

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DERECELENDİRİLMİŞ HALKALAR VE 2-YUTAN QUASI ASALIMSI ALT
MODÜLLER**

RABİA NAGEHAN ÜREGEN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. BAYRAM ALİ ERSOY**

İSTANBUL, 2017

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DERECELENDİRİLMİŞ HALKALAR VE 2-YUTAN QUASI ASALIMSİ ALT
MODÜLLER**

Rabia Nagehan ÜREGEN tarafından hazırlanan tez çalışması 28.06.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi birikiminden yararlandığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY' a teşekkürü bir borç bilirim. Yine çalışmalarımda büyük emeği bulunan, beni tecrübeleriyle yönlendiren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ünsal TEKİR' e, katkılarıyla bana her zaman ışık tutan ve bu çalışmanın her aşamasında yanımda olan değerli arkadaşım Sayın Arş. Gör. Suat KOÇ' a, verdiği destekleriyle beni motive eden, özellikle İngilizce çalışmalarımda beni aydınlatan sevgili arkadaşım Sayın Uzman Müge GEDİK' e, varlığıyla beni mutlu eden, yaptığım her şeyin arkasında duran, güler yüzüyle beni yüreklendiren sevgili hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Elif DEMİR' e teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca beni maddi manevi olarak destekleyen, koşulsuz olarak her zaman yanımda olan, bugünlere gelmemde büyük emekleri olan sevgili aileme teşekkür ederim. Son olarak “sabreyle, seyreyle” deyip hayatımın her anında yanımda olan, bana tüm güzellikleri gösteren güzel insana teşekkür ederim.

Haziran, 2017

Rabia Nagehan ÜREGEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMA LİSTESİ.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT.....	ix
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez	3
BÖLÜM 2	
DERECELENDİRİLMİŞ HALKALAR	5
2.1 Ön Bilgiler.....	5
2.1.1 Derecelendirilmiş Halkalar	6
2.1.2 Derecelendirilmiş Halkalar Üzerinde Topoloji	11
2.1.3 Derecelendirilmiş İdeallerin Sonlu Birleşimi.....	12
2.2 Derecelendirilmiş Kompakt Paketlenmiş Halkalar.....	14
2.3 Derecelendirilmiş Aralarında Asal Paketlenmiş Halkalar.....	17
2.4 Derecelendirilmiş 2-yutan Quasi Asalımsı İdealler	20
BÖLÜM 3	
2-YUTAN QUASİ ASALIMSİ ALT MODÜLLER	26
3.1 Ön Bilgiler.....	26
3.2 2-yutan Quasi Asalımsı Alt Modüller	28
BÖLÜM 4	
SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	45

ÖZGEÇMİŞ.....	48
---------------	----

KISALTMA LİSTESİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar halkası
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar halkası
$\text{Çek } f$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
$\text{Gr}(I)$	Derecelendirilmiş I idealinin radikali
$V_G^R(I)$	Derecelendirilmiş I idealinin varyetesi
$h\text{-Spec}(R)$	Derecelendirilmiş R halkasının derecelendirilmiş asal ideallerinin kümesi
$h\text{-Min}(R)$	Derecelendirilmiş R halkasının derecelendirilmiş minimal asal ideallerinin kümesi
$h\text{-Max}(R)$	Derecelendirilmiş R halkasının derecelendirilmiş maksimal ideallerinin kümesi
$h\text{-ht}(P)$	Derecelendirilmiş P asal idealinin yüksekliği
$h\text{-dim } R$	Derecelendirilmiş R halkasının (Krull) boyutu
$\text{Ann}(M)$	M modülünün sıfırlayıcısı
$A \not\subset B$	A, B nin alt kümesi değil

DERECELENDİRİLMİŞ HALKALAR VE 2-YUTAN QUASI ASALIMSIZ ALT MODÜLLER

Rabia Nagehan ÜREGEN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Değişmeli Cebirde ideallerin birleşimleri önemli yer tutmaktadır. İdeallerin ve modüllerin birleşimleri üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Tezin birinci bölümünde verilen literatür taramasının ardından ikinci bölümde derecelendirilmiş ideallerin birleşimleri incelenmiştir. Quartararo ve Butts'un u -halka olarak tanımladığı halkalarda ideallerin sonlu birleşimleri, derecelendirilmiş halkalar için yapılmıştır. Buna göre; R bir derecelendirilmiş halka ve I , R nin derecelendirilmiş bir ideali olsun.

Herhangi $\{A_i\}_{i=1}^n$ derecelendirilmiş ideal ailesi için $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ olması $1 \leq j \leq n$ olacak

şekilde bir j için $I \subseteq A_j$ olmasını gerektiriyorsa I ya derecelendirilmiş u -ideal denir. R halkasının her derecelendirilmiş ideali u -ideal ise R ye derecelendirilmiş u -halka denir. Bu tanımdan hareketle derecelendirilmiş u -halkaların birçok karakterizasyonları verilmiştir. Daha sonra derecelendirilmiş asal idealler yardımıyla asaldan kaçınma teoreminin bir genelleştirmesi olan derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka şu şekilde tanımlanmıştır: R nin derecelendirilmiş I ideali derecelendirilmiş asal idealler ailesinin birleşiminde iken ailenin herhangi bir derecelendirilmiş asal ideali tarafından içeriliyorsa R ye derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka denir. Bu tanımın ardından derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halkaların bazı özellikleri incelenmiştir. Dahası bu halkaların daha genel hali olan derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halkalar tanımlanmıştır ve her

derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halkanın derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka olduğu gösterilmiştir. Ayrıca ifadenin tersinin R bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi ve $h\text{-dim} R=1$ olduğunda sağlandığı gösterilmiştir. Bu bölümün sonunda ise derecelendirilmiş ideallerin yeni bir sınıfı olan derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı idealler tanımlanmıştır. Buna göre; R bir derecelendirilmiş halka ve I , R nin derecelendirilmiş bir has ideali olsun. $a, b, c \in h(R)$ olmak üzere $abc \in I$ olması $ab \in Gr(I)$ veya $ac \in Gr(I)$ veya $bc \in Gr(I)$ olmasını gerektiriyorsa I ya R nin derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı ideali denir. Ayrıca derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı idealler birçok derecelendirilmiş halkada incelenmiş ve derecelendirilmiş 2-yutan ideallerle ilişkileri ortaya konmuştur.

Tezin üçüncü bölümünde ise modül teorisinde önemli yeri olan asal alt modüllerin bir genelleştirilmesi yapılmıştır. 2-yutan quasi asalımsı alt modül adını verdiğimiz bu yapı şöyle tanımlanmıştır: M bir R -modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Her $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ iken $ab \in \sqrt{(N;_R M)}$ veya $am \in rad_M(N)$ veya $bm \in rad_M(N)$ oluyorsa N ye 2-yutan quasi asalımsı alt modül denir. Bu bölümde ayrıca 2-yutan quasi asalımsı alt modüllerin çeşitli karakterizasyonları verilerek bazı alt modüllerle aralarındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Derecelendirilmiş halka, derecelendirilmiş u -halka, derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka, derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka, derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı ideal, asal alt modül, 2-yutan quasi asalımsı alt modül.

GRADED RINGS AND 2-ABSORBING QUASI PRIMARY SUBMODULES

Rabia Nagehan ÜREGEN

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Union of ideals has an important role in commutative algebra, which has led to a wide range of literature on the union of ideals and modules. After the literature review given in Chapter 1 of this dissertation, union of graded ideals are investigated in Chapter 2. Finite union of ideals in rings defined as u -ring by Quartararo and Butts has been applied to graded rings. Accordingly, let R be a graded ring, I a graded ideal of R . Then we say that I is a graded u -ideal if for any family of graded ideals

$\{A_i\}_{i=1}^n$, $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ implies $I \subseteq A_j$ for some $j=1,2,\dots,n$. A graded ring R is called

u -ring if any graded ideal is a graded u -ideal. Based on this definition, various characterizations of graded u -rings are given. Then a graded compactly packed ring which is a generalization of the prime avoidance theorem with the help of prime ideals is defined as follows: The ring R is called a graded compactly packed ring if for any graded ideal I of R is contained in any graded prime ideal when it is in the union of a family of graded prime ideals. Succeeding this definition, some properties of graded compactly packed rings are examined. Furthermore, graded coprimely packed rings which are more general versions of these rings are defined and it is shown that every graded compactly packed ring is a graded coprimely packed ring. It is also displayed that the converse is true whenever R is a graded integral domain and $h\text{-dim } R=1$. At

the end of this chapter, graded 2-absorbing quasi primary ideals, which are a new class of graded ideals, are defined. Accordingly, let R be a graded ring and I a proper graded ideal of R . Then I is called a graded 2-absorbing quasi primary ideal of R if $abc \in I$ implies $ab \in Gr(I)$ or $ac \in Gr(I)$ or $bc \in Gr(I)$ for each $a, b, c \in h(R)$. Moreover, graded 2-absorbing quasi primary ideals are investigated in several graded rings and their relations between graded 2-absorbing ideals are revealed.

In Chapter 3, generalization of prime submodules having a significant role in the theory of modules is presented. A structure called 2-absorbing quasi primary submodule is defined as follows: Let R be a ring, M an R -module and N a proper R -submodule of M . We argue that N is a 2-absorbing quasi primary submodule of M if whenever $a, b \in R$ and $m \in M$ with $abm \in N$, then either $ab \in \sqrt{(N :_R M)}$ or $am \in rad_M(N)$ or $bm \in rad_M(N)$. In this chapter, additionally, by providing various generalizations of 2-absorbing quasi primary submodule, its relations between some other submodules are studied.

Keywords: graded ring, graded u -ring, graded compactly packed ring, graded coprimely packed ring, graded 2-absorbing quasi primary ideal, prime submodule, 2-absorbing quasi primary submodule.

1.1 Literatür Özeti

Değişmeli Cebirde ideallerin birleşimleri önemli yer tutmaktadır. İdeallerin ve modüllerin sonlu birleşimleri üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. McCoy 1956 yılında ideallerin ve alt grupların sonlu birleşimlerini incelemiştir. Çalışmada etkin örtüş diye adlandırılan (efficient union) tanımı yapılmıştır. Buna göre k pozitif tamsayısı olmak üzere $A^k \subset \bigcap A_i$ iken $A \subset \bigcup A_i$ olduğu gösterilmiştir [1]. Quartararo ve Butts ilerleyen yıllarda yine ideallerin sonlu birleşimleri üzerinde çalışmışlardır. “Finite Unions of Ideals and Modules” adlı makalede u – halka tanımını yaparak bu halkaların bazı özel karakterizasyonlarını vermişlerdir. R bir değişmeli halka ve I , R nin ideali olsun. Herhangi $\{A_i\}_{i=1}^n$ ideal ailesi için $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ iken $1 \leq j \leq n$ olacak şekilde bir j için $I \subseteq A_j$ ise I ya u – ideal denir. R halkasının her ideali u – ideal ise R ye u – halka denir. Aynı çalışmada modüllerin de sonlu birleşimleri incelenmiştir [2]. Asal ideallerin birleşimlerini ise Reis ve Viswanathan çalışmışlardır. Literatürde asaldan kaçınma teoremi (Prime avoidance theorem) olarak bilinen teoremin genelleştirmesi olan kompakt paketlenmiş halka tanımını çalışmalarında şu şekilde yapmışlardır: R halkasının I ideali bir $\{P_\alpha\}_{\alpha \in S}$ asal ideal ailesinin birleşimi tarafından içeriliyor iken bir $\beta \in S$ indisi için $I \subseteq P_\beta$ sağlanıyorsa R ye $Spec(R)$ ile kompakt paketlenmiş halka denir [3]. 1981’de Pakala ve Shores bu tanımı Noetherian halkalar üzerinde yapmışlardır ve bazı koşullar altında Picard gruplarda incelemiştir [4]. Smith de “Covering condition for prime ideals” adlı makalesinde asal ideallerin birleşimini

incelemiş ve kompakt paketlenmiş bir halkada her asal idealin bir temel idealin radikale eşit olduğunu göstermiştir [5]. Erdoğan, kompakt paketlenmiş halkaların genel hali olan aralarında asal paketlenmiş halkaları çalışmasında şu şekilde tanımlamıştır: R bir halka, I bir ideal ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in S}$ kümesi, R halkasının asal idealler ailesi olsun. Her $\alpha \in S$ indisi için $I + P_\alpha = R$ iken $I \not\subseteq \bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ oluyorsa, I idealine aralarında asal paketlenmiş ideal denir. R halkasının her asal ideali aralarında asal paketlenmişse R halkasına aralarında asal paketlenmiş halka denir [6]. Bu konu üzerine literatürde çeşitli çalışmalar yapılmıştır [7,8,9,10,11]. Tekir, "On coprimely packed rings" adlı çalışmasında R aralarında asal paketlenmiş halka iken $S^{-1}R$ nin hangi koşullarda aralarında asal paketlenmiş halka olduğunu göstermiştir [9].

Derecelendirilmiş halkalar teorisi üzerine literatürde çeşitli çalışmalar mevcuttur [12,13,14,15,16]. Derecelendirilmiş asal idealler ve genelleştirilmeleri derecelendirilmiş halkalar teorisinde büyük öneme sahiptir. Derecelendirilmiş asal idealler birçok çalışmada incelenmiştir [14,15,16].

Derecelendirilmiş asal ideallerin bir genelleştirilmesi olan derecelendirilmiş asalımsı idealler Al Zoubi tarafından tanımlanmış ve derecelendirilmiş Noetherian halkalarda asalımsı ayrışım incelenmiştir [14]. Yine asal ideallerin bir başka genelleştirmesi olan derecelendirilmiş 2-yutan idealler "On graded 2-absorbing and graded weakly 2-absorbing ideals" adlı makalede incelenmiştir [15]. Bir başka çalışmada ise derecelendirilmiş 2-yutan asalımsı idealler tanımlanmış ve çeşitli karakterizasyonları yapılmıştır [16].

Modül teoride asal alt modüller, modüllerin yapısı hakkında çok önemli bilgiler vermektedir. Asal alt modüller ile ilgili araştırmacılar birçok çalışma yapmışlardır [17,18,19,20,21]. Bu çalışmalarda asal alt modüllerin farklı genelleştirmeleri üzerinde durulmuştur. 2-yutan alt modül kavramı ilk olarak Darani ve Sohaelnia tarafından "2-absorbing and weakly 2-absorbing submodules" adlı makalede tanımlanmıştır [22]. Yazarlar 2-yutan alt modüllerin birçok özelliğini karakterize ederek diğer alt modüllerle olan ilişkisini incelemişlerdir. Daha sonra 2-yutan alt modüllerin bir başka genelleştirilmesi olan 2-yutan asalımsı alt modüller üzerine çalışılmıştır. Buna göre;

M bir R -modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Her $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ iken $ab \in (N :_R M)$ veya $am \in \text{rad}_M(N)$ veya $bm \in \text{rad}_M(N)$ oluyorsa N ye 2-yutan asalımsı alt modül denir. Ayrıca 2-yutan asalımsı alt modüller yardımıyla Noetherian halkalar üzerinde serbest burulmalı çarpımsal dedekind modülleri karakterize etmişlerdir [23].

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amaçlarından biri, derecelendirilmiş halkaların sonlu ve sonsuz birleşimleri üzerinde durmak ve derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halkalar ile derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halkaları karakterize ederek aralarındaki ilişkiyi kurmaktır. Ayrıca derecelendirilmiş asal idealleri genelleştiren derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı idealleri tanımlayarak diğer ideallerle aralarındaki ilişkileri incelemektir. Tezin bir diğer amacı ise modül teoride önemli yer tutan asal alt modüllerin bir genelleştirmesi olan 2-yutan quasi asalımsı alt modülleri tanımlayıp bu kavram üzerinde araştırma yapmak ve bu alt modülleri karakterize ederek diğer alt modüllerle ilişkisini incelemektir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmanın ilk bölümünde detaylı literatür taraması yapılacaktır. Çalışmanın ikinci bölümünde, derecelendirilmiş halkaların birleşimleri incelenecektir. İlk olarak Quartararo ve Butts'un u -halka olarak tanımladığı halkaların sonlu birleşimleri derecelendirilmiş halkalar için yapılacaktır. Daha sonra derecelendirilmiş asal idealler yardımıyla derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka tanımı yapılarak bazı karakterizasyonları verilecektir. Bu halkaların daha genel hali olan derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka tanımı yapıp derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halkalarla aralarındaki ilişki incelenecektir. Ayrıca derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı ideller tanımlanarak çeşitli karakterizasyonları yapılacaktır.

Tezin üçüncü bölümünde ise asal alt modüller üzerine çalışılacaktır. Literatürde asal alt modüllerin genelleştirilmesi üzerine birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmada ise 2-yutan quasi asalımsı alt modül adını vereceğimiz yapı tanımlanarak çeşitli karakterizasyonları yapılacaktır. Ayrıca bu yapının diğer alt modüllerle aralarındaki ilişki incelenecektir.

BÖLÜM 2

DERECELENDİRİLMİŞ HALKALAR

2.1 Ön Bilgiler

Bu bölümde tezde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremler yer almaktadır.

İlk olarak ispatları [1,24] te mevcut olan Asaldan Kaçınma Teoremi (Prime Avoidance Theorem) olarak bilinen aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1.1: R bir halka ve I bir ideali olsun. $I_1, I_2, \dots, I_n$ de R halkasının en az $n-2$ tanesi asal olan idealleri ve $I \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$ ise bir $1 \leq k \leq n$ için $I \subseteq I_k$ dir[24].

İspat: n üzerinde tümevarım uygulayalım. $n=2$ olmak üzere $I \not\subseteq I_1$ ve $I \not\subseteq I_2$ kabul edelim. Böylece $j=1,2$ için bir $a_j \in I \setminus I_j$ vardır. O halde, hipotezden $a_1 \in I_2$ ve $a_2 \in I_1$ dir. Buradan $a_1 + a_2 \in I \subseteq I_1 \cup I_2$ olur ve böylece $a_1 + a_2 \in I_1$ veya $a_1 + a_2 \in I_2$ elde edilir. $a_1 + a_2 \in I_1$ ise $a_1 = (a_1 + a_2) - a_2 \in I_1$ dir. $a_1 + a_2 \in I_2$ ise $a_2 = (a_1 + a_2) - a_1 \in I_2$ dir ve her iki durumda da çelişki elde edilir. Böylece $I \subseteq I_1$ veya $I \subseteq I_2$ bulunur. Şimdi, $k \geq 2$ olmak üzere $n=k$ için hipotez doğru olsun ve $n=k+1$ için doğru olduğunu ispatlayalım. $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} I_i$ kabul edelim ve I_i ideallerinin en az $n-2$ tanesi asal ideal

olsun. I_{k+1} idealinin asal olduğunu varsayalım. Her $j=1, \dots, k+1$ için $I \not\subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} I_i$ kabul

edelim. Öyleyse her $j=1,...,k+1$ için $a_j \in I \setminus \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} I_i$ dir. Böylece hipotezden her $j=1,...,k+1$ için $a_j \in I_j$ elde edilir. Ayrıca I_{k+1} asal olduğundan $a_1...a_k \notin I_{k+1}$ dir. Buradan $a_1...a_k \in \bigcap_{i=1}^k I_i \setminus I_{k+1}$ olur. Şimdi, $b = a_1...a_k + a_{k+1}$ elemanını göz önüne alalım. Burada $b \notin I_{k+1}$ dir. Aksi halde $a_1...a_k = b - a_{k+1} \in I_{k+1}$ çelişkisi elde edilir. Ayrıca $1 \leq j \leq k$ için $b \notin I_j$ dir. Aksi halde $a_{k+1} = b - a_1...a_k \in I_j$ çelişkisi elde edilir. Fakat $b \in I$ olduğundan $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} I_i$ kabulümüz ile çelişir. Böylece $1 \leq j \leq k+1$ olmak üzere en az bir j için $I \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} I_i$ olduğu görülür. Tümevarım hipotezini kullanarak $1 \leq i \leq k+1$ olmak üzere bir i için $I \subseteq I_i$ bulunur.

2.1.1 Derecelendirilmiş Halkalar

Tanım 2.1.1.1: G , birimi e olan bir grup ve R bir halka olsun. R nin $g \in G$ ile indekslenmiş R_g toplamsal alt grupları olmak üzere,

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

ve her $g, h \in G$ için,

$$R_g R_h \subseteq R_{gh}$$

oluyorsa R ye bir G -derecelendirilmiş halka (ya da kısaca derecelendirilmiş halka) denir ve $G(R)$ ile gösterilir. R_g nin elemanları g . dereceden homojen eleman olarak adlandırılır ve tüm homojen elemanların kümesi $h(R)$ ile gösterilir, yani

$$h(R) = \bigcup_{g \in G} R_g$$

dir.

Burada not edelim ki, direkt toplamın özelliğinden, her bir $a \in R$, tüm terimleri sıfırdan farklı olacak şekildeki tek türlü yazılan sonlu

$$a = \sum_{g \in G} a_g$$

toplamından oluşur. Buradaki a_g elemanları a nın R_g deki g – bileşeni olarak adlandırılır.

Ayrıca her $g \in G$ için $0_R = 0 \in R_g$ dir.

Not: Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe G her zaman bir grup olarak kabul edilecektir.

Örnek: R bir halka olsun. $R_e = R$ ve her $g \neq e$ için $R_g = 0$ olarak alalım. Böylece,

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca her $g, h \in G$ için,

$R_g R_h = 0 \subseteq R_{gh}$ veya $R_g R_h = R_e R_e = R \subseteq R_e = R_{gh}$ elde edilir. Bu durumda her halka yukarıdaki yöntemle bir derecelendirilmiş halka yapılabilir. Bu derecelendirilmiş halkaya aşikar derecelendirilmiş halka denir.

Örnek: K herhangi bir cisim olmak üzere $K[x, y]$ polinomlar halkasını göz önüne alalım. Her $n < 0$ için $R_n = 0$, $R_0 = K$, $R_1 = Kx + Ky$, $R_2 = Kx^2 + Kxy + Ky^2$, ... olarak

$$K[x, y] = \dots \oplus 0 \oplus K \oplus Kx + Ky \oplus Kx^2 + Kxy + Ky^2 \oplus \dots$$

olduğu görülür. Ayrıca $n < 0$ veya $m < 0$ ise $R_n R_m = 0 \subseteq R_{n+m}$ olur. Şimdi $n, m \geq 0$ olduğunu kabul edelim. n . dereceden bir homojen polinom ile m . dereceden bir homojen polinomun çarpımı $(n+m)$. dereceden bir homojen polinom olduğundan $R_n R_m \subseteq R_{n+m}$ elde edilir ve böylece $K[x, y]$ bir $\mathbb{Z}$ – derecelendirilmiş halkadır.

Tanım 2.1.1.2: R bir derecelendirilmiş halka ve $a, b \in h(R)$ olsun. $ab = 0$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R ye derecelendirilmiş tamlık bölgesi denir [17].

Tanım 2.1.1.3: R bir derecelendirilmiş halka ve $I \subseteq R$ bir ideali olsun. Her $g \in G$ için

$$I_g = I \cap R_g$$

olmak üzere,

$$I = \bigoplus_{g \in G} I_g$$

oluyorsa I ya R nin bir derecelendirilmiş ideali denir. Bu durumda I_g , I nin g – bileşeni olarak adlandırılır.

Not: I nin bir derecelendirilmiş ideal olması için gerek ve yeter koşul

$$a = \sum_{g \in G} a_g \in I$$

iken her $g \in G$ için $a_g \in I$ olmasıdır.

Örnek: K herhangi bir cisim olmak üzere $R = K[x] = \dots \oplus 0 \oplus K \oplus Kx \oplus Kx^2 \oplus \dots$
 $\mathbb{Z}$ – derecelendirilmiş halkasını göz önüne alalım. Burada $n < 0$ için $R_n = 0$, $n \geq 0$ için $R_n = Kx^n$ dir.

(i) $I = \langle x \rangle$ idealini göz önüne alalım. $n \leq 0$ iken $I_n = I \cap R_n = I \cap 0 = 0$,

$I_0 = I \cap R_0 = I \cap Kx^0 = I \cap K = 0$ ve ayrıca $n > 0$ iken

$I_n = I \cap R_n = I \cap Kx^n = \langle x \rangle \cap Kx^n = Kx^n$ olur. Bu durumda

$\langle x \rangle = \dots \oplus 0 \oplus Kx \oplus Kx^2 \oplus \dots$ bulunur ve I bir derecelendirilmiş ideal olur.

(ii) $P = \langle x-1 \rangle$ idealini göz önüne alalım. $x-1 = (-1) + x \in P$ fakat $x \notin P$ ve $-1 \notin P$ olduğundan P bir derecelendirilmiş ideal değildir.

Hatırlatma: R_1, R_2 derecelendirilmiş halkaları için $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ halka homomorfizması her $g \in G$ için $\varphi((R_1)_g) \subseteq (R_2)_g$ koşulunu sağladığında φ , derecelendirilmiş halka homomorfizması olur.

Tanım 2.1.1.4: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin derecelendirilmiş bir has ideali olsun. $a, b \in h(R)$ olmak üzere $ab \in I$ iken $a \in I$ veya $b \in I$ oluyorsa I ya bir derecelendirilmiş asal ideal denir [14].

Northcotth “On Homogeneous Ideals” adlı çalışmasında her $\mathbb{N}$ – derecelendirilmiş asal idealin aynı zamanda bir asal ideal olduğunu aşağıdaki önermede göstermiştir [25].

Önerme 2.1.1.5: R bir $\mathbb{N}$ –derecelendirilmiş halka ve I da R nin derecelendirilmiş asal ideali olsun. Bu durumda I , R nin bir asal idealidir.

İspat: $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in I$ olsun. R derecelendirilmiş halka olduğundan

$$a = \sum_{i=0}^n a_{g_i} \text{ ve } b = \sum_{i=0}^n b_{g_i} \text{ şeklindedir. Şimdi } a \notin I \text{ ve } b \notin I \text{ olduğunu kabul edelim. } I$$

derecelendirilmiş ideal ve $a, b \notin I$ olduğundan $a_{g_t} \notin I$ ve $b_{g_k} \notin I$ olacak şekilde en küçük

t, k pozitif sayılarını seçebiliriz. Burada $a_{g_0}, a_{g_1}, \dots, a_{g_{t-1}} \in I$ ve $b_{g_0}, b_{g_1}, \dots, b_{g_{k-1}} \in I$ olur.

$ab \in I$ ve I da derecelendirilmiş ideal olduğundan ab nin $(k+t)$. bileşeni,

$$a_{g_{k+t}} b_{g_0} + a_{g_{k+t-1}} b_{g_1} + \dots + a_{g_{t+1}} b_{g_{k-1}} + a_{g_t} b_{g_k} + a_{g_{t-1}} b_{g_{k+1}} + \dots + a_{g_0} b_{g_{k+t}} \in I \text{ olur.}$$

Böylece $a_{g_t} b_{g_k} \in I$ ve I derecelendirilmiş asal ideal olduğundan $a_{g_t} \in I$ veya $b_{g_k} \in I$

çelişkisi elde edilir.

Yukarıdaki önermenin tersinin her zaman doğru olmayacağını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek: $R = \mathbb{Q}[x] = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}x^2 \oplus \dots$ bir $\mathbb{N}$ –derecelendirilmiş halka olmak üzere

$P = \langle x-1 \rangle$ idealini göz önüne alalım. $x-1 = (-1) + x \in P$ fakat $x \notin P$ ve $-1 \notin P$

olduğundan olduğundan P bir derecelendirilmiş ideal değildir. Fakat $x-1$, $\mathbb{Q}[x]$

polinom halkasında bir asal polinom olduğundan P bir asal idealdir.

Tanım 2.1.1.6: R bir derecelendirilmiş halka olsun. Her $0 \neq a \in h(R)$ elemanı için

$ab = 1_R$ olacak şekilde bir $b \in h(R)$ elemanı var ise R derecelendirilmiş halkasına

derecelendirilmiş cisim denir [26].

Tanım 2.1.1.7: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin derecelendirilmiş bir has

ideali olsun. R nin $I \subseteq J$ koşulunu sağlayan her derecelendirilmiş J ideali için $J = I$

veya $J = R$ oluyorsa I ya bir derecelendirilmiş maksimal ideal (kısaca G –maksimal

ideal) denir [27].

Tanım 2.1.1.8: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin derecelendirilmiş bir has ideali olsun. $a, b \in h(R)$ olmak üzere $ab \in I$ iken $a \in I$ veya bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $b^k \in I$ oluyor ise I ya bir derecelendirilmiş asalımsı ideal denir [14].

Tanım 2.1.1.9: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin derecelendirilmiş bir ideali olsun.

$$Gr(I) = \{x \in R \mid \text{her } g \in G \text{ için bir } n_g \in \mathbb{Z}^+ \text{ vardır öyle ki } x_g^{n_g} \in I\}$$

derecelendirilmiş ideale I nin derecelendirilmiş radikali denir [14].

Önerme 2.1.1.10: R bir derecelendirilmiş halka, I ve J de R nin derecelendirilmiş idealleri olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) $I \subseteq Gr(I)$
- (ii) $Gr(Gr(I)) = Gr(I)$
- (iii) $Gr(I) = R$ olması için gerek ve yeter koşul $I = R$ olmasıdır.
- (iv) $Gr(IJ) = Gr(I \cap J) = Gr(I) \cap Gr(J)$
- (v) P , R nin derecelendirilmiş asal ideali ise her $n > 0$ için $Gr(P^n) = P$ dir [14].

Önerme 2.1.1.11: R bir derecelendirilmiş halka, $I_1, \dots, I_n$ R nin derecelendirilmiş idealleri ve P de R nin $\bigcap_{i=1}^n I_i \subseteq P$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş asal ideali olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde bir i için $I_i \subseteq P$ dir. Ayrıca $P = \bigcap_{i=1}^n I_i$ ise bir i için $P = I_i$ dir [14].

Yardımcı Teorem 2.1.1.12: R bir derecelendirilmiş halka, I ve J de R nin derecelendirilmiş idealleri olsun. $Gr(I) + Gr(J) = R$ ise $I + J = R$ dir [14].

2.1.2 Derecelendirilmiş Halkalar Üzerinde Topoloji

Derecelendirilmiş R halkasının tüm asal ideallerinin kümesi $h-Spec(R)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2.1: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin bir derecelendirilmiş ideali olsun. $V_G^R(I) = \{P \in h-Spec(R) \mid I \subseteq P\}$ kümesi I nin varyetesi olarak adlandırılır [28].

Önerme 2.1.2.2: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin bir derecelendirilmiş ideali olmak üzere $V_G^R(I)$ kümesi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

1. $V_G^R(0) = h-Spec(R)$ ve $V_G^R(R) = \emptyset$
2. $\bigcap_{i \in \Lambda} V_G^R(I_i) = V_G^R(\sum_{i \in \Lambda} I_i) = V_G^R(\bigcup_{i \in \Lambda} I_i)$
3. $V_G^R(I) \cup V_G^R(J) = V_G^R(I \cap J) = V_G^R(IJ)$

İspat :

1. $P \in h-Spec(R)$ için $0 \subseteq P$ olduğundan $P \in V_G^R(0)$ olur ve buradan $h-Spec(R) = V_G^R(0)$ olur. $V_G^R(R) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Buradan $P \in V_G^R(R)$ vardır ve böylece $1 \in R \subseteq P$ çelişkisi elde edilir.
2. $P \in \bigcap_{i \in \Lambda} V_G^R(I_i)$ olsun. Buradan, her $i \in \Lambda$ için $P \in V_G^R(I_i)$ dir ve $I_i \subseteq P$ dir. $\sum_{i \in \Lambda} I_i \subseteq P$ olduğundan $P \in V_G^R(\sum_{i \in \Lambda} I_i)$ elde edilir. Tersine $P \in V_G^R(\sum_{i \in \Lambda} I_i)$ olsun. Buradan, $\sum_{i \in \Lambda} I_i \subseteq P$ ve böylece her $i \in \Lambda$ için $I_i \subseteq P$ olur. O halde her $i \in \Lambda$ için $P \in V_G^R(I_i)$ olduğu görülür ve buradan $P \in \bigcap_{i \in \Lambda} V_G^R(I_i)$ olur.
3. $V_G^R(I) \subseteq V_G^R(I \cap J)$ ve $V_G^R(J) \subseteq V_G^R(I \cap J)$ olduğundan $V_G^R(I) \cup V_G^R(J) \subseteq V_G^R(I \cap J)$ dir. Ters kapsama için $P \in V_G^R(I \cap J)$ olsun. Buradan $I \cap J \subseteq P$ olur. P derecelendirilmiş asal ideal olduğundan $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir. Buradan $P \in V_G^R(I)$ veya $P \in V_G^R(J)$ olur. Böylece $V_G^R(I \cap J) \subseteq V_G^R(I) \cup V_G^R(J)$ elde edilir [28].

Sonuç 2.1.2.3: $\xi(R) = \{V_G^R(I) \mid I \triangleleft_G R\}$ kümeler ailesi kapalı kümeler için topolojik uzay aksiyomlarını sağlar. $h-Spec(R)$ üzerinde oluşturulan bu topoloji Zariski topolojisi veya spektral topoloji olarak adlandırılır. Bu topolojinin açık kümeleri $U = h-Spec(R) \setminus V_G^R(I)$ şeklindedir [28].

Önerme 2.1.2.4: R bir derecelendirilmiş halka ve $r \in h(R)$ olsun. $D_r = h-Spec(R) \setminus V_G^R(rR)$ bir açık kümedir ve $\{D_r \mid r \in h(R)\}$, $h-Spec(R)$ üzerindeki Zariski topolojisi için bir tabandır [28].

İspat : U , $h-Spec(R)$ de bir açık küme olsun. Dolayısıyla R nin derecelendirilmiş bir I ideali için $U = h-Spec(R) \setminus V_G^R(I)$ dır. Şu halde, $V_G^R(I) = V_G^R(h(I)) = \bigcap_{r \in h(I)} V_G^R(rR)$ dır. Buradan $U = \bigcup_{r \in h(I)} (h-Spec(R) \setminus V_G^R(rR)) = \bigcup_{r \in h(I)} D_r$ elde edilir ve $\{D_r \mid r \in h(R)\}$ kümesinin Zariski topolojisi için bir taban olduğu görülür.

2.1.3 Derecelendirilmiş İdeallerin Sonlu Birleşimi

Tanım 2.1.3.1: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin derecelendirilmiş bir ideali olsun. Herhangi $\{A_i\}_{i=1}^n$ derecelendirilmiş ideal ailesi için $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ iken $1 \leq j \leq n$ olacak şekilde bir j için $I \subseteq A_j$ sağlanıyorsa I ya derecelendirilmiş u – ideal denir. R halkasının her derecelendirilmiş ideali u – ideal ise R ye derecelendirilmiş u – halka denir.

Önerme 2.1.3.2: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin derecelendirilmiş ideali olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

- (i) R derecelendirilmiş u – halkadır.

(ii) R nin her sonlu üretilmiş derecelendirilmiş ideali derecelendirilmiş u – idealdir.

(iii) $I = \bigcup_{i=1}^n A_i$ sonlu üretilmiş ise $1 \leq j \leq n$ olacak şekilde bir j için $I = A_j$ dir.

(iv) $I = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ise $1 \leq j \leq n$ olacak şekilde bir j için $I = A_j$ dir.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $I = \bigcup_{i=1}^n A_i$ sonlu üretilmiş derecelendirilmiş ideal olduğundan (ii)'den

u – idealdir. Böylece $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ olduğundan $1 \leq j \leq n$ olacak şekilde bir j için

$I \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i = I$ dir ve buradan $I = A_j$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $I = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ve her j için $I \neq A_j$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$1 \leq j \leq n$ için en az bir $a_j \in I \setminus A_j$ vardır. Şimdi $J = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ diyelim.

$J = J \cap I = J \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (J \cap A_i)$ dir ve (iii)'den $1 \leq j \leq n$ olacak

şekilde bir j için $J = J \cap A_j$ olur. Böylece $J \subseteq A_j$ çelişkisi elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (i) $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ ise $I = \bigcup_{i=1}^n (I \cap A_i)$ olur ve (iv)'den $1 \leq j \leq n$ olacak şekilde

bir j için $I = I \cap A_j$ olur, yani $I \subseteq A_j$ dir.

Önerme 2.1.3.3: Derecelendirilmiş u – halkanın her homomorf görüntüsü de u – halkadır.

İspat: R bir derecelendirilmiş u – halka ve $f : R \rightarrow R'$ bir derecelendirilmiş epimorfizma olsun. J' , R' nün bir derecelendirilmiş ideali ve $\{J_i'\}_{i=1}^n$, R' nün idealleri olmak üzere $J' \subseteq \bigcup_{i=1}^n J_i'$ kapsaması geçerli olsun. f epimorfizma olduğundan $\zeta_k f \subseteq J_i$, $\zeta_k f \subseteq J$ ve $f(J_i) = J_i'$, $f(J) = J'$ olacak şekilde J_i derecelendirilmiş idealleri ve R nin derecelendirilmiş J ideali vardır. Buradan $f(J) \subseteq \bigcup_{i=1}^n f(J_i) = f(\bigcup_{i=1}^n J_i)$ olur. Böylece $J \subseteq \bigcup_{i=1}^n J_i$ dır ve $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde bir i için $J \subseteq J_i$ olur. Dolayısıyla $J' = f(J) \subseteq f(J_i) = J_i'$ dır ve böylece R' nün derecelendirilmiş u – halka olduğu görülür.

Not: $S \subseteq h(R)$ çarpımsal kapalı alt küme olsun, $S^{-1}R = \bigoplus_{g \in G} (S^{-1}R)_g$;
 $(S^{-1}R)_g := \left\{ \frac{r}{s} : r \in R, s \in S, g = (\deg s)^{-1}(\deg r) \right\}$ olarak tanımlanır.

2.2 Derecelendirilmiş Kompakt Paketlenmiş Halkalar

Tanım 2.2.1: R bir derecelendirilmiş halka olsun. R nin her derecelendirilmiş I ideali ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ derecelendirilmiş asal ideal ailesi için $I \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ iken bir $\beta \in \Delta$ indisi için $I \subseteq P_\beta$ oluyorsa R halkasına $h\text{-Spec}(R)$ ile derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka denir.

Önerme 2.2.2: Derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halkanın her homomorf görüntüsü de derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halkadır.

İspat: R bir derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka ve R' herhangi bir derecelendirilmiş halka olsun. $f : R \rightarrow R'$ ye epimorfizma olsun. $\{P'_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ R' nin derecelendirilmiş asal ideallerinin bir ailesi ve I' , R' nün $I' \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P'_\alpha$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş bir ideali olsun. f epimorfizma olduğundan

$\zeta ekf \subseteq P_\alpha$, $\zeta ekf \subseteq I$ ve $f(P_\alpha) = P'_\alpha$, $f(I) = I'$ olacak şekilde P_α derecelendirilmiş asal idealleri ve R nin derecelendirilmiş I ideali vardır. Buradan $f(I) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} f(P_\alpha) \subseteq f(\bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha)$ olur. Böylece $I \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ dır ve bir $\beta \in \Delta$ indisi için $I \subseteq P_\beta$ olur. Dolayısıyla bir $\beta \in \Delta$ indisi için $I' = f(I) \subseteq f(P_\beta) = P'_\beta$ dır ve böylece R' nün derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 2.2.3: R bir derecelendirilmiş halka, $a \in h(R)$ ve I, J de R nin derecelendirilmiş idealleri olsun. Buradan $\langle a \rangle$, $I+J$ ve $I \cap J$ de R nin derecelendirilmiş idealleridir [29].

Teorem 2.2.4 (Temel İdeal Teoremi): Bir x elemanı, Noetherian bir R halkasında birimsel olmayan homojen eleman ve P derecelendirilmiş asal ideali $\langle x \rangle$ üzerinde minimal olsun. O halde $h - ht(P) \leq 1$ dir [30].

Teorem 2.2.5: R bir derecelendirilmiş Noetherian halka olsun. R bir derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka ise $h - \dim R \leq 1$ 'dir.

İspat: R bir derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka olsun. Teorem 2.2.4'ten her derecelendirilmiş P asal ideali için $P = \sqrt{\langle r \rangle}$ olacak şekilde bir $r \in h(R)$ vardır. Temel İdeal Teoreminden $h - ht(P) \leq 1$ elde edilir ve buradan da $h - \dim R \leq 1$ olur.

Hatırlatma : R derecelendirilmiş halkasının nil radikali sıfır ise R ye indirgenmiş derecelendirilmiş halka denir.

Teorem 2.2.6: R bir derecelendirilmiş halka ve $h - \text{Min}(R) = \{P_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ olsun. Her $\alpha \in \Delta$ indisi için $P_\alpha \not\subseteq \bigcup_{\alpha \neq \beta} P_\beta$ ise $h - \text{Min}(R)$ sonludur.

İspat: Genelliği bozmadan R yi indirgenmiş halka kabul edelim. Böylece $P \in h-Min(R)$ için R_P derecelendirilmiş cisimdir. $R' = \prod R_{P_\alpha}$ olsun. $\theta_\alpha : R \rightarrow R_{P_\alpha}$ kanonik homomorfizması yardımıyla $\psi : R \rightarrow R'$, $r \mapsto \{\theta_\alpha(r)\}$ tanımlayalım. $h-Min(R)$ sonlu değil ise $\sum R_{P_\alpha}$, R' nün has idealidir. $\sum R_{P_\alpha}$ yı kapsayan R' nün derecelendirilmiş bir maksimal ideali vardır. Buna $\mathcal{M}$ diyelim. O halde $\mathcal{M} \cap R$, R nin bir derecelendirilmiş minimal asal ideali P_γ yı kapsar. $a \notin \bigcup_{\alpha \neq \beta} P_\beta$ olmak üzere $a \in P_\alpha \cap h(R)$ alalım. R , R' nün derecelendirilmiş alt halkası olduğundan a yı $\{\theta_\alpha(a)\}$ ile özdeşleyebiliriz. Ayrıca $\beta \neq \alpha$ için $\theta_\beta(a)$, R_{P_β} halkasında birimseldir. Şimdi $\beta \neq \alpha$ için $b_\beta = \theta_\beta(a)^{-1}$ ve $\beta = \alpha$ iken $b_\beta = 0$ olacak şekilde $b = \{b_\beta\} \in R'$ elemanını tanımlayalım. Böylece $ab \in \mathcal{M}$ elde edilir ve ab nin sadece γ bileşeni 0, onun haricinde diğer bileşenleri birim olur. O halde $\sum R_{P_\alpha} \subseteq \mathcal{M}$ olduğundan $\mathcal{M}$, R' nün birimini içerir.

Sonuç 2.2.7: R bir derecelendirilmiş halka ve $h-Min(R) = \{P_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ olsun. Her $\alpha \in \Delta$ indisi için $P_\alpha \not\subset \bigcup_{\alpha \neq \beta} P_\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $h-Min(R)$ nin sonlu olmasıdır.

Tanım 2.2.8: R bir derecelendirilmiş halka, Δ indis kümesi ve her $\alpha \in \Delta$ indisi için $r, s_\alpha \in h(R) \setminus \{0\}$ olsun. $D_r \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} D_{s_\alpha}$ iken bir $\beta \in \Delta$ indisi için $D_r \subseteq D_{s_\beta}$ ise R , (*) özelliğini sağlıyor denir.

Teorem 2.2.9: R bir derecelendirilmiş halka olsun. R , (*) özelliğini sağlıyorsa R nin en çok iki maksimal derecelendirilmiş ideali vardır.

İspat: R nin (*) özelliğini sağladığını kabul edelim ve $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ ve $\mathcal{M}_3$, R nin farklı derecelendirilmiş maksimal idealleri olsun. $a + b = 1_R$ olacak şekilde $a \in \mathcal{M}_1 \cap h(R)$ ve $b \in \mathcal{M}_2 \cap h(R)$ vardır. Şimdi $c \in (\mathcal{M}_3 \cap h(R)) \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$ alalım. $c = ca + cb$

olduğundan $D_c \subseteq D_{ac} \cup D_{bc}$ olur. $R, (*)$ özelliğini sağladığından $D_c \subseteq D_{ac}$ veya $D_c \subseteq D_{bc}$ çelişkisi elde edilir.

Sonuç 2.2.10: R bir derecelendirilmiş halka ve R nin sıfırdan farklı her derecelendirilmiş asal ideali derecelendirilmiş maksimal ideal olsun. R nin $(*)$ özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul R nin sıfırdan farklı en çok iki tane derecelendirilmiş asal idealinin olmasıdır.

İspat: R nin sıfırdan farklı en çok iki tane derecelendirilmiş asal ideali olduğunu kabul edelim. r, R nin sıfırdan farklı birimsel olmayan homojen elemanı ise $D_r \setminus \{(0)\}$ boş küme veya tek nokta kümesidir. Buradan $R, (*)$ özelliğini sağlar. Tersi için $R, (*)$ özelliğini sağlıyorsa teorem 2.2.9'dan R nin en çok iki derecelendirilmiş maksimal idealinin olduğu görülür. Böylece kabulümüzden R nin sıfırdan farklı en çok iki tane derecelendirilmiş asal ideali vardır.

2.3 Derecelendirilmiş Aralarında Asal Paketlenmiş Halkalar

Tanım 2.3.1: R bir derecelendirilmiş halka, I bir derecelendirilmiş ideal ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ kümesi, R nin derecelendirilmiş asal idealler ailesi olsun. Her $\alpha \in \Delta$ indisi için $I + P_\alpha = R$ iken $I \not\subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ oluyorsa, I idealine derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş ideal denir. R halkasının her derecelendirilmiş ideali aralarında asal paketlenmiş ideal ise R halkasına $h-Spec(R)$ ile derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka denir.

Önerme 2.3.2: Derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halkanın her homomorf görüntüsü de derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halkadır.

İspat: R derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka ve R' herhangi bir derecelendirilmiş halka olsun. $f: R \rightarrow R'$ bir epimorfizma olsun. J, R' nün

derecelendirilmiş bir ideali ve $\{P'_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, $J + P'_\alpha = R'$ olacak şekilde R' nün derecelendirilmiş asal ideallerinin bir ailesi olsun. f epimorfizma olduğundan $\zeta ekf \subseteq I$, $\zeta ekf \subseteq P_\alpha$, $f(I) = J$ ve $f(P_\alpha) = P'_\alpha$ olacak şekilde bir derecelendirilmiş I ideali ve P_α derecelendirilmiş asal idealleri vardır. Buradan $J + P'_\alpha = f(I + P_\alpha) = f(R) = R'$ elde edilir. Şimdi $I + P_\alpha = R$ olduğunu göstermek için $r \in R$ alalım. Buradan $f(r) \in f(R) = f(I + P_\alpha)$ olur. Böylece $f(r) = f(m)$ olacak şekilde bir $m \in I + P_\alpha$ vardır. Buradan $r - m \in \zeta ekf \subseteq I + P_\alpha$ ve böylece $r \in I + P_\alpha$ olur. R derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka olduğundan $I \not\subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ dir. Buradan $f(I) \not\subseteq f(\bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha)$ olur. $f(I) \subseteq f(\bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha)$ ise $\zeta ekf \subseteq I$ olduğundan $I \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ çelişkisi elde edilir. $\bigcup_{\alpha \in \Delta} f(P_\alpha) = f(\bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha)$ olduğundan $J = f(I) \not\subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} f(P_\alpha) = P'_\alpha$ dir. Böylece R' nün derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka olduğu görülür.

Önerme 2.3.3: R bir derecelendirilmiş yarı lokal halka ise aynı zamanda derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halkadır.

İspat: R derecelendirilmiş yarı lokal halka ve $h - Max(R) = \{M_1, \dots, M_k\}$ olsun. I , R nin bir derecelendirilmiş ideali ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, R nin $\alpha \in \Delta$ indisi için $I + P_\alpha = R$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş asal ideallerinin bir ailesi olsun. Her $\alpha \in \Delta$ indisi için $P_\alpha \subseteq M_{i_j}$ olacak şekilde $\{1, \dots, k\}$ nın bir $\{i_1, \dots, i_t\}$ alt kümesi vardır ve $i_j \in \{1, \dots, k\}$ dir. Buradan her $j = 1, \dots, t$ için $I + M_{i_j} = R$ elde edilir. Şimdi $I \subseteq \bigcup_{j=1}^t M_{i_j}$ olduğunu kabul edelim. Her derecelendirilmiş maksimal ideal bir derecelendirilmiş asal ideal olduğundan asaldan kaçınma teoremi [31] yardımıyla bir $i_l \in \{1, \dots, k\}$ için $I \subseteq M_{i_l}$ elde edilir ve buradan $I + M_{i_j} = M_{i_j} = R$ çelişkisi elde edilir. Böylece $I \not\subseteq \bigcup_{j=1}^t M_{i_j}$ olur ve buradan $I \not\subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ elde edilir.

Önerme 2.3.4: Her derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halkadır.

İspat: R derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka olsun. I , R nin bir derecelendirilmiş ideali ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, R nin her $\alpha \in \Delta$ indisi için $I + P_\alpha = R$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş asal ideallerinin bir ailesi olsun. $I \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ olduğunu kabul edelim. R derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka olduğundan bir $\beta \in \Delta$ indisi için $I \subseteq P_\beta$ olur ve buradan $I + P_\beta = P_\beta = R$ çelişkisi elde edilir. Böylece $I \not\subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ dır.

Teorem 2.3.5: R derecelendirilmiş tamlık bölgesi ve $h-\dim R=1$ olsun. R nin derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka olması için gerek ve yeter koşul derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka olmasıdır.

İspat: Önerme 2.3.4'ten her derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halkanın derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka olduğu açıktır. Şimdi R derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka ve her $\alpha \in \Delta$ indisi için $P_\alpha \neq 0$ olmak üzere $I \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ olsun. Bir $\beta \in \Delta$ indisi için $I + P_\beta \neq R$ olduğu kolaylıkla görülür. Buradan $I + P_\beta \subseteq M$ olacak şekilde en az bir derecelendirilmiş M maksimal ideali vardır. $h-\dim R=1$ ve $0 \neq P_\beta$ olduğundan P_β bir derecelendirilmiş maksimal idealdir. Ayrıca $P_\beta \subseteq I + P_\beta \subseteq M$ olduğundan $P_\beta = M$ olur ve buradan $I \subseteq P_\beta$ elde edilir.

Teorem 2.3.6: R bir derecelendirilmiş halka olsun. R nin derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka olması için gerek ve yeter koşul R nin $h-\text{Max}(R)$ ile derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka olmasıdır.

İspat: R derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka olsun. $h-\text{Max}(R) \subseteq h-\text{Spec}(R)$ olduğundan R nin $h-\text{Max}(R)$ ile derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka olduğu açıktır. Şimdi R nin $h-\text{Max}(R)$ ile

derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halka olduğunu kabul edelim. I , R nin bir derecelendirilmiş ideali ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, R nin her $\alpha \in \Delta$ indisi için $I + P_\alpha = R$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş asal ideallerinin bir ailesi olsun. $P_\alpha \subseteq M_\alpha$ olacak şekilde en az bir $M_\alpha \in h\text{-Max}(R)$ vardır. Her $\alpha \in \Delta$ indisi için $I + M_\alpha = R$ dir ve kabülümüzden $I \not\subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ elde edilir. Sonuç olarak, $I \not\subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ elde edilir.

2.4 Derecelendirilmiş 2-yutan Quasi Asalımsı İdealler

Tanım 2.4.1: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin derecelendirilmiş bir has ideali olsun. $a, b, c \in h(R)$ olmak üzere $abc \in I$ olması $ab \in I$ veya $ac \in I$ veya $bc \in I$ olmasını gerektiriyorsa I ya derecelendirilmiş 2-yutan ideal denir [32].

Tanım 2.4.2: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin derecelendirilmiş bir has ideali olsun. $a, b, c \in h(R)$ olmak üzere $abc \in I$ olması $ab \in I$ veya $ac \in Gr(I)$ veya $bc \in Gr(I)$ olmasını gerektiriyorsa I ya derecelendirilmiş 2-yutan asalımsı ideal denir [33].

Tanım 2.4.3: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin derecelendirilmiş bir has ideali olsun. $a, b, c \in h(R)$ olmak üzere $abc \in I$ olması $ab \in Gr(I)$ veya $ac \in Gr(I)$ veya $bc \in Gr(I)$ olmasını gerektiriyorsa I ya derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı ideal denir.

Önerme 2.4.4: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin bir derecelendirilmiş has ideali olsun. I idealinin R nin bir derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı ideali olması için gerek ve yeter koşul $Gr(I)$ nin R halkasının derecelendirilmiş 2-yutan ideali olmasıdır.

İspat: I ideali R nin bir derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı ideali olsun. $a, b, c \in h(R)$ olmak üzere $abc \in Gr(I)$ olsun. Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(abc)^n = a^n b^n c^n \in I$ dir.

Buradan $a^n b^n \in Gr(I)$ veya $a^n c^n \in Gr(I)$ veya $b^n c^n \in Gr(I)$ dır ve böylece $ab \in Gr(I)$ veya $ac \in Gr(I)$ veya $bc \in Gr(I)$ olduğu görülür. Tersini için, $Gr(I)$ R halkasının derecelendirilmiş 2-yutan ideali olsun. $a, b, c \in h(R)$ olmak üzere $abc \in I$ alalım. $Gr(I)$ R halkasının derecelendirilmiş 2-yutan ideali ve $abc \in Gr(I)$ olduğundan $ab \in Gr(I)$ veya $ac \in Gr(I)$ veya $bc \in Gr(I)$ olur. Sonuç olarak I , R nin bir derecelendirilmiş 2-yutan quazi asalımsı idealidir.

Not: Her derecelendirilmiş 2-yutan ideal ve derecelendirilmiş 2-yutan asalımsı ideal bir derecelendirilmiş 2-yutan quazi asalımsı idealdir. Bu ifadenin tersinin her zaman doğru olmadığını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek: K bir cisim ve $R = K[x, y, z]$ bir $\mathbb{Z}$ -derecelendirilmiş halka olsun. $I = \langle xyz, x^2 y^2 \rangle$ R halkasının $xyz, x^2 y^2$ homojen elemanları tarafından üretilmiş bir derecelendirilmiş ideali olsun. $xyz \in I$ fakat $xy \notin I$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(xz)^n \notin I$ ve $(yz)^n \notin I$ olduğundan I bir derecelendirilmiş 2-yutan (asalımsı) ideal değildir. Ayrıca $Gr(I) = \langle xy \rangle = \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ olduğundan $Gr(I)$ R halkasının derecelendirilmiş 2-yutan idealidir ve Önerme 2.4.4'ten I derecelendirilmiş 2-yutan quazi asalımsı idealdir.

Teorem 2.4.5: R_1, R_2 derecelendirilmiş halkalar olsun. Sırasıyla I_1, I_2 derecelendirilmiş idealleri ve $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ derecelendirilmiş halka homomorfizması verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- (i) I_2, R_2 halkasının derecelendirilmiş 2-yutan ideali ise $\varphi^{-1}(I_2)$ R_1 halkasının derecelendirilmiş 2-yutan idealidir.
- (ii) φ derecelendirilmiş epimorfizma ve I_1, R_1 halkasının çekirdeğini kapsayan derecelendirilmiş 2-yutan ideali ise $\varphi(I_1)$ R_2 halkasının derecelendirilmiş 2-yutan idealidir.

İspat:

(i) I_2, R_2 halkasının derecelendirilmiş 2-yutan ideali ve $a, b, c \in h(R_1)$ olmak üzere $abc \in \varphi^{-1}(I_2)$ olsun. Buradan $\varphi(abc) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c) \in I_2$ elde edilir. I_2, R_2 halkasının derecelendirilmiş 2-yutan ideali olduğundan $\varphi(a)\varphi(b) \in I_2$ veya $\varphi(a)\varphi(c) \in I_2$ veya $\varphi(b)\varphi(c) \in I_2$ dir ve böylece $ab \in \varphi^{-1}(I_2)$ veya $ac \in \varphi^{-1}(I_2)$ veya $bc \in \varphi^{-1}(I_2)$ olur.

(ii) φ derecelendirilmiş epimorfizma, I_1, R_1 halkasının çekirdeğini içeren derecelendirilmiş 2-yutan ideali ve $a', b', c' \in h(R_2)$ olmak üzere $a'b'c' \in \varphi(I_1)$ olsun. φ derecelendirilmiş epimorfizma olduğundan $\varphi(a) = a', \varphi(b) = b'$ ve $\varphi(c) = c'$ olacak şekilde $a, b, c \in h(R_1)$ vardır. Buradan $\varphi(abc) = a'b'c' \in \varphi(I_1)$ olduğu görülür. $I_1 \supseteq \text{Çek}\varphi$ olduğundan $abc \in I_1$ elde edilir. Böylece $ab \in I_1$ veya $ac \in I_1$ veya $bc \in I_1$ dir ve buradan $\varphi(ab) = a'b' \in \varphi(I_1)$ veya $\varphi(ac) = a'c' \in \varphi(I_1)$ veya $\varphi(bc) = b'c' \in \varphi(I_1)$ elde edilir. Sonuç olarak $\varphi(I_1), R_2$ halkasının derecelendirilmiş 2-yutan ideali olur.

Not:

- (i) I_2, R_2 halkasının derecelendirilmiş ideali ve $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ derecelendirilmiş halka homomorfizması olsun. $Gr(\varphi^{-1}(I_2)) = \varphi^{-1}(Gr(I_2))$ dir.
- (ii) I_1, R_1 halkasının derecelendirilmiş ideali ve $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ derecelendirilmiş halka epimorfizması olsun. $\text{Çek}\varphi \subseteq I_1$ ise $Gr(\varphi(I_1)) = \varphi(Gr(I_1))$ dir.

Sonuç 2.4.6:

- (i) $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ derecelendirilmiş halka epimorfizması ve I_1 de R_1 halkasının çekirdeğini kapsayan derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı ideali ise $\varphi(I_1)$ de R_2 halkasının derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı idealidir.

- (ii) I_2, R_2 halkasının derecelendirilmiş 2–yutan quasi asalımsı ideali ise $\varphi^{-1}(I_2)$ R_1 halkasının derecelendirilmiş 2–yutan quasi asalımsı idealidir.

İspat: Teorem 2.4.5' dan kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 2.4.7: R bir derecelendirilmiş halka, I R nin bir derecelendirilmiş ideali ve P de R nin $I \subseteq P$ koşulunu sağlayan bir derecelendirilmiş has ideali olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

- (i) P, R nin derecelendirilmiş 2–yutan quasi asalımsı ideali ise P/I da R/I nin derecelendirilmiş 2–yutan quasi asalımsı idealidir.
- (ii) P, R nin derecelendirilmiş 2–yutan quasi asalımsı ideali ve S, R nin $S \not\subseteq P$ koşulunu sağlayan bir derecelendirilmiş alt halkası ise $P \cap S$ de S nin derecelendirilmiş 2–yutan quasi asalımsı idealidir.

İspat: Sonuç 2.4.6 den kolaylıkla görülür.

Not: R bir derecelendirilmiş halka ve I da R nin bir derecelendirilmiş has ideali olsun. $G - Z_I(R) = \{r \in h(R) \mid rs \in I \text{ olacak şekilde bir } s \in h(R) - h(I) \text{ vardır}\}$ olarak tanımlanır.

Teorem 2.4.8: R bir derecelendirilmiş halka, $S \subseteq h(R)$ R nin çarpımsal kapalı alt kümesi ve I da R nin bir derecelendirilmiş has ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- (i) I, R nin $I \cap S = \emptyset$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş 2–yutan quasi asalımsı ideali ise $S^{-1}I$ de $S^{-1}R$ nin derecelendirilmiş 2–yutan quasi asalımsı idealidir.
- (ii) $S^{-1}I, S^{-1}R$ nin derecelendirilmiş 2–yutan quasi asalımsı ideali ve $S \cap G - Z_I(R) = \emptyset$ ise I, R nin derecelendirilmiş 2–yutan quasi asalımsı idealidir.

İspat:

(i) $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $\frac{a_i}{s_i} \in h(S^{-1}R)$ için $\frac{a_1}{s_1} \frac{a_2}{s_2} \frac{a_3}{s_3} \in S^{-1}I$ olsun. Buradan bir

$t \in S$ için $(ta_1)a_2a_3 \in I$ elde edilir. I, R nin derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı ideali olduğundan $ta_1a_2 \in Gr(I)$ veya $ta_1a_3 \in Gr(I)$ veya $a_2a_3 \in Gr(I)$

olduğu görülür. Buradan $\frac{a_1}{s_1} \frac{a_2}{s_2} = \frac{ta_1a_2}{ts_1s_2} \in S^{-1}Gr(I) = Gr(S^{-1}I)$ veya

$\frac{a_1}{s_1} \frac{a_3}{s_3} \in Gr(S^{-1}I)$ veya $\frac{a_2}{s_2} \frac{a_3}{s_3} \in Gr(S^{-1}I)$ elde edilir.

(ii) $a, b, c \in h(R)$ olmak üzere $abc \in I$ olsun. Buradan $\frac{abc}{1} = \frac{a}{1} \frac{b}{1} \frac{c}{1} \in S^{-1}I$ olduğu

görüldür. Böylece $\frac{a}{1} \frac{b}{1} \in Gr(S^{-1}I) = S^{-1}(Gr(I))$ veya $\frac{a}{1} \frac{c}{1} \in S^{-1}(Gr(I))$ veya

$\frac{b}{1} \frac{c}{1} \in S^{-1}(Gr(I))$ dir. $\frac{a}{1} \frac{b}{1} \in Gr(S^{-1}I) = S^{-1}(Gr(I))$ olduğunu kabul edelim.

Buradan bir $x \in S$ için $x(ab) \in Gr(I)$ olur ve bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n(a^n b^n) \in I$ olduğu görülür. $x^n \in S$ ve $S \cap G - Z_I(R) = \emptyset$ olduğundan $a^n b^n \in I$ ve buradan $ab \in Gr(I)$ elde edilir. Diğer durumlarda da $ac \in Gr(I)$ veya $bc \in Gr(I)$ olduğu görülür. Böylece I, R nin derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı idealidir.

Tanım 2.4.9: R bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi olsun. Her $a, b \in h(R)$ için a/b veya b/a ise R ye derecelendirilmiş değerlendirme bölgesi denir [34]. Ayrıca [34, Teorem 2.2]'den R nin derecelendirilmiş değerlendirme bölgesi olması için gerek ve yeter koşul R nin tüm derecelendirilmiş ideallerinin kapsama bağıntısı altında tam sıralı olmasıdır.

Önerme 2.4.10: R bir derecelendirilmiş değerlendirme bölgesi ise R halkasının tüm derecelendirilmiş idealleri derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı idealdir.

İspat: I , R halkasının bir derecelendirilmiş has ideali olsun. P , I yı kapsayan herhangi bir derecelendirilmiş asal ideal olmak üzere $Gr(I) = \bigcap_{I \subseteq P} P$ olduğu kolaylıkla görülür. R bir derecelendirilmiş değerlendirme bölgesi olduğundan R halkasının I yı içeren tüm derecelendirilmiş asal idealleri tam sıralıdır ve buradan P_α bir derecelendirilmiş asal ideal olmak üzere $Gr(I) = P_\alpha$ dır.

2-YUTAN QUASI ASALIMSİ ALT MODÜLLER**3.1 Ön Bilgiler**

Bu bölümde tüm halkalar birimli, değişmeli ve sıfırdan farklı, tüm modüller ise birimli olarak kabul edilecektir. Yani M bir R –modül ise her $m \in M$ için $1_R.m = m$ dir.

Tanım 3.1.1: M bir R –modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Her $m \in M$, $a \in R$ için $am \in N$ olması $a \in (N :_R M)$ veya $m \in N$ olmasını gerektiriyorsa N ye asal alt modül denir. Burada $(N :_R M) = \{a \in R : \text{her } m \in M \text{ için } am \in N\}$ dir.

Tanım 3.1.2: M bir R –modül olsun. M nin her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde R nin bir I ideali varsa M ye çarpımsal modül denir [35].

Tanım 3.1.3: M bir R –modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Her $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ iken $ab \in (N :_R M)$ veya $am \in N$ veya $bm \in N$ oluyorsa N ye 2-yutan alt modül denir [22].

Her asal alt modül bir 2-yutan alt modüldür. Aşağıdaki örnekte ifadenin tersinin her zaman sağlanmadığını gösterelim.

Örnek: $\mathbb{Z}$ –modül $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ yi ve $N = 2\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$ yi göz önüne alalım. $2(1,5) = (2,10) \in N$ fakat $2 \notin (N:M) = 10\mathbb{Z}$ ve $(1,5) \notin N$ olduğundan N , M nin bir asal alt modülü değildir. Şimdi N nin 2-yutan alt modül olduğunu gösterelim. $ab(x,y) \in N$ olacak şekilde $a,b \in \mathbb{Z}$ ve $(x,y) \in M$ elemanları verilsin. Buradan $2|_{abx}$ ve $5|_{aby}$ olur. O halde $2|_a$, $2|_b$ veya $2|_x$ tir ve aynı şekilde $5|_a$, $5|_b$ veya $5|_y$ dir. Buradan $ab \in (N:M) = 10\mathbb{Z}$ veya $a(x,y) \in N$ veya $a(x,y) \in N$ olur ve böylece N , 2-yutan alt modüldür.

Not: M bir çarpımsal R –modül ve M nin N_1, N_2 alt modülleri için sırasıyla $N_1 = I_1M$ ve $N_2 = I_2M$ olacak şekilde R nin I_1, I_2 idealleri bulunabilir. Bu durumda N_1 ve N_2 alt modüllerinin çarpımı $N_1.N_2 = (I_1I_2)M$ olarak tanımlanır ve bu çarpım N_1, N_2 nin gösteriminden bağımsızdır.

Teorem 3.1.4: M bir çarpımsal R –modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (i) N bir asal alt modüldür.
- (ii) $(N :_R M)$ bir asal idealdir.
- (iii) $\text{Ann}(M) = (0 : M) = \{r \in R : rM = 0\}$ yi kapsayan bir P asal ideali için $N = PM$ şeklindedir [35].

Tanım 3.1.5: M bir R –modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Her $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ iken $ab \in (N :_R M)$ veya $am \in \text{rad}_M(N)$ veya $bm \in \text{rad}_M(N)$ oluyorsa N ye 2-yutan asalımsı alt modül denir. Burada $\text{rad}_M(N)$, N yi kapsayan tüm asal alt modüllerin arakesitidir. N yi kapsayan asal alt modül yoksa $\text{rad}_M(N) = M$ olarak kabul edilir [23].

Not: R bir halka ve I , R nin bir has ideali olsun. I , R nin 2-yutan(2-yutan asalımsı) alt modülü ise I ya R nin 2-yutan(2-yutan asalımsı) ideali denir.

Tanım 3.1.6: R bir halka ve I da R nin bir has ideali olsun. I nın radikali; $\sqrt{I} = \{a \in R : a^n \in I \text{ olacak şekilde bir } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ vardır}\}$ R halkasının bir asal idealiyse I ya quasi asalımsı ideal denir [36].

Tanım 3.1.7: M bir R –modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. $(N :_R M)$, R nin quasi asalımsı idealiyse N ye quasi asalımsı alt modül denir [17].

3.2 2-yutan Quasi Asalımsı Alt Modüller

Tanım 3.2.1: M bir R –modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Her $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $(0 \neq abm) abm \in N$ iken $ab \in \sqrt{(N :_R M)}$ veya $am \in \text{rad}_M(N)$ veya $bm \in \text{rad}_M(N)$ oluyorsa N ye 2-yutan (zayıf) quasi asalımsı alt modül denir.

Not:

(i) R bir halka ve I , R nin bir has ideali olsun. $\sqrt{I}$, R nin 2-yutan ideali ise I ya 2-yutan quasi asalımsı ideal denir [37]. [37, Önerme 2.5]’ten I nın 2-yutan quasi asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul $abc \in I$ iken $ab \in \sqrt{I}$ veya $ac \in \sqrt{I}$ veya $bc \in \sqrt{I}$ olmasıdır.

(ii) R –modül R nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülleri aynı zamanda 2-yutan quasi asalımsı idealdir.

Her 2-yutan alt modül ve 2-yutan asalımsı alt modül bir 2-yutan quasi asalımsı alt modüldür. İfadenin tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnekte gösterelim.

Örnek: $\mathbb{Z}[X]$ in bir alt halkası $R_0 = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : a_1 \text{ 3'ün katı}\}$ ve $R = R_0 \times R_0$ halkasını göz önüne alalım. $Q = \langle 9x^2, 3x^3, x^4, x^5, x^6 \rangle$ olmak üzere R -modül $R = M$ nin alt modülü $N = Q \times Q$ olsun. Öncelikle $\sqrt{Q} = \langle 3x, x^2, x^3 \rangle$ ve $rad_M(N) = \sqrt{(N :_R M)} = \sqrt{Q} \times \sqrt{Q}$ olduğu kolaylıkla görülür. $(3, x^2)(x^2, 3)(3, 3) = (9x^2, 9x^2) \in N$ fakat $(3, x^2)(x^2, 3) = (3x^2, 3x^2) \notin (N :_R M) = N$, $(3, x^2)(3, 3) = (9, 3x^2) \notin rad_M(N)$ ve $(x^2, 3)(3, 3) = (3x^2, 9) \notin rad_M(N)$ olduğundan N 2-yutan asalımsı alt modül değildir. Fakat N nin 2-yutan quasi asalımsı alt modül olduğu açıktır.

Not: M bir R -modül, $a \in R$ ve N de M nin bir alt modülü olsun. $\{m \in M \mid am \in N\}$ alt modülü $(N :_M a)$ ile gösterilir. Ayrıca herhangi bir $m \in M$ elemanı için $\{a \in R : am \in N\}$, R nin bir idealidir ve bu ideal $(N :_R m)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.2: M bir R -modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (i) N bir 2-yutan quasi asalımsı alt modüldür.
- (ii) Her $a, b \in R$ için $(N :_M ab) \subseteq (rad_M(N) :_M a) \cup (rad_M(N) :_M b)$ veya $(N :_M a^k b^k) = M$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır.
- (iii) Her $a, b \in R$ için $(N :_M ab) \subseteq (rad_M(N) :_M a)$ veya $(N :_M ab) \subseteq (rad_M(N) :_M b)$ veya $(N :_M a^k b^k) = M$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

İspat:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) N bir 2-yutan quasi asalımsı alt modül ve $a, b \in R$ olsun. $ab \in \sqrt{(N :_R M)}$ ise $(ab)^k = a^k b^k \in (N :_R M)$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır ve böylece $(N :_M a^k b^k) = M$ olur. Şimdi $ab \notin \sqrt{(N :_R M)}$ olduğunu kabul edelim ve $m \in (N :_M ab)$ verilsin. Buradan $abm \in N$ olduğu görülür. N 2-yutan quasi

asalımsı alt modül ve $ab \notin \sqrt{(N :_R M)}$ olduğundan $am \in \text{rad}_M(N)$ veya $bm \in \text{rad}_M(N)$ elde edilir. Böylece $m \in (\text{rad}_M(N) :_M a)$ veya $m \in (\text{rad}_M(N) :_M b)$ olduğu görülür. O halde $(N :_M ab) \subseteq (\text{rad}_M(N) :_M a) \cup (\text{rad}_M(N) :_M b)$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Bir alt modül, iki modülün birleşimi tarafından içeriliyorsa en az biri tarafından içerildiğinden her $a, b \in R$ için $(N :_M ab) \subseteq (\text{rad}_M(N) :_M a)$ veya $(N :_M ab) \subseteq (\text{rad}_M(N) :_M b)$ veya $(N :_M a^k b^k) = M$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $abm \in N$ fakat $ab \notin \sqrt{(N :_R M)}$ olsun. Buradan her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $(N :_M a^k b^k) \neq M$ dir. Böylece (iii)' den $m \in (N :_M ab) \subseteq (\text{rad}_M(N) :_M a)$ veya $m \in (\text{rad}_M(N) :_M b)$ elde edilir ve böylece $am \in \text{rad}_M(N)$ veya $bm \in \text{rad}_M(N)$ olduğu görülür.

Not: M bir R -modül olsun. $R(+M) = \{(r, m) : r \in R, m \in M\}$ kümesi aşağıda tanımlanan "+" ve "." işlemleriyle birlikte bir halka olur ve bu halkaya M modülünün idealleştirilmesi denir. Her $r_1, r_2 \in R$ ve $m_1, m_2 \in M$ için:

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1) \cdot (r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1) \quad [38].$$

I , R nin bir ideali ve N de M nin bir alt modülü olsun. O halde $I(+N) = \{(i, n) : i \in I, n \in N\}$ nin $R(+M)$ nin bir ideali olması için gerek ve yeter koşul $IM \subseteq N$ olmasıdır. Bu durumda $I(+N)$ ye $R(+M)$ nin homojen ideali denir. Ayrıca homojen ideallerin radikalleri aşağıdaki gibi karakterize edilmiştir:

$$\sqrt{I(+N)} = \sqrt{I(+M)} \quad [39].$$

Teorem 3.2.3: M bir R -modül, I R nin bir ideali ve N de M nin bir alt modülü olsun. $IM \subseteq N$ olmak üzere $I(+N)$ nin $R(+M)$ nin bir 2-yutan quasi asalımsı ideali olması için gerek ve yeter koşul I nin R halkasının bir 2-yutan quasi asalımsı ideali olmasıdır.

İspat: I , R halkasının bir 2-yutan quasi asalımsı ideali olsun. $i=1,2,3$ için $r_i \in R, m_i \in M$ olmak üzere,

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2)(r_3, m_3) = (r_1 r_2 r_3, r_1 r_2 m_3 + r_1 r_3 m_2 + r_2 r_3 m_1) \in I(+N)$$

olsun. Buradan $r_1 r_2 r_3 \in I$ elde edilir. I bir 2-yutan quasi asalımsı ideal olduğundan $r_1 r_2 \in \sqrt{I}$ veya $r_1 r_3 \in \sqrt{I}$ veya $r_2 r_3 \in \sqrt{I}$ bulunur. Böylece $(r_1, m_1)(r_2, m_2) \in \sqrt{I}(+)M = \sqrt{I(+N)}$ veya $(r_1, m_1)(r_3, m_3) \in \sqrt{I}(+)M = \sqrt{I(+N)}$ veya $(r_2, m_2)(r_3, m_3) \in \sqrt{I}(+)M = \sqrt{I(+N)}$ elde edilir. Sonuç olarak $I(+N)$ nin $R(+M)$ nin bir 2-yutan quasi asalımsı ideali olduğu anlaşılır. Tersine $I(+N)$, $R(+M)$ nin bir 2-yutan quasi asalımsı ideali ve $abc \in I$ olacak şekilde $a, b, c \in R$ verilsin. Buradan $(a, 0_M)(b, 0_M)(c, 0_M) = (abc, 0_M) \in I(+N)$ bulunur. $I(+N)$, $R(+M)$ nin bir 2-yutan quasi asalımsı ideali olduğundan $(a, 0_M)(b, 0_M) \in \sqrt{I}(+)M$ veya $(a, 0_M)(c, 0_M) \in \sqrt{I}(+)M$ veya $(b, 0_M)(c, 0_M) \in \sqrt{I}(+)M$ elde edilir. Böylece $ab \in \sqrt{I}$ veya $ac \in \sqrt{I}$ veya $bc \in \sqrt{I}$ bulunur. Böylece I nin R nin bir 2-yutan quasi asalımsı ideali olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 3.2.4: M bir R -modül ve N de M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olsun. K, M nin bir alt modülü ve $ab \notin \sqrt{(N :_R M)}$ olmak üzere $abK \subseteq N$ ise $aK \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $bK \subseteq \text{rad}_M(N)$ dir.

İspat: $K \subseteq (N :_M ab)$ ve her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $(N :_M a^k b^k) \neq M$ olduğundan, Teorem 3.2.2 yardımıyla $K \subseteq (N :_M ab) \subseteq (\text{rad}_M(N) :_M a)$ veya $K \subseteq (N :_M ab) \subseteq (\text{rad}_M(N) :_M b)$ elde edilir. Buradan $aK \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $bK \subseteq \text{rad}_M(N)$ olur.

Teorem 3.2.5: R - modül M nin herhangi bir has N alt modülü için aşağıdakiler denktir:

- (i) N, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.
- (ii) $aI_1K \subseteq N$ olacak şekilde her $a \in R$, R nin I_1 ideali ve M nin K alt modülü için $aI_1 \subseteq \sqrt{(N :_R M)}$ veya $aK \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $I_1K \subseteq \text{rad}_M(N)$ dir.
- (iii) $I_1I_2K \subseteq N$ olacak şekilde R nin I_1, I_2 idealleri ve M nin K alt modülü için $I_1I_2 \subseteq \sqrt{(N :_R M)}$ veya $I_1K \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $I_2K \subseteq \text{rad}_M(N)$ dir.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): $aI_1K \subseteq N$ olacak şekilde $a \in R$, R nin I_1 ideali ve M nin K alt modülünü alalım fakat $aI_1 \not\subseteq \sqrt{(N :_R M)}$ ve $I_1K \not\subseteq \text{rad}_M(N)$ olsun. Buradan bir $b_2, b_2' \in I_1$ için $ab_2 \notin \sqrt{(N :_R M)}$ ve $b_2'K \not\subseteq \text{rad}_M(N)$ olur. Şimdi $aK \subseteq \text{rad}_M(N)$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $aK \not\subseteq \text{rad}_M(N)$ olsun. $ab_2K \subseteq N$ olduğundan bir önceki Yardımcı Teorem nedeniyle $b_2K \subseteq \text{rad}_M(N)$ ve böylece $(b_2 + b_2')K \not\subseteq \text{rad}_M(N)$ elde edilir. $a(b_2 + b_2')K \subseteq N$ olduğundan bir önceki Yardımcı Teoremi kullanarak $a(b_2 + b_2') = ab_2 + ab_2' \in \sqrt{(N :_R M)}$ elde edilir. Böylece $ab_2 + ab_2' \in \sqrt{(N :_R M)}$ ve $ab_2 \notin \sqrt{(N :_R M)}$ olduğundan $ab_2' \in \sqrt{(N :_R M)}$ bulunur. Buradan $ab_2'K \subseteq N$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.2.4'ten $b_2'K \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $aK \subseteq \text{rad}_M(N)$ çelişkisi elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $I_1I_2K \subseteq N$ fakat $I_1I_2 \not\subseteq \sqrt{(N :_R M)}$ olacak şekilde R nin I_1, I_2 idealleri ve M nin K alt modülü verilsin. Buradan $aI_2 \not\subseteq \sqrt{(N :_R M)}$ olacak şekilde bir $a \in I_1$ vardır. Şimdi $I_1K \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $I_2K \subseteq \text{rad}_M(N)$ olduğunu göstereceğiz. $I_1K \not\subseteq \text{rad}_M(N)$ ve $I_2K \not\subseteq \text{rad}_M(N)$ olduğunu varsayalım. $aI_2K \subseteq N$ olduğundan (ii)'den $aK \subseteq \text{rad}_M(N)$ elde edilir. Ayrıca $I_1K \not\subseteq \text{rad}_M(N)$ olduğundan $a_1K \not\subseteq \text{rad}_M(N)$ olacak şekilde bir $a_1 \in I_1$ vardır. O halde $a_1I_2K \subseteq N$ olduğundan $a_1I_2 \subseteq \sqrt{(N :_R M)}$ dir ve böylece

$(a+a_1)I_2 \not\subseteq \sqrt{(N:_R M)}$ elde edilir. Buradan $(a+a_1)I_2K \subseteq N$ olduğundan $(a+a_1)K \subseteq \text{rad}_M(N)$ olur ve böylece $a_1K \subseteq \text{rad}_M(N)$ çelişkisi elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ olsun. $I_1 = aR$, $I_2 = bR$ ve $K = Rm$ alınarak N nin 2-yutan quasi asalımsı alt modül olduğu kolaylıkla görülür.

Yardımcı Teorem 3.2.6: M sonlu üretilmiş çarpımsal bir R -modül ve N de bir alt modülü olsun. Bu durumda $(\text{rad}_M(N):_R M) = \sqrt{(N:_R M)}$ olur [23].

Sonuç 3.2.7: M sonlu üretilmiş çarpımsal bir R -modül ve N de bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) N, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

(ii) N_1, N_2, N_3 alt modülleri için $N_1N_2N_3 \subseteq N$ iken $N_1N_2 \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $N_1N_3 \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $N_2N_3 \subseteq \text{rad}_M(N)$ olur.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): N, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü ve N_1, N_2, N_3 alt modülleri için $N_1N_2N_3 \subseteq N$ olsun. M çarpımsal modül olduğundan her $i=1,2,3$ için $N_i = I_iM$ olacak şekilde R halkasının I_i idealleri vardır. Buradan $N_1N_2N_3 = I_1I_2(I_3M) \subseteq N$ elde edilir. Teorem 3.2.5 kullanılarak $I_1I_2 \subseteq \sqrt{(N:_R M)} = (\text{rad}_M(N):_R M)$ veya $I_1I_3M \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $I_2I_3M \subseteq \text{rad}_M(N)$ bulunur. Böylece $N_1N_2 \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $N_1N_3 \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $N_2N_3 \subseteq \text{rad}_M(N)$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $I_1I_2K \subseteq N$ olacak şekilde R nin I_1, I_2 idealleri ve M nin bir K alt modülü verilsin. $N_1 = I_1M$, $N_2 = I_2M$ ve $N_3 = K$ alalım. Buradan $N_1N_2N_3 \subseteq N$ elde edilir. Böylece (ii)'den $N_1N_2 = I_1I_2M \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $N_1N_3 = I_1K \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $N_2N_3 = I_2K \subseteq \text{rad}_M(N)$ bulunur. Buradan

$I_1 I_2 \subseteq \sqrt{(N :_R M)}$ veya $I_1 K \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $I_2 K \subseteq \text{rad}_M(N)$ elde edilir. Bu ise N nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modül olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.8: M bir R -modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- (i) M bir çarpımsal modül ve $(N :_R M)$, R nin 2-yutan quasi asalımsı idealiyse N de M nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.
- (ii) M sonlu üretilmiş çarpımsal bir modül ve N de M nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülü ise $(N :_R M)$, R nin 2-yutan quasi asalımsı idealidir.

İspat:

(i) $I_1 I_2 K \subseteq N$ olacak şekilde R nin I_1, I_2 idealleri ve M nin bir K alt modülü verilsin. M bir çarpımsal modül olduğundan $K = I_3 M$ olacak şekilde R nin bir I_3 ideali bulunur. Buradan $I_1 I_2 K = I_1 I_2 I_3 M \subseteq N$ ve böylece $I_1 I_2 I_3 \subseteq (N :_R M)$ elde edilir. $(N :_R M)$, 2-yutan quasi asalımsı ideal olduğundan [37, Teorem 2.21] yardımıyla $I_1 I_2 \subseteq \sqrt{(N :_R M)}$ veya $I_1 I_3 \subseteq \sqrt{(N :_R M)} \subseteq (\text{rad}_M(N) :_R M)$ veya $I_2 I_3 \subseteq \sqrt{(N :_R M)} \subseteq (\text{rad}_M(N) :_R M)$ bulunur. Böylece $I_1 I_2 \subseteq \sqrt{(N :_R M)}$ veya $I_1 K \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $I_2 K \subseteq \text{rad}_M(N)$ dir. Teorem 3.2.5'ten N nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modül olduğu görülür.

(ii) $abc \in (N :_R M)$ fakat $ab \notin \sqrt{(N :_R M)}$ olacak şekilde $a, b, c \in R$ alalım. Buradan her $m \in M$ için $ab(cm) \in N$ elde edilir. N , 2-yutan quasi asalımsı alt modül ve $ab \notin \sqrt{(N :_R M)}$ olduğundan $acm \in \text{rad}_M(N)$ veya $bcm \in \text{rad}_M(N)$ bulunur. Böylece $(\text{rad}_M(N) :_M ac) \cup (\text{rad}_M(N) :_M bc) = M$ elde edilir ve buradan $(\text{rad}_M(N) :_M ac) = M$ veya $(\text{rad}_M(N) :_M bc) = M$ bulunur. Bu durumda $ac \in (\text{rad}_M(N) :_R M) = \sqrt{(N :_R M)}$ veya $bc \in \sqrt{(N :_R M)}$ olur.

Teorem 3.2.9: M sonlu üretilmiş çarpımsal bir R -modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) N, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

(ii) $rad_M(N)$, M nin bir 2-yutan alt modülüdür.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): N, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olsun. Bir önceki teorem ve [37, Teorem 2.15] ten $\sqrt{(N :_R M)} = P$ bir asal ideal veya $\sqrt{(N :_R M)} = P_1 \cap P_2$ olacak şekilde $(N :_R M)$ nin iki tane farklı P_1, P_2 minimal asal idealleri vardır. $\sqrt{(N :_R M)} = P$ ise [35, Sonuç 2.11]'den $rad_M(N) = PM$ bir asal alt modül ve böylece bir 2-yutan alt modüldür. Diğer durumda ise $rad_M(N) = (P_1 \cap P_2)M$ olur. Ayrıca P_1, P_2 asal ideallerinin $(0 :_R M)$ yi kapsadığı açıktır ve buradan $rad_M(N) = ((P_1 + Ann(M)) \cap (P_2 + Ann(M)))M = P_1M \cap P_2M$ olduğu görülür. $rad_M(N)$ iki asal alt modülün kesişimi olduğundan bir 2-yutan alt modüldür.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ olsun. Buradan $abm \in rad_M(N)$ ve $rad_M(N)$ 2-yutan alt modül olduğundan $ab \in (rad_M(N) :_R M) = \sqrt{(N :_R M)}$ veya $am \in rad_M(N)$ veya $bm \in rad_M(N)$ bulunur. Böylece N, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

Teorem 3.2.8 ve Teorem 3.2.9 dan elde edilen aşağıdaki sonuç, bir sonlu üretilmiş çarpımsal modülün tüm 2-yutan quasi asalımsı alt modüllerini karakterize etmektedir.

Sonuç 3.2.10: M sonlu üretilmiş çarpımsal bir R -modül ve N de bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) N, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

(ii) $rad_M(N)$, M nin bir 2-yutan alt modülüdür.

(iii) $rad_M(N)$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

(iv) $rad_M(N)$, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

(v) $\sqrt{(N :_R M)}$, R nin bir 2-yutan idealidir.

(vi) $\sqrt{(N :_R M)}$, R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

(vii) $\sqrt{(N :_R M)}$, R nin bir 2-yutan quasi asalımsı idealidir.

(viii) $(N :_R M)$, R nin bir 2-yutan quasi asalımsı idealidir.

Teorem 3.2.11: M sonlu üretilmiş çarpımsal bir R -modül ve N de bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) N , M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

(ii) $(N :_R M)$, R nin bir 2-yutan quasi asalımsı idealidir.

(iii) $N = IM$ ve $Ann(M) \subseteq I$ olacak şekilde R nin bir 2-yutan quasi asalımsı ideali vardır.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sonuç 3.2.10' dan elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $N = IM$ ve $Ann(M) \subseteq I$ olacak şekilde R nin bir 2-yutan quasi asalımsı ideali olsun. Buradan

$$\sqrt{(N :_R M)} = \sqrt{(IM :_R M)} = (rad_M(IM) :_R M) = (rad_M(\sqrt{I}M) :_R M) \text{ elde edilir.}$$

Böylece [37, Teorem 2.15] ve [41, Sonuç 2]' den

$$\sqrt{(N :_R M)} = \sqrt{(IM :_R M)} = (rad_M(IM) :_R M) = (rad_M(\sqrt{I}M) :_R M) = (PM :_R M) = P$$

2-yutan quasi asalımsı ideal veya

$$\sqrt{(N :_R M)} = ((P_1 \cap P_2)M :_R M) = (P_1M \cap P_2M :_R M) = (P_1M :_R M) \cap (P_2M :_R M) = P_1 \cap P_2$$

nin 2-yutan quasi asalımsı ideal olduğu görülür. Böylece Sonuç 3.2.10' dan N ,

M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

Not: Teorem 3.2.11 (iii) de $\text{Ann}(M) \subseteq I$ koşulu kaldırılırsa (iii) $\Rightarrow$ (i) gerektirmesi sağlanmayabilir. Örneğin, sonlu üretilmiş bir çarpımsal modül olan $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_{180}$ i düşünelim. $I = \langle 0 \rangle$ ideali $\mathbb{Z}$ nin bir 2-yutan quasi asalımsı idealidir fakat $\text{Ann}(\mathbb{Z}_{180}) = 180\mathbb{Z} \not\subseteq I$ dir. $N = I\mathbb{Z}_{180} = \langle \bar{0} \rangle$ alt modülü alalım. $\sqrt{(N :_R M)} = 30\mathbb{Z}$ bir 2-yutan quasi asalımsı ideal olmadığından Sonuç 3.2.10'dan N nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modül olmadığı anlaşılır.

Teorem 3.2.12: S , R nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve M bir R -modül olsun. $S^{-1}N \neq S^{-1}M$ ve N, M nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülü ise $S^{-1}N$ de $S^{-1}M$ nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

İspat: $\frac{a}{s_1} \frac{b}{s_2} \frac{m}{s_3} \in S^{-1}N$ olacak şekilde $a, b \in R$, $m \in M$ ve $i=1,2,3$ için $s_i \in S$ verilsin.

Buradan $ab(um) \in N$ olacak şekilde bir $u \in S$ bulunur. N bir 2-yutan quasi asalımsı alt modül olduğundan $ab \in \sqrt{(N :_R M)}$ veya $uam \in \text{rad}_M(N)$ veya $ubm \in \text{rad}_M(N)$

bulunur. Böylece $\frac{a}{s_1} \frac{b}{s_2} \in S^{-1}(\sqrt{(N :_R M)}) \subseteq \sqrt{(S^{-1}N :_{S^{-1}R} S^{-1}M)}$ veya

$\frac{a}{s_1} \frac{m}{s_3} = \frac{uam}{us_1s_3} \in S^{-1}(\text{rad}_M(N)) \subseteq \text{rad}_{S^{-1}M}(S^{-1}N)$ veya $\frac{b}{s_2} \frac{m}{s_3} \in \text{rad}_{S^{-1}M}(S^{-1}N)$ olduğu

görülür. O halde $S^{-1}N$, $S^{-1}M$ nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

Yardımcı Teorem 3.2.13: M bir çarpımsal R -modül ve L, K da M nin iki alt modülü olsun. Bu durumda $\text{rad}_M(L \cap K) = \text{rad}_M(L) \cap \text{rad}_M(K)$ dir [23].

Teorem 3.2.14: M bir çarpımsal R -modül olsun. $N_1, N_2, \dots, N_k$ da her $1 \leq i, j \leq k$ için $\text{rad}_M(N_i) = \text{rad}_M(N_j)$ olacak şekilde M nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülleri ise $N = \bigcap_{i=1}^k N_i$ de M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

İspat: Her $1 \leq i, j \leq k$ için $rad_M(N_i) = rad_M(N_j)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.2.13'ten $rad_M(N) = rad_M(N_j)$ elde edilir. $a, b \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $abm \in N$ olsun. $ab \in \sqrt{(N :_R M)}$ ise gösterilecek bir şey yoktur. $ab \notin \sqrt{(N :_R M)} = \bigcap_{i=1}^k \sqrt{(N_i :_R M)}$ olduğunu kabul edelim. Buradan bir $1 \leq j \leq k$ için $ab \notin \sqrt{(N_j :_R M)}$ elde edilir. $abm \in N_j$ ve N_j de 2-yutan quasi asalımsı alt modül olduğundan $am \in rad_M(N_j) = rad_M(N)$ veya $bm \in rad_M(N)$ bulunur. Böylece N 2-yutan quasi asalımsı alt modüldür.

Yardımcı Teorem 3.2.15: $f : M \rightarrow M'$ bir R -modül epimorfizması olsun. N , $\text{Çek}f$ yi kapsayan bir alt modül ise $f(rad_M(N)) = rad_{M'}(f(N))$ olur [40].

Teorem 3.2.16: $f : M \rightarrow M'$ bir R -modül homorfizması olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- (i) $f^{-1}(N') \neq M'$ olacak şekilde N' , M' nün bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü ise $f^{-1}(N')$ de M nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.
- (ii) f bir epimorfizma ve N , $\text{Çek}f$ yi kapsayan M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü ise $f(N)$ de M' nün 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

İspat:

- (i) $a, b \in R$ ve $m \in M$ elemanları için $abm \in f^{-1}(N')$ olsun. Buradan $f(abm) = abf(m) \in N'$ olur. N' 2-yutan quasi asalımsı alt modül olduğundan $ab \in \sqrt{(N' :_R M')} \subseteq \sqrt{(f^{-1}(N') :_R M)}$ veya $af(m) = f(am) \in rad_{M'}(N')$ veya $bf(m) = f(bm) \in rad_{M'}(N')$ olur. $f^{-1}(rad_{M'}(N')) \subseteq rad_M(f^{-1}(N'))$ olduğundan $ab \in \sqrt{(f^{-1}(N') :_R M)}$ veya $am \in rad_M(f^{-1}(N'))$ veya $bm \in rad_M(f^{-1}(N'))$ elde edilir. Böylece $f^{-1}(N')$ de M nün 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olduğu görülür.

(ii) $a, b \in R$ ve $m' \in M'$ olmak üzere $abm' \in f(N)$ verilsin. f örten olduğundan $f(m) = m'$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Buradan $abm' = abf(m) = f(abm) \in f(N)$ elde edilir. Böylece $\text{Çekf} \subseteq N$ olduğundan $abm \in N$ bulunur. N bir 2-yutan quasi asalımsı alt modül olduğundan $ab \in \sqrt{(N :_R M)} \subseteq \sqrt{(f(N) :_R M')}$ veya $am \in \text{rad}_M(N)$ veya $bm \in \text{rad}_M(N)$ elde edilir. Yardımcı Teorem 3.2.15 ten $ab \in \sqrt{(N :_R M)} \subseteq \sqrt{(f(N) :_R M')}$ veya $am' \in f(\text{rad}_M(N)) = \text{rad}_{M'}(f(N))$ veya $bm' \in f(\text{rad}_M(N)) = \text{rad}_{M'}(f(N))$ olduğu görülür.

Sonuç 3.2.17: M bir R -modül ve L de M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- (i) N, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü ve $L \not\subseteq N$ ise $L \cap N$ de L nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.
- (ii) N, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü ve $L \subseteq N$ ise N/L de M/L nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

Teorem 3.2.18: L ve N, M nin $L \subseteq N$ olacak şekilde iki alt modülü olsun. L, M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü ve N/L de M/L nin zayıf 2-yutan quasi asalımsı alt modülü ise N de M nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

İspat: $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ olsun. $abm \in L$ ise, L bir 2-yutan quasi asalımsı alt modül olduğundan $ab \in \sqrt{(L :_R M)} \subseteq \sqrt{(N :_R M)}$ veya $am \in \text{rad}_M(L) \subseteq \text{rad}_M(N)$ veya $bm \in \text{rad}_M(L) \subseteq \text{rad}_M(N)$ olur. Şimdi $abm \notin L$ olduğunu kabul edelim. Buradan $0 \neq ab(m+L) \in N/L$ ve N/L zayıf 2-yutan quasi asalımsı alt modül olduğundan $ab \in \sqrt{(N/L :_R M/L)}$ veya $a(m+L) \in \text{rad}_{M/L}(N/L) = \frac{\text{rad}_M(N)}{L}$ veya $b(m+L) \in \text{rad}_{M/L}(N/L) = \frac{\text{rad}_M(N)}{L}$ elde

edilir. Böylece $ab \in \sqrt{(N :_R M)}$ veya $am \in \text{rad}_M(N)$ veya $bm \in \text{rad}_M(N)$ olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 3.2.19: M bir çarpımsal R -modül ve N_1, N_2 de M nin quasi asalımsı alt modülleri ise $N_1 \cap N_2$ de M nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

İspat: N_1, N_2 M nin quasi asalımsı alt modülleri olduğundan $(N_1 :_R M)$ ve $(N_2 :_R M)$ quasi asalımsı idealler ve böylece [37, Teorem 2.17]'den $(N_1 \cap N_2 :_R M) = (N_1 :_R M) \cap (N_2 :_R M)$ de 2-yutan quasi asalımsı idealdir. Böylece Teorem 3.2.8' den $N_1 \cap N_2$ M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

Not: M_1, M_2 sırasıyla R_1 ve R_2 -modül ve ayrıca $R = R_1 \times R_2$, $M = M_1 \times M_2$ olsun. Bu durumda M aşağıdaki işlemlerle birlikte bir R -modül olur: her $i=1,2$, $a_i \in R_i, m_i, m_i' \in M_i$ için

$$(m_1, m_2) + (m_1', m_2') = (m_1 + m_1', m_2 + m_2')$$

$$(a_1, a_2)(m_1, m_2) = (a_1 m_1, a_2 m_2)$$

Ayrıca M nin tüm alt modülleri N_1, M_1 in alt modülü ve N_2, M_2 nin alt modülü olmak üzere $N_1 \times N_2$ şeklindedir. M_1 ve M_2 çarpımsal modüller ise M de çarpımsal R -modüldür. Dahası $\text{rad}_M(N_1 \times N_2) = \text{rad}_{M_1}(N_1) \times \text{rad}_{M_2}(N_2)$ dir.

Teorem 3.2.20: M_1 çarpımsal R_1 -modül ve M_2 çarpımsal R_2 -modül olsun. $R = R_1 \times R_2$ ve $M = M_1 \times M_2$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

- (i) $N = K_1 \times M_2$ nin M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul K_1 in M_1 in 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olmasıdır.
- (ii) $N = M_1 \times K_2$ nin M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul K_2 nin M_2 nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olmasıdır.

(iii) K_1, M_1 in quasi asalımsı alt modülü ve K_2, M_2 nin quasi asalımsı alt modülü ise $K_1 \times K_2$ de M nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

İspat:

(i) K_1, M_1 in 2-yutan quasi asalımsı alt modülü ve $i=1,2$ için $a_i, b_i \in R_i, m_i \in M_i$ olmak üzere $(a_1, a_2)(b_1, b_2)(m_1, m_2) = (a_1 b_1 m_1, a_2 b_2 m_2) \in K_1 \times M_2$ olsun. Buradan $a_1 b_1 m_1 \in K_1$ ve böylece $a_1 b_1 \in \sqrt{(K_1 :_{R_1} M_1)}$ veya $a_1 m_1 \in \text{rad}_{M_1}(K_1)$ veya $b_1 m_1 \in \text{rad}_{M_1}(K_1)$ elde edilir. Buradan $(a_1, a_2)(b_1, b_2) \in \sqrt{(N :_R M)}$ veya $(a_1, a_2)(m_1, m_2) \in \text{rad}_M(N)$ veya $(b_1, b_2)(m_1, m_2) \in \text{rad}_M(N)$ olduğu görülür. O halde $N = K_1 \times M_2, M$ nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür. Tersine $N = K_1 \times M_2$ nin M nin bir 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olduğunu kabul edelim ve $abm \in K_1$ olacak şekilde $a, b \in R_1, m \in M_1$ alalım. Buradan $(a, 0)(b, 0)(m, 0_M) = (abm, 0_M) \in K_1 \times M_2$ bulunur ve böylece $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \in \sqrt{(K_1 \times M_2 :_R M_1 \times M_2)} = \sqrt{(K_1 :_{R_1} M_1)} \times R_2$ veya $(b, 0)(m, 0_M) = (bm, 0_M) \in \text{rad}_{M_1}(K_1) \times M_2$ veya $(a, 0)(m, 0_M) \in \text{rad}_{M_1}(K_1) \times M_2$ elde edilir. Böylece $ab \in \sqrt{(K_1 :_{R_1} M_1)}$ veya $am \in \text{rad}_{M_1}(K_1)$ veya $bm \in \text{rad}_{M_1}(K_1)$ olduğu görülür.

(ii) (i)' ye benzer şekilde ispatlanır.

(iii) K_1, M_1 in quasi asalımsı alt modülü ve K_2, M_2 nin quasi asalımsı alt modülü olduğundan $K_1 \times M_2$ ve $M_1 \times K_2$ de M nin quasi asalımsı alt modülleridir ve böylece Yardımcı Teorem 3.2.19' dan $(K_1 \times M_2) \cap (M_1 \times K_2) = K_1 \times K_2$ nin M nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olduğu görülür.

Teorem 3.2.21: M_1 çarpımsal R_1 -modül ve M_2 çarpımsal R_2 -modül, $R = R_1 \times R_2$ ve $M = M_1 \times M_2$ sonlu üretilmiş çarpımsal R -modül olsun. N_1, N_2 sırasıyla M_1, M_2 nin alt modülleri olmak üzere $N = N_1 \times N_2, M$ nin has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) N, M nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülüdür.

(ii) $N_1 = M_1$ ve N_2, M_2 nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülü veya $N_2 = M_2$ ve N_1, M_1 in 2-yutan quasi asalımsı alt modülü veya N_1 ve N_2 quasi asalımsı alt modüllerdir.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): $N = N_1 \times N_2, M$ nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olsun. Buradan $(N :_R M) = (N_1 :_{R_1} M_1) \times (N_2 :_{R_2} M_2)$ 2-yutan quasi asalımsı ideal olur. [37, Teorem 2.23]'ten $(N_1 :_{R_1} M_1) = R_1$ ve $(N_2 :_{R_2} M_2)$ 2-yutan quasi asalımsı ideal veya $(N_1 :_{R_1} M_1)$ 2-yutan quasi asalımsı ideal ve $(N_2 :_{R_2} M_2) = R_2$ veya $(N_1 :_{R_1} M_1)$ ve $(N_2 :_{R_2} M_2)$ birer quasi asalımsı ideal olur. $(N_1 :_{R_1} M_1) = R_1$ ve $(N_2 :_{R_2} M_2)$ 2-yutan quasi asalımsı ideal ise, Teorem 3.2.8 den $N_1 = M_1$ ve N_2, M_2 nin 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olur. $(N_1 :_{R_1} M_1)$ 2-yutan quasi asalımsı ideal ve $(N_2 :_{R_2} M_2) = R_2$ ise, yine benzer şekilde $N_2 = M_2$ ve N_1, M_1 in 2-yutan quasi asalımsı alt modülü olur. Diğer durumda ise N_1 ve N_2 quasi asalımsı alt modüller olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Bir önceki teoremden istenen elde edilir.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ilk bölümünde, derecelendirilmiş halkaların birleşimleri incelenmiştir. Quartararo ve Butts'un u – halka olarak tanımladığı halkaların sonlu birleşimleri derecelendirilmiş halkalar için yapılmıştır. Daha sonra derecelendirilmiş asal idealler yardımıyla derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka tanımı yapılarak birçok karakterizasyonu verilmiştir. Bu halkaların daha genel hali olan derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş halkalar tanımlanmış ve derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halkalarla arasında ilişkiler ortaya konulmuştur. Dahası derecelendirilmiş aralarında asal paketlenmiş bir halkanın hangi şartlar altında derecelendirilmiş kompakt paketlenmiş halka olduğu belirlenmiştir. Bu bölümün sonunda derecelendirilmiş halkalarda önemli bir yere sahip derecelendirilmiş asal ideallerin bir genelleştirmesi olan derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı idealler sınıfı tanıtılmıştır. Dahası derecelendirilmiş 2-yutan quasi asalımsı ideallerin derecelendirilmiş 2-yutan ideallerle ilişkisi ortaya konmuştur.

Çalışmanın son bölümünde ise asal alt modüllerden daha genel yapılar olan 2-yutan quasi asalımsı alt modüller tanımlanmıştır. Özel olarak, bu alt modül sınıfı, çarpımsal modüllerde, sonlu üretilmiş çarpımsal modüllerde karakterize edilmiştir. Ayrıca 2-yutan alt modüllerle arasındaki ilişkiler belirlenmiştir.

Bu konu ile ilgili ileride yapılması önerilen çalışmalardan biri 2-yutan quasi asalımsı alt modüllerin derecelendirilmiş modüllerde incelenmesidir. Bir diğer öneri ise literatürde

var olan kompakt paketlenmiş modüllerin ve aralarında asal paketlenmiş modüllerin derecelendirilmiş modüller sınıfına taşınmasıdır.

KAYNAKLAR

- [1] McCoy, N. H., (1948). Rings and Ideals, Mathematical Association of America.
- [2] Quattararo, P., ve Butts, H. S., (1975). "Finite Unions of Ideals and Modules", Proceedings of the American Mathematical Society, 52(1): 91-96.
- [3] Reis C. M. ve Viswanathan T. M., (1970). "A Compactness Property for Prime Ideals in Noetherian Rings" , Proc Amer Math Soc., 25:353-356.
- [4] Pakala, J. V. ve Shores, T. S., (1981). "On Compactly Packed Rings", Pacific Journal of Mathematics, 97(1):197-201.
- [5] Smith, W. W., (1971). "A Covering Conditions for Prime Ideals", Proceedings of the American Mathematical Society, 30(3):451-452.
- [6] Erdoğdu, V., (1988). "Coprinely Packed Rings", Journal of Number Theory, 28(1):1-5.
- [7] Cho, Y. H., (1999). "Coprinely Packed Rings (II)", Honam Mathematical Journal, 21(1) : 43-47.
- [8] Erdoğdu, V., (2000). "Three Notes on Coprime Packedness", Journal of Pure and Applied Algebra, 148:165-170.
- [9] Tekir, Ü., (2007). "On Coprinely Packed Rings", Communications in Algebra, 35(8): 2357-2360.
- [10] Hwang, C. J. ve Chang, G. W., (1999). "A Note on Coverings of Prime Ideals", Communications-Korean Mathematical Society, 14(4):681-685.
- [11] Erdoğdu, V., (1995). "The Prime Avoidance of Maximal Idelas in Commutative Rings", Communications in Algebra, 23(3):863-868.
- [12] Escoriza, J. ve Torrecillas, B., (2000). Multiplication Graded Rings, Algebra and Number Theory, 127-136, Dekker, New York.
- [13] Nastasescu, C., ve Freddy, V. O., (2011). Graded Ring Theory. Elsevier.
- [14] Refai, M. ve Al-Zoubi, K., (2004). "On Graded Primary Ideals", Turkish Journal of Mathematics, 28(3):217-230.

- [15] Al-Zoubi, K., Abu-Dawwas, R. ve Ceken, S., On Graded 2-absorbing and Graded Weakly 2-absorbing Ideals (gönderildi).
- [16] Al-Zoubi, K., ve Nisreen S., (2017). "On Graded 2-Absorbing Primary and Graded Weakly 2-Absorbing Primary Ideals", Journal of the Korean Mathematical Society, 54(2): 675-684.
- [17] Atani, S. E. ve Darani, A. Y., (2006). "On Quasi-primary Submodules", Chiang Mai J. Sci, 33(3): 249-254.
- [18] Atani, S. E. ve Farzalipour, F., (2007). "On Weakly Prime Submodules", Tamkang Journal of Mathematics, 38(3):247-252.
- [19] Ameri, R., (2003). "On the Prime Submodules of Multiplication Modules", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, (27):1715-1724.
- [20] Behboodi, M. ve Koohy H., (2004). "Weakly Prime Modules", Vietnam Journal of Mathematics, 32(2):185-195.
- [21] Callialp F. ve Tekir, U., (2004). "On Unions of Prime Submodules", Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 28(2).
- [22] Darani, A. Y. ve Soheilnia, F., (2012). "2-absorbing and Weakly 2-absorbing Submodules", Thai Journal of Mathematics, 9(3):577-584.
- [23] Mostafanasab, H., Yetkin, E., Tekir, U., Darani, A. Y., (2015). "On 2-absorbing Primary Submodules of Modules over Commutative Rings", An. St. Univ. Ovidius Constanta, 24(1):335–351.
- [24] Kaplansky, I., (1974). Commutative Rings, University of Chicago Press, Chicago and London.
- [25] Northcott, D. G., (1955). "On Homogeneous Ideals", Glasgow Mathematical Journal, 2(3):105-111.
- [26] Atani, S. E., ve Farzalipour, F., (2006). "Notes on the Graded Prime Submodules", Int. Math. Forum., 1(38):1871-1880.
- [27] Refai, M., Hailat, M. ve Obiedat, S., (2000). "Graded Radicals and Graded Prime Spectra", Far East Journal of Mathematical Sciences, 1:59-73.
- [28] Ozkisirisci, N. A., Oral, K. H. ve Tekir, U., (2013). "Graded Prime Spectrum of a Graded Module", Iranian Journal of Science and Technology (Sciences), 37(3.1):411-420.
- [29] Oral, K. H., Tekir, U. ve Ağargün, A. G., (2011). "On Graded Prime and Primary Submodules", Turkish Journal of Mathematics, 35(2):159-167.
- [30] Park C.H., Park M., (2011). "Integral Closure of a Graded Noetherian Domain", J. Korean Math Soc., 48:449-464.
- [31] Atani, S. E., ve Tekir, U. (2007). "On the Graded Primary Avoidance Theorem", Chiang Mai J. Sci., 34:161-164.
- [32] Naghani, S. R. ve Moghimi, H. F., "On Graded 2-Absorbing and Graded Weakly 2-Absorbing Ideals of a Commutative Ring."

- [33] Al-Zoubi, K. ve and Sharafat, N., (2017). "On Graded 2-Absorbing Primary and Graded Weakly 2-Absorbing Primary Ideals", Journal of the Korean Mathematical Society, 54(2):675-684.
- [34] Anderson, D. D., Anderson, D. F. ve Chang, G. V., (2016). "Graded-Valuation Domains", Communications in Algebra, basım aşamasında.
- [35] Bast, E., Abd, Z. ve Smith, P. P., (1988). "Multiplication Modules", Communications in Algebra, 16(4):755-779.
- [36] L. Fuchs, (1947). "On quasi-primary Ideals", Acta Sci. Math.(Szeged), 11(1947): 174-183.
- [37] Tekir, U., Koc, S. ve Oral, K. H., Shum, K. P., (2016). "On 2-Absorbing Quasi-Primary Ideals in Commutative Rings", Communications in Mathematics and Statistics, 4(1):55-62.
- [38] Nagata, M., (1962). Local Rings, Interscience, New York.
- [39] Anderson, D. D. ve Winders M., "Idealization of a Module", Journal of Commutative Algebra, 1(1):3-56.
- [40] McCasland, R. L. ve Moore, M. E., (1991). "On Radicals of Submodules", Communications in Algebra, 19(5):1327-1341.
- [41] McCasland, R. L., ve Moore, M. E., (1986). "On Radicals of Submodules of Finitely Generated Modules", Canad. Math. Bull, 29(1):37-39.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Rabia Nagehan ÜREGEN
Doğum Tarihi ve Yeri : 02.08.1986 / Dursunbey
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : rnuregen@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2017
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2012
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lise	Sayısal	İMKB Erzincan Nevzat Ayaz Fen Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014-...	YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

- 1 Uregen, R. N., Oral, K. H., ve Tekir, U., (2016). "On the Union of Graded Prime Ideals", Open Physics, 2016(14):114-118.
- 2 Koc S., Uregen, R. N. ve Tekir, U., (2017). "On 2-Absorbing Quasi Primary Submodules", Filomat, 31(10):2943-2950.
- 3 Ulucak, G., ve Üregen, R. N., (2016). "A Note on Primary and Weakly Primary Submodules", European Journal of Pure And Applied Mathematics, 9(1):48-56.

Bildiri

Uluslararası

- 1 Uregen, R. N., Koc, S. ve Tekir, U., (2017). "On Graded 2-absorbing Quasi Primary Ideals", International Conference on Mathematics and Engineering, 10-12 Mayıs 2017, İstanbul, Turkey.
- 2 Tekir, U., Uregen, R. N., Sever, M., Koc, S. (2017). "Weakly Prime Ideals In Commutative Semigroups", International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences 2017, 18-21 Nisan 2017, Antalya, Turkey.
- 3 Koc, S., Uregen, R. N. ve Tekir, U. (2016). "On 2-absorbing Quasi Primary Submodules", Analysis, Topology, Algebra: Theory and Applications (ATA2016).6-9 Temmuz 2016, Cacak, Serbia.
- 4 Ozkirişçi, A., Oral, K. H., Uregen, R. N., Unal, H. (2011). "Investigation of Solutions of Some Logarithmic Equations in an Early Turkish Mathematics Journal: Scientific Themes", III. International Congress of Educational Research, 4-8 Mayıs 2011, Girne, Cyprus
- 5 Uregen, R. N., Oral, K. H., Ozkirişçi, N. A., Unal, H. (2011). "Comparative Analysis of Mathematics Questions of 2007 and 2008 8th Grade Level Identification Exam (OKS) With Webb Dok Conceptual Framework", III. International Congress of Educational Research, 4-8 Mayıs 2011, Girne, Cyprus.

Ulusal

- 1 Üregen, R. N., Ağargün, A. G., Özkirişçi, N. A., Oral, K. H., Ünal, H. (2012). "Son 10 Yılın LGS, OKS, SBS Matematik Sorularının Webb'in Modeline Göre Değerlendirilmesi", 11. Matematik Sempozyumu, 19-21 Eylül 2012, Samsun, Türkiye.
- 2 Üregen, R. N., Ağargün, A. G., Özkirişçi, N. A., Oral, K. H., Ünal, H. (2012). "Bal Peteklerine Vidinli Tefik Paşa'nın Farklı Yaklaşımı", 11. Matematik Sempozyumu, 19-21 Eylül 2012, Samsun, Türkiye.

- 3 Ağargün, A. G., Üregen, R. N., Oral, K. H., Ünal, H. (2010). “Mebahis-i İlmiye: İlk Türk Matematik Dergisi”, 9. Matematik Sempozyumu, 20-22 Ekim 2010, Trabzon, Türkiye.
- 4 Ağargün, A. G., Üregen, R. N., Oral, K. H., Ünal, H. (2010). “2010 SBS 8. Sınıf Matematik Sorularının Webb’in Bilginin Derinliği Modeline Göre Değerlendirilmesi”, 9. Matematik Sempozyumu, 20-22 Ekim 2010, Trabzon, Türkiye.

Proje

- 1 Ağargün, A. G., Ünal, H., Oral, K. H., Can, M., Üregen, R. N., (2010). “Matematiksel Soyutlamanın Araştırılması”, KAP, Yıldız Teknik Üniversitesi.