

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DARBOUX ÇATISINA GÖRE HELİSLER VE KARAKTERİZASYONLARI



NESİBE MACİT

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MUSTAFA DÜLDÜL**

İSTANBUL, 2019

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DARBOUX ÇATISINA GÖRE HELİSLER VE KARAKTERİZASYONLARI

Nesibe MACİT tarafından hazırlanan tez çalışması 12.06.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Gelişim Üniversitesi

Prof. Dr. Murat SARI

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Nurettin Cenk TURGAY

İstanbul Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm; büyük bir özenle çalışmalarımı yönlendiren ve sonuçlandırılması için hiçbir desteğini esirgemeyen çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesi üyeleri, saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU ve Prof. Dr. Salim YÜCE' ye harcadıkları değerli zamanları ve tez ile ilgili yol göstermelerinden dolayı teşekkür ederim.

Güven, anlayış ve desteklerini hayatımın her aşamasında yanımda hissettiğim aileme ve bana her zaman güç veren eşime minnet ve şükranlarımı sunarım.

Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde görev yapan, çalışmalarım sırasında bana maddi ve manevi her konuda destek olan tüm arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Haziran, 2019

Nesibe MACİT

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Orijinal Katkı.....	3
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1 Afin Uzay ve Öklid Uzay	5
2.2 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar	7
2.3 Vektör Alanları ve Vektör Alanlarının Uzayı.....	7
2.4 Eğriler Teorisi	8
2.5 Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri	10
2.6 Yüzeyler Teorisi	12
2.7 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Eğriler	18
2.8 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Genişletilmiş Darboux Çatı Alanı.....	21
BÖLÜM 3	
3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA FRENET ÇATISINA GÖRE HELİSLER.....	24
3.1 3-boyutlu Öklid Uzayında Genel Helisler ve Karakterizasyonları	24
3.2 3-boyutlu Öklid Uzayında Slant Helisler ve Karakterizasyonları	26
3.3 3-boyutlu Öklid Uzayında Darboux Helisler ve Karakterizasyonları	27
BÖLÜM 4	
4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA FRENET ÇATISINA GÖRE HELİSLER.....	30
4.1 4-boyutlu Öklid Uzayında Genel Helisler ve Karakterizasyonları	30

4.2	4-boyutlu Öklid Uzayında Slant Helisler ve Karakterizasyonları	30
4.3	4-boyutlu Öklid Uzayında $\mathbf{B}_2$ – Slant Helisler ve Karakterizasyonları	32
4.4	4-boyutlu Öklid Uzayında Darboux Helisler ve Karakterizasyonları	33
BÖLÜM 5		
3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DARBOUX ÇATISINA GÖRE HELİSLER.....		35
5.1	Teğet-Normal Slant Helisler ve Karakterizasyonları	35
5.2	Teğet-Normal Slant Helislerin Ekseninin Bulunması.....	38
5.3	Bazı Özel Eğriler ile Teğet-Normal Slant Helislerin İlişkisi.....	41
5.4	Teğet-Normal Slant Helislerin Hesaplanması	46
5.4.1	Parametrik Yüzeyler Üzerinde Teğet-Normal Slant Helis.....	46
5.4.2	Kapalı Yüzeyler Üzerinde Teğet-Normal Slant Helis.....	49
5.5	Yüzey Üzerinde Teğet-Normal Slant Helis Örnekleri	52
5.6	Darboux Çatisına Göre Darboux Helisler ve Karakterizasyonları.....	55
BÖLÜM 6		
4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DARBOUX ÇATISINA GÖRE HELİSLER.....		59
6.1	$\mathbf{E}$ - Slant Helislerin Karakterizasyonu ve Ekseninin Bulunması	59
6.2	$\mathbf{D}$ - Slant Helislerin Karakterizasyonu ve Ekseninin Bulunması	62
6.3	$\mathbf{N}$ - Slant Helislerin Karakterizasyonu ve Ekseninin Bulunması	66
6.4	Örnekler	70
BÖLÜM 7		
SONUÇ VE ÖNERİLER		78
KAYNAKLAR.....		80
ÖZGEÇMİŞ.....		83

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar kümesi
$\mathbb{E}^n$	n -boyutlu Öklid uzayı
κ	$\mathbb{E}^3$ uzayında eğrilik
τ	$\mathbb{E}^3$ uzayında burulma
κ_n	Normal eğrilik
κ_g	Geodezik eğrilik
τ_g	Geodezik burulma
$\mathbf{W}$	Birim Darboux vektörü
X	Vektör alanı
X_p	Tanjant vektör
κ_g^1	$\mathbb{E}^4$ uzayında 1. derece geodezik eğrilik
κ_g^2	$\mathbb{E}^4$ uzayında 2. derece geodezik eğrilik
τ_g^1	$\mathbb{E}^4$ uzayında 1. derece geodezik burulma
τ_g^2	$\mathbb{E}^4$ uzayında 2. derece geodezik burulma
$\ \cdot \ $	Norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Öklid İç Çarpımı
γ_T	γ eğrisinin teğetler göstergesi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Teğetler göstergesi	11
Şekil 5. 1 Parametrik bir yüzey üzerinde aynı $d=(0,0,1)$ ekseni ve aynı $\theta=\pi/3$ açısına sahip genel helis (mavi renkli) ve teğet-normal slant helis (siyah renkli).....	53
Şekil 5. 2 Kapalı bir yüzey üzerinde $d=(0,0,1)$ eksenine sahip $\theta=\pi/3$ olan genel helis (mavi renkli) ve $\theta=\pi/3$ (siyah renkli) ile $\theta=\pi/4$ (yeşil renkli) olan teğet-normal slant helisler.....	54

DARBOUX ÇATISINA GÖRE HELİSLER VE KARAKTERİZASYONLARI

Nesibe MACİT

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış olup bu bölümde literatür özeti, tezin amacı ve orijinal katkı verilmiştir.

İkinci bölümde, üç boyutlu ve dört boyutlu Öklid uzaylarında eğriler, yüzeyler ve hiperyüzeyler ile ilgili temel kavramlar yer almaktadır.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre helisler ve bunların karakterizasyonları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre helisler ele alınmış ve bu helislerin (genel helis, slant helis, B_2 – slant helis ve Darboux helis) karakterizasyonları verilmiştir.

Beşinci ve altıncı bölümler tezin orijinal kısımlarıdır.

Beşinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir bir yüzey üzerinde yatan bir regüler eğrinin teğet-normal vektör alanı sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa, bu eğri teğet-normal slant helis olarak tanımlanmıştır. Bu tür eğrilerin bazı karakterizasyonları verilmiş ve eksenî elde edilmiştir. Ayrıca, teğet-normal slant helislerin bazı özel eğrilerle olan ilişkileri incelenmiştir. Daha sonra, kapalı ve parametrik ifadesiyle regüler bir yüzey verildiğinde; bu yüzey üzerinde, verilen bir doğrultuyla verilen sabit açığı yapan teğet-normal slant helislerin elde edilmesi için

metotlar bulunmuştur. Son olarak, Darboux çatısına göre Darboux helisler ve karakterizasyonları çalışılmıştır.

Altıncı bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey üzerinde yatan bir Frenet eğrisinin ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısına göre bazı yeni slant helisler tanımlanmış ve karakterizasyonları elde edilmiştir. Ardından bu tür slant helisler için bazı örnekler verilmiştir.

Yedinci bölümde, bu tezde elde edilen sonuçlardan bahsedilmiş ve gelecek çalışmalar için bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Frenet eğrisi, Darboux çatısı, teğet-normal slant helis, yüzey, küresel göstergeler



**HELICES ACCORDING TO DARBOUX FRAME AND THEIR
CHARACTERIZATIONS**

Nesibe MACİT

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

This thesis consists of seven chapters. First chapter is the introduction chapter which includes the literature review, the objective of the thesis and the original contribution.

In the second chapter basic concepts of curves, surfaces and hypersurfaces in Euclidean 3-space and Euclidean 4-space are given.

In the third chapter, helical curves according to Frenet frame in Euclidean 3-space and their characterizations are given.

In the fourth chapter, helical curves according to Frenet frame in Euclidean 4-space are considered, and the characterizations of these helical curves (helices, slant helices, $\mathbf{B}_2$ – slant helices and Darboux helices) are given.

The fifth and sixth chapters are the original part of the thesis.

In the fifth chapter, a regular curve lying on an oriented surface in Euclidean 3-space is defined as a relatively-normal slant helix if its tangent-normal vector makes a constant angle with a fixed direction. Some characterizations of such curves has been given and their axis has been obtained. Also, some relations between some special curves and relatively-normal slant helices are presented. Then, when a regular surface is given by its implicit or parametric equation, the methods for generating relatively normal-slant helices with the chosen direction and constant angle on the given surface are

introduced. Lastly, Darboux helices according to Darboux frame and their characterization is studied.

In the sixth chapter, some new slant helices according to extended Darboux frame of a Frenet curve lying on a hypersurface in Euclidean 4-space are defined, and their characterizations are presented. Some examples are given for such slant helices.

In the seventh chapter, the results obtained in this thesis have been mentioned, and some suggestions are made for future studies.

Keywords: Frenet curve, Darboux frame, relatively-normal slant helix, surface, spherical indicatrix



1.1 Literatür Özeti

Diferensiyel geometride, eğriler teorisi en temel çalışma alanlarından biridir. Eğriler teorisinde ise son yıllarda en çok ilgi çeken eğriler helisler, slant helisler ve bağlantılı eğrilerdir [1-5].

Helisler, teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğriler olarak tanımlanır. Bu klasik tanım 1806 yılında Lancret tarafından yapılmıştır [6]. İlk olarak bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helis ele alınmış ve buna dairesel helis denilmiştir. Bu helislerde eğrilik (κ) ve burulmanın (τ) ayrı ayrı birer sabit olduğu ilk tespit edilen karakterizasyonlardandır. Daha sonra bu eğriliklerin sabit olmamasına rağmen oranlarının sabit olduğu eğri bulunmuştur ki bu eğriye genel helis adı verilmiştir. Bulunan genel helis sayesinde bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helislerden başka helislerin de var olduğu ortaya çıkmıştır. Bir helis eğrisi, burulmasının eğriliğine oranının sabit olması ile yani $\frac{\tau}{\kappa} = c = \text{sabit}$ ile karakterize edilir (Lancret Teoremi-ilk

olarak 1845 yılında Venant tarafından ispatlanmıştır [7]). $\mathbb{E}^3$ uzayında yapılan birçok çalışmanın ardından 1993 yılında, Mağden 4-boyutlu Öklid uzayında helislerin bir karakterizasyonunu elde etmiştir [8]. Bunun yanında 1975 yılında Özdamar ve Hacısalihoğlu $\mathbb{E}^n$ uzayında helislerin harmonik eğrilikleri cinsinden karakterizasyonlarını incelemişlerdir [9].

2004 yılında Izumiya ve Takeuchi, eğrinin her noktada asli normal vektör alanı ile sabit bir doğrultu arasındaki açının sabit olması halindeki eğrileri slant helis olarak adlandırmış ve bir eğrinin slant helis olması için gerek ve yeter şartın verilen eğrinin asli normaller göstergesinin geodezik eğriliğinin, yani

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

fonksiyonunun bir sabit fonksiyon olması olduğunu elde etmiştir [2]. 2005 yılında Kula ve Yaylı bir slant helisin teğet ve binormal göstergelerini araştırmışlar ve bu küresel göstergelerin küresel helisler olduğunu göstermişlerdir [10].

2008 yılında Önder vd. $\mathbb{E}^4$ uzayında ikinci binormal vektörü ($\mathbf{B}_2$) sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğrileri $\mathbf{B}_2$ -slant helis olarak tanıtmış ve bu eğrilerin özelliklerini belirlemişlerdir [11]. Ardından 2010 yılında Ahmad ve Turgut, $\mathbb{E}^n$ uzayında slant helisleri çalışmışlardır [12]. 2011 yılında Yaylı ve Zıplar $\mathbb{E}^n$ uzayında slant helisler ve küresel helisler arasındaki ilişkiyi incelemiştir [13]. Ayrıca 2009 yılında Gök vd. $\mathbb{E}^n$ uzayında $\mathbf{V}_n$ -slant helisleri tanımlamışlardır [14].

Bu çalışmaların yanı sıra 2009 yılında Bükcü ve Karacan, Bishop çatısına göre slant helisleri [15], 2013 yılında Kocayiğit ve Pekacar, kuaterniyonik çatıya göre slant helisleri [16] ve Okuyucu vd. de 3-boyutlu Lie grubunda slant helisleri araştırmışlardır [17]. Ayrıca 2012 yılında Zıplar ve Yaylı, 3-boyutlu Öklid uzayında Darboux helisleri tanımlamış ve çeşitli karakterizasyonlarını elde etmişlerdir [18]. Ardından 2018 yılında İlarıslan ve Yıldırım 4-boyutlu Öklid uzayında Darboux helisleri çalışmışlardır [32].

$\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ uzaylarında Frenet çatısı yardımıyla yapılan çalışmaların ardından 2015 yılında Doğan ve Yaylı, $\mathbb{E}^3$ uzayında Darboux çatısı yardımıyla bir yüzey üzerinde isophote eğrilerini tanımlamış ve karakterizasyonlarını elde etmişlerdir [33].

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı; $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey üzerinde bulunan bir eğri boyunca Frenet çatısı yerine $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ Darboux çatısını kullanarak, $\mathbf{V}$ vektör alanı yardımıyla

yeni bir slant helis tanımlamak ve bu slant helis ile diğer özel eğriler arasındaki bağlantıları incelemektir. Ayrıca, verilen bir yüzey üzerinde ekseni ve bu eksenle yaptığı sabit açısı bilinen teğet-normal slant helislerin denklemlerinin nasıl bulunabileceğini araştırmaktır. Bunların yanında $\mathbb{E}^3$ uzayında Darboux çatısına göre Darboux vektörü yardımıyla Darboux helisini tanımlayarak, bu tür eğrilerin karakterizasyonunu elde etmektir. Bunlara ek olarak, 4-boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey üzerindeki bir Frenet eğrisi için tanımlanmış olan $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı yardımıyla $\mathbf{E}$ -slant helis, $\mathbf{D}$ -slant helis ve $\mathbf{N}$ -slant helisi tanımlayarak bu eğrilerin karakterizasyonlarını incelemek ve eksenlerini elde etmek de amaçlar arasına girmektedir.

1.3 Orijinal Katkı

Bu çalışmada, öncelikle $\mathbb{E}^3$ uzayında regüler bir yüzey üzerinde alınan birim hızlı bir eğrinin $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ Darboux çatı alanındaki $\mathbf{V}$ teğet-normal vektör alanının sabit bir doğrultuyla sabit açı yapmasıyla oluşan teğet-normal slant helis tanımlanmış ve bu eğrinin ekseni bulunup çeşitli karakterizasyonları elde edilmiştir. Ardından, teğet-normal slant helisler ile bazı özel eğriler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Daha sonra, sırasıyla kapalı ve parametrik ifadeleriyle verilen yüzeyler üzerinde, ekseni ve bu eksenle yaptığı sabit açısı bilinen teğet-normal slant helislerin denklemlerinin bulunabilmesi için metotlar elde edilmiştir. Elde edilen metotların uygulanmasında **MATLAB** programında yazılan kodlar kullanılarak bulunan sonuçlar, yine aynı program yardımıyla kalitatif olarak desteklenmiştir. Bunun yanında, $\mathbb{E}^3$ uzayında Darboux çatısına göre birim Darboux vektör alanı yardımıyla Darboux helis tanımlanmış ve karakterizasyonu elde edilmiştir.

Diğer taraftan, $\mathbb{E}^4$ uzayında bir hiperyüzey üzerindeki bir Frenet eğrisi için tanımlanmış olan $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı yardımıyla bir eğrinin $\mathbf{E}$ vektör alanının sabit bir doğrultuyla sabit açı yapması durumunda elde edilen $\mathbf{E}$ -slant helis, $\mathbf{D}$ vektör alanının sabit bir doğrultu ile sabit açı yapması durumunda elde edilen $\mathbf{D}$ -slant helis ve $\mathbf{N}$ vektör alanının sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapması durumunda

elde edilen N -slant helis eğrileri tanımlanmış, bu eğrilerin karakterizasyonları ve eksenleri elde edilerek bazı açıklayıcı örnekler verilmiştir.



TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere kısaca yer verilecektir. Tanım ve teoremler için ağırlıklı olarak [19-22] nolu kaynaklar kullanılacaktır.

2.1 Afin Uzay ve Öklid Uzay

Tanım 2.1 A boş olmayan bir küme ve V , n -boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bir

$f : A \times A \rightarrow V$ dönüşümü

A1) $\forall P, Q, R \in A$ için, $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$,

A2) $\forall P \in A$, $\forall \alpha \in V$ için, $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır,

özelliklerini sağlıyorsa A kümesine V ile birleşen **afin uzay** denir.

Tanım 2.2 V n -boyutlu bir vektör uzayı ve A , V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi V vektör uzayının bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesine A afin uzayının bir **afin çatısı** denir. P_0 noktasına çatının **başlangıç noktası**, $P_1, P_2, \dots, P_n$ noktalarına da afin çatının birim noktaları veya uç noktaları denir.

Tanım 2.3 V , n -boyutlu bir reel iç-çarpım uzayı olsun. V ile birleşen A afin uzayına n -boyutlu **Öklid uzayı** denir.

$V = \mathbb{R}^n$ standart reel vektör uzayında, $X = (x_1, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

standart iç-çarpımı (Öklid iç-çarpımı) tanımlı olduğunda, $V = \mathbb{R}^n$ iç-çarpım uzayı ile birleşen $A = \mathbb{R}^n$ afin uzayına **n-boyutlu standart Öklid uzayı** denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{E}^n$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^n$ iç-çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesine $\mathbb{E}^n$ uzayında bir **Öklid çatısı** denir. Her Öklid çatısı bir afin çatıdır.

Tanım 2.5 $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesi $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir Öklid çatısı olsun. $\forall P \in E^n$ için

$$\overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0 P_i}, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ yazılabilir. O halde,}$$

$$x_i : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow x_i(P) = a_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

ile tanımlı $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ afin koordinat sistemi bulunabilir. Bu afin koordinat sistemine **Öklid(dik) koordinat sistemi** denir.

Tanım 2.6 $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayı, $U \subset \mathbb{E}^n$ açık alt küme olsun. Eğer $f : U \subset \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu k . mertebeden kısmi türevlere sahip ve bu türevler sürekli ise f fonksiyonuna k . mertebeden **diferensiyellenebilir fonksiyon** adı verilir. k . sınıftan diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^k(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir ve $C^k(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } k \text{ . mertebeden diferensiyellenebilir}\}$

ile tanımlanır.

Tanım 2.7 U ve V , $\mathbb{E}^n$ uzayında iki açık alt küme olsun. $\varphi : U \rightarrow V$ dönüşümü için

$$\text{i) } \varphi \in C^k(U, V)$$

$$\text{ii) } \varphi^{-1} \text{ var}$$

$$\text{iii) } \varphi^{-1} \in C^k(V, U)$$

özellikleri sağlanırsa φ **dönüşümüne** bir **diffeomorfizm** denir.

2.2 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar

A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzay olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v}) = \vec{v}_P$ ikilisine A afin uzayında bir **tanjant vektör** denir.

$P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi $T_A(P)$ ile gösterilir ve

$$T_A(P) = \{ \vec{v}_P = (P, \vec{v}) : P \in A, \vec{v} \in V \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.8 A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzay olsun. A afin uzayda bir afin çatı $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ olmak üzere $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ kümesi V vektör uzayının bir bazıdır. $\vec{v}_P = \overrightarrow{PQ} \in V$ olduğundan

$$\vec{v}_P = \overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}, \lambda_i \in \mathfrak{I}$$

yazılabilir. Burada $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ n -lisine $\vec{v}_P \in T_A(P)$ tanjant vektörünün **koordinatları** veya **bileşenleri** denir ve $\vec{v}_P = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)_P$ ile gösterilir.

Teorem 2.1 $T_A(P)$ kümesi reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya A afin uzayının P noktasındaki tanjant vektörlerinin uzayı veya kısaca **tanjant uzay** denir.

2.3 Vektör Alanları ve Vektör Alanlarının Uzayı

Tanım 2.9 $\forall P \in \mathbb{E}^n$ noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \pi : \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P) &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ \vec{v}_P &\rightarrow \pi(\vec{v}_P) = P \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. $\pi \circ X : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ özdeşlik dönüşümü olacak şekilde,

$$X : \mathbb{E}^n \rightarrow \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P)$$

$$P \rightarrow \vec{X}_P$$

1-1 örten dönüşümüne $\mathbb{E}^n$ uzayında bir **vektör alanı** denir. O halde, $\mathbb{E}^n$ üzerindeki bir X vektör alanı, $\forall P \in \mathbb{E}^n$ noktasına $T_{\mathbb{E}^n}(P)$ tanjant uzayının bir $\vec{X}_P$ tanjant vektörünü karşılık getiren bir fonksiyon olarak düşünülebilir. $\mathbb{E}^n$ uzayında tanımlı bütün vektör alanlarının kümesi $\chi(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir ve

$$\chi(\mathbb{E}^n) = \left\{ X \mid X : \mathbb{E}^n \rightarrow \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2 $\chi(\mathbb{E}^n)$ kümesi reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına **vektör alanlarının uzayı** denir.

2.4 Eğriler Teorisi

Tanım 2.10 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ fonksiyonu diferensiyellenebilirse $\gamma(I) \subset \mathbb{E}^n$ alt kümesine $\mathbb{E}^n$ uzayında (I, γ) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir **diferensiyellenebilir eğri** adı verilir.

Tanım 2.11 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\gamma'(s) \neq \vec{0}$ ise γ eğrisine **regüler eğri** denir.

Tanım 2.12 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise γ eğrisine **birim hızlı eğri**, s parametresine de **yay uzunluğu parametresi** denir.

Tanım 2.13 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi için $\mathbf{T}(s) = \gamma'(s)$ ile tanımlanan $\mathbf{T}$ vektör alanına γ eğrisinin **birim teğet vektör alanı** denir.

Tanım 2.14 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi için $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$ ile tanımlanan $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, γ eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $\kappa(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına eğrinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki **eğriliği** denir.

Tanım 2.15 $\mathbb{E}^3$ uzayında $\kappa > 0$ olan birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{T}'(s)$

ile tanımlı $\mathbf{N}$ vektör alanına γ eğrisinin **asli normal vektör alanı** denir.

Tanım 2.16 $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$ ile tanımlı $\mathbf{B}$ vektör alanına γ eğrisinin **binormal vektör alanı** denir.

Tanım 2.17 $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $\tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle$ ile tanımlı $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $\tau(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına eğrinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki **burulması** denir.

Tanım 2.18 $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ birim vektör alanları her noktada birbirine ortogonaldır. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ üçlüsüne γ eğrisi üzerinde **Frenet çatı alanı** denir.

Tanım 2.19 $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ iki eğri olsun. $\mathbb{E}^3$ uzayında $\forall t \in I$ için

$$\beta(t) = F(\alpha(t))$$

olacak şekilde bir F izometrisi varsa bu iki eğriye **kongruenttir (eşdeğerdir)** denir.

Tanım 2.20 Eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olan $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi için

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu formüllere **Frenet formülleri** denir.

Tanım 2.21 Karşılıklı noktalarda aynı asli normale sahip olan eğri çiftine **Bertrand eğri çifti** denir.

Teorem 2.3 γ bir Bertrand eğrisidir $\Leftrightarrow a\kappa + b\tau = 1$, $a, b \neq 0$ (sabit) denklemi sağlanır.

Tanım 2.22 γ ve γ^* , $\mathbb{E}^3$ uzayında sırasıyla, (I, γ) ve (I, γ^*) koordinat komşulukları ile verilen iki eğri olsun. $\gamma(s)$ ve $\gamma^*(s)$ noktalarında γ ve γ^* eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ve $\{\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*\}$ olmak üzere,

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}^*(s) \rangle = 0$$

oluyorsa γ^* eğrisine γ eğrisinin **involütü**, γ eğrisine de γ^* eğrisinin **evolütü** denir.

Tanım 2.23 Teğet vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriye **genel helis** denir. Eğrinin birim teğet vektör alanı $\mathbf{T}$ ve sabit bir birim doğrultu U olmak üzere, $\langle \mathbf{T}, U \rangle = \cos \theta$, $\theta = \text{sabittir}$.

Teorem 2.4 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi bir genel helistir $\Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa}$ değeri sabittir.

Tanım 2.24 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ eğriliklerinin her ikisi de sabitse γ eğrisine **daireesel helis** denir.

Tanım 2.25 Normal vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriye **slant helis** denir. Eğrinin normal vektör alanı $\mathbf{N}$ ve sabit bir doğrultu U olmak üzere, $\langle \mathbf{N}, U \rangle = \cos \theta$, $\theta = \text{sabittir}$.

Tanım 2.26 Bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin konum vektörü daima kendi rektifiyan düzleminde kalıyorsa bu eğriye **rektifiyan eğri** denir. γ bir rektifiyan eğri ise konum vektörü

$$\gamma(s) = \lambda(s)\mathbf{T}(s) + \mu(s)\mathbf{B}(s)$$

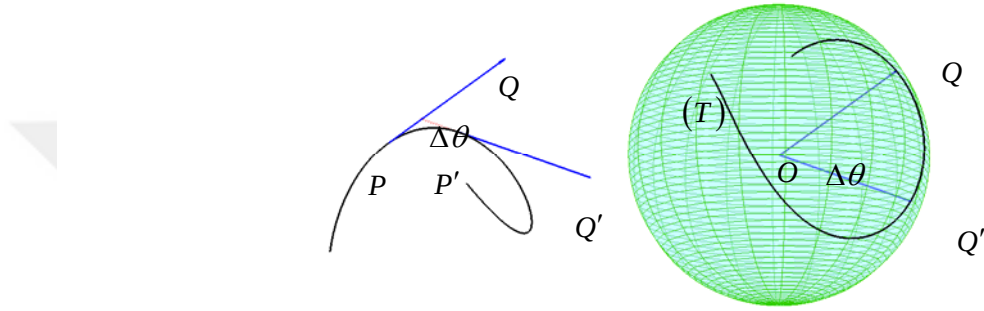
denklemini sağlar (λ ve μ herhangi diferensiyellenebilir fonksiyonlardır) [19].

2.5 Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri

Tanım 2.27 $\mathbb{E}^3$ uzayında bir α eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektör alanı $\mathbf{T}$ olmak üzere $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{T}$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin 1. küresel göstergesi veya **teğetler göstergesi** denir (Şekil 2.1).

α eğrisinin teğetler göstergesini (T) ile gösterirsek denklemi $\alpha_T = \mathbf{T}$ olur. Teğetler göstergesinin yay parametresine s_T dersek $s_T \neq s$ olup, yay-elementi ise $ds_T = \|\mathbf{T}'\| ds$ olur.

Teorem 2.5 Bir α eğrisinin eğriliği; teğetler göstergesinin yay elementinin esas eğrinin yay elementine oranıdır, yani $\kappa = \frac{ds_T}{ds}$. Ayrıca $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$ de yazılabilir.



Şekil 2. 1 Teğetler göstergesi

Tanım 2.28 $\mathbb{E}^3$ uzayında bir α eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbf{N}$ olsun. α eğrisi çizilirken $\mathbf{N}$ vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin 2. küresel göstergesi veya **asli normaller göstergesi** denir.

α eğrisinin asli normaller göstergesini (N) ile gösterirsek denklemi $\alpha_N = \mathbf{N}$ olur. Normaller göstergesinin yay parametresine s_N dersek $s_N \neq s$ olup, yay-elementi ise $ds_N = \|\mathbf{N}'\| ds$ olur.

Tanım 2.29 $\mathbb{E}^3$ uzayında bir α eğrisinin binormal vektör alanı $\mathbf{B}$ olsun. α eğrisi çizilirken $\mathbf{B}$ vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin 3. küresel göstergesi veya **binormaller göstergesi** denir.

α eğrisinin binormaller göstergesini (B) ile gösterirsek denklemi $\alpha_B = \mathbf{B}$ olur. Binormaller göstergesinin yay parametresine s_B dersek $s_B \neq s$ olup, yay-elementi ise $ds_B = \|\mathbf{B}'\| ds$ olur.

Tanım 2.30 $\mathbb{E}^n$ uzayında bir parametrik eğri

$$\begin{aligned}\gamma: I &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ s &\rightarrow \gamma(s)\end{aligned}$$

olsun. $X \in \chi(\mathbb{E}^n)$ olmak üzere, $\forall s \in I$ için $\frac{d\gamma}{ds} = X(\gamma(s))$ oluyorsa, γ eğrisine X vektör alanının bir **integral eğrisi** denir.

Tanım 2.31 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa, \tau\}$ olsun.

$W = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$ vektör alanına γ eğrisinin **Darboux vektör alanı** denir.

$$\mathbf{W}(s) = \frac{W(s)}{\|W(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s))$$

vektörüne ise γ eğrisinin **Darboux göstergesi** denir. Bu vektör $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ üç ayaklısının her s anında bir ani helis hareketi yaptığı eksendir.

2.6 Yüzeyler Teorisi

Tanım 2.32 $U \subset \mathbb{E}^2$ bir bağlantılı açık küme ve $\phi: U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir regüler dönüşüm ($\text{rank}\phi_* = \text{boy}U = 2$) olsun. Eğer $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\phi(U)$ kümesine $\mathbb{E}^3$ uzayında bir **regüler yüzey** denir. Yani,

$\phi: U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ dönüşümü için

i) ϕ , birebir,

ii) ϕ , regüler,

iii) $\phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow U$ fonksiyonu sürekli

özelliklerini sağlıyorsa, $\phi(U) \subset \mathbb{E}^3$ alt kümesine $\mathbb{E}^3$ uzayında bir **regüler yüzey** denir.

ϕ fonksiyonuna da $M = \phi(U) \subset \mathbb{E}^3$ alt kümesinin bir **parametrelendirilmesi** denir [26].

Teorem 2.6 $\mathbb{E}^3$ uzayında $M: f(x, y, z) = c$ alt kümesi bir yüzey ise $\forall P \in M$ için gradient vektör alanı $\nabla f(P) \neq \vec{0}$ eşitliğini sağlar [22].

Tanım 2.33 M , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey olsun. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma: I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna M **yüzeyi üzerinde bir eğri** denir.

Tanım 2.34 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey ve $P \in M$ bir nokta olsun. $\vec{v}_P \in T_{\mathbb{E}^3}(P)$ tanjant vektörü P noktasından geçen ve yüzey üzerinde kalan bir eğrinin hız vektörü oluyorsa, $\vec{v}_P$ tanjant vektörüne M yüzeyinin P noktasında bir **teğet vektörü** denir. Yüzeyin $P \in M$ noktasındaki bütün teğet vektörlerinin kümesi M yüzeyinin P noktasındaki **teğet düzlemi** olarak adlandırılır ve $T_M(P)$ ile gösterilir.

Tanım 2.35 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi boyunca bir V vektör alanı verilsin. $\forall P \in M$ noktasına bir $V(P) = \vec{v}_P$ teğet vektörü karşılık getiren V vektör alanına M yüzeyi boyunca bir **teğet vektör alanı** denir.

Tanım 2.36 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey ve $P \in M$ bir nokta olsun. P noktasındaki $T_M(P)$ teğet düzlemine dik olan bir U_P tanjant vektörüne M yüzeyinin P noktasındaki **normal vektörü** denir.

Tanım 2.37 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi boyunca bir U vektör alanı verilsin. Eğer $\forall P \in M$ için elde edilen $U(P) = \vec{u}_P$ vektörü M yüzeyinin bir normal vektörü oluyorsa, U vektör alanına M yüzeyi boyunca bir **normal vektör alanı** denir.

Tanım 2.38 M yüzeyinin tamamında bir U diferansiyellenebilir normal vektör alanı tanımlanıyorsa, M yüzeyine **yönlendirilebilir**, (M, U) çiftine de **yönlendirilmiş yüzey** denir.

Bütün kuadrik yüzeyler birer yönlendirilebilir yüzeydir. Yönlendirilemeyen yüzeyler için örnekler Möbius şeridi ve Klein şişesidir.

Tanım 2.39 M , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olsun. $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisi ve $\forall t \in I$ için

$$\alpha''(t) = \lambda(t)N|_{\alpha(t)}$$

olacak şekilde bir $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu varsa α eğrisine M üzerinde bir **geodezik eğri** denir.

Tanım 2.40 M , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve M yüzeyinin birim normal vektör alanı $\mathbf{N}$ olsun. $\mathbb{E}^3$ uzayında Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X \mathbf{N}$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M yüzeyinin **şekil operatörü** veya **Weingarten dönüşümü** denir.

Tanım 2.41 $M \subset \mathbb{E}^3$ regüler yüzeyi verilsin.

$$k_n(\vec{u}_p) = \langle S(\vec{u}_p), \vec{u}_p \rangle$$

ile tanımlanan $k_n(\vec{u}_p) \in \mathbb{R}$ sayısına M yüzeyinin $\vec{u}_p$ birim teğet vektörü doğrultusundaki **normal eğriliği** denir. Daha genel olarak, herhangi bir $\vec{v}_p \in T_M(P)$ teğet vektörü için normal eğrilik

$$k_n(\vec{v}_p) = \frac{\langle S(\vec{v}_p), \vec{v}_p \rangle}{\|\vec{v}_p\|^2}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.42 M , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve M yüzeyinin P noktasındaki şekil operatörü $S_p : T_M(P) \rightarrow T_M(P)$ olsun. $S(X_p) = \lambda X_p$ eşitliğini sağlayan λ sayılarına M yüzeyinin P noktasındaki **asli eğrilikleri**, X_p vektörüne de λ asli eğriliğine karşılık gelen **asli doğrultu** denir.

Teorem 2.7 M yüzeyinin asli eğrilikleri ve asli doğrultuları $T_M(P)$ teğet uzayının bazından bağımsızdır.

Tanım 2.43 M , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey olsun.

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S_p$$

fonksiyonuna M yüzeyinin **Gauss eğrilik fonksiyonu**, $K(P) \in \mathbb{R}$ sayısına da M yüzeyinin P noktasındaki **Gauss eğriliği** denir.

Tanım 2.44 M , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey olsun.

$$H : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = \text{iz}S_p$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(P)$ sayısına da M yüzeyinin P noktasındaki **ortalama eğriliği** denir.

Tanım 2.45 $\mathbb{E}^3$ uzayında H ortalama eğriliği sıfır olan regüler yüzeylere **minimal yüzey** denir.

Tanım 2.46 $\mathbb{E}^3$ uzayında K Gauss eğriliği sıfır olan regüler yüzeylere **düz yüzey** denir.

Tanım 2.47 M , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve M üzerinde bir eğri α olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbf{T}$ ve M yüzeyinin şekil operatörü S olsun. Eğer $\mathbf{T}$ vektör alanı α eğrisi boyunca S şekil operatörünün karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir **asli eğri** denir.

Tanım 2.48 M , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey olsun. M yüzeyinin $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S_p olmak üzere,

- i) $S_p = \lambda I_2$ ise $P \in M$ noktasına M yüzeyinin **umbilik noktası** denir,
- ii) $S_p = 0$ ise $P \in M$ noktasına M üzerinde **düzlemsel (flat) nokta** denir.

Tanım 2.49 M , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S_p olsun. $X_p, Y_p \in T_M(P)$ için $\langle S(X_p), Y_p \rangle = 0$ ise bu iki tanjant vektörüne **eşleniktir** denir. Bir $X_p \neq \vec{0}$ tanjant vektörü için, $\langle S(X_p), X_p \rangle = 0$ ise X_p doğrultusuna, M yüzeyinin P noktasındaki bir **asimptotik doğrultusu** ve X_p vektörünü $\forall P \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine M üzerinde bir **asimptotik çizgi** denir.

Tanım 2.50 M , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve M üzerinde birim hızlı bir eğri γ olsun. γ eğrisinin birim teğet vektör alanı $\mathbf{T}$, yüzeyin γ eğrisine kısıtlanmış birim normal vektör alanı $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V} = \mathbf{U} \times \mathbf{T}$ olmak üzere γ eğrisi boyunca tanımlanan $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ ortonormal sistemine **Darboux çatı alanı** denir.

Uyarı 2.1 γ eğrisinin $\mathbf{T}$ birim teğet vektör alanı Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan, $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ vektör alanları eğrinin her bir noktasında aynı düzlemde bulunurlar. Bu yüzden bu iki çatı arasında, $\mathbf{V}$ ile $\mathbf{N}$ arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

ilişkisi vardır. Bu ise Frenet çatısının $\mathbf{T}$ etrafında θ açılık dönme yapması sonucunda Darboux çatısı elde edildiği anlamına gelir. Burada, θ bir fonksiyondur ve genellikle sabit değildir.

Tanım 2.51 Darboux çatısına göre türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{V}' \\ \mathbf{U}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada κ_n , yüzeyin $\mathbf{T}$ doğrultusundaki **normal eğriliği**; κ_g eğrinin **geodezik eğriliği** ve τ_g de eğrinin **geodezik burulması** olarak adlandırılır. Buna göre;

$$\text{yüzeyin normal eğriliği } \kappa_n = \langle S(\mathbf{T}), \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{U}', \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{U}, \mathbf{T}' \rangle = \kappa \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle = -\kappa \sin \theta,$$

$$\text{eğrinin geodezik eğriliği } \kappa_g = \langle \mathbf{T}', \mathbf{V} \rangle = \langle \kappa \mathbf{N}, \mathbf{V} \rangle = \kappa \langle \mathbf{V}, \mathbf{N} \rangle = \kappa \cos \theta,$$

$$\text{eğrinin geodezik burulması } \tau_g = \langle S(\mathbf{T}), \mathbf{V} \rangle = -\langle \mathbf{U}', \mathbf{V} \rangle = \langle \mathbf{U}, \mathbf{V}' \rangle = \tau + \theta' \text{ şeklindedir.}$$

Uyarı 2.2 $\kappa_g = 0 \Leftrightarrow \alpha$ eğrisi yüzey üzerinde geodezik eğridir.

$$\kappa_n = 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ eğrisi yüzey üzerinde asimptotik eğridir.}$$

$$\tau_g = 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ eğrisi yüzey üzerinde asli eğridir [22].}$$

Tanım 2.52 Yüzey üzerinde tanımlanan birim hızlı olmayan bir γ eğrisinin Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ olmak üzere bu eğrinin **geodezik eğriliği**

$$\kappa_g = \frac{1}{\|\gamma'\|} \langle \mathbf{T}', \mathbf{U} \times \mathbf{T} \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.53 γ , M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve bu eğri boyunca Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ olsun. $\mathbf{V}$ vektör alanının integral eğrisi $\bar{\gamma}$ olmak üzere $\bar{\gamma}$ eğrisine γ eğrisinin **V-doğrultu eğrisi** denir ve

$$\mathbf{V}(s) = \bar{\gamma}'(s)$$

ile ifade edilir [20].

Tanım 2.54 M bir yönlendirilmiş yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ yay parametresiyle verilmiş regüler bir eğri olsun. α eğrisi boyunca

$$\mathbf{D}_n(s) = -\kappa_n(s)\mathbf{V}(s) + \kappa_g(s)\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{D}_r(s) = \tau_g(s)\mathbf{T}(s) + \kappa_g(s)\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{D}_o(s) = \tau_g(s)\mathbf{T}(s) - \kappa_n(s)\mathbf{V}(s)$$

ile tanımlanan $\mathbf{D}_n(s), \mathbf{D}_r(s), \mathbf{D}_o(s)$ vektör alanlarına sırasıyla, **normal Darboux vektör alanı**, **rektifiyan Darboux vektör alanı**, **oskületör Darboux vektör alanı** denir [21].

Tanım 2.55 Bir M yüzeyi $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ parametrik ifadesiyle verilirse, yüzey üzerindeki bir α eğrisi için $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ yazılır. Böylece α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektör alanı

$$\frac{d\alpha}{ds} = X_u \frac{du}{ds} + X_v \frac{dv}{ds} \quad (2.1)$$

ile hesaplanır. Burada X_u ve X_v , X 'in sırasıyla u 'ya ve v 'ye göre kısmi türevleridir. α birim hızlı eğri olduğundan

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1 \quad (2.2)$$

olur. Burada $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ ve $G = \langle X_v, X_v \rangle$ yüzeyin **birinci temel form katsayılarıdır**.

Tanım 2.56 Bir M yüzeyi $f(x, y, z) = 0$ kapalı ifadesiyle verilirse yüzey üzerindeki

birim hızlı bir $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi, $f_a = \frac{\partial f}{\partial a}$ olmak üzere,

$$f_x \frac{dx}{ds} + f_y \frac{dy}{ds} + f_z \frac{dz}{ds} = 0 \quad (2.3)$$

denklemini sağlar. Ayrıca eğri birim hızlı olduğundan,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \quad (2.4)$$

olur.

2.7 $\mathbb{R}^4$ Uzayında Eğriler

Tanım 2.57 $\mathbb{R}^4$ uzayının standart bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$, $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 y_i e_i$ ve

$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^4 z_i e_i$ vektörlerinin **vektörel çarpımı**

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır [27].

Vektörel çarpımın bazı özellikleri:

i) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri lineer bağımsız ise $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}$ vektörü $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörlerine dik bir vektör belirtir.

ii) $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} = -\mathbf{y} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{z}$

iii) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri lineer bağımlı ise vektörel çarpımın sonucu sıfır vektörüdür.

iv) $\lambda(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}) = (\lambda\mathbf{x}) \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} = \mathbf{x} \otimes (\lambda\mathbf{y}) \otimes \mathbf{z} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes (\lambda\mathbf{z})$

Tanım 2.58 $\mathbb{E}^n$ uzayında birim hızlı bir $\beta: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi için $\beta'(s), \beta''(s), \dots, \beta^{(n-1)}(s)$ vektörleri eğri boyunca her noktada lineer bağımsız ise β eğrisine **Frenet eğrisi** denir.

Tanım 2.59 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $\mathbf{T}(s) = \gamma'(s)$ ile tanımlanan $\mathbf{T}$ vektör alanına eğrinin **teğet vektör alanı** denir.

Tanım 2.60 $\mathbb{E}^4$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için, $\gamma''(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

ile tanımlı $\mathbf{N}$ vektör alanına γ eğrisinin **asli normal vektör alanı** denir.

Tanım 2.61 $\mathbb{E}^4$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için $k_1(s) = \sqrt{\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle}$ ile tanımlı $k_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin **birinci eğrilik fonksiyonu** denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $k_1(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki **birinci eğriliği** denir.

Tanım 2.62 $\mathbb{E}^4$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ Frenet eğrisi için

$$\mathbf{B}_2(s) = \frac{\gamma'(s) \otimes \gamma''(s) \otimes \gamma'''(s)}{\|\gamma'(s) \otimes \gamma''(s) \otimes \gamma'''(s)\|}$$

ile tanımlı $\mathbf{B}_2$ vektör alanına γ eğrisinin **ikinci binormal vektör alanı** denir [31].

Tanım 2.63 $\mathbb{E}^4$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ Frenet eğrisi için

$$\mathbf{B}_1(s) = \mathbf{B}_2(s) \otimes \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{N}(s)$$

ile tanımlı $\mathbf{B}_1$ vektör alanına γ eğrisinin **birinci binormal vektör alanı** denir [31].

Tanım 2.64 $\mathbb{E}^4$ uzayında $k_1 \neq 0$ olan birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$k_2(s) = \frac{\langle \mathbf{B}_1(s), \gamma'''(s) \rangle}{k_1(s)}$$
 ile tanımlanan $k_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin **ikinci eğrilik fonksiyonu** denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $k_2(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da γ eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki **ikinci eğriliği** denir [31].

Tanım 2.65 $\mathbb{E}^4$ uzayında $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ olan birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$k_3(s) = \frac{\langle \mathbf{B}_2(s), \gamma^{(4)}(s) \rangle}{k_1(s)k_2(s)}$$
 ile tanımlanan $k_3: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin **üçüncü**

eğrilik fonksiyonu denir.

Belli bir $s_0 \in I$ için $k_3(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da γ eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki **üçüncü eğriliği** denir [31].

Uyarı 2.3 $\mathbb{E}^4$ uzayında bir γ eğrisinin eğrilikleri $\{k_1, k_2, k_3\}$ olmak üzere;

$$k_1 = 0 \Leftrightarrow \gamma \text{ bir doğrudur,}$$

$$k_2 = 0 \Leftrightarrow \gamma \text{ bir düzlemsel eğridir,}$$

$$k_3 = 0 \Leftrightarrow \gamma, \mathbb{E}^4 \text{ uzayının bir hiperdüzleminde yatan bir eğridir [31].}$$

Tanım 2.66 $\mathbb{E}^4$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ Frenet eğrisi için $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ birim vektör alanları her noktada birbirine ortogonaldır. Bu durumda $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ dördlüsü γ eğrisi üzerinde bir çatı alanı oluşturur. Bu çatı alanına **Frenet çatı alanı** denir.

Uyarı 2.4 $\mathbb{E}^4$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ Frenet eğrisi için Frenet formülleri

$$\mathbf{T}' = k_1 \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N}' = -k_1 \mathbf{T} + k_2 \mathbf{B}_1$$

$$\mathbf{B}_1' = -k_2 \mathbf{N} + k_3 \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B}_2' = -k_3 \mathbf{B}_1$$

şeklindedir.

2.8 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Genişletilmiş Darboux Çatı Alanı

Tanım 2.67

$M = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \mid f : U \subset \mathbb{E}^4 \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}, f(X) = c, \forall P \in M \text{ için } \nabla f|_P \neq \vec{0} \right\}$ şeklinde tanımlı kümeye $\mathbb{E}^4$ uzayında bir **hiperyüzey** denir.

Tanım 2.68 $\mathbb{E}^4$ uzayında N birim normal vektör alanı ile yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M üzerinde bulunan, s yay parametresiyle verilmiş bir Frenet eğrisi β olsun. β eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve hiperyüzeyin bu eğriye kısıtlanmış birim normal vektör alanı N olsun. Bu durumda, $T(s) = \beta'(s)$ ve $N(s) = N(\beta(s))$ olarak tanımlanır.

Durum 1 Eğer $\{N, T, \beta''\}$ lineer bağımsız ise Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu yardımıyla

$$E = \frac{\beta'' - \langle \beta'', N \rangle N}{\|\beta'' - \langle \beta'', N \rangle N\|}$$

olmak üzere $\{N, T, E\}$ ortonormal kümesi elde edilir.

Durum 2 Eğer $\{N, T, \beta''\}$ lineer bağımlı ise yani β'', N normal vektör doğrultusunda $\{N, T, \beta'''\}$ kümesinden Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu yardımıyla

$$E = \frac{\beta''' - \langle \beta''', N \rangle N - \langle \beta''', T \rangle T}{\|\beta''' - \langle \beta''', N \rangle N - \langle \beta''', T \rangle T\|}$$

olmak üzere $\{N, T, E\}$ ortonormal kümesi elde edilir. Her iki durumda da $D = N \otimes T \otimes E$ olarak tanımlanırsa, β eğrisi boyunca her noktada birbirine dik olan T, E, D ve N vektör alanları elde edilmiş olur. $E(s)$ ve $D(s)$ her noktada M hiperyüzeyine teğettir. Bu yüzden $Sp\{T(s), E(s), D(s)\}$, hiperyüzeyin $\beta(s)$ noktasındaki teğet hiperdüzlemdir. Sonuç olarak; elde ettiğimiz $\{T, E, D, N\}$ çatısı

Durum 1 ve Durum 2 için sırasıyla **birinci tür genişletilmiş Darboux çatı** ve **ikinci tür genişletilmiş Darboux çatı** olarak adlandırılır [29].

Uyarı 2.5 Bir β eğrisi boyunca birinci tür genişletilmiş Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ olmak üzere

$$\mathbf{E} = \frac{\beta'' - \langle \beta'', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}}{\|\beta'' - \langle \beta'', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}\|} = \frac{\mathbf{T}' - \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}}{\|\mathbf{T}' - \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}\|}$$

olup buradan

$$\mathbf{T}' = \|\mathbf{T}' - \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}\| \mathbf{E} + \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} \text{ olduğundan } \langle \mathbf{T}', \mathbf{D} \rangle = 0 \text{ bulunur.}$$

Uyarı 2.6 Bir β eğrisi boyunca ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ olmak üzere $\{\mathbf{N}, \mathbf{T}, \beta''\}$ lineer bağımlı olup $\beta'' = \lambda \mathbf{N}$ olduğundan $\langle \mathbf{T}', \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{T}', \mathbf{D} \rangle = 0$ olur. Ayrıca $\beta''' = \lambda' \mathbf{N} + \lambda \mathbf{N}'$ eşitliği

$$\mathbf{E} = \frac{\beta''' - \langle \beta''', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} - \langle \beta''', \mathbf{T} \rangle \mathbf{T}}{\|\beta''' - \langle \beta''', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} - \langle \beta''', \mathbf{T} \rangle \mathbf{T}\|}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa $\langle \mathbf{N}', \mathbf{D} \rangle = 0$ elde edilir.

Tanım 2.69 Bir β eğrisi boyunca genişletilmiş Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ olmak üzere eğrinin hiperyüzeye bağlı eğrilikleri;

$$\kappa_n = \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle$$

ile tanımlı olup hiperyüzeyin $\mathbf{T}$ teğet vektörü yönünde **normal eğriliği**dir,

$$\kappa_g^1 = \langle \mathbf{T}', \mathbf{E} \rangle$$

ile tanımlı olup β eğrisinin teğet hiperdüzlemine izdüşüm eğrisinin eğriliğidir. Ayrıca

$$\tau_g^1 = \langle \mathbf{E}', \mathbf{N} \rangle, \tau_g^2 = \langle \mathbf{D}', \mathbf{N} \rangle \text{ ve } \kappa_g^2 = \langle \mathbf{E}', \mathbf{D} \rangle \text{ olarak tanımlanmıştır [29].}$$

Tanım 2.70 Bir β eğrisi boyunca genişletilmiş Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ olmak üzere, birinci tür ve ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı için **türev formülleri**, sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{E}' \\ \mathbf{D}' \\ \mathbf{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g^1 & 0 & \kappa_n \\ -\kappa_g^1 & 0 & \kappa_g^2 & \tau_g^1 \\ 0 & -\kappa_g^2 & 0 & \tau_g^2 \\ -\kappa_n & -\tau_g^1 & -\tau_g^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{E}' \\ \mathbf{D}' \\ \mathbf{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa_n \\ 0 & 0 & \kappa_g^2 & \tau_g^1 \\ 0 & -\kappa_g^2 & 0 & 0 \\ -\kappa_n & -\tau_g^1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

ile verilir [29].



3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA FRENET ÇATISINA GÖRE HELİSLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı kullanılarak yapılmış olan helis çalışmaları sonucunda elde edilmiş olan karakterizasyonlara yer verilecektir.

3.1 3-boyutlu Öklid Uzayında Genel Helisler ve Karakterizasyonları

Tanım 3.1 $\mathbb{E}^3$ uzayında bir γ eğrisinin $\mathbf{T}$ birim teğet vektörü her noktada sabit bir U birim vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \mathbf{T}, U \rangle = \cos \theta, \theta \text{ sabit}$$

oluyorsa, γ eğrisine bir **genel helis** denir [3].

Teorem 3.1 Eğriliği $\kappa \neq 0$ ve burulması τ olan bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$ olmasıdır [26].

İspat ($\Rightarrow$) Kabul edelim ki γ birim hızlı bir helis ve $\langle \mathbf{T}, U \rangle = \cos \theta, \theta$ sabit olsun.

Bu durumda,

$$\langle \mathbf{T}, U \rangle' = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{T}', U \rangle + \langle \mathbf{T}, U' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \kappa \mathbf{N}, U \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \mathbf{N}, U \rangle = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$U = \langle \mathbf{T}, U \rangle \mathbf{T} + \langle \mathbf{N}, U \rangle \mathbf{N} + \langle \mathbf{B}, U \rangle \mathbf{B} = \langle \mathbf{T}, U \rangle \mathbf{T} + \langle \mathbf{B}, U \rangle \mathbf{B} = \cos \theta \mathbf{T} + \sin \theta \mathbf{B}$$

bulunur. Buradan,

$$0 = \cos \theta \mathbf{T}' + \sin \theta \mathbf{B}'$$

$$= \cos \theta \kappa \mathbf{N} - \sin \theta \tau \mathbf{N}$$

$$= (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \mathbf{N} \Rightarrow \kappa \cos \theta - \tau \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta = s\kappa$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki $\frac{\tau}{\kappa} = s\kappa$ olsun. Buradan $\cot \theta = \frac{\tau}{\kappa}$ olacak şekilde seçilir.

$U = \cos \theta \mathbf{T} + \sin \theta \mathbf{B}$ vektörünü tanımlayalım. Bu eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$U' = \cos \theta \mathbf{T}' + \sin \theta \mathbf{B}'$$

$$= (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \mathbf{N}$$

$$= 0$$

elde edilir. Bu durumda U sabit bir vektördür ve $\langle \mathbf{T}, U \rangle = \cos \theta$ sabittir. Sonuç olarak γ bir genel helistir. $\square$

Genel helisler için farklı karakterizasyonlar aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 3.2 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ uzay eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart bu uzay eğrisinin binormali $\mathbf{B}$ olmak üzere,

$$\det \left(\frac{d\mathbf{B}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{B}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{B}}{ds^3} \right) = 0$$

olmasıdır [25].

Teorem 3.3 Bir $x = x(s)$ uzay eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det \left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}, \frac{d^4x}{ds^4} \right) = 0$$

olmasıdır [25].

3.2 3-boyutlu Öklid Uzayında Slant Helisler ve Karakterizasyonları

Tanım 3.2 γ , $\mathbb{E}^3$ uzayında eğriliği κ ve burulması τ olan bir Frenet eğrisi olsun. γ eğrisinin her noktadaki $\mathbf{N}$ asli normal vektörü sabit bir d doğrultusuyla sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \mathbf{N}, d \rangle = \cos \theta, \theta \text{ sabit}$$

oluyorsa γ eğrisine bir **slant helis** denir [2].

Teorem 3.4 Eğriliği $\kappa \neq 0$ ve burulması τ olan bir γ eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin asli normaller göstergesinin geodezik eğriliği olan

$$\sigma_n(s) = \left[\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right] (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [2].

İspat γ eğrisinin asli normaller göstergesi birim küre üzerinde birim hızlı olmayan bir eğridir. γ eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olsun. γ eğrisinin asli normaller göstergesine β diyelim.

Yüzey üzerinde tanımlanan ve birim hızlı olmayan bir β eğrisinin geodezik eğriliği

$$\sigma_n = \frac{1}{\|\beta'\|^3} \langle \beta'', \mathbf{N} \times \beta' \rangle \text{ ile hesaplanır.}$$

γ eğrisinin asli normaller göstergesi olan β eğrisi için

$$\beta = \mathbf{N}$$

yazılır. Buradan,

$$\beta' = \mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$$

$$\beta'' = -\kappa' \mathbf{T} - (\kappa^2 + \tau^2) \mathbf{N} + \tau' \mathbf{B}$$

elde edilir. Böylece

$$\mathbf{N} \times \beta' = \mathbf{N} \times (-\kappa' \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$$

olup,

$$\langle \beta'', \mathbf{N} \times \beta' \rangle = -\kappa' \tau + \kappa \tau'$$

bulunur. β eğrisinin geodezik eğriliği olan σ_n fonksiyonu

$$\sigma_n = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

şeklinde elde edilir.

γ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart β eğrisinin küre üzerinde bir çember parçası olmasıdır. Diğer taraftan β eğrisinin küre üzerinde bir çember parçası olması için gerek ve yeter şart geodezik eğriliğinin sabit olmasıdır. Böylece

$$\gamma \text{ bir slant helistir} \Leftrightarrow \sigma_n(s) = \left[\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right] (s) = \text{sabit}$$

elde edilir. $\square$

Uyarı 3.1 Bir genel helisin asli normal doğruları, sabit doğrultuya diktir. Bu nedenle, her genel helis bir slant helistir [2].

3.3 3-boyutlu Öklid Uzayında Darboux Helisler ve Karakterizasyonları

Gaston Darboux tarafından keşfedilen ve bir eğri boyunca Frenet çatısının ani dönme eksenini belirleyen Darboux vektör alanı diferensiyel geometride uzay eğrileri için önemli bir yere sahiptir.

Tanım 3.3 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi için

$$W(s) = \tau(s) \mathbf{T}(s) + \kappa(s) \mathbf{B}(s)$$

vektörüne **Darboux vektörü** denir. Bu vektör $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ üç ayaklısının her s anında bir ani helis hareketi yaptığı eksendir.

$$\mathbf{W}(s) = \frac{\mathbf{W}(s)}{\|\mathbf{W}(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s))$$

vektörüne ise γ eğrisinin **Darboux göstergesi** denir.

Tanım 3.4 $\gamma, \mathbb{E}^3$ uzayında sıfırdan farklı eğrilik ve burulmaya sahip bir eğri olsun. γ eğrisinin $\mathbf{W}$ Darboux vektörü her noktada sabit bir d doğrultusuyla sabit açı yapıyorsa yani

$$\langle \mathbf{W}, d \rangle = \cos \theta, \theta \text{ sabit}$$

oluyorsa γ eğrisine bir **Darboux helis** denir [18].

Teorem 3.5 $\kappa \neq 0$ eğriliği ve $\tau \neq 0$ burulması ile verilen bir γ eğrisinin bir Darboux helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma_n^*(s) = \left[\frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2} \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'} \right] (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [18].

Eğer bir eğrinin Darboux vektör alanının küresel göstergesi bir çember parçasıysa o eğri bir Darboux helistir.

Zıplar vd. slant helisler ve Darboux helisler arasındaki ilişkiyi de incelemişlerdir [18].

Teorem 3.6 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. γ eğrisinin eğriliği $\kappa \neq 0$ ve burulması $\tau \neq 0$ olmak üzere $\frac{\kappa}{\tau}$ sabit olmasın. Bu durumda γ bir slant helistir $\Leftrightarrow \gamma$ eğrisi bir Darboux helistir [18].

Uyarı 3.2 Bir γ Darboux helisinin eksen:

$$d = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \mathbf{T} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \mathbf{B} + \cos \theta \mathbf{N}$$

ile verilir. Bu eksen slant helisin eksenine aynıdır fakat bu iki eğrinin eksenle yaptığı açılar farklıdır [18].

Uyarı 3.3 Genel helisler aynı zamanda birer slant helistir. Genel helis olmayan slant helisler birer Darboux helistir [18].



4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA FRENET ÇATISINA GÖRE HELİSLER

Bu bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı kullanılarak yapılmış olan helis çalışmaları sonucunda elde edilmiş olan karakterizasyonlara yer verilecektir.

4.1 4-boyutlu Öklid Uzayında Genel Helisler ve Karakterizasyonları

Tanım 4.1 $\mathbb{E}^4$ uzayında sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisinin $\mathbf{T}$ birim teğet vektör alanı herhangi bir sabit U birim doğrultusu ile sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \mathbf{T}, U \rangle = \cos \theta, \theta = \text{sabit}$$

oluyorsa, γ eğrisine bir **genel helis** denir.

Teorem 4.1 $\mathbb{E}^4$ uzayında k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğrinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{k_1^2}{k_2^2} + \left[\frac{1}{k_3} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \right]^2 = \text{sabit}$$

olmasıdır [12].

4.2 4-boyutlu Öklid Uzayında Slant Helisler ve Karakterizasyonları

Tanım 4.2 $\mathbb{E}^4$ uzayında sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ olsun. Eğer eğrinin $\mathbf{N}$ asli normal vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapıyorsa, yani

$$\langle \mathbf{N}, \mathbf{U} \rangle = \cos \theta, \theta = \text{sabit}, \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde sabit bir U birim vektörü varsa, γ eğrisine bir **slant helis** denir [12].

Teorem 4.2 $\mathbb{E}^4$ uzayında $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\int k_1(s) ds \right)^2 + \left[\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \int k_1(s) ds \right)' + \frac{k_2}{k_3} \right]^2 + \left(\frac{k_1}{k_2} \int k_1(s) ds \right)^2$$

fonksiyonun sabit olmasıdır [12].

Bu ana karakterizasyonun ardından Ali vd. bir eğrinin slant helis olması için aşağıdaki sonuçları da elde etmiştir [12].

Teorem 4.3 $\mathbb{E}^4$ uzayında $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart bir $f \in C^2$ fonksiyonu için

$$k_3 f(s) = \left(\frac{k_1}{k_2} \int k_1(s) ds \right)' + k_2, \quad \frac{d}{ds} f(s) = -\frac{k_3 k_1}{k_2} \int k_1(s) ds$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır [12].

Teorem 4.4 $\mathbb{E}^4$ uzayında $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{k_2} \int k_1 ds &= \left(A - \int \left[k_2(s) \sin \int k_3(s) ds \right] ds \right) \sin \int k_3(s) ds \\ &\quad - \left(B + \int \left[k_2(s) \cos \int k_3(s) ds \right] ds \right) \cos \int k_3(s) ds \end{aligned}$$

olmasıdır. Burada A ve B bazı sabitlerdir [12].

4.3 4-boyutlu Öklid Uzayında $\mathbf{B}_2$ – Slant Helisler ve Karakterizasyonları

Tanım 4.3 $\mathbb{E}^4$ uzayında sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ olsun. Eğer eğrinin $\mathbf{B}_2$ vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapıyorsa, yani

$$\langle \mathbf{B}_2, U \rangle = \cos \theta, \theta = \text{sabit}, \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde sabit bir U birim vektörü varsa, γ eğrisine bir $\mathbf{B}_2$ – slant helis denir [11].

Teorem 4.5 Bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin bir $\mathbf{B}_2$ – slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{k_3}{k_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)^2 = \tan^2 \theta, \theta = \text{sabit}$$

olmasıdır [11].

Bu ana karakterizasyonun ardından Önder vd. bir eğrinin $\mathbf{B}_2$ – slant helis olması için aşağıdaki sonuçları da elde etmiştir [11].

Teorem 4.6 Bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı eğrisi k_1, k_2, k_3 eğrilikleri sıfırdan farklı olacak şekilde verilsin. γ eğrisinin bir $\mathbf{B}_2$ – slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$fk_1 = \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3}{k_2} \right), \quad \frac{d}{ds} f(s) = -k_1 \frac{k_3}{k_2}$$

olacak şekilde bir $f \in C^2$ fonksiyonu bulunmasıdır [11].

Teorem 4.7 Bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı eğrisi k_1, k_2, k_3 eğrilikleri sıfırdan farklı olacak şekilde verilsin. γ eğrisinin bir $\mathbf{B}_2$ – slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{k_3}{k_2} = A \cos \int_0^s k_1(s) ds + B \sin \int_0^s k_1(s) ds$$

olmasıdır. Burada A ve B bazı sabitlerdir [11].

4.4 4-boyutlu Öklid Uzayında Darboux Helisler ve Karakterizasyonları

Tanım 4.4 $\gamma, \mathbb{E}^n$ uzayında birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin sıfırdan farklı eğrilikleri $\{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}\}$ olmak üzere, γ eğrisinin $H_i : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n-2$ harmonik eğrilik fonksiyonları

$$H_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \frac{k_1}{k_2}, & i = 1 \\ \{H'_{i-1} + H_{i-2}k_i\} \frac{1}{k_{i+1}}, & i = 2, 3, \dots, n-2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [32].

Tanım 4.5 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ birim hızlı bir eğri olmak üzere, γ eğrisinin Frenet çatısı ve harmonik eğrilikleri sırasıyla $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n\}, \{H_1, H_2, \dots, H_{n-2}\}$ olsun.

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}_1 + H_1 \mathbf{V}_3 + \dots + H_{n-2} \mathbf{V}_n$$

vektörüne γ eğrisinin **genel Darboux vektörü** denir [32].

Tanım 4.6 $\mathbb{E}^4$ uzayında sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ olsun. Herhangi bir birim uzunluklu sabit doğrultu U olmak üzere eğrinin $\mathbf{D}$ Darboux vektör alanı U doğrultusuyla sabit açı yapıyorsa yani

$$\langle \mathbf{D}, U \rangle = \cos \theta \neq 0, \theta = \text{sabit}$$

oluyorsa γ eğrisine $\mathbb{E}^4$ uzayında bir **Darboux helis** denir [32].

Teorem 4.8 $\mathbb{E}^4$ uzayında sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ olsun. γ eğrisinin bir Darboux helis olması için gerek ve yeter koşul herhangi sıfırdan farklı λ_1, λ_2 sabitleri için,

$$\frac{k_1}{k_2} = \lambda_1 \cos\left(\int k_3(s) ds\right) + \lambda_2 \sin\left(\int k_3(s) ds\right)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [32].

Uyarı 4.1 $\mathbb{E}^4$ uzayında sıfırdan farklı sabit eğriliklere sahip hiçbir Darboux helis yoktur [32].



3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DARBOUX ÇATISINA GÖRE HELİSLER

Bu bölümden itibaren tezin orijinal kısmına geçilmektedir. Beşinci ve altıncı bölümler tezin orijinal kısmıdır. Bu bölümün bir kısmında elde edilmiş olan sonuçlar [28] numaralı makalede yayınlanmıştır.

5.1 Teğet-Normal Slant Helisler ve Karakterizasyonları

Tanım 5.1 γ , $\mathbb{E}^3$ uzayında bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve bu eğri boyunca tanımlanan Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ olmak üzere, γ eğrisi çizilirken $\mathbf{V}$ vektörünün uç noktalarının S^2 birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye γ eğrisinin $\mathbf{V}$ - **göstergesi** denir. $\mathbf{V}$ -göstergesini γ_V ile göstereceğiz. Bu durumda, $\gamma_V(s) = \mathbf{V}(s)$ yazılabilir.

Tanım 5.2 γ , yönlendirilebilir bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve bu eğri boyunca Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ olsun. Eğri boyunca $\mathbf{V}$ vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapıyorsa yani,

$$\langle \mathbf{V}, d \rangle = \cos \theta, \quad \theta = \text{sabit}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde sabit bir d birim vektörü varsa, γ eğrisine bir **teğet-normal slant helis** denir.

Bir teğet-normal slant helisin karakterizasyonu aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 5.1 M yüzeyi üzerinde $(\tau_g(s), \kappa_g(s)) \neq (0,0)$ olan birim hızlı bir γ eğrisinin bir teğet-normal slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma_v(s) = \left(\frac{1}{(\kappa_g^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\tau_g' \kappa_g - \kappa_g' \tau_g - \kappa_n (\kappa_g^2 + \tau_g^2)) \right) (s) \quad (5.1)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat γ eğrisinin $\mathbf{V}$ -gösterge eğrisi için $\gamma_v(s) = \mathbf{V}(s)$ yazabiliriz. Bu eşitliğin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\gamma_v'(s) = -\kappa_g(s)\mathbf{T}(s) + \tau_g(s)\mathbf{U}(s)$$

$$\gamma_v''(s) = (-\kappa_g' - \kappa_n \tau_g)\mathbf{T}(s) - (\kappa_g^2 + \tau_g^2)\mathbf{V}(s) + (-\kappa_g \kappa_n + \tau_g')\mathbf{U}(s)$$

$$\begin{aligned} \gamma_v'''(s) = & (-\kappa_g'' - \kappa_n' \tau_g - 2\kappa_n \tau_g' + \kappa_g^3 + \kappa_g \tau_g^2 + \kappa_n^2 \kappa_g)\mathbf{T}(s) \\ & + (-3\kappa_g \kappa_g' - 3\tau_g \tau_g')\mathbf{V}(s) + (-2\kappa_g' \kappa_n - \kappa_n^2 \tau_g - \kappa_g^2 \tau_g - \tau_g^3 + \tau_g'' - \kappa_n' \kappa_g)\mathbf{U}(s) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\gamma_v' \times \gamma_v'' = (\kappa_g^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \left[\frac{\tau_g' \kappa_g - \kappa_g' \tau_g - \kappa_n (\kappa_g^2 + \tau_g^2)}{(\kappa_g^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^2}$$

olup γ_v eğrisinin eğriliği

$$\kappa_{\gamma_v}(s) = \frac{\|\gamma_v' \times \gamma_v''\|}{\|\gamma_v'\|^3} = \sqrt{1 + (\sigma_v(s))^2}, \quad (5.2)$$

ve γ_v eğrisinin burulması

$$\tau_{\gamma_v}(s) = \frac{\langle \gamma_v' \times \gamma_v'', \gamma_v''' \rangle}{\|\gamma_v' \times \gamma_v''\|^2} = \frac{1}{(\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s))^{\frac{11}{2}}} \frac{\sigma_v'(s)}{(1 + (\sigma_v(s))^2)}, \quad (5.3)$$

elde edilir. Burada

$$\sigma_V = \frac{1}{(\kappa_g^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\tau_g' \kappa_g - \kappa_g' \tau_g - \kappa_g (\kappa_g^2 + \tau_g^2) \right)$$

şeklindedir.

($\Rightarrow$) M yüzeyi üzerinde $(\tau_g(s), \kappa_g(s)) \neq (0,0)$ olan birim hızlı bir γ eğrisi bir teğet-normal slant helis olsun. Bu durumda, γ eğrisinin $\mathbf{V}$ vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapar. Dolayısıyla γ_V küresel eğrisi düzlemseldir. Yani, γ eğrisinin $\mathbf{V}$ -gösterge eğrisi bir çember parçasıdır ve $\kappa_{\gamma_V} = \text{sabit}$, $\tau_{\gamma_V} = 0$ olur. Buradan da (5.2) ve (5.3) denklemleri göz önüne alındığında $\sigma_V(s) = \text{sabit}$ bulunur.

($\Leftarrow$) $\sigma_V(s) = \text{sabit}$ olsun. Bu durumda (5.2) ve (5.3) denklemlerinden $\kappa_{\gamma_V} = \text{sabit}$ ve $\tau_{\gamma_V} = 0$ bulunur. Bu ise γ_V eğrisinin bir çember parçası olduğunu gösterir. O halde $\mathbf{V}$ vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapar, yani γ eğrisi bir teğet-normal slant helistir. $\square$

Uyarı 5.1 σ_V sabit fonksiyonu aynı zamanda γ eğrisinin $\mathbf{V}$ -gösterge eğrisinin geodezik eğriliğidir.

Şimdi teğet-normal slant helislerin bazı özel durumlarına ait sonuçları verelim:

Sonuç 5.1

i) γ , M yüzeyi üzerinde $\kappa_g(s) \neq 0$ olan bir asimptotik eğri olsun. Bu durumda γ eğrisinin bir teğet-normal slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{\kappa_g^2}{(\kappa_g^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau_g}{\kappa_g} \right)' \right) (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

ii) γ , M yüzeyi üzerinde $\kappa_g(s) \neq 0$ olan bir asimptotik eğri ise bu durumda $\kappa = \kappa_g, \tau = \tau_g$ olur. Böylece, γ eğrisinin bir teğet-normal slant helis olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin bir slant helis olmasıdır.

Sonuç 5.2 γ, M yüzeyi üzerinde $\tau_g(s) \neq 0$ olan bir geodezik eğri olsun. γ eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ve Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ olsun. γ eğrisi için

$$\gamma'' = \lambda \mathbf{U}$$

yazılabilir. Buradan

$$\mathbf{U} = \pm \mathbf{N}, \mathbf{V} = \pm \mathbf{B}$$

elde edilir. Ayrıca γ eğrisi bir geodezik eğri olduğundan $\kappa_n = \kappa, \tau_g = \tau$ olur.

Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

- i) γ eğrisi bir teğet-normal slant helistir.
- ii) $\langle \mathbf{B}, d \rangle = \text{sabit}$ olacak şekilde bir d birim vektörü vardır.
- iii) γ eğrisi bir genel helistir.
- iv) $\frac{\kappa_n(s)}{\tau_g(s)}$ fonksiyonu sabittir.

Sonuç 5.3 γ, M yüzeyi üzerinde $\kappa_g(s) \neq 0$ olan bir asli eğri olsun. Bu durumda, γ eğrisinin bir teğet-normal slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa_n(s)}{\kappa_g(s)}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

5.2 Teğet-Normal Slant Helislerin Ekseninin Bulunması

Bu bölümde yeni tanımlamış olduğumuz teğet-normal slant helis eğrilerinin eksenini bulunacaktır. Yönlendirilmiş bir M yüzeyi üzerinde verilen birim hızlı γ eğrisi bir teğet-normal slant helis olsun. Bu durumda tanımdan, $\mathbf{V}$ vektör alanı sabit bir birim $d = a\mathbf{T} + b\mathbf{V} + c\mathbf{U}$ doğrultusuyla sabit bir θ açısı yapar, yani $\langle \mathbf{V}, d \rangle = \cos \theta = b$ olur. Bu son denklemin s' ye göre türevi alınırsa,

$$\langle \mathbf{V}', d \rangle = 0,$$

$$\langle -\kappa_g \mathbf{T} + \tau_g \mathbf{U}, d \rangle = 0$$

bulunur. Ayrıca $d = a\mathbf{T} + b\mathbf{V} + c\mathbf{U}$ eşitliğinin s' ye göre türevi,

$$d' = (a' - b\kappa_g - c\kappa_n)\mathbf{T} + (a\kappa_g - c\tau_g)\mathbf{V} + (c' + a\kappa_n + b\tau_g)\mathbf{U} = \vec{0}$$

olup,

$$\begin{cases} a' - b\kappa_g - c\kappa_n = 0, \\ a\kappa_g - c\tau_g = 0, \\ c' + a\kappa_n + b\tau_g = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

elde edilir.

$a\kappa_g - c\tau_g = 0$ eşitliğinden $c = \frac{\kappa_g}{\tau_g}a$, $\tau_g(s) \neq 0$ olup bu, (5.4) deki birinci ve üçüncü

denklemlerde yerine yazılırsa ve üçüncü denklem $\frac{\kappa_g}{\tau_g}$ ile çarpılıp düzenlenirse

$$\left(1 + \left(\frac{\kappa_g}{\tau_g} \right)^2 \right) a' + \frac{\kappa_g}{\tau_g} \left(\frac{\kappa_g}{\tau_g} \right)' a = 0$$

şeklinde birinci mertebeden bir homojen lineer denklem elde edilir. Bu değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem çözülürse

$$\left(1 + \left(\frac{\kappa_g}{\tau_g} \right)^2 \right) \frac{da}{a} + \frac{\kappa_g}{\tau_g} \left(\frac{\kappa_g}{\tau_g} \right)' ds = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{da}{a} = \int \frac{-\kappa_g \left(\frac{\kappa_g}{\tau_g} \right)' ds}{\tau_g + \frac{\kappa_g^2}{\tau_g}}$$

$$\Rightarrow \ln a = -\frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{\kappa_g}{\tau_g} \right)^2 + 1 \right] + c_1$$

$$\Rightarrow a = \lambda \frac{\tau_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}}$$

genel çözümüne ulaşılır. Burada λ integral sabitidir. Bu çözüm (5.4) denklem sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$c = \lambda \frac{\kappa_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}}$$

elde edilir. Diğer taraftan d birim uzunluklu olduğundan $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ olup buradan $\lambda = \pm \sin \theta$ bulunur. Sonuç olarak teğet-normal slant helisin ekseni olan d doğrultusu

$$d = \pm \frac{\tau_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}} \sin \theta \mathbf{T} + \cos \theta \mathbf{V} \pm \frac{\kappa_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}} \sin \theta \mathbf{U} \quad (5.5)$$

olarak bulunur. Eksenin bulunmasının tamamlanması için θ açısının da elde edilmesi gerekmektedir. $\langle \mathbf{V}', d \rangle = 0$ denkleminin s 'ye göre türevi alınır,

$$\langle \mathbf{V}'', d \rangle = \pm \left(\frac{\tau_g' \kappa_g - \kappa_g' \tau_g - \kappa_n (\kappa_g^2 + \tau_g^2)}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}} \right) \sin \theta - (\kappa_g^2 + \tau_g^2) \cos \theta = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\cot \theta = \pm \frac{\tau_g' \kappa_g - \kappa_g' \tau_g - \kappa_n (\kappa_g^2 + \tau_g^2)}{(\kappa_g^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \sigma_v(s) \quad (5.6)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (5.6) denkleminde θ açısı bulunarak (5.5) denkleminde yazmak suretiyle teğet-normal slant helisin ekseni olan d doğrultusu elde edilmiş olur. $\square$

Teorem 5.2 $\mathbb{E}^3$ uzayında bir M yüzeyi üzerindeki birim hızlı bir γ eğrisi boyunca Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ olsun. $(\tau_g(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere, γ eğrisi bir teğet-normal slant helis ise, γ eğrisinin d ekseni

$$d = \pm \frac{\tau_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}} \sin \theta \mathbf{T} + \cos \theta \mathbf{V} \pm \frac{\kappa_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}} \sin \theta \mathbf{U}$$

denklemleriyle bulunur.

Uyarı 5.2 (5.6) denklemini kullanarak d vektörünün sabit bir vektör olduğu yani $d'=0$ olduğu kolayca görülür.

5.3 Bazı Özel Eğriler ile Teğet-Normal Slant Helislerin İlişkisi

Teorem 5.3 $M, \mathbb{E}^3$ uzayında yönlendirilmiş bir yüzey ve γ, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\bar{\gamma}$ eğrisi γ eğrisinin $\mathbf{V}$ -doğrultu eğrisi olsun. γ eğrisinin bir teğet-normal slant helis olması için gerek ve yeter şart $\bar{\gamma}$ eğrisinin bir genel helis olmasıdır.

İspat $\bar{\gamma}$ eğrisi γ eğrisinin $\mathbf{V}$ -doğrultu eğrisi olduğundan γ eğrisinin geodezik eğriliği (κ_g) , geodezik burulması (τ_g) ve normal eğriliği (κ_n) ile $\bar{\gamma}$ eğrisinin $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulması arasındaki ilişki

$$\bar{\kappa} = \sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}, \quad \bar{\tau} = -\kappa_n + \frac{\kappa_g \tau_g' - \kappa_g' \tau_g}{\kappa_g^2 + \tau_g^2}$$

şeklindedir [20]. Buradan

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \left(\frac{1}{(\kappa_g^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\tau_g' \kappa_g - \kappa_g' \tau_g - \kappa_n (\kappa_g^2 + \tau_g^2)) \right) = \sigma_v$$

elde edilir. Burada σ_v (5.1) ile tanımlanan fonksiyondur. Teorem 5.1 kullanılırsa, γ eğrisinin bir teğet-normal slant helis olması için gerek ve yeter şart $\bar{\gamma}$ eğrisinin bir genel helis olmasıdır. $\square$

Teorem 5.4 $M, \mathbb{E}^3$ uzayında yönlendirilmiş bir yüzey, $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ yay parametresiyle verilmiş regüler bir eğri ve $\mathbf{D}_r, \gamma$ eğrisinin rektifiyan Darboux vektör

alanı olsun. γ eğrisinin bir teğet-normal slant helis olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{D}_r$ rektifiyan Darboux vektör alanının integral eğrisinin bir dairesel helis olmasıdır.

İspat γ eğrisinin rektifiyan Darboux vektör alanı

$$\mathbf{D}_r(s) = \tau_g(s)\mathbf{T}(s) + \kappa_g(s)\mathbf{U}(s)$$

olmak üzere β eğrisi $\mathbf{D}_r$ vektör alanının integral eğrisi olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{D}_r = \beta' = \tau_g \mathbf{T} + \kappa_g \mathbf{U}$$

bulunur. Bu eşitliğin s 'ye göre türevi alınırsa,

$$\beta'' = (\tau_g' - \kappa_g \kappa_n) \mathbf{T} + (\kappa_g' + \kappa_n \tau_g) \mathbf{U},$$

$$\beta''' = (\tau_g' - \kappa_g \kappa_n)' \mathbf{T} + (\tau_g' - \kappa_g \kappa_n)(\kappa_g \mathbf{V} + \kappa_n \mathbf{U}) + (\kappa_g' + \kappa_n \tau_g)' \mathbf{U} + (\kappa_g' + \kappa_n \tau_g)(-\kappa_n \mathbf{T} - \tau_g \mathbf{V})$$

elde edilir. Buradan,

$$\beta' \times \beta'' = (-\kappa_n(\kappa_g^2 + \tau_g^2) + \tau_g' \kappa_g - \tau_g \kappa_g') \mathbf{V}$$

bulunur. β eğrisinin κ_β eğriliği

$$\kappa_\beta = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \left(\frac{1}{(\kappa_g^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\tau_g' \kappa_g - \kappa_g' \tau_g - \kappa_n(\kappa_g^2 + \tau_g^2)) \right) = \sigma_v(s)$$

olup, τ_β burulması ise

$$\tau_\beta = \frac{\langle \beta' \times \beta'', \beta''' \rangle}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = 1$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = \frac{1}{\sigma_v(s)}$$

bulunur. Sonuç olarak, Teorem 5.1'den dolayı, γ eğrisinin bir teğet-normal slant helis olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{D}_r$ rektifiyan Darboux vektör alanının integral eğrisinin bir dairesel helis olmasıdır. $\square$

Teorem 5.5 $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$, $(\kappa_g(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olan birim hızlı bir eğri olsun.

Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

i) γ bir teğet-normal slant helistir.

ii) γ eğrisinin $\mathbf{V}$ -gösterge eğrisi $\mathbb{S}^2$ de bir çember parçasıdır.

iii) $\sigma_v(s) = \left(\frac{1}{(\kappa_g^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\tau_g' \kappa_g - \kappa_g' \tau_g - \kappa_n (\kappa_g^2 + \tau_g^2)) \right) (s)$ fonksiyonu sabittir.

iv) $\left\langle d, \frac{\mathbf{D}_r}{\|\mathbf{D}_r\|} \right\rangle = \text{sabit}$ olacak şekilde bir d birim vektörü vardır.

v) γ eğrisinin $\mathbf{V}$ -doğrultu eğrisi bir genel helistir.

vi) γ eğrisinin $\mathbf{D}_r$ - integral eğrisi bir dairesel helistir.

İspat Bu eşdeğerlik teoreminin ispatına geçilirse,

i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii) Teorem 5.1 ve ispatında gösterildi.

i) $\Leftrightarrow$ v) Teorem 5.3 de gösterildi.

i) $\Leftrightarrow$ vi) Teorem 5.4 de gösterildi.

İspatı tamamlamak için gösterilmesi gereken iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ v) durumudur.

iii) $\Rightarrow$ iv)

$\sigma_v = \frac{1}{(\kappa_g^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\tau_g' \kappa_g - \kappa_g' \tau_g - \kappa_n (\kappa_g^2 + \tau_g^2))$ fonksiyonu sabit olsun. Bu durumda γ

eğrisi bir teğet-normal slant helistir. Bir teğet-normal slant helisin ekseni olan d doğrultusu Teorem 5.2'den

$$d = \pm \frac{\tau_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}} \sin \theta \mathbf{T} + \cos \theta \mathbf{V} \pm \frac{\kappa_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}} \sin \theta \mathbf{U}$$

birim vektörüdür.

$$\frac{\mathbf{D}_r}{\|\mathbf{D}_r\|} = \frac{\tau_g \mathbf{T} + \kappa_g \mathbf{U}}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}}$$

olmak üzere

$$\left\langle d, \frac{\mathbf{D}_r}{\|\mathbf{D}_r\|} \right\rangle = \pm \sin \theta, \theta \text{ sabit elde edilir.}$$

iv) $\Rightarrow$ v)

$$\left\langle d, \frac{\mathbf{D}_r}{\|\mathbf{D}_r\|} \right\rangle = \text{sabit olacak şekilde bir } d = \pm \frac{\tau_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}} \sin \theta \mathbf{T} + \cos \theta \mathbf{V} \pm \frac{\kappa_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}} \sin \theta \mathbf{U}$$

birim vektörü var olsun. Bu durumda Teorem 5.2 gereğince d birim doğrultusunu eksen ve sabit θ açısını bu eksenle yaptığı açı kabul eden bir teğet-normal slant helis vardır. Bu teğet-normal slant helis γ olmak üzere, Teorem 5.3'ten γ eğrisinin $\mathbf{V}$ -doğrultu eğrisi bir genel helistir. $\square$

Teorem 5.3'e benzer olarak, genel helisler ve isophote eğriler ile ilgili olarak elde edilen bazı karakterizasyonlar aşağıdaki şekilde verilir:

Teorem 5.6 $M, \mathbb{E}^3$ uzayında yönlendirilmiş bir yüzey, $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ yay parametresiyle verilmiş regüler bir eğri ve $\mathbf{D}_n, \gamma$ eğrisinin normal Darboux vektör alanı olsun. γ eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{D}_n$ normal Darboux vektör alanının integral eğrisinin bir dairesel helis olmasıdır.

İspat γ eğrisinin normal Darboux vektör alanı

$$\mathbf{D}_n(s) = -\kappa_n(s)\mathbf{V}(s) + \kappa_g(s)\mathbf{U}(s)$$

olmak üzere β eğrisi $\mathbf{D}_n$ vektör alanının integral eğrisi olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{D}_n = \beta' = -\kappa_n \mathbf{V} + \kappa_g \mathbf{U}$$

yazılır. Bu eşitliğin s' ye göre türevi alınırsa,

$$\beta'' = (-\kappa_n' - \kappa_g \tau_g) \mathbf{V} + (\kappa_g' - \kappa_n \tau_g) \mathbf{U}$$

$$\beta''' = (-\kappa_n' - \kappa_g \tau_g)' \mathbf{V} + (-\kappa_n' - \kappa_g \tau_g)(-\kappa_g \mathbf{T} + \tau_g \mathbf{U}) + (\kappa_g' - \kappa_n \tau_g)' \mathbf{U} + (\kappa_g' - \kappa_n \tau_g)(-\kappa_n \mathbf{T} - \tau_g \mathbf{V})$$

elde edilir. Buradan,

$$\beta' \times \beta'' = (\tau_g (\kappa_g^2 + \kappa_n^2) + \kappa_n' \kappa_g - \kappa_n \kappa_g') \mathbf{T}$$

bulunur. β eğrisinin κ_β eğriliği ve τ_β burulması sırasıyla,

$$\kappa_\beta = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \left(\frac{1}{(\kappa_g^2 + \kappa_n^2)^{\frac{3}{2}}} (\kappa_n' \kappa_g - \kappa_n \kappa_g' + \tau_g (\kappa_g^2 + \kappa_n^2)) \right) = \mu(s),$$

$$\tau_\beta = \frac{\langle \beta' \times \beta'', \beta''' \rangle}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = 1$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = \frac{1}{\mu(s)}$$

bulunur. Sonuç olarak, γ eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{D}_n$ normal Darboux vektör alanının integral eğrisinin bir dairesel helis olmasıdır. $\square$

Teorem 5.7 $M, \mathbb{E}^3$ uzayında yönlendirilmiş bir yüzey, $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ yay uzunluğu parametresiyle verilmiş regüler bir eğri ve $\mathbf{D}_o, \gamma$ eğrisinin oskülatör Darboux vektör alanı olsun. γ eğrisinin bir isophote eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{D}_o$ oskülatör Darboux vektör alanının integral eğrisinin bir dairesel helis olmasıdır.

İspat γ eğrisinin oskülatör Darboux vektör alanı

$$\mathbf{D}_o(s) = \tau_g(s) \mathbf{T}(s) - \kappa_n(s) \mathbf{V}(s)$$

olmak üzere β eğrisi $\mathbf{D}_o$ vektör alanının integral eğrisi olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{D}_o = \beta' = \tau_g \mathbf{T} - \kappa_n \mathbf{V}$$

yazılır. Bu eşitliğin s' ye göre türevi alınırsa,

$$\beta'' = (\tau_g' + \kappa_n \kappa_g) \mathbf{T} + (-\kappa_n' + \kappa_g \tau_g) \mathbf{V}$$

$$\beta''' = (\tau_g' + \kappa_n \kappa_g)' \mathbf{T} + (\tau_g' + \kappa_n \kappa_g)(\kappa_g \mathbf{V} + \kappa_n \mathbf{U}) + (-\kappa_n' + \kappa_g \tau_g)' \mathbf{V} + (-\kappa_n' + \kappa_g \tau_g)(-\kappa_g \mathbf{T} + \tau_g \mathbf{U})$$

elde edilir. Buradan,

$$\beta' \times \beta'' = (\kappa_g(\tau_g^2 + \kappa_n^2) - \kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g') \mathbf{U}$$

bulunur. β eğrisinin κ_β eğriliği ve τ_β burulması sırasıyla,

$$\kappa_\beta = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \left(\frac{1}{(\tau_g^2 + \kappa_n^2)^{\frac{3}{2}}} (\kappa_n \tau_g' - \kappa_n' \tau_g + \kappa_g(\tau_g^2 + \kappa_n^2)) \right) = \lambda(s),$$

$$\tau_\beta = \frac{\langle \beta' \times \beta'', \beta''' \rangle}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = 1$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = \frac{1}{\lambda(s)}$$

bulunur. Sonuç olarak, γ eğrisinin bir isophote eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{D}_0$ oskülatör Darboux vektör alanının integral eğrisinin bir dairesel helis olmasıdır. $\square$

5.4 Teğet-Normal Slant Helislerin Hesaplanması

Bu bölümde, verilen bir yüzey üzerindeki teğet-normal slant helislerin bulunması için çeşitli metotlar verilecektir. Hesaplamalar, parametrik ve kapalı denklemleri ile verilen yüzeyler için ayrı ayrı olmak üzere iki kısımda yapılacaktır.

5.4.1 Parametrik Yüzeyler Üzerinde Teğet-Normal Slant Helis

M , $\mathbb{E}^3$ uzayında $X = X(u, v)$ parametrik ifadesiyle verilen yönlendirilmiş regüler bir yüzey olsun. Hedefimiz, sabit bir d birim doğrultusu ve sabit bir θ açısı verildiğinde,

M üzerinde yatan ve verilen d doğrultusu ile sabit θ açısı yapan teğet-normal slant helisin (eğer varsa) bulunmasıdır.

M yüzeyi üzerinde d eksenli θ açılı bir birim teğet-normal slant helis $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ ve bu eğri boyunca Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ olsun. γ eğrisini elde etmek için $u(s), v(s)$ fonksiyonlarının bulunması gerekmektedir. Eğrinin teğet vektör alanı

$$\gamma' = \mathbf{T} = \frac{du}{ds} X_u + \frac{dv}{ds} X_v$$

ve yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{U} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

olup, $\mathbf{V}$ vektör alanı

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \times \mathbf{T} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \times \left(\frac{du}{ds} X_u + \frac{dv}{ds} X_v \right)$$

ile hesaplanır. Buradan $\mathbf{V}$ vektör alanı

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \left[\frac{du}{ds} (EX_v - FX_u) + \frac{dv}{ds} (FX_v - GX_u) \right]$$

olup,

$$\langle \mathbf{V}, d \rangle = \cos \theta$$

eşitliğinden

$$\frac{du}{ds} (E \langle X_v, d \rangle - F \langle X_u, d \rangle) + \frac{dv}{ds} (F \langle X_v, d \rangle - G \langle X_u, d \rangle) = \cos \theta \|X_u \times X_v\| \quad (5.7)$$

eşitliği elde edilir. (5.7) denkleminde $\frac{du}{ds}$ yalnız bırakılıp (2.2) denkleminde yerine

yazılırsa $\frac{dv}{ds}$, e göre ikinci dereceden bir denklem elde edilir ve bu denklemin kökü olan

$\frac{dv}{ds}$ bulunur. Aynı işlem (5.7) denkleminde $\frac{dv}{ds}$ yalnız bırakılıp yapılırsa,

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = \frac{2 \cos \theta (EG - F^2)^{\frac{3}{2}} \langle X_v, d \rangle \pm \sqrt{\Delta}}{2A(EG - F^2)} \\ \frac{dv}{ds} = \frac{-2 \cos \theta (EG - F^2)^{\frac{3}{2}} \langle X_u, d \rangle \mp \sqrt{\Delta^*}}{2A(EG - F^2)} \end{cases} \quad (5.8)$$

sistemi elde edilir. Burada A , Δ ve Δ^* sırasıyla

$$A = E \langle X_v, d \rangle^2 - 2F \langle X_u, d \rangle \langle X_v, d \rangle + G \langle X_u, d \rangle^2,$$

$$\Delta = 4 \cos^2 \theta (EG - F^2)^2 \left[\langle X_v, d \rangle^2 (EG - F^2) - AG \right] + 4A(EG - F^2) \left[F \langle X_v, d \rangle - G \langle X_u, d \rangle \right]^2,$$

$$\Delta^* = 4 \cos^2 \theta (EG - F^2)^2 \left[\langle X_u, d \rangle^2 (EG - F^2) - AE \right] + 4A(EG - F^2) \left[E \langle X_v, d \rangle - F \langle X_u, d \rangle \right]^2$$

şeklindedir. Birinci mertebeden başlangıç-değer problemleri için varlık ve teklik teoremi gereğince, (5.8) de elde edilen

$$\frac{du}{ds} = f_1(s, u, v)$$

$$\frac{dv}{ds} = f_2(s, u, v)$$

sistemindeki $f_1(s, u, v)$ ve $f_2(s, u, v)$ fonksiyonları ($\Delta \geq 0$ ve $\Delta^* \geq 0$ için) sürekli ve

$\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial v}$ kısmi türevleri de sürekli olduğundan (5.8) denklem sisteminin

$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$ başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü vardır ve bu çözüm tektir [34].

(5.8) sistemi $\begin{cases} u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$ başlangıç koşulları yardımıyla çözülerek, elde edilen $u(s)$, $v(s)$

fonksiyonları $X(u, v)$ denkleminde yerine yazılırsa, M yüzeyi üzerinde aranan teğet-normal slant helis elde edilmiş olur.

Uyarı 5.3 (5.8) denklemlerinde $A \neq 0$ sağlanmaktadır yani, üzerinde çalışılan M yüzeyi düzleminden farklı şekillenmiştir.

Teorem 5.8 $\mathbb{E}^3$ uzayında $X = X(u, v)$ parametrik ifadesiyle verilen bir M yüzeyi üzerinde sabit bir d birim doğrultusu ve sabit bir θ açısı verildiğinde, M üzerinde yatan ve verilen d doğrultusu ile θ açısı yapan teğet-normal slant helis için aşağıdakiler geçerlidir:

- i) Eğer Δ ve/veya Δ^* negatif ise, yüzey üzerinde verilen eksen ile verilen açıyı yapan bir teğet-normal slant helis yoktur.
- ii) Eğer $\Delta > 0$ ve $\Delta^* > 0$ ise verilen yüzey üzerinde, istenen özelliklere sahip iki tane teğet-normal slant helis vardır.
- iii) Eğer $\Delta = 0$ ve $\Delta^* = 0$ ise verilen yüzey üzerinde, istenen özelliklere sahip bir tane teğet-normal slant helis vardır.

Burada Δ ve Δ^* (5.8) denklemlerinden elde edilmiştir.

5.4.2 Kapalı Yüzeyler Üzerinde Teğet-Normal Slant Helis

M yüzeyi $f(x, y, z) = 0$ kapalı denkleminde verilsin. Hedefimiz, M yüzeyi üzerinde yatan ve verilen $d = (a, b, c)$ eksenini ile verilen sabit θ açısı yapan $\gamma(s)$ teğet-normal slant helisi bulmaktır.

$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ve eğri boyunca Darboux çatısı $\{T, V, U\}$ olsun. $\gamma(s)$ eğrisini elde etmek için $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ fonksiyonlarının bulunması gerekmektedir. (Burada s yay parametresi olarak kabul edilmektedir).

Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{U} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

olmak üzere $\mathbf{V}$ vektör alanı

$$\mathbf{V} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \times \mathbf{T} = \frac{1}{\|\nabla f\|} \left(f_y \frac{dz}{ds} - f_z \frac{dy}{ds}, f_z \frac{dx}{ds} - f_x \frac{dz}{ds}, f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} \right)$$

elde edilir. Bu son eşitlik $\langle \mathbf{V}, d \rangle = \cos \theta$ denkleminde yerine yazılırsa

$$(bf_z - cf_y) \frac{dx}{ds} + (cf_x - af_z) \frac{dy}{ds} + (af_y - bf_x) \frac{dz}{ds} = \|\nabla f\| \cos \theta \quad (5.9)$$

bulunur. (5.9) ve (2.3) denklemlerinden $\frac{dx}{ds}$ ve $\frac{dy}{ds}$ türevleri $\frac{dz}{ds}$ cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\Omega} \left[f_y (af_y - bf_x) - f_z (cf_x - af_z) \right] \frac{dz}{ds} - f_y \|\nabla f\| \cos \theta \quad (5.10)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\Omega} \left[f_z (bf_z - cf_y) - f_x (af_y - bf_x) \right] \frac{dz}{ds} + f_x \|\nabla f\| \cos \theta \quad (5.11)$$

Burada $\Omega = cf_x^2 - af_x f_z - bf_y f_z + cf_y^2 \neq 0$ alınmıştır.

(5.10) ve (5.11) denklemleri (2.4) denkleminde yerine yazılırsa $\frac{dz}{ds}$ 'e göre

$$q_1 \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + q_2 \frac{dz}{ds} + q_3 = 0$$

kuadratik denklemi elde edilir. Burada,

$$q_1 = \frac{1}{\Omega^2} \left[b^2 f_x^4 + a^2 f_y^4 + (a^2 + b^2) f_z^4 - 2abf_x f_y^3 - 2acf_x f_z^3 - 2bcf_y f_z^3 - 2abf_y f_x^3 + (a^2 + b^2) f_x^2 f_y^2 \right. \\ \left. + (c^2 + 2b^2) f_x^2 f_z^2 + (2a^2 + c^2) f_y^2 f_z^2 - 4abf_x f_y f_z^2 \right] + 1,$$

$$q_2 = \frac{1}{\Omega^2} \left[2 \|\nabla f\| \cos \theta (bf_x f_z^2 - af_y f_x^2 + bf_x f_y^2 - af_y f_z^2 + bf_x^3 - af_y^3) \right],$$

$$q_3 = \frac{1}{\Omega^2} \left[\|\nabla f\|^2 \cos^2 \theta (f_x^2 + f_y^2) \right] - 1$$

ile hesaplanır. Bu kuadratik denklemden

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} \quad (5.12)$$

bulunur. Elde edilen (5.12) denklemi (5.10) ve (5.11) denklemlerinde yerine yazılırsa bir birinci mertebeden açık adi diferensiyel denklem sistemine ulaşılır. Bu sistemle birlikte

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

başlangıç noktası bir başlangıç-değer problemi oluşturmaktadır. Birinci mertebeden başlangıç-değer problemleri için varlık ve teklik teoremi gereğince,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= f_1(s, x, y, z) \\ \frac{dy}{ds} &= f_2(s, x, y, z) \\ \frac{dz}{ds} &= f_3(s, x, y, z) \end{aligned} \quad (5.13)$$

fonksiyonları ($q_2^2 - 4q_1q_3 \geq 0$ için) sürekli ve f_1, f_2, f_3 fonksiyonlarının x, y, z 'ye göre

$$\text{kısmi türevleri de sürekli olduğundan (5.13) denklem sisteminin } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases} \text{ başlangıç}$$

koşullarını sağlayan bir çözümü vardır ve bu çözüm tektir [34]. Bu başlangıç-değer probleminin çözümü bize M yüzeyi üzerinde aranan teğet-normal slant helisi verir.

Teorem 5.9 $\mathbb{E}^3$ uzayında $f(x, y, z) = 0$ kapalı denklemleriyle verilen bir M yüzeyi üzerinde sabit bir $d = (a, b, c)$ birim doğrultusu ve sabit bir θ açısı verildiğinde, M üzerinde yatan ve verilen d doğrultusu ile sabit θ açısı yapan teğet-normal slant helis için aşağıdakiler geçerlidir:

i) Eğer (x_0, y_0, z_0) noktasında $q_2^2 - 4q_1q_3 < 0$ ise; yüzey üzerinde, verilen eksen ile verilen açığı yapan bir teğet-normal slant helis yoktur.

ii) Eğer (x_0, y_0, z_0) noktasında $q_2^2 - 4q_1q_3 > 0$ ise yüzey üzerinde, verilen başlangıç noktasından geçen iki tane teğet-normal slant helis vardır.

iii) Eğer (x_0, y_0, z_0) noktasında $q_2^2 - 4q_1q_3 = 0$ ise yüzey üzerinde, verilen başlangıç noktasından geçen bir tane teğet-normal slant helis vardır.

Buradaki q_1 , q_2 ve q_3 (5.12) denkleminde elde edilmiştir.

5.5 Yüzey Üzerinde Teğet-Normal Slant Helis Örnekleri

Örnek 5.1 Bir M yüzeyi $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$, $u \neq 0$, parametrik denkleminde verilsin. Bu yüzey üzerinde, $d=(0,0,1)$ doğrultusuyla $\theta = \frac{\pi}{3}$ radyanlık açı yapan ve $P=(1,0,1)$ başlangıç noktasından geçen teğet-normal slant helisi bulalım.

$$X_u = (\cos v, \sin v, 2u)$$

$$X_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

olup

$$X_u \times X_v = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u)$$

ve

$$\|X_u \times X_v\| = u\sqrt{4u^2 + 1}$$

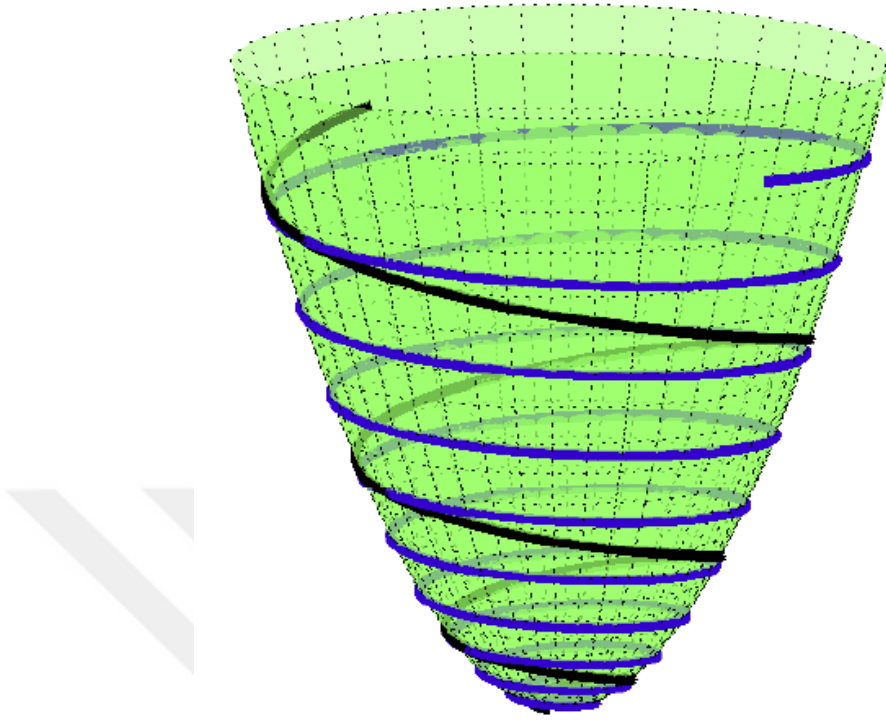
elde edilir. Buradan

$$E = 4u^2 + 1, F = 0, G = u^2, EG - F^2 = 4u^4 + u^2, \langle X_u, d \rangle = 2u, \langle X_v, d \rangle = 0$$

bulunur. Bulunanlar yerine yazılırsa

$$A = 4u^4, \Delta = (4u^4 + u^2)(48u^{10} - 4u^8), \Delta^* = 0$$

elde edilir. Bölüm 5.4.1’de verilen metot uygulanır ve hesaplamalar yapılırsa bu yüzey üzerinde bulunan, $d=(0,0,1)$ doğrultusuyla $\theta = \frac{\pi}{3}$ radyanlık açı yapan ve $P=(1,0,1)$ başlangıç noktasından geçen teğet-normal slant helis Şekil 5.1’de gösterilmektedir.



Şekil 5. 1 Parametrik bir yüzey üzerinde aynı $d=(0,0,1)$ eksen ve aynı $\theta=\pi/3$ açısına sahip genel helis (mavi renkli) ve teğet-normal slant helis (siyah renkli)

Örnek 5.2 $(x^2 + y^2)z^2 + \frac{x^2 + y^2}{4} - \frac{1}{4} = 0$ yüzeyi üzerinde $d=(0,0,1)$ doğrultusuyla $\theta = \frac{\pi}{3}$ radyanlık açı yapan ve $\left(\frac{-1}{\sqrt{13}}, 0, -\sqrt{3}\right)$ başlangıç noktasından geçen teğet-normal slant helisi bulunuz.

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z^2 + \frac{x^2 + y^2}{4} - \frac{1}{4}$$

olmak üzere

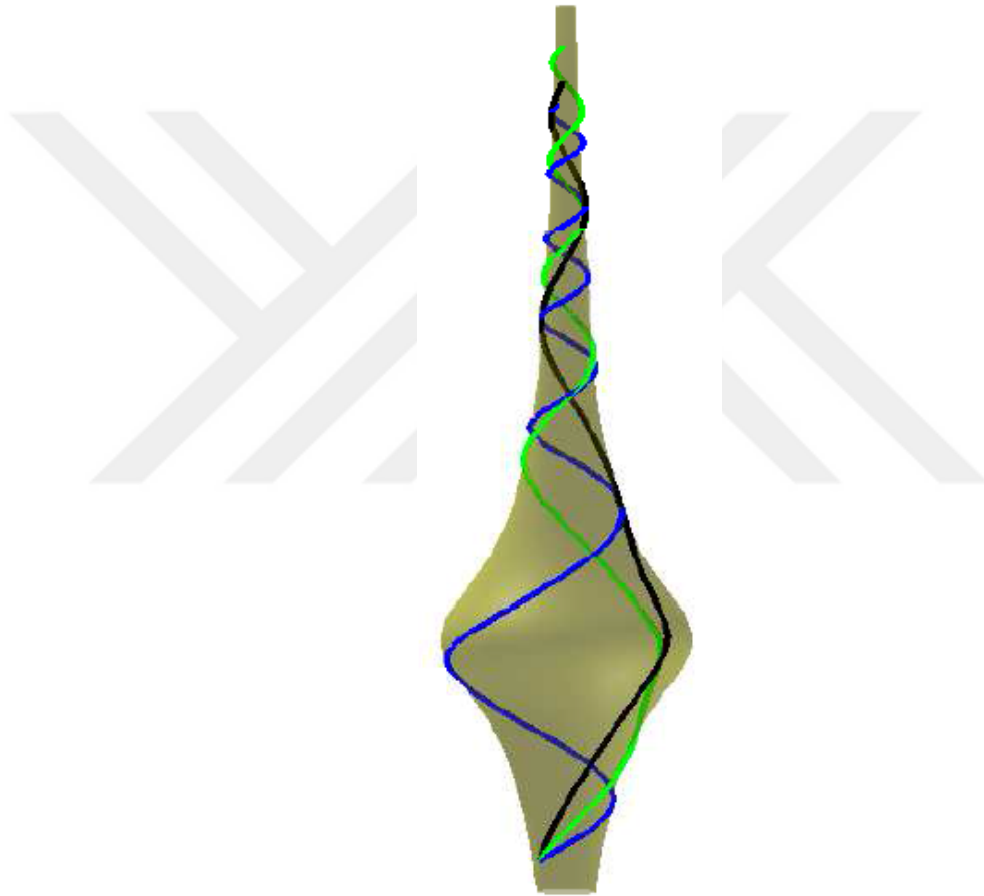
$$f_x = 2xz^2 + \frac{x}{2}, \quad f_y = 2yz^2 + \frac{y}{2}, \quad f_z = 2z(x^2 + y^2)$$

olup

$$\|\nabla f\| = \sqrt{(x^2 + y^2) \left(6z^2 + 4z^4 + \frac{1}{4} \right)}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılır ve Bölüm 5.4.2’de verilen metot uygulanırsa, bu yüzey üzerinde bulunan, $d=(0,0,1)$ doğrultusuyla $\theta=\frac{\pi}{3}$ radyanlık açı yapan ve $\left(\frac{-1}{\sqrt{13}}, 0, -\sqrt{3}\right)$ başlangıç noktasından geçen teğet-normal slant helis Şekil 5.2’de gösterilmektedir.

Yüzeyler üzerinde yer alan genel helisler Puig-Pey vd. tarafından verilen metot yardımıyla elde edilmiştir [23].



Şekil 5. 2 Kapalı bir yüzey üzerinde $d=(0,0,1)$ eksenine sahip $\theta=\pi/3$ olan genel helis (mavi renkli) ve $\theta=\pi/3$ (siyah renkli) ile $\theta=\pi/4$ (yeşil renkli) olan teğet-normal slant helisler

Uyarı 5.4 Örneklerdeki şekiller **MATLAB** programı yardımıyla çizilmiştir. Teorik kısımda verilen metot yardımıyla elde edilmiş olan başlangıç değer problemleri, çizim aşamasında ‘Ode45’ komutu ile çözülmüş ve verilen yüzey üzerinde çizdirilmiştir.

5.6 Darboux Çatısına Göre Darboux Helisler ve Karakterizasyonları

Bir eğri boyunca çatının ani dönme eksenini belirleyen Darboux vektör alanı diferensiyel geometride uzay eğrileri için önemli bir yere sahiptir.

Tanım 5.3 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğri boyunca Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ olmak üzere,

$$\mathbf{W} = \tau_g \mathbf{T} - \kappa_n \mathbf{V} + \kappa_g \mathbf{U}$$

vektörüne Darboux çatısına göre **Darboux vektörü** denir [24]. Bu vektör $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ üç ayaklısının her s anında bir ani helis hareketi yaptığı eksendir.

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|} = \frac{1}{\sqrt{\tau_g^2 + \kappa_n^2 + \kappa_g^2}} (\tau_g \mathbf{T} - \kappa_n \mathbf{V} + \kappa_g \mathbf{U}) \quad (5.14)$$

vektörüne ise γ eğrisinin **Darboux göstergesi** denir.

Tanım 5.4 $\gamma, \mathbb{E}^3$ uzayında bir eğri ve bu eğri boyunca Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ olsun. γ eğrisinin birim Darboux vektörü $\mathbf{W}$ her noktada sabit bir birim d doğrultusuyla sabit açı yapıyorsa yani

$$\langle \mathbf{W}, d \rangle = \cos \theta, \theta \text{ sabit}$$

oluyorsa γ eğrisine bir **Darboux helis** denir.

Teorem 5.10 $\mathbb{E}^3$ uzayında bir M yüzeyi üzerinde bir eğri γ ve bu eğri boyunca Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ olsun. γ eğrisinin yüzeye bağlı eğrilikleri $\kappa_n, \kappa_g, \tau_g$ olmak üzere, γ eğrisinin bir Darboux helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\sigma(s) = \frac{A^2}{(A\tau_g')^2 + (A\kappa_n')^2 + (A\kappa_g')^2} \left[a(\kappa_n' \kappa_g - \kappa_n \kappa_g') - b(\tau_g \kappa_g' - \tau_g' \kappa_g) + c(\kappa_n \tau_g' - \kappa_n' \tau_g) \right]$$

fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olmasıdır. Burada;

$$A = \frac{1}{\sqrt{\tau_g^2 + \kappa_n^2 + \kappa_g^2}},$$

$$a = \left(\frac{(A\tau_g)'}{\sqrt{(A\tau_g')^2 + (A\kappa_n')^2 + (A\kappa_g')^2}} \right)' + \frac{A(\kappa_n'\kappa_g - \kappa_n\kappa_g')}{\sqrt{(A\tau_g')^2 + (A\kappa_n')^2 + (A\kappa_g')^2}}$$

$$b = \left(\frac{(-A\kappa_n)'}{\sqrt{(A\tau_g')^2 + (A\kappa_n')^2 + (A\kappa_g')^2}} \right)' + \frac{A(\kappa_g'\tau_g - \kappa_g\tau_g')}{\sqrt{(A\tau_g')^2 + (A\kappa_n')^2 + (A\kappa_g')^2}}$$

$$c = \left(\frac{(-A\kappa_g)'}{\sqrt{(A\tau_g')^2 + (A\kappa_n')^2 + (A\kappa_g')^2}} \right)' + \frac{A(\kappa_n'\tau_g - \kappa_n\tau_g')}{\sqrt{(A\tau_g')^2 + (A\kappa_n')^2 + (A\kappa_g')^2}}$$

şeklindedir.

İspat Bir eğri Darboux helis ise Darboux vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapar. Bundan dolayı, Darboux göstergesi birim küre yüzeyi üzerinde bir çember parçası çizer. Sonuç olarak, bir Darboux helisin Darboux gösterge eğrisinin geodezik eğriliği sabittir.

($\Rightarrow$) γ eğrisi bir Darboux helis olsun. Bu durumda Darboux vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapar ve bu eğrinin Darboux gösterge eğrisinin geodezik eğriliği sabittir.

γ eğrisinin Darboux gösterge eğrisi β olsun. β eğrisi boyunca Darboux çatısı $\{\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{U}}\}$ olmak üzere,

$$\beta = \frac{W}{\|W\|} = \frac{1}{\sqrt{\tau_g^2 + \kappa_n^2 + \kappa_g^2}} (\tau_g \mathbf{T} - \kappa_n \mathbf{V} + \kappa_g \mathbf{U})$$

$$\beta' = (A'\tau_g + A\tau_g') \mathbf{T} + (-A'\kappa_n - A\kappa_n') \mathbf{V} + (A'\kappa_g + A\kappa_g') \mathbf{U}$$

olup

$$\|\beta'\| = \sqrt{\left(A'\tau_g + A\tau_g'\right)^2 + \left(-A'\kappa_n - A\kappa_n'\right)^2 + \left(A'\kappa_g + A\kappa_g'\right)^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{\beta'}{\|\beta'\|} = \frac{\left(A'\tau_g + A\tau_g'\right)\mathbf{T} + \left(-A'\kappa_n - A\kappa_n'\right)\mathbf{V} + \left(A'\kappa_g + A\kappa_g'\right)\mathbf{U}}{\sqrt{\left(A'\tau_g + A\tau_g'\right)^2 + \left(-A'\kappa_n - A\kappa_n'\right)^2 + \left(A'\kappa_g + A\kappa_g'\right)^2}}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}' = & \left[\left(\frac{(A\tau_g)'}{\sqrt{(A\tau_g)'^2 + (A\kappa_n)'^2 + (A\kappa_g)'^2}} \right)' + \frac{A(\kappa_n'\kappa_g - \kappa_n\kappa_g')}{\sqrt{(A\tau_g)'^2 + (A\kappa_n)'^2 + (A\kappa_g)'^2}} \right] \mathbf{T} + \\ & \left[\left(\frac{(-A\kappa_n)'}{\sqrt{(A\tau_g)'^2 + (A\kappa_n)'^2 + (A\kappa_g)'^2}} \right)' + \frac{A(\kappa_g'\tau_g - \kappa_g\tau_g')}{\sqrt{(A\tau_g)'^2 + (A\kappa_n)'^2 + (A\kappa_g)'^2}} \right] \mathbf{V} + \\ & \left[\left(\frac{(-A\kappa_g)'}{\sqrt{(A\tau_g)'^2 + (A\kappa_n)'^2 + (A\kappa_g)'^2}} \right)' + \frac{A(\kappa_n\tau_g' - \kappa_n'\tau_g)}{\sqrt{(A\tau_g)'^2 + (A\kappa_n)'^2 + (A\kappa_g)'^2}} \right] \mathbf{U} \end{aligned}$$

elde edilir. Bir eğrinin geodezik eğriliği

$$\bar{\kappa}_g = \frac{1}{\|\beta'\|} \det(\bar{\mathbf{T}}', \bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{T}})$$

ile hesaplanır.

$$\bar{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|} = \frac{1}{\sqrt{\tau_g^2 + \kappa_n^2 + \kappa_g^2}} (\tau_g \mathbf{T} - \kappa_n \mathbf{V} + \kappa_g \mathbf{U})$$

olmak üzere gerekli işlemler yapılarak β eğrisinin geodezik eğriliği

$$\bar{\kappa}_g = \frac{A^2}{(A\tau_g)'^2 + (A\kappa_n)'^2 + (A\kappa_g)'^2} \left[a(\kappa_n'\kappa_g - \kappa_n\kappa_g') - b(\tau_g\kappa_g' - \tau_g'\kappa_g) + c(\kappa_n\tau_g' - \kappa_n'\tau_g) \right]$$

elde edilir. γ eğrisi bir Darboux helis olduğundan, γ eğrisinin Darboux gösterge eğrisinin geodezik eğriliği olan bu fonksiyon sabittir.

($\Leftarrow$)

$$\sigma(s) = \frac{A^2}{(A\tau_g)'^2 + (A\kappa_n)'^2 + (A\kappa_g)'^2} \left[a(\kappa_n' \kappa_g - \kappa_n \kappa_g') - b(\tau_g \kappa_g' - \tau_g' \kappa_g) + c(\kappa_n \tau_g' - \kappa_n' \tau_g) \right]$$

fonksiyonu sabit olsun. Bu fonksiyon, γ eğrisinin Darboux gösterge eğrisinin geodezik eğriliği olup, geodezik eğrilik sabit ise bu, Darboux gösterge eğrisinin birim küre yüzeyi üzerinde bir çember parçası çizdiği anlamına gelir. Bu ise Darboux vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapıyor demektir. Sonuç olarak, γ eğrisi bir Darboux helistir. $\square$

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DARBOUX ÇATISINA GÖRE HELİSLER

Bu bölümde $\mathbb{E}^4$ uzayında ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ yardımıyla yeni bazı helisler tanımlanacak ve karakterizasyonları araştırılıp eksenleri elde edilecektir. Ardından, bu yeni eğrilere bazı açıklayıcı örnekler verilecektir.

6.1 E- Slant Helislerin Karakterizasyonu ve Ekseninin Bulunması

Tanım 6.1 γ , $\mathbb{E}^4$ uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir Frenet eğrisi ve bu eğri boyunca ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ olsun. Herhangi bir birim uzunluklu sabit doğrultu d olmak üzere eğri boyunca $\mathbf{E}$ vektör alanı sabit d doğrultusuyla sabit açı yapıyorsa yani

$$\langle \mathbf{E}, d \rangle = \cos \theta, \quad \theta = \text{sabit}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

oluyorsa γ eğrisine ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısına göre bir **E-slant helis** denir.

Teorem 6.1 γ , $\mathbb{E}^4$ uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir Frenet eğrisi ve bu eğrinin genişletilmiş Darboux çatıya göre eğrilikleri $\kappa_n, \kappa_g^1, \kappa_g^2, \tau_g^1, \tau_g^2$ olsun. γ eğrisinin bir E-slant helis olması için gerek ve yeter şart $\kappa_n \neq 0, \tau_g^1 \neq 0$ olmak üzere,

$$\left(\int \kappa_g^2 ds \right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n} \right)^2 + \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right)^2 \quad (6.1)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) γ eğrisi bir **E**- slant helis ve bu eğrinin sabit θ açısı yaptığı eksen d olsun.

$d = a_1\mathbf{T} + a_2\mathbf{E} + a_3\mathbf{D} + a_4\mathbf{N}$ birim vektör olmak üzere, $a_2 = \cos \theta = \text{sabittir}$. Bu ifadenin türevi alınırsa,

$$d' = (a_1' - a_4\kappa_n)\mathbf{T} + (a_2' - a_3\kappa_g^2 - a_4\tau_g^1)\mathbf{E} + (a_2\kappa_g^2 + a_3')\mathbf{D} + (a_1\kappa_n + a_2\tau_g^1 + a_4')\mathbf{N} = \vec{0}$$

olup,

$$\begin{cases} a_1' - a_4\kappa_n = 0 \\ a_2' - a_3\kappa_g^2 - a_4\tau_g^1 = 0 \\ a_2\kappa_g^2 + a_3' = 0 \\ a_1\kappa_n + a_2\tau_g^1 + a_4' = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse,

$$a_1 = -a_2 \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n} \right)$$

$$a_3 = -a_2 \int \kappa_g^2 ds \quad (6.3)$$

$$a_4 = a_2 \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds$$

bulunur. (6.3) numaralı denklem düzenlenirse,

$$\frac{a_1}{a_2} = - \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n} \right)$$

$$\frac{a_3}{a_2} = - \int \kappa_g^2 ds$$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(\int \kappa_g^2 ds\right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right)^2 = \frac{a_1^2 + a_3^2 + a_4^2}{a_2^2} = \frac{1 - a_2^2}{a_2^2} = \tan^2 \theta = \text{sabit}$$

bulunur.

$$(\Leftrightarrow) \left(\int \kappa_g^2 ds\right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right)^2 = \tan^2 \theta = \text{sabit} \quad (6.4)$$

olsun. Bir d birim vektör alanı

$$d = \cos \theta \left[-\left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n}\right) \mathbf{T} + \mathbf{E} - \int \kappa_g^2 ds \mathbf{D} + \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right) \mathbf{N} \right]$$

şeklinde verilsin. d vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned} d' &= \cos \theta \left[-\left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n}\right)' \mathbf{T} - \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n}\right) (\kappa_n \mathbf{N}) + \kappa_g^2 \mathbf{D} + \tau_g^1 \mathbf{N} - \kappa_g^2 \mathbf{D} - \right. \\ &\quad \left. \int \kappa_g^2 ds (-\kappa_g^2 \mathbf{E}) + \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right)' \mathbf{N} + \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right) (-\kappa_n \mathbf{T} - \tau_g^1 \mathbf{E}) \right] \\ \Rightarrow d' &= \cos \theta \left[-\left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds\right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n}\right)' - \frac{\kappa_n \kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right] \mathbf{T} \end{aligned} \quad (6.5)$$

bulunur. (6.4) denkleminin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$2 \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n} \right) \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n} \right)' + 2 \kappa_g^2 \int \kappa_g^2 ds + 2 \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right) \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right)' = 0$$

elde edilir. Bu denklem yeniden düzenlenirse

$$\left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n} \right)' = - \frac{\kappa_n \kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \quad (6.6)$$

bulunur. (6.5) ve (6.6) denklemlerinden $\frac{dd}{ds} = 0$ elde edilir. Yani, d sabit bir vektördür.

Diğer taraftan, $\langle \mathbf{E}(s), d \rangle = \cos \theta$ olur. Dolayısıyla, γ eğrisi bir **E**-slant helistir. $\square$

6.2 D-Slant Helislerin Karakterizasyonu ve Ekseninin Bulunması

Tanım 6.2 γ , $\mathbb{E}^4$ uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir Frenet eğrisi ve bu eğri boyunca ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ olsun. Herhangi bir birim uzunluklu sabit doğrultu d olmak üzere eğri boyunca $\mathbf{D}$ vektör alanı sabit d doğrultusuyla sabit açı yapıyorsa yani

$$\langle \mathbf{D}, d \rangle = \cos \theta, \quad \theta = \text{sabit}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

oluyorsa γ eğrisine ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısına göre bir **D-slant helis** denir.

Teorem 6.2 γ , $\mathbb{E}^4$ uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir Frenet eğrisi ve bu eğrinin genişletilmiş Darboux çatıya göre eğrilikleri $\kappa_n, \kappa_g^1, \kappa_g^2, \tau_g^1, \tau_g^2$ olsun. γ eğrisinin bir **D-slant helis** olması için gerek ve yeter şart $\tau_g^1 \neq 0$, $\kappa_g^2 \neq 0$, $\kappa_n \neq 0$ olmak üzere,

$$\left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \right)^2 \quad (6.7)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) γ eğrisi bir **D-slant helis** ve bu eğrinin sabit θ açısı yaptığı eksen d olsun.

$d = a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{E} + a_3 \mathbf{D} + a_4 \mathbf{N}$ bir birim vektör olmak üzere, $a_3 = \cos \theta = \text{sabit}$ ir. Bu ifadenin türevi alınır,

$$d' = (a_1' - a_4\kappa_n)\mathbf{T} + (a_2' - a_3\kappa_g^2 - a_4\tau_g^1)\mathbf{E} + (a_2\kappa_g^2 + a_3')\mathbf{D} + (a_1\kappa_n + a_2\tau_g^1 + a_4')\mathbf{N} = \vec{0}$$

olup

$$\begin{cases} a_1' - a_4\kappa_n = 0 \\ a_2' - a_3\kappa_g^2 - a_4\tau_g^1 = 0 \\ a_2\kappa_g^2 + a_3' = 0 \\ a_1\kappa_n + a_2\tau_g^1 + a_4' = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle ($\kappa_g^2 \neq 0$ olmasından dolayı)

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = a_3 \frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \quad (6.9)$$

$$a_4 = -a_3 \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1}$$

bulunur. (6.9) denklemlerinden

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)'$$

$$\frac{a_4}{a_3} = -\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \right)^2 = \frac{a_1^2 + a_4^2}{a_3^2} = \frac{1 - a_3^2}{a_3^2} = \tan^2 \theta = \text{sabit elde edilir.}$$

$$(\Leftrightarrow) \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \right)^2 = \tan^2 \theta = \text{sabit} \quad (6.10)$$

olsun. Bir d birim vektörü

$$d = \cos \theta \left[\left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \right) \mathbf{T} + \mathbf{D} - \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \mathbf{N} \right]$$

şeklinde verilsin. d vektörünün türevi alınır

$$d' = \cos \theta \left[\left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \right)' \mathbf{T} + \frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' (\kappa_n \mathbf{N}) - \kappa_g^2 \mathbf{E} - \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \mathbf{N} - \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} (-\kappa_n \mathbf{T} - \tau_g^1 \mathbf{E}) \right]$$

$$d' = \cos \theta \left[\left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \right)' + \kappa_n \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right] \mathbf{T} \quad (6.11)$$

bulunur. (6.10) denkleminin iki tarafının türevi alınır

$$2 \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' + 2 \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \right) \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \right)' = 0$$

elde edilir. Bu denklem yeniden düzenlenirse

$$\left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \right)' \right)' = -\kappa_n \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \quad (6.12)$$

bulunur. (6.11) ve (6.12) denklemlerinden $\frac{dd}{ds} = 0$ elde edilir. Yani, d sabit bir vektördür. Diğer taraftan, $\langle \mathbf{D}(s), d \rangle = \cos \theta$ sağlanır. Dolayısıyla, γ eğrisi bir $\mathbf{D}$ -slant helistir. $\square$

Teorem 6.3 γ , $\mathbb{E}^4$ uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir geodezik eğri, bu eğri boyunca ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ ve Frenet çatısı

$\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. γ eğrisinin bir **D**-slant helis olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin bir **B**₂-slant helis olmasıdır.

İspat $\gamma, \mathbb{E}^4$ uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir geodezik eğri olsun. γ eğrisinin Frenet eğrilikleri ve yüzeye bağlı eğrilikleri için,

$$\kappa_g^2 = k_3, \tau_g^1 = -k_2, \kappa_n = k_1$$

olur [29].

($\Rightarrow$) γ bir geodezik eğri olmak üzere, bir **D**-slant helis olsun. Bu durumda,

$$\left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1}\right)'\right)^2 = c, c \text{ bir sabit}$$

sağlanır. Bu denklemde yukarıdaki eşitlikler yerine yazılırsa $\mathbb{E}^4$ uzayında bir **B**₂-slant helisin karakterizasyonu olan [11]

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2 = c, c \text{ bir sabit}$$

elde edilir. Yani γ eğrisi bir **B**₂-slant helistir.

($\Leftarrow$) $\gamma, \mathbb{E}^4$ uzayında bir geodezik eğri olmak üzere, bir **B**₂-slant helis olsun. Bu durumda bu eğrinin eğrilikleri arasında

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2 = c, c \text{ bir sabit}$$

eşitliği vardır. Bu denklemde, Frenet eğriliklerinin yerine yüzeye bağlı eğrilikleri cinsinden eşitlikleri yazılırsa

$$\left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1}\right)'\right)^2 = c, c \text{ bir sabit}$$

elde edilir. Sonuç olarak, γ eğrisi bir **D**-slant helistir. $\square$

6.3 N-Slant Helislerin Karakterizasyonu ve Ekseninin Bulunması

Tanım 6.3 $\gamma, \mathbb{E}^4$ uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir Frenet eğrisi ve bu eğri boyunca ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ olsun. Herhangi bir birim uzunluklu sabit doğrultu d olmak üzere eğri boyunca $\mathbf{N}$ normal vektör alanı sabit d doğrultusuyla sabit açı yapıyorsa yani

$$\langle \mathbf{N}, d \rangle = \cos \theta, \quad \theta = \text{sabit}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

oluyorsa γ eğrisine ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısına göre bir **N-slant helis** denir.

Teorem 6.4 $\gamma, \mathbb{E}^4$ uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir Frenet eğrisi ve bu eğrinin genişletilmiş Darboux çatıya göre eğrilikleri $\kappa_n, \kappa_g^1, \kappa_g^2, \tau_g^1, \tau_g^2$ olsun. γ eğrisinin bir N-slant helis olması için gerek ve yeter şart, $\kappa_g^2 \neq 0, \tau_g^1 \neq 0$ olmak üzere,

$$\left(\int \kappa_n ds \right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right)^2 + \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)^2 \quad (6.13)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ γ eğrisi bir N-slant helis ve bu eğrinin sabit θ açısı yaptığı eksen d olsun.

$d = a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{E} + a_3 \mathbf{D} + a_4 \mathbf{N}$ bir birim vektör olmak üzere, $a_4 = \cos \theta = \text{sabittir}$. Bu ifadenin türevi alınırsa,

$$d' = (a_1' - a_4 \kappa_n) \mathbf{T} + (a_2' - a_3 \kappa_g^2 - a_4 \tau_g^1) \mathbf{E} + (a_2 \kappa_g^2 + a_3') \mathbf{D} + (a_1 \kappa_n + a_2 \tau_g^1 + a_4') \mathbf{N} = \vec{0}$$

olup

$$\begin{cases} a_1' - a_4 \kappa_n = 0 \\ a_2' - a_3 \kappa_g^2 - a_4 \tau_g^1 = 0 \\ a_3' + a_2 \kappa_g^2 = 0 \\ a_4' + a_1 \kappa_n + a_2 \tau_g^1 = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse,

$$a_1 = a_4 \int \kappa_n ds$$

$$a_2 = -a_4 \frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \quad (6.15)$$

$$a_3 = -a_4 \frac{1}{\kappa_g^2} \left[\left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \tau_g^1 \right]$$

bulunur. (6.15) denklemlerinden

$$\frac{a_1}{a_4} = \int \kappa_n ds$$

$$\frac{a_2}{a_4} = -\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds$$

$$\frac{a_3}{a_4} = -\frac{1}{\kappa_g^2} \left[\left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \tau_g^1 \right]$$

olduğundan

$$\left(\int \kappa_n ds \right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right)^2 + \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_4^2} = \frac{1 - a_4^2}{a_4^2} = \tan^2 \theta = \text{sabit}$$

bulunur.

$$(\Leftrightarrow) \left(\int \kappa_n ds \right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right)^2 + \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)^2 = \tan^2 \theta = \text{sabit} \quad (6.16)$$

olsun. Bir d birim vektörü,

$$d = \cos \theta \left[\int \kappa_n ds \mathbf{T} - \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right) \mathbf{E} - \left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right) \mathbf{D} + \mathbf{N} \right]$$

şeklinde verilsin. d vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned} d' &= \cos \theta \left[\kappa_n \mathbf{T} + \int \kappa_n ds (\kappa_n \mathbf{N}) - \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' \mathbf{E} - \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right) (\kappa_g^2 \mathbf{D} + \tau_g^1 \mathbf{N}) - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right) \mathbf{D} - \left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right) (-\kappa_g^2 \mathbf{E}) - \kappa_n \mathbf{T} - \tau_g^1 \mathbf{E} \right] \\ \Rightarrow d' &= \cos \theta \left\{ -\kappa_g^2 \frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds - \left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right)' \right\} \mathbf{D} \end{aligned} \quad (6.17)$$

bulunur. (6.16) denkleminin iki tarafının türevi alınırsa,

$$2\kappa_n \int \kappa_n ds + 2 \left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right) \left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right)' + 2 \frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' = 0$$

elde edilir. Bu denklem yeniden düzenlenirse

$$\left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right)' = -\kappa_g^2 \frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \quad (6.18)$$

bulunur. (6.17) ve (6.18) denklemlerinden $\frac{dd}{ds} = 0$ elde edilir yani, d sabit bir vektördür. Diğer taraftan, $\langle \mathbf{N}(s), d \rangle = \cos \theta$ bulunur. Dolayısıyla, γ eğrisi bir $\mathbf{N}$ -slant helistir. $\square$

Teorem 6.5 $\gamma, \mathbb{E}^4$ uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir geodezik eğri, bu eğri boyunca ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ ve Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ olsun. γ eğrisinin bir $\mathbf{N}$ -slant helis olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin bir slant helis olmasıdır.

İspat $\gamma, \mathbb{E}^4$ uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir geodezik eğri olsun. γ eğrisinin Frenet eğrilikleri ve yüzeye bağlı eğrilikleri için,

$$\kappa_g^2 = k_3, \tau_g^1 = -k_2, \kappa_n = k_1$$

olur [29].

$(\Rightarrow)$ γ bir geodezik eğri olmak üzere, bir $\mathbf{N}$ -slant helis olsun. Bu durumda,

$$\left(\int \kappa_n ds \right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_g^2} \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2} \right)^2 + \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1} \int \kappa_n ds \right)^2 = c, c \text{ bir sabit}$$

sağlanır. Bu denklemde yukarıdaki eşitlikler yerine yazılırsa $\mathbb{E}^4$ uzayında bir slant helisin karakterizasyonu olan [12]

$$\left(\int k_1(s) ds \right)^2 + \left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \int k_1 ds \right)' + \frac{k_2}{k_3} \right)^2 + \left(\frac{k_1}{k_2} \int k_1 ds \right)^2 = c, c \text{ bir sabit}$$

denklemini elde edilir. Yani γ eğrisi bir slant helistir.

$(\Leftarrow)$ γ eğrisi bir geodezik eğri olmak üzere, bir slant helis olsun. Bu durumda bu eğrinin Frenet eğrilikleri için

$$\left(\int k_1(s)ds\right)^2 + \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\int k_1ds\right)' + \frac{k_2}{k_3}\right)^2 + \left(\frac{k_1}{k_2}\int k_1ds\right)^2 = c, c \text{ bir sabit}$$

yazılır. Bu denklemde, Frenet eğriliklerinin yerine yüzeye bağlı eğrilikler cinsinden eşitlikleri yazılırsa

$$\left(\int \kappa_n ds\right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa_g^2}\left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1}\int \kappa_n ds\right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_g^2}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_n}{\tau_g^1}\int \kappa_n ds\right)^2 = c, c \text{ bir sabit}$$

denklemini elde edilir. Sonuç olarak, γ eğrisi bir $\mathbf{N}$ -slant helistir. $\square$

6.4 Örnekler

Bu bölümde, $\mathbb{E}^4$ uzayında ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısına göre tanımlanan slant helislere açıklayıcı bazı örneklerin verilmesi amaçlanmaktadır. Örnekleri oluştururken ilk önce $\mathbb{E}^4$ uzayında bir hiperyüzey üzerinde olan, birim hızlı ve Frenet eğrisi olma şartlarını sağlayan bir geodezik eğri bulunması gerekmektedir. Tüm bu şartları aynı anda sağlayan bir eğri bulmak zor bir problemdir. Bu problemin çözümünde Bayram vd. [30] çalışmasından faydalanılmıştır. İstenen şartların tamamını sağlayan bir eğrinin hiperyüzeye bağlı eğriliklerini hesaplamak ve bu eğriliklerin sırasıyla Bölüm 6 da elde edilen karakterizasyonları sağlaması suretiyle yeni tanımlanmış olan eğrilere örnekler verilmiştir.

Örnek 6.1

$\mathbb{E}^4$ uzayında parametrik ifadesiyle verilen bir $M = X(s, t, q) =$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sin s}{\cosh s} ds + \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{2}q \sin s}{2 \cosh s} + \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{(\cos s \sinh s + \sin s \cosh s)}{\sqrt{2} \cosh s} + \frac{\sqrt{2}q \cos s}{2 \cosh s}, \right. \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos s}{\cosh s} ds + \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{2}q \cos s}{2 \cosh s} + \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{(\cos s \cosh s - \sin s \sinh s)}{\sqrt{2} \cosh s} - \frac{\sqrt{2}q \sin s}{2 \cosh s}, \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sinh s}{\cosh s} ds + \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{2}q \sinh s}{2 \cosh s} - \frac{\sqrt{2}q}{2}, \\ & \left. \frac{s}{\sqrt{2}} + \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{2}q}{2} - \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2 \cosh s} + \frac{\sqrt{2}q \sinh s}{2 \cosh s} \right) \end{aligned}$$

hiperyüzeyi üzerinde bulunan

$$\beta(s) = X\left(s, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\cosh s} \sin s ds, \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\cosh s} \cos s ds, \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sinh s}{\cosh s} ds, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

Frenet eğrisi verilsin. Bu eğri verilen hiperyüzey üzerinde bir geodezik eğridir. Bu eğrinin ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısına göre bir slant helis olup olmadığını araştıralım.

β eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\mathbf{T}(s) = \left(\frac{\sqrt{2} \sin s}{2 \cosh s}, \frac{\sqrt{2} \cos s}{2 \cosh s}, \frac{\sqrt{2} \sinh s}{2 \cosh s}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

elde edilir.

$$\mathbf{T}'(s) = \left(\frac{(\cos s \cosh s - \sin s \sinh s)}{\sqrt{2} \cosh^2 s}, \frac{-(\cos s \sinh s + \sin s \cosh s)}{\sqrt{2} \cosh^2 s}, \frac{\sqrt{2}}{2 \cosh^2 s}, 0 \right)$$

olmak üzere eğrinin birim asli normal vektör alanı,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} = \left(\frac{(\cos s \cosh s - \sin s \sinh s)}{\sqrt{2} \cosh s}, \frac{-(\cos s \sinh s + \sin s \cosh s)}{\sqrt{2} \cosh s}, \frac{\sqrt{2}}{2 \cosh s}, 0 \right)$$

bulunur. M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{X_s \otimes X_t \otimes X_q}{\|X_s \otimes X_t \otimes X_q\|}$$

ile hesaplanır. $\beta(s) = X\left(s, \frac{1}{2}, 0\right)$ olduğundan hesaplamalar yapıldığında;

$$(X_s \otimes X_t \otimes X_q)|_{\beta(s)} = \left(\frac{-(\cos s \cosh s - \sin s \sinh s)}{\sqrt{2} \cosh s}, \frac{(\cos s \sinh s + \sin s \cosh s)}{\sqrt{2} \cosh s}, \frac{-\sqrt{2}}{2 \cosh s}, 0 \right)$$

$$\|X_s \otimes X_t \otimes X_q\|_{\beta(s)} = 1$$

elde edilir. Buradan hiperyüzeyin birim normal vektör alanının eğriye kısıtlanmış

$$N(s) = N(\beta(s)) = \left(\frac{-(\cos s \cosh s - \sin s \sinh s)}{\sqrt{2} \cosh s}, \frac{(\cos s \sinh s + \sin s \cosh s)}{\sqrt{2} \cosh s}, \frac{-\sqrt{2}}{2 \cosh s}, 0 \right)$$

bulunur. Eğrinin birim normal vektör alanı $N(s)$, hiperyüzeyin normal vektör alanının eğriye kısıtlanmış olan $N(s)$ ile lineer bağımlı olduğundan eğri boyunca ikinci tür genişletilmiş Darboux çatı tanımlıdır.

$$\beta'''(s) = \left(\frac{-\sqrt{2}(\sin s + \sinh s \cosh s \cos s)}{\cosh^3 s}, \frac{-\sqrt{2}(\cos s - \sinh s \cosh s \sin s)}{\cosh^3 s}, \frac{-\sqrt{2} \sinh s}{\cosh^3 s}, 0 \right)$$

olmak üzere, $\langle \beta''', N \rangle = \frac{\sinh s}{\cosh^2 s}$ ve $\langle \beta''', T \rangle = \frac{-1}{\cosh^2 s}$ olduğundan

$$E = \frac{\beta''' - \langle \beta''', N \rangle N - \langle \beta''', T \rangle T}{\|\beta''' - \langle \beta''', N \rangle N - \langle \beta''', T \rangle T\|} = \frac{\beta''' - \frac{\sinh s}{\cosh^2 s} N + \frac{1}{\cosh^2 s} T}{\|\beta''' - \frac{\sinh s}{\cosh^2 s} N + \frac{1}{\cosh^2 s} T\|}$$

olur. Buradan gerekli işlemler yapıldığında

$$E(s) = \left(\frac{-(\cos s \sinh s + \sin s \cosh s)}{\sqrt{2} \cosh s}, \frac{-(\cos s \cosh s - \sin s \sinh s)}{\sqrt{2} \cosh s}, 0, \frac{1}{\sqrt{2} \cosh s} \right)$$

bulunur. $D = N \otimes T \otimes E$ olmak üzere,

$$\mathbf{D}(s) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \frac{-(\cos s \cosh s - \sin s \sinh s)}{\sqrt{2} \cosh s} & \frac{(\cos s \sinh s + \sin s \cosh s)}{\sqrt{2} \cosh s} & \frac{-\sqrt{2}}{2 \cosh s} & 0 \\ \frac{\sqrt{2} \sin s}{2 \cosh s} & \frac{\sqrt{2} \cos s}{2 \cosh s} & \frac{\sqrt{2} \sinh s}{2 \cosh s} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-(\cos s \sinh s + \sin s \cosh s)}{\sqrt{2} \cosh s} & \frac{-(\cos s \cosh s - \sin s \sinh s)}{\sqrt{2} \cosh s} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2} \cosh s} \end{vmatrix}$$

olup

$$\mathbf{D}(s) = \left(\frac{\sqrt{2} \cos s}{2 \cosh s}, \frac{-\sqrt{2} \sin s}{2 \cosh s}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \sinh s}{2 \cosh s} \right)$$

elde edilir. β eğrisinin ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısına göre eğrilikleri hesaplanırsa, eğrinin hiperyüzeye bağlı normal eğriliği

$$\kappa_n = \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle = \frac{-1}{\cosh s},$$

ikinci derece geodezik eğriliği

$$\kappa_g^2 = \langle \mathbf{E}', \mathbf{D} \rangle = \frac{-1}{\cosh s},$$

ve birinci derece geodezik burulması ise

$$\tau_g^1 = \langle \mathbf{E}', \mathbf{N} \rangle = 1$$

olarak bulunur. İkinci tür genişletilmiş Darboux çatıda $\kappa_g^1 = \langle \mathbf{T}', \mathbf{E} \rangle = 0$ ve $\tau_g^2 = \langle \mathbf{D}', \mathbf{N} \rangle = 0$ olur. Şimdi bu eğrilikleri kullanarak β eğrisinin sırasıyla $\mathbf{E}$ -slant helis, $\mathbf{D}$ -slant helis ve $\mathbf{N}$ -slant helis karakterizasyonlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

Teorem 6.1 kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left(\int \frac{-1}{\cosh s} ds \right)^2 + \left(-\cosh s \left(\frac{-1}{\cosh s} \int \frac{-1}{\cosh s} ds \right)' - \cosh s \right)^2 + \left(\frac{-1}{\cosh s} \int \frac{-1}{\cosh s} ds \right)^2 \neq \text{sabit}$$

olduğundan β eğrisi bir **E**-slant helis değildir.

Teorem 6.2 kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left(\frac{-1}{\cosh s}\right)^2 + \left(-\cosh s \left(\frac{-1}{\cosh s}\right)'\right)^2 = \frac{1}{\cosh^2 s} + \left(-\cosh s \frac{\sinh s}{\cosh^2 s}\right)^2 = \frac{1 + \sinh^2 s}{\cosh^2 s} = \frac{\cosh^2 s}{\cosh^2 s} = 1 = \text{sabit}$$

olup β eğrisi bir **D**-slant helistir. Ayrıca, eğrinin **D** birim vektörü için

$$\langle \mathbf{D}, (0, 0, 1, 0) \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ olduğundan da bu eğrinin bir } \mathbf{D}\text{-slant helis olduğu kolayca}$$

görüür.

Teorem 6.4 kullanılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\left(\int \frac{-1}{\cosh s} ds\right)^2 + \left(-\cosh s \left(\frac{-1}{\cosh s} \int \frac{-1}{\cosh s} ds\right)' - \cosh s\right)^2 + \left(\frac{-1}{\cosh s} \int \frac{-1}{\cosh s} ds\right)^2 \neq \text{sabit}$$

olduğundan β eğrisi bir **N**-slant helis değildir.

Örnek 6.2

$\mathbb{E}^4$ uzayında bir $M \dots f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hipersilindiri üzerinde

$$\beta(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right), \frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right), \sin\left(\frac{s}{2}\right), \frac{\sqrt{3}s}{2}\right)$$

Frenet eğrisi verilsin. Bu eğrinin ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısına göre bir slant helis olup olmadığını araştıralım.

Hiperyüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = (x, y, z, 0)$$

olup eğriye kısıtlanmış hali,

$$\mathbf{N}(s) = N(\beta(s)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right), \frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right), \sin\left(\frac{s}{2}\right), 0\right)$$

bulunur. β eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\mathbf{T}(s) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right), \frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

elde edilir.

$$\mathbf{T}'(s) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} \cos\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{8} \cos\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right), 0 \right)$$

olup $\mathbf{T}'$, $\mathbf{N}$ ile lineer bağımlı olduğundan eğri boyunca ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı tanımlıdır.

$$\beta'''(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{16} \sin\left(\frac{s}{2}\right), \frac{1}{16} \sin\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{8} \cos\left(\frac{s}{2}\right), 0 \right)$$

$$\langle \beta''', \mathbf{N} \rangle = 0 \text{ ve } \langle \beta''', \mathbf{T} \rangle = -\frac{1}{16} \text{ olduğundan}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\beta''' - \langle \beta''', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} - \langle \beta''', \mathbf{T} \rangle \mathbf{T}}{\|\beta''' - \langle \beta''', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} - \langle \beta''', \mathbf{T} \rangle \mathbf{T}\|} = \frac{\beta''' + \frac{1}{16} \mathbf{T}}{\|\beta''' + \frac{1}{16} \mathbf{T}\|}$$

olur. Buradan gerekli işlemler yapıldığında

$$\mathbf{E}(s) = \left(\frac{3}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right), \frac{1}{2} \right)$$

bulunur. $\mathbf{D} = \mathbf{N} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{E}$ olmak üzere,

$$\mathbf{D}(s) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) & \frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) & \sin\left(\frac{s}{2}\right) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right) & -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right) & \frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right) & -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0 \right)$$

elde edilir. β eğrisinin genişletilmiş Darboux çatıya göre eğrilikleri hesaplanırsa, eğrinin hiperyüzeye bağlı normal eğriliği

$$\kappa_n = \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle = -\frac{1}{4},$$

İkinci derece geodezik eğriliği

$$\kappa_g^2 = \langle \mathbf{E}', \mathbf{D} \rangle = 0,$$

ve birinci derece geodezik burulması ise

$$\tau_g^1 = \langle \mathbf{E}', \mathbf{N} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

olarak bulunur. İkinci tür genişletilmiş Darboux çatıda $\kappa_g^1 = \langle \mathbf{T}', \mathbf{E} \rangle = 0$ ve $\tau_g^2 = \langle \mathbf{D}', \mathbf{N} \rangle = 0$ olur. Şimdi bu eğrilikleri kullanarak β eğrisinin sırasıyla **E**-slant helis, **D**-slant helis ve **N**-slant helis karakterizasyonlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

Teorem 6.1 kullanılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\left(\int 0 ds \right)^2 + \left(-4 \left(\int 0 ds \right)' + \sqrt{3} \right)^2 + \left(\int 0 ds \right)^2 = 3 = \tan^2 \theta$$

bir sabit olup, teorem gereğince β eğrisi bir **E**-slant helistir. Buradan $\theta = \frac{\pi}{3}$ olup,

E-slant helisin eksenini

$$d = \cos \theta \left[- \left(\frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right)' + \frac{\tau_g^1}{\kappa_n} \right) \mathbf{T} + \mathbf{E} - \int \kappa_g^2 ds \mathbf{D} + \left(\frac{\kappa_g^2}{\tau_g^1} \int \kappa_g^2 ds \right) \mathbf{N} \right]$$

veya

$$d = \cos \theta \left[- \left(\frac{\tau_g^1}{\kappa_n} \right) \mathbf{T} + \mathbf{E} \right] = \cos \theta (\sqrt{3} \mathbf{T} + \mathbf{E})$$

$$d = (0, 0, 0, 1)$$

bulunur.

Verilen eğri için $\kappa_g^2 = 0$ olduğundan Teorem 6.2’de verilen **D**-slant helis karakterizasyonu ve Teorem 6.4’te verilen **N**-slant helis karakterizasyonu uygulanamaz.



SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, 3-boyutlu ve 4-boyutlu Öklid uzayında bazı yeni eğriler tanımlanmıştır. İlk olarak, $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey üzerinde alınan birim hızlı bir eğrinin $\{T, V, U\}$ Darboux çatı alanındaki V teğet-normal vektör alanının sabit bir doğrultuyla sabit açı yapması durumunda oluşan yeni bir slant helis tanımlanmış ve teğet-normal slant helis olarak adlandırılmıştır. Bu yeni eğrinin karakterizasyonu elde edilmiş ve çeşitli özel eğrilerle arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ardından verilen bir yüzey üzerinde, eksen ve bu eksenle yaptığı sabit açısı bilinen teğet-normal slant helislerin denklemlerinin bulunabilmesi için metotlar elde edilmiştir. Bu aşama **MATLAB** ortamında üretilen kodlarla desteklenmiştir. Bunun yanında, $\mathbb{E}^3$ uzayında Darboux çatısına göre Darboux vektörü yardımıyla Darboux helis tanımlanmış ve karakterizasyonu elde edilmiştir.

Son olarak, $\mathbb{E}^4$ uzayında bir hiperyüzey üzerindeki bir Frenet eğrisi için tanımlanmış olan $\{T, E, D, N\}$ ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı yardımıyla bir eğrinin E vektör alanının sabit bir doğrultuyla sabit açı yapması, D vektör alanının sabit bir doğrultu ile sabit açı yapması ve N vektör alanının sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapması durumunda oluşan yeni helisler tanımlanmış ve sırasıyla E -slant helis, D -slant helis ve N -slant helis olarak adlandırılmışlardır. Bu eğriler için çeşitli karakterizasyonlar elde edilmiş ve örnekler verilmiştir.

Böylece, daha sonraki çalışmalarda 4-boyutlu Öklid uzayında elde edilen bu yeni helisler ile çeşitli özel eğriler arasındaki ilişkiler inceleyebilir. Bunun yanında ikinci tür genişletilmiş Darboux çatısı kullanılarak yapılanlar, benzer şekilde birinci tür

genişletilmiş Darboux çatısı ile de yapılabilir. Ayrıca, 3 ve 4 boyutlu Öklid uzayında yapılan bu çalışma n – boyutlu Öklid uzayına taşınabilir. Bu aşamada n – boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey üzerindeki bir Frenet eğrisi boyunca Darboux çatısının elde edilmesi de yeni bir çalışma konusudur. Elde edilecek olan Darboux çatısı yardımıyla bu çatıya ait vektör alanlarının sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapması durumunda oluşacak yeni slant helisler araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Ali, A. T., (2012). "Position Vectors of Slant Helices in Euclidean Space $\mathbb{E}^3$ ", Journal of Egyptian Mathematical Society, 20: 1-6.
- [2] Izumiya, S. ve Takeuchi, N., (2004). "New Special Curves and Developable Surfaces", Turkish Journal of Mathematics, 28: 153-163.
- [3] Izumiya, S. ve Takeuchi, N., (2002). "Generic Properties of Helices and Bertand Curves", Journal of Geometry, 74: 97-109.
- [4] Kula, L., Ekmekci, N., Yayli, Y. ve İlarslan, K., (2010). "Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-Space", Turkish Journal of Mathematics, 33: 1-13.
- [5] Choi, J. H. ve Kim, Y. H., (2012). "Associated Curves of a Frenet Curve and Their Applications", Applied Mathematics and Computation, 218: 9116-9124.
- [6] Lancret, M.A., (1806). "Mémoire Surless Courbes a` Double Courbure", Mémoiresprésentés a` Institut, 416-454.
- [7] Struik, D.J., (1961). Lectures in Classical Differential Geometry, Second Edition, Dover Publications, New York.
- [8] Mağden, A., (1993). "On the Curves of Constant Slope", YYÜ Fen Bilimleri Dergisi, 4: 103-109.
- [9] Özdamar, E. ve Hacısalıhoğlu, H. H., (1975). "A Characterization of Inclined Curves in Euclidean n-space", Communication de La Faculte des Sciences de L'Universate d' Ankara Series A1, 24A: 15-22.
- [10] Kula, L. ve Yayli, Y., (2005). "On Slant Helix and Its Spherical Indicatrix", Applied Mathematics Computation, 169: 600-607.
- [11] Önder, M., Kazaz, M., Kocayığıt, H. ve Kılıç, O., (2008). " $\mathbf{B}_2$ – Slant Helix in Euclidean 4-Space $\mathbb{E}^4$ ", International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 29: 1433-1440.
- [12] Ali, A. T. ve Lopez, M., (2010). "Slant Helices in Euclidean 4-Space $\mathbb{E}^4$ ", Journal of the Egyptian Mathematical Society, 18(2): 223-230.

- [13] Yaylı, Y. ve Zıplar, E., (2011). "On Slant Helices and General Helices in Euclidean n-spaces", *Mathematica Aeterna*, 1(08): 599-610.
- [14] Gök, İ., Camci, Ç. ve Hacısalihoğlu, H., (2009). " V_n – Slant Helices in Euclidean n-space $\mathbb{E}^n$ ", *Mathematical Communications*, 14: 317-329.
- [15] Bükcü, B. ve Karacan, M. K., (2009). "The Slant Helices According to Bishop Frame", *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, 3(11): 1010-1013.
- [16] Kocayigit, H. ve Pekacar, B., (2013). "Characterizations of Slant Helices According to Quaternionic Frame", *Applied Mathematical Sciences*, 7(75): 3739- 3748.
- [17] Okuyucu, Z., Gök, İ., Ekmekci, N. ve Yaylı, Y., (2013). "Slant Helices in Three Dimensional Lie groups", *Applied Mathematics and Computation*, 221: 672-683.
- [18] Zıplar, E., Şenol, A. ve Yaylı, Y., (2012). "On Darboux Helices in Euclidean 3-Space", *Global Journal of Science Frontier Research Mathematics*, 12(13): 9116-9124.
- [19] Chen, B. Y., (2003). "When Does the Position Vector of a Space Curve Always Lie in Its Rectifying Plane?", *American Mathematical Monthly*, 110: 147-152.
- [20] Macit, N. ve Döldül, M., (2014). "Some New Associated Curves of a Frenet Curve in $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{E}^4$ ", *Turkish Journal of Mathematics*; 38: 1023--1037.
- [21] Hananoi, S., Ito, N. ve Izumiya, S., (2015). "Spherical Darboux Images of Curves on Surfaces", *Beitr Algebra Geom.*; 56: 575-585.
- [22] O'Neill, B., (1966). *Elementary Differential Geometry*, Revised Second Edition, Academic Press, New York.
- [23] Puig-Pey, J., Galvez, A. ve Iglesias, A., (2004). "Helical Curves on Surfaces for Computer-Aided Geometric Design and Manufacturing", *ICCSA Lecture Notes in Computer Science*, 771-778.
- [24] Tunç, E. ve Özyılmaz, E., (2014). "The Darboux Trihedrons of Regular Curves On a Regular Surface", *International Electronic Journal of Geometry*, 7(2): 61-71.
- [25] Hacısalihoğlu, H. H., (2000). *Diferensiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [26] Yüce, S., (2017). *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*, İkinci Baskı, Pegem Akademi, Ankara.
- [27] Williams, M. Z. ve Stein, F. M., (1964). "A Triple Product of Vectors in Four-space", *Mathematics Magazine*, 37 (4): 230-235.
- [28] Macit N. ve Döldül M., (2017). "Relatively Normal-Slant Helices Lying On a Surface and Their Characterizations", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(3): 397-408.

- [29] Dldl, M., Uyar Dldl, B., Kuruoğlu, N. ve zdamar, E., (2017). "The Extension of the Darboux Frame into Euclidean 4-space and Its Invariants ", Turkish Journal of Mathematics, 41: 1628-1639.
- [30] Bayram, E. ve Kasap, E., (2014). "Hypersurface Family With a Common Isogeodesic", Scientific Studies and Research Series Maths and Informatics, 24(2): 5-24.
- [31] Alssio, O., (2009). "Differential Geometry of Intersection Curves in $\mathbb{R}^4$ of Three Implicit Surfaces", Computer Aided Geometric Design, 26: 455-471.
- [32] İlarslan, K. ve Yıldırım M., (2018). "On Darboux Helices in Euclidean 4-space", Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018: 1–6.
- [33] Doğan, F. ve Yaylı, Y., (2015). "On Isophote Curves and Their Characterizations", Turkish Journal of Mathematics, 39: 650-664.
- [34] Ross, Shepley L., (1984). Differential Equations, Third Edition, Wiley International Editions, New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Nesibe MACİT
Doğum Tarihi ve Yeri : 20.03.1988 / Fethiye
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : n.gurhan48@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Matematik ABD	Yıldız Teknik Üniversitesi	2013
Lisans	Matematik Öğretmenliği	Dokuz Eylül Üniversitesi	2011
Lise	Sayısal	Aydın/Ortaklar Anadolu Öğretmen Lisesi	2006

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2012-2017	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

SCI/SCI-Exp. Kapsamındaki Dergi

1. **Macit N.** ve Dldl M., (2014). "Some New Associated Curves of a Frenet Curve in $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{E}^4$ ", Turkish Journal of Mathematics, 38(6):1023-1037.
2. **Macit N.** ve Dldl M., (2017). "Relatively Normal-Slant Helices Lying On a Surface and Their Characterizations", Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 46(3):397-408.

Uluslararası Hakemli Dergi

1. **Macit N.**, Akbiyik M. ve Yüce S., (2017). "Some New Associated Curves of an Admissible Frenet Curve in 3-dimensional and 4-dimensional Galilean Spaces", Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 7(2):110-122.

Bildiri

Uluslararası Bildiri

1. **Grhan, N.**, Dldl, M., (2013). "On Some Associated Curves of a Frenet Curve and W-direction Curves in Euclidean 3-space", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2013), 2-5 Haziran 2013, İstanbul/ Türkiye, 341-341.
2. **Macit N.**, Dldl M., (2014). "V-direction Curve of a Surface Curve in $\mathbb{E}^3$ ", 33. Colloquium on Combinatorics, 7-8 Kasım 2014, Ilmenau/Almanya, 15-15.
3. **Macit, N.**, Dldl, M., (2018). "Relatively-Normal Slant Helices and Their Characterizations", Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2018), 26-29 Ekim 2018, Antalya/ Türkiye, 53-53.

Ulusal Bildiri

1. **Macit N.**, Dldl M., (2015). " $\mathbb{E}^4$ 'te bir Frenet Eğrisi ile Bağlantılı Bazı Yeni Eğriler", 13. Geometri Sempozyumu, 27-30 Temmuz 2015, İstanbul/ Türkiye, 100-100.