonksiyonu uygulandığı zaman

$$\begin{aligned}
\alpha \left\{ \left[\alpha^{-1}(u^{p*}) \right]^{1/p} \right\} &\leq \alpha \left\{ \left[\sum_{k=1}^n [\alpha^{-1}(a_k)]^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n [\alpha^{-1}(b_k)]^p \right]^{1/p} \right\} \\
&= \alpha \left\{ (\alpha^{-1} \circ \alpha) \left\{ \sum_{k=1}^n [\alpha^{-1}(a_k)]^p \right\}^{1/p} + (\alpha^{-1} \circ \alpha) \left\{ \sum_{k=1}^n [\alpha^{-1}(b_k)]^p \right\}^{1/p} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \left[\sum_{k=1}^n [\alpha^{-1}(a_k)]^p \right]^{1/p} \right\} \dot{+} \alpha \left\{ \left[\sum_{k=1}^n [\alpha^{-1}(b_k)]^p \right]^{1/p} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \left[\sum_{k=1}^n (\alpha^{-1} \circ \alpha) [\alpha^{-1}(a_k)]^p \right]^{1/p} \right\} \dot{+} \alpha \left\{ \left[\sum_{k=1}^n (\alpha^{-1} \circ \alpha) [\alpha^{-1}(b_k)]^p \right]^{1/p} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \left[\sum_{k=1}^n \alpha^{-1}(a_k^{p*}) \right]^{1/p} \right\} \dot{+} \alpha \left\{ \left[\sum_{k=1}^n \alpha^{-1}(b_k^{p*}) \right]^{1/p} \right\} \\
&= \alpha \left\{ (\alpha^{-1} \circ \alpha) \left[\sum_{k=1}^n \alpha^{-1}(a_k^{p*}) \right]^{1/p} \right\} \dot{+} \alpha \left\{ (\alpha^{-1} \circ \alpha) \left[\sum_{k=1}^n \alpha^{-1}(b_k^{p*}) \right]^{1/p} \right\} \\
&= \alpha \left[\alpha^{-1} \left(\sum_{k=1}^n a_k^{p*} \right) \right] \dot{+} \alpha \left[\alpha^{-1} \left(\sum_{k=1}^n b_k^{p*} \right) \right] \\
&= \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^{p*}} \dot{+} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^{p*}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.1.1 X boş olmayan cümlesi ve $d^* : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^*$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda; her bir $x, y, z \in X$ için,

$$(M^*1) \quad d^*(x, y) = \dot{0} \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M^*2) \quad d^*(x, y) = d^*(y, x),$$

$$(M^*3) \quad d^*(x, y) \leq d^*(x, z) \dot{+} d^*(z, y)$$

aksiyomlarını sağlayan d^* fonksiyonuna X üzerinde bir $*$ -metrik ve (X, d^*) ikilisine de bir $*$ -metrik uzay denir.

Artık [19] numaralı kaynakta ifade ve ispat edilen aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Sonuç 3.1.1 $d^*(x, y) = |x \dot{-} y|^*$ olmak üzere $(\mathbb{R}^*, d^*)$ bir $*$ -metrik uzaydır.

Teorem 3.1.2 Sıralı $*$ -reel sayı n 'lilerinden oluşan n -boyutlu $\mathbb{R}^{*n}$ cümlesi üzerinde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{*n}$ olmak üzere

$$d^*(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k \dot{-} y_k)^{2*}} = \alpha \left\{ \sqrt{\sum_{k=1}^n [\alpha^{-1}(x_k) - \alpha^{-1}(y_k)]^2} \right\}$$

ile tanımlanan d^* bağıntısı bir metrik tanımlar.

Şimdi $*$ -metrik uzay kavramından sonra akla gelen ilk şey bu metriğin hangi normdan indirgendiğidir. Bu konudaki detaylara girmeden önce, Newtonyen olmayan hesap tarzını kullanarak normlu uzay aksiyomlarının verilmesine ihtiyaç vardır. Bunun için, aşağıdaki tanımı sunuyoruz.

Tanım 3.1.2 X cümlesi $\mathbb{R}^*$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|^* : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ fonksiyonu, $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^*$ için,

$$(N^*1) \quad \|x\|^* = \dot{0} \Leftrightarrow x = \dot{0},$$

$$(N^*2) \quad \|\alpha \dot{\times} x\|^* = |\alpha|^* \dot{\times} \|x\|^*$$

$$(N^*3) \quad \|x \dot{+} y\|^* \dot{\leq} \|x\|^* \dot{+} \|y\|^*$$

aksiyomlarını sağlarsa, $(X, \|\cdot\|^*)$ ikilisine bir Newtonyen olmayan manada normlu uzay veya kısaca $*$ -normlu uzay denir.

Buradan bir $\|\cdot\|^*$ $*$ -normu, X cümlesinde

$$d^*(x, y) = \|x \dot{-} y\|^*; \quad (x, y \in X)$$

eşitliği ile bir d^* $*$ -metriği tanımlar. d^* 'a $*$ -norm tarafından indirgenen $*$ -metrik denir.

Tanım 3.1.3 Bir $X = (X, d^*)$ $*$ -metrik uzayındaki bir (x_n) dizisi verilsin. Verilen her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı ve $n > n_0$ olan bütün n 'ler için $d^*(x_n, x) \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ pozitif sayısı ve bir $x \in X$ noktası mevcut ise (x_n) dizisi, x noktasına $*$ -yakınsaktır denir ve $*$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ yazılır.

Tanım 3.1.4 Bir $X = (X, d^*)$ $*$ -metrik uzayındaki bir (x_n) dizisini alalım. Verilen her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı ve $m, n > n_0$ olan bütün m, n 'ler için $d^*(x_n, x_m) \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ pozitif sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine $*$ -Cauchy dizisi denir.

X $*$ -metrik uzayındaki her $*$ -Cauchy dizisi $*$ -yakınsak ise bu uzaya *tam $*$ -metrik* uzay diyeceğiz.

Teorem 3.1.3 $(\mathbb{R}^{*n}, d^*)$ $*$ -metrik uzayı tamdır. Burada, d^* $*$ -metrik bağıntısı

$$d^*(x, y) = \sqrt{{}^*\sum_{k=1}^n [x_k \dot{-} y_k]^{2^*}}^*, \quad x = (x_k)_{k=1}^n, y = (y_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^{*n} \quad (3.5)$$

ile verilmektedir.

Burada görüldüğü gibi $\mathbb{R}^{*n}$ cümlesi, tanımlanan

$$\begin{aligned} \dot{+} : \mathbb{R}^{*n} \times \mathbb{R}^{*n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{*n} \\ (x, y) &\longmapsto x \dot{+} y = (x_1 \dot{+} y_1, x_2 \dot{+} y_2, \dots, x_n \dot{+} y_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\times} : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{*n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{*n} \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \dot{\times} x = (\alpha \dot{\times} x_1, \alpha \dot{\times} x_2, \dots, \alpha \dot{\times} x_n), \end{aligned}$$

$(\dot{+})$ toplama ve $(\dot{\times})$ skalarla çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

$(\mathbb{R}^{*n}, d^*)$; bir tam $*$ -metrik uzay olduğundan ve d^* $*$ -metriği, $\|\cdot\|^*$ normundan indirgenen bir norm bulunduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.1.2 $(\mathbb{R}^{*n}, \|\cdot\|^*)$ $*$ -normlu uzayı bir Banach uzayıdır. Burada $\|\cdot\|^*$,

$$\|x\|^* = \sqrt{{}^*\sum_{k=1}^n |x_k|^{2^*}}^*; \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{*n} \quad (3.6)$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır.

Şimdi, klâsik dizi uzayları olarak da bilinen w, ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p sırasıyla bütün, sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve p -mutlak toplanabilen reel terimli dizi uzaylarının Newtonyen

olmayan manada $\omega^*, \ell_\infty^*, c^*, c_0^*$ ve ℓ_p^* karşılıklarını

$$\begin{aligned}\omega^* &= \{x = (x_k) : \text{bütün } k \in \mathbb{N} \text{ 'ler için } x_k \in \mathbb{R}^*\}, \\ \ell_\infty^* &= \left\{x = (x_k) \in \omega^* : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^* < \infty\right\}, \\ c^* &= \left\{x = (x_k) \in \omega^* : \exists l \in \mathbb{R}^* \ni {}^*\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - l|^* = 0\right\}, \\ c_0^* &= \left\{x = (x_k) \in \omega^* : {}^*\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k|^* = 0\right\}, \\ \ell_p^* &= \left\{x = (x_k) \in \omega^* : {}^*\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{*p} < \infty\right\}, \quad (1 \leq p < \infty).\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

w^* cümlesinin $\mathbb{R}^*$ cismi üzerinde $(\dot{+})$ koordinata göre toplama ve $(\dot{\times})$ skalarla çarpma cebir işlemleri ile bir vektör uzayı teşkil ettiğini görmek kolaydır. Burada $(\dot{+})$ ve $(\dot{\times})$ işlemleri, $x = (x_k), y = (y_k) \in w^*$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}\dot{+} : \omega^* \times \omega^* &\longrightarrow \omega^* \\ (x, y) &\longmapsto x \dot{+} y = (x_k \dot{+} y_k)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\dot{\times} : \mathbb{R}^* \times \omega^* &\longrightarrow \omega^* \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \dot{\times} x = (\alpha \dot{\times} x_k),\end{aligned}$$

Bunun gibi; $\ell_\infty^*, c^*, c_0^*$ ve ℓ_p^* yeni dizi uzaylarının her birinin w^* uzayının bir altzayı olduğunu görmek zor değildir.

Teorem 3.1.4 $\dot{1} = \alpha(1), \dot{2} = \alpha(2)$ olsun. $x = (x_k), y = (y_k) \in w^*$ olmak üzere w^* üzerinde tanımlı d^* metrik fonksiyonu

$$d^*(x, y) = {}^*\sum_{k=1}^{\infty} {}^*\frac{|x_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} y_k|^*)^*}; \quad x = (x_k)_{k=1}^n, y = (y_k)_{k=1}^n \in w^*$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde, (ω^*, d^*) bir $*$ -metrik uzaydır.

İspat (M^*1) ve (M^*2) aksiyomlarının sağlandığı aşikârdır. $x = (x_k)_{k=1}^n, y = (y_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^{*n}$ olsun. (3.4) eşitsizliğine dayanarak $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ 'ler için

$$\begin{aligned} & \frac{|x_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} y_k|^*)^*} \leq \\ & \frac{|x_k \dot{-} z_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} z_k|^*)^*} \dot{+} \frac{|z_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |z_k \dot{-} y_k|^*)^*} \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Buradan $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ 'ler üzerinden $*$ -toplam alınırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{|x_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} y_k|^*)^*} \leq \\ & \sum_{k=1}^n \frac{|x_k \dot{-} z_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} z_k|^*)^*} \dot{+} \sum_{k=1}^n \frac{|z_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |z_k \dot{-} y_k|^*)^*} \end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{|x_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} y_k|^*)^*} \leq \frac{\dot{1}}{2^{k*}} \\ & \frac{|x_k \dot{-} z_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} z_k|^*)^*} \leq \frac{\dot{1}}{2^{k*}} \\ & \frac{|z_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |z_k \dot{-} y_k|^*)^*} \leq \frac{\dot{1}}{2^{k_N}} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri de aşikâ olarak sağlandığından karşılaştırma testi bize

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} y_k|^*)^*}, \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k \dot{-} z_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} z_k|^*)^*}, \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |z_k \dot{-} y_k|^*)^*} \end{aligned}$$

serilerinin yakınsaklığını verir. Böylece (3.7) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit almakla,

$$\begin{aligned} d^*(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} y_k|^*)^*} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k \dot{-} z_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |x_k \dot{-} z_k|^*)^*} \dot{+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k \dot{-} y_k|^*}{2^{k*} \dot{\times} (\dot{1} \dot{+} |z_k \dot{-} y_k|^*)^*} \\ &= d^*(x, z) \dot{+} d^*(z, y), \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (M^*3) aksiyomunun sağlandığını gösterir.

Teorem 3.1.5 $\lambda \in \{\ell_{\infty}, c, c_0\}$ ve $x = (x_k), y = (y_k) \in \lambda^*$ olsun. λ^* uzayında $d_{\infty}^*(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k \dot{-} y_k|^*$ olarak tanımlansın. Bu taktirde; $(\lambda^*, d_{\infty}^*)$ uzayı bir tam $*$ -metrik uzaydır.

İspat İspat, c^* ve c_0^* uzayları için aynı olduğundan teorem sadece ℓ_∞^* uzayı için ispatlanacaktır. $x = (x_k), y = (y_k), z = (z_k) \in \ell_\infty^*$ olsun. Bu taktirde;

- (i) $\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k \dot{-} y_k|^* = \hat{0}$ olduğunu kabul edelim. Bu eşitlik, her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \dot{-} y_k = 0$ eşitliğini gerektirir. Bu ise, $x = y$ olduğunu gösterir.

Tersine, eğer $x = y$ ise her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \dot{-} y_k = \hat{0}$ olur. Buradan $d_\infty^*(x, y) = \hat{0}$ olur.

Böylece, (M^*1) şartı sağlanmış oldu.

- (ii) $d_\infty^*(x, y) = d_\infty^*(y, x)$ olduğu tanımdan açıktır.
- (iii) (3.2) *-üçgen eşitsizliğini göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} d_\infty^*(x, y) &= \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k \dot{-} y_k|^* \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k \dot{-} y_k \dot{+} z_k \dot{-} z_k|^* \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k \dot{-} z_k|^* + \sup_{k \in \mathbb{N}} |y_k \dot{-} z_k|^* \\ &= d_\infty^*(x, z) \dot{+} d_\infty^*(z, y). \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (M^*3) şartı sağlanır. (M^*1) -(M^*3) şartları sağlanığundan $(\ell_\infty^*, d_\infty^*)$ bir *-metrik uzaydır.

Geriye, ℓ_∞^* uzayının tam olduğunu göstermek kalır. (x^m) dizisi ℓ_∞^* uzayında, $x^m = \{x_k^1, x_k^2, \dots\}$ ile verilen bir Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde keyfi *-pozitif ε sayısı ve $m, n > n_0$ olan bütün $m, n \in \mathbb{N}$ 'ler için

$$d_\infty^*(x^m, x^n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k^{(m)} \dot{-} x_k^{(n)}|^* < \varepsilon \quad (3.8)$$

kalacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayısı mevcuttur. Şu hâlde keyfi sabit $k \in \mathbb{N}$ ve her bir $m, n > n_0$ olan bütün m, n 'ler için

$$|x_k^{(m)} \dot{-} x_k^{(n)}|^* < \varepsilon \quad (3.9)$$

olur. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $x_m = \{x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots\}$ dizisi *-reel sayıların bir Cauchy dizisi olur. Daha önce de (3.1.3)'de belirtildiği üzere $n = 1$ için $\mathbb{R}^{*n}$ Newtonyen olmayan manada tam bir metrik uzay olduğundan, $x_k^{(m)} \xrightarrow{*} x_k, (m \rightarrow \infty)$ olur. Sonsuz sayıda $x_1, x_2, \dots$ limitleri yardımıyla bir $x = (x_1, x_2, \dots)$ dizisini teşkil edelim. (3.9) eşitsizliğinde $m > n_0$

iken $n \rightarrow \infty$ için limite geçildiğinde

$$\left| x_k^{(m)} \dot{-} x_k \right|^* \leq \varepsilon \quad (3.10)$$

elde edilir. $(x^m) = \{x_k^{(m)}\} \subset \ell_\infty^*$ olduğundan, öyle bir K_m *-reel sayısı vardır ki, her $k \in \mathbb{N}$ için $\left| x_k^{(m)} \right|^* \leq K_m$ kalır. Böylece, (3.10) ile (3.2) *-üçgen eşitsizliği birlikte düşünülürse, $m > n_0$ için

$$|x_k|^* \leq \left| x_k \dot{-} x_k^{(m)} \right|^* + \left| x_k^{(m)} \right|^* \leq \varepsilon + K_m \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.11) eşitsizliğinin her $k \in \mathbb{N}$ için sağlandığı ve bu eşitsizliğin sağ tarafının k 'dan bağımsız olduğu açıktır. Buradan, (x_k) dizisinin *-reel sayıların sınırlı bir dizisi olduğu ortaya çıkar. Yani, $x = (x_k) \in \ell_\infty^*$. Yine (3.10) eşitsizliğinde $m > n_0$ için

$$d_\infty^*(x^m, x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| x_k^{(m)} \dot{-} x_k \right|^* \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu da bize $m \rightarrow \infty$ iken $x^m \xrightarrow{*} x$ olduğunu gösterir. (x^m) dizisi *-reel sayıların seçilen keyfi bir Cauchy dizisi olduğu için ℓ_∞^* uzayı tamdır.

d_∞^* *-metriği,

$$\|x\|_\infty^* = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^*; \quad x = (x_k) \in \lambda^*, \quad \lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0\} \quad (3.12)$$

normundan indirgenen metriktir. (3.1.5) 'den artık bilindiği gibi $\ell_\infty^*, c^*, c_0^*$ uzayları $\|\cdot\|_\infty^*$ normundan indirgenen d_∞^* *-metriği ile tam *-metrik uzaylar olduğundan aşağıdaki sonuç çıkartılabilir:

Sonuç 3.1.3 ℓ_∞^*, c^* ve c_0^* uzayları, (3.12) ile tanımlanan $\|\cdot\|_\infty^*$ normu ile birer Banach uzayıdır.

ℓ_∞^* uzayı yerine ℓ_p^* uzayının tanımı hesaba katılarak Teorem 3.1.5'in ispatına benzer muhakeme ile yapılabileceğinden dolayı sıkıcılıktan sakınmak üzere aşağıdaki teoremi ispatsız olarak ifade ediyoruz:

Teorem 3.1.6 Newtonyen olmayan dizilerin oluşturduğu ℓ_p^* uzayında d_p^* metriği $d_p^*(x, y) = \left(\sum_{k=0}^\infty |x_k \dot{-} y_k|^{p^*} \right)^{(1/p)^*}$; $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_p^*, p \geq 1$ ile tanımlansın. Bu taktirde; (ℓ_p^*, d_p^*) uzayı, bir tam metrik uzayıdır.

d_p^* *-metriği,

$$\|x\|_p^* = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^{p^*} \right)^{(1/p)^*}; \quad (x = (x_k) \in \ell_p^*, \quad p \geq 1). \quad (3.13)$$

normundan indirgenen metriktir. Teorem 3.1.6'dan artık bilindiği gibi ℓ_p^* uzayı $\|\cdot\|_p^*$ normundan indirgenen d_p^* *-metriği ile tam metrik uzay olduğundan aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz:

Sonuç 3.1.4 ℓ_p^* uzayı, (3.13) ile tanımlanan $\|\cdot\|_p^*$ normu ile bir Banach uzayıdır.

3.2 *-Kompleks Cismi Üzerinde Yeni Dizi Uzayları

Bu alt bölümde; *-kompleks sayılar tanımlanıp, bazı eşitsizlikler verildikten sonra *-kompleks cismi üzerinde tanımlanan Newtonyen olmayan ω^* , ℓ_∞^* , c^* , c_0^* ve ℓ_p^* dizi uzaylarının karşılıkları verilecektir. Tekin ve Başar, bunu [25] numaralı çalışmada gerçekleştirdiler. Newtonyen olmayan hesap için kaleme alınan bu tezde, [25] çalışmasına teferruatı ile olmasa da kısaca değinilecektir.

A ve B kısmi sıralı iki cümle olmak üzere, üzerlerinde sırasıyla α - ve β -aritmetiği tanımlanmış ve bu aritmetiklerin işlemleri sırasıyla, $(+, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{\leq})$ ve $(\ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}, \ddot{/}, \ddot{\leq})$ olsun. $\dot{a} \in (A, +, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{\leq})$ ve $\ddot{b} \in (B, \ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}, \ddot{/}, \ddot{\leq})$, seçilmiş keyfi iki elman olsunlar. Bu taktirde $(\dot{a}, \ddot{b})$ sıralı ikilisine *-nokta denilir. Bütün *-noktaların cümlesine Newtonyen olmayan kompleks sayıların cümlesi denir ve $\mathbb{C}^*$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathbb{C}^* := \{z^* = (\dot{a}, \ddot{b}) : \dot{a} \in A \subseteq \mathbb{R}, \quad \ddot{b} \in B \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Newtonyen olmayan kompleks sayılar cümlesindeki $(\oplus)$ toplama ve $(\odot)$ çarpma işlemleri, $z_1^* = (\dot{a}_1, \ddot{b}_1)$ ve $z_2^* = (\dot{a}_2, \ddot{b}_2)$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\oplus : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$(z_1^*, z_2^*) \longmapsto z_1^* \oplus z_2^* = (\dot{a}_1 \dot{+} \dot{a}_2, \ddot{b}_1 \ddot{+} \ddot{b}_2),$$

$$\odot : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$(z_1^*, z_2^*) \longmapsto z_1^* \odot z_2^* = \left(\alpha \left(\bar{\dot{a}}_1 \bar{\dot{a}}_2 - \bar{\ddot{b}}_1 \bar{\ddot{b}}_2 \right), \beta \left(\bar{\dot{a}}_1 \bar{\ddot{b}}_2 + \bar{\ddot{b}}_1 \bar{\dot{a}}_2 \right) \right).$$

Burada kolayca görüleceği üzere; $\dot{a}_1, \dot{a}_2 \in A$ ve $\ddot{b}_1, \ddot{b}_2 \in B$ ile

$$\bar{a}_1 = \alpha^{-1}(\dot{a}_1) = \alpha^{-1}[\alpha(a_1)] = a_1 \in \mathbb{R}$$

$$\bar{b}_1 = \beta^{-1}(\ddot{b}_1) = \beta^{-1}[\beta(a_1)] = b_1 \in \mathbb{R}$$

olur. Bu taktirde; $(\mathbb{C}^*, \oplus, \odot)$ üçlüsünün bir cisim olduğunu göstermek için,

- (i) $(\mathbb{C}^*, \oplus)$ ikilisinin bir Abelyen gurup,
- (ii) $(\mathbb{C}^* \setminus \{\theta^*\}, \odot)$ ikilisinin bir Abelian gurup,
- (iii) $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerinde dağılma özelliği

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunları göstermek kolay olduğundan, burada detaya girmeden bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

$\ddot{b} \in B \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $\ddot{b} \ddot{\times} \ddot{b}$ sayısı ile $\ddot{b}$ sayısının β -karesini göstereceğiz. $\ddot{b} \in B$ negatif olmayan bir sayı olsun. Bu taktirde; $\beta \left[\sqrt{\beta^{-1}(\ddot{b})} \right]$ sayısına, $\ddot{b}$ sayısının β -karekökü denir ve $\sqrt{\ddot{b}}^*$ ile gösterilir. $\mathbb{C}^*$ cümlesinden alınan $z_1^* = (\dot{a}_1, \ddot{b}_1)$ ve $z_2^* = (\dot{a}_2, \ddot{b}_2)$ noktaları arasındaki d^* *-uzaklığı,

$$\begin{aligned} d^* : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \ddot{[\ddot{0}, \ddot{\infty})} = B' \subset B \\ (z_1^*, z_2^*) &\longrightarrow d^*(z_1^*, z_2^*) = \sqrt{[\iota(\dot{a}_1 - \dot{a}_2)]^2 \ddot{+} (\ddot{b}_1 - \ddot{b}_2)^2}^* \\ &= \beta \left[\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

ile tanımlanır. Artık $\mathbb{C}^*$ üzerinde tanımlı d^* *-metrik fonksiyonunun indirgendiği *-normu tanımlanabilir.

$z \in \mathbb{C}^*$ olsun. z^* 'ın $\ddot{|z^*|}$ *-normu, $d^*(z^*, \theta^*)$ olarak tanımlanır. Yani, $z^* = (\dot{a}, \ddot{b})$ ve $\theta^* = (\ddot{0}, \ddot{0})$ olmak üzere

$$\ddot{|z^*|} = d^*(z^*, \theta^*) = \sqrt{[\iota(\dot{a} - \ddot{0})]^2 \ddot{+} (\ddot{b} - \ddot{0})^2}^* = \beta(\sqrt{a^2 + b^2})$$

olur. Daha genel ifade ile, $z_1^*, z_2^* \in \mathbb{C}^*$ için $d^*(z_1^*, z_2^*) = \ddot{|z_1^* \ominus z_2^*|}$ eşitliği ile $\ddot{|\cdot|}$ *-normu, d^* indirgenmiş metriğini veren normdur.

$(\mathbb{C}^*, d^*)$ ikilisinin bir tam *-metrik uzay olduğu ve yine $(\mathbb{C}^*, \ddot{|\cdot|})$ ikilisinin bir Banach uzayı olduğu tartışmalarını Tekin ve Başar [25] çalışmasında ayrıntılı bir şekilde incelendiğinden, burada sadece genel hatları ile değinmekle yetinildi. Fakat Newtonyen olmayan

Fonksiyonel Analiz kavramlarına dair tartışmalarda akmak ve Başar [19] ile Tekin ve Başar [25] çalışmalarının önemini hatırlatmak faydalı olur.

ÇARPMAYA DAYANAN HESAP ve UYGULAMALARI

Bu bölümde; çarpmaya dayanan hesap incelenip üzerinde yapılan bazı tartışmalar, klâsik manada bilinen Newton-Leibnitz alışılmış hesap tarzına nazaran ne gibi avantajlara haiz olduğu ve ileriye matuf olarak bu yeni matematik modellemenin hangi çözüm metodlarını bilim dünyasına sunabileceği hakkında kısaca bilgi verilecektir. Önemli görülen ve bu tez için esas teşkil eden bazı teoremler üzerinde de ayrıca durulacaktır. Bu ve bundan sonraki bölümlerde $*$ -hesap olarak kullanılan kavramlar, aksi belirtilmediği müddetçe çarpmaya dayanan hesap kavramlarını ifade edecektir. Ayrıca üzerinde çalışılan cisim olarak da $\mathbb{R}^*$ cümlesi göz önünde bulundurulacaktır.

4.1 Çarpmaya Dayanan Hesap ve Özellikleri

Grossman ve Katz, [1] numaralı kaynakta geometrik hesap olarak da adlandırdıkları çarpmaya dayanan hesabın finans, biyo-matematik gibi bir çok alanda uygulamasını sunmaktadır. Newtonyen olmayan bir hesap çeşidi olan çarpmaya dayanan hesap, değişkenlerinde α -doğurucu olarak I birim fonksiyonu ve değerlerinde de β -doğurucu olarak e^x fonksiyonu kullanılarak elde edilen hesap tarzıdır. Çarpmaya dayanan hesapta, fonksiyonların değişkenlerindeki ve değerlerindeki değişim sırasıyla, farklarla ve oranlarla ölçülür ve operatörler yalnızca pozitif fonksiyonlara uygulanır. Dolayısıyla bu tezde, çarpmaya dayanan hesap ile alâkalı bütün ibarelerde, özel amaçlar için kullanılan doğal logaritma $\ln x$ fonksiyonu hariç bütün fonksiyonlar pozitif değerli kabul edilecektir. Mamafih, negatif fonksiyonlar için $\alpha = I$ ve $\beta = -e^x$ seçimi yaparak negatif sayılar için çarpmaya dayanan hesap tarzı yeniden kolayca elde edilebilir.

Çarpmaya dayanan hesabın aritmetik işlemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\text{* -toplama} \quad x \dot{+} y &= \beta[\beta^{-1}(x) + \beta^{-1}(y)] = e^{(\ln x + \ln y)} = x \cdot y \\
\text{* -çıkarma} \quad x \dot{-} y &= \beta[\beta^{-1}(x) - \beta^{-1}(y)] = e^{(\ln x - \ln y)} = x \div y, y \neq 0 \\
\text{* -çarpma} \quad x \dot{\times} y &= \beta[\beta^{-1}(x) \cdot \beta^{-1}(y)] = e^{(\ln x \times \ln y)} = x^{\ln y} = y^{\ln x} \\
\text{* -bölme} \quad x \dot{/} y &= \beta[\beta^{-1}(x) / \beta^{-1}(y)] = e^{(\ln x \div \ln y)} = x^{\frac{1}{\ln y}}, y \neq 1
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi çarpmaya dayanan hesap tarzında toplama yerini çarpmaya ve çıkarma da yerini bölmeye bırakmıştır. Ayrıca sıralama işlemi e^x fonksiyonunun monoton artan olmasından dolayı yine alışılmış hesap tarzındaki sıralama ile aynıdır. Çarpmaya dayanan hesap ile ilgili temel prensipleri [1], [30] ve [31] numaralı kaynaklarda bulmak mümkündür. Daha ileri konular ise [8], [9], [10], [11], [16], [18] ve [32] numaralı çalışmalarda incelenmiştir. Bu çalışmaların yanında faydalanılabilecek diğer eserler, kaynaklar kısmında liste edilmiştir.

Birinci Bölümde tezin amacı altbaşlığı ile, Newtonyen olmayan hesap tarzları için zikredilen bütün ifadeler çarpmaya dayanan hesap tarzı için de geçerlidir. Dolayısıyla burada tekrar kaleme alınmayıp benzer ifadelerin tekrarından kaçınılacaktır. Artık, yeni hesap tarzının ve yeni aritmetik işlemlerin bilindiği göz önünde bulundurularak, çarpmaya dayanan hesap tarzını klâsik hesap tarzı ile de ilişkilendirmek gerekir.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlanan keyfi pozitif bir fonksiyon ve $\tilde{f}(x) = \ln[f(x)]$ olsun. $\tilde{f}$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki klâsik gradiyenti $G_a^b \tilde{f}$ ve f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki *-gradiyenti $G_a^{*b} f$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

- (1) $G_a^{*b} f = \exp(G_a^b \tilde{f})$,
- (2) $(D^* f)(a) = \exp[(D \tilde{f})(a)]$,
- (3) $M_a^{*b} f = \exp(M_a^b \tilde{f})$.
- (4) $\int_a^{*b} f = \exp\left(\int_a^b \tilde{f}\right)$.

Hatırlatma 4.1.1 Burada (2) bağıntısı için $(D^* f)(a)$ *-türevinin mevcut olduğu, (3) ve (4) bağıntıları için ise $[a, b]$ aralığında f fonksiyonunun sürekli olduğu kabul edilmektedir.

Geometrik gradiyent, güvenlik analizlerinde kullanılan "bileşik büyüme oranı" ile doğru-

dan alâkalıdır. Geometrik türev ise logaritmik türev ile doğrudan ilişkilidir. Klâsik gradiyent ve türevin kullanıldığı yerlerde değişimler farklarla ölçülür. Yani, Δ fark operatörü ve herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi için $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olur. Çarpmaya dayanan hesap kullanıldığı yerlerde ise fark operatörünün $\Delta^* x = (x_k/x_{k+1})$ olduğu açıktır. Meselâ, lineer bir hareketin analizi için klâsik gradiyent ve türevden faydalanılır. Çünkü, zaman ve mekândaki değişimler farklarla ölçülür. Ancak bir vücuttaki bir organın vücudun başka bir organa göre büyümesinin analizi için uygun olan garadiyent ve türev, çarpmaya dayanan gradiyent ve çarpmaya dayalı (geometrik) türev olacaktır. Çünkü, büyüme oranları en iyi şekilde oranlarla ölçülür. Bu sebeple, uygun olan fark operatörü, Δ^* operatörüdür.

4.2 Çarpmaya Dayanan Hesaba Göre Dizi Uzayları

Bu kısımda, bazı bilinen dizi uzaylarının çarpmaya dayanan hesap tarzındaki karşılıkları verilip bazı temel özelliklerinden bahsedilecektir. Çarpmaya dayanan hesap tarzı, bir diğer adıyla geometrik hesap tarzı, Newtonyen olmayan bir hesap çeşidi olduğu için Bölüm 3'teki teoremler ve sonuçlar çarpmaya dayanan hesap tarzı için de geçerlidir. Burada Bölüm 3'te geçen dizi uzaylarının yanında, daha değişik uzaylar da tanıtılıp bazı özellikleri belirtilecektir.

Terimleri pozitif reel sayılar olan dizilerin cümlesi w^* ile gösterilirse, bu cümlelerin $x = (x_k), y = (y_k) \in w^*$ olmak üzere

$$x \dot{+} y = x \cdot y = (x_k \cdot y_k) \text{ ve } \alpha \dot{\times} x = \alpha \times (x_k) = (\alpha^{\ln x_k})$$

sırasıyla koordinatlara göre $*$ -toplama ve skalarla $*$ -çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı olduğunu göstermek rutin bir işlemdir. Bir dizi uzayı ile w^* uzayının bir alt uzayını kast ediyoruz.

$b = (b_k)$ ve $b^{(n)} = \{b_k^{(n)}\}, (n \in \mathbb{N})$ dizisi, her $k \in \mathbb{N}$ için $b_k = e$ ve her $n, k \in \mathbb{N}$ için $b_k^{(n)} = \delta_k^*(n)$ olsun. Burada $\{\delta_k^*(n)\}$ dizisi,

$$\delta_k^*(n) = \begin{cases} e & , \quad n = k, \\ 1 & , \quad n \neq k \end{cases} \quad (4.1)$$

ile tanımlanmaktadır.

w^* dizi uzayı,

$$w^* = \{x = (x_k) : \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } x_k \in \mathbb{R}_+\}$$

olarak tanımlanır ve üzerinde tanımlanan

$$d_{w^*}(x, y) = \prod_k^* \frac{|x_k - y_k|^*}{2^{k^*} \times (1 + |x_k - y_k|^*)}^*; x = (x_k), y = (y_k) \in w^*$$

$*$ -metriğine göre bir metrik uzaydır.

$*$ -sınırlı dizilerin ℓ_∞^* uzayı,

$$\ell_\infty^* = \{x = (x_k) \in w^* : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^* < \infty\}.$$

ile tanımlanır. ℓ_∞^* uzayı, üzerinde

$$d_\infty^*(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|^*; x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_\infty^*$$

ile verilen d_∞^* tabii metriğine göre bir metrik uzaydır.

Sırasıyla, $*$ -yakınsak ve 1'e $*$ -yakınsak c^* ve c_0^* dizi uzayları

$$\begin{aligned} c^* &= \left\{ x = (x_k) \in w^* : \exists l \in \mathbb{R}_+ \text{ için } \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k/l|^* = 1 \right\}, \\ c_0^* &= \left\{ x = (x_k) \in w^* : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1 \right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. c^* ve c_0^* yine d_∞^* $*$ -metriğine göre metrik uzaylardır.

Mutlak manada $\dot{p}$ -toplanabilen dizilerin ℓ_p^* uzayı,

$$\ell_p^* = \left\{ x = (x_k) \in w^* : \prod_{k=1}^{\infty} |x_k|^{*\dot{p}} < \infty \right\}, (1 < \dot{p} < \infty)$$

şeklinde tanımlanır. $e < \dot{p} < \infty$ durumunda ℓ_p^* uzayı,

$$d_p^*(x, y) = \left(\prod_k^{\infty} |x_k - y_k|^{*\dot{p}} \right)^{1/\dot{p}}; x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_p^*$$

d_p^* metriğine göre bir metrik uzaydır. Yine $1 < \dot{p} < e$ durumunda ℓ_p^* uzayı,

$$\tilde{d}_p^*(x, y) = \prod_k^{\infty} |x_k - y_k|^{*\dot{p}}; x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_p^*$$

eşitliği ile tanımlanan $\tilde{d}_p^*$ metriğine göre bir metrik uzaydır.

bs^* *-sınırlı serilerin uzayı, yani

$$bs^* = \left\{ x = (x_k) \in w^* : \prod_{k=1}^n |x_k|^* < \infty \right\}$$

üzerindeki tabii metrik

$$d^*(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^n |x_k \dot{-} y_k|^*; x = (x_k), y = (y_k) \in bs^* \quad (4.2)$$

ile verilir.

Şimdi, sırasıyla *-yakınsak ve $\hat{0}$ 'a *-yakınsak serilerin cs^* ve cs_0^* uzayları, yani

$$cs^* = \left\{ x = (x_k) \in w^* : \exists l \in \mathbb{R}_+ \text{ için } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \prod_{k=1}^n x_k / l \right|^* = 1 \right\},$$

$$cs_0^* = \left\{ x = (x_k) \in w^* : \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \prod_{k=1}^n x_k \right|^* = 1 \right\}$$

ile verilir. cs^* ve cs_0^* uzayları (4.2) ile verilen d^* metriğine göre birer metrik uzaydırlar.

Son olarak, *-sınırlı salınımlı dizilerin bv^* ve bv_1^* uzayları

$$bv^* = \left\{ x = (x_k) \in w^* : \prod_{k=1}^{\infty} |x_k \dot{-} x_{k+1}|^* < \infty \right\},$$

$$bv_1^* = \left\{ x = (x_k) \in w^* : \prod_{k=1}^{\infty} |x_k \dot{-} x_{k-1}|^* < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. bv^* uzayı üzerindeki Δ^* fark operatörü, her $k \in \mathbb{N}$ için $u_0 = 1$, $(\Delta^* u)_k = u_k \dot{-} u_{k+1}$ ile verilir. Böylece, bv^* uzayının tabii metriği,

$$d^*(x, y) = \prod_{k=1}^{\infty} |\Delta^*(x_k \dot{-} y_k)|^*; x = (x_k), y = (y_k) \in bv^*$$

şeklinde olur.

Benzer şekilde, bv_1^* uzayı üzerindeki $\Delta^{*(1)}$ fark operatörü, her $k \in \mathbb{N}$ için $u_0 = 1$ olmak üzere $(\Delta^{*(1)} u)_k = u_k \dot{-} u_{k-1}$ ile verilir. Böylece, bv_1^* uzayının tabii metriği,

$$d^*(x, y) = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \Delta^{*(1)}(x_k \dot{-} y_k) \right|^*; x = (x_k), y = (y_k) \in bv_1^*$$

şeklinde olur.

λ , bir lineer topoloji ile verilmiş bir dizi uzayı olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için $p_i : \lambda \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}^*$ veya $\mathbb{C}^*$) dönüşümü, $p_i(x) = x_i$ olarak tanımlansın. Eğer her $i \in \mathbb{N}$ için p_i dönüşümü sürekli ise λ uzayına *K-uzayı* denir.

Eğer her hangi bir K -uzayı olan λ dizi uzayı, bir tam metrik uzay ise ona FK -uzayı denir.

Eğer her hangi bir FK -uzayının topolojisi normlanabilir ise bu uzaya BK -uzayı denir.

ϕ cümlesi, yalnızca sonlu sayıdaki terimleri 1'den farklı olan dizilerin cümlesi olmak üzere, $\lambda \supset \phi$ verilmiş bir FK -uzayı olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisinin n -inci kısmını

$$x^{[n]} = \prod_{k=1}^n (x_k)^{\ln b^{(k)}}$$

olarak göstereceğiz. Burada $b^{(k)} = (1, 1, \dots, e, 1, 1, \dots)$, k -ıncı elemanı $e = e^1$ ve diğer bütün elemanları $1 = e^0$ olan vektördür. Böylece, x vektörü için;

AK -özellğine sahiptir, eğer $n \rightarrow \infty$ için $x^{[n]} \rightarrow x$ ise,

AB -özellğine sahiptir, eğer $(x^{[n]})$ sınırlı ise,

AD -özellğine sahiptir, eğer $x \in \phi$ ise,

KB -özellğine sahiptir, eğer $\{(x_k)^{\ln b^{(k)}}\}$ cümlesi λ 'da sınırlı ise.

Eğer her $x \in \lambda$ için bu özellikler sağlanırsa λ uzayına bu özellikte bir uzay denir.

ÇARPMAYA DAYANAN HESABA GÖRE FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde; çarpmaya dayanan hesap tarzını kullanarak elde edilen $\mathbb{R}^*$ cismi üzerindeki fark dizi uzayları ve bu uzayların *alfa*-, *beta*- ve *gama*- dualleri incelenecektir. Ayrıca, $\aleph$ -dual kavramı üzerinde kısaca durulacaktır.

5.1 Fark Dizi Uzaylarının Yapısı

Kızmaz, [29] numaralı çalışmasında; Δx dönüşümü ℓ_∞, c ve c_0 klâsik dizi uzaylarında yatan bütün x dizilerinin $\ell_\infty(\Delta), c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ uzaylarını inşa ederek onların *alfa*-, *beta*- ve *gama*- duallerini hesaplamıştır. Bu kısımda; çarpmaya dayanan hesaba göre $\ell_\infty^*(\Delta^*), c^*(\Delta^*)$ ve $c_0^*(\Delta^*)$ yeni uzayları tanımlanıp, bu uzayların dualleri tayin edilecektir.

Çarpmaya dayanan hesaba göre ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_1 klâsik dizi uzaylarına karşılık gelen $\ell_\infty^*, c^*, c_0^*$ ve ℓ_1^* uzayları,

$$\begin{aligned}\ell_\infty^* &:= \left\{ x = (x_k) : \sup_{k \in \mathbb{N}} e^{|\ln x_k|} < \infty \right\} = \left\{ x = (x_k) : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^* < \infty \right\} \\ c^* &:= \left\{ x = (x_k) : \exists \ell \in \mathbb{R}^* \ni \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\ln x_k} = \ell \right\} = \left\{ x = (x_k) : \exists \ell \in \mathbb{R}^* \ni * - \lim_k x_k = \ell \right\} \\ c_0^* &:= \left\{ x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} e^{|\ln x_k|} = 1 \right\} = \left\{ x = (x_k) : * - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1 \right\} \\ \ell_1^* &:= \left\{ x = (x_k) : \prod_{k=1}^{\infty} e^{|\ln x_k|} < \infty \right\} = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^* < \infty \right\}\end{aligned}$$

olarak tarif edilirler. 3. bölümde de zikredildiği üzere, en genel hâlde, Newtonyen olmayan reel sayılar cismi üzerinde bu uzaylar için tartışmayı Çakmak ve Başar [19] ve Newtonyen olmayan kompleks cisim üzerindeki tartışmayı da Tekin ve Başar [25] yapmıştır. Burada Newtonyen olmayan hesap tarzının özel ve yaygın bir hâli olan çarpmaya

dayanan hesap tarzına göre Δ^* fark matrisinin bu uzaylar üzerindeki etki alanları incelenecektir. Tabii ki çarpmaya dayanan hesapta farklar oranlarla ölçüldüğü için $x = (x_k)$ herhangi bir dizi olmak üzere, burada

$$\Delta^* x = \left(\frac{x_k}{x_{k+1}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

şeklindedir. Böylece $\ell_\infty^*(\Delta^*)$, $c^*(\Delta^*)$, $c_0^*(\Delta^*)$ ve $\ell_1^*(\Delta^*)$ fark dizi uzayları,

$$\ell_\infty^*(\Delta^*) := \{x = (x_k) \in w^* : \Delta^* x \in \ell_\infty^*\}$$

$$c^*(\Delta^*) := \{x = (x_k) \in w^* : \Delta^* x \in c^*\}$$

$$c_0^*(\Delta^*) := \{x = (x_k) \in w^* : \Delta^* x \in c_0^*\}$$

$$\ell_1^*(\Delta^*) := \{x = (x_k) \in w^* : \Delta^* x \in \ell_1^*\}$$

şeklinde tarif edilir. Bu uzaylar

$$\|x\|_{\Delta^*}^* = |x_1|^* \cdot \|\Delta^* x\|_\infty^* = e^{|\ln x_1|} \cdot \left\| \left(\frac{x_k}{x_{k+1}} \right) \right\|_\infty^*$$

normuna göre birer Banach uzayıdır. Burada, yalnız $\ell_\infty^*(\Delta^*)$ uzayı için ispat verilecektir.

Teorem 5.1.1 $\ell_\infty^*(\Delta^*)$ uzayı, $\|\cdot\|_{\Delta^*}^*$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat (x^n) dizisi, $\ell_\infty^*(\Delta^*)$ uzayından alınan bir Cauchy dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_k^n) = (x_1^n, x_2^n, \dots) \in \ell_\infty^*(\Delta^*)$ olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x^n}{x^m} \right\|_{\Delta^*}^* &= \left\| \frac{x_1^n}{x_1^m} \right\|_\infty^* \cdot \left\| \frac{\Delta^* x^n}{\Delta^* x^m} \right\|_\infty^* \\ &= \exp\{|\ln x^n - \ln x^m|\} \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}} \exp\{|\ln \Delta^* x^n - \ln \Delta^* x^m|\} \\ &= e^{|\ln \frac{x^n}{x^m}|} \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}} \exp\left\{ \left| \ln \frac{x^n}{x^{n+1}} - \ln \frac{x^m}{x^{m+1}} \right| \right\} \end{aligned}$$

Bu son ifade n, m sayıları ∞ 'a yaklaştırılırsa, 1'e yakınsar. Böylece $n, m \rightarrow \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\left| \frac{x_k^n}{x_k^m} \right|^* \rightarrow 1$ olur. Demek ki $(x_k^n) = (x_1^n, x_2^n, \dots)$ dizisi, $\mathbb{R}^*$ cisminde bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}^*$ uzayı tam olduğundan (x_k^n) dizisi, $x_k \in \mathbb{R}^*$ noktasına yakınsar. Yani, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^n = x_k$$

elde edilir. Buna ek olarak, her $\varepsilon > 1$ ve $n, m \geq N$ olan bütün $n, m \in \mathbb{N}$ 'ler ve herbir sabit

$k \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \frac{x_1^n}{x_1^m} \right|^* < \varepsilon \text{ ve } |x_{k+1}^n \ddot{x}_{k+1}^m \ddot{(x_k^n \ddot{x}_k^m)}|^* = \left| \frac{x_{k+1}^n}{x_{k+1}^m} \cdot \frac{x_k^m}{x_k^n} \right|^* < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur. Burada $k \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_1^n}{x_1^m} \right|^* &= \lim_{k \rightarrow \infty} |x_1^n \ddot{x}_1|^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_1^n}{x_1} \right|^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\left| \ln \frac{x_1^n}{x_1} \right|} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{k+1}^n}{x_{k+1}^m} \cdot \frac{x_k^m}{x_k^n} \right|^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp \left\{ \left| \ln \frac{x_{k+1}^n}{x_{k+1}^m} + \ln \frac{x_k^m}{x_k^n} \right| \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\ln \frac{x_{k+1}^n}{x_{k+1}^m} \cdot \frac{x_k^m}{x_k^n}} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

olur. ε sayısı k 'dan bağımsız olduğundan

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \exp \left\{ \left| \ln \frac{x_{k+1}^n}{x_{k+1}^m} - \ln \frac{x_k^m}{x_k^n} \right| \right\} \leq \varepsilon$$

elde edilir. Son iki eşitsizlik taraf tarafa çarpılırsa, $n \geq N$ için $\|x^n \ddot{x}\|_{\Delta^*}^* < \varepsilon$ kaldığı görü-
lür. Böylece, $\ell_\infty^*(\Delta^*)$ uzayında $x^n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) elde edilmiş olur.

Şimdi, $x \in \ell_\infty^*(\Delta^*)$ olduğunun gösterelim. Kolayca görüldüğü üzere,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x_k}{x_{k+1}} \right|^* &= \left| \frac{x_k}{x_k^N} \cdot \frac{x_k^N}{x_{k+1}^N} \cdot \frac{x_{k+1}^N}{x_{k+1}} \right|^* \\
&= \exp \left\{ \left| \ln \frac{x_k}{x_k^N} \cdot \frac{x_k^N}{x_{k+1}^N} \cdot \frac{x_{k+1}^N}{x_{k+1}} \right| \right\} \\
&= \exp \left\{ \left| \ln \frac{x_k^N}{x_{k+1}^N} \right| \right\} \cdot \exp \left\{ \left| \ln \frac{x_k}{x_k^N} \cdot \frac{x_{k+1}^N}{x_{k+1}} \right| \right\} \\
&= \left| \frac{x_k^N}{x_{k+1}^N} \right|^* \cdot \exp \left\{ \left| \ln \frac{x_k}{x_k^N} + \frac{x_{k+1}^N}{x_{k+1}} \right| \right\} \\
&= |x_k^N \ddot{x}_{k+1}^N|^* \ddot{+} \exp \{ |\ln x_k - \ln x_k^N + \ln x_{k+1}^N - \ln x_{k+1}| \} \\
&\leq |x_k^N \ddot{x}_{k+1}^N|^* \ddot{+} \exp \{ |\ln x_{k+1}^N - \ln x_k^N| + |\ln x_k - \ln x_{k+1}| \} \\
&= |x_k^N \ddot{x}_{k+1}^N|^* \ddot{+} \exp \{ |\ln x_k^N - \ln x_{k+1}^N| + |\ln x_{k+1} - \ln x_k| \} \\
&= |x_k^N \ddot{x}_{k+1}^N|^* \ddot{+} \exp \left\{ \left| \ln \frac{x_k^N}{x_{k+1}^N} \cdot \ln \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \right\} \\
&\leq |x_k^N \ddot{x}_{k+1}^N|^* \ddot{+} \exp \left\{ \left| \ln \frac{x_1^N}{x_1} \right| \right\} \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}} \exp \left\{ \left| \ln \frac{\Delta^* x^N}{\Delta^* x} \right| \right\} \\
&= |x_k^N \ddot{x}_{k+1}^N|^* \ddot{+} \left| \frac{x_1^N}{x_1} \right|^* \ddot{+} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{\Delta^* x^N}{\Delta^* x} \right|^* \\
&= |x_k^N \ddot{x}_{k+1}^N|^* \ddot{+} |x_1^N \ddot{x}_1|^* \ddot{+} \|\Delta^* x^N \ddot{\Delta^* x}\|_\infty^* \\
&= |x_k^N \ddot{x}_{k+1}^N|^* \ddot{+} \|x^N \ddot{x}\|_{\Delta^*}^* < \infty
\end{aligned}$$

kalır ki bu da ispatı tamamlar.

Bu teoreme ilâve olarak, $\ell_\infty^*(\Delta^*)$ uzayı sürekli koordinatlara göre bir Banach uzayı ise, yani her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için $\left\| \frac{x^n}{x} \right\|^* \rightarrow 1$ durumu $\left| \frac{x_k^n}{x_k} \right|^* \rightarrow 1$ olmasını gerektiriyor ise, $\ell_\infty^*(\Delta^*)$ uzayı bir *BK*-uzayıdır.

Şimdi bir T operatörü, $T : \ell_\infty^*(\Delta^*) \rightarrow \ell_\infty^*(\Delta^*)$, $x \rightarrow Tx = y = (0, x_1, x_2, \dots)$ öteleme operatörü olarak tanımlansın. Bu operatörün $\ell_\infty^*(\Delta^*)$ uzayında bir $*$ -sınırlı lineer operatör olduğu ve

$$\begin{aligned}
\sup_{\|u\|^*=e} \|Tu\|^* / \|u\|^* &= \sup_{\|u\|^*=e} \exp \left(\frac{\|Tu\|}{\|u\|} \right) \\
&= \exp \left(\sup_{\|u\|^*=e} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \right) = e
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$T[\ell_\infty^*(\Delta^*)] = T\ell_\infty^*(\Delta^*) = \{x = (x_k) : x \in \ell_\infty^*(\Delta^*), x_1 = 1\} \subset \ell_\infty^*(\Delta^*)$$

olduğu, yani $T[\ell_\infty^*(\Delta^*)]$ uzayının $\ell_\infty^*(\Delta^*)$ uzayının bir altuzayı olduğu kolayca görülür. Bu, $T[\ell_\infty^*(\Delta^*)]$ uzayında $\|x\|_{\Delta^*}^* = \|\Delta^*x\|_\infty^*$ olduğunu gösterir.

Öte yandan,

$$\begin{aligned} \Delta^* : T\ell_\infty^*(\Delta^*) &\rightarrow \ell_\infty^* \\ x = (x_k) &\rightarrow y = (y_k) = \left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

dönüşümünün bir lineer homeomorfizma olduğu gösterilebilir. Böylece $T[\ell_\infty^*(\Delta^*)]$ ve ℓ_∞^* uzaylarının Maddox [33] eseri ışığı altında topolojik olarak denk olduklarını söylemek mümkündür. Δ^* ve Δ^{*-1} norm koruyan operatörlerdir ve $\|\Delta^*\|^* = \|\Delta^{*-1}\|^* = e$ olur. Burada

$$\begin{aligned} \Delta^{*-1} : \ell_\infty^* &\rightarrow T\ell_\infty^*(\Delta^*) \\ y = (y_k) = \left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right) &\rightarrow x = (x_k) \end{aligned}$$

ters fark operatörüdür.

Şimdi $(\ell_\infty^*)'$ ve $[T\ell_\infty^*(\Delta^*)]'$ uzayları sırasıyla, ℓ_∞^* ve $T[\ell_\infty^*(\Delta^*)]$ uzaylarının sürekli duallerini gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} A : [T\ell_\infty^*(\Delta^*)]' &\rightarrow (\ell_\infty^*)' \\ f_{\Delta^*} &\rightarrow f = f_{\Delta^*} \circ \Delta^{*-1} \end{aligned}$$

dönüşümünün bir lineer izometri olduğu kolayca ispatlanabilir. Böylece $[T\ell_\infty^*(\Delta^*)]'$ uzayı, $(\ell_\infty^*)'$ uzayına denktir. Benzer metodla; $T[c^*(\Delta^*)]$ uzayı, c^* uzayına ve $T[c_0^*(\Delta^*)]$ uzayı, c_0^* uzayına topolojik olarak denktir. Ayrıca çarpmaya dayanan hesaba göre mutlak yakınsak serilerin uzayı ℓ_1^* olmak üzere, $\{T[c^*(\Delta^*)]\}' \simeq \{T[c_0^*(\Delta^*)]\}' \simeq \ell_1^*$ olur.

5.2 Dual Uzaylar

Bu alt bölümde, $T[\ell_\infty^*(\Delta^*)] = \{x = (x_k) : x \in \ell_\infty^*(\Delta^*), x_1 = 1\} \subset \ell_\infty^*(\Delta^*)$ uzayının *alfa*-, *beta*- ve *gamma*- duallerini bulacağız. Bunun yanında matris dönüşümlerinin karakterizasyonu hakkında kullanışlı sonuçlar elde etmeye çalışacağız.

Dual uzaylar ve matris metodları üzerinde ilişki kurmaya çalışırken sonsuz $*$ -serilerle uğraşmak kaçınılmazdır. Şimdi, Abel kısmî toplamlar formülünü çarpmaya dayanan hesap tarzında ifade eden bir yardımcı teorem verelim. Karışıklığa sebebiyet vermemek için, Abel kısmî çarpımlar formülü yerine Abel $*$ -kısmî toplam formülü adlandırması kullanacağız.

Yardımcı Teorem 5.2.1 [Abel $*$ -Kısmî Toplamlar Formülü] $(a_v), (b_v) \in \omega$ olsun. $A_0 = 1$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n := \prod_{v=1}^n a_v$ olsun. her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\prod_{v=n}^{n+k} a_v^{\ln b_v} = \prod_{v=n}^{n+k} x_v^{\ln \frac{b_v}{b_{v+1}}} \cdot \frac{1}{A_{n-1}^{\ln b_n}} \cdot A_{n+k}^{\ln b_{n+k+1}} \quad (5.2)$$

eşitliği geçerlidir. En basit hâlde (5.2) eşitliği,

$$\prod_{k=1}^n a_k^{\ln b_k} = \prod_{k=1}^n A_k^{\ln \frac{b_k}{b_{k+1}}} \cdot A_n^{\ln b_{n+1}}$$

olarak ifade edilir.

Lemma 5.2.1 $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{x_k}{x_{k+1}} \right|^* < \infty$ olması için

- (i) $\sup_{k \in \mathbb{N}} x_k / \iota(k) < \infty$
- (ii) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{x_k}{x_{k+1} \ddot{\times} \iota(\frac{k}{k+e})} \right|^* < \infty$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

İspat Öncelikle çarpmaya dayanan hesap tarzı üzerinde çalışıldığı göz önünde bulundularak, $\iota(x) = \beta[\alpha^{-1}(x)]$ bağıntısında $\beta(x) = e^x$ ve $\alpha(x) = x$ alınmakla, $\iota(x) = e^x$ olduğu görülür. Bu durumda; (i) ve (ii) şartları yeniden düzenlenerek

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} x_k / \iota(k) = \sup_{k \in \mathbb{N}} e^{\frac{|\ln x_k|}{k}}$$

ve

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{x_k}{x_{k+1} \ddot{\times} \iota(\frac{k}{k+e})} \right|^* = \sup_{k \in \mathbb{N}} e^{\left| \frac{\frac{\ln x_k}{k}}{\frac{k}{k+1} \ln x_{k+1}} \right|}$$

eşitlikleri elde edilir.

İspata geçilecek olursa, $\sup_{k \in \mathbb{N}} |(\Delta^* x)_k|^* = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{x_k}{x_{k+1}} \right|^* = \sup_{k \in \mathbb{N}} \exp\{|\ln x_k - \ln x_{k+1}|\} <$

∞ olsun. Bu takdirde; e^x , monoton artan bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \exp\{|\ln x_k - \ln x_{k+1}|\} &= \exp\left[\left|\sum_{v=1}^k (\ln x_v - \ln x_{v+1})\right|\right] \\ &\leq \exp\left(\sum_{v=1}^k |\ln x_v - \ln x_{v+1}|\right) \\ &= \exp\left(\sum_{v=1}^k \left|\ln \frac{x_v}{x_{v+1}}\right|\right) = O[\iota(k)]. \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{N}} |\ln x_k| \cdot \frac{1}{k} < \infty &\Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} e^{\frac{|\ln x_k|}{k}} < \infty \\ &\Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^* / e^k < \infty \\ &\Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^* / \iota(k) < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_k}{x_{k+1} \ddot{\times} \iota\left(\frac{k}{k+e}\right)} \right|^* &= \sup_{k \in \mathbb{N}} e^{\left| \frac{\ln x_k}{\frac{k}{k+1} \ln x_{k+1}} \right|} \\ &= \exp\{|\ln\{\exp[\ln x_k - \ln(x_{k+1})^{\frac{k}{k+1}}]\}|\} \\ &= \exp\left\{\left|\ln x_k - \frac{k}{k+1} \cdot \ln x_{k+1}\right|\right\} \\ &= \exp\left\{\left|\frac{k}{k+1} \cdot (\ln x_k - \ln x_{k+1}) + \frac{1}{k+1} x_k\right|\right\} \\ &= \exp\left\{\left|\frac{k}{k+1} \cdot \Delta^* x + \frac{1}{k+1} x_k\right|\right\} \\ &= O(e) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Tersine, şimdi (i) ve (ii) şartlarının geçerli olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$\begin{aligned} |x_k \dot{-} x_{k+1}|^* \dot{\times} e^{\frac{k}{k+1}} \dot{-} |x_k|^* / e^{k+1} &= \exp\left(|\ln x_k - \ln x_{k+1}| / \frac{k+1}{k}\right) / \exp\left(\frac{|\ln x_k|}{k+1}\right) \\ &= \exp\left(\frac{k}{k+1} |\ln x_k - \ln x_{k+1}| - \frac{|\ln x_k|}{k+1}\right) \\ &= \exp\left(\left|\ln x_k - \frac{k}{k+1} \ln x_{k+1}\right|\right) \\ &= \exp\left[\left|\ln\left(\frac{x_k}{e^{\frac{k}{k+1}} \dot{\times} x_{k+1}}\right)\right|\right] \\ &= \left|x_k \dot{-} e^{\frac{k}{k+1}} \dot{\times} x_{k+1}\right|^* \end{aligned}$$

olduğundan $\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k/x_{k+1}|^* < \infty$ sonucu kolayca elde edilir.

(P_n) dizisi, pozitif sayıların monoton artan bir dizisi olsun. Bu taktirde aşağıdaki Lemma'yı ispatlamak mümkündür:

Lemma 5.2.2 *Eğer $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \prod_{k=1}^n u_k \right| < \infty$ ise, o zaman*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \prod_{k=1}^{\infty} (u_{n+k-1})^{\frac{1}{\ln P_{n+k}}} \right|^{\ln P_n} < \infty$$

olur.

İspat Çarpmaya dayanan hesap için Abel kısmî toplam formülünü kullanalım. Böylece,

$$\begin{aligned} \prod_{v=1}^n (u_{n+k-1})^{\frac{1}{\ln P_{n+k}}} &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{v=1}^k u_{n+v-1} \right) \times \exp \left(\frac{1}{\ln P_{n+k}} - \frac{1}{\ln P_{n+k+1}} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{v=1}^k u_{n+v-1} \right)^{\left(\frac{1}{\ln P_{n+k}} - \frac{1}{\ln P_{n+k+1}} \right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \ln P_n \cdot \left| \ln \prod_{k=1}^{\infty} (u_{n+k-1})^{\frac{1}{\ln P_{n+k}}} \right| &= \ln P_n \cdot \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln P_{n+k}} \cdot \ln u_{n+k-1} \right| \\ &= O(1) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise,

$$\left| \prod_{k=1}^n (u_{n+k-1})^{\frac{1}{\ln P_{n+k}}} \right|^{\ln P_n} = O(e)$$

olmasını gerektirir.

Lemma 5.2.3 *Eğer $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$ çarpımı yakınsak ise*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{k=1}^n (u_{n+k-1})^{\frac{1}{\ln P_{n+k}}} \right]^{\ln P_n} = 1$$

eşitliği sağlanır.

İspat Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left| \ln \left(\prod_{k=1}^n u_{n+k-1} \right) \right| &= \left| \sum_{v=1}^k \ln u_{n+v-1} \right| = \left| \sum_{v=n}^{n+k-1} \ln u_v \right| \\ &= \left| \ln \prod_{v=n}^{n+k-1} u_v \right| = o(1) \end{aligned}$$

olur. Bu taktirde, $\left| \prod_{k=1}^n (u_{n+k-1})^{\frac{1}{\ln P_{n+k}}} \right|^{\ln P_n} = o(e)$ sonucu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 5.2.1 (P_n) dizisi, pozitif sayıların monoton artan bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler geçerlidir:

- (1) Eğer $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \prod_{v=1}^n a_v^{\ln P_v} \right| < \infty$ ise $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right)^{\ln P_n} \right| < \infty$ olur.
- (2) Eğer $\prod_{k=1}^{\infty} a_k^{\ln P_k}$ yakınsak ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=n+1}^{\infty} a_k \right)^{\ln P_n} = 1$ olur.
- (3) $R_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k$ olmak üzere, $\prod_{k=1}^{\infty} (a_k)^k = \prod_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \iota(k)$ yakınsaktır ancak ve ancak $(R_n)^n = o(e)$ olacak şekilde $\prod_{k=1}^{\infty} R_k$ yakınsak ise.

İspat

- (1) Yukarıda zikredilen Lemma 5.2.2’de u_k yerine $a_k^{\ln P_{k+1}}$ ataması yapılırsa,

$$\left[\prod_{k=1}^{\infty} (u_{n+k-1})^{\frac{1}{\ln P_{n+k}}} \right]^{\ln P_n} = \left[\prod_{k=n+1}^{\infty} a_k \right]^{\ln P_n} = O(e)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

- (2) Yine yukarıdaki Lemma 5.2.3’te u_k yerine $a_k^{\ln P_{k+1}}$ ataması yaparsak sonuç kolayca elde edilir.
- (3) (2) ’de olduğu gibi $P_n = n$ ataması yapılırsa;

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (a_{k+1})^k &= a_2 \cdot (a_3)^2 \cdot (a_4)^3 \cdots (a_n)^{n-1} \cdot (a_{n+1})^n \\ &= (a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n+1}) \cdot (a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n+1}) \cdots (a_n \cdot a_{n+1}) \cdot a_{n+1} \\ &= \frac{(a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n+2} \cdots) \cdot (a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n+3} \cdots) \cdots (a_{n+1} \cdots) \cdot (a_{n+2} \cdots)}{(a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots)^n} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n R_k}{(R_{n+1})^n} \end{aligned}$$

formülü elde edilir. Bu formül ayrıca $\prod_{k=1}^n a_k = \frac{R_0}{R_n}$ olduğu gözönünde bulunduru-

olarak Abel *-kısımlı toplamlar formülünden de

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n (a_{k+1})^k &= \prod_{k=1}^n \left(\prod_{v=1}^k a_{v+1} \right)^{-1} \cdot \left(\prod_{k=1}^n a_{k+1} \right)^{n+1} \\ &= R_0 \cdot \prod_{k=1}^n R_{k+1} \cdot \frac{1}{(R_{n+1})^n} \cdot \frac{1}{R_{n+1}} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n R_k}{(R_{n+1})^n}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, sonuç aşikârdır.

Elde edilen bu sonuçların ışığı altında, artık dualerle ilgili tanımlar verilebilir.

Tanım 5.2.1 X , bir dizi uzayı olsun. Şimdi X^α, X^β ve X^γ cümlelerini,

$$\begin{aligned}(a) \quad X^\alpha &= \left\{ a = (a_k) : \text{Her } x \in X \text{ için } \prod_{k=1}^\infty |a_k^{\ln x_k}|^* < \infty \right\}, \\ (b) \quad X^\beta &= \left\{ a = (a_k) : \text{Her } x \in X \text{ için } \prod_{k=1}^\infty a_k^{\ln x_k} \text{ yakınsaktır} \right\}, \\ (c) \quad X^\gamma &= \left\{ a = (a_k) : \text{Her } x \in X \text{ için } \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \prod_{k=1}^n a_k^{\ln x_k} \right|^* < \infty \right\}\end{aligned}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda; X^α, X^β ve X^γ cümlelerine sırasıyla X uzayının alpha-, beta- ve gama-duali denir.

X^α, X^β ve X^γ cümlelerinin tarifinden $X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ kapsama bağıntılarının geçerli olduğu kolayca görülür. $\dagger \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere, eğer $X \subset Y$ ise $Y^\dagger \subset X^\dagger$ kapsaması geçerlidir.

Teorem 5.2.1 $R_k = \prod_{v=k+1}^\infty a_v$ olmak üzere D_1, D_2 ve D_3 cümlelerini

$$\begin{aligned}D_1 &= \left\{ a = (a_k) \in w^* : \prod_{k=1}^\infty |a_k|^* \dot{\times} \mathfrak{l}(k) < \infty \right\} \\ D_2 &= \left\{ a = (a_k) \in w^* : \prod_{k=1}^\infty a_k \dot{\times} \mathfrak{l}(k) \text{ yakınsaktır}, \prod_{k=1}^\infty |R_k| < \infty \right\} \\ D_3 &= \left\{ a = (a_k) \in w^* : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \prod_{k=1}^n a_k \dot{\times} \mathfrak{l}(k) \right|^* < \infty, \prod_{k=1}^\infty |R_k| < \infty \right\}\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda; aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned}(i) \quad [T\ell_\infty^*(\Delta^*)]^\alpha &= D_1. \\ (ii) \quad [T\ell_\infty^*(\Delta^*)]^\beta &= D_2.\end{aligned}$$

$$(iii) \quad [T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\gamma} = D3.$$

İspat

(i) Öncelikle D_1 cümlesini,

$$D_1 := \left\{ a = (a_k) \in w^* : \prod_{k=1}^{\infty} e^{k \cdot |\ln a_k|} < \infty, \right\}$$

olarak yeniden düzenleyelim. O zaman, $a = (a_k) \in D_1$ ise her $x = (x_k) \in T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)$ için Lemma 5.2.1 dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \left| a_k^{\ln x_k} \right|^* &= \prod_{k=1}^{\infty} e^{|\ln a_k| \cdot |\ln x_k|} = \prod_{k=1}^{\infty} e^{k \cdot |\ln a_k| \cdot \frac{|\ln x_k|}{k}} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} [|\ln a_k|^* \dot{\times} \iota(k)] \dot{\times} [|\ln x_k|^* / \iota(k)] < \infty \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan, $a \in [T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\alpha}$ olduğu görülür. Yani, $D_1 \subset [T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\alpha}$ kapsaması geçerlidir. Eğer $a = (a_k) \in [T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\alpha}$ ise o zaman her $x = (x_k) \in T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)$ için $\prod_{k=1}^{\infty} e^{|\ln a_k| \cdot |\ln x_k|} < \infty$ olur. Dolayısıyla,

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = 1, \\ e^k & , \quad k \geq 2 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için

$$|a_1| \cdot \prod_{k=1}^{\infty} e^{|\ln a_k| \cdot |\ln x_k|} = \prod_{k=1}^{\infty} e^{k \cdot |\ln a_k|} < \infty$$

sonucu elde edilir. Şu hâlde, $a = (a_k) \in D_1$ ve dolayısıyla $[T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\alpha} \subset D_1$ kapsaması mevcuttur. $D_1 \subset [T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\alpha}$ ve $[T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\alpha} \subset D_1$ kapsamaları birleştirildiğinde $[T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\alpha} = D_1$ olduğu görülür.

(ii) Burada da D_2 cümlesini yeniden düzenlediğimiz zaman, $\forall x \in T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)$ için

$$D_2 := \left\{ a = (a_k) \in w^* : \prod_{k=1}^{\infty} (a_k)^k < \infty, \prod_{k=1}^{\infty} e^{|\ln R_k|} < \infty \right\}$$

hâlini alır. $a = (a_k) \in D_2$ olduğunu kabul edelim. (5.1) ile verilen Δ^* dönüşümü, $T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)$ ve ℓ_{∞}^* uzayları arasında bir lineer homeomorfizm olduğundan $k \in \mathbb{N}$

$$x_k = \left(\prod_{v=1}^k y_{v-1} \right)^{-1}, y_0 = 1$$

ile tanımlanan bir $x = (x_k) \in T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)$ dizisine karşılık bir ve yalnız bir $y = (y_k) \in \ell_{\infty}^*$

dizisi mevcuttur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n a_k^{\ln x_k} &= \left(\prod_{k=1}^n a_k^{\ln \prod_{v=1}^k y_{v-1}} \right)^{-1} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} R_k^{\ln y_k} \right)^{-1} \cdot R^{\ln \prod_{k=1}^{n-1} y_k} \end{aligned} \quad (5.3)$$

olur. Sonuç 5.2.1 (3)'den görüldüğü üzere $\prod_{k=1}^{\infty} R_k^{\ln y_k}$ mutlak yakınsak ve $n \rightarrow \infty$ iken $R^{\ln \prod_{k=1}^{n-1} y_k} \rightarrow 1$ olduğundan $x = (x_k) \in T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)$ için $\prod_{k=1}^{\infty} (a_k)^{\ln x_k}$ çarpımı yakınsak olur. Bu da $a \in [T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\beta}$ olduğunu verir. Demek ki $D_2 \subset [T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\beta}$ kapsamı geçerlidir.

Eğer $a = (a_k) \in [T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\beta}$ ise $x = (x_k) \in \ell_{\infty}^*(\Delta^*)$ için $\prod_{k=1}^{\infty} (a_k)^{\ln x_k}$ yakınsaktır. Bu durumda; $x = x_k$ dizisi,

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = 1, \\ e^k & , \quad k > 1 \end{cases}$$

olarak alınırsa $\prod_{k=1}^{\infty} a_k^{\ln x_k}$ yakınsak olur. Bu da Sonuç 5.2.1'den dolayı $(R_n)^n = o(e)$ olduğunu verir. Eğer her $y = (y_k) \in \ell_{\infty}$ için (5.3) eşitliği kullanılırsa

$$\prod_{k=1}^n (a_k)^{\ln x_k} = \left(\prod_{k=1}^{\infty} R_k^{\ln y_k} \right)^{-1}$$

yakınsak olur. Böylece, $\prod_{k=1}^{\infty} e^{\ln |R_k|} < \infty$ ve $a \in D_2$ elde edilir. Buna göre; $[T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\beta} \subset D_2$ kapsamı sağlanır. $D_2 \subset [T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\alpha}$ ve $[T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\alpha} \subset D_2$ kapsamaları birleştirilerek $[T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\alpha} = D_2$ istenen sonucuna varılır.

(iii) Bunun ispatı, (ii)'nin ispatına benzerdir.

$\dagger \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere, $[T\ell_{\infty}^*(\Delta^*)]^{\dagger} = [Tc^*(\Delta^*)]^{\dagger}$ olduğu kolayca görülür.

5.3 β -dual ve $\aleph$ -dualler

Bu kısımda; çarpmaya dayanan hesaba bağlı yeni dizi uzaylarından $c_0^*(\Delta^*)$ uzayının β -ve $\aleph$ -dualleri üzerinde durulacaktır. Benzer tartışmaları $c^*(\Delta^*)$ ve $\ell_{\infty}^*(\Delta^*)$ için yapmak mümkün olduğundan, teferruat üzerinde durulmayarak onların ispatı, birer alıştırma olarak okuyucuya bırakılacaktır.

$Sx = (\prod_{k=1}^n x_k)_{n \in \mathbb{N}}$ olmak üzere sırasıyla, $*$ -sınırlı, $*$ -yakınsak ve sıfıra $*$ -yakınsak serile-

rin bs^*, cs^* ve c_0s^* uzayları

$$\begin{aligned} bs^* &= \{x = (x_k) : Sx \in \ell_\infty^*\}, \\ cs^* &= \{x = (x_k) : Sx \in c^*\}, \\ c_0s^* &= \{x = (x_k) : Sx \in c_0^*\} \end{aligned}$$

ile tanımlanır. ℓ_∞^*, c^* ve c_0^* uzayları sırasıyla, bs^*, cs^* ve c_0s^* uzaylarına izometrik olarak izomorfturlar. Meselâ, $T : \ell_\infty^* \rightarrow bs^*, Tx = \Delta^*x$ ve $T^{-1} : bs^* \rightarrow \ell_\infty^*, T^{-1}x = Sx$ dönüşümü, norm koruyan bir izomorfizmdir. Benzer olarak $\ell_\infty^*(\Delta^*), c^*(\Delta^*)$ ve $c_0^*(\Delta^*)$ uzayları sırasıyla, ℓ_∞^*, c^* ve c_0^* uzaylarına izometrik olarak izomorfturlar.

$$\begin{aligned} T : (c_0^*(\Delta^*), \|\cdot\|_{\Delta^*}^*) &\rightarrow (c_0^*, \|\cdot\|_\infty^*), Tx = \Delta^*x \\ T^{-1} : (c_0^*, \|\cdot\|_\infty^*) &\rightarrow (c_0^*(\Delta^*), \|\cdot\|_{\Delta^*}^*), T^{-1}x = Sx \end{aligned} \quad (5.4)$$

dönüşümlerinin norm koruyan izomorfizm oldukları açıktır.

$X \neq \emptyset$ çarpmaya dayanan hesaba göre bir dizi uzayı olmak üzere X uzayının X^β – (veya genelleşmiş Köthe-Toeplitz) duali ve $X^\aleph$ sıfır duali,

$$\begin{aligned} X^\beta &= \left\{ a = (a_k) : \forall x \in X \text{ için } \prod_{k=1}^{\infty} a_k^{\ln x_k} \text{ çarpımı yakınsaktır.} \right\} \\ X^\aleph &= \left\{ a = (a_k) : \forall x \in X \text{ için } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{\ln x_k} = 1 \right\} \end{aligned}$$

cümleleri ile tanımlanır. Eğer $X \subset Y$ ise, $Y^\beta \subset X^\beta$ ve $Y^\aleph \subset X^\aleph$ kapsamaları mevcuttur.

F cümlesi $F := \left\{ x = (x_k) \in w^* : x \in \ell_\infty^* \text{ ve } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{x_{k+1}} = 1 \right\} = \ell_\infty^* \cap c_0^*(\Delta^*)$ olacak şekilde tanımlansın.

Sonuç 5.3.1 $c_0^{*\aleph} = \ell_\infty^*, \ell_\infty^{*\aleph} = F^\aleph = c^{\aleph} = c_0^{*\aleph}$ eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 5.3.1 $(a_k) \in \ell_1^*$ olsun. Eğer herhangi bir $x = (x_k) \in c_0^*(\Delta^*)$ için $* - \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k \dot{x}_k|^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\{|\ln a_k \cdot \ln x_k|\} = L$ limiti mevcut ise $L = 1$ olur.

İspat Eğer $x = (x_k)$ $*$ -sınırlı bir dizi ise ispat açıktır. $x = (x_k) \in c_0^*(\Delta^*)$ dizisinin sınırlı olmadığını ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \exp\{|\ln a_k \cdot \ln x_k|\} = L > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde x sınırlı bir alt diziye sahip olamaz. Eğer (x_{k_n}) dizisi $*$ -sınırlı ise $\lim_{k \rightarrow \infty} \exp\{|\ln a_{k_n} \cdot \ln x_{k_n}|\} = 1$ olmasını yani $L = 1$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 1$ alınabilir.

Şimdi, $\varepsilon = e^{L/2} > 0$ olsun. Bu taktirde, bir $M_1 = M_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur öyle ki; her $k \geq M_1$ için $e^{L/2} < \exp\{|\ln a_k \cdot \ln x_k|\} < e^{3L/2}$ olur. Böylece her $k \geq M_1$ için

$$e^{|a_k|} > e^{L/2} \dot{\times} e^{\frac{1}{|\ln x_k|}} = e^{\frac{L}{2} \cdot \frac{1}{|\ln x_k|}}$$

ve

$$\prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{L}{|\ln x_k|}} < \infty \quad (5.5)$$

elde edilir. $k \rightarrow \infty$ için limite geçilerek Lemma 5.2.1 yardımıyla $e^{\ln x_k/k} \rightarrow 1$ sonucuna ulaşılır. $\varepsilon = e$ olsun. Bu taktirde $k \geq M_2(\varepsilon)$ olan her $k \in \mathbb{N}$ için $e^{\ln x_k/k} < 1$ ve $e^{1/|\ln x_k|} > e^{1/k}$ elde edilir. Eğer $M = \max\{M_1, M_2\}$ alınırsa $\prod_{k=1}^{\infty} e^{1/|\ln x_k|} \geq \prod_{k=1}^{\infty} e^{1/k} = \infty$ elde edilir. Bu ise (5.5) ile çelişir. O hâlde, $L = 1$ olmalıdır.

Teorem 5.3.2 $c_0^{*\aleph}(\Delta^*) = \{a = (a_k) \in w^* : a_k \dot{\times} \iota(k) \in \ell_{\infty}^*\} = H_0$.

İspat $a = (a_k) \in H_0$ olsun. Her $x = (x_k) \in c_0^*(\Delta^*)$ için Lemma 5.2.1 dolayısıyla $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{\ln x_k/k} = 1$ olduğundan

$$* - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \dot{\times} x_k = * - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{k \cdot \frac{\ln x_k}{k}} = * - \lim_{k \rightarrow \infty} [a_k \dot{\times} \iota(k)] \dot{\times} [x_k / \iota(k)] = 1$$

elde edilir. Buradan $(a_k) \in c_0^{*\aleph}(\Delta^*)$ elde edilir.

Şimdi, $a = (a_k) \in c_0^{*\aleph}(\Delta^*)$ alalım. Bu durumda; her $x = (x_k) \in c_0^*(\Delta^*)$ için $* - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \dot{\times} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{\ln x_k} = 1$ olur. O hâlde, öyle bir ve yalnız bir $y = (y_k) \in c_0^*$ mevcuttur öyle ki; (5.4) gereği $x_n = \prod_{k=1}^n y_k$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla $y = (y_k) \in c_0^*$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\ln x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\ln \prod_{k=1}^n y_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\sum_{k=1}^n \ln y_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k^{\ln y_k} \end{aligned}$$

olur. Eğer (a_{nk}) dizisi olarak

$$a_{nk} = \begin{cases} a_n & , \quad 1 \leq k \leq n, \\ 1 & , \quad k > n \end{cases}$$

alınırsa, her $x \in c_0^*$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_{nk}^{\ln y_k} = 1$ elde edilir. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^n |a_{nk}|^* &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^n e^{|\ln a_{nk}|} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^n e^{|\ln a_n|} \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(e^{|\ln a_n|} \right)^n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|a_n|^*)^n = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^* \dot{\times} e^n \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^* \dot{\times} \iota(n) < \infty. \end{aligned}$$

Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.3.3 Her $k \in \mathbb{N}$ için $R_k = \prod_{i=k}^{\infty} a_i$ olmak üzere, $c_0^{*\beta}(\Delta^*) = \{a = (a_k) \in w^* : a \in \ell_1^*/(R_k)\} = \{a = (a_k) \in w^* : a \in \ell_1^* \cap c_0^{*\beta}(\Delta^*)\} = H$.

İspat $a = (a_k) \in H$ olduğunu kabul edelim. Eğer $x = (x_k) \in c_0^{*\beta}(\Delta^*)$ ise çarpmaya dayanan hesaba göre Abel $*$ -kısımlı toplamlar formülünü kullanırsak,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n a_k^{\ln x_k} &= \prod_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^k a_i \right)^{\ln \frac{x_k}{x_{k+1}}} \cdot \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\ln x_{n+1}} \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{R_1}{R_{n+1}} \right)^{\ln \frac{x_k}{x_{k+1}}} \cdot \left(\frac{R_1}{R_{n+1}} \right)^{\ln x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{R_{n+1}} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} R_k^{\ln \frac{x_k}{x_{k+1}}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, $(\prod_{k=1}^n a_k^{\ln x_k})$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterir. O hâlde $a \in c_0^{*\beta}(\Delta^*)$ 'dır.

Eğer $a = (a_k) \in c_0^{*\beta}(\Delta^*)$ ise o zaman, her $x = (x_k) \in c_0^*(\Delta^*)$ için $(\prod_{k=1}^n a_k^{\ln x_k})$ yakınsaktır. $a \in \ell_1^*$ olduğu ise açıktır. Eğer $x = (x_k) \in c_0^*(\Delta^*)$ alınırsa bir $y = (y_k) \in c_0^*$ mevcuttur öyle ki; (5.4) eşitliğinden dolayı $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = \prod_{i=1}^k y_i$$

olur. Bu taktirde, Abel kısmî $*$ -toplamlar formülünden

$$\prod_{k=1}^n R_k^{\ln y_k} = \prod_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^k y_i \right)^{\ln a_k} \cdot (R_{n+1})^{\ln \prod_{k=1}^n y_k}$$

ve böylece

$$\prod_{k=1}^n a_k^{\ln x_k} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{R_k}{R_{n+1}} \right)^{\ln y_k} = \prod_{k=1}^n \left(\prod_{i=k}^n a_i \right)^{\ln y_k} \quad (5.7)$$

elde edilir. Eğer

$$a_k(n) = \begin{cases} \prod_{i=k}^n a_i & , \quad 1 \leq k \leq n, \\ 1 & , \quad k > n \end{cases}$$

ataması yapılırsa, her $y \in c_0^*$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} [a_k(n)]^{\ln y_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n [a_k(n)]^{\ln y_k}$ mevcut olduğundan

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^{\infty} e^{|\ln a_k(n)|} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^n e^{|\ln \prod_{i=k}^n a_i|} < \infty$$

elde edilir. Böylece, $\prod_{k=1}^{\infty} e^{|R_k|} < \infty$ olur. Dahası, (5.6)'den her $x = (x_k) \in c_0^*(\Delta^*)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}^{\ln x_{n+1}}$ limitinin mevcut olduğu anlaşılır. Bu taktirde Teorem 5.3.1 gereği $(R_n) \in c_0^{*\mathfrak{K}}(\Delta^*)$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde öncelikli olarak, Newtonyen olmayan hesabın temelleri başta olmak üzere bu hesap tarzı kullanılarak bir cisim ve bu cisim üzerinde bir vektör uzayı inşası işlenmiştir. Daha sonra dizi uzaylarının yapısı ve klâsik dizi uzayları olarak bilinen uzayların Newtonyen olmayan karşılıkları tanıtılıp kendilerine mahsus norm fonksiyonuna göre birer Banach uzayı teşkil ettikleri gösterilmiştir. Son olarak, bu klâsik dizi uzayları ve fark dizi uzayları adı ile elde edilen yeni dizi uzaylarının dualleri hesaplanmıştır.

Bu çalışmanın ve kaynakça kısmında verilen eserlerin ışığı altında, sonsuz matrisler teşkil edilip Newtonyen olmayan hesabın kuralları ile yeni bir Analiz inşa edilmeye çalışılmaktadır. Bunun ardından, bu analizi kullanarak bu çalışmada da zikredilen dizi uzayları arasındaki matris dönüşümlerinin karakterizasyonu hakkında araştırmalar kaleme alınacaktır. Ayrıca, verilen bir sonsuz matrisin verilen bir dizi uzayı üzerindeki etki alanının incelenmesi bir diğer problemidir.

Son olarak, birçok fen ve mühendislik probleminin çözümünde kullanılan Fourier serilerinin temelini teşkil eden ℓ_2 dizi uzayının Newtonyen olmayan manada karşılığı ℓ_2^* uzayı ve özellikleri, yeni bir çalışma konusudur. Özellikle çarpmaya dayanan hesap tarzı yardımıyla bazı matematik-fizik problemleri için yeni seri çözümler ve bu çözümlerin klâsik hesap tarzı yolu ile elde edilen çözümlerle mukayesesi araştırmacılarda heyecan uyandıracaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Grossman, M. and Katz, R., (1972). Non-Newtonian Calculus, Lee Press Pigeon Cove.
- [2] Meginniss, J., (1980). “Non-Newtonian calculus applied to probability, utility, and Bayesian analysis”, Manuscript of the report for delivery at the 20th KDKR-KSF Seminar on Bayesian Inference in Econometrics, Purdue University, West Lafayette, Indiana, 1980.
- [3] Filip, D. A. and Piatecki, , (2010). “A non-Newtonian examination of the theory of exogenous economic growth”, CNCSIS-UEFISCSU and Laboratoire d’Economie d’Orleans (LEO), 1–19.
- [4] Filip, D. A. and Piatecki, R., (2013). “In defense of a non-newtonian economic analysis”, 1–14.
- [5] Florack, L. and Assen, vanH., (2012). “Multiplicative calculus in biomedical image analysis”, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 42: 64–75.
- [6] Florack, L., (2012). “Regularization of positive definite matrix fields based on multiplicative calculus”, 786–796.
- [7] Özyapıcı, A. and Bilgehan, B., (2013). “Applications of multiplicative calculus to exponential signal processing”, Algerian Turkish International Days on Mathematics, 2013.
- [8] Bashirov, A. E., Kurpinar, E. M. and Özyapıcı, A., (2008). “Multiplicative calculus and its applications”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 337: 36–48.
- [9] Bashirov, A. and Riza, M., (2011). “On complex multiplicative differentiation”, TWMS Journal on Applied and Engineering Mathematics, 1: 75–85.
- [10] Bashirov, A. E., Mısırlı, E., Tandoğdu, Y. and Özyapıcı, A., (2011). “On modeling with multiplicative differential equations”, Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 26: 425–438.
- [11] Bashirov, A. E. and Riza, M., (2013). “On complex multiplicative integration”, Cornell University Library (baskıda), 1–11.
- [12] Riza, M., Özyapıcı, A. and Misirli, E., (2009). “Multiplicative finite difference methods”, Quarterly of Applied Mathematics, 67: 745–754.

- [13] Ozyapici, A. and Kurpinar, E. M., (2007). “Exponential Approximation on Multiplicative Calculus”, 6th ISAAC Congress, 2007.
- [14] Misirli, E. and Gurefe, Y., (2011). “Multiplicative Adams Bashforth–Moulton methods”, *Numerical Algorithms*, 57: 425–439.
- [15] Misirli, E. and Gurefe, Y., (2009). “The new numerical algorithms for solving multiplicative differential equations”, *International Conference of Mathematical Sciences*, 2009.
- [16] Uzer, A., (2010). “Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus”, *Computers & Mathematics with Applications*, 60: 2725–2737.
- [17] Uzer, A., (2013). “Exact solution of conducting half plane problems in terms of a rapidly convergent series and an application of the multiplicative calculus”, *Turk. J. Elec. Eng. & Comp. Sci.*, 19: 3906/clk-1306-163.
- [18] Türkmen, C. and Başar, F., (2012). “Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus”, *AIP Conference Proceedings*, 2012.
- [19] Çakmak, A. and Basar, F., (2012). “On the classical sequence spaces and non-Newtonian calculus”, *J. Inequal. Appl.*, 1–17.
- [20] Aniszewska, D. and Rybaczuk, M., (2010). “Chaos in multiplicative systems”, 04-10.
- [21] Rybaczuk, M. and Stoppel, P., (2000). “The fractal growth of fatigue defects in materials”, *International journal of fracture*, 103: 71–94.
- [22] Liu, Z. and Guo, W., (2010). “Data driven adaptive spline smoothing”, *Statistica Sinica*, 20: 1143–1163.
- [23] Baqaee, D., (2010). “Intertemporal choice: a Nash bargaining approach”, 1–19.
- [24] Cakir, Z., (2013). “Spaces of continuous and bounded functions over the field of geometric complex numbers”, *Journal of Inequalities and Applications*, 2013: 1–8.
- [25] Tekin, S. and AR, F., (2013). “Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field”, *Abstr. Appl. Anal.*, 1–11.
- [26] Ozavsar, M. and Cevikel, A. C., “Fixed points of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric spaces”, *arXiv preprint arXiv:1205.5131*, .
- [27] Kadak, U., Basar, F. and Efe, H., (2013). “Construction of the Duals of Classical Sequence Spaces with respect to Non-Newtonian Calculus on Reals”, *The Abstract Book*, 2013.
- [28] Çakmak, A. F. and Basar, F., (2014). “Certain spaces of functions over the field of non-Newtonian complex numbers”, *Abstr. Appl. Anal.* (baskıda), 1–13.
- [29] Kızmaz, H., (1981). “On certain sequence spaces”, *Canad. Math. Bull.*, 24: 169–176.

- [30] Grossman, M., (1983). Bieometric Calculus: A System with a Scale-Free Derivative, Archimedes Foundation Rockport, Massachusats.
- [31] Grossman, M., (1979). The first nonlinear system of differential and integral calculus, Mathco Rockport, MA.
- [32] Mora, M., Cardova-Lepe, F. and Del-Valle, R., (2012). “A non-Newtonian gradient for contour detection in images with multiplicative noise”, Pattern Recognit. Lett., 33: 1245–1256.
- [33] Maddox, I. J., (1988). Elements of functional analysis, CUP Archive.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Ad Soyad : Ahmet Faruk ÇAKMAK
Date of birth and place : 7 Ocak 1983 – Trabzon
Foreign Languages : İngilizce
E-mail : ahmetfarukcakmak@gmail.com

Eğitim

Derece	Bölüm	Üniversite	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Matematik	Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü	2007
Lisans	Matematik	Uludağ Üniversitesi	2004
Lise	Fen–Matematik	Çaykara Çok Programlı Lisesi	1999

İŞ TECRÜBELERİ

Year	Şirket/Kurum	İş Tanımı
2009–Şimdi	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLAR

Papers

1. Başar. F., Çakmak. A. F., (2011). “Domain of triple band matrix $B(r,s,t)$ on some Maddox’s spaces”, Annals of Functional Analysis (SCI), 2013.
2. Çakmak. A. F., Başar. F., (2012). “Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus”, Journal of Inequalities and Applications (SCI), 2012.
3. Çakmak. A. F., Başar. F., “Certain spaces of functions over the field of non-Newtonian complex numbers”, Abstract and Applied Analysis (Submitted).

Ululararası Bildiriler

1. Başar. F., Çakmak. A. F., (2011). “Domain of triple band matrix $B(r,s,t)$ on some Maddox’s spaces”, ICSAA, İstanbul, Turkey, 2011.
2. Çakmak. A. F., Başar. F., (2012). “Certain spaces of functions over the field of non-Newtonian complex numbers”, ATIM’12, Annaba, Algeria, 2012.
3. Çakmak. A. F., Başar. F., (2013). “Certain spaces of functions over the field of non-Newtonian complex numbers”, ATIM’13, İstanbul, Turkey, 2013.