

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

SERTAN ALKAN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. AYDIN SEÇER**

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Sertan ALKAN tarafından hazırlanan tez çalışması 07/03/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Aydın SEÇER

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Aydın SEÇER

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fatih TAŞÇI

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Ahmet DURAN

İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. İbrahim KARATAY

Fatih Üniversitesi

ÖNSÖZ

Doktora eğitimimde ve tez çalışmam boyunca desteğini hiç bir zaman esirgemeyen değerli hocam ve tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Aydın SEÇER başta olmak üzere tez izleme komitesinde bulunan Prof. Dr. Fatih TAŞÇI ve Doç. Dr. Ahmet DURAN hocalarıma teşekkür ederim.

Saygı değer hocam ve kıymetli Dekanımız Prof. Dr. Mustafa BAYRAM' a doktora eğitimim süresince yapmış olduğu tüm katkılardan dolayı çok teşekkür ederim.

Hiç bir zaman manevi desteğini esirgemeyen sevgili eşime en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Kıymetli vakitlerini hiç düşünmeden benim için harcayan dostlarım Turgut YELOĞLU, Kenan YILDIRIM ve Feyyaz Celalettin KURUL' a çok teşekkür ederim.

Mart, 2014

Sertan ALKAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT.....	xii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez	4
BÖLÜM 2	
TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
2.1 Özel Fonksiyonlar	5
2.1.1 Gamma Fonksiyonu	5
2.1.2 Beta Fonksiyonu	6
2.1.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu	7
2.2 Kesirli Türev ve İntegraller	8
2.3 Sinc Baz Fonksiyonlarının Özellikleri ve Kuadratür İnterpolasyonları	13
2.3.1 Konform Dönüşüm	14
2.3.2 Sinc Fonksiyon İnterpolasyonu ve Kuadratürler.....	18
BÖLÜM 3	

KESİRLİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİNC-GALERKİN YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ.....	21
3.1 Sinc-Galerkin Yöntemi.....	21
3.2 Uygulamalar	31
BÖLÜM 4	
KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİNC-GALERKİN YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	39
4.1 Sinc-Galerkin Yöntemi.....	39
4.2 Ayrık Sistemin Çözümü	52
4.3 Uygulamalar	54
BÖLÜM 5	
SONUÇ VE ÖNERİLER	71
KAYNAKLAR.....	73
EK-A	
PROBLEM 3.1 İÇİN MATHEMATİCA PROGRAMI	77
EK-B	
PROBLEM 4.2 İÇİN MATHEMATİCA PROGRAMI	80
ÖZGEÇMİŞ.....	84

SİMGE LİSTESİ

Γ	Gamma fonksiyonu
B	Beta fonksiyonu
E	Mittag-Leffler fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

CS	Kübik Spline
HWY	Haar-Wavelet Yöntemi
SGY	Sinc-Galerkin Yöntemi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1	Sinc bazlarının üç üyesi ($S(k, h)(x)$, $k = -1, 0, 1$, $h = \pi/4$) [41] 16
Şekil 2.2	Bölgeler arasındaki ilişki [31]..... 18
Şekil 3.3	Problem 3.1 için ($L = 5, M = 5$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği 32
Şekil 3.4	Problem 3.1 için ($L = 40, M = 100$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği..... 32
Şekil 3.5	Problem 3.2 için ($L = 5, M = 5$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği 33
Şekil 3.6	Problem 3.2 için ($L = 40, M = 100$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği..... 34
Şekil 3.7	Problem 3.3 için ($L = 5, M = 5$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği 35
Şekil 3.8	Problem 3.3 için ($L = 40, M = 100$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği..... 36
Şekil 3.9	Problem 3.4 için ($L = 5, M = 5$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği 38
Şekil 3.10	Problem 3.4 için ($L = 40, M = 100$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği..... 38
Şekil 4.11	Problem 4.1 için ($L = 3, Mx = 5, Nx = 5, Mt = 5, Nt = 3$) yaklaşık çözüm grafiği 56
Şekil 4.12	Problem 4.1 için ($L = 20, Mx = 40, Nx = 40, Mt = 40, Nt = 30$) yaklaşık çözüm grafiği 56
Şekil 4.13	Problem 4.1 için tam çözüm grafiği..... 57
Şekil 4.14	Problem 4.2 için ($L = 3, Mx = 5, Nx = 5, Mt = 5, Nt = 3$) yaklaşık çözüm grafiği 59
Şekil 4.15	Problem 4.2 için ($L = 20, Mx = 40, Nx = 40, Mt = 40, Nt = 30$) yaklaşık çözüm grafiği 59
Şekil 4.16	Problem 4.2 için tam çözüm grafiği..... 60
Şekil 4.17	Problem 4.3 için ($L = 3, Mx = 5, Nx = 5, Mt = 5, Nt = 3$) yaklaşık çözüm grafiği 62
Şekil 4.18	Problem 4.3 için ($L = 20, Mx = 40, Nx = 40, Mt = 40, Nt = 30$) yaklaşık çözüm grafiği 62
Şekil 4.19	Problem 4.3 için tam çözüm grafiği..... 63
Şekil 4.20	Problem 4.4 için ($L = 3, Mx = 5, Nx = 5, Mt = 5, Nt = 3$) yaklaşık çözüm grafiği 65
Şekil 4.21	Problem 4.4 için ($L = 20, Mx = 40, Nx = 40, Mt = 40, Nt = 30$) yaklaşık çözüm grafiği 65
Şekil 4.22	Problem 4.4 için tam çözüm grafiği..... 66
Şekil 4.23	Problem 4.5 için ($L = 3, Mx = 5, Nx = 5, Mt = 5, Nt = 3$) yaklaşık çözüm grafiği 68
Şekil 4.24	Problem 4.5 için ($L = 20, Mx = 40, Nx = 40, Mt = 40, Nt = 30$) yaklaşık çözüm grafiği 68

Şekil 4.25	Problem 4.5 için tam çözüm grafiği.....	69
Şekil 4.26	Problem 4.5 için ($J = 5, \alpha = 2, \beta = 0.35, \gamma = 0.5$) Haar Wavelet yöntemi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ve tam çözüm grafiği [47]	69
Şekil 4.27	Problem 4.5 için ($J = 5, \alpha = 2, \beta = 0.35, \gamma = 0.5$) Haar Wavelet yöntemi kullanılarak elde edilen hata grafiği [47]	70

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3.1	Problem 3.1 için ($L = 5, M = 5$) nümerik sonuçlar 31
Çizelge 3.2	Problem 3.1 için ($L = 40, M = 100$) nümerik sonuçlar..... 31
Çizelge 3.3	Problem 3.2 için ($L = 5, M = 5$) nümerik sonuçlar 33
Çizelge 3.4	Problem 3.2 için ($L = 40, M = 100$) nümerik sonuçlar..... 33
Çizelge 3.5	Problem 3.3 için ($L = 5, M = 5$) nümerik sonuçlar 35
Çizelge 3.6	Problem 3.3 için ($L = 40, M = 100$) nümerik sonuçlar..... 35
Çizelge 3.7	Problem 3.4 için ($L = 5, M = 5$) nümerik sonuçlar 37
Çizelge 3.8	Problem 3.4 için ($L = 40, M = 100$) nümerik sonuçlar..... 38
Çizelge 4.9	Problem 4.1 için ($L = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) nümerik sonuçlar 55
Çizelge 4.10	Problem 4.1 için ($L = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) nümerik sonuçlar..... 55
Çizelge 4.11	Problem 4.2 için ($P = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) nümerik sonuçlar 58
Çizelge 4.12	Problem 4.2 için ($P = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) nümerik sonuçlar..... 58
Çizelge 4.13	Problem 4.3 için ($L = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) nümerik sonuçlar 61
Çizelge 4.14	Problem 4.3 için ($L = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) nümerik sonuçlar..... 61
Çizelge 4.15	Problem 4.4 için ($P = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) nümerik sonuçlar 64
Çizelge 4.16	Problem 4.4 için ($P = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) nümerik sonuçlar..... 64
Çizelge 4.17	Problem 4.5 için ($P = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) nümerik sonuçlar 67
Çizelge 4.18	Problem 4.5 için ($P = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) nümerik sonuçlar..... 67

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Sertan ALKAN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Aydın SEÇER

Bu çalışmada kesirli mertebeden lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilmesi araştırılmıştır. Bunun için sinc-Galerkin yöntemi ve yöntemin kesirli mertebeden lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması için gerekli teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Sonuç olarak, sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilen çözümler diğer nümerik yöntemlerle bulunan çözümlerle grafiksel ve nümerik olarak karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalardan sinc-Galerkin yönteminin kesirli mertebeden lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünü elde etmede çok etkili bir yöntem olduğu görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Sinc-Galerkin Yöntemi, Caputo Kesirli Türevi, Mathematica, Kronecker Çarpımı, Kuadratür Kuralı

**NUMERICAL SOLUTION OF FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL
EQUATIONS**

Sertan ALKAN

Department of Mathematical Engineering
PhD Thesis

Adviser: Assist. Prof. Dr. Aydın SEÇER

According to the best knowledge of the author, it is not found the study concerning the finding the solutions of the fractional order linear ordinary and partial differential equations by using sinc-Galerkin method in the literature. In this study, the solutions of fractional order linear ordinary and partial differential equations are obtained by means of sinc-Galerkin method. With this aim related teorems with their proofs are given. Obtained solutions are compared by the solutions of other numerical methods, numerically and graphically.

As a conclusion sinc-Galerkin method is applied to some fractional order linear ordinary and partial differential equations to obtain their numerical solutions. Numerical comparisons show that sinc-Galerkin method is very effective and aplicable to solve fractional order linear ordinary and partial differential equations.

Keywords: Sinc-Galerkin Method, Caputo Fractional Derivative, Mathematica, Kronecker Product, Quadrature Rule

1.1 Literatür Özeti

Adi ve kısmi diferansiyel denklemler fizik ve mühendisliğin bütün alanlarında sık sık kullanılmaktadır. Bilimde birçok fiziksel olay bu denklemlerle modellenmektedir. Bu nedenle fiziki olayların daha iyi anlaşılabilmesi için bu denklemlerin çözümlerinin tam ya da yaklaşık olarak elde edilmesi oldukça önemlidir. Bundan dolayı birçok matematikçi tarafından bu denklemlerin çözümlerini daha iyi elde edebilmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Literatürde sıklıkla karşılaşılan bu yöntemlerin bazıları diferansiyel dönüşüm yöntemi [1, 2], homotopy analiz yöntemi [3, 4], varyasyonel iterasyon yöntemi [5, 6, 7], Adomian ayrıştırma yöntemi [8, 9], wavelet-galerkin yöntemi [10, 11], homotopy perturbasyon yöntemi [12, 13, 14], sinc sıralama yöntemi [15, 16], Ritz-Galerkin yöntemi [17] olarak özetlenebilir.

Diferansiyel denklemlerin mertebeleri, ele alınan fiziksel olayda bir değişim hızını belirlemektedir. Bu noktada kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerin bazı fiziksel olayları açıklamaktaki zayıflıklarını kapatmakta büyük bir rol oynamaktadır [18].

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler viskoelastik malzemeler, sinyal işleme, kontrol, quantum mekaniği, meteoroloji, finans, yaşam bilimleri gibi birçok alanda kullanılmıştır [19]. Bu nedenle bu denklemlerin hem analitik hem de yaklaşık çözümlerini elde etmek için de birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

En küçük kareler sonlu eleman tekniği, Fix ve Roop tarafından kesirli sınır değer problemlerin bazı türlerini çözmek için geliştirilmiştir [20].

Adomian ayrıştırma yöntemi, Jafari and Daftardar-Gejji tarafından kesirli sınır değer problemlerin bazı türlerinin pozitif ve yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılmıştır [21].

Li ve arkadaşları, kesirli mertebeden iki noktalı sınır değer problemlerini çözmek için spline sıralama yöntemini kullanmışlardır [22].

Genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi, Momani, Odibat ve Ertürk tarafından uzay ve zaman kesirli difüzyon dalga denkleminin çözümü için kullanılmıştır [23].

[24] ile verilen çalışmada Zhang, kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek için sonlu farklar yöntemini kullanmıştır. Benzer şekilde [25] ile verilen çalışmada da sonlu farklar yöntemi, uzay kesirli kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır.

[26] ve [27] ile verilen çalışmalarda yazarlar, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü için Adomian ayrıştırma yöntemini kullanmışlardır.

Wang, [28] ve [29] ile verilen çalışmalarında homotopy perturbasyon yöntemini sırası ile kesirli mertebeden KdV ve KdV-Burgers denklemlerinin çözümü için kullanmıştır.

Son zamanlarda dikkat çeken çözüm yöntemlerinden bir tanesi de sinc-Galerkin yöntemidir. Sinc-Galerkin yöntemi, baz olarak, polinomları kullanan klasik yöntemlerin aksine tam fonksiyonları kullandığı için birçok avantaja sahiptir. Örneğin tekil noktaların varlığında, polinom yöntemlere göre daha doğru ve daha iyi bir yakınsaklık oranı verir [30]. Bu yöntemin kullanıldığı bazı çalışmalar aşağıda özetlenmiştir.

[31] ile verilen çalışmada yazarlar, Dirichlet tipinde singüler sınır değer problemlerini ele almış ve nümerik çözüm yöntemi olarak da sinc-Galerkin yöntemini kullanmışlardır.

[32] ile verilen çalışmada, sinc-Galerkin ve sinc sıralama yöntemleri iki noktalı sınır değer problemlerin çözümü için kullanılmış ve yöntemler nümerik olarak karşılaştırılmıştır. [33] ile verilen çalışmada, sinc-Galerkin yöntemi Troesch's problemine uygulanmış ve yöntemin performansını göstermek için elde edilen sonuçlar mevcut yöntemler ile karşılaştırılmıştır. [34] ile verilen çalışmada sinc-Galerkin yöntemi, lineer olmayan sınır değer problemlerinin çözümü için kullanılmıştır. [35] ile

verilen çalışmada sinc-Galerkin yöntemi, altıncı mertebeden iki noktalı sınır değer problemlerine uygulanmıştır ve örnek problemlerden elde edilen nümerik sonuçlar ayrıştırma yöntemi ile karşılaştırılmıştır. [36] ile verilen çalışmada ise lineer olmayan sınır değer problemlerin nümerik çözümü elde etmek için sinc-Galerkin yöntemi kullanılmış ve örnek olarak Bratu ile Thomas-Fermi denklemleri seçilmiştir.

Yapılan literatür taraması sonucunda sinc-Galerkin yönteminin kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmadığı, çözümlerinin bu yöntemle araştırılmadığı gözlemlenmiştir. Bu amaçla bu çalışmada kesirli mertebeden lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin sinc-Galerkin yöntemiyle elde edilmesi, böylece literatüre orijinal bir katkı sağlanması amaçlanmıştır.

Sonuç olarak bu tezde kesirli mertebeden türevli lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemler sinc-Galerkin yöntemi ile yaklaşık olarak çözülmüş ve elde edilen çözümler, tam çözümler ve mevcut çözümler ile tablo ve grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır. Tez beş bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın giriş bölümünde literatür özeti, tezin amacı ve hipotez olup sonra yer alan Bölüm 2' de kesirli türev ve sinc-Galerkin yönteminin temellerini oluşturan tanım, teorem ve özellikler verilmiştir.

Bölüm 3 içerisinde sinc-Galerkin yöntemi kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Bu amaç doğrultusunda bazı teoremler verilip ispatları yapılmıştır. Son olarak da uygulamalar başlığı altında dört örnek problem çözülüp elde edilen yaklaşık çözümler, tam çözümler ve literatürde bahsedilen bazı yaklaşık çözümler ile karşılaştırılıp yöntemin kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek için etkili bir yöntem olduğu görülmüştür.

Bölüm 4' de sinc-Galerkin yöntemi hem zaman kesirli hem de uzay kesirli lineer kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Bu amaç için bazı teoremler verilip ispatları yapılmıştır. Bir önceki bölüme benzer olarak uygulamalar başlığı altında beş örnek problem çözülüp elde edilen yaklaşık çözümler, tam çözümler ve literatürde bahsedilen bazı yaklaşık çözümler ile karşılaştırılıp yöntemin kesirli mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek için etkili bir yöntem olduğu görülmüştür.

Son bölüm olan Bölüm 5' te ise sonuç ve değerlendirme yapılmış, gelecek çalışmalara yönelik öneriler sunulmuştur.

Ayrıca EK-A ve EK-B kısımlarında, incelemiş olduğumuz örnek problemlerin çözümleri için kullanılan algoritmalar verilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

1. Sinc-Galerkin yönteminin daha iyi anlaşılmasını sağlamak
2. Sinc-Galerkin yöntemini kullanarak kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek
3. Sinc-Galerkin yöntemini kullanarak kesirli mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek
4. Elde edilen nümerik sonuçları tablolar halinde sunmak
5. Elde edilen sonuçları diğer yöntemlerin çözümleri ile nümerik ve grafiksel olarak kıyaslamak

1.3 Hipotez

"Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümü" isimli tezimizde hipotezimiz; ilk olarak literatür taraması yaptıktan sonra sinc-Galerkin yönteminin, lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması kavratıp lineer adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan teoremleri kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemlere genişletmektir. Buna benzer olarak lineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan teoremleri de kesirli mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlere genişletmek ve bu teoremleri kullanarak literatürde çözümleri daha önceden belirlenen denklemlere sinc-Galerkin yöntemini uygulamaktır. Daha sonra paket programlar yardımıyla elde edilen sonuçları, diğer yöntemler ile karşılaştırmaktır.

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezimizde kullanacağımız bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1 Özel Fonksiyonlar

Bu başlık altında kesirli analizde sıklıkla kullanılan Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu ve Mittag-Leffler fonksiyonunun tanım ve özellikleri verilecektir.

2.1.1 Gamma Fonksiyonu

Kesirli analizin temel fonksiyonlarından biri olan Gamma fonksiyonu $n!$ sayısını tam olmayan sayılara ve hatta karmaşık sayılara genelleştirir. Gamma fonksiyonunun en basit anlatımı, faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesidir.

Tanım 2.1 Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{R}$$

eşitliği ile tanımlanır ve karmaşık düzlemin $Re(z) > 0$ sağ yarısında yakınsaktır. Gerçekten

$$\begin{aligned} \Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log t} \log t dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log t) + i \sin(y \log t)] dt \end{aligned}$$

olup, köşeli parantezin içindeki ifade her t için sınırlıdır. e^{-t} ifadesinden dolayı sonsuzda yakınsaklık sağlanır ve $t = 0$ noktasındaki yakınsaklık için de $x = \text{Re}(z) > 1$ olması gereklidir [37].

Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden birisi

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.1)$$

eşitliğidir. Bu ifade kısmi integrasyon yöntemi ile kolayca ispatlanabilir. Öyle ki

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

yazılır. Buradan açıkça görülmektedir ki; $\Gamma(1) = 1$ şeklindedir ve (2.1) eşitliğini kullanarak $z = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2. \Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3. \Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

... ..

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!$$

elde ederiz [37]. Ayrıca Gamma fonksiyonu için

$$2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x)$$

şeklinde çoğalma formülü verilebilir [38].

2.1.2 Beta Fonksiyonu

Çoğu durumda Gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonu olarak adlandırılan bir bağıntı kullanmak daha uygundur.

Beta fonksiyonu çoğunlukla

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1 - \tau)^{w-1} d\tau, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0$$

şeklinde tanımlanır. Gamma fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki ilişki

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}$$

ile verilir ve buradan da

$$B(z, w) = B(w, z)$$

eşitliği elde edilir.

Beta fonksiyonu yardımıyla Gamma fonksiyonu için

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

bağıntısını elde ederiz. Bu formül $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ koşulu altında, $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için geçerlidir [37].

2.1.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu

e^z üstel fonksiyonu tamsayı basamaktan diferansiyel denklemler teorisinde oldukça önemli rol oynar. Bu fonksiyonun bir parametre genişletilmiş şekli

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

formülü ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir [39].

iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

seri açılımı ile verilir. Bu seri açılım da

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

ve en genel haliyle

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}$$

şeklindedir [39].

2.2 Kesirli Türev ve İntegraller

$\alpha > 0$ için birçok kesirli mertebeden türev tanımı vardır. Bu tanımlardan birkaçı Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov tanımlarıdır. Bu tanımlardan Riemann-Liouville ve Caputo en sık kullanılanlardır.

Tanım 2.2 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, α pozitif bir reel sayı, $n; n - 1 \leq \alpha < n$ şartını sağlayan bir tamsayı ve Γ Euler Gamma fonksiyonu olsun. O halde

- i. $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integrali sırası ile,

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

ve

$${}_x I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

şeklinde verilir.

- ii. $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevi sırası ile

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

ve

$${}_x D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad (2.2)$$

şeklinde verilir.

- iii. $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden sol ve sağ Caputo kesirli türevi sırası ile

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

ve

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (-1)^n (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

şeklinde verilir [40].

Ayrıca Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevi arasındaki ilişki

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}$$

ve

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x D_b^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b - x)^{k-\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Özel olarak, eğer $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ise

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) \quad (2.3)$$

ve $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(n-1)}(b) = 0$ ise

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x D_b^\alpha f(x)$$

olur [40].

Teorem 2.1 Eğer $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ için $n - 1 < \alpha \leq n$ ve $f(x) \in C^n[a, b]$, olmak üzere

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \quad (2.4)$$

şeklindedir [22].

Teorem 2.2 Eğer $\alpha > 0$ ve f sürekli ise

$${}_a D_x^\alpha {}_a I_x^\alpha f(x) = f(x) \quad (2.5)$$

şeklindedir [22].

Tanım 2.3 Eğer $\alpha > 0$ ise

$$\int_a^b g(x) {}_a^C D_x^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_x D_b^\alpha g(x) dx + \sum_{j=0}^{n-1} [{}_x D_b^{\alpha+j-n} g(x) \cdot {}_x D_b^{n-1-j} f(x)]_a^b$$

ve

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) {}_x^C D_b^\alpha f(x) dx &= \int_a^b f(x) {}_a D_x^\alpha g(x) dx \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} [(-1)^{n+j} {}_a D_x^{\alpha+j-n} g(x) \cdot {}_a D_x^{n-1-j} f(x)]_a^b \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $k < 0$ için ${}_a D_x^k g(x) = {}_a I_x^{-k} g(x)$ ve ${}_x D_b^k g(x) = {}_x I_b^{-k} g(x)$ şeklindedir [40].

Sonuç 2.1 Eğer $0 < \alpha < 1$ ise

$$\int_a^b g(x) {}_a^c D_x^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_x D_b^\alpha g(x) dx + [{}_x I_b^{1-\alpha} g(x) \cdot f(x)]_a^b$$

ve

$$\int_a^b g(x) {}_x^c D_b^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_a D_x^\alpha g(x) dx - [{}_a I_x^{1-\alpha} g(x) \cdot f(x)]_a^b$$

olur [40].

Sonuç 2.2 Eğer $0 < \alpha < 1$ ve $f(x)$ fonksiyonu $f(a) = f(b) = 0$ şartını sağlıyorsa

$$\int_a^b g(x) {}_a^c D_x^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_x D_b^\alpha g(x) dx \quad (2.6)$$

ve

$$\int_a^b g(x) {}_x^c D_b^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_a D_x^\alpha g(x) dx$$

olarak yazılır [40].

Tanım 2.4 $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, α pozitif bir reel sayı, $n; n - 1 \leq \alpha < n$ şartını sağlayan bir tamsayı ve Γ Euler Gamma fonksiyonu olsun. O halde

- i. $f(x, t)$ fonksiyonunun t değişkenine göre α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevi sırasıyla

$${}_c D_t^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_c^t (t - s)^{n-\alpha-1} f(x, s) ds,$$

ve

$${}_t D_d^\alpha f(x, t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^d (s - t)^{n-\alpha-1} f(x, s) ds,$$

şeklinde verilir.

- ii. $f(x, t)$ fonksiyonunun t değişkenine göre α . mertebeden sol ve sağ Caputo kesirli türevi sırasıyla

$${}_c D_t^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_c^t (t - s)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n f(x, s)}{\partial s^n} ds,$$

ve

$${}_t D_d^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^d (-1)^n (s - t)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n f(x, s)}{\partial s^n} ds,$$

şeklinde verilir. Benzer şekilde

- iii. $f(x, t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevi sırasıyla

$${}_a D_x^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - s)^{n-\alpha-1} f(s, t) ds,$$

ve

$${}_x D_b^\alpha f(x, t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (s - x)^{n-\alpha-1} f(s, t) ds,$$

şeklinde verilir.

- iv. $f(x, t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre α . mertebeden sol ve sağ Caputo kesirli türevi sırasıyla

$${}_a D_x^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - s)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n f(s, t)}{\partial s^n} ds,$$

ve

$${}_x^c D_b^\alpha f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^b (-1)^n (s - x)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n f(s, t)}{\partial s^n} ds,$$

şeklinde verilir.

Sonuç 2.3 Eğer $0 < \alpha < 1$ ve $f(x, t)$ fonksiyonu $f(x, c) = f(x, d) = 0$ şartını sağlıyorsa

$$\int_c^d g(x, t) {}_c^c D_t^\alpha f(x, t) dt = \int_c^d f(x, t) {}_t D_d^\alpha g(x, t) dt \quad (2.7)$$

ve

$$\int_c^d g(x, t) {}_t^c D_d^\alpha f(x, t) dt = \int_c^d f(x, t) {}_c D_t^\alpha g(x, t) dt$$

olarak yazılır.

Sonuç 2.4 Eğer $0 < \alpha < 1$ ve $f(x, t)$ fonksiyonu $f(a, t) = f(b, t) = 0$ şartını sağlıyorsa

$$\int_a^b g(x, t) {}_a^c D_x^\alpha f(x, t) dx = \int_a^b f(x, t) {}_x D_b^\alpha g(x, t) dx \quad (2.8)$$

ve

$$\int_a^b g(x, t) {}_x^c D_b^\alpha f(x, t) dx = \int_a^b f(x, t) {}_a D_x^\alpha g(x, t) dx$$

olarak yazılır.

2.3 Sinc Baz Fonksiyonlarının Özellikleri ve Kuadratür İnterpolasyonları

Tanım 2.5 Eğer $S \subseteq \mathbb{C}$ açık kümesi A ve B iki ayrık açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa S kümesine bağlantılı küme denir. Eğer $\bar{\mathbb{C}} \setminus S$ kümesi bağlantılı ise $S \subseteq \mathbb{C}$ açık kümesine basit bağlantılı küme denir. Bir D bölgesi $\mathbb{C}$ kümesinin açık basit bağlantılı alt kümesidir [30].

Tanım 2.6 Düzgün bir $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, eğrisi $\mathbb{C}$ kümesinde noktalar kümesi belirtir. Burada $t \in [a, b]$ için $z \in C^1[a, b]$ ve $z'(t) \neq 0$ şeklindedir. Eğer eğri, sürekli olduğu noktaların sonlu bir kümesi dışında diferansiyellenebilirse, parçalı diferansiyellenebilir. Eğer $z(a) = z(b)$ ise eğriye kapalı bir eğri (yol) denir. $\mathbb{C}$ kümesinde γ basit kapalı bir eğri, $a \leq t \leq b$ için $z(t) = x(t) + iy(t)$ ile verilir. $z(t)$ sadece $z(a) = z(b)$ durumunda parçalı diferansiyellenebilir [30].

Tanım 2.7 f fonksiyonu için

$$f'(z_0) \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

limiti varsa f , $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında diferansiyellenebilir denir. $f'(z_0)$ ifadesine f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi denir. Eğer f fonksiyonun türevi z_0 noktasının bazı komşuluklarının her bir noktasında mevcut ise f fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer f fonksiyonu bir D bölgesinin her bir noktasında analitik ise f fonksiyonuna D bölgesinde analitiktir denir. Eğer f fonksiyonu bütün $\mathbb{C}$ kümesinde analitik ise f fonksiyonuna tamdır denir [30].

Tanım 2.8 Bütün $z \in \mathbb{C}$ için tanımlanan

$$\text{sinc}(z) \equiv \begin{cases} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonuna *sinc fonksiyonu* denir. Bu fonksiyon bütün $\mathbb{C}$ kümesinde analitik olduğundan tamdır [30].

2.3.1 Konform Dönüşüm

Uygulamalı matematikteki birçok problem bölge olarak reel eksene sahip değildir. Herhangi bir aralıkta bir problem ve reel eksen üzerinde nümerik bir işlem verilsin. Bu durumda çözüme ulaşmak için iki yol vardır; biri problemdeki değişkenleri değiştirmektir ki bu sayede problem nümerik işlem ile aynı bölgeye sahip olur. Diğer ise nümerik işlemi yeni bir bölgeye taşımak ve işlemi bu bölgede yapmaktır. Sinc yöntemlerinin bir bölgeden diğerine dönüşümü *konform dönüşüm* yoluyla olur [30].

Tanım 2.9 Eğer f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik, $z_0 \in D$ ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonuna z_0 noktasında konformdur denir. Eğer bütün $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ ise f fonksiyonuna D bölgesinin bir konform dönüşümü denir [30].

Bu tanımın geometrik anlamı şudur; eğer f dönüşümü z_0 noktasında konform ise, o zaman z_0 noktasından geçen iki yay arasındaki açı, onların f altındaki görüntülerinin (z_0 noktasındaki) aralarındaki açı ile aynıdır. Böylece açının yönü korunur [30].

Tanım 2.10 f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon ve $h > 0$ olsun.

$$S(k, h)(x) = \text{sinc}\left(\frac{x - kh}{h}\right) \equiv \begin{cases} \frac{\sin(\pi(x - kh)/h)}{\pi(x - kh)/h} & , x \neq kh \\ 1 & , x = kh \end{cases} \quad (2.9)$$

fonksiyonlarına *dönüştürülmüş Sinc fonksiyonları* ve

$$C(f, h)(x) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \text{sinc}\left(\frac{x - kh}{h}\right)$$

serisi, yakınsak olduğunda f fonksiyonunun *Whittaker kardinal fonksiyonu* olarak adlandırılır [30]. Dönüştürülmüş sinc fonksiyonlarının belli k ve h değerleri için grafikleri Şekil 2.1 ile verilmiştir.

Tanım 2.11 h pozitif bir sabit olsun. $B(h)$ Paley-Wiener fonksiyonlar sınıfı, $f \in L^2(\mathbb{R})$ tam fonksiyonlarının ailesidir [30].

Teorem 2.3 Eğer $f \in B(h)$ ise her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sinc}\left(\frac{t - z}{h}\right) dt$$

olur [30].

Teorem 2.4 Eğer $g \in L^2(\mathbb{R})$ ise

$$k(z) \equiv \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{sinc}\left(\frac{t - z}{h}\right) dt$$

olmak üzere $k \in B(h)$ olur [30].

Teorem 2.5 Eğer $f \in B(h)$ ise her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \operatorname{sinc}\left(\frac{z - kh}{h}\right)$$

ve

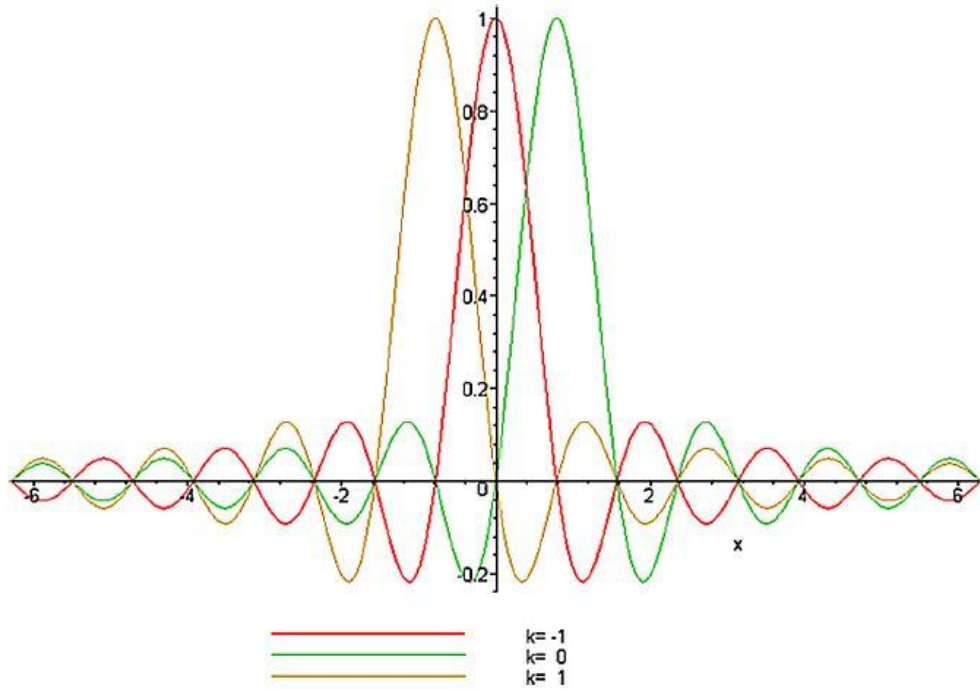
$$f(kh) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - kh}{h}\right) dt$$

olur [30].

Sonuç 2.5 Eğer $f \in B(h)$ ve $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)$$

olur [30].



Şekil 2.1 Sinc bazlarının üç üyesi ($S(k, h)(x)$, $k = -1, 0, 1$, $h = \pi/4$) [41]

Teorem 2.6 Eğer $f \in B(h)$ ise o zaman her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) = C(f, h)(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)S(k, h)(z)$$

olur. Burada

$$S(k, h)(z) \equiv \text{sinc}\left(\frac{z - kh}{h}\right)$$

fonksiyonları dönüştürülmüş sinc fonksiyonlarıdır. Sonuç olarak eğer $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)$$

olur. Bu özdeşlik integral için trapez kuralıdır [30].

(2.9) ile tanımlanan dönüştürülmüş sinc fonksiyonları diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde sıklıkla kullanılır.

Hem $\text{sinc}(x)$ hem de $S(k, h)(x)$ fonksiyonları bütün reel eksen üzerinde tanımlanır. Sınır değer problemlerin yaklaşık çözümlerinde bu fonksiyonları kullanmak için (a, b) ve $(-\infty, \infty)$ aralıkları arasında uygun bire bir dönüşüme ihtiyaç duyulur. Bunun için

$$\phi(z) = \ln\left(\frac{z - a}{b - z}\right)$$

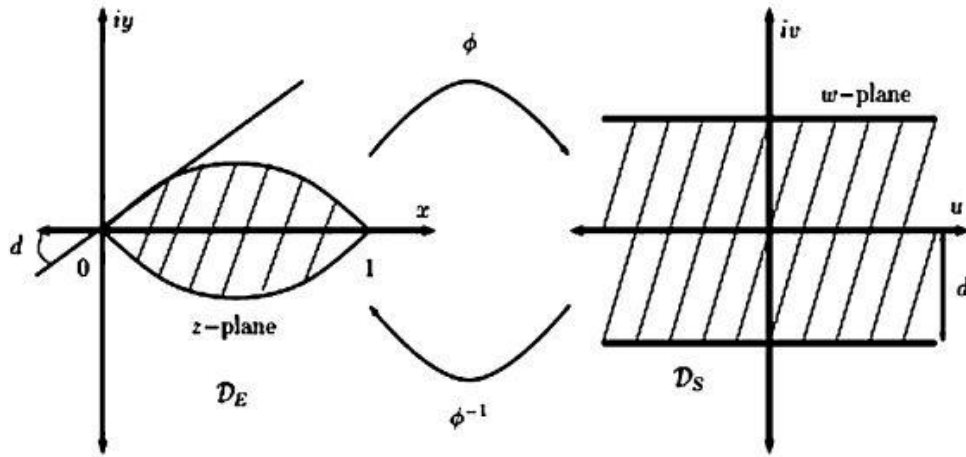
konform dönüşümü seçilebilir. Bu dönüşüm

$$D_E = \left\{z = x + iy: \left|\arg\left(\frac{z - a}{b - z}\right)\right| < d \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

bölgesini

$$D_S = \left\{w = u + iv: |v| < d \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

bölgesine dönüştürür. Bu durum Şekil 2.2 ile gösterilmiştir [36].



Şekil 2.2 Bölgeler arasındaki ilişki [31]

Nümerik yaklaşımlarda kullanılan Sinc baz fonksiyonları, $S(k, h)$ dönüştürülmüş Sinc fonksiyonları ile ϕ konform dönüşümünün,

$$S_k(z) = S(k, h) \circ \phi(z) = \text{sinc}\left(\frac{\phi(z) - kh}{h}\right) \quad (2.10)$$

şeklindeki bileşimi ile verilir. Burada $z \in D_E$ şeklindedir. (2.10) ile verilen $S_k(z)$ fonksiyonları (a, b) aralığında ele alınan denklemin yaklaşık çözümünde baz fonksiyonları olarak alınacaktır. h uzunluğu, reel eksen üzerindeki $\{kh\}$ türdeş grid noktalarını tanımlar. $D_E = (a, b)$ aralığındaki $\{x_k\}$ grid noktaları $\{kh\}$ grid noktalarının ters görüntüleri, dolayısıyla

$$x_k = \phi^{-1}(kh) = \frac{a + be^{kh}}{1 + e^{kh}}$$

ile verilir. Burada $k \in \mathbb{Z}$ şeklindedir [36].

2.3.2 Sinc Fonksiyon İnterpolasyonu ve Kuadratürler

Tanım 2.12 $\phi: D_E \rightarrow D_S$ bir konform dönüşüm, $\psi \equiv \phi^{-1}$ ve $\Gamma = \{\psi(u) \in D_E: -\infty < u < \infty\}$ olsun. O halde $B(D_E)$,

$$\int_{\psi(t+L)} |f(z)| dz \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm\infty$$

ve

$$\int_{\partial D_E} |f(z)| dz < \infty$$

şartlarını sağlayan ve $B(D_E)$ kümesinde analitik olan fonksiyonların sınıfıdır. Burada

$$L = \{iv: |v| < d \leq \frac{\pi}{2}\} \text{ ve } \partial D_E, D_E \text{ bölgesinin sınırıdır [36].}$$

Teorem 2.7 $\phi', f \in B(D_E)$ olsun. O halde her $z \in \Gamma$ için

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(z_j) S_j(z) + E_f \quad (2.11)$$

olur. Burada

$$E_f = \frac{\sin(\pi\phi(z)/h)}{2\pi i} \int_{\partial D_E} \frac{\phi'(w)f(w)dw}{(\phi(w) - \phi(z))\sin(\pi\phi(w)/h)}$$

şeklindedir [36].

Nümerik yaklaşımlarda (2.11) toplamında kesme yapılır. Aşağıda verilen teorem yapılan kesme hatası ile ilgilidir.

Teorem 2.8 $F \in B(D_E)$, ϕ bir konform dönüşüm ve α, β, C ;

$$\Gamma_- = \{z \in \Gamma: \phi(z) = x \in (-\infty, 0)\} = \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\Gamma_+ = \{z \in \Gamma: \phi(z) = x \in [0, \infty)\} = \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$$

olmak üzere

$$\left| \frac{F(z)}{\phi'(z)} \right| \leq C \begin{cases} \exp(-\alpha|\phi(z)|), & z \in \Gamma_- \\ \exp(-\beta|\phi(z)|), & z \in \Gamma_+ \end{cases}$$

eşitsizliğini sağlayan sabitler olsun. O halde

$$\int_a^b F(z)dz = h \sum_{j=-M}^N \frac{F(z_j)}{\phi'(z_j)} + \mathcal{O}(e^{-\alpha Mh}) + \mathcal{O}(e^{-\beta Nh}) + \mathcal{O}(e^{-\pi d/h}) \quad (2.12)$$

olur.

$\lfloor |x| \rfloor$, x değerine eşit ya da x değerinden küçük en büyük tam sayıyı ifade etmek üzere, $N = \left\lfloor \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta} M + 1 \right\rfloor \right\rfloor$, $h = \sqrt{\pi d / (\alpha M)}$ seçimleri için (2.12) eşitliği ile verilen Sinc kuadratr kuralı için hata $\mathcal{O}(\exp(-\sqrt{\pi d \alpha M}))$ olarak yazılır [34, 36].

Yukarıdaki iki teorem S_k Sinc baz fonksiyonları yardımıyla $B(D_E)$ sınıfındaki fonksiyonların integralleri için kuadratr kurallarının elde edilmesinin yanı sıra bu fonksiyonlar için interpolasyon formüllerinin de elde edilmesini sağlar. Elde edilen formüller problemlerin çözümü için nümerik bir yol geliştirilmesinde temel oluşturacaktır [36].

**KESİRLİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİNC-GALERKİN
YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

Bu bölümde sınır değer koşulları ile verilen kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için sinc-Galerkin yöntemini kullanacağız. Bu amaç doğrultusunda bazı teoremler verip ispatlarını yapacağız. Son olarak da örnek problemlerin yaklaşık çözümlerini, tam çözümler ve literatürde bahsedilen bazı yaklaşık çözümler ile karşılaştıracacağız.

3.1 Sinc-Galerkin Yöntemi

${}_0^C D_x$ Caputo kesirli türev operatörü olmak üzere

$$\mu_2(x)y'' + \mu_1(x)y' + \lambda(x){}_0^C D_x^\alpha y + \mu_0(x)y = f(x), \quad (3.1)$$
$$0 < x < 1, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (3.2)$$

kesirli mertebeden lineer iki noktalı sınır değer problemini ele alalım. Burada $\mu_2(x)$, $\mu_1(x)$, $\lambda(x)$, $\mu_0(x)$, $f(x)$ analitik fonksiyonlardır. Problemin yaklaşık bir çözümü $S_j(x)$ sinc baz fonksiyonları kullanılarak

$$y_n(x) = \sum_{j=-M}^M c_j S_j(x), \quad n = 2M + 1, \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $S_j(x)$ fonksiyonu (2.10) ile tanımlanmıştır. (3.3) ile verilen yaklaşık çözümdeki bilinmeyen c_j katsayıları, baz fonksiyonlarına göre ortogonalite kullanılarak hesaplanır. Ayrıca

$$S_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

olduğundan $y_n(x_k) \approx c_k$ olup $x_k = \phi^{-1}(kh)$ şeklindedir. y_n ifadesindeki n sayıları kullanılan baz fonksiyonlarının sayısını ifade eder [36].

(3.1) ile verilen sınır değer probleminin her iki tarafının $S_k(x)$ fonksiyonu ile iç çarpımını alırsak,

$$\begin{aligned} < \mu_2(x)y'', S_k > + < \mu_1(x)y', S_k > + < \lambda(x) {}^C_0 D_x^\alpha y, S_k > + < \mu_0(x)y, S_k > \\ &= < f(x), S_k > \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir.

Sinc-Galerkin yöntemi için kullanılan iç çarpım tanımı, f ve η iki fonksiyon olmak üzere

$$< f, \eta > = \int_a^b f(x)\eta(x)w(x)dx \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada $w(x)$ ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılıp bu fonksiyon sınır koşullarına, bölgeye ve ele alınan problemin mertebesine göre seçilir. $2n$ mertebeden bir sınır değer problemi için $w(x) = 1/(\phi'(x))^n$ şeklinde seçilir. Ele aldığımız problem ikinci mertebeden olduğundan

$$w(x) = \frac{1}{\phi'(x)}$$

olarak almak uygun olacaktır [42].

(3.4) ile verilen eşitlikteki iç çarpımlar aşağıdaki lemma ve teoremler kullanılarak hesaplanır.

Lemma 3.1 ϕ, D_E basit bağlantılı bölgesinden D_S bölgesi üzerine bire bir konform dönüşüm olsun. O halde

$$\delta_{jk}^{(0)} = [S(j, h) \circ \phi(x)]|_{x=x_k} = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\delta_{jk}^{(1)} = h \frac{d}{d\phi} [S(j, h) \circ \phi(x)] \Big|_{x=x_k} = \begin{cases} 0 & , j = k \\ \frac{(-1)^{k-j}}{k-j} & , j \neq k \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\delta_{jk}^{(2)} = h^2 \frac{d^2}{d\phi^2} [S(j, h) \circ \phi(x)] \Big|_{x=x_k} = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3} & , j = k \\ \frac{-2(-1)^{k-j}}{(k-j)^2} & , j \neq k \end{cases} \quad (3.8)$$

olur [42].

Teorem 3.1

$$g_{2,2} = (\mu_2 w)(\phi')^2, \quad g_{2,1} = (\mu_2 w)\phi'' + 2(\mu_2 w)'\phi', \quad g_{2,0} = (\mu_2 w)'',$$

$$g_{1,1} = (\mu_1 w)\phi', \quad g_{1,0} = (\mu_1 w)',$$

olsun. Ayrıca

$$G = \mu_0 y \text{ ve ya } G = f(x)$$

olmak üzere

$$\langle \mu_2(x) y'', S_k \rangle \cong h \sum_{j=-M}^M \sum_{i=0}^2 \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j) h^i} \delta_{kj}^{(i)} g_{2,i}, \quad (3.9)$$

$$\langle \mu_1(x) y', S_k \rangle \cong -h \sum_{j=-M}^M \sum_{i=0}^1 \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j) h^i} \delta_{kj}^{(i)} g_{1,i}, \quad (3.10)$$

ve

$$\langle G, S_k \rangle \cong h \frac{G(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)}, \quad (3.11)$$

ifadeleri sağlanır [32].

İspat (3.5) ile verilen iç çarpım tanımını, (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını ve Galerkin yöntemini kullanarak teoremden verilen iç çarpımların her birini ayrı ayrı hesaplayalım.

$$\langle \mu_2(x)y''(x), S_k \rangle = \int_0^1 \mu_2(x)y''(x)S_k(x)w(x)dx$$

olup kısmi integrasyondan

$$\begin{aligned} \langle \mu_2(x)y''(x), S_k \rangle &= y'(x)\mu_2(x)S_k(x)w(x)|_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 y'(x) \frac{d}{dx} [\mu_2(x)S_k(x)w(x)]dx \end{aligned}$$

yazılır. Sağ taraftaki integrale tekrar kısmi integrasyon uygularsak,

$$\begin{aligned} \langle \mu_2(x)y''(x), S_k \rangle &= y'(x)\mu_2(x)S_k(x)w(x)|_0^1 \\ &\quad - y(x) \frac{d}{dx} [\mu_2(x)S_k(x)w(x)] \Big|_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 y(x) \frac{d^2}{dx^2} [\mu_2(x)S_k(x)w(x)]dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim $S_k(0) = S_k(1) = 0$ olduğu için sıfır olur. $S_k(x)$ fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 1$ uç noktalarında diferansiyellenemez. Bu nedenle, $w(x)$ ağırlık fonksiyonu, $\frac{d}{dx} [\mu_2(x)S_k(x)w(x)]$ ifadesi $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında diferansiyellenebilir olacak şekilde seçilir. $\phi(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ dönüşümü için uygun bir ağırlık fonksiyonu $w(x) = 1/\phi'(x)$ şeklindedir. $y(0) = y(1) = 0$ sınır koşulları ve $w(x)$ kullanıldığında

$$\langle \mu_2(x)y''(x), S_k \rangle = \int_0^1 y(x) \frac{d^2}{dx^2} [\mu_2(x)S_k(x)w(x)] dx$$

olarak bulunur. Burada

$$\frac{d}{dx} [S_k(x)] = \frac{d}{d\phi} [S_k(x)] \phi'(x) \quad (3.12)$$

ve

$$\frac{d^n}{d\phi^n} [S_k(x)] = S_k^{(n)}(x) \quad (3.13)$$

olarak alındığında

$$\langle \mu_2(x)y''(x), S_k \rangle = \int_0^1 y(x) [S_k(x)g_{2,0}(x) + S_k^{(1)}(x)g_{2,1}(x) + S_k^{(2)}(x)g_{2,2}(x)] dx \quad (3.14)$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} g_{2,0}(x) &= (w(x)\mu_2(x))'' \\ g_{2,1}(x) &= \phi''(x)w(x)\mu_2(x) + 2\phi'(x)(w(x)\mu_2(x))' \\ g_{2,2}(x) &= (\phi'(x))^2 w(x)\mu_2(x) \end{aligned}$$

şeklindedir.

(3.14) eşitliğinin sağ tarafına (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını uygulayıp Lemma 3.1 kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mu_2(x)y''(x), S_k \rangle &\cong h \sum_{j=-M}^M \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)} \left[\frac{1}{h^2} \delta_{kj}^{(2)} g_{2,2}(x_j) + \frac{1}{h} \delta_{kj}^{(1)} g_{2,1}(x_j) + \delta_{kj}^{(0)} g_{2,0}(x_j) \right] \\ &= h \sum_{j=-M}^M \sum_{i=0}^2 \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j) h^i} \delta_{kj}^{(i)} g_{2,i} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle \mu_1(x)y'(x), S_k \rangle = \int_0^1 \mu_1(x)y'(x)S_k(x)w(x)dx$$

olup kısmi integrasyondan

$$\langle \mu_1(x)y'(x), S_k \rangle = y(x)\mu_1(x)S_k(x)w(x)|_0^1 - \int_0^1 y(x) \frac{d}{dx} [\mu_1(x)S_k(x)w(x)]dx$$

yazılır. Burada $y(0) = y(1) = 0$ sınır koşulları kullanılırsa

$$\langle \mu_1(x)y'(x), S_k \rangle = - \int_0^1 y(x) \frac{d}{dx} [\mu_1(x)S_k(x)w(x)]dx$$

olarak yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafında (3.12) ve (3.13) notasyonları kullanılırsa

$$\langle \mu_1(x)y'(x), S_k \rangle = - \int_0^1 y(x) [S_k(x)g_{1,0}(x) + S_k^{(1)}(x)g_{1,1}(x)]dx \quad (3.15)$$

elde edilir. Burada

$$g_{1,1}(x) = (\mu_1(x)w(x))\phi'(x)$$

$$g_{1,0}(x) = (\mu_1(x)w(x))'$$

şeklindedir. (3.15) ile verilen eşitlikteki integrale (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını uygulayıp Lemma 3.1 kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mu_1(x)y'(x), S_k \rangle &\cong -h \sum_{j=-M}^M \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)} \left[\frac{1}{h} \delta_{kj}^{(1)} g_{1,1}(x_j) + \delta_{kj}^{(0)} g_{1,0}(x_j) \right] \\ &= -h \sum_{j=-M}^M \sum_{i=0}^1 \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)h^i} \delta_{kj}^{(i)} g_{1,i} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde $G = \mu_0 y$ için (3.5) ile verilen iç çarpım tanımı kullanılırsa

$$\langle \mu_0(x)y, S_k \rangle = \int_0^1 \mu_0(x)y(x)S_k(x)w(x)dx$$

yazılır. Bu eşitlikteki integrale (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını uygularsak

$$\langle \mu_0(x)y, S_k \rangle \cong h \frac{\mu_0(x_k)y(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)} = h \frac{G(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)}$$

olarak bulunur. Aynı işlem $G = f(x)$ için de benzer şekilde yapılır. Sonuç olarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2 $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \langle \lambda(x) {}^C_0 D_x^\alpha y(x), S_k \rangle \\ & \cong -\frac{h}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=-M}^M \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)} \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \Big|_{x=x_j} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ifadesi sağlanır. Burada $K(x) = \lambda(x)S_k(x)w(x)$ ve $\xi(t) = \ln\left(\frac{t-x}{1-t}\right)$ şeklindedir [43].

İspat İç çarpım tanımından

$$\langle \lambda(x) {}^C_0 D_x^\alpha y(x), S_k \rangle = \int_0^1 {}^C_0 D_x^\alpha y(x) (\lambda(x)S_k(x)w(x))dx$$

yazılır. Burada Sonuç 2.2 de verilen (2.6) eşitliği kullanılırsa $K(x) = \lambda(x)S_k(x)w(x)$ için

$$\langle \lambda(x) {}^C_0 D_x^\alpha y(x), S_k \rangle = \int_0^1 y(x) {}_x D_1^\alpha (K(x))dx \quad (3.17)$$

elde edilir. O halde Riemann-Liouville tanımından

$${}_x D_1^\alpha (K(x)) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (t-x)^{-\alpha} K(t) dt \quad (3.18)$$

yazabiliriz. (3.18) ile verilen eşitlikteki integral $[x, 1]$ kapalı aralığında ıraksak olduğundan bu integrali hesaplamak için (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını kullanacağız. Bu amaç için konform dönüşüm ve bu dönüşümün ters görüntüsü sırasıyla

$$\xi(t) = \ln\left(\frac{t-x}{1-t}\right)$$

ve

$$x_r = \xi^{-1}(rh_L) = \frac{e^{rh_L} + x}{1 + e^{rh_L}}$$

şeklinde verilir. O halde sinc kuadratür kuralına göre $h_L = \frac{\pi}{\sqrt{L}}$ için

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (t-x)^{-\alpha} K(t) dt \\ & \cong -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \end{aligned}$$

yazabiliriz. Sonuç olarak (3.17) eşitliğinin sağ tarafı

$$\begin{aligned} & \int_0^1 y(x) {}_x D_1^\alpha (K(x)) dx \\ & \cong -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \left(y(x) \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \right) dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

olarak yazılır. Şimdi (3.19) ile verilen ifadenin sağ tarafına sinc kuadratür kuralını uygulayalım. Bu amaç için konform dönüşüm ve bu dönüşümün ters görüntüsü sırası ile

$$\phi(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

ve

$$x_k = \phi^{-1}(kh) = \frac{e^{kh}}{1 + e^{kh}}$$

şeklindedir. Sonuç olarak sinc kuadratür kuralına göre $h = \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ için

$$\langle \lambda(x) {}^c_0 D_x^\alpha y(x), S_k \rangle \cong -\frac{h}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=-M}^M \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)} \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \Bigg|_{x=x_j}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

(3.9)-(3.11) ve (3.14) ifadeleri ile (3.4) eşitliğindeki her bir terim yer değiştirilirse ve elde edilen eşitlikte $y(x_j)$ yerine c_j yazılıp eşitliğin her iki tarafı h ile bölünürse aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.3 Eğer (3.1)-(3.2) ile verilen sınır değer probleminin yaklaşık çözümü (3.3) şeklinde ise, o zaman $\{c_j\}_{j=-M}^M$ bilinmeyen katsayılarını hesaplamak için ayrık sinc-Galerkin sistemi

$$\begin{aligned} \sum_{j=-M}^M \left\{ \sum_{i=0}^2 \frac{1}{h^i} \delta_{kj}^{(i)} \frac{g_{2,i}(x_j)}{\phi'(x_j)} c_j - \sum_{i=0}^1 \frac{1}{h^i} \delta_{kj}^{(i)} \frac{g_{1,i}(x_j)}{\phi'(x_j)} c_j \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{c_j}{\phi'(x_j)} \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \Bigg|_{x=x_j} \right\} \\ + \frac{\mu_0(x_k) w(x_k)}{\phi'(x_k)} c_k = \frac{f(x_k) w(x_k)}{\phi'(x_k)}, \quad -M \leq k \leq M \end{aligned} \quad (3.20)$$

şeklinde verilir [43].

Şimdi (3.20) ile verilen sistemi matris şeklinde ifade etmek için bazı notasyonlar tanımlayalım. $m = 2M + 1$ olmak üzere $\mathcal{D}(g)$ köşegen elemanları

$$[g(x_{-M}), g(x_{-M+1}), \dots, g(x_0), \dots, g(x_M)]^T$$

şeklinde olan $m \times m$ tipinde bir diagonal matris, A

$$A = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \Bigg|_{x=x_j}$$

ile verilen $m \times m$ tipinde bir matris ve $I^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ için

$$I^{(i)} = [\delta_{kj}^{(i)}], \quad j, k = -M, \dots, M$$

olarak tanımlanan bir matris olsun. O halde

$$\vec{x} = [x_{-M}, x_{-M+1}, \dots, x_M]^T$$

$$\vec{c} = [c_{-M}, c_{-M+1}, \dots, c_M]^T$$

$$\vec{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$$

olmak üzere (3.20) sistemi

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=0}^2 \frac{1}{h^i} I^{(i)} \mathcal{D} \left(\frac{g_{2,i}}{\phi'} \right) - \sum_{i=0}^1 \frac{1}{h^i} I^{(i)} \mathcal{D} \left(\frac{g_{1,i}}{\phi'} \right) - A \mathcal{D} \left(\frac{1}{\phi'} \right) \right] \vec{c} + \mathcal{D} \left(\frac{\mu_0(x_k) w(x_k)}{\phi'(x_k)} \right) \vec{c} \\ & = \mathcal{D} \left(\frac{f(x_k) w(x_k)}{\phi'(x_k)} \right) \vec{1} \end{aligned}$$

matris-vektör sistemi şeklinde yazılabilir. Bu sistemden $-M \leq j \leq M$ için c_j katsayılarının değerleri hesaplanıp

$$y(x) \cong y_n(x) = \sum_{j=-M}^M c_j S_j(x)$$

toplamında yerine yazılarak yaklaşık çözüm bulunmuş olur [36].

3.2 Uygulamalar

Bütün problemlerde $d = \pi/2$, $\alpha = \beta = 1/2$ ve $h = \sqrt{\pi d/\alpha M}$ olarak alınmıştır.

Problem 3.1

$$y''(x) + {}^C_0D_x^{0.5}y(x) = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

homojen sınır koşullu lineer kesirli mertebeden sınır değer problemini ele alalım.

Burada $f(x) = 2 + \frac{1}{\Gamma(0.5)}(2.65x^{1.5} - 2x^{0.5})$ şeklindedir. Bu problemin tam çözümü

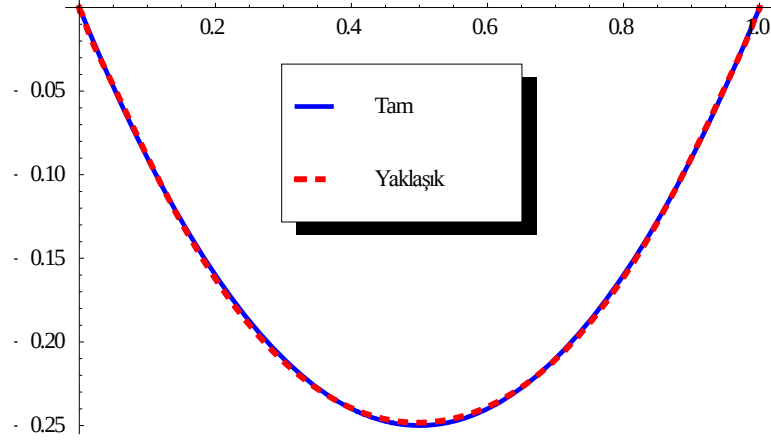
$y(x) = x(x - 1)$ olup L ve M 'nin farklı değerleri için sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2 ile verilmiştir. Ayrıca L ve M 'nin farklı değerleri için tam ve yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 ile verilmiştir.

Çizelge 3.1 Problem 3.1 için ($L = 5, M = 5$) nümerik sonuçlar

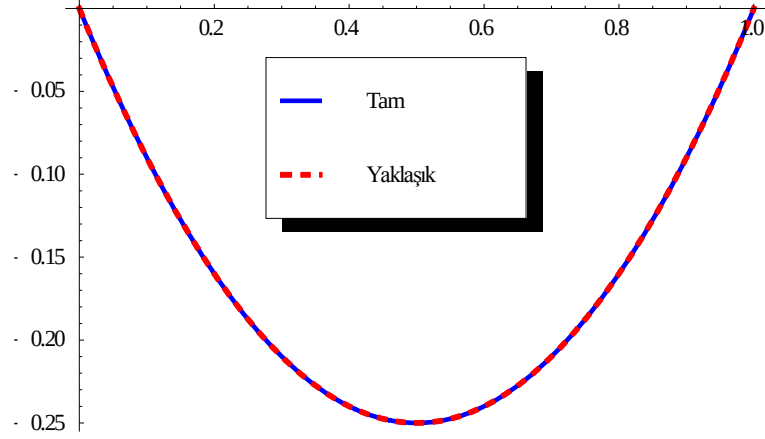
x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0	0	0	0
0.1	-0.09	-0.089220	0.00077988
0.2	-0.16	-0.162342	0.00234218
0.3	-0.21	-0.211748	0.00174823
0.4	-0.24	-0.239574	0.00042561
0.5	-0.25	-0.248273	0.00172700
0.6	-0.24	-0.238808	0.00119209
0.7	-0.21	-0.210588	0.00058794
0.8	-0.16	-0.161550	0.00155002
0.9	-0.09	-0.089553	0.00044623
1	0	0	0

Çizelge 3.2 Problem 3.1 için ($L = 40, M = 100$) nümerik sonuçlar

x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0	0	0	0
0.1	-0.09	-0.089998	$1.15523 \cdot 10^{-6}$
0.2	-0.16	-0.159998	$1.50251 \cdot 10^{-6}$
0.3	-0.21	-0.209998	$1.85544 \cdot 10^{-6}$
0.4	-0.24	-0.239999	$1.43840 \cdot 10^{-6}$
0.5	-0.25	-0.249999	$1.04511 \cdot 10^{-6}$
0.6	-0.24	-0.239999	$1.27550 \cdot 10^{-6}$
0.7	-0.21	-0.209999	$5.20080 \cdot 10^{-7}$
0.8	-0.16	-0.160000	$1.59912 \cdot 10^{-7}$
0.9	-0.09	-0.090000	$3.50346 \cdot 10^{-7}$
1	0	0	0



Şekil 3.3 Problem 3.1 için ($L = 5, M = 5$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 3.4 Problem 3.1 için ($L = 40, M = 100$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği

Problem 3.2

$$y''(x) + 0.5 {}^C D_x^{0.3} y(x) + y(x) = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

homojen sınır koşullu lineer kesirli mertebeden sınır değer problemini ele alalım [16].

Burada $f(x) = 4x^2(5x - 3) + 0.5x^{3.7} \left(\frac{120}{\Gamma(5.7)} x - \frac{24}{\Gamma(4.7)} \right) + x^4(x - 1)$ şeklindedir. Bu problemin tam çözümü $y(x) = x^4(x - 1)$ olup L ve M 'nin farklı değerleri için sinc-Galerkin yöntemi (SGY) ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 3.4 ile verilmiştir. Kübik spline (KS) polinomları kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar ile sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 3.3'te karşılaştırılmıştır. Ayrıca L ve

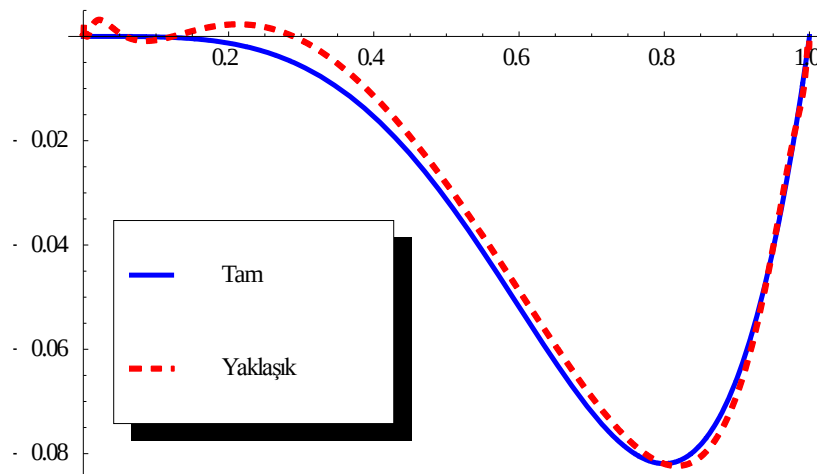
M 'nin farklı değerleri için tam ve yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 ile verilmiştir.

Çizelge 3.3 Problem 3.2 için ($L = 5, M = 5$) nümerik sonuçlar

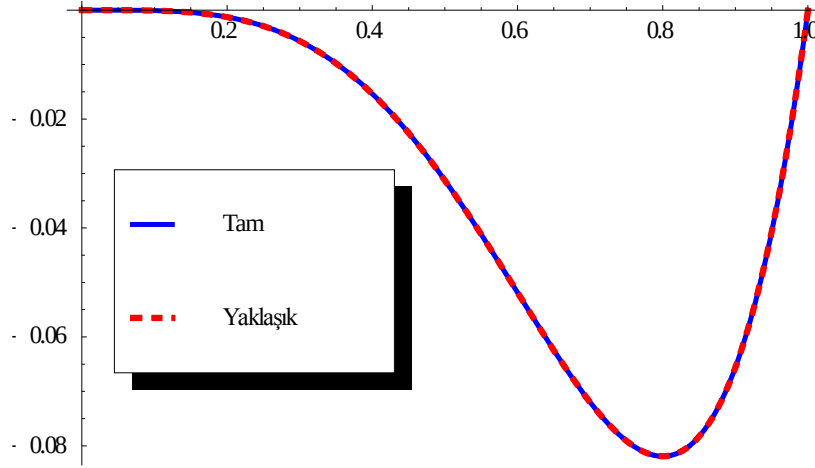
x	Nüm. Çöz.(SGY)	Nüm. Çöz.(KS)	Hata(SGY)	Hata(KS)(h=1/8)
0	0	0	0	0
0.125	0.00006726	-0.00221	0.00028088	0.0019963
0.250	0.00179474	-0.00701	0.00472443	0.0040803
0.375	-0.0080783	-0.01819	0.00428123	0.0058304
0.500	-0.0282408	-0.03810	0.00300920	0.0068500
0.625	-0.0540496	-0.64030	0.00317089	0.5830795
0.750	-0.0772466	-0.08467	0.00185499	0.0055684
0.875	-0.0763662	-0.07654	0.00309352	0.0032673
1	0	0	0	0

Çizelge 3.4 Problem 3.2 için ($L = 40, M = 100$) nümerik sonuçlar

x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0	0	0	0
0.125	-0,0002136	-0.000213621	$2.06713 \cdot 10^{-9}$
0.250	-0,0029296	-0.002929685	$2.19608 \cdot 10^{-9}$
0.375	-0,0123596	-0.012359615	$3.61509 \cdot 10^{-9}$
0.500	-0,0312500	-0.031249900	$5.73438 \cdot 10^{-9}$
0.625	-0,0572205	-0.057220453	$5.40995 \cdot 10^{-9}$
0.750	-0,0791016	-0.079101560	$2.47494 \cdot 10^{-9}$
0.875	-0,0732727	-0.073272705	$2.61347 \cdot 10^{-11}$
1	0	0	0



Şekil 3.5 Problem 3.2 için ($L = 5, M = 5$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 3.6 Problem 3.2 için ($L = 40, M = 100$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği

Problem 3.3

$$y''(x) - xy'(x) + {}^C_0D_x^{0.5}y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

homojen olmayan sınır koşullu lineer kesirli mertebeden sınır değer problemini ele alalım. Burada $f(x) = -3x^3 - 2x^2 + 6x + 2 + \frac{1}{\Gamma(0.5)}(2.67x^{1.5} + 3.2x^{2.5})$ şeklinde olup bu problemin tam çözümü $y(x) = x^2(x + 1)$ şeklindedir. İlk olarak problemde verilen homojen olmayan sınır koşullarını homojen hale getirmeliyiz. Bunun için $u(x) = y(x) - 2x$ dönüşümü yaparsak problem

$$u''(x) - xu'(x) + {}^C_0D_x^{0.5}u(x) = g(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

şeklini alır. Burada

$$g(x) = -3x^3 - 2x^2 + 8x + 2 + \frac{(2.67x^{1.5} + 3.2x^{2.5} - 4x^{0.5})}{\Gamma(0.5)}$$

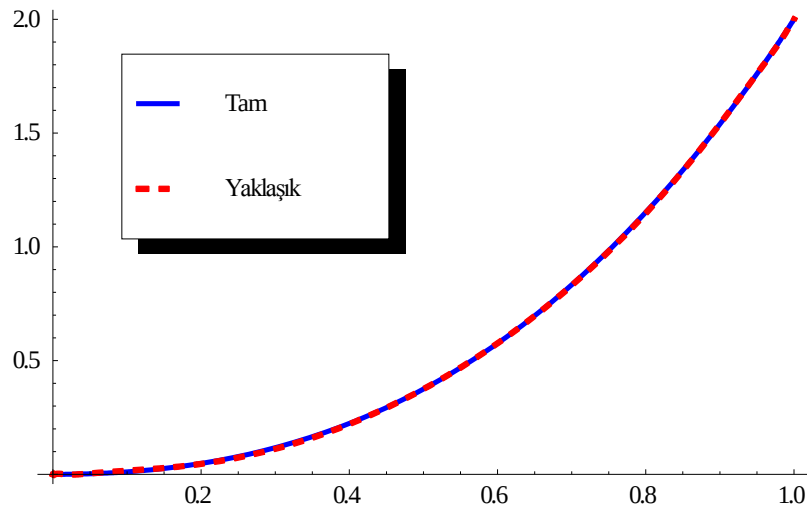
dir. Bu problemin L ve M 'nin farklı değerleri için sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6 ile verilmiştir. Ayrıca L ve M 'nin farklı değerleri için tam ve yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 ile verilmiştir.

Çizelge 3.5 Problem 3.3 için ($L = 5, M = 5$) nümerik sonuçlar

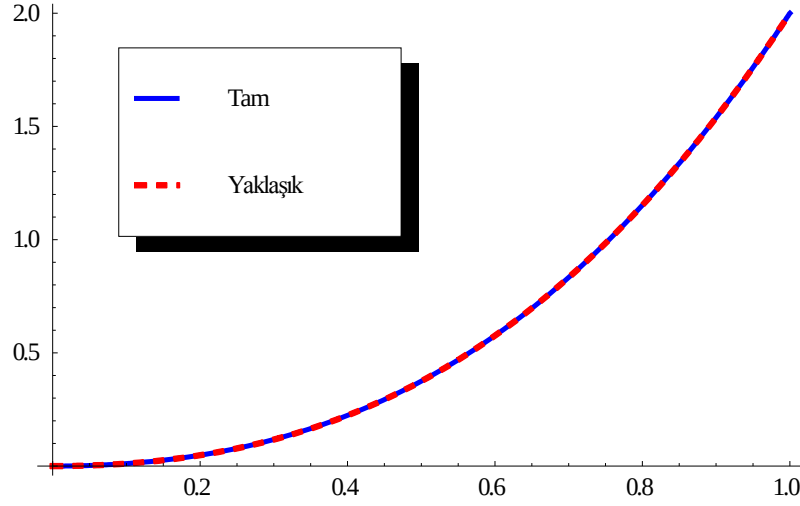
x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0	0	0	0
0.1	0.011	0.016142	0.00514286
0.2	0.048	0.046029	0.00197068
0.3	0.117	0.111658	0.00534160
0.4	0.224	0.220862	0.00313746
0.5	0.375	0.374859	0.00014069
0.6	0.576	0.576008	0.00000877
0.7	0.833	0.830052	0.00294758
0.8	1.152	1.147350	0.00464957
0.9	1.539	1.540036	0.00103603
1	0	0	0

Çizelge 3.6 Problem 3.3 için ($L = 40, M = 100$) nümerik sonuçlar

x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0	0	0	0
0.1	0.011	0.010956	0.000043249
0.2	0.048	0.047914	0.000085810
0.3	0.117	0.116870	0.000130368
0.4	0.224	0.223831	0.000169243
0.5	0.375	0.374798	0.000201585
0.6	0.576	0.575775	0.000224936
0.7	0.833	0.832751	0.000248998
0.8	1.152	1.151760	0.000240338
0.9	1.539	1.538840	0.000161784
1	0	0	0



Şekil 3.7 Problem 3.3 için ($L = 5, M = 5$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 3.8 Problem 3.3 için ($L = 40, M = 100$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği

Problem 3.4

$${}_0^C D_x^{1.2} y(x) + \frac{3}{57} y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{\Gamma(3.2)}$$

homojen olmayan sınır koşullu lineer kesirli mertebeden sınır değer problemini ele alalım [44]. Burada $f(x) = x + \frac{3x^{2.2}}{\Gamma(3.2)}$ olup bu problemin tam çözümü $y(x) = \frac{x^{2.2}}{\Gamma(3.2)}$ şeklindedir. İlk olarak problemde verilen homojen olmayan sınır koşullarını homojen hale getirmeliyiz. Bunun için $u(x) = y(x) - \frac{x}{\Gamma(3.2)}$ dönüşümünü yaparsak problem

$${}_0^C D_x^{1.2} u(x) + \frac{3}{57} u(x) = g(x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (3.21)$$

şeklini alır. Burada

$$g(x) = x + \frac{3}{57} \frac{x^{2.2}}{\Gamma(3.2)} - \frac{3}{57} \frac{x}{\Gamma(3.2)}$$

şeklindedir. (3.21) ile verilen denklemde (2.4) ile verilen özelliği kullanırsak problem

$${}_0 I_x^{0.8} u''(x) + \frac{3}{57} u(x) = g(x)$$

şeklinde yazılabilir. Denklemin her iki tarafına ${}_0D_x^{0.8}$ operatörünü uygulayıp (2.5) özelliği kullanılırsa, ${}_0D_x^{0.8}g(x) = r(x)$ olmak üzere

$$u''(x) + \frac{3}{57} {}_0D_x^{0.8}u(x) = r(x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (3.22)$$

elde edilir. Burada $r(x) = 0.217825 (4.89143 t^{0.2} + 0.194517 t^{1.4})$ şeklindedir. Sonuç 2.2 ile verilen (2.6) eşitliğine uygunluk için, (3.22) denkleminde (2.3) eşitliği kullanılırsa denklem

$$u''(x) + \frac{3}{57} {}_0D_x^{0.8}u(x) = r(x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

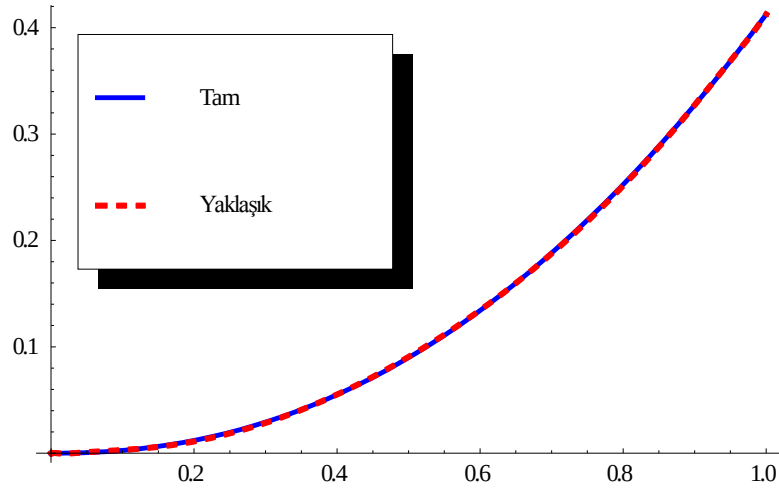
şeklinde yazılır. Bu problemin L ve M 'nin farklı değerleri için sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçları Çizelge 3.7 ile verilmiştir. Çizelge 3.8'de ise sinc-Galerkin yöntemi ile Haar Wavelet yöntemi (HWY) arasında karşılaştırma yapılmıştır. Ayrıca L ve M 'nin farklı değerleri için tam ve yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 3.7 ve Şekil 3.8 ile verilmiştir.

Çizelge 3.7 Problem 3.4 için ($L = 5, M = 5$) nümerik sonuçlar

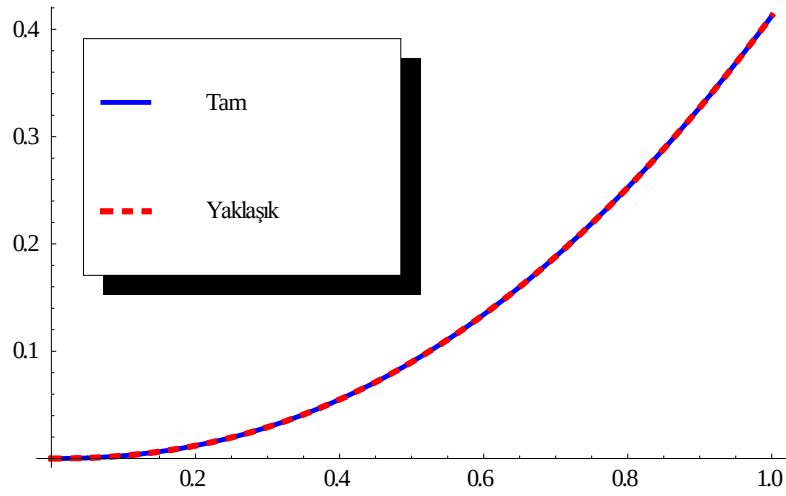
x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0	0	0	0
0.1	0.002603	0.003024	0.000421008
0.2	0.011960	0.011040	0.000920051
0.3	0.029183	0.028462	0.000721595
0.4	0.054954	0.055164	0.000210129
0.5	0.089785	0.090523	0.000738097
0.6	0.134093	0.134454	0.000361033
0.7	0.188230	0.187585	0.000645323
0.8	0.252506	0.251336	0.001169680
0.9	0.327195	0.327288	0.000092972
1	0	0	0

Çizelge 3.8 Problem 3.4 için ($L = 40, M = 100$) nümerik sonuçlar

x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata(SGY)	Hata(HWY)
0	0	0	0	0
0.1	0.002603	0.002609	$6.29122 \cdot 10^{-6}$	$1.53063 \cdot 10^{-6}$
0.2	0.011960	0.011969	$8.95056 \cdot 10^{-6}$	$1.52699 \cdot 10^{-7}$
0.3	0.029183	0.029192	$8.66450 \cdot 10^{-6}$	$8.07661 \cdot 10^{-7}$
0.4	0.054954	0.054961	$6.43419 \cdot 10^{-6}$	$6.31371 \cdot 10^{-7}$
0.5	0.089785	0.089789	$3.23581 \cdot 10^{-6}$	$5.19845 \cdot 10^{-7}$
0.6	0.134093	0.134093	$2.46885 \cdot 10^{-7}$	$1.82879 \cdot 10^{-6}$
0.7	0.188230	0.188227	$2.83019 \cdot 10^{-6}$	$2.43150 \cdot 10^{-6}$
0.8	0.252506	0.252502	$4.40361 \cdot 10^{-6}$	$3.11752 \cdot 10^{-6}$
0.9	0.327195	0.327191	$4.35097 \cdot 10^{-6}$	$3.96605 \cdot 10^{-6}$
1	0	0	0	0



Şekil 3.9 Problem 3.4 için ($L = 5, M = 5$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 3.10 Problem 3.4 için ($L = 40, M = 100$) tam ve yaklaşık çözüm grafiği

KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİNC-GALERKİN YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde sınır değer koşulları ile verilen kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için sinc-Galerkin yöntemini kullanacağız. Bu amaç doğrultusunda bazı teoremler verip ispatlarını yapacağız. Son olarak da örnek problemlerin yaklaşık çözümlerini, tam çözümler ve literatürde bahsedilen bazı yaklaşık çözümler ile karşılaştıracacağız.

4.1 Sinc-Galerkin Yöntemi

C_0D_t ve C_0D_x Caputo kesirli türev operatörleri olmak üzere

$$u_{tt} + {}^C_0D_t^\alpha u = a(x)u_{xx} + c(x)u + f(x, t), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.1)$$

$$u_{tt} = a(x)u_{xx} + b(x){}^C_0D_x^\beta u + c(x)u + f(x, t), \quad 0 < \beta < 1 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) &= u(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

kesirli mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerini düşünelim. Problemlerin yaklaşık bir çözümü sinc baz fonksiyonları kullanılarak

$$u_{m_x, m_t}(x, t) = \sum_{j=-M_t}^{N_t} \sum_{i=-M_x}^{N_x} u_{ij} S_{ij}(x, t) \quad (4.4)$$

şeklinde yazılır. Burada $m_x = M_x + N_x + 1$ ve $m_t = M_t + N_t + 1$ şeklindedir. Ayrıca $\{S_{ij}(x, t)\}$ baz fonksiyonları $-M_x \leq i \leq N_x$ ve $-M_t \leq j \leq N_t$ olmak üzere dönüştürülmüş sinc fonksiyonlarının çarpımı olarak

$$\begin{aligned} S_{ij}(x, t) &= S_i(x)S_j(t) \\ &= [S(i, h_x) \circ \phi(x)][S(j, h_t) \circ \gamma(t)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

ile verilir. Burada ϕ ve γ konform dönüşümleri sınır koşullarına göre, yani

$$\phi(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

ve

$$\gamma(t) = \ln\left(\frac{t}{1-t}\right)$$

şeklinde alınır. $\{u_{ij}\}$ bilinmeyen katsayıları $-M_x \leq k \leq N_x$ ve $-M_t \leq l \leq N_t$ olmak üzere, (4.5) şeklinde ifade edilen $\{S_{kl}(x, t)\}$ fonksiyonlarına göre ortogonalite kullanılarak hesaplanır. Bu amaç için ayrık Galerkin sistemi

$$\langle Lu_{m_x, m_t} - f(x, t), S_{kl} \rangle = 0, \quad -M_x \leq k \leq N_x, \quad -M_t \leq l \leq N_t \quad (4.6)$$

ile oluşturulur ve (4.6) ile verilen iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(x, t)g(x, t)W(x, t)dxdt \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki W ağırlık fonksiyonu bölgeye, sınır koşullarına ve probleme bağlı olarak seçilir. (4.3) sınır koşulları ile birlikte (4.1) ve (4.2) problemleri için W ağırlık fonksiyonu

$$W(x, t) = w(x)v(t) = \left[\frac{1}{[\phi'(x)]^{\left(\frac{\theta-1}{2}\right)}} \right] [\gamma'(t)]^{\Omega/2}$$

şeklinde seçilir. Burada θ , denklemde x değişkenine göre bulunan maksimum türev mertebesine eşittir. Denklemde t değişkenine göre bulunan maksimum türev u_t ise $\Omega = 1$ ve u_{tt} ise $\Omega = -1$ olarak alınır. O halde ele aldığımız problemler için $\Omega = -1$ ve $\theta = 2$ olarak seçmek uygun olacaktır [45].

(4.1) ve (4.2) ile verilen problemler için ayrık sistem, (4.4) yaklaşık çözümünün (4.6) eşitliğinde yerine konulması ile elde edilir. Sonuç olarak $-M_x \leq k \leq N_x, -M_t \leq l \leq N_t$ için (4.1) ve (4.2) problemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \langle u_{tt}, S_k S_l \rangle + \langle {}^C_0 D_t^\alpha u, S_k S_l \rangle &= \langle a(x) u_{xx}, S_k S_l \rangle \\ &+ \langle c(x) u, S_k S_l \rangle + \langle f(x, t), S_k S_l \rangle \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \langle u_{tt}, S_k S_l \rangle &= \langle a(x) u_{xx}, S_k S_l \rangle + \langle b(x) {}^C_0 D_x^\beta u, S_k S_l \rangle \\ &+ \langle c(x) u, S_k S_l \rangle + \langle f(x, t), S_k S_l \rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır. Bu son eşitliklerdeki terimleri hesaplamak için aşağıda verilen teoremleri kullanacağız.

Teorem 4.1 Aşağıda verilen ifadeler sağlanır.

$$\langle u_{tt}, S_k S_l \rangle \cong h_t h_x \frac{w(x_k)}{\phi'(x_k)} \sum_{j=-M_t}^{N_t} \sum_{i=0}^2 \frac{u(x_k, t_j)}{\gamma'(t_j)} \left[\frac{1}{h_t^i} \delta_{lj}^{(i)} \eta_i \right]$$

$$\langle a(x) u_{xx}, S_k S_l \rangle \cong h_x h_t \frac{v(t_l)}{\gamma'(t_l)} \sum_{i=-M_x}^{N_x} \sum_{j=0}^2 \frac{u(x_i, t_l)}{\phi'(x_i)} \left[\frac{1}{h_x^j} \delta_{ki}^{(j)} \rho_j \right]$$

$$\langle c(x) u, S_k S_l \rangle \cong h_t h_x \frac{w(x_k) c(x_k) u(x_k, t_l) v(t_l)}{\phi'(x_k) \gamma'(t_l)}$$

ve

$$\langle f(x, t), S_k S_l \rangle \cong h_t h_x \frac{w(x_k) f(x_k, t_l) v(t_l)}{\phi'(x_k) \gamma'(t_l)}$$

olup burada η_i ve ρ_j hesaplanacak fonksiyonlardır [45].

İspat Teoremin ispatı için (4.7) ile verilen iç çarpım tanımı ve kısmi integrasyon kullanacağız.

u_{tt} teriminin sinc fonksiyonları ile iç çarpımı

$$\langle u_{tt}, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 u_{tt}(x, t) S_k(x) S_l(t) w(x) v(t) dt dx$$

şeklinde yazılır. Burada u fonksiyonundan türevi kaldırmak için kısmi integrasyon kullanırsak,

$$\begin{aligned} \langle u_{tt}, S_k S_l \rangle &= \int_0^1 [u_t(x, t)(S_k S_l w v) - u(x, t)(S_k S_l w v)_t]_0^1 dx \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 u(x, t) S_k(x) w(x) [S_l(t) v(t)]_{tt} dt dx \end{aligned}$$

olarak yazılır. (4.3) ile verilen sınır koşulları

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow 0} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1} v(t) = 0$$

şeklinde olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının ilk terimi

$$\int_0^1 [u_t(x, t)(S_k S_l w v) - u(x, t)(S_k S_l w v)_t]_0^1 dx = 0$$

olur. Sonuç olarak

$$\langle u_{tt}, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 u(x, t) S_k(x) w(x) [S_l(t) v(t)]_{tt} dt dx$$

şeklinde yazılır. Burada integral içindeki türevleri hesaplayıp

$$\frac{d}{d\tau} [S_q(\tau)] = S_q^{(1)}(\tau) \chi'(\tau) \quad (4.10)$$

ve

$$\frac{d^n}{d\chi^n} [S_q(\tau)] = S_q^{(n)}(\tau), \quad 0 \leq n \leq 2 \quad (4.11)$$

notasyonlarını kullanırsak

$$\langle u_{tt}, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=0}^2 u(x, t) [S_l^{(i)} \eta_i] S_k w \, dt dx \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\eta_2 = (\gamma')^2 v$$

$$\eta_1 = \gamma'' v + 2v' \gamma'$$

ve

$$\eta_0 = v''$$

şeklindedir. (4.12) eşitliğinin sağ tarafına t değişkenine göre sinc kuadratür kuralı uygularsak ve Lemma 3.1'i kullanırsak

$$\langle u_{tt}, S_k S_l \rangle = h_t \int_0^1 S_k w \sum_{j=-M_t}^{N_t} \sum_{i=0}^2 \frac{u(x, t_j)}{\gamma'(t_j)} \left[\frac{1}{h_t^i} \delta_{lj}^{(i)} \eta_i \right] dx \quad (4.13)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.13) eşitliğinin sağ tarafına x değişkenine göre sinc kuadratür kuralı uygularsak,

$$\begin{aligned} \langle u_{tt}, S_k S_l \rangle &= h_t h_x \sum_{j=-M_t}^{N_t} \sum_{i=0}^2 \sum_{m=-M_x}^{N_x} \frac{u(x_m, t_j) w(x_m) S_k(x_m)}{\phi'(x_m)} \left[\frac{\delta_{lj}^{(i)} \eta_i}{\gamma'(t_j) h_t^i} \right] \\ &\quad + O(e^{-(\pi \sigma d M_x)^{1/2}}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (3.7) ile verilen $S_k(x)|_{x=x_m} = \delta_{km}^{(0)} = \delta_{km}$ olduğu kullanılırsa ve hata terimi silinirse

$$\langle u_{tt}, S_k S_l \rangle \cong h_t h_x \frac{w(x_k)}{\phi'(x_k)} \sum_{j=-M_t}^{N_t} \sum_{i=0}^2 \frac{u(x_k, t_j)}{\gamma'(t_j)} \left[\frac{1}{h_t^i} \delta_{lj}^{(i)} \eta_i \right]$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde u_{xx} teriminin sinc fonksiyonları ile iç çarpımı

$$\langle a(x) u_{xx}, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 a(x) u_{xx}(x, t) S_k(x) S_l(t) w(x) v(t) dx dt$$

şeklinde yazılır. Burada u fonksiyonundan türevi kaldırmak için kısmi integrasyon kullanırsak,

$$\begin{aligned} \langle a(x)u_{xx}, S_k S_l \rangle &= \int_0^1 [u_x(x, t)(a(x)S_k S_l w v) - u(x, t)(a(x)S_k S_l w v)_x]_0^1 dt \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 u(x, t)[a(x)S_k(x)w(x)]S_l(t)v(t)dxdt \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (4.3) ile verilen sınır koşulları

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 1} w(x) = 0$$

şeklinde olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının ilk terimi

$$\int_0^1 [u_x(x, t)(a(x)S_k S_l w v) - u(x, t)(a(x)S_k S_l w v)_x]_0^1 dt = 0$$

olur. Sonuç olarak

$$\langle a(x)u_{xx}, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 u(x, t)[a(x)S_k(x)w(x)]_{xx} S_l(t)v(t)dxdt$$

şeklinde yazılır. Burada integral içindeki türevleri hesaplayıp (4.10) ve (4.11) ile verilen notasyonları kullanırsak

$$\langle a(x)u_{xx}, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=0}^2 u(x, t) [S_k^{(j)} \rho_j] S_l v dt dx \quad (4.14)$$

elde edilir. Burada

$$\rho_2 = (\phi')^2 a w$$

$$\rho_1 = \phi'' a w + 2\phi'(a w' + a' w)$$

ve

$$\rho_0 = a'' w + 2a' w' + a w''$$

şeklindedir. (4.12) integraline uyguladığımız gibi sinc kuadratür kuralını (4.14) integraline de uygulayıp hata terimini sildiğimizde

$$\langle a(x)u_{xx}, S_k S_l \rangle \cong h_x h_t \frac{v(t_l)}{\gamma'(t_l)} \sum_{i=-M_x}^{N_x} \sum_{j=0}^2 \frac{u(x_i, t_l)}{\phi'(x_i)} \left[\frac{1}{h_x^j} \delta_{ki}^{(j)} \rho_j \right]$$

olarak bulunur.

$u(x, t)$ teriminin sinc fonksiyonları ile iç çarpımı

$$\langle c(x)u, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 c(x)u(x, t)S_k(x)S_l(t)w(x)v(t)dx dt$$

şeklindedir. Bu integrale sinc kuadratür kuralını uygulayıp hata terimini silersek,

$$\langle c(x)u, S_k S_l \rangle \cong h_t h_x \frac{w(x_k)c(x_k)u(x_k, t_l)v(t_l)}{\phi'(x_k)\gamma'(t_l)}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $f(x, t)$ teriminin sinc fonksiyonları ile iç çarpımı

$$\langle f, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(x, t)S_k(x)S_l(t)w(x)v(t)dx dt$$

şeklinde olup bu integrale sinc kuadratür kuralı uygulayıp hata terimini silersek,

$$\langle f(x, t), S_k S_l \rangle \cong h_t h_x \frac{w(x_k)f(x_k, t_l)v(t_l)}{\phi'(x_k)\gamma'(t_l)}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak ispatımız tamamlanmış olur [45].

Teorem 4.2 $0 < \alpha < 1$ için aşağıda verilen ifade sağlanır.

$$\langle {}^C_0 D_t^\alpha u, S_k S_l \rangle \cong \frac{-h_t h_x}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{w(x_k)}{\phi'(x_k)} \sum_{j=-M_t}^{N_t} \frac{u(x_k, t_j)}{\gamma'(t_j)} \frac{d}{dt} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - t)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \Bigg|_{t=t_j}$$

Burada $K(t) = S_l(t)v(t)$, $\xi(s) = \ln\left(\frac{s-t}{1-s}\right)$, $h_L = \pi/\sqrt{L}$ şeklindedir.

İspat ${}^C_0 D_t^\alpha u$ teriminin sinc fonksiyonlarıyla iç çarpımı

$$\langle {}^C_0 D_t^\alpha u, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 {}^C_0 D_t^\alpha u(x, t)S_k(x)S_l(t)w(x)v(t)dt dx$$

şeklinde yazılır. Burada u fonksiyonundan türevi kaldırmak için (2.7) ile verilen kesirli mertebeden kısmi integrasyon kullanırsak, $u(x, 0) = u(x, 1) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle {}^C_0D_t^\alpha u, S_k S_l \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 {}^C_0D_t^\alpha u(x, t) S_k(x) S_l(t) w(x) v(t) dt dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 u(x, t) S_k(x) w(x) {}_tD_1^\alpha (S_l(t) v(t)) dt dx
\end{aligned}$$

elde edilir. $K(t) = S_l(t)v(t)$ olmak üzere (2.19) ile verilen Riemann-Liouville kesirli türev tanımından

$${}_tD_1^\alpha K(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^1 (s-t)^{-\alpha} K(s) ds$$

yazılabilir. Bu son integral $[t, 1]$ aralığında ıraksak olduğundan bu integrali hesaplamak için (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını kullanacağız. Bu amaç için konform dönüşüm ve bu dönüşümün ters görüntüsü sırasıyla

$$\xi(s) = \ln\left(\frac{s-t}{1-s}\right)$$

ve

$$x_r = \xi^{-1}(rh_L) = \frac{e^{rh_L} + t}{1 + e^{rh_L}}$$

şeklinde verilir. O halde sinc kuadratür kuralına göre, $h_L = \frac{\pi}{\sqrt{L}}$ için

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^1 (s-t)^{-\alpha} K(s) ds &\cong -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - t)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \\
&= M(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\langle {}^C_0D_t^\alpha u, S_k S_l \rangle \cong \int_0^1 \int_0^1 u(x, t) S_k(x) w(x) M(t) dt dx$$

şeklinde yazılmış olur. Şimdi bu son integrale t değişkenine göre sinc kuadratür kuralı uygularsak,

$$\int_0^1 \int_0^1 u(x, t) S_k(x) w(x) M(t) dt dx \cong h_t \int_0^1 S_k w \sum_{j=-M_t}^{N_t} \frac{u(x, t_j) M(t_j)}{\gamma'(t_j)} dx$$

elde edilir. Benzer şekilde bu son ifadenin sağ tarafına x değişkenine göre sinc kuadratür kuralı uygularsak,

$$h_t \int_0^1 S_k w \sum_{j=-M_t}^{N_t} \frac{u(x, t_j) M(t_j)}{\gamma'(t_j)} dx \cong h_t h_x \sum_{j=-M_t}^{N_t} \sum_{m=-M_x}^{N_x} \frac{u(x_m, t_j) w(x_m) S_k(x_m) M(t_j)}{\phi'(x_m) \gamma'(t_j)}$$

olarak bulunur. Burada (3.6) ile verilen $S_k(x)|_{x=x_m} = \delta_{km}^{(0)} = \delta_{km}$ özelliği kullanılırsa

$$\langle {}^C_0 D_t^\alpha u, S_k S_l \rangle \cong h_t h_x \frac{w(x_k)}{\phi'(x_k)} \sum_{j=-M_t}^{N_t} \frac{u(x_k, t_j) M(t_j)}{\gamma'(t_j)}$$

veya açık olarak

$$\langle {}^C_0 D_t^\alpha u, S_k S_l \rangle \cong \frac{-h_t h_x}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{w(x_k)}{\phi'(x_k)} \sum_{j=-M_t}^{N_t} \frac{u(x_k, t_j)}{\gamma'(t_j)} \frac{d}{dt} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - t)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \Bigg|_{t=t_j}$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3 $0 < \beta < 1$ için aşağıda verilen ifade sağlanır.

$$\begin{aligned} & \langle b(x) {}^C_0 D_x^\beta u, S_k S_l \rangle \\ & \cong \frac{-h_x h_t}{\Gamma(1-\beta)} \frac{v(t_l)}{\gamma'(t_l)} \sum_{i=-M_x}^{N_x} \frac{u(x_i, t_l)}{\phi'(x_i)} \frac{d}{dx} \left[h_P \sum_{r=-P}^P \frac{(y_r - x)^{-\beta} R(y_r)}{\mu'(y_r)} \right] \Bigg|_{x=x_i} \end{aligned}$$

Burada, $R(x) = b(x) S_k(x) w(x)$, $\mu(s) = \ln\left(\frac{s-x}{1-s}\right)$, $h_P = \pi/\sqrt{P}$ şeklindedir.

İspat $b(x) {}^C_0 D_x^\beta u$ teriminin sinc fonksiyonlarıyla iç çarpımı

$$\langle b(x) {}^C_0 D_x^\beta u, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 b(x) {}^C_0 D_x^\beta u(x, t) S_k(x) S_l(t) w(x) v(t) dx dt$$

şeklinde yazılır. Burada u fonksiyonundan türevi kaldırmak için (2.8) ile verilen kesirli mertebeden kısmi integrasyon kullanırsak, $u(0, t) = u(1, t) = 0$ olduğundan

$$\langle b(x) {}^C_0 D_x^\beta u, S_k S_l \rangle = \int_0^1 \int_0^1 b(x) {}^C_0 D_x^\beta u(x, t) S_k(x) S_l(t) w(x) v(t) dx dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 u(x, t) S_l(t) v(t) {}_x D_1^\beta (b(x) S_k(x) w(x)) dx dt$$

elde edilir. $R(x) = b(x) S_k(x) w(x)$ olmak üzere (2.19) ile verilen Riemann-Liouville kesirli türev tanımından

$${}_x D_1^\beta R(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (s-x)^{-\beta} R(s) ds$$

yazılabilir. Bu son integral $[x, 1]$ aralığında ıraksak olduğundan bu integrali hesaplamak için (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını kullanacağız. Bu amaç için konform dönüşüm ve bu dönüşümün ters görüntüsü sırasıyla

$$\mu(s) = \ln\left(\frac{s-x}{1-s}\right)$$

ve

$$y_r = \mu^{-1}(r h_p) = \frac{e^{r h_p} + x}{1 + e^{r h_p}}$$

şeklinde verilir. O halde sinc kuadratür kuralına göre, $h_p = \frac{\pi}{\sqrt{p}}$ için

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (s-x)^{-\beta} R(s) ds &\cong -\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \left[h_p \sum_{r=-p}^p \frac{(y_r - x)^{-\beta} R(y_r)}{\mu'(y_r)} \right] \\ &= N(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\langle b(x) {}_0^C D_x^\beta u, S_k S_l \rangle \cong \int_0^1 \int_0^1 u(x, t) S_l(t) v(t) N(x) dx dt$$

şeklinde yazılmış olur. Şimdi bu son integrale x değişkenine göre sinc kuadratür kuralı uygularsak,

$$\int_0^1 \int_0^1 u(x, t) S_l(t) v(t) N(x) dx dt \cong h_x \int_0^1 S_l v \sum_{i=M_x}^{N_x} \frac{u(x_i, t) N(x_i)}{\phi'(x_i)} dt$$

elde edilir. Benzer şekilde bu son ifadenin sağ tarafına t değişkenine göre sinc kuadratür kuralı uygularsak,

$$h_x \int_0^1 S_l v \sum_{i=M_x}^{N_x} \frac{u(x_i, t) N(x_i)}{\phi'(x_i)} dt \cong h_x h_t \sum_{i=M_x}^{N_x} \sum_{n=-M_t}^{N_t} \frac{u(x_i, t_n) v(t_n) S_l(t_n) N(x_i)}{\phi'(x_i) \gamma'(t_n)}$$

olarak bulunur. Burada (3.6) ile verilen $S_l(t)|_{t=t_n} = \delta_{ln}^{(0)} = \delta_{ln}$ özelliği kullanılırsa

$$\langle b(x) {}^C_0 D_x^\beta u, S_k S_l \rangle \cong h_x h_t \frac{v(t_l)}{\gamma'(t_l)} \sum_{i=-M_x}^{N_x} \frac{u(x_i, t_l) N(x_i)}{\phi'(x_i)}$$

veya açık olarak

$$\begin{aligned} & \langle b(x) {}^C_0 D_x^\beta u, S_k S_l \rangle \\ & \cong \frac{-h_x h_t}{\Gamma(1-\beta)} \frac{v(t_l)}{\gamma'(t_l)} \sum_{i=-M_x}^{N_x} \frac{u(x_i, t_l)}{\phi'(x_i)} \frac{d}{dx} \left[h_p \sum_{r=-P}^P \frac{(y_r - x)^{-\beta} R(y_r)}{\mu'(y_r)} \right] \Bigg|_{x=x_i} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Yukarıdaki teoremlerde tanımlanan yaklaşımlar ile (4.8) ve (4.9) eşitliklerinin her bir terimi yer değiştirilir, $u(x_k, t_l)$ yerine u_{kl} yazılıp eşitliklerin her iki tarafı $h_x h_t$ ile bölünürse aşağıdaki teoremler elde edilir.

Teorem 4.4 Eğer (4.1) ve (4.3) ile verilen problemin yaklaşık çözümü (4.4) ise, o zaman $\{u_{kj}, -M_x \leq k \leq N_x, -M_t \leq j \leq N_t\}$ bilinmeyen katsayılarının hesaplanması için gerekli ayrık sinc-Galerkin sistemi

$$\begin{aligned} & \frac{w(x_k)}{\phi'(x_k)} \sum_{j=-M_t}^{N_t} \sum_{i=0}^2 \frac{u_{kj}}{\gamma'(t_j)} \left[\frac{1}{h_t^i} \delta_{lj}^{(i)} \eta_i \right] \\ & - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{w(x_k)}{\phi'(x_k)} \sum_{j=-M_t}^{N_t} \frac{u_{kj}}{\gamma'(t_j)} \frac{d}{dt} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - t)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \Bigg|_{t=t_j} \\ & = \frac{v(t_l)}{\gamma'(t_l)} \sum_{i=-M_x}^{N_x} \sum_{j=0}^2 \frac{u_{il}}{\phi'(x_i)} \left[\frac{1}{h_x^j} \delta_{ki}^{(j)} \rho_j \right] \\ & + \frac{w(x_k) c(x_k) u_{kl} v(t_l)}{\phi'(x_k) \gamma'(t_l)} + \frac{w(x_k) f(x_k, t_l) v(t_l)}{\phi'(x_k) \gamma'(t_l)} \end{aligned} \tag{4.15}$$

şeklinde verilir.

Teorem 4.5 Eğer (4.2) ve (4.3) ile verilen problemin yaklaşık çözümü (4.4) ise, o zaman $\{u_{kj}, -M_x \leq k \leq N_x, -M_t \leq j \leq N_t\}$ bilinmeyen katsayılarının hesaplanması için gerekli ayrık sinc-Galerkin sistemi

$$\begin{aligned}
& \frac{w(x_k)}{\phi'(x_k)} \sum_{j=-M_t}^{N_t} \sum_{i=0}^2 \frac{u_{kj}}{\gamma'(t_j)} \left[\frac{1}{h_t^i} \delta_{lj}^{(i)} \eta_i \right] \\
& = \frac{v(t_l)}{\gamma'(t_l)} \sum_{i=-M_x}^{N_x} \sum_{j=0}^2 \frac{u_{il}}{\phi'(x_i)} \left[\frac{1}{h_x^j} \delta_{ki}^{(j)} \rho_j \right] \\
& - \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{v(t_l)}{\gamma'(t_l)} \sum_{i=-M_x}^{N_x} \frac{u_{il}}{\phi'(x_i)} \frac{d}{dx} \left[h_p \sum_{r=-P}^P \frac{(y_r - x)^{-\beta} R(y_r)}{\mu'(y_r)} \right] \Bigg|_{x=x_i} \\
& + \frac{w(x_k)c(x_k)u_{kl}v(t_l)}{\phi'(x_k)\gamma'(t_l)} + \frac{w(x_k)f(x_k, t_l)v(t_l)}{\phi'(x_k)\gamma'(t_l)}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

şeklinde verilir.

Şimdi yukarıda verilen sistemleri matris şeklinde ifade etmek için bazı notasyonlar tanımlayalım. $I_{m_x}^{(P)}$, $P = 0, 1, 2$ için, jk . elemanı (3.7)-(3.8) eşitlikleri ile verilen $\delta_{jk}^{(P)}$ olan $m_x \times m_x$ tipinde matris, $D(g_x)$ köşegen elemanları

$$[g(x_{-M_x}), g(x_{-M_x+1}), \dots, g(x_0), \dots, g(x_{N_x})]^T$$

şeklinde olan $m_x \times m_x$ tipinde bir diagonal matris olsun. Burada $I_{m_t}^{(P)}$ ve $D(g_t)$ benzer şekilde tanımlanabilir. Verilen notasyonlarla (4.15) ve (4.16) sistemleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
& D\left(\frac{1}{\phi'}\right) D(w) U D(v) \left[\sum_{j=0}^2 \frac{1}{h_t^j} I_{m_t}^{(j)} D\left(\frac{\eta_j}{\gamma' v}\right) \right]^t + D\left(\frac{1}{\phi'}\right) D(w) U D(v) \left[A D\left(\frac{1}{\gamma' v}\right) \right]^t \\
& - \left[\sum_{i=0}^2 \frac{1}{h_x^i} I_{m_x}^{(i)} D\left(\frac{\rho_i}{(\phi')^2 w}\right) \right] D(\phi') D(w) U D\left(\frac{v}{\gamma'}\right) - D\left(\frac{w}{\phi'}\right) D(c) U D\left(\frac{v}{\gamma'}\right) \\
& = D\left(\frac{w}{\phi'}\right) F D\left(\frac{v}{\gamma'}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& D\left(\frac{1}{\phi'}\right) D(w) U D(v) \left[\sum_{j=0}^2 \frac{1}{h_t^j} I_{m_t}^{(j)} D\left(\frac{\eta_j}{\gamma' v}\right) \right]^t \\
& - \left[\sum_{i=0}^2 \frac{1}{h_x^i} I_{m_x}^{(i)} D\left(\frac{\rho_i}{(\phi')^2 w}\right) \right] D(\phi') D(w) U D\left(\frac{v}{\gamma'}\right) \\
& - \left[B D\left(\frac{1}{(\phi')^2 w}\right) \right] D(\phi') D(w) U D\left(\frac{v}{\gamma'}\right) - D\left(\frac{w}{\phi'}\right) D(c) U D\left(\frac{v}{\gamma'}\right) = D\left(\frac{w}{\phi'}\right) F D\left(\frac{v}{\gamma'}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $[\]^t, [\]$ matrisinin transpozunu ifade eder ve

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - t)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \Bigg|_{t=t_j} \\
B &= -\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \left[h_P \sum_{r=-P}^P \frac{(y_r - x)^{-\beta} R(y_r)}{\mu'(y_r)} \right] \Bigg|_{x=x_i}
\end{aligned}$$

şeklindeir. Bu iki sistemin her bir terimi soldan $D(\phi')$ ile sağdan $D(\gamma')$ ile çarpılırsa

$$\Phi X + X \Psi = G \tag{4.17}$$

eşitlik sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
A1 &= D(\phi') \left[\sum_{i=0}^2 \frac{1}{h_x^i} I_{m_x}^{(i)} D\left(\frac{\rho_i}{(\phi')^2 w}\right) \right] D(\phi') \\
A2 &= D(\phi') \left[B D\left(\frac{1}{(\phi')^2 w}\right) \right] D(\phi') \\
B1 &= \left[\sum_{j=0}^2 \frac{1}{h_t^j} I_{m_t}^{(j)} D\left(\frac{\eta_j}{\gamma' v}\right) \right]^t D(\gamma') \\
B2 &= \left[A D\left(\frac{1}{\gamma' v}\right) \right]^t D(\gamma') \\
C &= D(c)
\end{aligned}$$

olmak üzere (4.15) için

$$\Phi = -A1 - C$$

$$\Psi = B1 + B2$$

ve (4.16) için

$$\Phi = -A1 - A2 - C$$

$$\Psi = B1$$

şeklindedir. Ayrıca

$$G = D(w)FD(v)$$

ve

$$X = D(w)UD(v) \tag{4.18}$$

dir.

(4.17) eşitliğinde verilen Φ, Ψ, X ve G matrisleri sırası ile $m_x \times m_x$, $m_t \times m_t$, $m_x \times m_t$ ve $m_x \times m_t$ tipindedir. Ayrıca U ve F matrisleri $m_x \times m_t$ tipinde olup bu matrislerin kl . elemanları sırası ile u_{kl} ve $f(x_k, t_l) = f\left(\frac{e^{kh}}{1+e^{kh}}, \frac{e^{lh}}{1+e^{lh}}\right)$ ile verilir [45].

(4.4) ile verilen yaklaşık çözüm, (4.15) sisteminin X için çözülüp, elde edilen X matrisinin (4.18) sisteminde kullanılmasıyla hesaplanır. (4.17) sisteminin X için çözüm yöntemi aşağıdaki başlık altında incelenmiştir.

4.2 Ayırık Sistemin Çözümü

Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde sık sık ortaya çıkan

$$AX + XB = C \tag{4.19}$$

özel sistemi denklemin her bir tarafının birleştirilmesi ile çözülebilir. Bunun için aşağıdaki tanım ve teoremler gereklidir.

Tanım 4.1 $B = (b_{ij}), 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n$, matrisinin birleşimi

$$vec(B) = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{in} \end{pmatrix}$$

şeklinde $m \times n \times 1$ tipinde vektördür. Burada b_{ik} B matrisinin k . sütunudur [46].

Tanım 4.2 $A = [a_{ij}], (m \times n)$ ve $B = [b_{ij}] (p \times q)$ tipinde iki matris olsun. Bu iki matrisin kronecker veya tensör çarpımı $(mp \times nq)$ tipindedir ve

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır [46].

Teorem 4.6 $A, B, X = [x_{ij}]$ ve $C = [c_{ij}]$ sırası ile $m \times m, n \times n, m \times n$ ve $m \times n$ tipinde matrisler olsun. Ayrıca x ve c

$$x = vec(X) = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2}, x_{13}, \dots, x_{mn})^T$$

ve

$$c = vec(C) = (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1}, c_{12}, c_{22}, \dots, c_{m2}, c_{13}, \dots, c_{mn})^T$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$AXB = C$$

denklemin sistemi

$$(B^T \otimes A)x = c$$

matris-vektör eşitliği şeklinde de yazılabilir [46].

Sonuç olarak A ve B matrislerinin özdeğerlerini sırasıyla α_i ve β_j ile gösterirsek, $A \otimes B$ kronecker çarpımının özdeğerleri $\alpha_i \beta_j$ dir. Ayrıca $I_n \otimes A + B \otimes I_m$ ifadesi de $\alpha_i + \beta_j$ özdeğerlerine sahiptir.

Bu teknik (4.19) denkleminde uygulanabilir. İlk olarak (4.19) denklemini

$$(I_n \otimes A + B^T \otimes I_m) \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$$

şeklinde yeniden yazalım. Bu eşitliğin

$$\text{vec}(X) = (I_n \otimes A + B^T \otimes I_m)^{-1} \text{vec}(C)$$

tek çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart

$$(I_n \otimes A + B^T \otimes I_m)$$

ifadesinin nonsingüler olmasıdır. X çözümü ilk tanım kullanılarak bulunabilir.

Sonuç olarak (4.19) denkleminin tüm C ler için tek bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşulun $\alpha_i + \beta_j \neq 0$ olduğunu görmek oldukça kolaydır. Burada α_i , A matrisinin β_j de B matrisinin özdeğerleridir.

Özel olarak, eğer A, B, X ve C sırasıyla $m_x \times m_x, m_t \times m_t, m_x \times m_t$ ve $m_x \times m_t$ boyutunda matrisler ise, o zaman $AX + XB^T = C$ sistemi

$$(I_{m_t} \otimes A + B \otimes I_{m_x}) \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$$

şeklinde yazılabilir. Burada I_{m_x} ve I_{m_t} sırasıyla m_x ve m_t mertebeden birim matrisler $\text{vec}(X)$ ve $\text{vec}(C)$ ise sırasıyla X ve C matrisinin sütunlarının birleşimleridir. X elde edilir edilmez, (4.18) sistemi yardımıyla U matrisini hesaplayabiliriz [46].

4.3 Uygulamalar

Bütün problemlerde $d = \pi/2$, $\alpha = \beta = 1/2$, $M_x = M_t$ ve $h_x = h_t = \sqrt{\pi d / \alpha M_x}$ olarak alınmıştır.

Problem 4.1

$$u_{tt} + {}^C_0 D_t^{0.5} u = u_{xx} + f(x, t)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0$$

kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemini düşünelim. Bu problemin

$$\begin{aligned}
f(x,t) = & -2(1-t)^3 t(1-x) + 4(1-t)^3 t x \\
& -6(1-t)^2(1-x)x^2 + 6(1-t)t(1-x)x^2 \\
& + 0.56419 t^{0.5} \left(-2 + t(8 + t(-9.6 + 3.65714 t)) \right) (-1+x)x^2
\end{aligned}$$

için tam çözümü

$$u(x,t) = x^2(1-x)t(1-t)^3$$

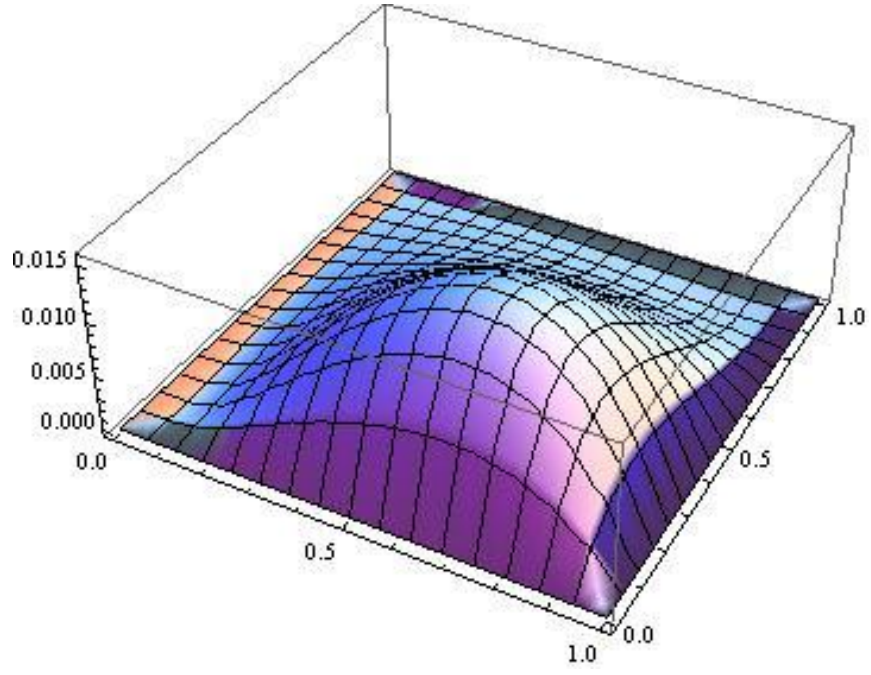
olup sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilen numerik sonuçlar Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 ile verilmiştir. Ayrıca yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 4.1, Şekil 4.2 ile tam çözüm grafiği ise Şekil 4.3 ile verilmiştir.

Çizelge 4.9 Problem 4.1 için ($L = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) numerik sonuçlar

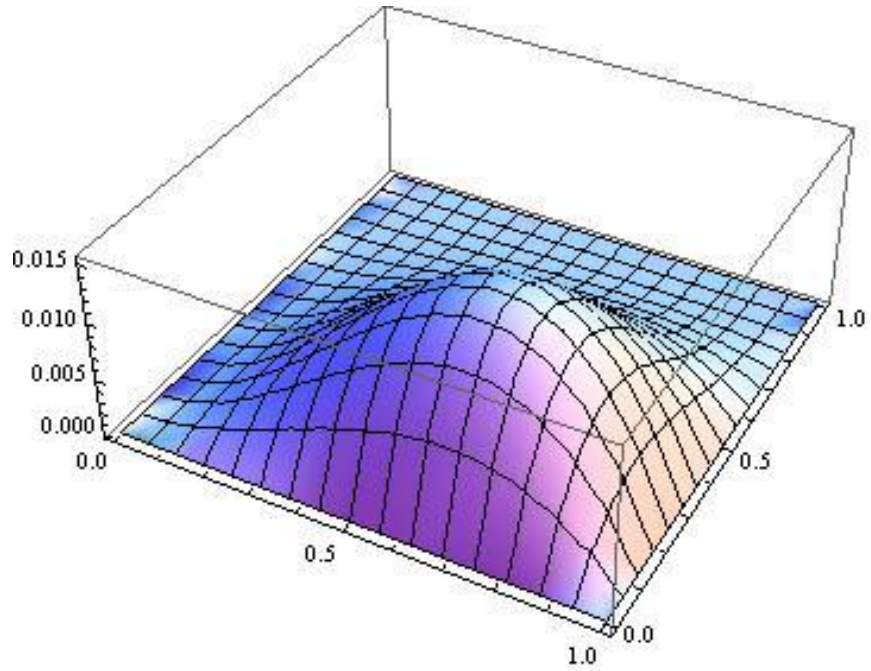
t	x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0.03	0.3	0.00172495	0.00167299	0.000051966
	0.6	0.00394275	0.00368821	0.000254542
	0.9	0.00221780	0.00211435	0.000103449
0.06	0.3	0.00313961	0.00329048	0.000150877
	0.6	0.00717625	0.00741887	0.000242621
	0.9	0.00403664	0.00421269	0.000176047
0.09	0.3	0.00427275	0.00460605	0.000333305
	0.6	0.00976628	0.01045470	0.000688409
	0.9	0.00549353	0.00593304	0.000439506

Çizelge 4.10 Problem 4.1 için ($L = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) numerik sonuçlar

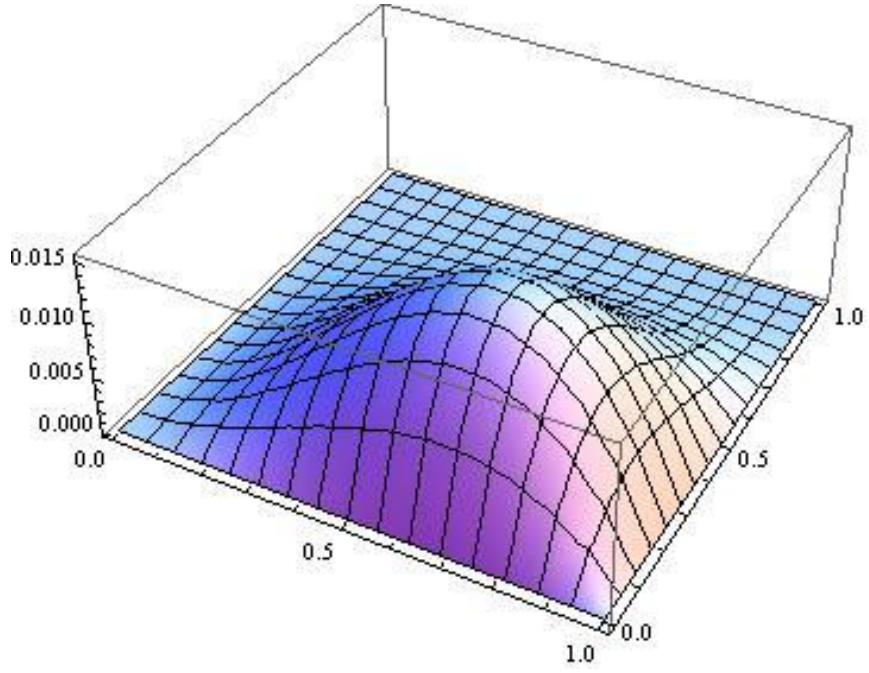
t	x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0.03	0.3	0.00172495	0.00172374	$1.21416 \cdot 10^{-6}$
	0.6	0.00394275	0.00394169	$1.05625 \cdot 10^{-6}$
	0.9	0.00221780	0.00221781	$1.47623 \cdot 10^{-8}$
0.06	0.3	0.00313961	0.00313724	$2.36502 \cdot 10^{-6}$
	0.6	0.00717625	0.00717425	$1.99762 \cdot 10^{-6}$
	0.9	0.00403664	0.00403671	$7.14455 \cdot 10^{-8}$
0.09	0.3	0.00427275	0.00426929	$3.46038 \cdot 10^{-6}$
	0.6	0.00976628	0.00976343	$2.84988 \cdot 10^{-6}$
	0.9	0.00549353	0.00549367	$1.32895 \cdot 10^{-7}$



Şekil 4.11 Problem 4.1 için ($L = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.12 Problem 4.1 için ($L = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.13 Problem 4.1 için tam çözüm grafiği

Problem 4.2

$$u_{tt} = u_{xx} + {}^C_0D_x^{0.7} u + f(x, t)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0$$

kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemini düşünelim. Bu problemin

$$\begin{aligned} f(x, t) = & -2(1-t)^2 t^3 (1-x) + 4(1-t)^2 t^3 x + \\ & 6(1-t)^2 t(1-x)x^2 - 12(1-t)t^2(1-x)x^2 + \\ & 2t^3(1-x)x^2 + 0.334273(-1+t)^2 t^3 x^{1.3}(-5.12821 + 6.68896x) \end{aligned}$$

için tam çözümü

$$u(x, t) = x^2(1-x)t^3(1-t)^2$$

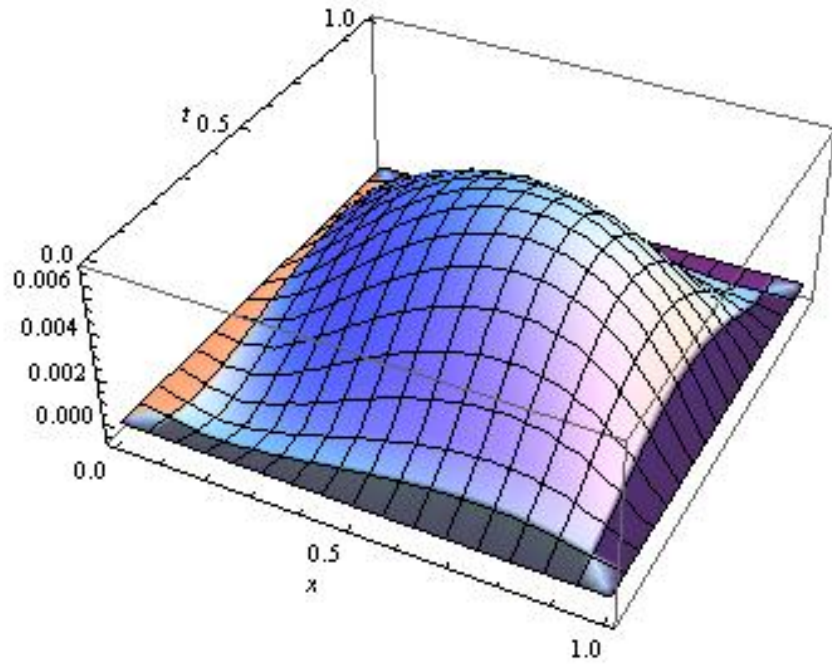
olup sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilen numerik sonuçlar Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.4 ile verilmiştir. Ayrıca yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 4.4, Şekil 4.5 ile tam çözüm grafiği ise Şekil 4.6 ile verilmiştir.

Çizelge 4.11 Problem 4.2 için ($P = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) nümerik sonuçlar

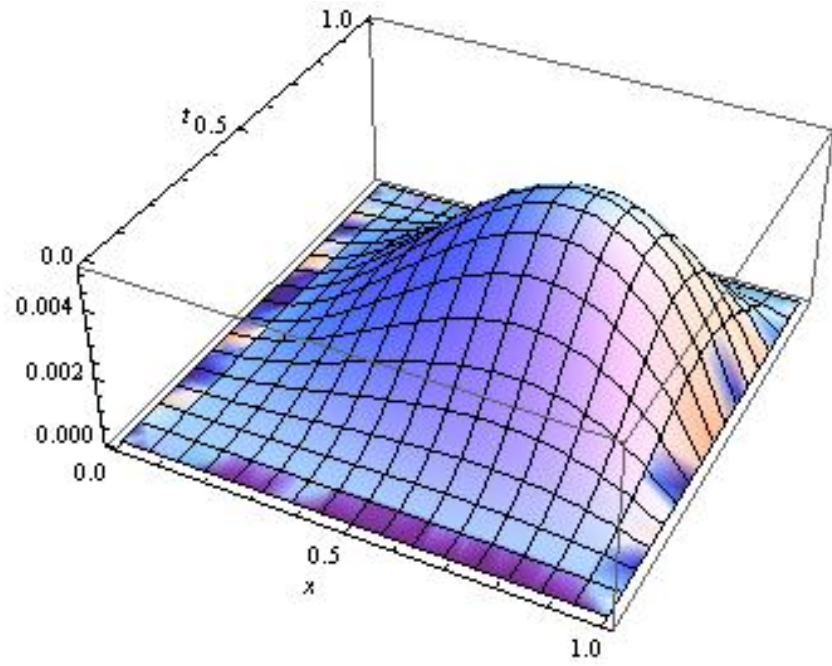
t	x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0.03	0.3	0.00000160	0.000069824	0.000068223
	0.6	0.00000365	0.000557026	0.000553368
	0.9	0.00000205	0.000286490	0.000284433
0.06	0.3	0.00001202	-0.000160475	0.000172499
	0.6	0.00002748	0.000688434	0.000660950
	0.9	0.00001545	0.000405155	0.000389695
0.09	0.3	0.00003803	-0.000317899	0.000355931
	0.6	0.00008693	0.000879725	0.000792795
	0.9	0.00004889	0.000577303	0.000528404

Çizelge 4.12 Problem 4.2 için ($P = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) nümerik sonuçlar

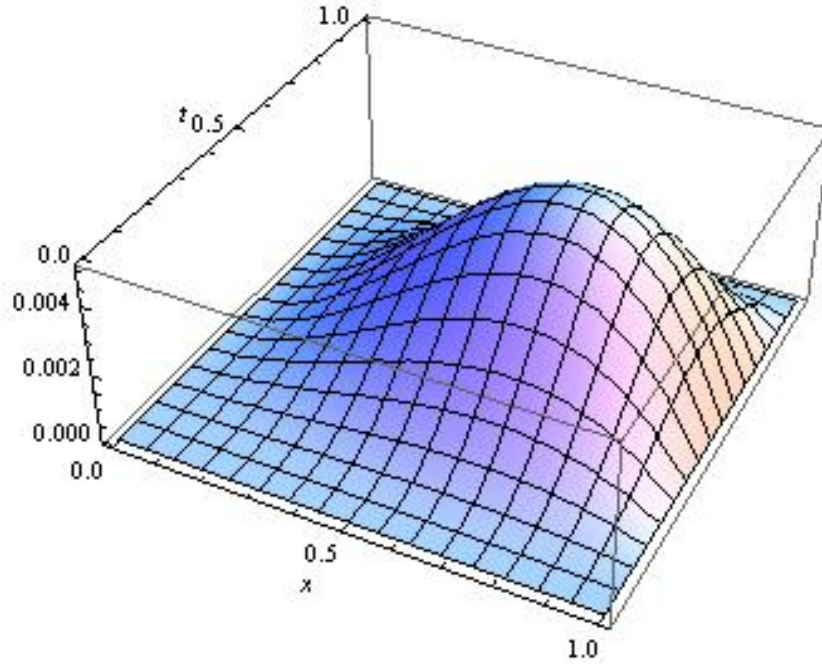
t	x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0.03	0.3	0.00000160	0.00000376	$2.16753 \cdot 10^{-6}$
	0.6	0.00000365	0.00001237	$8.71244 \cdot 10^{-6}$
	0.9	0.00000205	0.00000667	$4.61338 \cdot 10^{-6}$
0.06	0.3	0.00001202	0.00001645	$4.43271 \cdot 10^{-6}$
	0.6	0.00002748	0.00004476	$1.72861 \cdot 10^{-5}$
	0.9	0.00001545	0.00002455	$9.09322 \cdot 10^{-6}$
0.09	0.3	0.00003803	0.00004497	$6.93846 \cdot 10^{-6}$
	0.6	0.00008693	0.00011262	$2.56904 \cdot 10^{-5}$
	0.9	0.00004889	0.00006228	$1.33882 \cdot 10^{-5}$



Şekil 4.14 Problem 4.2 için ($L = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.15 Problem 4.2 için ($L = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.16 Problem 4.2 için tam çözüm grafiği

Problem 4.3

$$u_{tt} + {}^C D_t^{0.7} u = (x^2 + 1)u_{xx} + e^x u + f(x, t)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0$$

kesirli mertebeden değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemini düşünelim. Bu problemin

$$f(x, t) = -6(1 - t)^2 \sin(\pi x) + 6(1 - t)t \sin(\pi x)$$

$$-e^x (1 - t)^3 t \sin(\pi x) - 0.334273 t^{0.3}$$

$$\times \left(-3.33333 + t(15.3846 + t(-20.0669 + 8.10783 t)) \right) \sin(\pi x)$$

$$+\pi^2(1 - t)^3 t(1 + x^2) \sin(\pi x)$$

için tam çözümü

$$u(x, t) = \sin(\pi x)t(1 - t)^3$$

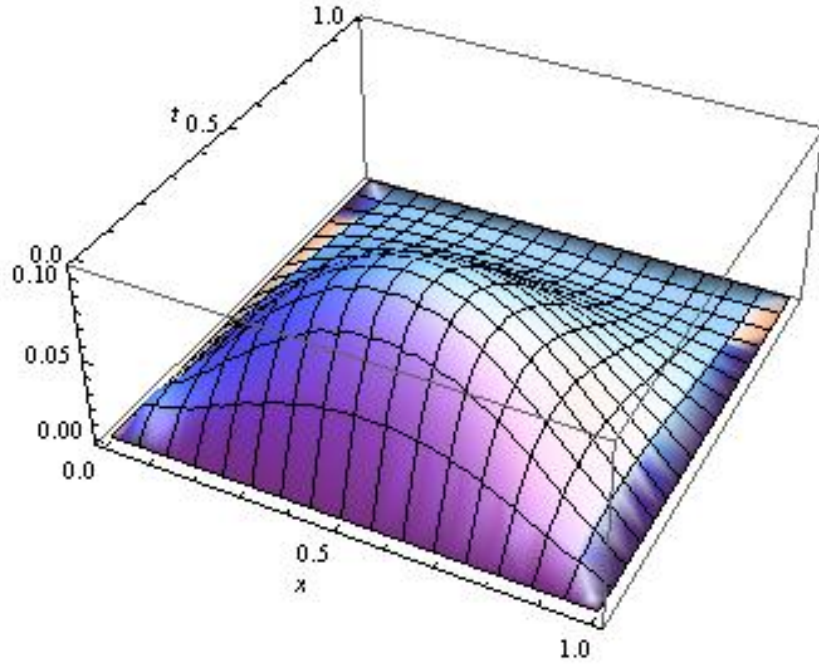
olup sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilen numerik sonuçlar Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6 ile verilmiştir. Ayrıca yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 4.7, Şekil 4.8 ile tam çözüm grafiği ise Şekil 4.9 ile verilmiştir.

Çizelge 4.13 Problem 4.3 için ($L = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) nümerik sonuçlar

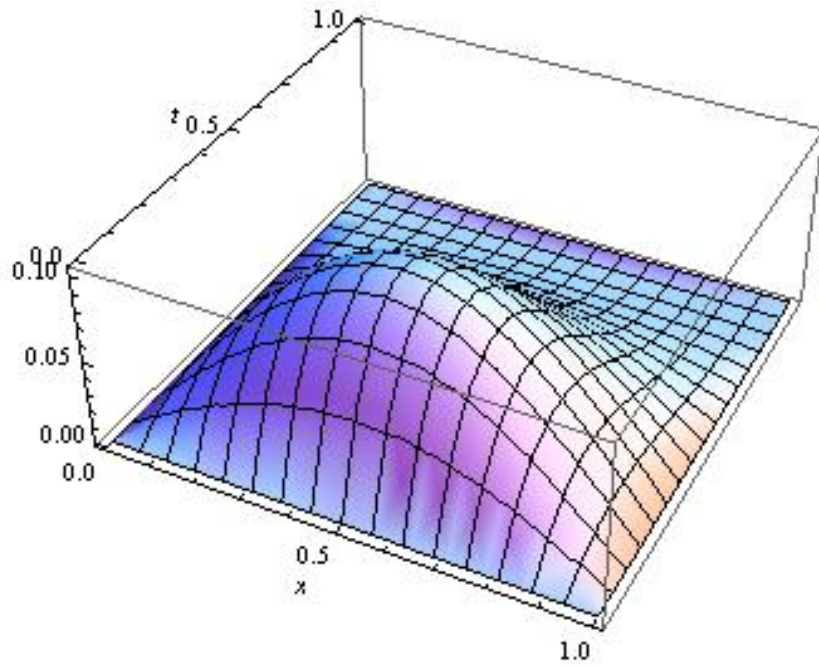
t	x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0.03	0.3	0.0221510	0.0180712	0.00407981
	0.6	0.0260401	0.0253668	0.00067328
	0.9	0.0084609	0.0065332	0.00192773
0.06	0.3	0.0403174	0.0380162	0.00230119
	0.6	0.0473959	0.0497706	0.00237464
	0.9	0.0153999	0.0135274	0.00187243
0.09	0.3	0.0548687	0.0545413	0.00032734
	0.6	0.0645020	0.0694785	0.00497649
	0.9	0.0209580	0.0193546	0.00160331

Çizelge 4.14 Problem 4.3 için ($L = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) nümerik sonuçlar

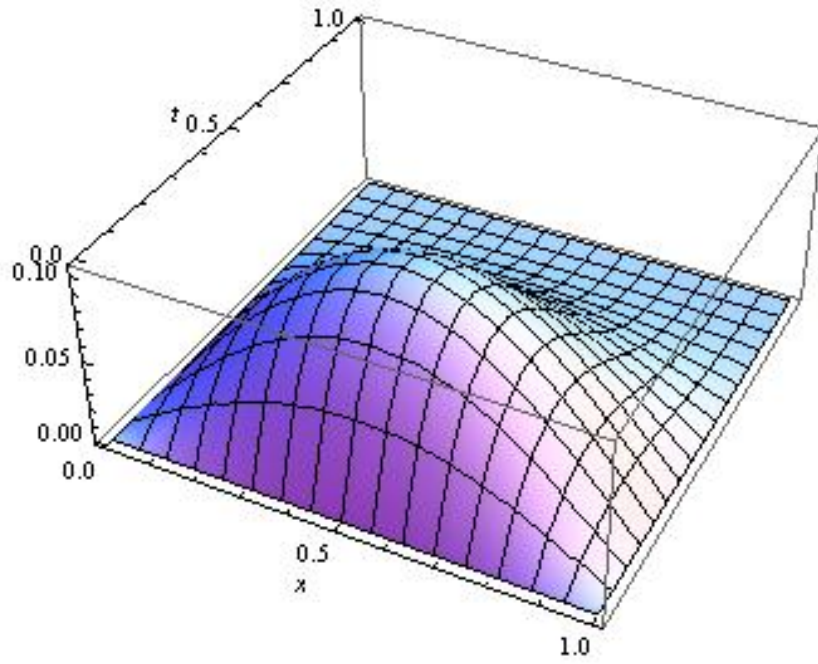
t	x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0.03	0.3	0.0221510	0.0220291	0.000121900
	0.6	0.0260401	0.0259047	0.000135378
	0.9	0.0084609	0.0084190	0.000041911
0.06	0.3	0.0403174	0.0400850	0.000232442
	0.6	0.0473959	0.0471384	0.000257491
	0.9	0.0153999	0.0153203	0.000079554
0.09	0.3	0.0548687	0.0545364	0.000332285
	0.6	0.0645020	0.0641347	0.000367231
	0.9	0.0209580	0.0208447	0.000113224



Şekil 4.17 Problem 4.3 için ($L = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.18 Problem 4.3 için ($L = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.19 Problem 4.3 için tam çözüm grafiği

Problem 4.4

$$u_{tt} = e^x u_{xx} + (x^2 + 1) {}^C_0 D_x^{0.3} u - \frac{1}{x+1} u + f(x, t)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0$$

kesirli mertebeden değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemini düşünelim. Bu problemin

$$\begin{aligned} f(x, t) = & -\pi^2(1-x)x^2 \sin(\pi t) + \frac{(1-x)x^2 \sin(\pi t)}{1+x} \\ & - 0.770383(1+x^2)(1.68067x^{1.7} - 1.86741x^{2.7}) \sin(\pi t) \\ & - e^x(2(1-x) \sin(\pi t) - 4x \sin(\pi t)) \end{aligned}$$

için tam çözümü

$$u(x, t) = x^2(1-x) \sin(\pi t)$$

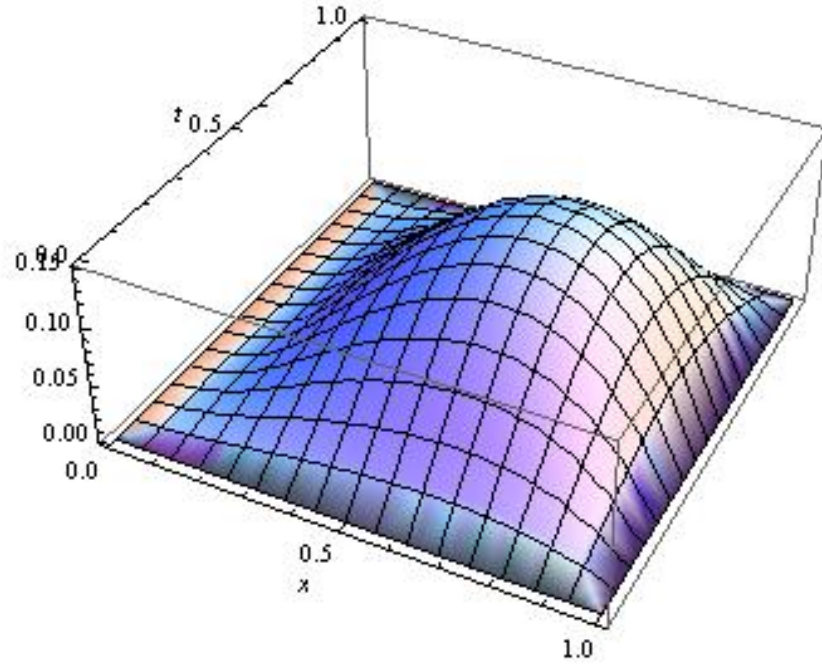
olup sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 4.7 ve Çizelge 4.8 ile verilmiştir. Ayrıca yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 4.10, Şekil 4.11 ile tam çözüm grafiği ise Şekil 4.12 ile verilmiştir.

Çizelge 4.15 Problem 4.4 için ($P = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) nümerik sonuçlar

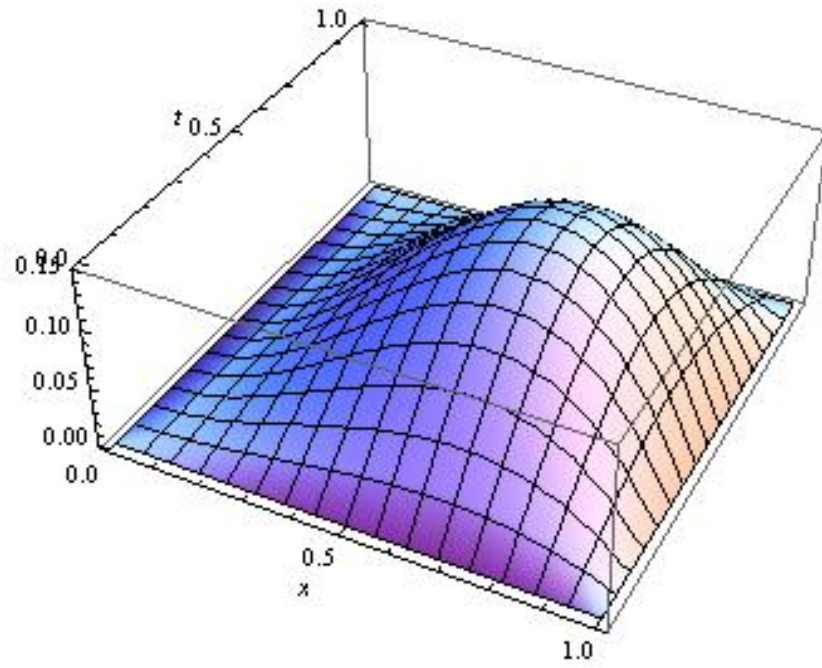
t	x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0.03	0.3	0.0059288	0.0071562	0.00122741
	0.6	0.0135516	0.0149881	0.00143653
	0.9	0.0076227	0.0083725	0.00074978
0.06	0.3	0.0118050	0.0131991	0.00139409
	0.6	0.0269829	0.0254147	0.00156823
	0.9	0.0151779	0.0145261	0.00065176
0.09	0.3	0.0175764	0.0193179	0.00174151
	0.6	0.0401747	0.0362484	0.00392631
	0.9	0.0225983	0.0208906	0.00170767

Çizelge 4.16 Problem 4.4 için ($P = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) nümerik sonuçlar

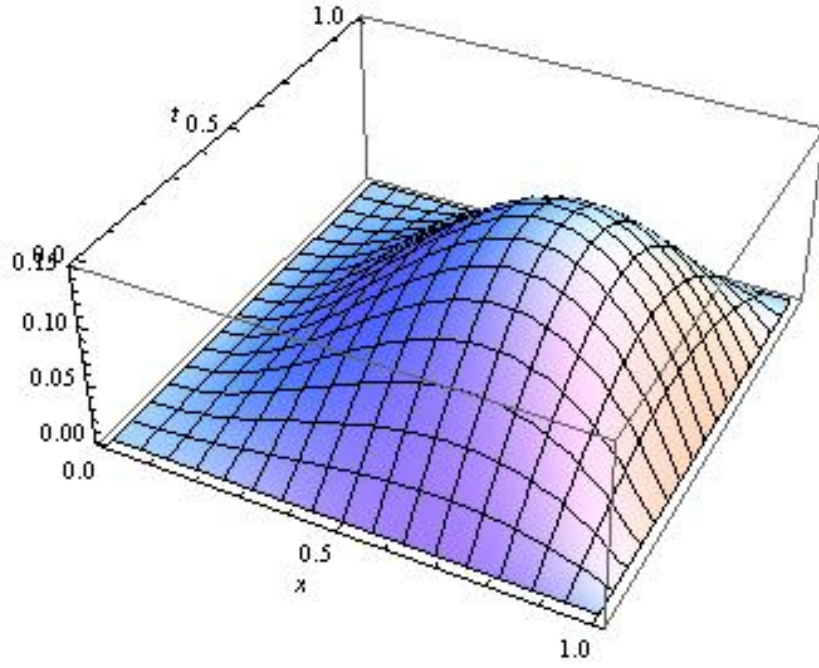
t	x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0.03	0.3	0.0059288	0.0059287	$1.16151 \cdot 10^{-7}$
	0.6	0.0135516	0.0135515	$1.41292 \cdot 10^{-7}$
	0.9	0.0076227	0.0076227	$1.58382 \cdot 10^{-8}$
0.06	0.3	0.0118050	0.0118048	$2.68162 \cdot 10^{-7}$
	0.6	0.0269829	0.0269826	$3.57381 \cdot 10^{-7}$
	0.9	0.0151779	0.0151778	$7.75388 \cdot 10^{-8}$
0.09	0.3	0.0175764	0.0175761	$3.24333 \cdot 10^{-7}$
	0.6	0.0401747	0.0401744	$3.45727 \cdot 10^{-7}$
	0.9	0.0225983	0.0225983	$1.68470 \cdot 10^{-8}$



Şekil 4.20 Problem 4.4 için ($L = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.21 Problem 4.4 için ($L = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.22 Problem 4.4 için tam çözüm grafiği

Problem 4.5

$$\frac{\partial^\gamma u(x,t)}{\partial t^\gamma} = -a(x) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + b(x) \frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta} + f(x,t)$$

$$0 < \gamma \leq 2, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = u(x,1) = 0$$

kesirli konveksiyon-difüzyon denklemini düşünelim [47]. Burada $\gamma = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 0.35$ alırsak denklem

$$u_{tt} = -a(x)u_{xx} + b(x){}_0^C D_x^{0.35} u + f(x,t)$$

şeklinde yazılır. Özel olarak $a(x) = \Gamma(2.35)\Gamma(2.65)x^{0.35}$, $b(x) = \Gamma(0.7)\Gamma(1)x^2$ alınırsa

$$f(x,t) = (2\pi x^{1.7} - x^2)t^{-1}E_{2,0}(-(2\pi t)^2)$$

$$+ \{\Gamma(2.7)(\Gamma(2.65) - \Gamma(1))x^{1.7} + \Gamma(3)(\Gamma(0.7) - \Gamma(2.35))x^2\}\sin(2\pi t)$$

için problemin tam çözümü

$$u(x, t) = (x^{1.7} - x^2)\sin(2\pi t)$$

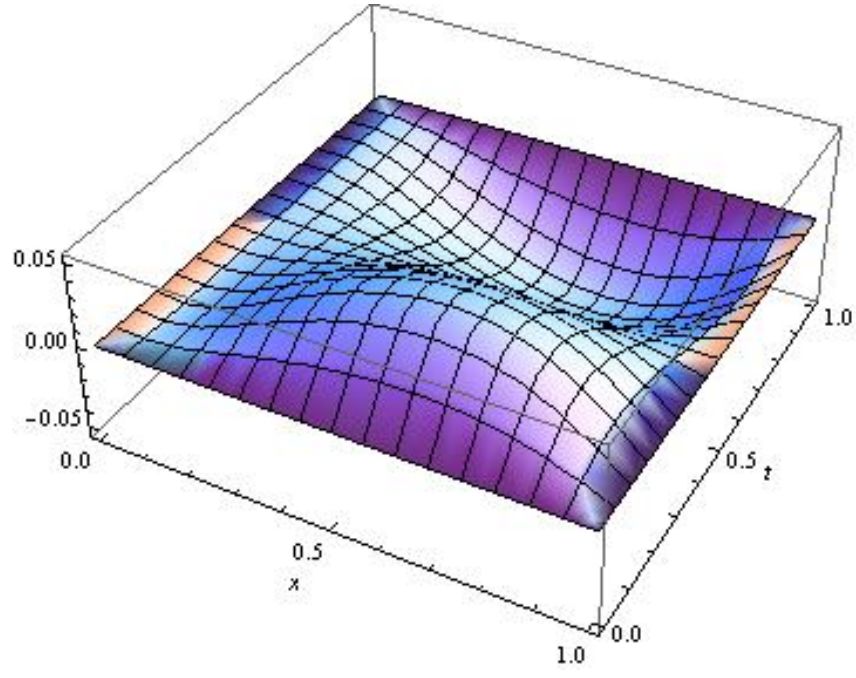
olup sinc-Galerkin yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar çizelge 4.9 ve çizelge 4.10 ile verilmiştir. Ayrıca yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 4.13, Şekil 4.14 ile tam çözüm grafiği ise Şekil 4.15 ile verilmiştir. Karşılaştırma amacıyla problemin Haar Wavelet yöntemi ile elde edilen tam ve yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 4.16 ile hata grafiği ise Şekil 4.17 ile gösterilmiştir.

Çizelge 4.17 Problem 4.5 için ($P = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) nümerik sonuçlar

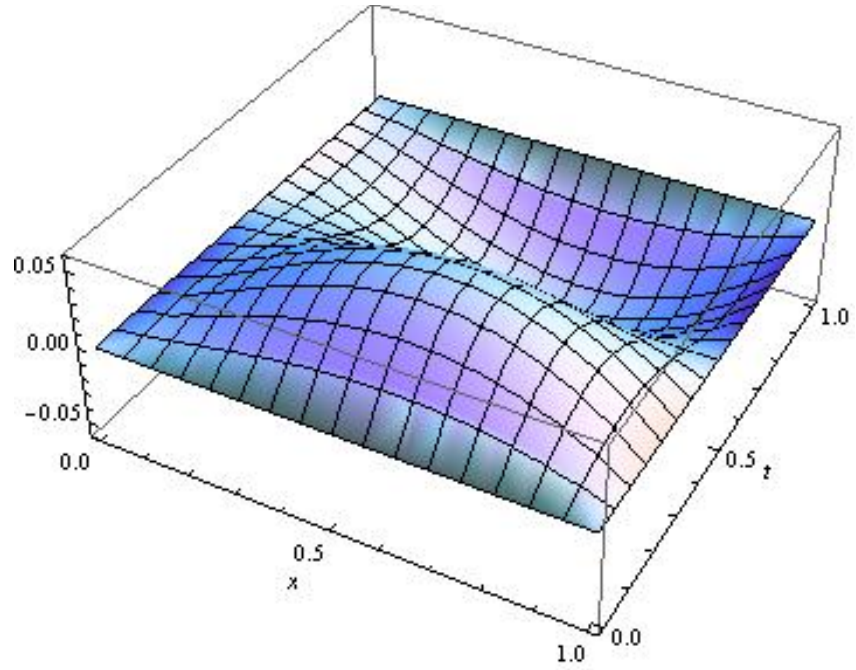
t	x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0.03	0.3	0.0073366	0.0043780	0.00295855
	0.6	0.0111718	0.0092590	0.00191284
	0.9	0.0048740	0.0045355	0.00033852
0.06	0.3	0.0144134	0.0107858	0.00362752
	0.6	0.0219479	0.0228301	0.00088218
	0.9	0.0095754	0.0110942	0.00151873
0.09	0.3	0.0209795	0.0167664	0.00421307
	0.6	0.0319465	0.0354700	0.00352348
	0.9	0.0139377	0.0172001	0.00326239

Çizelge 4.18 Problem 4.5 için ($P = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) nümerik sonuçlar

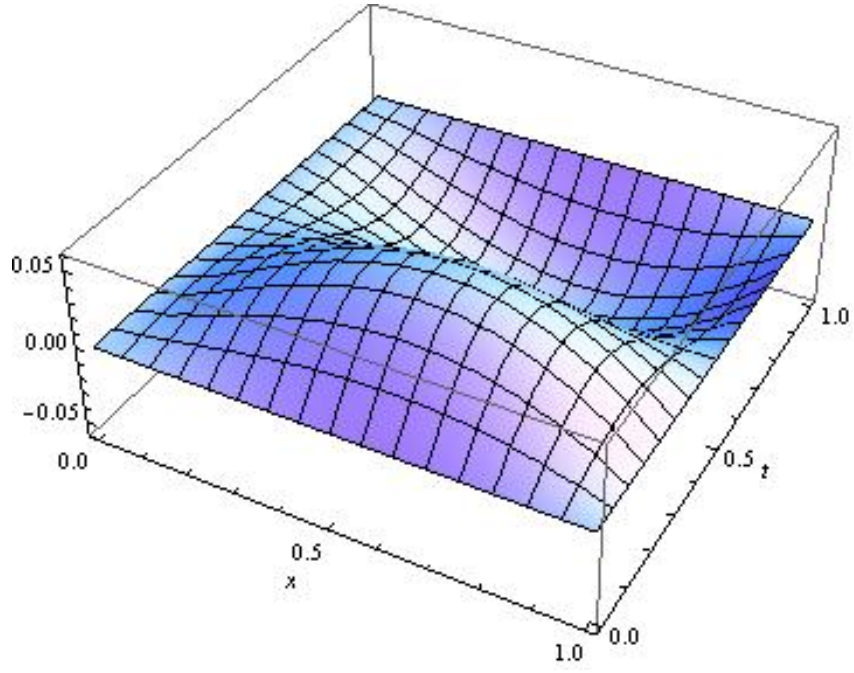
t	x	Tam Çözüm	Nüm. Çöz.	Hata
0.03	0.3	0.0073366	0.0073365	$6.80615 \cdot 10^{-8}$
	0.6	0.0111718	0.0111718	$2.45596 \cdot 10^{-8}$
	0.9	0.0048740	0.0048740	$1.74662 \cdot 10^{-8}$
0.06	0.3	0.0144134	0.0144139	$5.33686 \cdot 10^{-7}$
	0.6	0.0219479	0.0219489	$9.67538 \cdot 10^{-7}$
	0.9	0.0095754	0.0095759	$4.80610 \cdot 10^{-7}$
0.09	0.3	0.0209795	0.0209786	$8.62732 \cdot 10^{-7}$
	0.6	0.0319465	0.0319454	$1.08969 \cdot 10^{-6}$
	0.9	0.0139377	0.0139373	$3.85036 \cdot 10^{-7}$



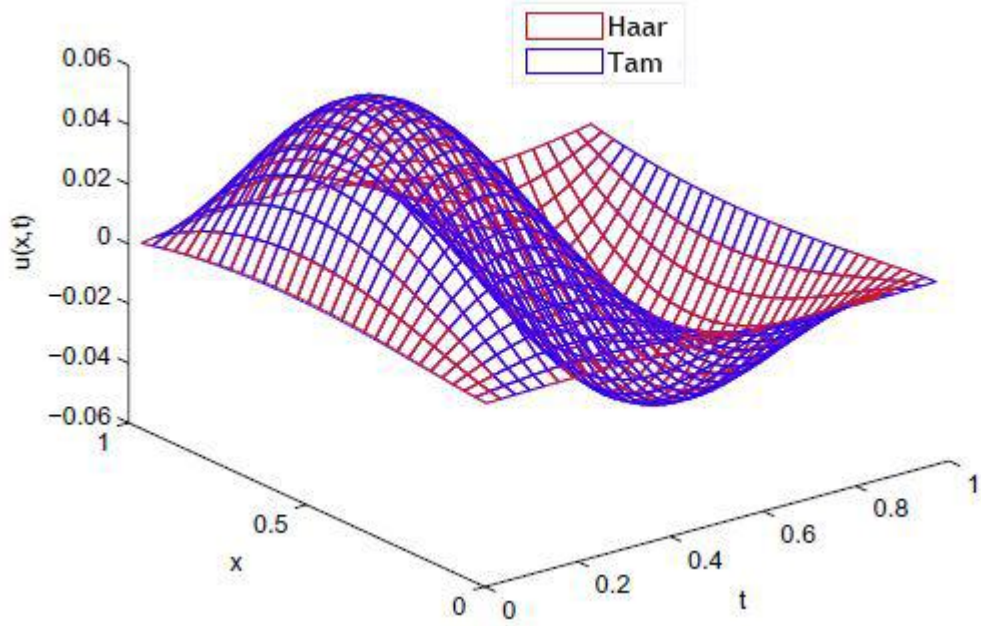
Şekil 4.23 Problem 4.5 için ($L = 3, M_x = 5, N_x = 5, M_t = 5, N_t = 3$) yaklaşık çözüm grafiği



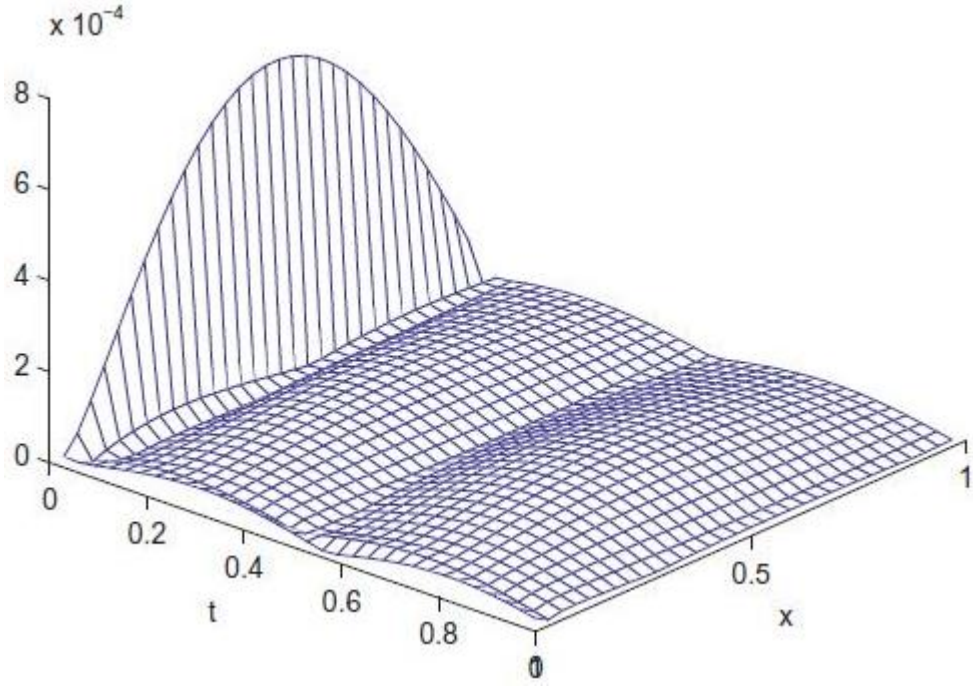
Şekil 4.24 Problem 4.5 için ($L = 20, M_x = 40, N_x = 40, M_t = 40, N_t = 30$) yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.25 Problem 4.5 için tam çözüm grafiği



Şekil 4.26 Problem 4.5 için ($J = 5, \alpha = 2, \beta = 0.35, \gamma = 0.5$) Haar Wavelet yöntemi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ve tam çözüm grafiği [47]



Şekil 4.27 Problem 4.5 için ($J = 5, \alpha = 2, \beta = 0.35, \gamma = 0.5$) Haar Wavelet yöntemi kullanılarak elde edilen hata grafiği [47]

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde sinc-Galerkin yönteminin kesirli mertebeden lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması ele alınmıştır. Bu amaçla tezin birinci kısmında kesirli mertebeden lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerine ve sinc-Galerkin yöntemine dair genel literatür taraması sunulmuştur. Literatür taramasından da anlaşılacağı üzere, kesirli mertebeden lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini sinc-Galerkin yöntemi kullanarak ele alan çalışmaya rastlanmamıştır. Tezin ikinci kısmında, kesirli mertebeden türevin tanımı ve bazı ön bilgiler ifade edilmiştir. Daha sonra da sinc-Galerkin yöntemi ve yöntemin kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanması için gerekli teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Tezin üçüncü kısmında, tezin literatüre orijinal katkısı olarak, sinc-Galerkin yöntemi kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Tezin sonraki kısmında, tezin literatüre orijinal katkısı olarak, kesirli mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde sinc-Galerkin yöntemi kullanılmıştır ve çeşitli uygulamalara yer verilmiştir. Tezin üçüncü ve dördüncü kısmında bulunan sonuçlar diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla grafiksel ve sayısal olarak karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalardan sinc-Galerkin yönteminin kesirli mertebeden lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmede çok etkili bir yöntem olduğu görülmektedir. Tezin son kısmında da çalışmaya dair bazı sonuçlar ve öneriler verilmektedir.

Gelecekteki çalışmalarda sinc-Galerkin yönteminin, kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünü elde etmede kullanılabileceği düşünülmektedir. Yine aynı şekilde, sinc-Galerkin yönteminin kesirli mertebeden lineer

olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmede kullanılabileceği de düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1]. Islam, S.U., Haq, S. ve Javed, A. (2009). "Numerical solution of special 12th-order boundary value problems using differential transform method", *Comm. Nonl. Sc. Nu. Sim.*, 14(4): 1132-1138.
- [2]. Chen, C.K. ve Ho, S.H. (1999). "Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 106: 171-179.
- [3]. Abbasbandy, S., Magyari, E. ve Shivanian, E. (2009). "The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14: 3530-3536.
- [4]. Bataineh, A.S., Noorani, M.S.M. ve Hashim, I. (2008). "Approximate analytical solutions of systems of PDEs by homotopy analysis method", *Computers & Mathematics with Applications*, 55(12): 2913-2923.
- [5]. Lu, J.F. (2007). "Variational iteration method for solving two-point boundary value problems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207: 92-95.
- [6]. Wazwaz, A.M. (2007). "The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs", *Computers. Math. Appl.*, 54: 895-902.
- [7]. Golbabai, A. ve Javidi, M. (2007). "A variational iteration method for solving parabolic partial differential equations", *Computers and Mathematics with Applications*, 54(7-8): 987-992.
- [8]. Ebaid, A. (2011). "A new analytical and numerical treatment for singular two-point boundary value problems via the Adomian decomposition method", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(8): 1914-1924.
- [9]. Wazwaz, A.M. (2000). "A note on using Adomian decomposition method for solving boundary value problems", *Found. Phys. Lett.*, 13(5): 493-498.
- [10]. El-Gamel, M. (2006). "A wavelet-Galerkin method for a singularly perturbed convection-dominated diffusion equation", *Applied Mathematics and Computation* 181(2): 1635-1644.

- [11]. Ho, S.L. ve Yang, S.Y. (2001). "Wavelet-Galerkin method for solving parabolic equations in finite domains", *Finite Elements in Analysis and Design*, 37: 1023-1037.
- [12]. He, J.H. (2006). "Homotopy perturbation method for solving boundary value problems", *Physics Letters A*, 350: 87-88.
- [13]. Rajabi, A. ve Ganji, D.D. (2007). "Application of homotopy perturbation method in nonlinear heat conduction and convection equations", *Physics Letters A*, 360: 570-573.
- [14]. He, J.H. (2005). "Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations", *Chaos, Solitons and Fractals*, 26(3): 695-700.
- [15]. Saadatmandi, A. ve Dehghan, M. (2012). "The use of Sinc-collocation method for solving multi-point boundary value problems", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 17: 593-601.
- [16]. Parand, K., Dehghan, M. ve Pirkhedri, A. (2009). "Sinc-collocation methods for solving the Blasius equation", *Phys. Lett. A*, 373: 4060-4065.
- [17]. Li, Z.C. (1997). "Penalty combinations of the Ritz-Galerkin and finite difference methods for singularity problems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 81(1): 1-17.
- [18]. Çavuş, M.S. (2006). Kesirli (Fractional) Diferansiyel Denklemler Teorisi ve Dielektrik Durulmanın Kesirli Master Denklemi Yöntemiyle Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- [19]. Azizi, H., Loghmani, G.B., Asl, M.R.H., ve Nezhad, A.D. (2012). "B-Spline Solution of Boundary Value Problems of Fractional Order Based on Optimal Control Strategy ", *Journal of Sciences*, 59-65.
- [20]. Fix, G. J. ve Roop, J. P. (2004). "Least squares finite element solution of a fractional order two-point boundary value problem", *Comput. Math. Appl*, 48: 1017-1033.
- [21]. Jafari, H. ve Daftardar-Gejji, V. (2006). "Positive solutions of nonlinear fractional boundary value problems using Adomian decomposition method", *Applied Mathematics and Computation*, 180: 700-706.
- [22]. Vazquez, L., Tanga, Y., Nie, N., Jimenez, S. ve Li, M. (2009). "Solving two-point boundary value problems of fractional differential equations by spline collocation methods", 1-10.
- [23]. Momani, S., Odibat, Z. ve Erturk, V.S. (2007). "Generalized differential transform method for solving a space and time-fractional diffusion-wave equation", *Physics Letters*, 370: 379-387.
- [24]. Zhang, Y. (2009). "A finite difference method for fractional partial differential equation", *Applied Mathematics and Computation*, 215: 524-529.
- [25]. Meerschaert, M.M. ve Tadjeran, C. (2006). "Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations", *Applied Numerical Mathematics*, 56(1): 80-90.

- [26]. Wang, Q. (2006). "Numerical solutions for fractional KdV-Burgers equation by Adomian decomposition method", *Applied Mathematics and Computation*, 182: 1048-1055.
- [27]. Daftardar-Gejji, V. ve Bhalekar, S. (2008). "Solving multi-term linear and non-linear diffusion-wave equations of fractional order by Adomian decomposition method", *Applied Mathematics and Computation*, 202: 113-120.
- [28]. Wang, Q. (2007). "Homotopy perturbation method for fractional KdV equation", *Applied Mathematics and Computation*, 190: 1795-1802.
- [29]. Wang, Q. (2008). "Homotopy perturbation method for fractional KdV-Burgers equation", *Chaos, Solitons and Fractals*, 35: 843-850.
- [30]. Lund, J. ve Bowers, K. (1992). *Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations*, SIAM, Philadelphia.
- [31]. Secer, A. ve Kurulay, M. (2012). "Sinc-Galerkin method and its applications on singular Dirichlet-type boundary value problems", *Boundary Value Problem*, 2012(1): 1-14.
- [32]. Mohsen, A. ve El-Gamel, M. (2008). "On the Galerkin and collocation methods for two-point boundary value problems using sinc bases", *Computers & Mathematics with Applications*, 56(4): 930-941.
- [33]. Zarebnia, M. ve Sajjadian, M. (2012). "The sinc-Galerkin method for solving Troesch's problem", *Mathematical and Computer Modelling*, 56: 218-228.
- [34]. El-Gamel, M. ve Zayed, A. (2004). "Sinc-Galerkin method for solving nonlinear boundary-value problems," *Comput. Math. Appl.*, 48: 1285-1298.
- [35]. El-Gamel, M., Cannon, J. R. ve Zayed, A.I. (2004). "Sinc-Galerkin method for solving linear sixth order boundary value problems", *Mathematics of Computation*, 73(247): 1325-1343.
- [36]. Hajji, M.A. ve Al-Mdallal, Q.M. (2013). "Modified Sinc-Galerkin method for nonlinear boundary value problems", *Journal of Mathematics*.
- [37]. Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, California.
- [38]. Kurulay, M. (2009). *Zaman-Kesirli Mertebeli Non-lineer Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri*, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [39]. Erdelyi, A. (1955). *Higher Transcendental Functions*, vol. 3, McGraw-Hill, New York.
- [40]. Almeida, R. ve Torres, D.F.M. (2011). "Necessary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 16(3): 1490-1500.
- [41]. Secer, A., Kurulay, M. Bayram, M. ve Akinlar, M.A. (2012). "An efficient computer application of sinc-Galerkin approximation for nonlinear boundary value problems", *Boundary Value Problem*, 2012(1): 1-17.

- [42]. El-Gamel, M. (2007). "A comparison between the Sinc-Galerkin and the modified decomposition methods for solving two-point boundary value problems", *J Comput Phys*, 223: 369-383.
- [43]. Secer, A., Alkan, S., Akinlar, M.A. ve Bayram, M., (2013). "Sinc-Galerkin method for approximate solutions of fractional order boundary value problems", *Boundary Value Problems*, 2013(1): 281.
- [44]. Rehman, M.U. ve Khan, R.A. (2012). "A numerical method for solving boundary value problems for fractional differential equations", *Appl. Math. Modell.*, 36: 894-907.
- [45]. El-Gamel, M. (2006). "A numerical scheme for solving nonhomogeneous time-dependent problems", *Z. angew. Math. Phys.*, 57: 369-383.
- [46]. El-Gamel, M. ve Zayed, A. (2002). "A comparison between the Wavelet-Galerkin and the sinc-Galerkin methods in solving nonhomogeneous heat equations", *Series, Inverse Problem, Image Analysis, and Medical Imaging*, 313: 97-116.
- [47]. Rehman, M.U. ve Khan, R.A. (2013). "Numerical solutions to initial and boundary value problems for linear fractional partial differential equations", *Appl. Math. Modell.*, 37: 5233–5244.

PROBLEM 3.1 İÇİN MATHEMATİKA PROGRAMI

$$\mu_0[x_-] = 0; \mu_1[x_-] = 0; \mu_2[x_-] = 1; \lambda[x_-] = 1; \alpha = 0.5;$$

$$\xi[x_-] = \text{Log}\left[\frac{x-z}{1-x}\right];$$

$$xL[k_-] = \frac{e^{khL} + z}{1 + e^{khL}};$$

$$K[t_-] = (t-z)^{-\alpha} \frac{ht \sin\left[\frac{\pi\left(-hj + \text{Log}\left[\frac{t}{1-t}\right]\right)}{h}\right]}{(1-t)\left(\frac{1}{1-t} + \frac{t}{(1-t)^2}\right)(-hj\pi + \pi \text{Log}\left[\frac{t}{1-t}\right])} \lambda[x];$$

$$L = 5; hL = \frac{\pi}{\sqrt{L}};$$

$$\text{Fonk}[z_-] = \frac{-1}{\text{Gamma}[1-\alpha]} D[\text{Simplify}[N[hL * \sum_{k=-L}^L wL[xL[k]] * K[xL[k]]], z];$$

$$f[x_-] = 2 + \frac{1}{\text{Gamma}[1-\alpha]} (2.65x^{1.5} - 2x^{0.5});$$

$$\text{phi}[x_-] = \text{Log}\left[\frac{x}{1-x}\right];$$

$$M = 5; h = \frac{\pi}{\sqrt{M}};$$

$$x[k_-] = \frac{e^{kh}}{1 + e^{kh}};$$

$$w[x_-] = \frac{1}{D[\text{phi}[x], x]};$$

```

FonkDeger[k_, j_] = Fonk[x[k]]//N;

A2 = Table[FonkDeger[k, j], {j, -M, M}, {k, -M, M}]/N;

g10[x_] = D[μ1[x]w[x], x];

g11[x_] = μ1[x]w[x]D[phi[x], x];

g20[x_] = D[D[μ2[x]w[x], x], x];

g21[x_] = D[D[phi[x], x], x]w[x]μ2[x] + 2D[phi[x], x]D[μ2[x]w[x], x];

g22[x_] = D[phi[x], x]2w[x]μ2[x];

dphi[x_] = D[phi[x], x];

I0 = IdentityMatrix[2M + 1];

I1 = Table[If[j == k, 0,  $\frac{(-1)^{k-j}}{k-j}$ ], {j, -M, M}, {k, -M, M}];

I2 = Table[If[j == k,  $\frac{-\pi^2}{3}$ ,  $\frac{-2(-1)^{k-j}}{(k-j)^2}$ ], {j, -M, M}, {k, -M, M}];

A10 = DiagonalMatrix[Table[ $\frac{g10[x[k]]}{dphi[x[k]]}$ , {k, -M, M}]];

A11 = DiagonalMatrix[Table[ $\frac{g11[x[k]]}{dphi[x[k]]}$ , {k, -M, M}]];

A20 = DiagonalMatrix[Table[ $\frac{g20[x[k]]}{dphi[x[k]]}$ , {k, -M, M}]];

A21 = DiagonalMatrix[Table[ $\frac{g21[x[k]]}{dphi[x[k]]}$ , {k, -M, M}]];

A22 = DiagonalMatrix[Table[ $\frac{g22[x[k]]}{dphi[x[k]]}$ , {k, -M, M}]];

W = DiagonalMatrix[Table[w[x[k]], {k, -M, M}]]/N;

A3 = DiagonalMatrix[Table[μ0[x[t]]w[x[t]]2, {t, -M, M}]]/N;

A = (I0.A20 +  $\frac{1}{h}$ I1.A21 +  $\frac{1}{h^2}$ I2.A22) - (I0.A10 +  $\frac{1}{h}$ I1.A11) + A2.W + A3//N;

B = Transpose[{Table[w[x[t]]2 * f[x[t]], {t, -M, M}]}]/N;

R = LinearSolve[A, B];

```

```
sinc[x_] = If[x ≠ 0, Sin[π x]/(π x), 1];
```

```
u[x_] = Sum[R[[k + M + 1]] * sinc[ $\frac{1}{h}$  (phi[x] - kh)], {k, -M, M}];
```

```
Plot[{x(x - 1), u[x]}, {x, 0, 1}, PlotLegend -> {"Exact", "Approximate"}, PlotStyle  
→ {Directive[Blue, Thick], Directive[Red, Dashed, Thick]}]
```

```
Table[Abs[u[i] - i(i - 1)], {i, 0.1, 0.9, 0.1}]
```

```
Table[u[i], {i, 0.1, 0.9, 0.1}]
```

PROBLEM 4.2 İÇİN MATHEMATİCA PROGRAMI

$$beta = 0.7;$$

$$r[x_, t_] = x^2(1 - x)t^3(1 - t)^2$$

$$f[x_, t_] = \partial_{t,t} r[x, t] - \frac{1}{\text{Gamma}[1 - beta]} \int_0^x \frac{\partial_s r[s, t]}{(x - s)^{beta}} ds - \partial_{x,x} r[x, t];$$

$$phi[x_] = \text{Log}[x/(1 - x)];$$

$$mu[t_] = \text{Log}[t/(1 - t)];$$

$$\text{Clear}[hx]$$

$$\text{Clear}[h2]$$

$$phi2[y_] = \text{Log}[(y - z)/(1 - y)];$$

$$w2[y_] = 1/D[phi2[y], y];$$

$$x2[k_] = (e^{k h2} + z)/(1 + e^{k h2})//N;$$

$$rr2[x_] = (x - z)^{-beta} (hx \text{Sin}[(\pi (-hx i + \text{Log}[x/(1 - x)]))/hx]) / (\pi \sqrt{\frac{(1 - x) \left(\frac{1}{1 - x} \right) + \frac{x}{(1 - x)^2}}{x}} (-hx i + \text{Log}[x/(1 - x)]));$$

$$P = 3;$$

$$h2 = \frac{\pi}{\sqrt{P}};$$

$$\begin{aligned}
xx1[z_] &= \frac{-1}{\text{Gamma}[1 - \text{beta}]} D[\text{Simplify}[N[h2 \\
&\quad * \sum_{k=-P}^P w2[x2[k]] * rr2[x2[k]]], \text{TimeConstraint} \rightarrow 5000], z]; \\
Mx &= 5; Nx = 5; Mt = 5; Nt = 3; mx = Mx + Nx + 1; mt = Mt + Nt + 1; \\
hx &= \pi/\sqrt{Mx} \\
ht &= \pi/\sqrt{Mt}; \\
x[k_] &= e^{k \, hx}/(1 + e^{k \, hx})//N; \\
t[l_] &= e^{l \, ht}/(1 + e^{l \, ht})//N; \\
w[x_] &= 1/D[\text{phi}[x], x]^{(1/2)}; \\
v[t_] &= 1/D[\text{mu}[t], t]^{(1/2)} \\
Imx0 &= \text{IdentityMatrix}[mx]; \\
Imx1 &= \text{Table}[If[j == k, 0, ((-1)^{k-j})/(k - j)], {j, -Mx, Nx}, {k, -Mx, Nx}]; \\
Imx2 &= \text{Table}[If[j = \\
&\quad = k, (-\pi^2)/3, (-2 (-1)^{k-j})/(k - j)^2], {j, -Mx, Nx}, {k, -Mx, Nx}]; \\
p0[x_] &= D[w[x], {x, 2}]; \\
p1[x_] &= D[\text{phi}[x], {x, 2}]w[x] + 2D[\text{phi}[x], x]D[w[x], x]; \\
p2[x_] &= D[\text{phi}[x], x]^2 w[x]; \\
Dphi[x_] &= D[\text{phi}[x], x]; \\
R0 &= \text{DiagonalMatrix}[\text{Table}[p0[x[k]]/(Dphi[x[k]]^2 w[x[k]]), {k, -Mx, Nx}]]; \\
R1 &= \text{DiagonalMatrix}[\text{Table}[p1[x[k]]/(Dphi[x[k]]^2 w[x[k]]), {k, -Mx, Nx}]]; \\
R2 &= \text{DiagonalMatrix}[\text{Table}[p2[x[k]]/(Dphi[x[k]]^2 w[x[k]]), {k, -Mx, Nx}]]; \\
R &= 1/(hx)^2 Imx2.R2 + 1/hx Imx1.R1 + Imx0.R0; \\
Imt0 &= \text{IdentityMatrix}[mt]; \\
Imt1 &= \text{Table}[If[j == k, 0, ((-1)^{k-j})/(k - j)], {j, -Mt, Nt}, {k, -Mt, Nt}];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Imt2 &= Table[If[j = \\
&= k, (-\pi^2)/3, (-2 (-1)^{k-j})/(k-j)^2], \{j, -Mt, Nt\}, \{k, -Mt, Nt\}]; \\
Dmu[t_] &= D[mu[t], t]; \\
nu0[t_] &= D[v[t], \{t, 2\}]; \\
nu1[t_] &= D[mu[t], \{t, 2\}] v[t] + 2 D[v[t], t] D[mu[t], t]; \\
nu2[t_] &= D[mu[t], t]^2 v[t]; \\
L0 &= DiagonalMatrix[Table[nu0[t[l]]/(Dmu[t[l]]v[t[l]]), \{l, -Mt, Nt\}]]; \\
L1 &= DiagonalMatrix[Table[nu1[t[l]]/(Dmu[t[l]]v[t[l]]), \{l, -Mt, Nt\}]]; \\
L2 &= DiagonalMatrix[Table[nu2[t[l]]/(Dmu[t[l]]v[t[l]]), \{l, -Mt, Nt\}]]; \\
Lf &= \frac{1}{(ht)^2} Imt2.L2 + \frac{1}{ht} Imt1.L1 + Imt0.L0; \\
WFrax &= DiagonalMatrix[Table[1/(Dphi[x[k]]^2 w[x[k]]), \{k, -Mx, Nx\}]]/N; \\
KFrax[k_, i_] &= xx1[x[k]]/N; \\
Kfx &= Table[KFrax[k, i], \{i, -Mx, Nx\}, \{k, -Mx, Nx\}].WFrax; \\
A &= -DiagonalMatrix[Table[Dphi[x[k]], \{k, -Mx, Nx\}]] . R \\
&. DiagonalMatrix[Table[Dphi[x[k]], \{k, -Mx, Nx\}]] \\
&- DiagonalMatrix[Table[Dphi[x[k]], \{k, -Mx, Nx\}]] . Kfx \\
&. DiagonalMatrix[Table[Dphi[x[k]], \{k, -Mx, Nx\}]]; \\
B &= Transpose[Lf].DiagonalMatrix[Table[Dmu[t[l]], \{l, -Mt, Nt\}]]; \\
F &= Table[f[x[k], t[l]], \{k, -Mx, Nx\}, \{l, -Mt, Nt\}]; \\
G &= DiagonalMatrix[Table[w[x[k]], \{k, -Mx, Nx\}]] . F \\
&. DiagonalMatrix[Table[v[t[l]], \{l, -Mt, Nt\}]]/N; \\
vecG &= Flatten[Transpose[G]]; \\
KrocMatrix &= Inverse[KroneckerProduct[Imt0, A] \\
&+ KroneckerProduct[Transpose[B], Imx0]].vecG;
\end{aligned}$$

```

X = Transpose[Partition[KrocMatrix,mx]]//N;

U = Inverse [DiagonalMatrix [Table[w[x[k]],{k,-Mx,Nx}]]] . X

.Inverse[DiagonalMatrix[Table[v[t[l]],{l,-Mt,Nt}]]];

sinc[x_] = If[x ≠ 0, Sin[π x]/(π x),1];

app[x,t] = Sum Sum U[[i + Mx + 1,j + Mt + 1]]sinc[(phi[x] - i
* hx)/hx]sinc[(mu[t] - j * ht)/ht];

```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sertan ALKAN
Doğum Tarihi ve Yeri : 10.02.1984 / AMASYA
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : sertanalkan@bartin.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik Mühendisliği	Yıldız Teknik Üniversitesi	2014
Yüksek Lisans	Matematik	Muğla Üniversitesi	2011
Lisans	Matematik	Atatürk Üniversitesi	2006
Lise	Fen	Amasya Lisesi	2001