

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(HİPER)YÜZEYLERİN ARAKESİT EĞRİLERİNİN
EĞRİLİKLERİ VE MATLAB UYGULAMALARI

Bedia Merih ÖZÇETİN

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Aralık, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**(HİPER)YÜZEYLERİN ARAKESİT EĞRİLERİNİN EĞRİLİKLERİ VE
MATLAB UYGULAMALARI**

Bedia Merih ÖZÇETİN tarafından hazırlanan tez çalışması 16.12.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Salim YÜCE, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Melek MASAL, Üye
Sakarya Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Prof. Dr. Murat SARI, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL sorumluluğunda tarafımca hazırlanan (Hiper)Yüzeylerin Arakesit Eğrilerinin Eğrilikleri ve MATLAB Uygulamaları başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Bedia Merih ÖZÇETİN

İmza



Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2211-A Yurt İçi Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.

*Babam Ümit ÖZÇETİN'e
ve annem Birsen ÖZÇETİN'e*



TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında bilgisini, desteğini, sabrını ve tecrübesini benden esirgemeyen; her konuda bana büyük bir özenle yol gösteren, saygıdeğer ve kıymetli hocam Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Salim YÜCE ve Prof. Dr. Melek MASAL' a tez izleme komitesinde yer alıp, harcadıkları değerli zamanları ve tez ile ilgili yaptıkları yol gösterici yorumları için teşekkür ederim.

Yaşamımın her aşamasında bana koşulsuz destek olan, beni büyük bir fedakârlıkla destekleyen, anlayış ve güvenlerini her an yanımda hissettiğim aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

Bunun yanında 2211-A Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Bedia Merih ÖZÇETİN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Orijinal Katkı	3
2 TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 $\mathbb{R}^n$ 'de Vektörel Çarpım	4
2.2 $\mathbb{E}^n$ 'de Eğriler ve Hiperyüzeyler	5
3 $\mathbb{E}^3$ 'TE ARAKESİT PROBLEMLERİ İÇİN WILLMORE VE WILLMORE-BENZERİ METOTLAR	8
3.1 Willmore Metodu	8
3.2 Willmore-Benzeri Metotlar	9
3.2.1 Parametrik Formda Verilen İki Yüzeyin Arakesit Eğrisi	10
3.2.2 Parametrik ve Kapalı Formlarda Verilen İki Yüzeyin Arakesit Eğrisi	13
3.3 Yüzeylerin Arakesit Problemleri İçin Örnekler	13
3.3.1 Parametrik-Parametrik Arakesit Problemi	13
3.3.2 Parametrik-Kapalı Arakesit Problemi	15
4 $\mathbb{E}^n$ 'DE KAPALI DENKLEMLERLE VERİLEN HİPERYÜZEYLERİN ARAKESİT PROBLEMİ	17
4.1 Kapalı Formda Verilen Hiperyüzeylerin Enine Arakesit Eğrisi	18
4.2 Dejenere Durumlar	22
4.3 Kapalı Formda Verilen Hiperyüzeylerin Arakesit Problemleri	25

4.3.1	$\mathbb{E}^4$ 'te Kapalı Formda Verilen Üç Hiperyüzeyin Arakesit Problemi	25
4.3.2	$\mathbb{E}^6$ 'da Kapalı Formda Verilen Beş Hiperyüzeyin Arakesit Problemi	30
4.3.3	$\mathbb{E}^8$ 'de Kapalı Formda Verilen Yedi Hiperyüzeyin Arakesit Problemi	34
5	$\mathbb{E}^n$ 'DE PARAMETRİK DENKLEMLERLE VERİLEN HİPERYÜZEYLERİN ARAKESİT PROBLEMİ	41
5.1	Parametrik Formda Verilen Hiperyüzeylerin Enine Arakesit Eğrisi	41
5.2	$\mathbb{E}^8$ 'de Parametrik Formda Verilen Yedi Hiperyüzeyin Arakesit Problemi	45
6	$\mathbb{E}^n$ 'DE k KAPALI VE $(n - k - 1)$ PARAMETRİK FORMDA VERİLEN HİPERYÜZEYİN ARAKESİT PROBLEMİ	54
6.1	$\mathbb{E}^4$ 'te İki Kapalı ve Biri Parametrik Denklemlerle Verilen Hiperyüzeylerin Arakesit Problemi	55
7	$\mathbb{E}^n$ 'DE PARAMETRİK FORMDA VERİLEN İKİ YÜZEYİN ARAKESİT PROBLEMİ	59
7.1	$\mathbb{E}^n$ 'de Parametrik Formda Verilen İki Yüzeyin Enine Arakesiti	64
7.1.1	Teğet Vektör (α')	65
7.1.2	İkinci Mertebeden Türev (α'')	68
7.1.3	Üçüncü Mertebeden Türev (α''')	70
7.1.4	Dördüncü Mertebeden Türev $(\alpha^{(4)})$	71
7.1.5	Yüksek Mertebeden Türevler $(\alpha^{(m)}, m \geq 5)$	72
7.2	Parametrik Yüzeylerin Arakesit Problemleri	73
7.2.1	$\mathbb{E}^4$ 'te İki Yüzeyin Arakesiti	73
7.2.2	$\mathbb{E}^5$ 'te İki Yüzeyin Arakesiti	80
8	SONUÇ VE ÖNERİLER	86
	KAYNAKÇA	87
A	ARAKESİT EĞRİLERİNİN FRENET ELEMANLARINI HESAPLATAN PSEUDO KODU	90
B	BEŞİNCİ MERTEBEDEN TÜREVİN HESAPLANMASI	92
C	MATLAB UYGULAMASI	94
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	95

SİMGE LİSTESİ

$\mathbf{t}$	$\mathbb{E}^3$ uzayında teğet vektör alanı
$\mathbf{n}$	$\mathbb{E}^3$ uzayında asli normal vektör alanı
$\mathbf{b}$	$\mathbb{E}^3$ uzayında binormal vektör alanı
κ	$\mathbb{E}^3$ uzayında eğrilik
τ	$\mathbb{E}^3$ uzayında burulma
$\mathbf{V}_i$	$\mathbb{E}^n$ uzayında i -yinci Frenet vektörü
κ_i	$\mathbb{E}^n$ uzayında i -yinci eğrilik
$\mathbb{E}^n$	n -boyutlu Öklid uzayı
$\ \quad \ $	Norm
$\langle, \rangle$	Öklid iç çarpımı
$\times$	Vektörel çarpım

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 7.1 S_1 ve S_2 kesişen yüzeylerinin izdüşümleri 73



TABLO LİSTESİ

Tablo 7.1	$k_{i_1}, k_{i_1 i_{2r_1}}, k_{i_1 i_{2r_1} i_{3r_2} i_{4r_3}}, \dots, k_{i_1 i_{2r_1} \dots i_{m-1} r_{m-2}}$	katsayılarının belirlenişi	61
------------------	--	------------------------------------	----



(Hiper)Yüzeylerin Arakesit Eğrilerinin Eğrilikleri ve MATLAB Uygulamaları

Bedia Merih ÖZÇETİN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Bu tez çalışması sekiz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, tezde çalışılan problemlerin literatür özetini ve tezin amacını; ikinci bölüm ise temel kavramları içermektedir.

Üçüncü bölümde, kapalı denklemleriyle verilen iki yüzeyin arakesit eğrisinin eğrilik ve burulmasını veren Willmore metodu tanıtılmıştır. Daha sonra ikisi parametrik veya biri parametrik diğeri kapalı denklemleriyle verilen iki yüzeyin enine arakesit eğrisi için Willmore-benzeri metotlara yer verilmiştir.

Dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölümler tezin orijinal kısımlarını oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde, n -boyutlu Öklid uzayında kapalı denklemleriyle verilen hiperyüzeylerin enine arakesit eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplanmıştır. Eğrilikler hesaplanırken ortaya çıkabilecek dejenere durumlar incelenmiştir. Elde edilen metodun kolayca uygulanabilmesi için MATLAB kodunu üreten pseudo koduna yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, n -boyutlu Öklid uzayında parametrik denklemleriyle verilen hiperyüzeylerin enine arakesit problemi çalışılmıştır. Altıncı bölümde ise n -boyutlu Öklid uzayında k tane kapalı ve $n - k - 1$ tane parametrik denklemleriyle verilen hiperyüzeylerin enine arakesit problemi göz önüne alınmıştır.

Yedinci bölümde, ilk olarak n -boyutlu Öklid uzayında parametrik yüzey üzerindeki bir eğrinin yüksek mertebeden türevlerinin nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir. Daha sonra, n -boyutlu Öklid uzayında iki parametrik yüzeyin enine arakesit eğrisinin Frenet elemanları hesaplanmıştır.

Sekizinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlardan bahsedilerek, gelecek çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Arakesit eğrisi, kapalı eğri, enine arakesit, eğrilikler, Frenet vektörleri, Willmore metodu.



Curvatures of Intersection Curve of (Hyper)Surfaces and Their MATLAB Applications

Bedia Merih ÖZÇETİN

Department of Mathematics

Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

This thesis consists of eight chapters.

The first chapter includes the literature review of the problems studied in the thesis and the aim of the thesis; the second part includes the basic concepts.

In the third chapter, Willmore's method, which gives the curvature and torsion of the intersection curve of two surfaces given by implicit equations, is introduced. Later, Willmore-like methods are given for the intersection curve of two surfaces given by their parametric equations or one of them parametric and the other one with its implicit equation.

The fourth, the fifth, the sixth and the seventh chapters constitute the original parts of the thesis.

In the fourth chapter, Frenet vectors and curvatures of the transversal intersection curve of hypersurfaces given by implicit equations in n -dimensional Euclidean space are computed. The degenerate cases that may occur while calculating the curvatures are examined. In order to easily apply the obtained method, the pseudo code that generates the MATLAB code is included.

In the fifth chapter, the transversal intersection problem of hypersurfaces given by parametric equations is studied in n -dimensional Euclidean space. In the sixth chapter we consider the transversal intersection of k implicit and $n - k - 1$ parametric hypersurfaces in n -dimensional Euclidean space.

In the seventh chapter, we first present the higher order derivative formula of a curve lying on a parametric surface in Euclidean n -space. Then, we obtain the Frenet apparatus of the transversal intersection curve of two parametric surfaces in Euclidean n -space.

In the eighth chapter, the results obtained in the thesis are mentioned and suggestions are made for future studies.

Keywords: Intersection curve, implicit curve, transversal intersection, curvatures, Frenet vectors, Willmore's method.



1.1 Literatür Özeti

$\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında parametrik denklemlerle verilen bir eğrinin eğrilikleri ve Frenet vektörleri kolayca hesaplanabilir [1–7]. Ancak eğrinin parametrik denkleminin açıkça verilmediği durumlarda, örneğin eğrinin $\mathbb{E}^3$ uzayında iki yüzeyin arakesiti olarak verilmesi gibi, eğrinin Frenet elemanlarının bulunması kolay olmayacaktır. İki yüzeyin arakesit eğrisinin her zaman parametrik olarak kolayca belirlenememesi ve yüzeylerin arakesit probleminin bilgisayar destekli tasarımda önemli bir yere sahip olması nedeniyle, özellikle son yıllarda bu tür problemlerin çözümüne yönelik çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Yüzeylerin parametrik veya kapalı denklemleriyle ifade edilmesi farklı arakesit problemlerini ortaya çıkarmıştır. Yüzeylerin normal vektörlerinin arakesit noktasında lineer bağımsız veya lineer bağımlı olup-olmamasına göre, sırasıyla, enine (ing: *transversal*) veya teğetsel arakesit olarak adlandırılan bu arakesit problemlerinde, bazı araştırmacılar nokta-nokta arakesit eğrisini bulmaya yönelik nümerik metotlar geliştirirken kimisi de arakesit eğrisinin diferensiyel geometrik özelliklerini incelemişlerdir [8–20]. Çalışmamızın temelini teşkil eden metotta, Willmore $\mathbb{E}^3$ uzayında $f(x, y, z) = 0$ ve $g(x, y, z) = 0$ kapalı denklemleriyle verilen iki yüzeyin enine arakesit eğrisi için $\nabla f \times \nabla g = (h_1, h_2, h_3)$ vektörü yardımıyla

$$\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

operatörünü tanımlamış ve bu operatör yardımıyla arakesit eğrisinin eğrilik ve burulmasını elde etmiştir [21]. 2005 yılında Goldman, kapalı formda verilen iki yüzeyin arakesit eğrisinin eğrilik ve burulmasını diferensiyel geometrideki klasik eğrilik formüllerini kullanarak bulduğu çalışmasında [14], $(n + 1)$ -boyutlu uzayda iki vektörün dış çarpımını (ing: *wedge product*) kullanarak, kapalı formda verilen n tane hiperyüzeyin enine arakesit eğrisinin de sadece birinci eğriliği (k_1) için kapalı bir formül elde etmiştir. Arakesit eğrisinin diğer eğrilikleri ($k_2, k_3, \dots$) için formüller kaldığından, Goldman bu çalışmasında aşağıdaki problemi ortaya atmıştır:

$(n + 1)$ -boyutlu uzayda kapalı denklemleriyle verilen eğrilerin yüksek mertebeden eğrilikleri için kapalı denklemlerini çıkarınız.

Kapalı denklemleriyle verilen bir eğri için eğriliklerin hesaplanması kolay değildir. Hesaplamaların zor olması nedeniyle, $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ uzaylarında bile kapalı denklemleriyle verilen bir eğrinin eğriliklerinin hesaplanması için literatürde çok az kaynak bulunmaktadır. $\mathbb{E}^n$ uzayında kapalı denklemleriyle verilen bir eğri, kapalı denklemleriyle verilen $n-1$ tane hiperyüzeyin arakesit eğrisi olarak tanımlanabilir. Bu nedenle yüksek boyutlu uzaylarda kapalı eğrilerle çalışmak demek, kapalı denklemleriyle verilen hiperyüzeylerin arakesit problemini göz önüne almak demektir. $\mathbb{E}^n$, $n \geq 4$, uzayında hiperyüzeylerin arakesitini inceleyen sınırlı sayıda çalışma mevcuttur. Hiperyüzeylerin normal vektörlerinin lineer bağımlılığına bağlı olarak hiperyüzeylerin arakesiti enine, enine olmayan (ing: *non-transversal*) veya teğetsel arakesit olarak adlandırılır.

Goldman'ın bu açık probleminden sonra, iki yüzeyin arakesit problemi $\mathbb{E}^4$ uzayında üç hiperyüzeyin arakesit problemine genişletilerek, bu tür problemler için de arakesit eğrisinin diferensiyel geometrik özellikleri çalışılmıştır. Bu çalışmaların ilkinde, 2009 yılında Aléssio, $\mathbb{E}^3$ uzayında kapalı formda verilen iki yüzeyin arakesiti için Ye ve Maekawa tarafından verilen metodu genişleterek ve kapalı fonksiyon teoremini kullanarak, $\mathbb{E}^4$ uzayında kapalı formda verilen üç hiperyüzeyin enine arakesit eğrisinin eğriliklerini ve Frenet vektörlerini elde etmiştir [22]. Bu problem için 2012 yılında Uyar Döldül ve Döldül tarafından Willmore metodunun $\mathbb{E}^4$ uzayına genişletilmesinin kullanılmasıyla farklı bir metot verilmiştir [23]. 2012 yılında Aléssio, Goldman'ın metodunu genelleştirerek, $\mathbb{E}^n$ uzayında kapalı formda verilen $n-1$ tane hiperyüzeyin enine arakesit eğrisinin ikinci ve üçüncü eğriliklerini elde etmiştir [24]. Aléssio bu çalışmasında, Goldman'ın metodunun genelleştirilmesiyle $\mathbb{E}^n$ uzayında kapalı eğrilerin yüksek mertebeden eğriliklerinin hesaplanmasının çok zor olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmalara ek olarak, $\mathbb{E}^4$ uzayında üç parametrik hiperyüzeyin [25] ve $\mathbb{E}^5$ uzayında dört parametrik hiperyüzeyin [26] enine arakesit problemlerinin çalışılmasının yanı sıra, $\mathbb{E}^4$ uzayında en az biri parametrik denklemleriyle verilen üç hiperyüzeyin enine arakesit eğrisinin eğriliklerinin de nasıl elde edilebileceğini farklı metotlarla gösteren çalışmalar da yapılmıştır [19, 27]. $\mathbb{E}^4$ uzayında üç hiperyüzeyin enine olmayan veya teğetsel arakesit problemleri de çalışılarak arakesit eğrisinin Frenet elemanları elde edilmiştir [28–32]. Diğer taraftan, 3-boyutlu ve 4-boyutlu Minkowski uzaylarında da (hiper)yüzeylerin arakesit eğrisinin diferensiyel geometrik özellikleri çalışılmıştır [33–35].

1.2 Tezin Amacı

Literatür özetinde bahsedilen çalışmalara bakıldığında, 2005 yılından beri Goldman'ın problemine bütünüyle cevap veren bir çalışma yapılmadığı görülmektedir. Bu nedenle bu tezin amaçlarından birincisi, ilgili probleme cevap olarak, $\mathbb{E}^n$ uzayında kapalı bir eğrinin, yani $n - 1$ tane kapalı denklemiyle verilen hiperyüzeyin enine arakesit eğrisinin, eğriliklerinin tamamının elde edilmesidir. Bu amaçla elde edilecek yöntemin yüksek boyutlu uzaylarda uygulanabilirliğini kolaylaştırmak için MATLAB yardımıyla sonuç alınmasını sağlayacak bilgisayar kodları ortaya koymaktır. Daha sonra $\mathbb{E}^n$ uzayında diğer arakesit problemlerini, yani $n - 1$ tane parametrik hiperyüzeyin veya k tane kapalı ve $n - k - 1$ tane parametrik denklemiyle verilen hiperyüzeylerin enine arakesit eğrisinin eğriliklerinin nasıl elde edilebileceğini araştırmaktır. Son olarak, $\mathbb{E}^n$ uzayında iki tane parametrik yüzeyin enine arakesit problemini çalışarak, $\mathbb{E}^n$ uzayında karşılaşılabilecek bütün enine arakesit problemlerini içeren bir çalışma elde etmektir.

1.3 Orijinal Katkı

Bu çalışmada öncelikle $\mathbb{E}^n$ uzayında kapalı denklemiyle verilen bir eğrinin eğriliklerinin tamamının elde edilmesini sağlayan bir yöntem verilmiştir. Bunu yapmak için Goldman'ın metodunun genelleştirmesi yerine Willmore metodunun genelleştirilmesiyle karşılaşılan zorluklar azaltılmıştır. Her ne kadar elde edilen formüller Goldman'ın formülü gibi kapalı olmasa da, çalışmamızda verilen yöntemle arakesit eğrisinin bütün eğrilikleri hesaplanabildiğinden, elde edilen sonuçlarla Goldman'ın sorusuna bir çözüm getirilmiştir. Bunun yanı sıra, hiperyüzeylerin denklemleri nasıl verilirse verilsin, $\mathbb{E}^n$ uzayında $n - 1$ tane hiperyüzeyin bütün enine arakesit problemlerinde arakesit eğrisinin Frenet elemanlarının nasıl elde edilebileceğinin gösterilmesi tezin literatüre kazandırdığı diğer bir orijinal katkıdır. Son olarak, $\mathbb{E}^n$ uzayında iki parametrik yüzeyin arakesit probleminde eğriliklerin hesaplanması ve verilen metotların yüksek boyutlu uzaylarda kolay uygulanmasını sağlayan MATLAB kodlarının üretilmesi yapılan işlemlerin kolaylaştırılması yönünde önemli bir katkı olarak görülebilir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm tezde gerekli olan bazı temel kavram ve teoremleri içermektedir.

2.1 $\mathbb{R}^n$ 'de Vektörel Çarpım

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^n$ uzayında standart baz $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ olsun.

$$\mathbf{a}_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{a}_2 = \sum_{j=1}^n a_{2j} \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{a}_{n-1} = \sum_{j=1}^n a_{n-1,j} \mathbf{e}_j$$

vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır ve bu vektörün normu

$$\|\mathbf{H}\| = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \dots \|\mathbf{a}_{n-1}\| \cdot K \quad (2.1)$$

olarak yazılır. Burada,

$$K = \left| \begin{array}{cccc} 1 & \cos \alpha_{12} & \dots & \cos \alpha_{1,n-1} \\ \cos \alpha_{21} & 1 & \dots & \cos \alpha_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos \alpha_{n-1,1} & \cos \alpha_{n-1,2} & \dots & 1 \end{array} \right|^{1/2}$$

ve $\cos \alpha_{ij} = \frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle}{\|\mathbf{a}_i\| \cdot \|\mathbf{a}_j\|}$ şeklindedir [36].

2.2 $\mathbb{E}^n$ 'de Eğriler ve Hiperyüzeyler

Tanım 2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ uzayında diferensiyellenebilir eğri denir. Eğer $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(k)}$ türevleri var ve sürekli ise α eğrisine C^k -sınıfındandır denir.

Tanım 2.3. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ oluyorsa, α eğrisine regüler eğri denir. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ oluyorsa α eğrisine birim hızlı eğri, s 'ye de yay parametresi denir.

Tanım 2.4. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$, $C^{(n+1)}$ -sınıfından birim hızlı bir eğri ve $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n)}$ vektörleri eğri boyunca lineer bağımsız olsun.

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad \mathbf{E}_i = \alpha^{(i)} - \sum_{j < i} \langle \alpha^{(i)}, \mathbf{V}_j \rangle \mathbf{V}_j, \quad \mathbf{V}_i = \frac{\mathbf{E}_i}{\|\mathbf{E}_i\|}, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

ile tanımlı $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n\}$ kümesine α eğrisi boyunca Frenet çatısı ve her bir $\mathbf{V}_i$ vektörüne de eğrinin Frenet vektörü denir.

Tanım 2.5. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{\mathbf{V}_1(s), \mathbf{V}_2(s), \dots, \mathbf{V}_n(s)\}$ olarak verilsin. $1 \leq i < n$ için

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad k_i(s) = \langle \mathbf{V}'_i(s), \mathbf{V}_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanan k_i fonksiyonuna eğrinin i -yinci eğrilik fonksiyonu, $k_i(s) \in \mathbb{R}$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki i -yinci eğriliği denir.

Teorem 2.1. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri ve $s \in I$ yay parametresi olsun. α eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{\mathbf{V}_1(s), \mathbf{V}_2(s), \dots, \mathbf{V}_n(s)\}$ ve eğrilikler $k_i(s)$ olmak üzere

1. $\mathbf{V}'_1(s) = k_1(s)\mathbf{V}_2(s)$
2. $\mathbf{V}'_i(s) = -k_{i-1}(s)\mathbf{V}_{i-1}(s) + k_i(s)\mathbf{V}_{i+1}(s), \quad 1 < i < n,$
3. $\mathbf{V}'_n(s) = -k_{n-1}(s)\mathbf{V}_{n-1}(s)$

yazılabilir. Bu formüllere $\mathbb{E}^n$ uzayında Frenet formülleri denir. Bu formüller matris formunda

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}'_1(s) \\ \mathbf{V}'_2(s) \\ \mathbf{V}'_3(s) \\ \vdots \\ \mathbf{V}'_{n-1}(s) \\ \mathbf{V}'_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{n-1} \\ \mathbf{V}_n \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir [37].

Teorem 2.2. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{\mathbf{V}_1(s), \mathbf{V}_2(s), \dots, \mathbf{V}_n(s)\}$ olsun. $s \in I$ yay parametresi ve

$$\mathbf{V}_1(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}, \quad E_i(s) = \alpha^{(i)}(s) - \sum_{j < i} \langle \alpha^{(i)}(s), \mathbf{V}_j(s) \rangle \mathbf{V}_j(s), \quad 1 < i \leq n,$$

olmak üzere,

$$k_i(s) = \frac{\|E_{i+1}(s)\|}{\|E_i(s)\|}, \quad 1 \leq i < n,$$

şeklindedir [37].

Tanım 2.6. $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında U bir açık alt küme olmak üzere boş olmayan bir

$$\mathcal{M} = \left\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n \mid f : U \subset \mathbb{E}^n \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}, f(X) = c, c \in \mathbb{R} \text{ bir sabit} \right\}$$

kümesi verilsin. Eğer $\forall P \in \mathcal{M}$ için $\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(P) \neq \vec{0}$ oluyorsa, $\mathcal{M}$ kümesine $(n-1)$ -boyutlu yüzey veya hiperyüzey denir. Burada $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ denkleminde de hiperyüzeyin kapalı denklemi denir.

Tanım 2.7. $\mathbb{E}^n$ uzayında bir hiperyüzey $\mathcal{M}$ olsun. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna $\mathcal{M}$ hiperyüzeyi üzerinde bir eğri denir.

Tanım 2.8. $\mathcal{M}$, $\mathbb{E}^n$ uzayında bir hiperyüzey ve $P \in \mathcal{M}$ bir nokta olsun. $\vec{v}_P \in T_{\mathbb{E}^n}(P)$ tanjant vektörü $\mathcal{M}$ hiperyüzeyi üzerinde olan ve $P \in \mathcal{M}$ noktasından geçen bir eğrinin hız vektörü oluyorsa, $\vec{v}_P$ tanjant vektörü $\mathcal{M}$ hiperyüzeyine P noktasında teğettir denir. $P \in \mathcal{M}$ noktasındaki bütün teğet vektörlerinin kümesi $T_{\mathcal{M}}(P)$ ile gösterilir. Buna göre $\vec{v}_P \in T_{\mathcal{M}}(P)$ için $\alpha(0) = P$ ve $\alpha'(0) = \vec{v}$ olacak şekilde $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ eğrisi vardır.

Tanım 2.9. $\mathbb{E}^n$ uzayında bir hiperyüzey $\mathcal{M}$ olsun. $X \in \chi(\mathbb{E}^n)$ vektör alanı verildiğinde $\forall P \in \mathcal{M}$ noktası için $X_P \in T_{\mathcal{M}}(P)$ oluyorsa $X \in \chi(\mathbb{E}^n)$ vektör alanına $\mathcal{M}$ üzerinde bir teğet vektör alanı denir. $\mathcal{M}$ üzerinde tanımlanan bütün teğet vektör alanlarının kümesi $\chi(\mathcal{M})$ ile gösterilir.

Tanım 2.10. $\mathbb{E}^n$ uzayında bir hiperyüzey $\mathcal{M}$ olsun. $Z_P \in T_{\mathbb{E}^n}(P)$ tanjant vektörü, $P \in \mathcal{M}$ noktasındaki bütün teğet vektörlerine dik ise yani $T_{\mathcal{M}}(P)$ uzayına dikse, Z_P tanjant vektörüne $P \in \mathcal{M}$ noktasında bir normal vektör denir.

Tanım 2.11. $\mathcal{M}$, $\mathbb{E}^n$ uzayında bir hiperyüzey ve $Z \in \chi(\mathbb{E}^n)$ olsun. Eğer $\forall P \in \mathcal{M}$ noktası için Z_P , $\mathcal{M}$ 'nin bir normal vektörü oluyorsa Z 'ye $\mathcal{M}$ üzerinde normal vektör alanı denir.

Teorem 2.3. $\mathbb{E}^n$ uzayında $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ kapalı denklemi ile verilen hiperyüzey $\mathcal{M}$ olsun. Bu durumda ∇f , $\mathcal{M}$ 'nin her bir noktasında sıfırdan farklı bir normal vektör alanıdır.

Tanım 2.12. $D \subset \mathbb{E}^{n-1}$ bir bağlantılı açık küme ve $\mathbf{X} : D \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir regüler dönüşüm olsun. Eğer $\mathbf{X} : D \rightarrow \mathbf{X}(D)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\mathcal{M} = \mathbf{X}(D)$ kümesine $\mathbb{E}^n$ uzayında bir regüler hiperyüzey denir. Bu durumda $\mathbf{X}$ dönüşümüne de $\mathcal{M}$ hiperyüzeyi için bir parametrik gösterim denir.

Tanım 2.13. $\mathbb{E}^n$ uzayında $\mathbf{X}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ parametrik gösterimi ile verilen bir hiperyüzey için $\mathbf{X}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_i}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, olmak üzere $\chi(\mathcal{M}) = sp\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{n-1}\}$ yazılabilir. Bu durumda hiperyüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_{n-1}}{\|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_{n-1}\|}$$

şeklinde tanımlıdır.

$\mathbb{E}^3$ 'TE ARAKESİT PROBLEMLERİ İÇİN WILLMORE VE WILLMORE-BENZERİ METOTLAR

3.1 Willmore Metodu

Bu bölümde $\mathbb{E}^3$ uzayında kapalı formda verilen iki yüzeyin enine arakesit eğrisinin eğriliklerini hesaplayan Willmore metodu [21] tanıtılmıştır.

S_1 ve S_2 kesişen regüler yüzeyleri $f(x, y, z) = 0$ ve $g(x, y, z) = 0$ denklemleriyle verilsin. Bu yüzeylerin birim hızlı arakesit eğrisi $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ olsun. S_1 ve S_2 yüzeylerinin normal vektör alanları, sırasıyla, ∇f ve ∇g olmak üzere, arakesit eğrisinin $\mathbf{t}$ birim teğet vektör alanı bu iki yüzeyin normal vektörlerine dik olacaktır. Dolayısıyla $\mathbf{t}$ vektörü yüzey normallerinin vektörel çarpımına paralel olacaktır [21].

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \text{ve} \quad \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

olmak üzere $\mathbf{h} = \nabla f \times \nabla g$ alınırsa $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ yazılabilir. Buradan

$$\lambda^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle, \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda} \quad (3.1)$$

olup, $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ ve $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t} = \lambda \alpha' = (\lambda x', \lambda y', \lambda z')$ eşitliklerinden $\lambda x' = h_1$, $\lambda y' = h_2$, $\lambda z' = h_3$ yazılabilir.

$$\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

operatörünü tanımlayalım [21].

$\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta \mathbf{h} = \Delta(\lambda \mathbf{t}) = \lambda \left(\frac{d\lambda}{ds} \mathbf{t} + \lambda \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right) = \lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 \kappa \mathbf{n}$$

yani

$$\Delta \mathbf{h} = \lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 \kappa \mathbf{n} \quad (3.3)$$

elde edilir. Son eşitliğin iki tarafı $\mathbf{t}$ ile iç çarpılırsa

$$\lambda' = \frac{\langle \Delta \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle}{\lambda} \quad (3.4)$$

bulunur. $\mathbf{h}$ ve $\Delta \mathbf{h}$ vektörlerinin vektörel çarpımı alınır

$$\mathbf{h} \times \Delta \mathbf{h} = (\lambda \mathbf{t}) \times (\lambda^2 \kappa \mathbf{n} + \lambda \lambda' \mathbf{t}) = \lambda^3 \kappa \mathbf{b}$$

olup, $\mathbf{h} \times \Delta \mathbf{h} = \mathbf{k}$ denilirse, arakesit eğrisinin eğriliği

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{k}\|}{\lambda^3} \quad (3.5)$$

eşitliğinden bulunabilir.

$\mathbf{k} = \mathbf{h} \times \Delta \mathbf{h} = \lambda^3 \kappa \mathbf{b}$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta \mathbf{k} = \lambda (\lambda^3 \kappa)' \mathbf{b} - \lambda^4 \kappa \tau \mathbf{n} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.3) ve (3.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$\langle \Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{k} \rangle = \langle (\lambda^2 \kappa \mathbf{n} + \lambda \lambda' \mathbf{t}), (\lambda (\lambda^3 \kappa)' \mathbf{b} - \lambda^4 \kappa \tau \mathbf{n}) \rangle = -\lambda^6 \kappa^2 \tau$$

olacağından arakesit eğrisinin burulması

$$\tau = -\frac{\langle \Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{k} \rangle}{\lambda^6 \kappa^2} \quad (3.7)$$

ile hesaplanır.

3.2 Willmore-Benzeri Metotlar

Bu bölümde $\mathbb{E}^3$ uzayında parametrik formda verilen iki yüzeyin veya biri parametrik biri kapalı denklemlerle verilen yüzeylerin enine arakesit eğrisinin Frenet vektörlerinin ve eğriliklerinin önceki bölümde tanıtılan Willmore metoduna benzer olarak nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir [27].

3.2.1 Parametrik Formda Verilen İki Yüzeyin Arakesit Eğrisi

$\mathbb{E}^3$ 'te $X(u, v) = (X_1(u, v), X_2(u, v), X_3(u, v))$ ve $Y(p, q) = (Y_1(p, q), Y_2(p, q), Y_3(p, q))$ parametrik denklemleriyle verilen iki regüler yüzey S_1 ve S_2 olsun. Bu iki yüzeyin birim hızlı enine arakesit eğrisi $\alpha(s)$ olsun. S_1 ve S_2 yüzeylerinin normal vektör alanları, sırasıyla, $\mathbf{N}_1 = X_u \times X_v$ ve $\mathbf{N}_2 = Y_p \times Y_q$ olmak üzere arakesit eğrisinin $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü bu normal vektörlere dik olacağından $\mathbf{t}$ vektörü, $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ ile lineer bağımlıdır [27].

$\mathbf{h} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = (X_u \times X_v) \times (Y_p \times Y_q)$ alınır $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ olup, $\lambda^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle$ ve birim teğet vektör $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda}$ ile belirlenir.

$$\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial u} + h_2 \frac{\partial}{\partial v} + h_3 \frac{\partial}{\partial p} + h_4 \frac{\partial}{\partial q} \right) \quad (3.8)$$

operatörünü tanımlayalım [27]. Buradan

$$\lambda u' = h_1, \quad \lambda v' = h_2, \quad \lambda p' = h_3, \quad \lambda q' = h_4 \quad (3.9)$$

elde edilir. Arakesit eğrisi her iki yüzey üzerinde de olduğundan

$$\alpha(s) = X(u(s), v(s)) \quad \text{ve} \quad \alpha(s) = Y(p(s), q(s))$$

yazılabilir. Böylece

$$\alpha' = X_u u' + X_v v' \quad \text{ve} \quad \alpha' = Y_p p' + Y_q q'$$

olup, $\mathbf{h} = \lambda \alpha' = \lambda u' X_u + \lambda v' X_v = \lambda p' Y_p + \lambda q' Y_q$ eşitliğinde (3.9) kullanılırsa

$$\mathbf{h} = h_1 X_u + h_2 X_v \quad \text{ve} \quad \mathbf{h} = h_3 Y_p + h_4 Y_q$$

elde edilir. h_1, h_2, h_3, h_4 bilinmeyenleri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$\mathbf{h} = h_1 X_u + h_2 X_v$ vektörü, sırasıyla, X_u ve X_v ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle X_u, X_u \rangle h_1 + \langle X_v, X_u \rangle h_2 &= \langle \mathbf{h}, X_u \rangle \\ \langle X_u, X_v \rangle h_1 + \langle X_v, X_v \rangle h_2 &= \langle \mathbf{h}, X_v \rangle \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar determinantı, $\langle X_u, X_u \rangle = E$, $\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_v, X_u \rangle = F$, $\langle X_v, X_v \rangle = G$ olmak üzere, $\delta = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \neq 0$ olacağından,

sistemin çözümü

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{h}, X_u \rangle & F \\ \langle \mathbf{h}, X_v \rangle & G \end{vmatrix}}{EG - F^2} \Rightarrow h_1 = \frac{G\langle \mathbf{h}, X_u \rangle - F\langle \mathbf{h}, X_v \rangle}{EG - F^2} \quad (3.10)$$

$$h_2 = \frac{\begin{vmatrix} E & \langle \mathbf{h}, X_u \rangle \\ F & \langle \mathbf{h}, X_v \rangle \end{vmatrix}}{EG - F^2} \Rightarrow h_2 = \frac{E\langle \mathbf{h}, X_v \rangle - F\langle \mathbf{h}, X_u \rangle}{EG - F^2} \quad (3.11)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{h} = h_3 Y_p + h_4 Y_q$ vektörü, sırasıyla, Y_p ve Y_q ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle Y_p, Y_p \rangle h_3 + \langle Y_p, Y_q \rangle h_4 &= \langle \mathbf{h}, Y_p \rangle \\ \langle Y_p, Y_q \rangle h_3 + \langle Y_q, Y_q \rangle h_4 &= \langle \mathbf{h}, Y_q \rangle \end{aligned}$$

olup, $\langle Y_p, Y_p \rangle = e$, $\langle Y_p, Y_q \rangle = \langle Y_q, Y_p \rangle = f$, $\langle Y_q, Y_q \rangle = g$ yazılırsa, $\delta = \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} \neq 0$ olacağından, sistemin çözümü

$$h_3 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{h}, Y_p \rangle & f \\ \langle \mathbf{h}, Y_q \rangle & g \end{vmatrix}}{eg - f^2} \Rightarrow h_3 = \frac{g\langle \mathbf{h}, Y_p \rangle - f\langle \mathbf{h}, Y_q \rangle}{eg - f^2} \quad (3.12)$$

$$h_4 = \frac{\begin{vmatrix} e & \langle \mathbf{h}, Y_p \rangle \\ f & \langle \mathbf{h}, Y_q \rangle \end{vmatrix}}{eg - f^2} \Rightarrow h_4 = \frac{e\langle \mathbf{h}, Y_q \rangle - f\langle \mathbf{h}, Y_p \rangle}{eg - f^2} \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. $\mathbf{h} = (X_u \times X_v) \times (Y_p \times Y_q)$ eşitliği (3.10)-(3.13) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$h_1 = -\langle X_v, Y_p \times Y_q \rangle, \quad (3.14)$$

$$h_2 = \langle X_u, Y_p \times Y_q \rangle, \quad (3.15)$$

$$h_3 = \langle X_u \times X_v, Y_q \rangle, \quad (3.16)$$

$$h_4 = -\langle X_u \times X_v, Y_p \rangle, \quad (3.17)$$

eşitlikleri elde edilir [19]. Burada

$$\ell_i = Y_i(p, q) - X_i(u, v) \quad \text{ve} \quad \nabla \ell_i = \left(\frac{\partial \ell_i}{\partial u}, \frac{\partial \ell_i}{\partial v}, \frac{\partial \ell_i}{\partial p}, \frac{\partial \ell_i}{\partial q} \right), \quad i = 1, 2, 3$$

alınırsa

$$(h_1, h_2, h_3, h_4) = \nabla \ell_1 \times \nabla \ell_2 \times \nabla \ell_3 \quad (3.18)$$

şeklinde de yazılabilir [19].

$\mathbf{h} = (X_u \times X_v) \times (Y_p \times Y_q) = (x(u, v, p, q), y(u, v, p, q), z(u, v, p, q))$ olsun. Bu durumda

$$\mathbf{h}(u(s), v(s), p(s), q(s)) = (x(u(s), v(s), p(s), q(s)), y(u(s), v(s), p(s), q(s)), z(u(s), v(s), p(s), q(s)))$$

olup, Δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{h} &= \lambda \frac{d\mathbf{h}}{ds} \\ &= \lambda \left(\frac{d}{ds} x(u(s), v(s), p(s), q(s)), \frac{d}{ds} y(u(s), v(s), p(s), q(s)), \frac{d}{ds} z(u(s), v(s), p(s), q(s)) \right) \\ &= \lambda \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial x}{\partial p} \frac{dp}{ds} + \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{ds}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial z}{\partial p} \frac{dp}{ds} + \frac{\partial z}{\partial q} \frac{dq}{ds} \right) \\ &= \lambda u' \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \lambda v' \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \lambda p' \left(\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \frac{\partial z}{\partial p} \right) + \lambda q' \left(\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q} \right) \end{aligned}$$

veya kısaca

$$\Delta \mathbf{h} = h_1 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u} + h_2 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial v} + h_3 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial p} + h_4 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q}$$

olur. (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) eşitliklerinde bulunan h_1, h_2, h_3, h_4 değerleri burada yerine yazılırsa $\Delta \mathbf{h}$ elde edilir. Diğer taraftan $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ eşitliğine Δ operatörü uygulandığında $\Delta \mathbf{h} = \lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 \kappa \mathbf{n}$ olduğundan, $\lambda \lambda' = \langle \Delta \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle$ ve $\langle \Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{h} \rangle = (\lambda \lambda')^2 + \lambda^4 \kappa^2$ eşitlikleri kullanılırsa arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$\kappa^2 = \frac{\langle \Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{h} \rangle - (\lambda \lambda')^2}{\lambda^4} \quad (3.19)$$

ve arakesit eğrisinin asli normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{\Delta \mathbf{h} - \lambda \lambda' \mathbf{t}}{\lambda^2 \kappa} \quad (3.20)$$

ile hesaplanabilir. Buradan arakesit eğrisinin binormal vektörü $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ ile bulunur.

$\Delta \mathbf{h} = \lambda \lambda' \mathbf{t} + \lambda^2 \kappa \mathbf{n}$ eşitliğine Δ operatörü uygulandığında

$$\Delta^2 \mathbf{h} = (\lambda(\lambda')^2 + \lambda^2 \lambda'' - \lambda^3 \kappa^2) \mathbf{t} + (\lambda^2 \lambda' \kappa + \lambda(\lambda^2 \kappa)') \mathbf{n} + \lambda^3 \kappa \tau \mathbf{b}$$

olup, bu eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa, arakesit eğrisinin burulması

$$\tau = \frac{\langle \Delta^2 \mathbf{h}, \mathbf{b} \rangle}{\lambda^3 \kappa} \quad (3.21)$$

ile bulunabilir.

3.2.2 Parametrik ve Kapalı Formlarda Verilen İki Yüzeyin Arakesit Eğrisi

S_1 ve S_2 , sırasıyla, $X = X(u, v)$ ve $f(x, y, z) = 0$ denklemleriyle verilen ve enine kesişen iki regüler yüzey olsun. Bu iki yüzeyin birim hızlı arakesit eğrisini $\alpha(s)$ ile gösterelim. Bu durumda α arakesit eğrisinin $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü $\mathbf{h} = (X_u \times X_v) \times \nabla f$ vektörüne paraleldir, yani $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{t}$ yazılabilir [27].

$$\Theta = \lambda \frac{d}{ds} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial u} + h_2 \frac{\partial}{\partial v} + h_3 \frac{\partial}{\partial x} + h_4 \frac{\partial}{\partial y} + h_5 \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.22)$$

operatörünü tanımlayalım [27]. Buradan

$$\lambda u' = h_1, \quad \lambda v' = h_2, \quad \lambda x' = h_3, \quad \lambda y' = h_4, \quad \lambda z' = h_5$$

elde edilir. Ayrıca

$$\mathbf{h} = h_1 X_u + h_2 X_v \quad \text{ve} \quad \mathbf{h} = (h_3, h_4, h_5)$$

yazılabilir. Buradaki h_1 ve h_2 bilinmeyenleri (3.10) ve (3.11) denklemleri yardımıyla bulunabilir. Böylece S_1 ve S_2 yüzeylerinin enine arakesit eğrisinin Frenet elemanları

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{h}}{\lambda}, \quad \lambda \lambda' = \langle \Theta \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle, \quad \kappa^2 = \frac{\langle \Theta \mathbf{h}, \Theta \mathbf{h} \rangle - (\lambda \lambda')^2}{\lambda^4} \\ \mathbf{n} &= \frac{\Theta \mathbf{h} - \lambda \lambda' \mathbf{t}}{\lambda^2 \kappa}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad \tau = \frac{\langle \Theta^2 \mathbf{h}, \mathbf{b} \rangle}{\lambda^3 \kappa} \end{aligned} \quad (3.23)$$

ile hesaplanır.

3.3 Yüzeylerin Arakesit Problemleri İçin Örnekler

3.3.1 Parametrik-Parametrik Arakesit Problemi

$X(u, v) = (u, uv, v)$ ve $Y(p, q) = (p, q, q^2 + 2)$ parametrik denklemleriyle verilen regüler yüzeyleri göz önüne alalım. Bu yüzeylerin arakesit eğrisinin $P = X(0, 2) =$

$Y(0,0) = (0,0,2)$ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım [27].

$$\begin{aligned} X_u &= (1, v, 0) \\ X_v &= (0, u, 1) \end{aligned} \implies N_1 = X_u \times X_v = (v, -1, u)$$

$$\begin{aligned} Y_p &= (0, 0, 1) \\ Y_q &= (0, 1, 2q) \end{aligned} \implies N_2 = Y_p \times Y_q = (0, -2q, 1)$$

olduğundan,

$$\mathbf{h} = (X_u \times X_v) \times (Y_p \times Y_q) = (2qu - 1, -v, -2vq)$$

bulunur. Böylece $\mathbf{h}(P) = (-1, -2, 0)$ olup,

$$\lambda^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \implies \lambda^2(P) = \langle \mathbf{h}(P), \mathbf{h}(P) \rangle = \langle (-1, -2, 0), (-1, -2, 0) \rangle = 5$$

yani, $\lambda(P) = \pm\sqrt{5}$ bulunur. $\lambda(P) = -\sqrt{5}$ alınır, arakesit eğrisinin P noktasındaki birim teğet vektörü

$$\mathbf{t}(P) = \frac{\mathbf{h}(P)}{\lambda(P)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan $\ell_1 = p - u$, $\ell_2 = q - uv$, $\ell_3 = q^2 + 2 - v$ olduğundan

$$\nabla \ell_1 = (-1, 0, 1, 0), \quad \nabla \ell_2 = (-v, -u, 0, 1), \quad \nabla \ell_3 = (0, -1, 0, 2q)$$

olup,

$$\nabla \ell_1 \times \nabla \ell_2 \times \nabla \ell_3 = (2uq - 1, -2vq, 2uq - 1, -v),$$

yani

$$h_1 = 2uq - 1, \quad h_2 = -2vq, \quad h_3 = 2uq - 1, \quad h_4 = -v$$

bulunur. Böylece

$$\Delta \mathbf{h} = (-2uv + 2q(2uq - 1), 2vq, 4vq^2 + 2v^2)$$

ve

$$\Delta^2 \mathbf{h} = (4v + 8uq^3 + 8uq^3 - 4q^2, -4vq^2 - 2v^2, -8vq^3 - 16v^2q)$$

olup,

$$\Delta \mathbf{h}(P) = (0, 0, 8), \quad \Delta^2 \mathbf{h}(P) = (8, -8, 0)$$

elde edilir.

$$\lambda(P)\lambda'(P) = \langle \Delta \mathbf{h}(P), \mathbf{t}(P) \rangle = \left\langle (0, 0, 8), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \right\rangle = 0$$

olduğundan, (3.19) eşitliği kullanılarak arakesit eğrisinin eğriliği

$$\kappa(P) = \sqrt{\frac{\langle \Delta \mathbf{h}(P), \Delta \mathbf{h}(P) \rangle - (\lambda(P)\lambda'(P))^2}{\lambda^4(P)}} = \sqrt{\frac{\langle (0, 0, 8), (0, 0, 8) \rangle}{(-\sqrt{5})^4}} \Rightarrow \kappa(P) = \frac{8}{5}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, (3.20) ile arakesit eğrisinin asli normal vektörü

$$\mathbf{n}(P) = \frac{\Delta \mathbf{h}(P) - \lambda(P)\lambda'(P)\mathbf{t}(P)}{\lambda^2(P)\kappa(P)} = (0, 0, 1)$$

şeklindedir. Arakesit eğrisinin binormal vektörü

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{b}(P) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0)$$

ve (3.21) eşitliği yardımıyla da burulması

$$\tau(P) = \frac{\langle \Delta^2 \mathbf{h}(P), \mathbf{b}(P) \rangle}{\lambda^3(P)\kappa(P)} = -\frac{3}{5}$$

olarak bulunur [27].

3.3.2 Parametrik-Kapalı Arakesit Problemi

$X(u, v) = (u, v, uv)$ ve $f(x, y, z) = xz - y^2 = 0$ regüler yüzeyleri verilsin. Bu yüzeylerin arakesit eğrisinin $P = X(1, 1) = (1, 1, 1)$ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım [27].

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, v) \\ X_v &= (0, 1, u) \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{N}_1 = X_u \times X_v = (-v, -u, 1)$$

ve

$$\mathbf{N}_2 = \nabla f = (z, -2y, x)$$

olduğundan,

$$\mathbf{h} = (X_u \times X_v) \times \nabla f = (2y - ux, vx + z, 2vy + uz)$$

bulunur. Bu durumda

$$h_1 = 2u - ux, \quad h_2 = vx + z, \quad h_3 = 2y - ux \quad h_4 = vx + z \quad h_5 = 2vy + uz$$

olup,

$$\Theta \mathbf{h} = (2vx + 2z - 2xy + ux^2 - 2uy + u^2x, vx^2 + xz + 4vy - vux + uz, 2yvx + 4yz + 2v^2x + 2vz - zux + 2uvy + u^2z)$$

ve

$$\begin{aligned} \Theta^2 \mathbf{h} = & (-2ux^3 - 8y^2 - 4u^2x^2 + 2yu^2 + 2yx^2 + 8vy - 4uvx + 2uyx + 10uxy, \\ & vx^3 + zx^2 + 4vxy - 2uvx^2 + u^2z + vxu^2 + 4v^2x + 8yz + 4vyx + 4vz - 2uxz, \\ & u^3z + 2vyx^2 + 16vy^2 + 6v^2x^2 + 2z^2 + 8v^2y + uzx^2 + 4z^2 - 2u^2xz + 2vyu^2 \\ & + 12vzx - 4uvxy + 8uzv + 4vuz) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\mathbf{h}(P) = (1, 2, 3), \quad \Theta \mathbf{h}(P) = (2, 6, 12), \quad \Theta^2 \mathbf{h}(P) = (6, 24, 60)$$

olup, $\lambda(P) = \sqrt{14}$ alınırsa, arakesit eğrisinin P noktasındaki Frenet vektörleri

$$\mathbf{t}(P) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3), \quad \mathbf{n}(P) = \frac{\sqrt{266}}{266}(-11, -8, 9), \quad \mathbf{b}(P) = \left(\frac{3\sqrt{19}}{19}, -\frac{3\sqrt{19}}{19}, \frac{\sqrt{19}}{19} \right)$$

ve eğrilikleri

$$\kappa(P) = \frac{\sqrt{266}}{98}, \quad \tau(P) = \frac{3}{19}$$

olarak bulunur [27].

$\mathbb{E}^n$ 'DE KAPALI DENKLEMLERLE VERİLEN HİPERYÜZEYLERİN ARAKESİT PROBLEMİ

Bu ve bundan sonraki bölümler tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde $\mathbb{E}^n$ uzayında kapalı denklemleriyle verilen $n - 1$ tane hiperyüzeyin arakesit eğrisinin Frenet elemanlarının nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir. Eğriliklerin hesaplanmasında oluşabilecek dejenere durumlar incelenerek, elde edilen yöntemin kolay uygulanabilirliğini sağlamak için algoritmalar geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritmaya ait pseudo koduna yer verilerek çeşitli örneklerle desteklenmiştir.

Bu bölümde elde edilen sonuçlar [38] numaralı makalemizde yayımlanmıştır.

$\mathbb{E}^n$ uzayında $n - 1$ tane regüler hiperyüzey verilsin. Bu hiperyüzeylerin normal vektör alanları $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_{n-1}$ olmak üzere bir arakesit noktasında $\{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_{n-1}\}$ kümesi tarafından gerilen alt uzayın boyutunu d ile gösterelim. d 'nin alacağı değerlere bağlı olarak aşağıdaki arakesit problemleri ortaya çıkar:

- a) Eğer $d = 1$ ise, bütün hiperyüzeylerin teğet hiperdüzlemleri aynı olacağından arakesit noktasında teğetsel arakesit söz konusudur.
- b) Eğer $1 < d < n - 1$ oluyorsa, arakesit noktasında enine olmayan arakesit söz konusudur.
- c) Eğer $d = n - 1$ ise, arakesit noktasında enine arakesit söz konusudur.

Bu tezde hiperyüzeylerin enine arakesit problemi göz önüne alınacaktır. Verilen hiperyüzeylerin regüler bir eğri boyunca kesiştiğini kabul edeceğiz. Amacımız arakesit eğrisinin bütün Frenet vektörlerini ve eğriliklerini bulmak olacaktır. Bunu yapmak için vereceğimiz metot 3.1 bölümünde iki kapalı yüzeyin arakesiti için verilen Willmore metodunun genelleştirmesi olarak göz önüne alınabilir.

Tez boyunca geniş çaplı hesaplamalar MATLAB ortamında sembolik olarak hesaplanmıştır.

4.1 Kapalı Formda Verilen Hiperyüzeylerin Enine Arakesit Eğrisi

Enine kesişen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_{n-1}$ hiperyüzeylerinin kapalı denklemleri, sırasıyla, $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ olsun. Bu hiperyüzeylerin birim hızlı enine arakesit eğrisini $\beta(s) = (x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))$ ile gösterelim. β eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ olsun.

$\mathcal{M}_i$ hiperyüzeylerinin normal vektör alanları, sırasıyla, ∇f_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$ olup,

$$\mathcal{H} := \nabla f_1 \times \nabla f_2 \times \dots \times \nabla f_{n-1} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

vektörünü tanımlayalım. Burada $\mathcal{H}$ 'nin h_i bileşenlerinin $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlı olduğu açıktır. $\beta(s)$ arakesit eğrisinin $V_1(s)$ birim teğet vektörü hiperyüzey normallerine dik olacağından, hiperyüzey normallerinin vektörel çarpımına paralel olacaktır. Bu durumda $\mathcal{H} = \lambda V_1$ olup,

$$\lambda^2 = \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \quad \text{ve} \quad V_1 = \frac{\mathcal{H}}{\lambda}$$

yazılır. Ayrıca $\mathcal{H} = \lambda V_1 = \lambda \beta' = (\lambda x'_1, \lambda x'_2, \dots, \lambda x'_n)$ eşitliğinden $h_i = \lambda x'_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ elde edilir.

$$\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.1)$$

operatörünü tanımlayalım.

$\mathcal{H} = \lambda V_1$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta \mathcal{H} = \Delta(\lambda V_1) = \lambda \frac{d}{ds}(\lambda V_1) = \lambda \lambda' V_1 + \lambda^2 \kappa_1 V_2 \quad (4.2)$$

elde edilir. Burada Δ operatörünün $\mathcal{H} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ üzerine uygulanması demek her bir h_i bileşenine $\lambda \frac{d}{ds}$ veya $\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ operatörünün uygulanması demektir.

Eğer $\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ operatörü $\mathcal{H}$ üzerine uygulanırsa

$$\Delta \mathcal{H} = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial h_1}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial h_2}{\partial x_i}, \dots, \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial h_n}{\partial x_i} \right)$$

elde edilir. h_i , $i = 1, 2, \dots, n$ bileşenleri bilindiğinden $\Delta \mathcal{H}$ vektörünün her bir bileşeni $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlı olarak bulunabilir. Eğer $\lambda \frac{d}{ds}$ operatörü $\mathcal{H}$ üzerine

uygulanırsa

$$\Delta \mathcal{H} = \lambda (h'_1, h'_2, \dots, h'_n), \quad h'_i = \frac{\partial h_i}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial h_i}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial h_i}{\partial x_n} x'_n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

yazılabilir. Bu durumda $\Delta \mathcal{H}$ eşitliğinin her bir bileşeninde $\lambda x'_i$ yerine h_i yazılarak $\Delta \mathcal{H}$ vektörü $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlı olarak bulunur. Böylece her iki durumda da arakesit noktasında $\Delta \mathcal{H}$ hesaplanabilir.

(4.2) eşitliği, sırasıyla, $\mathbf{V}_1$ ve $\Delta \mathcal{H}$ ile iç çarpılırsa,

$$\lambda' = \frac{\langle \Delta \mathcal{H}, \mathbf{V}_1 \rangle}{\lambda}, \quad \langle \Delta \mathcal{H}, \Delta \mathcal{H} \rangle = (\lambda \lambda')^2 + \lambda^4 \kappa_1^2 \quad (4.3)$$

bulunur. Böylece arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$\kappa_1 = \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{\langle \Delta \mathcal{H}, \Delta \mathcal{H} \rangle - (\lambda \lambda')^2} \quad (4.4)$$

ile hesaplanır. $\kappa_1 \neq 0$ kabul edelim. Bu durumda λ' ve κ_1 değerleri (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{\lambda^2 \kappa_1} (\Delta \mathcal{H} - \lambda \lambda' \mathbf{V}_1) \quad (4.5)$$

ile bulunur.

$\Delta \mathcal{H} = \lambda \lambda' \mathbf{V}_1 + \lambda^2 \kappa_1 \mathbf{V}_2$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta^2 \mathcal{H} = \lambda ((\lambda')^2 \mathbf{V}_1 + \lambda (\lambda'' \mathbf{V}_1 + \lambda' \mathbf{V}'_1) + 2 \lambda \lambda' \kappa_1 \mathbf{V}_2 + \lambda^2 \kappa'_1 \mathbf{V}_2 + \lambda^2 (\kappa'_1 \mathbf{V}_2 + \kappa_1 \mathbf{V}'_2))$$

olup, Frenet formülleri kullanılırsa

$$\Delta^2 \mathcal{H} = (\lambda (\lambda')^2 + \lambda^2 \lambda'' - \lambda^3 \kappa_1^2) \mathbf{V}_1 + (3 \lambda^2 \lambda' \kappa_1 + \lambda^3 \kappa'_1) \mathbf{V}_2 + (\lambda^3 \kappa_1 \kappa_2) \mathbf{V}_3 \quad (4.6)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $g_j = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i}$, $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\Delta^2 \mathcal{H}$ vektörü

$$\Delta^2 \mathcal{H} = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial g_1}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial g_2}{\partial x_i}, \dots, \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial g_n}{\partial x_i} \right)$$

eşitliğinden bulunabilir.

(4.6) eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta^3 \mathcal{H} = & \lambda \left[((\lambda')^3 + 2\lambda\lambda'\lambda'' + 2\lambda\lambda'\lambda'' + \lambda^2\lambda'' - 3\lambda^2\lambda'\kappa_1^2 - 2\lambda^3\kappa_1\kappa_1')\mathbf{V}_1 \right. \\ & + (\lambda(\lambda')^2 + \lambda^2\lambda'' - \lambda^3\kappa_1^2)\mathbf{V}_1' \\ & + (6\lambda(\lambda')^2\kappa_1 + 3\lambda^2\lambda''\kappa_1 + 3\lambda^2\lambda'\kappa_1' + 3\lambda^2\lambda'\kappa_1' + \lambda^3\kappa_1'')\mathbf{V}_2 \\ & + (3\lambda^2\lambda'\kappa_1 + \lambda^3\kappa_1')\mathbf{V}_2' \\ & + (3\lambda^2\lambda'\kappa_1\kappa_2 + \lambda^3\kappa_1'\kappa_2 + \lambda^3\kappa_1\kappa_2')\mathbf{V}_3 \\ & \left. + (\lambda^3\kappa_1\kappa_2)\mathbf{V}_3' \right]\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Delta^3 \mathcal{H} = & (\lambda(\lambda')^3 + 4\lambda^2\lambda'\lambda'' + \lambda^3\lambda''' - 6\lambda^3\lambda'\kappa_1^2 - 3\lambda^4\kappa_1\kappa_1')\mathbf{V}_1 \\ & + (7(\lambda\lambda')^2\kappa_1 + 4\kappa_1\lambda^3\lambda'' + 6\lambda^3\lambda'\kappa_1' + \lambda^4\kappa_1'' - \kappa_1^3\lambda^4 - \lambda^4\kappa_1\kappa_2^2)\mathbf{V}_2 \\ & + (6\lambda^3\lambda'\kappa_1\kappa_2 + 2\lambda^4\kappa_1'\kappa_2 + \lambda^4\kappa_1\kappa_2')\mathbf{V}_3 \\ & + (\lambda^4\kappa_1\kappa_2\kappa_3)\mathbf{V}_4\end{aligned}\quad (4.7)$$

olur. (4.7) eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\Delta^4 \mathcal{H} = \{\dots\}\mathbf{V}_1 + \{\dots\}\mathbf{V}_2 + \{\dots\}\mathbf{V}_3 + \{\dots\}\mathbf{V}_4 + (\lambda^5\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4)\mathbf{V}_5 \quad (4.8)$$

elde edilir. Benzer şekilde her bir adımda bulunan eşitliklere Δ operatörü uygulanmaya devam edilirse

$$\Delta^{n-2} \mathcal{H} = \{\dots\}\mathbf{V}_1 + \{\dots\}\mathbf{V}_2 + \dots + \{\dots\}\mathbf{V}_{n-2} + \lambda^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \kappa_i \right) \mathbf{V}_{n-1} \quad (4.9)$$

şeklindedir. $\Delta \mathcal{H}$ ve $\Delta^2 \mathcal{H}$ vektörlerinin hesaplandığı gibi, $h_i = \lambda x_i'$ eşitliği kullanılarak $\Delta^i \mathcal{H}$, $1 \leq i \leq n-2$ vektörleri de hesaplanabilir. Böylece $\mathcal{H}, \Delta \mathcal{H}, \Delta^2 \mathcal{H}, \dots, \Delta^{n-2} \mathcal{H}$ vektörlerinin vektörel çarpımı alınır

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \times \Delta \mathcal{H} \times \Delta^2 \mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{n-2} \mathcal{H} &= \lambda \mathbf{V}_1 \times (\lambda^2 \kappa_1 \mathbf{V}_2) \times (\lambda^3 \kappa_1 \kappa_2 \mathbf{V}_3) \times \dots \times \left(\lambda^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \kappa_i \right) \mathbf{V}_{n-1} \right) \\ &= \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} (\kappa_1^{n-1} \kappa_2^{n-3} \dots \kappa_{n-2}) \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_{n-1}\end{aligned}$$

veya

$$\mathcal{H} \times \Delta \mathcal{H} \times \Delta^2 \mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{n-2} \mathcal{H} = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \kappa_i^{n-1-i} \right) \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_{n-1} \quad (4.10)$$

elde edilir. Burada $\kappa_i \neq 0, i = 2, 3, \dots, n-2$ kabul edelim. Bu durumda (4.10) eşitliğinin sağ tarafı sıfırdan farklı bir vektör olacağından $\{\mathcal{H}, \Delta\mathcal{H}, \Delta^2\mathcal{H}, \dots, \Delta^{n-2}\mathcal{H}\}$ kümesi lineer bağımsızdır. O halde (4.10) eşitliğinden

$$\mathbf{V}_n = \frac{\mathcal{H} \times \Delta\mathcal{H} \times \Delta^2\mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{n-2}\mathcal{H}}{\left\| \mathcal{H} \times \Delta\mathcal{H} \times \Delta^2\mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{n-2}\mathcal{H} \right\|} \quad (4.11)$$

bulunur. Burada $\mathbf{V}_n$ vektörünün $\mathcal{H}, \Delta\mathcal{H}, \Delta^2\mathcal{H}, \dots, \Delta^{n-2}\mathcal{H}$ vektörlerine dik olduğu açıktır. Bu ise $\{\mathcal{H}, \Delta\mathcal{H}, \Delta^2\mathcal{H}, \dots, \Delta^{n-2}\mathcal{H}, \mathbf{V}_n\}$ kümesinin lineer bağımsız olması demektir. O halde $\mathcal{H}, \Delta\mathcal{H}, \Delta^2\mathcal{H}, \dots, \Delta^{n-3}\mathcal{H}$ ve $\mathbf{V}_n$ vektörlerinin vektörel çarpımı kullanılarak

$$\mathbf{V}_{n-1} = \frac{\mathcal{H} \times \Delta\mathcal{H} \times \Delta^2\mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{n-3}\mathcal{H} \times \mathbf{V}_n}{\left\| \mathcal{H} \times \Delta\mathcal{H} \times \Delta^2\mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{n-3}\mathcal{H} \times \mathbf{V}_n \right\|} \quad (4.12)$$

elde edilir. Benzer şekilde, bulunan her Frenet vektörü ile geriye kalan Frenet vektörleri

$$\mathbf{V}_{n-2} = \frac{\mathcal{H} \times \Delta\mathcal{H} \times \Delta^2\mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{n-4}\mathcal{H} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1}}{\left\| \mathcal{H} \times \Delta\mathcal{H} \times \Delta^2\mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{n-4}\mathcal{H} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \right\|}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{V}_{n-3} = \frac{\mathcal{H} \times \Delta\mathcal{H} \times \Delta^2\mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{n-5}\mathcal{H} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \mathbf{V}_{n-2}}{\left\| \mathcal{H} \times \Delta\mathcal{H} \times \Delta^2\mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{n-5}\mathcal{H} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \mathbf{V}_{n-2} \right\|}, \quad (4.14)$$

⋮

$$\mathbf{V}_4 = \frac{\mathcal{H} \times \Delta\mathcal{H} \times \Delta^2\mathcal{H} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \dots \times \mathbf{V}_5}{\left\| \mathcal{H} \times \Delta\mathcal{H} \times \Delta^2\mathcal{H} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \dots \times \mathbf{V}_5 \right\|}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \mathbf{V}_{n-2} \times \dots \times \mathbf{V}_4 \times \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1 \quad (4.16)$$

şeklinde elde edilir. Böylece arakesit eğrisinin bütün Frenet vektörleri elde edildiğinden, arakesit eğrisinin bütün eğrilikleri hesaplanabilir.

(4.6) ve (4.16) eşitliklerinin iç çarpımı alınır

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2\mathcal{H}, \mathbf{V}_3 \rangle &= \langle (\lambda(\lambda')^2 + \lambda^2\lambda'' - \lambda^3\kappa_1^2)\mathbf{V}_1 + (3\lambda^2\lambda'\kappa_1 + \lambda^3\kappa_1')\mathbf{V}_2 + (\lambda^3\kappa_1\kappa_2)\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_3 \rangle \\ &= \lambda^3\kappa_1\kappa_2 \end{aligned}$$

yazılır. Buradan arakesit eğrisinin ikinci eğriliği

$$\kappa_2 = \frac{1}{\lambda^3\kappa_1} \langle \Delta^2\mathcal{H}, \mathbf{V}_3 \rangle \quad (4.17)$$

olarak bulunur. (4.7) ve (4.15) eşitliklerinin iç çarpımı alınır

$$\begin{aligned} \langle \Delta^3 \mathcal{H}, \mathbf{V}_4 \rangle = & \left(\lambda(\lambda')^3 + 4\lambda^2\lambda'\lambda'' + \lambda^3\lambda''' - 6\lambda^3\lambda'\kappa_1^2 - 3\lambda^4\kappa_1\kappa_1' \right) \mathbf{V}_1 + \left(7(\lambda\lambda')^2\kappa_1 + 4\kappa_1\lambda^3\lambda'' \right. \\ & + 6\lambda^3\lambda'\kappa_1' - \lambda^4\kappa_1'' - \kappa_1^3\lambda^4 - \lambda^4\kappa_1\kappa_2^2 \left. \right) \mathbf{V}_2 + \left(6\lambda^3\lambda'\kappa_1\kappa_2 + 2\lambda^4\kappa_1'\kappa_2 + \lambda^4\kappa_1\kappa_2' \right) \mathbf{V}_3 \\ & + \left(\lambda^4\kappa_1\kappa_2\kappa_3 \right) \mathbf{V}_4, \mathbf{V}_4 \rangle \end{aligned}$$

olup,

$$\langle \Delta^3 \mathcal{H}, \mathbf{V}_4 \rangle = \lambda^4 \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$$

elde edilir. Buradan arakesit eğrisinin üçüncü eğriliği

$$\kappa_3 = \frac{1}{\lambda^4 \kappa_1 \kappa_2} \langle \Delta^3 \mathcal{H}, \mathbf{V}_4 \rangle \quad (4.18)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde devam edilirse arakesit eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_i = \frac{1}{\lambda^{i+1} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \kappa_j \right)} \langle \Delta^i \mathcal{H}, \mathbf{V}_{i+1} \rangle, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (4.19)$$

şeklinde bulunur.

4.2 Dejenere Durumlar

Yukarıdaki bölümde arakesit eğrisinin Frenet vektörleri bulunurken (4.5) ve (4.11)-(4.16) denklemlerinde $\kappa_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n-2$ kabul edilmiştir. Eğer bazı eğrilikler sıfırsa bu formüller Frenet vektörlerini ve eğrilikleri elde etmek için kullanılamaz. Bu bölümde eğriliklerin sıfır olma durumu incelenecektir.

Bir arakesit noktasında $\kappa_1 = 0$ ise (4.5) denklemi ile $\mathbf{V}_2$ Frenet vektörü tanımlanamaz. Eğer $\kappa_1 \equiv 0$ ise arakesit eğrisi bir doğrudur, yani Frenet çatısı tanımlı değildir.

κ_1 eğriliğinin bir P arakesit noktasında sıfır olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.2) denkleminde

$$\Delta \mathcal{H} = \lambda \lambda' \mathbf{V}_1$$

olup, bu $\mathcal{H}(P)$ ve $\Delta \mathcal{H}(P)$ vektörlerinin lineer bağımlı olması demektir. Bunun yanı sıra $\kappa_1 = 0$ olması durumunda

$$\Delta^2 \mathcal{H} = \left(\lambda(\lambda')^2 + \lambda^2 \lambda'' \right) \mathbf{V}_1 + \left(\lambda^3 \kappa_1' \right) \mathbf{V}_2$$

yazılır. λ , λ' ve $\mathbf{V}_1$ bilindiğinden, $\langle \Delta^2 \mathcal{H}, \mathbf{V}_1 \rangle$ iç çarpımı ile λ'' ve $\langle \Delta^2 \mathcal{H}, \Delta^2 \mathcal{H} \rangle$ iç çarpımı

ile κ'_1 bulunur. Eğer $\kappa'_1 \neq 0$ ise $\mathbf{V}_2$ elde edilebilir. Eğer $\kappa_1 = \kappa'_1 = 0$ ise

$$\Delta^3 \mathcal{H} = (\lambda(\lambda')^3 + 4\lambda^2\lambda'\lambda'' + \lambda^3\lambda''')\mathbf{V}_1 + (\lambda^4\kappa''_1)\mathbf{V}_2$$

yazılır. Bu eşitlikten λ''' ve κ''_1 elde edilebilir. Eğer $\kappa''_1 \neq 0$ ise $\mathbf{V}_2$ elde edilir. Bu durum genelleştirilirse, eğer P noktasında $\kappa_1 = \kappa'_1 = \dots = \kappa_1^{(r-2)} = 0$ ve $\kappa_1^{(r-1)} \neq 0$ ise

$$\Delta^r \mathcal{H} = \eta \mathbf{V}_1 + (\lambda^{r+1}\kappa_1^{r-1})\mathbf{V}_2$$

yazılır. Burada η katsayısı λ ve λ' 'nin r -yinci dereceye kadar türevlerinden oluşur. Böylece $\Delta^r \mathcal{H}$ kullanılarak $\mathbf{V}_2$ bulunur.

Benzer şekilde κ_ℓ , $\ell = 2, 3, \dots, n-2$ eğriliklerinin P noktasında sıfır olduğunu kabul edelim (Eğer $\kappa_\ell \equiv 0$ ise arakesit eğrisi ℓ -boyutlu altuzayda yatar yani Frenet çatısı tanımlı değildir.)

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{H}, \Delta^r \mathcal{H}, \Delta^{r+j_1} \mathcal{H}, \Delta^{r+j_2} \mathcal{H}, \dots, \Delta^{r+j_{n-3}} \mathcal{H}\}, \quad j_1 = 1, 2, \dots, \quad j_1 < j_2 < \dots < j_{n-3}$$

kümesini göz önüne alalım. $\mathcal{S}$ kümesini P noktasında lineer bağımsız yapan j_i 'nin ilk değeri, sırasıyla, s_i , $i = 1, 2, \dots, n-3$ olsun. Bu durumda Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n &= \frac{\mathcal{H} \times \Delta^r \mathcal{H} \times \Delta^{r+s_1} \mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{r+s_{n-3}} \mathcal{H}}{\left\| \mathcal{H} \times \Delta^r \mathcal{H} \times \Delta^{r+s_1} \mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{r+s_{n-3}} \mathcal{H} \right\|}, \\ \mathbf{V}_{n-1} &= \frac{\mathcal{H} \times \Delta^r \mathcal{H} \times \Delta^{r+s_1} \mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{r+s_{n-4}} \mathcal{H} \times \mathbf{V}_n}{\left\| \mathcal{H} \times \Delta^r \mathcal{H} \times \Delta^{r+s_1} \mathcal{H} \times \dots \times \Delta^{r+s_{n-4}} \mathcal{H} \times \mathbf{V}_n \right\|} \\ &\vdots \\ \mathbf{V}_3 &= \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \mathbf{V}_{n-2} \times \dots \times \mathbf{V}_4 \times \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1 \end{aligned}$$

ile bulunur. Arakesit eğrisinin eğrilikleri için aşağıdaki durumlar geçerlidir:

- i. Eğer $s_1 = 1$ ve $s_{i+1} = s_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, n-4$ ise $\kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_{n-2}$ eğrilikleri P noktasında sıfır olmaz. Bu durumda bu eğrilikler, sırasıyla, $\langle \Delta^{r+1} \mathcal{H}, \mathbf{V}_3 \rangle$, $\langle \Delta^{r+2} \mathcal{H}, \mathbf{V}_4 \rangle, \dots, \langle \Delta^{r+n-3} \mathcal{H}, \mathbf{V}_{n-1} \rangle$ iç çarpımları ile hesaplanır. κ_{n-1} eğriliği $\langle \Delta^{r+n-2} \mathcal{H}, \mathbf{V}_n \rangle$ iç çarpımı ile hesaplanır.

ii. Eğer $s_i > 1$, $i = 1, 2, \dots, n-4$ ise bu durumda P noktasındaki eğrilikler

$$\begin{aligned} k_1 &= k'_1 = \dots = k_1^{(s_1-2)} = 0 \quad \text{ve} \quad k_1^{(s_1-1)} \neq 0, \\ k_2 &= k'_2 = \dots = k_2^{(s_2-2)} = 0 \quad \text{ve} \quad k_2^{(s_2-1)} \neq 0, \\ &\vdots \\ k_{n-2} &= k'_{n-2} = \dots = k_{n-2}^{(s_{n-2}-2)} = 0 \quad \text{ve} \quad k_{n-2}^{(s_{n-2}-1)} \neq 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki incelemeyi özel bir durum için örnekle açıklarsak, $\mathbb{E}^6$ Öklid uzayında

$$\kappa_1 = 0, \kappa'_1 \neq 0, \quad \kappa_2 = \kappa'_2 = 0, \kappa''_2 \neq 0, \quad \kappa_3 \neq 0, \quad \kappa_4 \neq 0$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathcal{H} &= (\lambda(\lambda')^2 + \lambda^2 \lambda'') \mathbf{V}_1 + (\lambda^3 \kappa'_1) \mathbf{V}_2 \\ \Delta^5 \mathcal{H} &= (\dots) \mathbf{V}_1 + (\dots) \mathbf{V}_2 + (4\lambda^6 \kappa'_1 \kappa''_2) \mathbf{V}_3 \\ \Delta^6 \mathcal{H} &= (\dots) \mathbf{V}_1 + (\dots) \mathbf{V}_2 + (\dots) \mathbf{V}_3 + (15\lambda^7 \kappa'_1 \kappa''_2 \kappa_3) \mathbf{V}_4 \\ \Delta^7 \mathcal{H} &= (\dots) \mathbf{V}_1 + (\dots) \mathbf{V}_2 + (\dots) \mathbf{V}_3 + (\dots) \mathbf{V}_4 + (36\lambda^8 \kappa'_1 \kappa''_2 \kappa_3 \kappa_4) \mathbf{V}_5 \end{aligned}$$

olacağından Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \frac{\mathcal{H}}{\lambda} \\ \mathbf{V}_2 &= \frac{1}{\lambda^3 \kappa'_1} \{ \Delta^2 \mathcal{H} - (\lambda(\lambda')^2 + \lambda^2 \lambda'') \mathbf{V}_1 \} \\ \mathbf{V}_6 &= \frac{\mathcal{H} \times \Delta^2 \mathcal{H} \times \Delta^5 \mathcal{H} \times \Delta^6 \mathcal{H} \times \Delta^7 \mathcal{H}}{\left\| \mathcal{H} \times \Delta^2 \mathcal{H} \times \Delta^5 \mathcal{H} \times \Delta^6 \mathcal{H} \times \Delta^7 \mathcal{H} \right\|} \\ \mathbf{V}_5 &= \frac{\mathcal{H} \times \Delta^2 \mathcal{H} \times \Delta^5 \mathcal{H} \times \Delta^6 \mathcal{H} \times \mathbf{V}_6}{\left\| \mathcal{H} \times \Delta^2 \mathcal{H} \times \Delta^5 \mathcal{H} \times \Delta^6 \mathcal{H} \times \mathbf{V}_6 \right\|} \\ \mathbf{V}_4 &= \frac{\mathcal{H} \times \Delta^2 \mathcal{H} \times \Delta^5 \mathcal{H} \times \mathbf{V}_6 \times \mathbf{V}_5}{\left\| \mathcal{H} \times \Delta^2 \mathcal{H} \times \Delta^5 \mathcal{H} \times \mathbf{V}_6 \times \mathbf{V}_5 \right\|} \\ \mathbf{V}_3 &= \mathbf{V}_6 \times \mathbf{V}_5 \times \mathbf{V}_4 \times \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1 \end{aligned}$$

eşitliklerinden bulunur. Sıfırdan farklı eğrilikler ise

$$\kappa_3 = \frac{1}{15\lambda^7 \kappa'_1 \kappa''_2} \langle \Delta^6 \mathcal{H}, \mathbf{V}_4 \rangle \quad \kappa_4 = \frac{1}{36\lambda^8 \kappa'_1 \kappa''_2 \kappa_3} \langle \Delta^7 \mathcal{H}, \mathbf{V}_5 \rangle$$

ile bulunur. Son eğrilik için

$$\kappa_5 = \frac{1}{70\lambda^9\kappa_1'\kappa_2''\kappa_3\kappa_4} \langle \Delta^8 \mathcal{H}, \mathbf{V}_6 \rangle$$

yazılabilir.

4.3 Kapalı Formda Verilen Hiperyüzeylerin Arakesit Problemleri

Arakesit eğrisinin Frenet vektörlerinin ve eğriliklerinin yüksek boyutlarda hesaplanması zordur. Bu nedenle yukarıda verdiğimiz yöntemi uygulamak için bir algoritma üretilmiş ve söz konusu algoritma için bir pseudo kod Ek-A kısmında verilmiştir.

4.3.1 $\mathbb{E}^4$ 'te Kapalı Formda Verilen Üç Hiperyüzeyin Arakesit Problemi

$\mathbb{E}^4$ uzayında

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + x_2^2 - x_1 = 0 \end{aligned}$$

denklemleriyle verilen hiperyüzeylerin arakesit eğrisinin $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ noktasındaki Frenet elemanları Aléssio [22] tarafından farklı bir yöntem kullanılarak verilmiştir. Bu bölümde, bu hiperyüzeylerin arakesit eğrisinin Frenet elemanları yukarıda verilen metotla yeniden bulunacaktır.

Verilen hiperyüzeylerin normal vektör alanları, sırasıyla,

$$\nabla f_1 = (2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4), \quad \nabla f_2 = (2x_1, 2x_2, 2x_3, -2x_4), \quad \nabla f_3 = (2x_1 - 1, 2x_2, 0, 0)$$

olup, bu hiperyüzeylerin P noktasında enine kesiştiği kolayca görülebilir. O halde

$$\mathcal{H} = \nabla f_1 \times \nabla f_2 \times \nabla f_3 = (-16x_2x_3x_4, 16x_1x_3x_4 - 8x_3x_4, 8x_2x_4, 0)$$

ve $h_1 = -16x_2x_3x_4$, $h_2 = 16x_1x_3x_4 - 8x_3x_4$, $h_3 = 8x_2x_4$, $h_4 = 0$ bulunur. Böylece

$$\mathcal{H}(P) = (-4\sqrt{2}, 0, 4, 0)$$

olup,

$$\lambda^2 = \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \implies \lambda^2(P) = \langle \mathcal{H}(P), \mathcal{H}(P) \rangle = 48$$

yani $\lambda(P) = \pm 4\sqrt{3}$ bulunur. $\lambda(P) = 4\sqrt{3}$ alalım. Bu durumda

$$\mathbf{v}_1(P) = \frac{\mathcal{H}(P)}{\lambda(P)} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$$

olarak bulunur.

$\mathcal{H} = (-16x_2x_3x_4, 16x_1x_3x_4 - 8x_3x_4, 8x_2x_4, 0)$ eşitliğine $\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = \sum_{i=1}^4 h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ operatörü uygulanırsa

$$\Delta \mathcal{H} = \lambda(-16x_2'x_3x_4 - 16x_2x_3'x_4 - 16x_2x_3x_4', 16x_1'x_3x_4 + 16x_1x_3'x_4 + 16x_1x_3x_4' - 8x_4x_3' - 8x_3x_4', 8x_2'x_4 + 8x_2x_4', 0)$$

veya

$$\Delta \mathcal{H} = (-16x_3x_4h_2 - 16x_2x_4h_3 - 16x_2x_3h_4, 16x_3x_4h_1 + 16x_1x_4h_3 + 16x_1x_3h_4 - 8x_4h_3 - 8x_3h_4, 8x_4h_2 + 8x_2h_4, 0)$$

elde edilir. $h_1 = -16x_2x_3x_4$, $h_2 = 16x_1x_3x_4 - 8x_3x_4$, $h_3 = 8x_2x_4$, $h_4 = 0$ değerleri son eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$\Delta \mathcal{H} = (-256x_1x_3^2x_4^2 + 128x_3^2x_4^2 - 128x_2^2x_4^2, -256x_2x_3^2x_4^2 + 128x_1x_2x_4^2 - 64x_2x_4^2, 128x_1x_3x_4^2 - 64x_3x_4^2, 0)$$

ve

$$\Delta \mathcal{H}(P) = (-32, -64, 0, 0)$$

olarak bulunur. $\lambda(P)\lambda'(P) = \langle \Delta \mathcal{H}(P), \mathbf{v}_1(P) \rangle$ olduğundan

$$\lambda'(P) = \frac{\left\langle (-32, -64, 0, 0), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right) \right\rangle}{4\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

olarak bulunur. Buradan arakesit eğrisinin birinci eğriligi

$$\begin{aligned} \kappa_1(P) &= \frac{1}{\lambda^2(P)} \sqrt{\langle \Delta \mathcal{H}(P), \Delta \mathcal{H}(P) \rangle - (\lambda(P)\lambda'(P))^2} \\ &= \frac{1}{(4\sqrt{3})^2} \sqrt{\langle (-32, -64, 0, 0), (-32, -64, 0, 0) \rangle - \left(4\sqrt{3} \left(\frac{8\sqrt{2}}{3} \right) \right)^2} = \frac{2\sqrt{39}}{9} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$\mathbf{v}_2(P) = \frac{1}{\lambda^2(P)\kappa_1(P)}(\Delta\mathcal{H}(P) - \lambda(P)\lambda'(P)\mathbf{v}_1(P))$$

olup, bulunan değerler yerine yazılırsa

$$\mathbf{v}_2(P) = \frac{1}{(4\sqrt{3})^2 \frac{2\sqrt{39}}{9}} \left[(-32, -64, 0, 0) - 4\sqrt{3} \left(\frac{8\sqrt{2}}{3} \right) \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right) \right]$$

veya

$$\mathbf{v}_2(P) = \left(-\frac{\sqrt{39}}{39}, -\frac{2\sqrt{39}}{39}, -\frac{\sqrt{78}}{39}, 0 \right)$$

olarak elde edilir. $\Delta\mathcal{H}$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta^2\mathcal{H} = & \lambda \left(-256x_1'x_3^2x_4^2 - 512x_1x_3x_3'x_4^2 - 512x_1x_3^2x_4x_4' + 256x_3x_3'x_4^2 + 256x_3^2x_4x_4' \right. \\ & - 256x_2x_2'x_4^2 - 256x_2^2x_4x_4', -256x_2'x_3^2x_4^2 - 512x_2x_3x_3'x_4^2 - 512x_2x_3^2x_4x_4' \\ & + 128x_1'x_2x_4^2 + 128x_1x_2'x_4^2 + 256x_1x_2x_4x_4' - 64x_2'x_4^2 - 128x_2x_4x_4', \\ & \left. + 128x_1'x_3x_4^2 + 128x_1x_3'x_4^2 + 256x_1x_3x_4x_4' - 64x_3'x_4^2 - 128x_3x_4x_4', 0 \right) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \Delta^2\mathcal{H} = & \left(-256x_3^2x_4^2h_1 - 512x_1x_3x_4^2h_3 - 512x_1x_3^2x_4h_4 + 256x_3x_4^2h_3 + 256x_3^2x_4h_4 \right. \\ & - 256x_2x_4^2h_2 - 256x_2^2x_4h_4, -256x_3^2x_4^2h_2 - 512x_2x_3x_4^2h_3 - 512x_2x_3^2x_4h_4 \\ & + 128x_2x_4^2h_1 + 128x_1x_4^2h_2 + 256x_1x_2x_4h_4 - 64x_4^2h_2 - 128x_2x_4h_4, \\ & \left. + 128x_3x_4^2h_1 + 128x_1x_4^2h_3 + 256x_1x_3x_4h_4 - 64x_4^2h_3 - 128x_3x_4h_4, 0 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. h_1, h_2, h_3, h_4 değerleri yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} \Delta^2\mathcal{H} = & \left(4096x_2x_3x_4^3 + 4096x_2x_3^3x_4^3 - 8192x_1x_2x_3x_4^3, 512x_3x_4^3 - 2048x_1x_3x_4^3 \right. \\ & 2048x_3^3x_4^3 - 4096x_1x_3^3x_4^3 - 6144x_2^2x_3x_4^3 + 2048x_1^2x_3x_4^3, -512x_2x_4^3 \\ & \left. - 2048x_2x_3^2x_4^3 + 1024x_1x_2x_4^3, 0 \right) \end{aligned}$$

olup,

$$\Delta^2\mathcal{H}(P) = (512\sqrt{2}, -768\sqrt{2}, -512, 0)$$

bulunur.

$\Delta^2 \mathcal{H}$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta^3 \mathcal{H} = & \lambda (4096x_2'x_3x_4^3 + 4096x_2x_3'x_4^3 + 12288x_2x_3x_4^2x_4' + 4096x_2'x_3^3x_4^3 \\ & + 12288x_2x_3^2x_4'x_4^3 + 12288x_2x_3^3x_4^2x_4' - 8192x_1'x_2x_3x_4^3 \\ & - 8192x_1x_2'x_3x_4^3 - 8192x_1x_2x_3'x_4^3 - 24576x_1x_2x_3x_4^2x_4', \\ & + 512x_3'x_4^3 + 1536x_3x_4^2x_4' - 2048x_1'x_3x_4^3 - 2048x_1x_3'x_4^3 \\ & - 6144x_1x_3x_4^2x_4' + 6144x_3^2x_4'x_4^3 + 6144x_3^3x_4^2x_4' - 4096x_1'x_3^3x_4^3 \\ & - 12288x_1x_3^2x_4'x_4^3 - 12288x_1x_3^3x_4^2x_4' - 12288x_2x_2'x_3x_4^3 \\ & - 6144x_2^2x_3'x_4^3 - 18432x_2^2x_3x_4^2x_4' + 4096x_1x_1'x_3x_4^3 \\ & + 2048x_1^2x_3'x_4^3 + 6144x_1^2x_3x_4^2x_4', -512x_2'x_4^3 - 1536x_2x_4^2x_4' \\ & - 2048x_2'x_3^2x_4^3 - 4096x_2x_3x_3'x_4^3 - 6144x_2x_3^2x_4^2x_4' \\ & + 1024x_1'x_2x_4^3 + 1024x_1x_2'x_4^3 + 3072x_1x_2x_4^2x_4', 0) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \Delta^3 \mathcal{H} = & (4096x_3x_4^3h_2 + 4096x_2x_4^3h_3 + 12288x_2x_3x_4^2h_4 + 4096x_3^3x_4^3h_2 \\ & + 12288x_2x_3^2x_4'x_4^3 + 12288x_2x_3^3x_4^2x_4' - 8192x_2x_3x_4^3h_1 \\ & - 8192x_1x_3x_4^3h_2 - 8192x_1x_2x_4^3h_3 - 24576x_1x_2x_3x_4^2h_4, \\ & + 512x_4^3h_3 + 1536x_3x_4^2h_4 - 2048x_3x_4^3h_1 - 2048x_1x_4^3h_3 \\ & - 6144x_1x_3x_4^2h_4 + 6144x_3^2x_4'x_4^3 + 6144x_3^3x_4^2x_4' - 4096x_3^3x_4^3h_1 \\ & - 12288x_1x_3^2x_4'x_4^3 - 12288x_1x_3^3x_4^2x_4' - 12288x_2x_3x_4^3h_2 \\ & - 6144x_2^2x_4'x_4^3 - 18432x_2^2x_3x_4^2h_4 + 4096x_1x_3x_4^3h_1 \\ & + 2048x_1^2x_4^3h_3 + 6144x_1^2x_3x_4^2h_4, -512x_4^3h_2 - 1536x_2x_4^2h_4 \\ & - 2048x_3^2x_4'x_4^3 - 4096x_2x_3x_4^3h_3 - 6144x_2x_3^2x_4^2h_4 \\ & + 1024x_2x_4^3h_1 + 1024x_1x_4^3h_2 + 3072x_1x_2x_4^2h_4, 0) \end{aligned}$$

olup, h_1, h_2, h_3, h_4 değerleri yerlerine yazılırsa P noktasında

$$\Delta^3 \mathcal{H}(P) = (28672, 2048, -6144\sqrt{2}, 0)$$

olarak elde edilir.

Şimdi arakesit eğrisinin Frenet vektörlerini hesaplayalım.

$\mathcal{H}(P), \Delta\mathcal{H}(P), \Delta^2\mathcal{H}(P)$ vektörlerinin vektörel çarpımı alınır

$$\mathcal{H}(P) \times \Delta\mathcal{H}(P) \times \Delta^2\mathcal{H}(P) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ -4\sqrt{2} & 0 & 4 & 0 \\ -32 & -64 & 0 & 0 \\ 512\sqrt{2} & -768\sqrt{2} & -512 & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\mathcal{H}(P) \times \Delta\mathcal{H}(P) \times \Delta^2\mathcal{H}(P) = (0, 0, 0, -98304\sqrt{2})$$

olup, $\|\mathcal{H}(P) \times \Delta\mathcal{H}(P) \times \Delta^2\mathcal{H}(P)\| = 98304\sqrt{2}$ bulunur. Böylece

$$\mathbf{V}_4(P) = \frac{\mathcal{H}(P) \times \Delta\mathcal{H}(P) \times \Delta^2\mathcal{H}(P)}{\|\mathcal{H}(P) \times \Delta\mathcal{H}(P) \times \Delta^2\mathcal{H}(P)\|}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\mathbf{V}_4(P) = (0, 0, 0, -1)$$

bulunur. Son olarak

$$\mathbf{V}_3(P) = \mathbf{V}_4(P) \times \mathbf{V}_2(P) \times \mathbf{V}_1(P)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\mathbf{V}_3(P) = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{26}}{13}, 0 \right)$$

elde edilir. Böylece arakesit eğrisinin ikinci eğriliği

$$\kappa_2(P) = \frac{1}{\lambda^3(P)\kappa_1(P)} \langle \Delta^2\mathcal{H}(P), \mathbf{V}_3(P) \rangle$$

eşitliğinden

$$\kappa_2(P) = -\frac{6\sqrt{2}}{13}$$

olarak bulunur. Arakesit eğrisinin üçüncü eğriliği ise

$$\kappa_3(P) = \frac{1}{\lambda^4(P)\kappa_1(P)\kappa_2(P)} \langle \Delta^3\mathcal{H}(P), \mathbf{V}_4(P) \rangle$$

eşitliğinden

$$\kappa_3(P) = 0$$

olarak bulunur. Elde edilen sonuçların [22]'de verilenlerle aynı olduğu görülmektedir.

4.3.2 $\mathbb{E}^6$ 'da Kapalı Formda Verilen Beş Hiperyüzeyin Arakesit Problemi

$\mathbb{E}^6$ uzayında

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= x_2 - x_1^2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= x_3 - x_1^3 = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= x_4 - x_1^4 = 0 \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= x_5 - x_1^5 = 0 \\ f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= x_6 - x_1^6 = 0 \end{aligned}$$

ile verilen hiperyüzeylerin arakesit eğrisinin $P = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım. Verilen hiperyüzeylerin normal vektör alanları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \nabla f_1 &= (-2x_1, 1, 0, 0, 0, 0) \\ \nabla f_2 &= (-3x_1^2, 0, 1, 0, 0, 0) \\ \nabla f_3 &= (-4x_1^3, 0, 0, 1, 0, 0) \\ \nabla f_4 &= (-5x_1^4, 0, 0, 0, 1, 0) \\ \nabla f_5 &= (-6x_1^5, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

olup,

$$\mathcal{H} = \nabla f_1 \times \nabla f_2 \times \nabla f_3 \times \nabla f_4 \times \nabla f_5 = (1, 2x_1, 3x_1^2, 4x_1^3, 5x_1^4, 6x_1^5)$$

bulunur. Böylece

$$\mathcal{H}(P) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

olup,

$$\lambda^2 = \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \implies \lambda^2(P) = \langle \mathcal{H}(P), \mathcal{H}(P) \rangle = 91$$

yani $\lambda(P) = \pm\sqrt{91}$ bulunur. $\lambda(P) = \sqrt{91}$ alalım. Bu durumda arakesit eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{v}_1(P) = \frac{\mathcal{H}(P)}{\lambda(P)} = \left(\frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{2\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91}, \frac{4\sqrt{91}}{91}, \frac{5\sqrt{91}}{91}, \frac{6\sqrt{91}}{91} \right)$$

olarak bulunur. $\mathcal{H} = (1, 2x_1, 3x_1^2, 4x_1^3, 5x_1^4, 6x_1^5)$ eşitliğine $\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = \sum_{i=1}^6 h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H} &= \lambda(0, 2x_1', 6x_1x_1', 12x_1^2x_1', 20x_1^3x_1', 30x_1^4x_1') \\ &= (0, 2h_1, 6x_1h_1, 12x_1^2h_1, 20x_1^3h_1, 30x_1^4h_1) \end{aligned}$$

veya $h_i, i = 1, 2, \dots, 6$ değerleri yerine yazılırsa

$$\Delta \mathcal{H} = (0, 2, 6x_1, 12x_1^2, 20x_1^3, 30x_1^4)$$

bulunur. Buradan

$$\Delta \mathcal{H}(P) = (0, 2, 6, 12, 20, 30)$$

olur. Böylece $\lambda'(P) = \frac{50}{13}, \kappa_1(P) = \frac{16\sqrt{91}}{1183}$ ve

$$V_2(P) = \left(-\frac{25\sqrt{91}}{728}, -\frac{37\sqrt{91}}{728}, -\frac{9\sqrt{91}}{182}, -\frac{11\sqrt{91}}{364}, \frac{5\sqrt{91}}{728}, \frac{45\sqrt{91}}{728} \right)$$

olarak elde edilir.

$\Delta \mathcal{H} = (0, 2, 6x_1, 12x_1^2, 20x_1^3, 30x_1^4)$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathcal{H} &= \lambda(0, 0, 6x'_1, 24x_1x'_1, 60x_1^2x'_1, 120x_1^3x'_1) \\ &= (0, 0, 6h_1, 24x_1h_1, 60x_1^2h_1, 120x_1^3h_1) \end{aligned}$$

olup,

$$\Delta^2 \mathcal{H} = (0, 0, 6, 24x_1, 60x_1^2, 120x_1^3)$$

bulunur. Bu durumda

$$\Delta^2 \mathcal{H}(P) = (0, 0, 6, 24, 60, 120)$$

olarak elde edilir. $\Delta^2 \mathcal{H} = (0, 0, 6, 24x_1, 60x_1^2, 120x_1^3)$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta^3 \mathcal{H} &= \lambda(0, 0, 0, 24x'_1, 120x_1x'_1, 360x_1^2x'_1) \\ &= (0, 0, 0, 24h_1, 120x_1h_1, 360x_1^2h_1) \end{aligned}$$

olup,

$$\Delta^3 \mathcal{H} = (0, 0, 0, 24, 120x_1, 360x_1^2)$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta^3 \mathcal{H}(P) = (0, 0, 0, 24, 120, 360)$$

olarak bulunur. $\Delta^3 \mathcal{H} = (0, 0, 0, 24, 120x_1, 360x_1^2)$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta^4 \mathcal{H} &= \lambda(0, 0, 0, 0, 120x'_1, 720x_1x'_1) \\ &= (0, 0, 0, 0, 120h_1, 720x_1h_1) \end{aligned}$$

olup,

$$\Delta^4 \mathcal{H} = (0, 0, 0, 0, 120, 720x_1)$$

bulunur. Buradan

$$\Delta^4 \mathcal{H}(P) = (0, 0, 0, 0, 120, 720)$$

elde edilir. $\Delta^4 \mathcal{H} = (0, 0, 0, 0, 120, 720x_1)$ eşitliğine Δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta^5 \mathcal{H} &= \lambda(0, 0, 0, 0, 0, 720x'_1) \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, 720h_1) \end{aligned}$$

olup,

$$\Delta^5 \mathcal{H}(P) = (0, 0, 0, 0, 0, 720)$$

bulunur.

Şimdi Frenet vektörlerini hesaplayalım. $\mathcal{H}(P), \Delta \mathcal{H}(P), \Delta^2 \mathcal{H}(P), \Delta^3 \mathcal{H}(P), \Delta^4 \mathcal{H}(P)$ vektörlerinin vektörel çarpımı alınarak

$$\mathbf{V}_6(P) = \frac{\mathcal{H}(P) \times \Delta \mathcal{H}(P) \times \Delta^2 \mathcal{H}(P) \times \Delta^3 \mathcal{H}(P) \times \Delta^4 \mathcal{H}(P)}{\left\| \mathcal{H}(P) \times \Delta \mathcal{H}(P) \times \Delta^2 \mathcal{H}(P) \times \Delta^3 \mathcal{H}(P) \times \Delta^4 \mathcal{H}(P) \right\|}$$

yazılır.

$$\mathcal{H}(P) \times \Delta \mathcal{H}(P) \times \Delta^2 \mathcal{H}(P) \times \Delta^3 \mathcal{H}(P) \times \Delta^4 \mathcal{H}(P) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 60 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 120 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 720 \end{vmatrix}$$

olup,

$$\mathcal{H}(P) \times \Delta \mathcal{H}(P) \times \cdots \times \Delta^4 \mathcal{H}(P) = (207360, -518400, 691200, -518400, 207360, -34560)$$

ve

$$\mathbf{V}_6(P) = \frac{\sqrt{923}}{923} (6, -15, 20, -15, 6, -1)$$

bulunur. $\mathcal{H}(P), \Delta \mathcal{H}(P), \Delta^2 \mathcal{H}(P), \Delta^3 \mathcal{H}(P)$ ve $\mathbf{V}_6(P)$ vektörlerinin vektörel çarpımı

kullanılırsa

$$\mathbf{V}_5(P) = \frac{\mathcal{H}(P) \times \Delta \mathcal{H}(P) \times \Delta^2 \mathcal{H}(P) \times \Delta^3 \mathcal{H}(P) \times \mathbf{V}_6(P)}{\left\| \mathcal{H}(P) \times \Delta \mathcal{H}(P) \times \Delta^2 \mathcal{H}(P) \times \Delta^3 \mathcal{H}(P) \times \mathbf{V}_6(P) \right\|}$$

olup,

$$\mathbf{V}_5(P) = \frac{\sqrt{1729}}{1729} \frac{\sqrt{71}}{71} \left(-\frac{1849}{12}, \frac{2315}{12}, -\frac{5}{6}, -\frac{575}{3}, \frac{12901}{84}, -\frac{461}{12} \right)$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse

$$\mathbf{V}_4(P) = \frac{\mathcal{H}(P) \times \Delta \mathcal{H}(P) \times \Delta^2 \mathcal{H}(P) \times \mathbf{V}_6(P) \times \mathbf{V}_5(P)}{\left\| \mathcal{H}(P) \times \Delta \mathcal{H}(P) \times \Delta^2 \mathcal{H}(P) \times \mathbf{V}_6(P) \times \mathbf{V}_5(P) \right\|}$$

eşitliğinden

$$\mathbf{V}_4(P) = \frac{\sqrt{1729}}{1729} \left(-\frac{99}{4}, \frac{17}{4}, \frac{41}{2}, 3, -\frac{85}{4}, \frac{41}{4} \right)$$

bulunur. Buradan

$$\mathbf{V}_3(P) = \mathbf{V}_6(P) \times \mathbf{V}_5(P) \times \mathbf{V}_4(P) \times \mathbf{V}_2(P) \times \mathbf{V}_1(P)$$

ve

$$\mathbf{V}_3(P) = \left(-\frac{47\sqrt{13}}{312}, -\frac{35\sqrt{13}}{312}, \frac{\sqrt{13}}{78}, \frac{19\sqrt{13}}{156}, \frac{35\sqrt{13}}{312}, -\frac{37\sqrt{13}}{312} \right)$$

elde edilir. Böylece arakesit eğrisinin ikinci eğriliği

$$\kappa_2(P) = \frac{1}{\lambda^3(P)\kappa_1(P)} \langle \Delta^2 \mathcal{H}(P), \mathbf{V}_3(P) \rangle$$

eşitliğinden

$$\kappa_2(P) = -\frac{9\sqrt{637}}{1568}$$

olarak bulunur. Arakesit eğrisinin üçüncü eğriliği

$$\kappa_3(P) = \frac{1}{\lambda^4(P)\kappa_1(P)\kappa_2(P)} \langle \Delta^3 \mathcal{H}(P), \mathbf{V}_4(P) \rangle$$

eşitliğinden

$$\kappa_3(P) = -\frac{\sqrt{13}\sqrt{91}\sqrt{3302208}\sqrt{1588543488}}{17579304288} = -0.1417073$$

olarak bulunur. Arakesit eğrisinin dördüncü eğriliği

$$\kappa_4(P) = \frac{1}{\lambda^5(P)\kappa_1(P)\kappa_2(P)\kappa_3(P)} \langle \Delta^4 \mathcal{H}(P), \mathbf{V}_5(P) \rangle$$

eşitliğinden

$$\kappa_4(P) = -\frac{\sqrt{91}\sqrt{332208}\sqrt{1102425292800}}{144557457408} = -0.12590906$$

elde edilir. Son olarak arakesit eğrisinin beşinci eğriliği için

$$\kappa_5(P) = \frac{1}{\lambda^6(P)\kappa_1(P)\kappa_2(P)\kappa_3(P)\kappa_4(P)} \langle \Delta^5 \mathcal{H}(P), \mathbf{V}_6(P) \rangle$$

olup,

$$\kappa_5(P) = \frac{\sqrt{91}\sqrt{1588543488}}{4031664} = 0.0943052$$

olarak elde edilir.

4.3.3 $\mathbb{E}^8$ 'de Kapalı Formda Verilen Yedi Hiperyüzeyin Arakesit Problemi

$\mathbb{E}^8$ uzayında

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= 3x_6 - x_8 - x_1^4 - x_2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= 3x_2 - 2x_6 - x_7^2 = 0, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= x_3 - x_1^3 = 0, \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= x_7 - 3x_5 + 2x_3^2 = 0, \\ f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= x_6 - x_3 = 0, \\ f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= 4x_2^2 - x_8 - 3x_4 = 0, \\ f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= x_5^3 - 4x_3 + 3x_1 = 0 \end{aligned}$$

hiperyüzeylerin arakesit eğrisinin $P = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım. Verilen hiperyüzeylerin normal vektör alanları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \nabla f_1 &= (-4x_1^3, -1, 0, 0, 0, 3, 0, -1) \\ \nabla f_2 &= (0, 3, 0, 0, 0, -2, -2x_7, 0) \\ \nabla f_3 &= (-3x_1^2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \nabla f_4 &= (0, 0, 4x_3, 0, -3, 0, 1, 0) \\ \nabla f_5 &= (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla f_6 &= (0, 8x_2, 0, -3, 0, 0, 0, -1) \\ \nabla f_7 &= (3, 0, -4, 0, 3x_5^2, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

olup, $\mathcal{H} = \nabla f_1 \times \nabla f_2 \times \nabla f_3 \times \nabla f_4 \times \nabla f_5 \times \nabla f_6 \times \nabla f_7$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & (-27x_5^2, 54x_7 - 54x_1^2x_5^2 - 216x_1^2x_7 + 216x_1^2x_3x_5^2x_7, -81x_1^2x_5^2, 18x_7 + 63x_1^2x_5^2 \\ & - 36x_1^3x_5^2 + 144x_2x_7 - 72x_1^2x_7 - 576x_1^2x_2x_7 - 144x_1^2x_2x_5^2 + 72x_1^2x_3x_5^2x_7 \\ & + 576x_1^2x_2x_3x_5^2x_7, 27 - 108x_1^2, -81x_1^2x_5^2, 324x_3x_1^2x_5^2 - 324x_1^2 + 81, 108x_1^3x_5^2 \\ & - 189x_1^2x_5^2 - 54x_7 + 216x_1^2x_7 - 216x_1^2x_3x_5^2x_7)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\mathcal{H}(P) = (-27, 0, -81, 45, -81, -81, 81, -135)$$

olup,

$$\lambda^2 = \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \implies \lambda^2(P) = \langle \mathcal{H}(P), \mathcal{H}(P) \rangle = 47223$$

yani $\lambda(P) = \pm 9\sqrt{583}$ bulunur. $\lambda(P) = 9\sqrt{583}$ alalım. Bu durumda

$$\mathbf{v}_1(P) = \frac{\mathcal{H}(P)}{\lambda(P)} = \frac{1}{\sqrt{583}}(-3, 0, -9, 5, -9, -9, 9, -15)$$

olarak bulunur. $\mathcal{H}$ vektörüne $\Delta = \lambda \frac{d}{ds} = \sum_{i=1}^8 h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{H} = & \lambda \left(-54x_5x_5', 54x_7' - 108x_1x_1'x_5^2 - 108x_1^2x_5x_5' - 432x_1x_1'x_7 - 216x_1^2x_7' \right. \\ & + 432x_1x_1'x_3x_5^2x_7 + 216x_1^2x_3'x_5^2x_7 + 432x_1^2x_3x_5x_5'x_7 + 216x_1^2x_3x_5^2x_7', \\ & - 162x_1x_1'x_5^2 - 162x_1^2x_5x_5', 18x_7' + 126x_1x_1'x_5^2 + 126x_1^2x_5x_5' \\ & - 108x_1^2x_1'x_5^2 - 72x_1^3x_5x_5' + 144x_2'x_7 + 144x_2x_7' - 144x_1x_1'x_7 - 72x_1^2x_7' \\ & - 1152x_1x_1'x_2x_7 - 576x_1^2x_2'x_7 - 576x_1^2x_2x_7' - 288x_1x_1'x_2x_5^2 - 144x_1^2x_2'x_5^2 \\ & - 288x_1^2x_2x_5x_5' + 144x_1x_1'x_3x_5^2x_7 + 72x_1^2x_3'x_5^2x_7 + 144x_1^2x_3x_5x_5'x_7 \\ & + 72x_1^2x_3x_5^2x_7' + 1152x_1x_1'x_2x_3x_5^2x_7 + 576x_1^2x_2'x_3x_5^2x_7 + 576x_1^2x_2x_3'x_5^2x_7 \\ & + 1152x_1^2x_2x_3x_5x_5'x_7 + 576x_1^2x_2x_3x_5^2x_7', -216x_1x_1', -162x_1x_1'x_5^2 \\ & - 162x_1^2x_5x_5', 324x_3'x_1^2x_5^2 + 648x_3x_1x_1'x_5^2 + 648x_3x_1^2x_5x_5' - 648x_1x_1', \\ & + 324x_1^2x_1'x_5^2 + 216x_1^3x_5x_5' - 378x_1x_1'x_5^2 - 378x_1^2x_5x_5' - 54x_7' + 432x_1x_1'x_7 \\ & \left. + 216x_1^2x_7' - 432x_1x_1'x_3x_5^2x_7 - 216x_1^2x_3'x_5^2x_7 - 432x_1^2x_3x_5x_5'x_7 - 216x_1^2x_3x_5^2x_7' \right)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{H} = & \left(-54x_5h_5, 54h_7 - 108x_1x_5^2h_1 - 108x_1^2x_5h_5 - 432x_1x_7h_1 - 216x_1^2h_7 \right. \\ & + 432x_1x_3x_5^2x_7h_1 + 216x_1^2x_5^2x_7h_3 + 432x_1^2x_3x_5x_7h_5 + 216x_1^2x_3x_5^2h_7, \\ & - 162x_1x_5^2h_1 - 162x_1^2x_5h_5, 18h_7 + 126x_1x_5^2h_1 + 126x_1^2x_5h_5 \\ & - 108x_1^2x_5^2h_1 - 72x_1^3x_5h_5 + 144x_7h_2 + 144x_2h_7 - 144x_1x_7h_1 - 72x_1^2h_7 \\ & - 1152x_1x_2x_7h_1 - 576x_1^2x_7h_2 - 576x_1^2x_2h_7 - 288x_1x_2x_5^2h_1 - 144x_1^2x_5^2h_2 \\ & - 288x_1^2x_2x_5h_5 + 144x_1x_3x_5^2x_7h_1 + 72x_1^2x_5^2x_7h_3 + 144x_1^2x_3x_5x_7h_5 \\ & + 72x_1^2x_3x_5^2h_7 + 1152x_1x_2x_3x_5^2x_7h_1 + 576x_1^2x_3x_5^2x_7h_2 + 576x_1^2x_2x_5^2x_7h_3 \\ & + 1152x_1^2x_2x_3x_5x_7h_5 + 576x_1^2x_2x_3x_5^2h_7, -216x_1h_1, -162x_1x_5^2h_1 \\ & - 162x_1^2x_5h_5, 324x_1^2x_5^2h_3 + 648x_3x_1x_5^2h_1 + 648x_3x_1^2x_5h_5 - 648x_1h_1, \\ & + 324x_1^2x_5^2h_1 + 216x_1^3x_5h_5 - 378x_1x_5^2h_1 - 378x_1^2x_5h_5 - 54h_7 + 432x_1x_7h_1 \\ & \left. + 216x_1^2h_7 - 432x_1x_3x_5^2x_7h_1 - 216x_1^2x_5^2x_7h_3 - 432x_1^2x_3x_5x_7h_5 - 216x_1^2x_3x_5^2h_7 \right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{H} = & \left(5832x_1^2x_5 - 1458x_5, 69984x_1^4 - 34992x_1^2 - 2916x_1^2x_5 + 2916x_1x_5^4 + 11664x_1^4x_5 \right. \\ & + 69984x_1^4x_3^2x_5^4 + 11664x_1x_5^2x_7 + 34992x_1^2x_3x_5^2 - 139968x_1^4x_3x_5^2 - 17496x_1^4x_5^4x_7 \\ & + 11664x_1^2x_3x_5x_7 - 11664x_1x_3x_5^4x_7 - 46656x_1^4x_3x_5x_7 + 4374, 4374x_1x_5^4 \\ & + 17496x_1^4x_5 - 4374x_1^2x_5, 11664x_2 - 11664x_1^2 + 23328x_1^4 + 7776x_7^2 - 93312x_1^2x_2 \\ & + 186624x_1^4x_2 + 3402x_1^2x_5 - 1944x_1^3x_5 - 3402x_1x_5^4 - 13608x_1^4x_5 + 7776x_1^5x_5 \\ & + 2916x_1^2x_5^4 - 62208x_1^2x_7^2 + 7776x_1^4x_5^4 + 124416x_1^4x_7^2 + 23328x_1^4x_3^2x_5^4 \\ & - 7776x_1^2x_2x_5 + 7776x_1x_2x_5^4 + 31104x_1^4x_2x_5 + 3888x_1x_5^2x_7 + 11664x_1^2x_3x_5^2 \\ & - 46656x_1^4x_3x_5^2 - 15552x_1^2x_5^2x_7 + 62208x_1^4x_5^2x_7 - 5832x_1^4x_5^4x_7 \\ & + 186624x_1^4x_2x_3^2x_5^4 + 62208x_1^2x_3x_5^2x_7^2 - 248832x_1^4x_3x_5^2x_7^2 + 3888x_1^2x_3x_5x_7 \\ & - 3888x_1x_3x_5^4x_7 - 15552x_1^4x_3x_5x_7 + 124416x_1^4x_3^2x_5^4x_7^2 + 93312x_1^2x_2x_3x_5^2 \\ & - 373248x_1^4x_2x_3x_5^2 - 46656x_1^4x_2x_5^4x_7 - 62208x_1^4x_3x_5^4x_7 + 31104x_1^2x_2x_3x_5x_7 \\ & - 31104x_1x_2x_3x_5^4x_7 - 124416x_1^4x_2x_3x_5x_7 + 1458, 5832x_1x_5^2, 4374x_1x_5^4 \\ & + 17496x_1^4x_5 - 4374x_1^2x_5, 17496x_1x_5^2 - 26244x_1^4x_5^4 - 17496x_1x_3x_5^4 \\ & - 69984x_1^4x_3x_5 + 17496x_1^2x_3x_5, 34992x_1^2 - 69984x_1^4 - 10206x_1^2x_5 + 5832x_1^3x_5 \\ & + 10206x_1x_5^4 + 40824x_1^4x_5 - 23328x_1^5x_5 - 8748x_1^2x_5^4 - 69984x_1^4x_3^2x_5^4 \\ & - 11664x_1x_5^2x_7 - 34992x_1^2x_3x_5^2 + 139968x_1^4x_3x_5^2 + 17496x_1^4x_5^4x_7 \\ & \left. - 11664x_1^2x_3x_5x_7 + 11664x_1x_3x_5^4x_7 + 46656x_1^4x_3x_5x_7 - 4374 \right)\end{aligned}$$

olup,

$$\Delta\mathcal{H}(P) = (4374, -36450, 17496, -118098, 5832, 17496, -78732, 62694)$$

ve

$$\lambda'(P) = -\frac{291114}{583}$$

olarak bulunur. Arakesit eğrisinin birinci eğriligi

$$\kappa_1(P) = 2.531929$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$\mathbf{V}_2(P) = \frac{1}{\lambda^2(P)\kappa_1(P)}(\Delta\mathcal{H}(P) - \lambda(P)\lambda'(P)\mathbf{V}_1(P))$$

olup, bulunan değerler yerine yazılırsa

$$\mathbf{V}_2(P) = (-0.076176, -0.304854, -0.191948, -0.799795, -0.289501, -0.191948, -0.320206, -0.039448)$$

olarak elde edilir. $\Delta\mathcal{H}$ vektörüne Δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta^2\mathcal{H} = & \lambda(5832x_1^2x_5' - 1458x_5' + 11664x_1x_5x_1', 279936x_1^3x_1' - 69984x_1x_1' - 2916x_1^2x_5' \\ & + 11664x_1^4x_5' + 2916x_5^4x_1' + 46656x_1^3x_5x_1' + 11664x_1x_5^3x_5' + 11664x_1x_5^2x_7' \\ & + 11664x_5^2x_7x_1' + 34992x_1^2x_5^2x_3' - 139968x_1^4x_5^2x_3' - 17496x_1^4x_5^4x_7' \\ & - 5832x_1x_5x_1' + 279936x_1^3x_3^2x_5^4x_1' + 279936x_1^4x_3^2x_5^3x_5' + 69984x_1x_3x_5^2x_1' \\ & + 69984x_1^2x_3x_5x_5' + 11664x_1^2x_3x_5x_7' + 11664x_1^2x_3x_7x_5' + 11664x_1^2x_5x_7x_3' \\ & - 279936x_1^4x_3x_5x_5' - 11664x_1x_3x_5^4x_7' - 11664x_1x_5^4x_7x_3' - 11664x_3x_5^4x_7x_1' \\ & - 46656x_1^4x_3x_5x_7' - 46656x_1^4x_3x_7x_5' - 46656x_1^4x_5x_7x_3' - 559872x_1^3x_3x_5^2x_1' \\ & + 139968x_1^4x_3x_5^4x_3' - 69984x_1^3x_5^4x_7x_1' - 69984x_1^4x_5^3x_7x_5' + 23328x_1x_5x_7x_5' \\ & - 186624x_1^3x_3x_5x_7x_1' - 46656x_1x_3x_5^3x_7x_5' + 23328x_1x_3x_5x_7x_1', 4374x_5^4x_1' \\ & + 34992x_1^3x_5x_1' + 17496x_1x_5^3x_5' + 17496x_1^4x_5' - 4374x_1^2x_5' + 34992x_1^3x_5x_1' \\ & - 8748x_1x_5x_1', 15552x_7x_7' - 23328x_1x_1' - 93312x_1^2x_2' + 93312x_1^3x_1' \\ & + 186624x_1^4x_2' + 3402x_1^2x_5' - 1944x_1^3x_5' - 13608x_1^4x_5' - 3402x_5^4x_1' + 7776x_1^5x_5' \\ & + 11664x_2' + 746496x_1^3x_2x_1' - 5832x_1^2x_5x_1' - 7776x_1^2x_2x_5' - 7776x_1^2x_5x_2' \\ & - 54432x_1^3x_5x_1' + 5832x_1x_5^4x_1' - 124416x_1x_7^2x_1' + 38880x_1^4x_5x_1' + 7776x_1x_5^4x_2' \\ & + 7776x_2x_5^4x_1' + 31104x_1^4x_2x_5' + 31104x_1^4x_5x_2' - 13608x_1x_5^3x_5' + 3888x_1x_5^2x_7' \\ & + 3888x_5^2x_7x_1' - 124416x_1^2x_7x_7' + 248832x_1^4x_7x_7' + 11664x_1^2x_5^2x_3' + 31104x_1^3x_5^4x_1')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 497664x_1^3x_7^2x'_1 - 46656x_1^4x_5^2x'_3 + 11664x_1^2x_5^3x'_5 - 15552x_1^2x_5^2x'_7 + 31104x_1^4x_5^3x'_5 \\
& + 62208x_1^4x_5^2x'_7 - 5832x_1^4x_5^4x'_7 - 186624x_1x_2x'_1 + 6804x_1x_5x'_1 + 93312x_1^3x_3^2x_5^4x'_1 \\
& + 186624x_1^4x_3^2x_5^4x'_2 + 62208x_1^2x_5^2x_7^2x'_3 + 93312x_1^4x_3^2x_5^3x'_5 - 248832x_1^4x_5^2x_7^2x'_3 \\
& + 23328x_1x_3x_5^2x'_1 + 124416x_1^3x_2x_5x'_1 + 31104x_1x_2x_5^3x'_5 - 31104x_1x_5^2x_7x'_1 \\
& + 23328x_1^2x_3x_5x'_5 + 31104x_1x_2x_5^2x'_7 + 31104x_1x_5^2x_7x'_2 + 31104x_2x_5^2x_7x'_1 \\
& + 3888x_1^2x_3x_5x'_7 + 3888x_1^2x_3x_7x'_5 + 3888x_1^2x_5x_7x'_3 - 93312x_1^4x_3x_5x'_5 \\
& - 3888x_1x_3x_5^4x'_7 - 3888x_1x_5^4x_7x'_3 - 3888x_3x_5^4x_7x'_1 - 31104x_1^2x_5x_7x'_5 \\
& - 15552x_1^4x_3x_5x'_7 - 15552x_1^4x_3x_7x'_5 - 15552x_1^4x_5x_7x'_3 + 124416x_1^4x_5x_7x'_5 \\
& + 93312x_1^2x_2x_5^2x'_3 + 93312x_1^2x_3x_5^2x'_2 - 186624x_1^3x_3x_5^2x'_1 - 373248x_1^4x_2x_5^2x'_3 \\
& - 373248x_1^4x_3x_5^2x'_2 + 248832x_1^3x_5^2x_7x'_1 + 46656x_1^4x_3x_5^4x'_3 - 23328x_1^3x_5^4x_7x'_1 \\
& - 46656x_1^4x_2x_5^4x'_7 - 46656x_1^4x_5^4x_7x'_2 - 62208x_1^4x_3x_5^4x'_7 - 62208x_1^4x_5^4x_7x'_3 \\
& - 23328x_1^4x_5^3x_7x'_5 - 15552x_1x_2x_5x'_1 + 7776x_1x_5x_7x'_5 + 186624x_1x_2x_3x_5^2x'_1 \\
& + 186624x_1^2x_2x_3x_5x'_5 + 31104x_1^2x_2x_3x_5x'_7 + 31104x_1^2x_2x_3x_7x'_5 + 31104x_1^2x_2x_5x_7x'_3 \\
& + 31104x_1^2x_3x_5x_7x'_2 - 62208x_1^3x_3x_5x_7x'_1 - 746496x_1^4x_2x_3x_5x'_5 - 31104x_1x_2x_3x_5^4x'_7 \\
& - 31104x_1x_2x_5^4x_7x'_3 - 31104x_1x_3x_5^4x_7x'_2 - 31104x_2x_3x_5^4x_7x'_1 - 124416x_1^4x_2x_3x_5x'_7 \\
& - 124416x_1^4x_2x_3x_7x'_5 - 124416x_1^4x_2x_5x_7x'_3 - 124416x_1^4x_3x_5x_7x'_2 - 15552x_1x_3x_5^3x_7x'_5 \\
& + 497664x_1^3x_3^2x_5^4x_7^2x'_1 + 497664x_1^4x_3^2x_5^3x_7^2x'_5 - 1492992x_1^3x_2x_3x_5^2x'_1 + 124416x_1x_3x_5^2x_7^2x'_1 \\
& + 373248x_1^4x_2x_3x_5^4x'_3 - 186624x_1^3x_2x_5^4x_7x'_1 - 248832x_1^3x_3x_5^4x_7x'_1 + 124416x_1^2x_3x_5x_7^2x'_5 \\
& + 124416x_1^2x_3x_5^2x_7x'_7 - 186624x_1^4x_2x_5^3x_7x'_5 - 497664x_1^4x_3x_5x_7^2x'_5 - 248832x_1^4x_3x_5^3x_7x'_5 \\
& - 497664x_1^4x_3x_5^2x_7x'_7 + 7776x_1x_3x_5x_7x'_1 + 62208x_1x_2x_5x_7x'_5 + 746496x_1^3x_2x_3^2x_5^4x'_1 \\
& - 995328x_1^3x_3x_5^2x_7^2x'_1 + 746496x_1^4x_2x_3^2x_5^3x'_5 + 248832x_1^4x_3x_5^4x_7^2x'_3 + 248832x_1^4x_3^2x_5^4x_7x'_7 \\
& - 497664x_1^3x_2x_3x_5x_7x'_1 - 124416x_1x_2x_3x_5^3x_7x'_5 + 62208x_1x_2x_3x_5x_7x'_1, 5832x_5^2x'_1 \\
& + 11664x_1x_5x'_5, 4374x_5^4x'_1 + 34992x_1^3x_5x'_1 + 17496x_1x_5^3x'_5 + 17496x_1^4x'_5 - 4374x_1^2x'_5 \\
& + 34992x_1^3x_5x'_1 - 8748x_1x_5x'_1, +17496x_5^2x'_1 - 17496x_1x_5^4x'_3 - 17496x_3x_5^4x'_1 \\
& - 104976x_1^3x_5^4x'_1 - 104976x_1^4x_5^3x'_5 + 34992x_1x_5x'_5 - 139968x_1^3x_3x_5x'_1 - 69984x_1x_3x_5^3x'_5 \\
& - 69984x_1^4x_3x'_5 + 17496x_1^2x_3x'_5 - 69984x_1^4x_5x'_3 + 17496x_1^2x_5x'_3 - 139968x_1^3x_3x_5x'_1 \\
& + 34992x_1x_3x_5x'_1, 69984x_1x'_1 - 279936x_1^3x'_1 - 10206x_1^2x'_5 + 5832x_1^3x'_5 + 40824x_1^4x'_5 \\
& + 10206x_5^4x'_1 - 23328x_1^5x'_5 + 17496x_1^2x_5x'_1 + 163296x_1^3x_5x'_1 - 17496x_1x_5^4x'_1 \\
& - 11664x_1x_5^2x'_7 - 11664x_5^2x_7x'_1 - 34992x_1^2x_5^2x'_3 + 139968x_1^4x_5^2x'_3 - 34992x_1^2x_5^3x'_5 \\
& + 17496x_1^4x_5^4x'_7 - 20412x_1x_5x'_1 - 279936x_1^3x_3^2x_5^4x'_1 - 279936x_1^4x_3^2x_5^3x'_5 - 69984x_1x_3x_5^2x'_1 \\
& - 69984x_1^2x_3x_5x'_5 - 11664x_1^2x_3x_5x'_7 - 11664x_1^2x_3x_7x'_5 - 11664x_1^2x_5x_7x'_3 \\
& + 279936x_1^4x_3x_5x'_5 + 11664x_1x_3x_5^4x'_7 + 11664x_1x_5^4x_7x'_3 + 11664x_3x_5^4x_7x'_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 46656x_1^4x_3x_5x_7' + 46656x_1^4x_3x_7x_5' + 46656x_1^4x_5x_7x_3' + 559872x_1^3x_3x_5^2x_7' \\
& - 139968x_1^4x_3x_5^4x_7' + 69984x_1^3x_5^4x_7x_1' + 69984x_1^4x_5^3x_7x_5' - 23328x_1x_5x_7x_5' \\
& + 186624x_1^3x_3x_5x_7x_1' + 46656x_1x_3x_5^3x_7x_5' - 23328x_1x_3x_5x_7x_1' - 116640x_1^4x_5x_1' \\
& + 40824x_1x_5^3x_5' \Big)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta^2\mathcal{H}$ ifadesinde $\lambda x_i' = h_i$ olup, h_i , $1 \leq i \leq 8$ değerleri de yerlerine yazılırsa

$$\Delta^2\mathcal{H}(P) = (-669222, 4881384, -4251528, 16428744, -1102248, -4251528, 30705480, -10235160)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse

$$\Delta^3\mathcal{H}(P) = (136048896, 10747862784, 1300967568, 42428832264, 221079456, 1300967568, -13723932384, -9417134520)$$

$$\Delta^4\mathcal{H}(P) = (-36733201920, -15604723340640, -471792062160, -51434518075920, -57395628000, -471792062160, 6797938180320, 15231651758640)$$

$$\begin{aligned}
\Delta^5\mathcal{H}(P) = & (11405659196160, 16935172364280960, 195259926456000, \\
& 35734922058021120, 18224259802560, 195259926456000, \\
& -3732254022830400, -16828306296595200)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^6\mathcal{H}(P) = & (-4190835907249920, -17293015747443300480, -91512190789381440, \\
& -15120699971695934400, -6644416354545600, -91512190789381440, \\
& 2256694842480557760, 17265102504128159040)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece arakesit eğrisinin Frenet vektörleri

$$\mathbf{V}_3(P) = (-0.044724, 0.111211, -0.047402, 0.384006, -0.107653, -0.047402, -0.867912, -0.262325)$$

$$\mathbf{V}_4(P) = (0.016719, -0.532090, -0.071656, 0.391040, -0.518604, -0.071656, 0.014984, 0.533144)$$

$$\mathbf{V}_5(P) = (0.168504, 0.599436, 0.236113, -0.130629, -0.689316, 0.236113, 0.045725, 0.080444)$$

$$\mathbf{V}_6(P) = (0.933373, 0.030702, -0.242519, -0.002771, 0.089831, -0.242519, -0.038101, 0.026665)$$

$$\mathbf{V}_7(P) = (0.277309, -0.501306, 0.449746, 0.000137, -0.116126, 0.449746, 0.038620, -0.502264)$$

ve

$$\mathbf{V}_8(P) = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0),$$

olup, eğrilikler

$$\kappa_2(P) = -0.637406$$

$$\kappa_3(P) = -1.485822$$

$$\kappa_4(P) = -1.108791$$

$$\kappa_5(P) = -0.114099$$

$$\kappa_6(P) = -0.024114$$

$$\kappa_7(P) = 0$$

olarak bulunur.

$\mathbb{E}^n$ 'DE PARAMETRİK DENKLEMLERLE VERİLEN HİPERYÜZEYLERİN ARAKESİT PROBLEMİ

Bu bölümde $\mathbb{E}^n$ uzayında parametrik denklemleriyle verilen $n - 1$ tane hiperyüzeyin arakesit eğrisinin Frenet vektörlerinin ve eğriliklerinin nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir.

Burada elde edilen sonuçlar da [38] numaralı makalemizde yayımlanmıştır.

5.1 Parametrik Formda Verilen Hiperyüzeylerin Enine Arakesit Eğrisi

$\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{R}^i(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i(n-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

parametrik denklemleriyle verilen ve enine kesişen hiperyüzeyler, sırasıyla, $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_{n-1}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{R}_j^i = \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial u_{ij}}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

olmak üzere, $\mathcal{M}_i$ hiperyüzeylerinin normal vektör alanları, sırasıyla,

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{R}_1^i \times \mathbf{R}_2^i \times \dots \times \mathbf{R}_{n-1}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

şeklindedir.

$$\mathcal{L} := \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \times \dots \times \mathbf{N}_{n-1} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$$

vektörünü tanımlayalım. Burada $\mathcal{L}$ vektörünün L_v , $v = 1, 2, \dots, n$ bileşenleri hiperyüzeylerin $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i(n-1)}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ parametrelerine bağlıdır. Bu hiperyüzeylerin $\beta(s)$ arakesit eğrisinin $\mathbf{V}_1(s)$ birim teğet vektörü hiperyüzeylerin normal vektörlerine dik olacağından, normal vektörlerin vektörel çarpım vektörüne

paralel olacaktır. O halde

$$\mathcal{L} = \xi \mathbf{V}_1 = \xi \beta' = \xi \left(\mathbf{R}_1^i u'_{i1} + \mathbf{R}_2^i u'_{i2} + \cdots + \mathbf{R}_{n-1}^i u'_{i(n-1)} \right)$$

yazılabilir. $\mathcal{L} = \xi \mathbf{V}_1$ eşitliğinden

$$\xi^2 = \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle, \quad \mathbf{V}_1 = \frac{\mathcal{L}}{\xi}$$

yazılır. $\xi u'_{ij} := \ell_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n-1$ olarak gösterilirse

$$\mathcal{L} = \ell_{i1} \mathbf{R}_1^i + \ell_{i2} \mathbf{R}_2^i + \cdots + \ell_{i(n-1)} \mathbf{R}_{n-1}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.1)$$

yazılabilir.

$$\Phi = \xi \frac{d}{ds} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \ell_{ij} \frac{\partial}{\partial u_{ij}} \quad (5.2)$$

operatörünü tanımlayalım. Φ operatörü $\mathcal{L}$ üzerine uygulanırsa

$$\Phi \mathcal{L} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \ell_{ij} \frac{\partial L_1}{\partial u_{ij}}, \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \ell_{ij} \frac{\partial L_2}{\partial u_{ij}}, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \ell_{ij} \frac{\partial L_n}{\partial u_{ij}} \right)$$

elde edilir. $\Phi^r \mathcal{L}$, $r = 1, 2, \dots, n-2$ vektörlerinin elde edilmesi için ℓ_{ij} , $1 \leq i, j \leq n-1$ bilinmeyenlerinin hesaplanması gerekmektedir.

Bunun için öncelikle (5.1) eşitliğinde $i = 1$ alalım. Bu durumda

$$\mathcal{L} = \ell_{11} \mathbf{R}_1^1 + \ell_{12} \mathbf{R}_2^1 + \cdots + \ell_{1(n-1)} \mathbf{R}_{n-1}^1$$

eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla, $\mathbf{R}_j^1$, $1 \leq j \leq n-1$ ile iç çarpılırsa

$$\langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \ell_{11} + \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \ell_{12} + \cdots + \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \ell_{1(n-1)} = \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_1^1 \rangle$$

$$\langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \ell_{11} + \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \ell_{12} + \cdots + \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \ell_{1(n-1)} = \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_2^1 \rangle$$

$\vdots$

$$\langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle \ell_{11} + \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle \ell_{12} + \cdots + \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle \ell_{1(n-1)} = \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sisteminin katsayılar matrisini

$\mathcal{C}^1$ ile gösterelim. O halde

$$\det \mathcal{C}^1 = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle \end{vmatrix} = \|\mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \cdots \times \mathbf{R}_{n-1}^1\|^2$$

olup, (2.1) eşitliğinden $\det \mathcal{C}^1 \neq 0$ bulunur. O halde Cramer metodu kullanılırsa, sistemin çözümü için

$$\ell_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle \end{vmatrix}}{\det \mathcal{C}^1}$$

$$\ell_{12} = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle & \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_{n-1}^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle \end{vmatrix}}{\det \mathcal{C}^1}$$

$\vdots$

$$\ell_{1(n-1)} = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \cdots & \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \cdots & \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle & \cdots & \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_{n-1}^1 \rangle \end{vmatrix}}{\det \mathcal{C}^1}$$

veya $\mathcal{C}^1$ matrisinin (k, j) kofaktörü $\mathcal{C}_{kj}^1$ olmak üzere

$$\begin{cases} \ell_{11} = \frac{1}{\det \mathcal{C}^1} \sum_{k=1}^{n-1} \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_k^1 \rangle \mathcal{C}_{k1}^1 \\ \ell_{12} = \frac{1}{\det \mathcal{C}^1} \sum_{k=1}^{n-1} \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_k^1 \rangle \mathcal{C}_{k2}^1 \\ \vdots \\ \ell_{1(n-1)} = \frac{1}{\det \mathcal{C}^1} \sum_{k=1}^{n-1} \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_k^1 \rangle \mathcal{C}_{k(n-1)}^1 \end{cases} \quad (5.3)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde (5.1) eşitliğinde $i = 2, 3, \dots, n-1$ alınır ve elde edilen eşitlikler, sırasıyla, $\mathbf{R}_j^i$ ile iç çarpılırsa, karşılık gelen lineer denklem sistemlerinin çözümü

$$\ell_{ij} = \frac{1}{\det \mathcal{C}^i} \sum_{k=1}^{n-1} \langle \mathcal{L}, \mathbf{R}_k^i \rangle \mathcal{C}_{kj}^i, \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (5.4)$$

olarak bulunur. Böylece, $\kappa_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n-2$ kabul edilirse, bir önceki bölümde gösterildiği gibi, arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$\kappa_1 = \frac{1}{\xi^2} \sqrt{\langle \Phi \mathcal{L}, \Phi \mathcal{L} \rangle - (\xi \xi')^2} \quad (5.5)$$

ile bulunarak, Frenet vektörleri

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{\xi^2 \kappa_1} (\Phi \mathcal{L} - \xi \xi' \mathbf{V}_1), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{V}_n = \frac{\mathcal{L} \times \Phi \mathcal{L} \times \Phi^2 \mathcal{L} \times \dots \times \Phi^{n-2} \mathcal{L}}{\left\| \mathcal{L} \times \Phi \mathcal{L} \times \Phi^2 \mathcal{L} \times \dots \times \Phi^{n-2} \mathcal{L} \right\|}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{V}_{n-1} = \frac{\mathcal{L} \times \Phi \mathcal{L} \times \Phi^2 \mathcal{L} \times \dots \times \Phi^{n-3} \mathcal{L} \times \mathbf{V}_n}{\left\| \mathcal{L} \times \Phi \mathcal{L} \times \Phi^2 \mathcal{L} \times \dots \times \Phi^{n-3} \mathcal{L} \times \mathbf{V}_n \right\|}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{V}_{n-2} = \frac{\mathcal{L} \times \Phi \mathcal{L} \times \Phi^2 \mathcal{L} \times \dots \times \Phi^{n-4} \mathcal{L} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1}}{\left\| \mathcal{L} \times \Phi \mathcal{L} \times \Phi^2 \mathcal{L} \times \dots \times \Phi^{n-4} \mathcal{L} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \right\|}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{V}_{n-3} = \frac{\mathcal{L} \times \Phi \mathcal{L} \times \Phi^2 \mathcal{L} \times \dots \times \Phi^{n-5} \mathcal{L} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \mathbf{V}_{n-2}}{\left\| \mathcal{L} \times \Phi \mathcal{L} \times \Phi^2 \mathcal{L} \times \dots \times \Phi^{n-5} \mathcal{L} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \mathbf{V}_{n-2} \right\|}, \quad (5.10)$$

$\vdots$

$$\mathbf{V}_4 = \frac{\mathcal{L} \times \Phi \mathcal{L} \times \Phi^2 \mathcal{L} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \dots \times \mathbf{V}_5}{\left\| \mathcal{L} \times \Phi \mathcal{L} \times \Phi^2 \mathcal{L} \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \dots \times \mathbf{V}_5 \right\|}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_{n-1} \times \mathbf{V}_{n-2} \times \dots \times \mathbf{V}_4 \times \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1 \quad (5.12)$$

ile bulunabilir. Diğer eğrilikler ise

$$\kappa_i = \frac{1}{\xi^{i+1} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \kappa_j \right)} \langle \Phi^i \mathcal{L}, \mathbf{V}_{i+1} \rangle, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (5.13)$$

şeklinde bulunur.

Eğriliklerin herhangi bir noktada sıfır olması durumunda 4.2 bölümünde verilen durumlar burada da geçerlidir.

5.2 $\mathbb{E}^8$ 'de Parametrik Formda Verilen Yedi Hiperyüzeyin Arakesit Problemi

4.3.3 bölümünde kapalı formda verilen hiperyüzeyleri

$$\mathbf{R}^1(u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}) = (u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}, 3u_{16} - u_{11}^4 - u_{12})$$

$$\mathbf{R}^2(u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24}, u_{25}, u_{26}, u_{27}) = (u_{21}, \frac{2u_{26} + u_{27}^2}{3}, u_{23}, u_{24}, u_{25}, u_{26}, u_{27}, u_{22})$$

$$\mathbf{R}^3(u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{34}, u_{35}, u_{36}, u_{37}) = (u_{31}, u_{32}, u_{31}^3, u_{33}, u_{34}, u_{35}, u_{36}, u_{37})$$

$$\mathbf{R}^4(u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{45}, u_{46}, u_{47}) = (u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{45}, u_{46}, 3u_{45} - 2u_{43}^2, u_{47})$$

$$\mathbf{R}^5(u_{51}, u_{52}, u_{53}, u_{54}, u_{55}, u_{56}, u_{57}) = (u_{51}, u_{52}, u_{53}, u_{54}, u_{55}, u_{53}, u_{56}, u_{57})$$

$$\mathbf{R}^6(u_{61}, u_{62}, u_{63}, u_{64}, u_{65}, u_{66}, u_{67}) = (u_{61}, u_{62}, u_{63}, u_{64}, u_{65}, u_{66}, u_{67}, 4u_{62}^2 - 3u_{64})$$

$$\mathbf{R}^7(u_{71}, u_{72}, u_{73}, u_{74}, u_{75}, u_{76}, u_{77}) = (u_{71}, u_{72}, \frac{u_{75}^3 + 3u_{71}}{4}, u_{74}, u_{75}, u_{76}, u_{77}, u_{73})$$

parametrik denklemleri ile yeniden göz önüne alalım. Bu hiperyüzeylerin arakesit eğrisinin

$$P = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \mathbf{R}^i(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad 1 \leq i \leq 7,$$

noktasındaki Frenet elemanlarını 5.1 bölümünde verilen metotla bulalım.

$$\mathbf{R}_1^1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4u_{11}^3)$$

$$\mathbf{R}_2^1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1)$$

$$\mathbf{R}_3^1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{R}_4^1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{R}_5^1 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{R}_6^1 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 3)$$

$$\mathbf{R}_7^1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1 \times \mathbf{R}_4^1 \times \mathbf{R}_5^1 \times \mathbf{R}_6^1 \times \mathbf{R}_7^1$$

$$\mathbf{N}_1 = (-4u_{11}^3, -1, 0, 0, 0, 3, 0, -1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1^2 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_2^2 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
\mathbf{R}_3^2 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_4^2 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_5^2 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_6^2 &= (0, \frac{2}{3}, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\mathbf{R}_7^2 &= (0, \frac{2u_{27}}{3}, 0, 0, 0, 0, 1, 0)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\mathbf{N}_2 &= \mathbf{R}_1^2 \times \mathbf{R}_2^2 \times \mathbf{R}_3^2 \times \mathbf{R}_4^2 \times \mathbf{R}_5^2 \times \mathbf{R}_6^2 \times \mathbf{R}_7^2 \\
\mathbf{N}_2 &= (0, 1, 0, 0, 0, -\frac{2}{3}, -\frac{2u_{27}}{3}, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1^3 &= (1, 0, 3u_{31}^2, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_2^3 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_3^3 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_4^3 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_5^3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\mathbf{R}_6^3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
\mathbf{R}_7^3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\mathbf{N}_3 &= \mathbf{R}_1^3 \times \mathbf{R}_2^3 \times \mathbf{R}_3^3 \times \mathbf{R}_4^3 \times \mathbf{R}_5^3 \times \mathbf{R}_6^3 \times \mathbf{R}_7^3 \\
\mathbf{N}_3 &= (-3u_{31}^2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1^4 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_2^4 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_3^4 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, -4u_{43}, 0) \\
\mathbf{R}_4^4 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_5^4 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 0) \\
\mathbf{R}_6^4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\mathbf{R}_7^4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\mathbf{N}_4 &= \mathbf{R}_1^4 \times \mathbf{R}_2^4 \times \mathbf{R}_3^4 \times \mathbf{R}_4^4 \times \mathbf{R}_5^4 \times \mathbf{R}_6^4 \times \mathbf{R}_7^4 \\
\mathbf{N}_4 &= (0, 0, 4u_{43}, 0, -3, 0, 1, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1^5 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_2^5 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_3^5 &= (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\mathbf{R}_4^5 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_5^5 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_6^5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
\mathbf{R}_7^5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\mathbf{N}_5 &= \mathbf{R}_1^5 \times \mathbf{R}_2^5 \times \mathbf{R}_3^5 \times \mathbf{R}_4^5 \times \mathbf{R}_5^5 \times \mathbf{R}_6^5 \times \mathbf{R}_7^5 \\
\mathbf{N}_5 &= (0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1^6 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_2^6 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 8u_{62}) \\
\mathbf{R}_3^6 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_4^6 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -3) \\
\mathbf{R}_5^6 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_6^6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\mathbf{R}_7^6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\mathbf{N}_6 &= \mathbf{R}_1^6 \times \mathbf{R}_2^6 \times \mathbf{R}_3^6 \times \mathbf{R}_4^6 \times \mathbf{R}_5^6 \times \mathbf{R}_6^6 \times \mathbf{R}_7^6 \\
\mathbf{N}_6 &= (0, 8u_{62}, 0, -3, 0, 0, 0, -1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1^7 &= (1, 0, \frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_2^7 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_3^7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
\mathbf{R}_4^7 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_5^7 &= (0, 0, \frac{3u_{75}^2}{4}, 0, 1, 0, 0, 0) \\
\mathbf{R}_6^7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\mathbf{R}_7^7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\mathbf{N}_7 &= \mathbf{R}_1^7 \times \mathbf{R}_2^7 \times \mathbf{R}_3^7 \times \mathbf{R}_4^7 \times \mathbf{R}_5^7 \times \mathbf{R}_6^7 \times \mathbf{R}_7^7 \\
\mathbf{N}_7 &= (-\frac{3}{4}, 0, 1, 0, -\frac{3u_{75}^2}{4}, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \times \mathbf{N}_3 \times \mathbf{N}_4 \times \mathbf{N}_5 \times \mathbf{N}_6 \times \mathbf{N}_7 \\
&= \left(-\frac{9}{4}u_{75}^2, \frac{9}{2}(u_{27} - u_{31}^2 u_{75}^2) - 18u_{27}u_{31}^2 + 18u_{27}u_{31}^2 u_{43}u_{75}^2, -\frac{27}{4}u_{31}^2 u_{75}^2, \frac{3}{2}u_{27} - 3u_{11}^3 u_{75}^2 \right. \\
&\quad + \frac{21}{4}u_{31}^2 u_{75}^2 + 12u_{27}u_{62} - 6u_{27}u_{31}^2 - 48u_{27}u_{31}^2 u_{62} - 12u_{31}^2 u_{62}u_{75}^2 + 6u_{27}u_{31}^2 u_{43}u_{75}^2 \\
&\quad + 48u_{27}u_{31}^2 u_{43}u_{62}u_{75}^2, \frac{9}{4} - 9u_{31}^2, -\frac{27}{4}u_{31}^2 u_{75}^2, 27u_{43}u_{31}^2 u_{75}^2 - 27u_{31}^2 + \frac{27}{4}, 9u_{11}^3 u_{75}^2 \\
&\quad \left. - \frac{9}{2}u_{27} - \frac{63}{4}u_{31}^2 u_{75}^2 + 18u_{27}u_{31}^2 - 18u_{27}u_{31}^2 u_{43}u_{75}^2 \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\mathcal{L}(P) = \left(-\frac{9}{4}, 0, -\frac{27}{4}, \frac{15}{4}, -\frac{27}{4}, -\frac{27}{4}, \frac{27}{4}, -\frac{45}{4} \right)$$

olup,

$$\xi^2 = \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle \Rightarrow \xi^2(P) = \langle \mathcal{L}(P), \mathcal{L}(P) \rangle = \frac{5247}{16}$$

yani $\xi(P) = \pm \frac{3\sqrt{583}}{4}$ bulunur. $\xi(P) = \frac{3\sqrt{583}}{4}$ alalım. Bu durumda arakesit eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{v}_1(P) = \frac{\mathcal{L}(P)}{\xi(P)} = \frac{1}{\sqrt{583}}(-3, 0, -9, 5, -9, -9, 9, -15)$$

olarak bulunur. $\mathcal{L}$ vektörüne

$$\Phi = \xi \frac{d}{ds} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 \ell_{ij} \frac{\partial}{\partial u_{ij}}$$

operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Phi \mathcal{L} = & \xi \left(-\frac{9}{2}u_{75}u'_{75}, \frac{9}{2}u'_{27} - 9u_{31}u'_{31}u_{75}^2 - 9u_{31}^2u_{75}u'_{75} - 18u'_{27}u_{31}^2 - 36u_{27}u_{31}u'_{31} \right. \\ & + 18u'_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}^2 + 36u_{27}u_{31}u'_{31}u_{43}u_{75}^2 + 18u_{27}u_{31}^2u'_{43}u_{75}^2 + 36u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}u'_{75}, \\ & - \frac{27}{2}u_{31}u'_{31}u_{75}^2 - \frac{27}{2}u_{31}^2u_{75}u'_{75}, \frac{3}{2}u'_{27} - 9u_{11}^2u'_{11}u_{75}^2 - 6u_{11}^3u_{75}u'_{75} + \frac{21}{2}u_{31}u'_{31}u_{75}^2 \\ & + \frac{21}{2}u_{31}^2u_{75}u'_{75} + 12u'_{27}u_{62} + 12u_{27}u'_{62} - 6u'_{27}u_{31}^2 - 12u_{27}u_{31}u'_{31} - 48u'_{27}u_{31}^2u_{62} \\ & - 96u_{27}u_{31}u'_{31}u_{62} - 48u_{27}u_{31}^2u'_{62} - 24u_{31}u'_{31}u_{62}u_{75}^2 - 12u_{31}^2u'_{62}u_{75}^2 \\ & - 24u_{31}^2u_{62}u_{75}u'_{75} + 6u'_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}^2 + 12u_{27}u_{31}u'_{31}u_{43}u_{75}^2 + 6u_{27}u_{31}^2u'_{43}u_{75}^2 \\ & + 12u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}u'_{75} + 48u'_{27}u_{31}^2u_{43}u_{62}u_{75}^2 + 96u_{27}u_{31}u'_{31}u_{43}u_{62}u_{75}^2 \\ & + 48u_{27}u_{31}^2u'_{43}u_{62}u_{75}^2 + 48u_{27}u_{31}^2u_{43}u'_{62}u_{75}^2 + 96u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{62}u_{75}u'_{75}, -18u_{31}u'_{31}, \\ & - \frac{27}{2}u_{31}u'_{31}u_{75}^2 - \frac{27}{2}u_{31}^2u_{75}u'_{75}, 27u'_{43}u_{31}^2u_{75}^2 + 54u_{43}u_{31}u'_{31}u_{75}^2 + 54u_{43}u_{31}^2u_{75}u'_{75} \\ & - 54u_{31}u'_{31}, 27u_{11}^2u'_{11}u_{75}^2 + 18u_{11}^3u_{75}u'_{75} - \frac{9}{2}u'_{27} - \frac{63}{2}u_{31}u'_{31}u_{75}^2 - \frac{63}{2}u_{31}^2u_{75}u'_{75} \\ & + 18u'_{27}u_{31}^2 + 36u_{27}u_{31}u'_{31} - 18u'_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}^2 - 36u_{27}u_{31}u'_{31}u_{43}u_{75}^2 - 18u_{27}u_{31}^2u'_{43}u_{75}^2 \\ & \left. - 36u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}u'_{75} \right) \end{aligned}$$

olup, $\xi u'_{ij} = \ell_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 7$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Phi\mathcal{L} = & \left(-\frac{9}{2}u_{75}\ell_{75}, \frac{9}{2}\ell_{27} - 9u_{31}u_{75}^2\ell_{31} - 9u_{31}^2u_{75}\ell_{75} - 18u_{31}^2\ell_{27} - 36u_{27}u_{31}\ell_{31} \right. \\
& + 18u_{31}^2u_{43}u_{75}^2\ell_{27} + 36u_{27}u_{31}u_{43}u_{75}^2\ell_{31} + 18u_{27}u_{31}^2u_{75}^2\ell_{43} + 36u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}\ell_{75}, \\
& - \frac{27}{2}u_{31}u_{75}^2\ell_{31} - \frac{27}{2}u_{31}^2u_{75}\ell_{75}, \frac{3}{2}\ell_{27} - 9u_{11}^2u_{75}^2\ell_{11} - 6u_{11}^3u_{75}\ell_{75} \\
& + \frac{21}{2}u_{31}u_{75}^2\ell_{31} + \frac{21}{2}u_{31}^2u_{75}\ell_{75} + 12u_{62}\ell_{27} + 12u_{27}\ell_{62} - 6u_{31}^2\ell_{27} - 12u_{27}u_{31}\ell_{31} \\
& - 48u_{31}^2u_{62}\ell_{27} - 96u_{27}u_{31}u_{62}\ell_{31} - 48u_{27}u_{31}^2\ell_{62} - 24u_{31}u_{62}u_{75}^2\ell_{31} - 12u_{31}^2u_{75}^2\ell_{62} \\
& - 24u_{31}^2u_{62}u_{75}\ell_{75} + 6u_{31}^2u_{43}u_{75}^2\ell_{27} + 12u_{27}u_{31}u_{43}u_{75}^2\ell_{31} + 6u_{27}u_{31}^2u_{75}^2\ell_{43} \\
& + 12u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}\ell_{75} + 48u_{31}^2u_{43}u_{62}u_{75}^2\ell_{27} + 96u_{27}u_{31}u_{43}u_{62}u_{75}^2\ell_{31} \\
& + 48u_{27}u_{31}^2u_{62}u_{75}^2\ell_{43} + 48u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}^2\ell_{62} + 96u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{62}u_{75}\ell_{75}, -18u_{31}\ell_{31}, \\
& - \frac{27}{2}u_{31}u_{75}^2\ell_{31} - \frac{27}{2}u_{31}^2u_{75}\ell_{75}, 27u_{31}^2u_{75}^2\ell_{43} + 54u_{43}u_{31}u_{75}^2\ell_{31} + 54u_{43}u_{31}^2u_{75}\ell_{75} \\
& - 54u_{31}\ell_{31}, 27u_{11}^2u_{75}^2\ell_{11} + 18u_{11}^3u_{75}\ell_{75} - \frac{9}{2}\ell_{27} - \frac{63}{2}u_{31}u_{75}^2\ell_{31} - \frac{63}{2}u_{31}^2u_{75}\ell_{75} \\
& + 18u_{31}^2\ell_{27} + 36u_{27}u_{31}\ell_{31} - 18u_{31}^2u_{43}u_{75}^2\ell_{27} - 36u_{27}u_{31}u_{43}u_{75}^2\ell_{31} - 18u_{27}u_{31}^2u_{75}^2\ell_{43} \\
& \left. - 36u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}\ell_{75} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\det C^1 = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_4^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_7^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_4^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_7^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_4^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_7^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_4^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_4^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_4^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_4^1, \mathbf{R}_4^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^1, \mathbf{R}_4^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^1, \mathbf{R}_4^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_7^1, \mathbf{R}_4^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_5^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_5^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_5^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_4^1, \mathbf{R}_5^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^1, \mathbf{R}_5^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^1, \mathbf{R}_5^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_7^1, \mathbf{R}_5^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_6^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_6^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_6^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_4^1, \mathbf{R}_6^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^1, \mathbf{R}_6^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^1, \mathbf{R}_6^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_7^1, \mathbf{R}_6^1 \rangle \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_7^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_7^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_7^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_4^1, \mathbf{R}_7^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_5^1, \mathbf{R}_7^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_6^1, \mathbf{R}_7^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_7^1, \mathbf{R}_7^1 \rangle \end{vmatrix}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\det C^1 &= \left\| \mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1 \times \mathbf{R}_4^1 \times \mathbf{R}_5^1 \times \mathbf{R}_6^1 \times \mathbf{R}_7^1 \right\|^2 \\
&= 16u_{11}^6 + 11
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

eşitliğinden $\ell_{27} = 27u_{43}u_{31}^2u_{75}^2 - 27u_{31}^2 + \frac{27}{4}$ bulunur. Benzer şekilde, (5.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\ell_{31} &= -\frac{9}{4}u_{75}^2 \\ \ell_{43} &= -\frac{27}{4}u_{31}^2u_{75}^2 \\ \ell_{62} &= \frac{9}{2}u_{27} - \frac{9}{2}u_{31}^2u_{75}^2 - 18u_{27}u_{31}^2 + 18u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75}^2 \\ \ell_{75} &= \frac{9}{4} - 9u_{31}^2\end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler $\Phi\mathcal{L}$ vektöründe yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Phi\mathcal{L} &= \left(\frac{81}{2}u_{75}u_{31}^2 - \frac{81}{8}u_{75}, 486u_{31}^4 - 243u_{31}^2 - \frac{81}{4}u_{31}^2u_{75} + \frac{81}{4}u_{31}u_{75}^4 + 81u_{31}^4u_{75} \right. \\ &\quad + 486u_{31}^4u_{43}^2u_{75}^4 + 81u_{27}u_{31}^2u_{75}^2 - \frac{243}{2}u_{27}u_{31}^4u_{75}^4 + 243u_{31}^2u_{43}u_{75}^2 - 972u_{31}^4u_{43}u_{75}^2 \\ &\quad + 81u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75} - 81u_{27}u_{31}u_{43}u_{75}^4 - 324u_{27}u_{31}^4u_{43}u_{75} + \frac{243}{8}, \frac{243}{8}u_{31}u_{75}^4 \\ &\quad + \frac{243}{2}u_{31}^4u_{75} - \frac{243}{8}u_{31}^2u_{75}, 81u_{62} + 54u_{27}^2 - 81u_{31}^2 + 162u_{31}^4 - \frac{27}{2}u_{11}^3u_{75} \\ &\quad - 648u_{31}^2u_{62} + 1296u_{31}^4u_{62} + \frac{189}{8}u_{31}^2u_{75} - \frac{189}{8}u_{31}u_{75}^4 - \frac{189}{2}u_{31}^4u_{75} - 432u_{27}^2u_{31}^2 \\ &\quad + 864u_{27}^2u_{31}^4 + \frac{81}{4}u_{11}^2u_{75}^4 + 54u_{31}^4u_{75}^4 + 162u_{31}^4u_{43}^2u_{75}^4 + 27u_{27}u_{31}^2u_{75}^2 - 54u_{31}^2u_{62}u_{75} \\ &\quad + 54u_{31}u_{62}u_{75}^4 + 216u_{31}^4u_{62}u_{75} + 54u_{11}^3u_{31}^2u_{75} - 108u_{27}u_{31}^2u_{75}^2 + 432u_{27}u_{31}^4u_{75}^2 \\ &\quad - \frac{81}{2}u_{27}u_{31}^4u_{75}^4 + 81u_{31}^2u_{43}u_{75}^2 - 324u_{31}^4u_{43}u_{75}^2 + 432u_{27}^2u_{31}^2u_{43}u_{75}^2 \\ &\quad - 1728u_{27}^2u_{31}^4u_{43}u_{75}^2 + 1296u_{31}^4u_{43}^2u_{62}u_{75}^4 + 27u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75} - 27u_{27}u_{31}u_{43}u_{75}^4 \\ &\quad - 108u_{27}u_{31}^4u_{43}u_{75} + 216u_{27}u_{31}u_{62}u_{75}^2 + 864u_{27}^2u_{31}^4u_{43}^2u_{75}^4 - 432u_{27}u_{31}^4u_{43}u_{75}^4 \\ &\quad - 324u_{27}u_{31}^4u_{62}u_{75}^4 + 648u_{31}^2u_{43}u_{62}u_{75}^2 - 2592u_{31}^4u_{43}u_{62}u_{75}^2 + 216u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{62}u_{75} \\ &\quad - 216u_{27}u_{31}u_{43}u_{62}u_{75}^4 - 864u_{27}u_{31}^4u_{43}u_{62}u_{75} + \frac{81}{8}, \frac{81}{2}u_{31}u_{75}^2, \frac{243}{8}u_{31}u_{75}^4 + \frac{243}{2}u_{31}^4u_{75} \\ &\quad - \frac{243}{8}u_{31}^2u_{75}, \frac{243}{2}u_{31}u_{75}^2 - \frac{729}{4}u_{31}^4u_{75}^4 - \frac{243}{2}u_{31}u_{43}u_{75}^4 - 486u_{31}^4u_{43}u_{75} + \frac{243}{2}u_{31}^2u_{43}u_{75}, \\ &\quad + \frac{243}{2}u_{31}^2 + 486u_{31}^4u_{43}u_{75}^2 - 486u_{31}^2 + \frac{243}{2}u_{31}^2 + \frac{567}{8}u_{31}u_{75}^4 - \frac{243}{4}u_{11}^2u_{75}^4 - 81u_{27}u_{31}u_{75}^2 \\ &\quad - 162u_{11}^3u_{31}^2u_{75} + \frac{81}{2}u_{11}^3u_{75} + \frac{567}{2}u_{31}^4u_{75} - \frac{567}{8}u_{31}^2u_{75} + \frac{243}{2}u_{27}u_{31}^4u_{75} - \frac{243}{2}u_{31}^2u_{43}u_{75}^2 \\ &\quad + 81u_{27}u_{31}u_{43}u_{75}^4 - 486u_{31}^4u_{43}^2u_{75}^4 + 486u_{31}^4u_{43}u_{75}^2 - \frac{243}{2}u_{31}^2u_{43}u_{75}^2 + 324u_{27}u_{31}^4u_{43}u_{75} \\ &\quad \left. - 81u_{27}u_{31}^2u_{43}u_{75} - \frac{243}{8} \right)\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\Phi\mathcal{L}(P) = \left(\frac{243}{8}, -\frac{2025}{8}, \frac{243}{2}, -\frac{6561}{8}, \frac{81}{2}, \frac{243}{2}, -\frac{2187}{4}, \frac{3483}{8} \right)$$

ve

$$\xi'(P) = -\frac{48519}{1166}$$

elde edilir. Böylece arakesit eğrisinin birinci eğriligi

$$\kappa_1(P) = 2.531929$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$\mathbf{V}_2(P) = \frac{1}{\xi^2(P)\kappa_1(P)} (\Phi\mathcal{L}(P) - \xi(P)\xi'(P)\mathbf{V}_1(P))$$

eşitliğinde bulunan değerler yerine yazılırsa

$$\mathbf{V}_2(P) = (-0.076176, -0.304854, -0.191948, -0.799795, -0.289501, -0.191948, -0.320206, -0.039448)$$

olarak elde edilir.

$\Phi\mathcal{L}$ vektörüne Φ operatörü uygulanır ve benzer şekilde devam edilirse

$$\Phi^2\mathcal{L}(P) = \left(-\frac{12393}{32}, \frac{22599}{8}, -\frac{19683}{8}, \frac{76059}{8}, -\frac{5103}{8}, -\frac{19683}{8}, \frac{142155}{8}, -\frac{47385}{8} \right)$$

$$\Phi^3\mathcal{L}(P) = \left(6561, 518319, \frac{1003833}{16}, \frac{65476593}{32}, \frac{85293}{8}, \frac{1003833}{16}, -\frac{5294727}{8}, -\frac{14532615}{32} \right)$$

$$\Phi^4\mathcal{L}(P) = \left(-\frac{295245}{2}, -\frac{2006780265}{32}, -\frac{121345695}{64}, -\frac{13229042715}{64}, -\frac{7381125}{32}, -\frac{121345695}{64}, \frac{874220445}{32}, \frac{3917605905}{64} \right)$$

$$\Phi^5\mathcal{L}(P) = \left(\frac{61115715}{16}, \frac{181489758705}{32}, \frac{4185097875}{64}, \frac{191480849505}{16}, \frac{390609135}{64}, \frac{4185097875}{64}, -\frac{79995156525}{64}, -\frac{90172251675}{16} \right)$$

$$\Phi^6\mathcal{L}(P) = \left(-\frac{7485346485}{64}, -\frac{61774890501555}{128}, -\frac{653807947455}{256}, -\frac{108029692298925}{256}, -\frac{47470967325}{256}, -\frac{653807947455}{256}, \frac{16122934116945}{256}, \frac{123350355110655}{256} \right)$$

$$\Phi^7 \mathcal{L}(P) = \left(\frac{261508830075}{64}, \frac{10530375797415465}{256}, \frac{56799072191475}{512}, \frac{3795915172816485}{256}, \right. \\ \left. \frac{51871298805}{8}, \frac{56799072191475}{512}, -\frac{443112829994565}{128}, -\frac{10528682769878535}{256} \right)$$

bulunur. Buradan arakesit eğrisinin Frenet vektörleri, 4.3.3 bölümünde bulunduğu gibi,

$$\mathbf{V}_3(P) = (-0.044724, 0.111211, -0.047402, 0.384006, -0.107653, -0.047402, \\ -0.867912, -0.262325)$$

$$\mathbf{V}_4(P) = (0.016719, -0.532090, -0.071656, 0.391040, -0.518604, -0.071656, \\ 0.014984, 0.533144)$$

$$\mathbf{V}_5(P) = (0.168504, 0.599436, 0.236113, -0.130629, -0.689316, 0.236113, \\ 0.045725, 0.080444)$$

$$\mathbf{V}_6(P) = (0.933373, 0.030702, -0.242519, -0.002771, 0.089831, -0.242519, \\ -0.038101, 0.026665)$$

$$\mathbf{V}_7(P) = (0.277309, -0.501306, 0.449746, 0.000137, -0.116126, 0.449746, \\ 0.038620, -0.502264)$$

$$\mathbf{V}_8(P) = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$$

olarak elde edilir. Böylece eğrilikler

$$\kappa_2(P) = -0.637406$$

$$\kappa_3(P) = -1.485822$$

$$\kappa_4(P) = -1.108791$$

$$\kappa_5(P) = -0.114099$$

$$\kappa_6(P) = -0.024114$$

$$\kappa_7(P) = 0$$

şeklindedir.

$\mathbb{E}^n$ 'DE k KAPALI VE $(n - k - 1)$ PARAMETRİK FORMDA VERİLEN HİPERYÜZEYİN ARAKESİT PROBLEMİ

Bu bölümde $\mathbb{E}^n$ uzayında kapalı denklemleriyle verilen k tane ve parametrik denklemleriyle verilen $n - k - 1$ tane hiperyüzeyin enine arakesit eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar [38] numaralı makalemizde yayımlanmıştır.

$\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ kapalı denklemleriyle verilen hiperyüzeyler, sırasıyla, $\mathcal{M}_i$ ve $\mathbf{R}^j = \mathbf{R}^j(u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{j(n-1)})$, $j = k + 1, k + 2, \dots, n - 1$ parametrik denklemleriyle verilen hiperyüzeyler, sırasıyla, $\mathcal{M}_j$ olsun. Bu durumda $\mathcal{M}_i$ hiperyüzeylerinin normal vektör alanları

$$\mathbf{N}_i = \nabla f_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

ve $\mathcal{M}_j$ hiperyüzeylerinin normal vektör alanları

$$\mathcal{N}_j = \mathbf{R}_1^j \times \mathbf{R}_2^j \times \dots \times \mathbf{R}_{n-1}^j, \quad j = k + 1, k + 2, \dots, n - 1$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{R}_r^j = \frac{\partial \mathbf{R}^j}{\partial u_{jr}}$, $k + 1 \leq j \leq n - 1$, $1 \leq r \leq n - 1$ şeklindedir. Bu hiperyüzeylerin birim hızlı arakesit eğrisi $\beta(s)$ olsun.

$$\mathcal{Z} := \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \times \dots \times \mathbf{N}_k \times \mathcal{N}_{k+1} \times \dots \times \mathcal{N}_{n-1} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

vektörünü tanımlayalım. $\mathcal{Z}$ vektörünün z_ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, n$ bileşenleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin yanı sıra $u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{j(n-1)}$, $j = k + 1, k + 2, \dots, n - 1$ değişkenlerine de bağlıdır. $\beta(s)$ arakesit eğrisinin $\mathbf{V}_1(s)$ birim teğet vektörü $\mathcal{Z}$ vektörüne paralel olacaktır

$$\mathcal{Z} = \psi \mathbf{V}_1 = \psi \beta' = \psi (\mathbf{R}_1^j u'_{j1} + \mathbf{R}_2^j u'_{j2} + \dots + \mathbf{R}_{n-1}^j u'_{j(n-1)}) \quad (6.1)$$

ve

$$\psi^2 = \langle \mathcal{Z}, \mathcal{Z} \rangle, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\mathcal{Z}}{\psi}$$

yazılabilir. $\mathcal{Z} = \psi \beta'$ olduğundan $z_\ell = \psi x'_\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, n$ elde edilir. Ayrıca $\psi u'_{jr} := \eta_{jr}$, $1 \leq r \leq n-1$ olarak yazılırsa

$$\mathcal{Z} = \eta_{j1} \mathbf{R}_1^j + \eta_{j2} \mathbf{R}_2^j + \dots + \eta_{j(n-1)} \mathbf{R}_{(n-1)}^j, \quad k+1 \leq j \leq n-1$$

elde edilir.

$$\Omega = \psi \frac{d}{ds} = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \eta_{jr} \frac{\partial}{\partial u_{jr}} \quad (6.2)$$

operatörünü tanımlayalım.

Arakesit eğrisinin Frenet vektörlerinin ve eğriliklerinin bulunabilmesi için $\Omega^\nu \mathcal{Z}$, $\nu = 1, 2, \dots, n-2$ vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için de η_{jr} katsayılarının bulunması gerekir. Ancak, önceki bölümde olduğu gibi

$$\eta_{jr} = \frac{1}{\det \mathcal{C}^j} \sum_{k=1}^{n-1} \langle \mathcal{Z}, \mathbf{R}_k^j \rangle \mathcal{C}_{kr}^j \quad k+1 \leq j \leq n-1, \quad 1 \leq r \leq n-1$$

şeklinde bulunabilir. Bu durumda arakesit eğrisinin Frenet elemanları (5.5)-(5.13) eşitliklerinde $\mathcal{L}$, Φ ve ξ yerine, sırasıyla, $\mathcal{Z}$, Ω ve ψ yazılarak elde edilen eşitlikler yardımıyla bulunabilir.

6.1 $\mathbb{E}^4$ 'te İki Kapalı ve Biri Parametrik Denklemlerle Verilen Hiperyüzeylerin Arakesit Problemi

$\mathbb{E}^4$ uzayında 4.3.1 bölümünde verilen hiperyüzeylerden ilk ikisini kapalı denklemleriyle ve üçüncüsünü de parametrik denklemleriyle aşağıdaki şekilde yeniden göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0, \\ \mathbf{R}^1(u_{11}, u_{12}, u_{13}) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos u_{11}, \frac{1}{2} \sin u_{11}, u_{12}, u_{13} \right). \end{aligned}$$

Bu hiperyüzeylerin arakesit eğrisinin $P = \mathbf{R}^1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım.

Verilen hiperyüzeyler için

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1 &= \nabla f_1 = (2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4) \\
\mathbf{N}_2 &= \nabla f_2 = (2x_1, 2x_2, 2x_3, -2x_4) \\
\mathbf{R}_1^1 &= \left(-\frac{1}{2} \sin u_{11}, \frac{1}{2} \cos u_{11}, 0, 0 \right) \\
\mathbf{R}_2^1 &= (0, 0, 1, 0) \\
\mathbf{R}_3^1 &= (0, 0, 0, 1) \\
\mathcal{N}_3 &= \mathbf{R}_1^1 \times \mathbf{R}_2^1 \times \mathbf{R}_3^1 = \left(\frac{1}{2} \cos u_{11}, \frac{1}{2} \sin u_{11}, 0, 0 \right)
\end{aligned}$$

olup, $\mathcal{Z} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \times \mathcal{N}_3$ alınırsa

$$\mathcal{Z} = (-4x_3x_4 \sin u_{11}, 4x_3x_4 \cos u_{11}, -4x_2x_4 \cos u_{11} + 4x_1x_4 \sin u_{11}, 0) \quad (6.3)$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\mathcal{Z}(P) = (-2\sqrt{2}, 0, 2, 0)$$

olup, $\psi(P) = 2\sqrt{3}$ alınırsa

$$\mathbf{V}_1(P) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$$

bulunur. (6.3) eşitliğine

$$\Omega = \psi \frac{d}{ds} = \sum_{i=1}^4 z_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^3 \eta_{1r} \frac{\partial}{\partial u_{1r}}$$

operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\Omega \mathcal{Z} &= \psi \left(-4x_4x'_3 \sin u_{11} - 4x_3x'_4 \sin u_{11} - 4x_3x_4u'_{11} \cos u_{11}, \right. \\
&\quad + 4x_4x'_3 \cos u_{11} + 4x_3x'_4 \cos u_{11} - 4x_3x_4u'_{11} \sin u_{11}, \\
&\quad - 4x_4x'_2 \cos u_{11} - 4x_2x'_4 \cos u_{11} + 4x_2x_4u'_{11} \sin u_{11} \\
&\quad \left. + 4x_4x'_1 \sin u_{11} + 4x_1x'_4 \sin u_{11} + 4x_1x_4u'_{11} \cos u_{11}, 0 \right)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\Omega \mathcal{Z} &= \left(-4x_4z_3 \sin u_{11} - 4x_3z_4 \sin u_{11} - 4x_3x_4\eta_{11} \cos u_{11}, \right. \\
&\quad + 4x_4z_3 \cos u_{11} + 4x_3z_4 \cos u_{11} - 4x_3x_4\eta_{11} \sin u_{11}, \\
&\quad - 4x_4z_2 \cos u_{11} - 4x_2z_4 \cos u_{11} + 4x_2x_4\eta_{11} \sin u_{11} \\
&\quad \left. + 4x_4z_1 \sin u_{11} + 4x_1z_4 \sin u_{11} + 4x_1x_4\eta_{11} \cos u_{11}, 0 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle &= \frac{1}{4} & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= 1 & \langle \mathcal{Z}, \mathbf{R}_1^1 \rangle &= 2x_3x_4 \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= 0 & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 0 & \langle \mathcal{Z}, \mathbf{R}_2^1 \rangle &= -4x_2x_4 \cos u_{11} + 4x_1x_4 \sin u_{11} \\ \langle \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 0 & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 1 & \langle \mathcal{Z}, \mathbf{R}_3^1 \rangle &= 0\end{aligned}$$

eşitlikleri

$$\eta_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathcal{Z}, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_1^1 \rangle \\ \langle \mathcal{Z}, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_2^1 \rangle \\ \langle \mathcal{Z}, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle & \langle \mathbf{R}_3^1, \mathbf{R}_3^1 \rangle \end{vmatrix}}{\det \mathcal{C}^1}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\eta_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 2x_3x_4 & 0 & 0 \\ -4x_2x_4 \cos u_{11} + 4x_1x_4 \sin u_{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\frac{1}{4}}$$

olup, $\eta_{11} = 8x_3x_4$ bulunur. Böylece

$$z_1 = -4x_3x_4 \sin u_{11}, z_2 = 4x_3x_4 \cos u_{11}, z_3 = -4x_2x_4 \cos u_{11} + 4x_1x_4 \sin u_{11}, z_4 = 0$$

değerleri de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Omega \mathcal{Z} &= (8x_2x_4^2 \sin 2u_{11} - 16x_1x_4^2 \sin^2 u_{11} - 32x_3^2x_4^2 \cos u_{11}, \\ &8x_1x_4^2 \sin 2u_{11} - 16x_2x_4^2 \cos^2 u_{11} - 32x_3^2x_4^2 \sin u_{11}, \\ &32x_2x_3x_4^2 \sin u_{11} - 16x_3x_4^2 + 32x_1x_3x_4^2 \cos u_{11}, 0)\end{aligned}$$

ve $\Omega \mathcal{Z}(P) = (-8, -16, 0, 0)$ elde edilir. $\Omega \mathcal{Z}$ vektörüne Ω operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Omega^2 \mathcal{Z} &= (256x_3^3x_4^3 \sin u_{11} + 256x_2x_3x_4^3 \cos^2 u_{11} - 256x_1x_3x_4^3 \sin 2u_{11} + 128x_2x_3x_4^3 \cos 2u_{11} \\ &+ 32x_3x_4^3 \sin 2u_{11} \cos u_{11} + 64x_3x_4^3 \sin^3 u_{11}, -256x_3^3x_4^3 \cos u_{11} + 256x_2x_3x_4^3 \sin 2u_{11} \\ &- 256x_1x_3x_4^3 \sin^2 u_{11} - 64x_3x_4^3 \cos^3 u_{11} + 128x_1x_3x_4^3 \cos 2u_{11} - 32x_3x_4^3 \sin u_{11} \sin 2u_{11}, \\ &256x_2x_3^2x_4^3 \cos u_{11} - 64x_2^2x_4^3 \sin 2u_{11} + 128x_1x_2x_4^3 \sin^2 u_{11} + 64x_2x_4^3 \cos u_{11} \\ &- 64x_1x_4^3 \sin u_{11} - 128x_1x_2x_4^3 \cos^2 u_{11} + 64x_1^2x_4^3 \sin 2u_{11} - 256x_1x_3^2x_4^3 \sin u_{11}, 0)\end{aligned}$$

ve $\Omega^2 \mathcal{Z}(P) = (64\sqrt{2}, -96\sqrt{2}, -64, 0)$ bulunur. Benzer şekilde $\Omega^2 \mathcal{Z}$ vektörüne Ω

operatörü uygulanırsa $\Omega^3 \mathcal{Z}(P)$ elde edilir. Buradan Frenet vektörleri

$$\mathbf{V}_2(P) = \left(-\frac{\sqrt{39}}{39}, -\frac{2\sqrt{39}}{39}, -\frac{\sqrt{78}}{39}, 0 \right)$$

$$\mathbf{V}_3(P) = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{26}}{13}, 0 \right)$$

$$\mathbf{V}_4(P) = (0, 0, 0, -1)$$

olarak bulunur. Eğrilikler ise

$$\kappa_1(P) = \frac{2\sqrt{39}}{9},$$

$$\kappa_2(P) = -\frac{6\sqrt{2}}{13},$$

$$\kappa_3(P) = 0$$

şeklinde elde edilir.

$\mathbb{E}^n$ 'DE PARAMETRİK FORMDA VERİLEN İKİ YÜZEYİN ARAKESİT PROBLEMİ

Bu bölümde $\mathbb{E}^n$ uzayında parametrik formda verilen iki yüzeyin arakesit problemi göz önüne alınmıştır. Arakesit eğrisinin Frenet vektörlerinin ve eğriliklerinin hesaplanabilmesi için eğrinin yüksek mertebeden türevlerine ihtiyaç duyulduğundan, öncelikle $\mathbb{E}^n$ uzayında parametrik bir yüzey üzerindeki bir eğrinin yüksek mertebeden türevlerinin nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir. Yüksek boyutlu uzayda bir eğrinin yüksek mertebeden türevlerinin Frenet çatısına göre katsayılarının yorucu hesaplamaları, üretilen MATLAB program kodlarıyla daha esnek bir şekilde yapılabilmiştir. Daha sonra arakesit eğrisinin Frenet elemanlarının nasıl bulunabileceği ifade edilmiştir.

Bu bölümde elde edilen sonuçlar [39] numaralı makalemizde yayımlanmıştır.

$\mathbb{E}^n$ uzayında $X(u_1, u_2)$ parametrik denklemiyle verilen yüzey üzerindeki bir $\alpha(s)$ eğrisi için $\alpha(s) = X(u_1(s), u_2(s))$ yazılabilir. Bu durumda

$$\alpha'(s) = \sum_{i_1=1}^2 X_{i_1} u'_{i_1}, \quad (7.1)$$

$$\alpha''(s) = \sum_{i_1=1}^2 X_{i_1} u''_{i_1} + \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u'_{i_1} u'_{i_2}, \quad (7.2)$$

$$\alpha'''(s) = \sum_{i_1=1}^2 X_{i_1} u'''_{i_1} + 3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u''_{i_1} u'_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 X_{i_1 i_2 i_3} u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3}, \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(4)}(s) = & \sum_{i_1=1}^2 X_{i_1} u^{(4)}_{i_1} + 4 \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u'''_{i_1} u'_{i_2} + 3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u''_{i_1} u''_{i_2} \\ & + 6 \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 X_{i_1 i_2 i_3} u''_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3} + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^2 X_{i_1 i_2 i_3 i_4} u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3} u'_{i_4} \end{aligned} \quad (7.4)$$

olup,

$$\begin{aligned} X_{i_1} &= \frac{\partial X}{\partial u_{i_1}}, & X_{i_1 i_2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial u_{i_2} \partial u_{i_1}} \\ X_{i_1 i_2 i_3} &= \frac{\partial^3 X}{\partial u_{i_3} \partial u_{i_2} \partial u_{i_1}}, & X_{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \frac{\partial^4 X}{\partial u_{i_4} \partial u_{i_3} \partial u_{i_2} \partial u_{i_1}}, \quad i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, 2 \end{aligned}$$

şeklindedir.

$\mathbb{E}^n$ uzayında parametrik yüzey üzerindeki bir eğrinin yüksek mertebeden türevlerinin nasıl bulunabileceği aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 7.1. $\mathbb{E}^n$ uzayında $X(u_1, u_2)$ parametrik denklemiyle verilen bir yüzey $\mathcal{S}$ ve bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri $\alpha(s) = X(u_1(s), u_2(s))$ olsun. Bu durumda α eğrisinin m -yinci mertebeden türevi

$$\begin{aligned} \alpha^{(m)} &= \mathcal{C}_1 \sum_{i_1=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1} u_{i_1}^{(m)} + \sum_{r_1=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\mathcal{C}_2 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-r_1)} u_{i_2}^{(r_1)} \right) \\ &+ \sum_{r_1, r_2=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\mathcal{C}_3 \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}^{(m-r_1-1)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_1-r_2+1)} \right) \\ &+ \sum_{r_1, r_2, r_3=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\mathcal{C}_4 \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2 i_4 r_3}} X_{i_1 i_2 i_3 i_4} u_{i_1}^{(m-r_1-2)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_3)} u_{i_4}^{(r_1-r_2-r_3+2)} \right) \\ &\vdots \\ &+ \sum_{r_1, r_2, \dots, r_{m-2}=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\mathcal{C}_{m-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 \dots i_{m-1} r_{m-2}}} X_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}} u_{i_1}^{(m-r_1-(m-3))} \dots u_{i_{m-1}}^{(r_1-r_2-\dots-r_{m-2}+(m-3))} \right) \\ &+ \mathcal{C}_m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^2 \frac{1}{m!} X_{i_1 i_2 \dots i_m} u_{i_1}' u_{i_2}' \dots u_{i_m}', \quad m \geq 2, \end{aligned} \tag{7.5}$$

olarak hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \binom{m}{m}, & \mathcal{C}_2 &= \binom{m}{m-r_1} \binom{r_1}{r_1}, \\ \mathcal{C}_3 &= \binom{m}{m-r_1-1} \binom{r_1+1}{r_2} \binom{r_1-r_2+1}{r_1-r_2+1}, \\ \mathcal{C}_4 &= \binom{m}{m-r_1-2} \binom{r_1+2}{r_2} \binom{r_1-r_2+2}{r_3} \binom{r_1-r_2-r_3+2}{r_1-r_2-r_3+2}, \\ &\vdots \\ \mathcal{C}_m &= \binom{m}{1} \binom{m-1}{1} \binom{m-2}{1} \dots \binom{1}{1}, \quad (\text{her } \mathcal{C}_\ell, \ell \text{ tane kombinasyon içerir}) \end{aligned}$$

ve $\mathcal{C}_i$, $1 < i < m$ katsayı kombinasyonlarının belirlenişi aşağıdaki şekildedir:

$$\binom{m}{m-r_1-(i-2)} \binom{r_1+i-2}{r_2} \dots \binom{r_1-r_2-\dots-r_{i-2}+i-2}{r_{i-1}} \binom{r_1-r_2-\dots-r_{i-1}+i-2}{r_1-r_2-\dots-r_{i-1}+i-2}.$$

$\binom{a}{b}$ kombinasyonlarındaki her bir b terimi u_{i_j} 'nin $u_{i_1}^{(t_1)}, u_{i_2}^{(t_2)}, u_{i_3}^{(t_3)}, u_{i_4}^{(t_4)}, u_{i_5}^{(t_5)}, \dots, u_{i_m}^{(t_m)}$ kuvvetlerini temsil etmektedir. Bu terimler $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq t_m$ olacak şekilde artmayan bir dizilimle oluşturulmalıdır. $t_i \leq 0, 1 \leq i \leq m$ olması durumunda elde edilen ilgili terimler toplama eklenmez (Ayrıntılı açıklama Ek-B kısmında verilmiştir). $k_{i_1}, k_{i_1 i_{2r_1}}, k_{i_1 i_{2r_1} i_{3r_2} i_{4r_3}}, \dots, k_{i_1 i_{2r_1} \dots i_{m-1} r_{m-2}}$ katsayılarının hesaplanması ise Tablo 7.1' de gösterilmiştir. Burada her $q!$ tamsayısındaki q tamsayısı her bir kuvvetin tekrarlanma sayısını ifade etmektedir.

Tablo 7.1 $k_{i_1}, k_{i_1 i_{2r_1}}, k_{i_1 i_{2r_1} i_{3r_2} i_{4r_3}}, \dots, k_{i_1 i_{2r_1} \dots i_{m-1} r_{m-2}}$ katsayılarının belirlenişi

	$k_{i_1}, k_{i_1 i_{2r_1}}, k_{i_1 i_{2r_1} i_{3r_2} i_{4r_3}}, \dots, k_{i_1 i_{2r_1} \dots i_{m-1} r_{m-2}}$
$u_{i_1}^{(t_1)} u_{i_2}^{(t_2)} u_{i_3}^{(t_3)} u_{i_4}^{(t_4)} u_{i_5}^{(t_5)} \dots u_{i_m}^{(t_m)}$	1!
$u_{i_1}^{(t_1)} u_{i_2}^{(t_1)} u_{i_3}^{(t_3)} u_{i_4}^{(t_4)} u_{i_5}^{(t_5)} \dots u_{i_m}^{(t_m)}$	2!
$u_{i_1}^{(t_1)} u_{i_2}^{(t_1)} u_{i_3}^{(t_2)} u_{i_4}^{(t_2)} u_{i_5}^{(t_5)} \dots u_{i_m}^{(t_m)}$	2!2!
$u_{i_1}^{(t_1)} u_{i_2}^{(t_1)} u_{i_3}^{(t_1)} u_{i_4}^{(t_4)} u_{i_5}^{(t_5)} \dots u_{i_m}^{(t_m)}$	3!
$u_{i_1}^{(t_1)} u_{i_2}^{(t_1)} u_{i_3}^{(t_1)} u_{i_4}^{(t_2)} u_{i_5}^{(t_2)} \dots u_{i_m}^{(t_m)}$	3!2!
$\vdots$	$\vdots$
$u_{i_1}^{(t_1)} u_{i_2}^{(t_1)} u_{i_3}^{(t_1)} u_{i_4}^{(t_1)} u_{i_5}^{(t_1)} \dots u_{i_m}^{(t_1)}$	m!

İspat. Tümevarım yöntemiyle ispatlayalım.

Adım I: (7.5) formülünün $m = 2$ için doğru olduğunu gösterelim. Bu durumda, $r_1 = 1$ olacağından

$$\begin{aligned}
 \alpha''(s) &= \binom{2}{2} \sum_{i_1=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1} u_{i_1}'' + \binom{2}{1} \binom{1}{1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_{2r_1}}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}' u_{i_2}' \\
 &= \frac{1}{k_1} X_1 u_1'' + \frac{1}{k_2} X_2 u_2'' + 2 \frac{1}{k_{11_1}} X_{11} u_1' u_1' + 2 \frac{1}{k_{12_1}} X_{12} u_1' u_2' + 2 \frac{1}{k_{21_1}} X_{21} u_2' u_1' \\
 &\quad + 2 \frac{1}{k_{22_1}} X_{22} u_2' u_2'
 \end{aligned}$$

yazılır. Tablo 1'de verilen koşullara göre $k_1 = k_2 = 1, k_{11_1} = k_{12_1} = k_{21_1} = k_{22_1} = 2$ olup, bu değerler yerine yazılırsa (7.2) eşitliğinde verildiği gibi

$$\begin{aligned}
 \alpha''(s) &= X_1 u_1'' + X_2 u_2'' + X_{11} u_1' u_1' + X_{12} u_1' u_2' + X_{21} u_2' u_1' + X_{22} u_2' u_2' \\
 &= \sum_{i_1=1}^2 X_{i_1} u_{i_1}'' + \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}' u_{i_2}'
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $m = 2$ için formül doğrudur.

Adım II: (7.5) formülünün m için doğru olduğunu kabul edelim.

Adım III: Şimdi (7.5) formülünün $m + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. (7.5) eşitliğinden türev alınırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha^{(m+1)} = & C_1 \left[\sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m)} u'_{i_2} + \sum_{i_1=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1} u_{i_1}^{(m+1)} \right] \\
& + \sum_{r_1=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_2 \left[\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}^{(m-r_1)} u_{i_2}^{(r_1)} u'_{i_3} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-r_1+1)} u_{i_2}^{(r_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-r_1)} u_{i_2}^{(r_1+1)} \right] \\
& + \sum_{r_1, r_2=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_3 \left[\sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2}} X_{i_1 i_2 i_3 i_4} u_{i_1}^{(m-r_1-1)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_1-r_2+1)} u'_{i_4} \right. \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}^{(m-r_1)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_1-r_2+1)} \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}^{(m-r_1-1)} u_{i_2}^{(r_2+1)} u_{i_3}^{(r_1-r_2+1)} \\
& \quad \left. + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}^{(m-r_1-1)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_1-r_2+2)} \right] \\
& \vdots \\
& + C_m \left[\sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m+1}=1}^2 \frac{1}{m!} X_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} u'_{i_1} u'_{i_2} \dots u'_{i_{m+1}} \right. \\
& \quad \left. + m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^2 \frac{1}{m!} X_{i_1 i_2 \dots i_m} u''_{i_1} u'_{i_2} \dots u'_{i_m} \right]
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\alpha^{(m+1)} = & C_1 \underbrace{\sum_{i_1=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1} u_{i_1}^{(m+1)}}_1 \\
& + C_1 \underbrace{\sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m)} u'_{i_2} + \sum_{r_1=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(C_2 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1}} X_{i_1 i_2} [u_{i_1}^{(m-r_1+1)} u_{i_2}^{(r_1)} + u_{i_1}^{(m-r_1)} u_{i_2}^{(r_1+1)}] \right)}_2 \\
& + \sum_{r_1=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(C_2 \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}^{(m-r_1)} u_{i_2}^{(r_1)} u'_{i_3} \right) \\
& + \sum_{r_1, r_2=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(C_3 \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2}} X_{i_1 i_2 i_3} [u_{i_1}^{(m-r_1)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_1-r_2+1)} + u_{i_1}^{(m-r_1-1)} u_{i_2}^{(r_2+1)} u_{i_3}^{(r_1-r_2+1)}] \right) \\
& + \sum_{r_1, r_2=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(C_3 \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}^{(m-r_1-1)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_1-r_2+2)} \right) \\
& \vdots \\
& + C_m \underbrace{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m+1}=1}^2 \frac{1}{m!} X_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} u'_{i_1} u'_{i_2} \dots u'_{i_{m+1}}}_{m+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $r_i \in [1, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor]$ olup, r_i 'nin değerleri göz önüne alınırsa, $1, 2, 3, \dots, m+1$ toplamları aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$1: \binom{m+1}{m+1} \sum_{i_1=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1} u_{i_1}^{(m+1)}$$

olarak yazılabilir.

$$2: C_1 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m)} u'_{i_2} + \sum_{r_1=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(C_2 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1}} X_{i_1 i_2} [u_{i_1}^{(m-r_1+1)} u_{i_2}^{(r_1)} + u_{i_1}^{(m-r_1)} u_{i_2}^{(r_1+1)}] \right)$$

toplamını açalım.

- m tek ise $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \frac{m-1}{2}$ olup,

$$\begin{aligned} 2: & \binom{m}{m} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m)} u'_{i_2} + \binom{m}{m-1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m)} u''_{i_2} + \binom{m}{m-1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-1)} u''_{i_2} \\ & + \binom{m}{m-2} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-1)} u''_{i_2} + \binom{m}{m-2} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-2)} u'''_{i_2} + \dots + \\ & + \binom{m}{m-(\frac{m-3}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-3}{2})+1)} u_{i_2}^{(\frac{m-3}{2})} + \binom{m}{m-(\frac{m-3}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-3}{2}))} u_{i_2}^{((\frac{m-3}{2})+1)} \\ & + \binom{m}{m-(\frac{m-1}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-1}{2})+1)} u_{i_2}^{(\frac{m-1}{2})} + \binom{m}{m-(\frac{m-1}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-1}{2}))} u_{i_2}^{((\frac{m-1}{2})+1)} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Kombinasyon özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2: & \binom{m+1}{m} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m)} u'_{i_2} + \binom{m+1}{m-1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-1)} u''_{i_2} + \binom{m+1}{m-3} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-2)} u'''_{i_2} \\ & + \dots + \binom{m+1}{m-(\frac{m-3}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-1}{2})+1)} u_{i_2}^{(\frac{m-1}{2})} + \binom{m}{m-(\frac{m-1}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-1}{2}))} u_{i_2}^{((\frac{m-1}{2})+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda bu toplam

$$\begin{aligned} 2: & \binom{m+1}{m} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m)} u'_{i_2} + \binom{m+1}{m-1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-1)} u''_{i_2} + \binom{m+1}{m-3} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-2)} u'''_{i_2} \\ & + \dots + \binom{m+1}{m-(\frac{m-3}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-1}{2})+1)} u_{i_2}^{(\frac{m-1}{2})} + \frac{1}{2} \binom{m+1}{m-(\frac{m-1}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-1}{2}))} u_{i_2}^{((\frac{m-1}{2})+1)} \end{aligned}$$

olarak da yazılabileceğinden

$$2: \sum_{r_1=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \left(\binom{m+1}{m+1-r_1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-r_1+1)} u_{i_2}^{(r_1)} \right)$$

elde edilir.

- m çift ise $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \frac{m}{2}$ olup,

$$\begin{aligned}
2: & \binom{m}{m-1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m)} u'_{i_2} + \binom{m}{m-1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m)} u''_{i_2} + \binom{m}{m-1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-1)} u''_{i_2} \\
& + \binom{m}{m-2} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-1)} u''_{i_2} + \binom{m}{m-2} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-2)} u'''_{i_2} + \dots + \\
& + \binom{m}{m-(\frac{m-2}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-2}{2})+1)} u_{i_2}^{(\frac{m-2}{2})} + \binom{m}{m-(\frac{m-2}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-2}{2}))} u_{i_2}^{((\frac{m-2}{2})+1)} \\
& + \frac{1}{2} \binom{m}{m-\frac{m}{2}} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m}{2})+1)} u_{i_2}^{(\frac{m}{2})} + \frac{1}{2} \binom{m}{m-\frac{m}{2}} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-\frac{m}{2})} u_{i_2}^{(\frac{m}{2}+1)}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Kombinasyon özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2: & \binom{m+1}{m} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m)} u'_{i_2} + \binom{m+1}{m-1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-1)} u''_{i_2} + \binom{m+1}{m-3} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-2)} u'''_{i_2} \\
& + \dots + \binom{m+1}{m-(\frac{m-2}{2})} \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-(\frac{m-2}{2}))} u_{i_2}^{((\frac{m-2}{2})+1)}
\end{aligned}$$

olup,

$$2: \sum_{r_1=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \left(\binom{m+1}{m+1-r_1} \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(m-r_1+1)} u_{i_2}^{(r_1)} \right)$$

elde edilir.

Benzer şekilde m sayısının tek sayı veya çift sayı olma durumu incelenirse geriye kalan toplamalar

$$\begin{aligned}
3: & \sum_{r_1, r_2=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \left(\binom{m+1}{m-r_1} \binom{r_1+1}{r_2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}^{(m-r_1)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_1-r_2+1)} \right) \\
& \vdots \\
m+1: & \binom{m+1}{1} \binom{m}{1} \binom{m-1}{1} \dots \binom{1}{1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m+1}=1}^2 \frac{1}{(m+1)!} X_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} u'_{i_1} u'_{i_2} \dots u'_{i_{m+1}}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan $1 + 2 + 3 + \dots + m+1$ toplamı istenen sonucu verir. ■

7.1 $\mathbb{E}^n$ 'de Parametrik Formda Verilen İki Yüzeyin Enine Arakesiti

$\mathbb{E}^n$, $n \geq 4$, uzayında

$$X(u_1, u_2) = (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), \dots, f_n(u_1, u_2))$$

ve

$$Y(w_1, w_2) = (g_1(w_1, w_2), g_2(w_1, w_2), \dots, g_n(w_1, w_2))$$

parametrik denklemleriyle verilen ve enine kesişen regüler yüzeyler, sırasıyla, $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ olsun. Böylece $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$ ve $\{Y_{w_1}, Y_{w_2}\}$ sistemleri, sırasıyla, $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ yüzeylerinin teğet uzaylarını gerer. Bu yüzeylerin birim hızlı arakesit eğrisi $\alpha(s)$ olsun.

Teğet vektörlerden oluşan $W = \{X_{u_1}, X_{u_2}, Y_{w_1}, Y_{w_2}\}$ kümesini göz önüne alalım. Arakesit eğrisi üzerindeki bir noktada aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir:

- i. Eğer W kümesindeki teğet vektörler lineer bağımsız ise $\alpha(s)$ arakesit eğrisi bir noktadan oluşur.
- ii. Eğer W kümesi arakesit noktasında sadece iki lineer bağımsız vektörden oluşuyorsa, bu durumda $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ yüzeylerinin teğet uzayları bu noktada çakışır. Bu şekilde oluşan arakesit problemleri *teğetsel arakesit* olarak adlandırılır.
- iii. Eğer W kümesi arakesit noktasında üç lineer bağımsız vektörden oluşuyorsa, bu durumda $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ yüzeylerinin teğet uzayları birbirinden farklıdır. Bu şekilde oluşan arakesit problemleri *enine arakesit* olarak adlandırılır.

Bu bölümde üçüncü durumu yani yüzeylerin enine arakesitini inceleyeceğiz.

Arakesit eğrisinin bir $P = X(u_1(0), u_2(0)) = Y(w_1(0), w_2(0))$ noktasındaki Frenet çatısını $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n\}$ ile gösterelim.

7.1.1 Teğet Vektör (α')

$\mathbf{V}_1$ teğet vektörünün elde edilebilmesi için $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ yüzeylerinin normal uzaylarının bazıları bulunmalıdır. $\mathcal{S}_1$ yüzeyinin normal uzayının bir bazını elde etmek için $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$ sistemi ile lineer bağımsız olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ uzayının standart bazı olan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ sisteminden $n - 3$ tane vektör seçelim. $\{X_{u_1}, X_{u_2}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-3}\}$ sisteminin P noktasında lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. P noktasında

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_1^X &= X_{u_1} \times X_{u_2} \times \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \times \dots \times \mathbf{e}_{n-3}, \\
 \mathbf{N}_2^X &= X_{u_1} \times X_{u_2} \times \mathbf{N}_1^X \times \mathbf{e}_1 \times \dots \times \mathbf{e}_{n-4}, \\
 \mathbf{N}_3^X &= X_{u_1} \times X_{u_2} \times \mathbf{N}_1^X \times \mathbf{N}_2^X \times \mathbf{e}_1 \times \dots \times \mathbf{e}_{n-5}, \\
 &\vdots \\
 \mathbf{N}_{n-2}^X &= X_{u_1} \times X_{u_2} \times \mathbf{N}_1^X \times \mathbf{N}_2^X \times \dots \times \mathbf{N}_{n-3}^X
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

vektörlerini tanımlayalım. (7.6) eşitliklerinden $\{\mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_2^X, \dots, \mathbf{N}_{n-2}^X\}$ sisteminin $\mathcal{S}_1$ yüzeyinin P noktasındaki normal uzayının bir ortogonal bazı olduğu görülmektedir. Benzer şekilde $\{Y_{w_1}, Y_{w_2}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-3}\}$ sisteminin P noktasında lineer bağımsız

olduğunu kabul ederek

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1^Y &= Y_{w_1} \times Y_{w_2} \times \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \times \dots \times \mathbf{e}_{n-3}, \\
\mathbf{N}_2^Y &= Y_{w_1} \times Y_{w_2} \times \mathbf{N}_1^Y \times \mathbf{e}_1 \times \dots \times \mathbf{e}_{n-4}, \\
\mathbf{N}_3^Y &= Y_{w_1} \times Y_{w_2} \times \mathbf{N}_1^Y \times \mathbf{N}_2^Y \times \mathbf{e}_1 \times \dots \times \mathbf{e}_{n-5}, \\
&\vdots \\
\mathbf{N}_{n-2}^Y &= Y_{w_1} \times Y_{w_2} \times \mathbf{N}_1^Y \times \mathbf{N}_2^Y \times \dots \times \mathbf{N}_{n-3}^Y
\end{aligned} \tag{7.7}$$

şeklinde tanımlanırsa, (7.7) eşitliklerinden $\{\mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_2^Y, \dots, \mathbf{N}_{n-2}^Y\}$ sisteminin $\mathcal{S}_2$ yüzeyinin P noktasındaki normal uzayının bir ortogonal bazı olduğu görülür.

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_2^X, \dots, \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_2^Y, \dots, \mathbf{N}_{n-2}^Y\}$$

kümesini göz önüne alalım ve $\mathcal{N}$ kümesi tarafından gerilen alt uzayın boyutu d olsun. Bu durumda d 'nin değerinin $n-2$, $n-1$ veya n olabileceği açıktır. d 'nin alacağı değerlere göre aşağıdaki arakesit tipleri mevcuttur:

- a) Eğer $d = n$ ise P arakesit noktası izole bir noktadır.
- b) Eğer $d = n-2$ ise $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ yüzeylerinin normal uzayları P arakesit noktasında çakışır, yani arakesit, bir teğetsel arakesittir.
- c) Eğer $d = n-1$ ise P noktasında enine arakesit vardır.

Biz enine arakesit durumunu göz önüne aldığımızdan, $d = n-1$ olduğunu ve $\{\mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_2^X, \dots, \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_\ell^Y\}$, $\ell \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ sisteminin P noktasında lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. $\mathbf{V}_1 \perp \mathbf{N}_j^X$, $1 \leq j \leq n-2$ ve $\mathbf{V}_1 \perp \mathbf{N}_\ell^Y$ olduğundan arakesit eğrisinin teğet vektörü

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{N}_1^X \times \mathbf{N}_2^X \times \dots \times \mathbf{N}_{n-2}^X \times \mathbf{N}_\ell^Y}{\|\mathbf{N}_1^X \times \mathbf{N}_2^X \times \dots \times \mathbf{N}_{n-2}^X \times \mathbf{N}_\ell^Y\|} \tag{7.8}$$

olarak elde edilir. Böylece $\mathbf{V}_1 = X_{u_1} u'_1 + X_{u_2} u'_2$ eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla, X_{u_1} ve X_{u_2} ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{V}_1, X_{u_1} \rangle &= \langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle u'_1 + \langle X_{u_2}, X_{u_1} \rangle u'_2 \\
\langle \mathbf{V}_1, X_{u_2} \rangle &= \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle u'_1 + \langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle u'_2
\end{aligned}$$

olup, $\langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle = E$, $\langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = \langle X_{u_2}, X_{u_1} \rangle = F$, $\langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle = G$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{V}_1, X_{u_1} \rangle &= Eu'_1 + Fu'_2 \\
\langle \mathbf{V}_1, X_{u_2} \rangle &= Fu'_1 + Gu'_2
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar determinanı $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \neq 0$ olduğundan, denklem sistemi Cramer yöntemi ile çözülürse

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{V}_1, X_{u_1} \rangle & F \\ \langle \mathbf{V}_1, X_{u_2} \rangle & G \end{vmatrix}}{EG - F^2} \Rightarrow u'_1 = \frac{G\langle \mathbf{V}_1, X_{u_1} \rangle - F\langle \mathbf{V}_1, X_{u_2} \rangle}{EG - F^2}$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} E & \langle \mathbf{V}_1, X_{u_1} \rangle \\ F & \langle \mathbf{V}_1, X_{u_2} \rangle \end{vmatrix}}{EG - F^2} \Rightarrow u'_2 = \frac{E\langle \mathbf{V}_1, X_{u_2} \rangle - F\langle \mathbf{V}_1, X_{u_1} \rangle}{EG - F^2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\mathbf{V}_1 = Y_{w_1}w'_1 + Y_{w_2}w'_2$ eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla, Y_{w_1} ve Y_{w_2} ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_1, Y_{w_1} \rangle &= \langle Y_{w_1}, Y_{w_1} \rangle w'_1 + \langle Y_{w_2}, Y_{w_1} \rangle w'_2 \\ \langle \mathbf{V}_1, Y_{w_2} \rangle &= \langle Y_{w_1}, Y_{w_2} \rangle w'_1 + \langle Y_{w_2}, Y_{w_2} \rangle w'_2 \end{aligned}$$

olup, $\langle Y_{w_1}, Y_{w_1} \rangle = e$, $\langle Y_{w_1}, Y_{w_2} \rangle = \langle Y_{w_2}, Y_{w_1} \rangle = f$, $\langle Y_{w_2}, Y_{w_2} \rangle = g$, $\mathcal{S}_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_1, Y_{w_1} \rangle &= eu'_1 + fw'_2 \\ \langle \mathbf{V}_1, Y_{w_2} \rangle &= fu'_1 + gu'_2 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümü

$$w'_1 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{V}_1, Y_{w_1} \rangle & f \\ \langle \mathbf{V}_1, Y_{w_2} \rangle & g \end{vmatrix}}{eg - f^2} \Rightarrow w'_1 = \frac{g\langle \mathbf{V}_1, Y_{w_1} \rangle - f\langle \mathbf{V}_1, Y_{w_2} \rangle}{eg - f^2}$$

$$w'_2 = \frac{\begin{vmatrix} e & \langle \mathbf{V}_1, Y_{w_1} \rangle \\ f & \langle \mathbf{V}_1, Y_{w_2} \rangle \end{vmatrix}}{eg - f^2} \Rightarrow w'_2 = \frac{e\langle \mathbf{V}_1, Y_{w_2} \rangle - f\langle \mathbf{V}_1, Y_{w_1} \rangle}{eg - f^2}$$

şeklinde elde edilir.

7.1.2 İkinci Mertebeden Türev (α'')

α'' vektörü V_1 vektörüne dik olduğundan

$$\alpha'' = \lambda_1 \mathbf{N}_1^X + \lambda_2 \mathbf{N}_2^X + \dots + \lambda_{n-2} \mathbf{N}_{n-2}^X + \lambda_{n-1} \mathbf{N}_\ell^Y \quad (7.9)$$

yazılabilir. Burada λ_i , $1 \leq i \leq n-1$ katsayılarını bulmalıyız. (7.9) eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla, $\mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_2^X, \dots, \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_\ell^Y$ ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle \lambda_1 + \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_1^X \rangle \lambda_2 + \dots + \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_1^X \rangle \lambda_{n-2} + \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_1^X \rangle \lambda_{n-1} &= \langle \alpha'', \mathbf{N}_1^X \rangle \\ \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_2^X \rangle \lambda_1 + \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle \lambda_2 + \dots + \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_2^X \rangle \lambda_{n-2} + \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_2^X \rangle \lambda_{n-1} &= \langle \alpha'', \mathbf{N}_2^X \rangle \\ &\vdots \\ \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \lambda_1 + \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \lambda_2 + \dots + \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \lambda_{n-2} + \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \lambda_{n-1} &= \langle \alpha'', \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \\ \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \lambda_1 + \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \lambda_2 + \dots + \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \lambda_{n-2} + \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \lambda_{n-1} &= \langle \alpha'', \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \end{aligned}$$

olup, $\{\mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_2^X, \dots, \mathbf{N}_{n-2}^X\}$ sistemi ortogonal olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle \lambda_1 + \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_1^X \rangle \lambda_{n-1} &= \langle \alpha'', \mathbf{N}_1^X \rangle \\ \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle \lambda_2 + \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_2^X \rangle \lambda_{n-1} &= \langle \alpha'', \mathbf{N}_2^X \rangle \\ &\vdots \\ \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \lambda_{n-2} + \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \lambda_{n-1} &= \langle \alpha'', \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \\ \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \lambda_1 + \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \lambda_2 + \dots + \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \lambda_{n-2} + \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \lambda_{n-1} &= \langle \alpha'', \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemin katsayılar determinanı

$$\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle & 0 & \dots & 0 & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_1^X \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle & \dots & 0 & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_2^X \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \\ \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \dots & \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \end{vmatrix}$$

olup, (2.1) gereğince

$$\det \mathcal{A} = \|\mathbf{N}_1^X \times \mathbf{N}_2^X \times \dots \times \mathbf{N}_{n-2}^X \times \mathbf{N}_\ell^Y\|^2 \neq 0$$

bulunur. O halde Cramer metodu ile çözüm yapılırsa

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \alpha'', \mathbf{N}_1^X \rangle & 0 & \cdots & 0 & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_1^X \rangle \\ \langle \alpha'', \mathbf{N}_2^X \rangle & \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle & \cdots & 0 & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_2^X \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha'', \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle & 0 & \cdots & \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \\ \langle \alpha'', \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \cdots & \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \end{vmatrix}}{\det \mathcal{A}}$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle & \langle \alpha'', \mathbf{N}_1^X \rangle & \cdots & 0 & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_1^X \rangle \\ 0 & \langle \alpha'', \mathbf{N}_2^X \rangle & \cdots & 0 & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_2^X \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \langle \alpha'', \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle & \cdots & \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \\ \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \langle \alpha'', \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \cdots & \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \end{vmatrix}}{\det \mathcal{A}}$$

⋮

$$\lambda_{n-2} = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle & 0 & \cdots & \langle \alpha'', \mathbf{N}_1^X \rangle & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_1^X \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle & \cdots & \langle \alpha'', \mathbf{N}_2^X \rangle & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_2^X \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \alpha'', \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \\ \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \cdots & \langle \alpha'', \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \langle \mathbf{N}_\ell^Y, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \end{vmatrix}}{\det \mathcal{A}}$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle & 0 & \cdots & 0 & \langle \alpha'', \mathbf{N}_1^X \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle & \cdots & 0 & \langle \alpha'', \mathbf{N}_2^X \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle & \langle \alpha'', \mathbf{N}_{n-2}^X \rangle \\ \langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \cdots & \langle \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle & \langle \alpha'', \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \end{vmatrix}}{\det \mathcal{A}}$$

veya $\mathcal{A}$ matrisinin (j, i) kofaktörü $\mathcal{A}_{ji}$ olmak üzere

$$\lambda_i = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \left\{ \langle \alpha'', \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \mathcal{A}_{(n-1)i} + \sum_{j=1}^{n-2} \langle \alpha'', \mathbf{N}_j^X \rangle \mathcal{A}_{ji} \right\}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (7.10)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan (7.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\langle \alpha'', \mathbf{N}_j^X \rangle &= \sum_{i_1=1}^2 \langle X_{i_1}, \mathbf{N}_j^X \rangle u''_{i_1} + \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle X_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_j^X \rangle u'_{i_1} u'_{i_2} \\ &= \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle X_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_j^X \rangle u'_{i_1} u'_{i_2}\end{aligned}\quad (7.11)$$

ve

$$\begin{aligned}\langle \alpha'', \mathbf{N}_\ell^Y \rangle &= \sum_{i_1=1}^2 \langle Y_{i_1}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle w''_{i_1} + \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle Y_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle w'_{i_1} w'_{i_2} \\ &= \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle Y_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle w'_{i_1} w'_{i_2}\end{aligned}\quad (7.12)$$

elde edilir. (7.11) ve (7.12) eşitliklerinin sağ tarafı bilindiğinden bu eşitlikler (7.10) eşitliğinde yerine yazılırsa $\lambda_i, 1 \leq i \leq n-1$, katsayıları elde edilir. Böylece (7.9) kullanılarak α'' vektörü ve (7.2) eşitliği kullanılarak da $u''_1, u''_2, w''_1, w''_2$ değerleri elde edilir. Ayrıca, Gram-Schmidt ortogonalleştirme metodu kullanılarak

$$\mathbf{E}_2 = \alpha'' - \langle \alpha'', \mathbf{V}_1 \rangle \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{E}_2}{\|\mathbf{E}_2\|}\quad (7.13)$$

yazılabilir. $\alpha'' = k_1 \mathbf{V}_2$ olduğundan arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1 = \langle \alpha'', \mathbf{V}_2 \rangle\quad (7.14)$$

ile elde edilir.

7.1.3 Üçüncü Mertebeden Türev (α''')

Arakesit eğrisinin üçüncü mertebeden türevi

$$\begin{aligned}\alpha''' &= -k_1^2 \mathbf{V}_1 + k'_1 \mathbf{V}_2 + k_1 k_2 \mathbf{V}_3 \\ &= -k_1^2 \mathbf{V}_1 + \mu_1 \mathbf{N}_1^X + \mu_2 \mathbf{N}_2^X + \dots + \mu_{n-2} \mathbf{N}_{n-2}^X + \mu_{n-1} \mathbf{N}_\ell^Y\end{aligned}\quad (7.15)$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde, (7.15) eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla, $\mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_2^X, \dots, \mathbf{N}_{n-2}^X, \mathbf{N}_\ell^Y$ ile iç çarpılırsa, μ_i katsayılarına bağlı elde edilen lineer denklem sisteminin çözümü

$$\mu_i = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \left\{ \langle \alpha''', \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \mathcal{A}_{(n-1)i} + \sum_{j=1}^{n-2} \langle \alpha''', \mathbf{N}_j^X \rangle \mathcal{A}_{ji} \right\}, \quad 1 \leq i \leq n-1\quad (7.16)$$

olarak bulunur. (7.3) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\langle \alpha''', \mathbf{N}_j^X \rangle &= \sum_{i_1=1}^2 \langle X_{i_1}, \mathbf{N}_j^X \rangle u_{i_1}''' + 3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle X_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_j^X \rangle u_{i_1}'' u_{i_2}' + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle X_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_j^X \rangle u_{i_1}' u_{i_2}' u_{i_3}' \\ &= 3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle X_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_j^X \rangle u_{i_1}'' u_{i_2}' + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle X_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_j^X \rangle u_{i_1}' u_{i_2}' u_{i_3}'\end{aligned}\quad (7.17)$$

ve

$$\begin{aligned}\langle \alpha''', \mathbf{N}_\ell^Y \rangle &= \sum_{i_1=1}^2 \langle Y_{i_1}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle w_{i_1}''' + 3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle Y_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle w_{i_1}'' w_{i_2}' + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle Y_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle w_{i_1}' w_{i_2}' w_{i_3}' \\ &= 3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle Y_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle w_{i_1}'' w_{i_2}' + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle Y_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle w_{i_1}' w_{i_2}' w_{i_3}'\end{aligned}\quad (7.18)$$

yazılabilir. (7.17) ve (7.18) eşitliklerinin sağ tarafı bilindiğinden bu eşitlikler (7.16) eşitliğinde yerine yazılarak μ_i , $1 \leq i \leq n-1$, katsayıları elde edilir. Bu da (7.15) yardımıyla α''' vektörünün bulunmasını sağlar. Böylece (7.3) eşitliği kullanılarak $u_1''', u_2''', w_1''', w_2'''$ elde edilir. Gram-Schmidt ortogonalleştirme metodu kullanılırsa

$$\mathbf{E}_3 = \alpha''' - \langle \alpha''', \mathbf{V}_1 \rangle \mathbf{V}_1 - \langle \alpha''', \mathbf{V}_2 \rangle \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{V}_3 = \frac{\mathbf{E}_3}{\|\mathbf{E}_3\|} \quad (7.19)$$

elde edilir. O halde, $k_1 \neq 0$ ise arakesit eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2 = \frac{\langle \alpha''', \mathbf{V}_3 \rangle}{k_1} \quad (7.20)$$

ile bulunur. Ayrıca $k_1' = \langle \alpha''', \mathbf{V}_2 \rangle$ olur.

7.1.4 Dördüncü Mertebeden Türev ($\alpha^{(4)}$)

Arakesit eğrisinin dördüncü mertebeden türevi için

$$\begin{aligned}\alpha^{(4)} &= -3k_1 k_1' \mathbf{V}_1 + (-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) \mathbf{V}_2 + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') \mathbf{V}_3 + k_1 k_2 k_3 \mathbf{V}_4 \\ &= -3k_1 k_1' \mathbf{V}_1 + \eta_1 \mathbf{N}_1^X + \eta_2 \mathbf{N}_2^X + \dots + \eta_{n-2} \mathbf{N}_{n-2}^X + \eta_{n-1} \mathbf{N}_\ell^Y\end{aligned}\quad (7.21)$$

yazılabilir. İkinci ve üçüncü mertebeden türevlerde olduğu gibi

$$\eta_i = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \left\{ \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \mathcal{A}_{(n-1)i} + \sum_{j=1}^{n-2} \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_j^X \rangle \mathcal{A}_{ji} \right\}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (7.22)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan (7.4) eşitliği kullanılarak $\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_j^X \rangle$ ve $\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle$ elde edilir. Böylece $\alpha^{(4)}$ vektörü bulunarak, Gram-Schmidt ortogonalleştirme metodu ile

$$\mathbf{E}_4 = \alpha^{(4)} - \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_1 \rangle \mathbf{V}_1 - \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_2 \rangle \mathbf{V}_2 - \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_3 \rangle \mathbf{V}_3, \quad \mathbf{V}_4 = \frac{\mathbf{E}_4}{\|\mathbf{E}_4\|} \quad (7.23)$$

elde edilir. Eğer $k_2 \neq 0$ ise arakesit eğrisinin üçüncü eğriliği için

$$k_3 = \frac{\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_4 \rangle}{k_1 k_2} \quad (7.24)$$

olup, k_1'' ve k_2' değerleri, sırasıyla, $\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_2 \rangle$ ve $\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_3 \rangle$ iç çarpımları yardımıyla hesaplanır.

7.1.5 Yüksek Mertebeden Türevler ($\alpha^{(m)}, m \geq 5$)

Benzer şekilde, arakesit eğrisinin m -yinci mertebeden türevi

$$\begin{aligned} \alpha^{(m)} &= d_1 \mathbf{V}_1 + d_2 \mathbf{V}_2 + \dots + d_{m-1} \mathbf{V}_{m-1} + k_1 k_2 k_3 \dots k_{m-1} \mathbf{V}_m \\ &= d_1 \mathbf{V}_1 + \xi_1 \mathbf{N}_1^X + \xi_2 \mathbf{N}_2^X + \dots + \xi_{n-2} \mathbf{N}_{n-2}^X + \xi_{n-1} \mathbf{N}_\ell^Y \end{aligned} \quad (7.25)$$

olarak yazılabilir. $\alpha^{(m)}$ vektörünün hesaplanabilmesi için ξ_i , $1 \leq i \leq n-1$ ve d_1 katsayılarının bulunması gerekmektedir. ξ_i katsayıları için

$$\xi_i = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \left\{ \langle \alpha^{(m)}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle \mathcal{A}_{(n-1)i} + \sum_{j=1}^{n-2} \langle \alpha^{(m)}, \mathbf{N}_j^X \rangle \mathcal{A}_{ji} \right\}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (7.26)$$

yazılabilir. Burada $\langle \alpha^{(m)}, \mathbf{N}_j^X \rangle$ ve $\langle \alpha^{(m)}, \mathbf{N}_\ell^Y \rangle$ değerleri (7.5) eşitliği kullanılarak elde edilebilir.

Diğer taraftan, $m \geq 4$ için $d_1, d_2, \dots, d_{m-1}$ katsayıları, arakesit eğrisinin k_i eğrilikleriyle bunların türevlerinden oluşur. Ancak d_1 katsayısı içindeki eğrilikler ve bunların türevleri, daha önce bulunan Frenet vektörleri ve mevcut türevler kullanılarak elde edilebilir. Örneğin; $\alpha^{(6)}$ türevi için d_1 katsayısı k_1', k_1'', k_1''' ve k_2' türevlerini içerir. Burada k_1''' dışındaki tüm türevler bulunabilmektedir. k_1''' ise $\langle \alpha^{(5)}, \mathbf{V}_2 \rangle$ iç çarpımından elde edilebilir. Yüksek mertebeden türevler için $d_1, d_2, \dots, d_{m-1}$ katsayılarının hesaplanması zor olduğundan, bu katsayıları üreten bir algoritmaya Ek-C'de yer verilmiştir. Böylece (7.25) eşitliği kullanılarak $\alpha^{(m)}$, $m \geq 5$, vektörü bulunabilir. (7.5) eşitliği kullanılarak da $u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, w_1^{(m)}, w_2^{(m)}$ hesaplanır. Gram-Schmidt ortogonalleştirme metodu ile

$$\mathbf{E}_m = \alpha^{(m)} - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \alpha^{(m)}, \mathbf{V}_i \rangle \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{V}_m = \frac{\mathbf{E}_m}{\|\mathbf{E}_m\|}, \quad 5 \leq m \leq n-1, \quad (7.27)$$

elde edilir. Son Frenet vektörü ise

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \dots \times \mathbf{V}_{n-1} \quad (7.28)$$

eşitliğiyle bulunur. Böylece $k_i \neq 0$, $i \geq 3$ kabul edilirse, arakesit eğrisinin m -yinci eğriliği

$$k_m = \frac{\langle \alpha^{(m)}, \mathbf{V}_{(m)} \rangle}{k_1 k_2 \dots k_{m-1}}, \quad 5 \leq m \leq n-1 \quad (7.29)$$

ile hesaplanır.

Uyarı Bu bölümde arakesit eğrisinin eğriliklerinin, arakesit noktasında sıfır olmadığı kabul edilmiştir. Arakesit noktasında herhangi bir eğriliğin sıfır olması durumunda Frenet vektörleri Ye ve Maekawa [13] tarafından verilen algoritma takip edilerek hesaplanabilir.

7.2 Parametrik Yüzeylerin Arakesit Problemleri

7.2.1 $\mathbb{E}^4$ 'te İki Yüzeyin Arakesiti

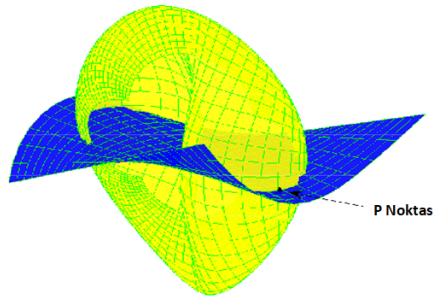
$\mathbb{E}^4$ uzayında

$$X(u_1, u_2) = \frac{1}{1 + (u_1^2 + u_2^2)^2} \begin{pmatrix} u_1(1 + u_1^2 + u_2^2), & u_1(u_1^2 + u_2^2 - 1), \\ u_2(1 + u_1^2 + u_2^2), & u_2(u_1^2 + u_2^2 - 1) \end{pmatrix}$$

parametrik denklemiyle verilen S_1 Whitney küresi ve

$$Y(w_1, w_2) = (w_1, w_2, w_1 w_2^2, w_2^3)$$

parametrik denklemiyle verilen S_2 yüzeyi verilsin. Bu yüzeylerin $(0, 0, 0, 2)$ noktasından $x_4 = 0$ hiperdüzlemine perspektif izdüşümü [40] Şekil 7.1'de gösterilmiştir.



Şekil 7.1 S_1 ve S_2 kesişen yüzeylerinin izdüşümleri

Bu yüzeylerin arakesit eğrisinin $P = X(1,0) = Y(1,0) = (1,0,0,0)$ noktasındaki Frenet vektörlerini ve eğriliklerini bulalım.

$$X_{u_1} = \left(\begin{aligned} &\frac{3u_1^2 + u_2^2 + 1}{1 + (u_1^2 + u_2^2)^2} - \frac{4(u_1^2 + u_2^2)(u_1^4 + u_1^2 u_2^2 + u_1^2)}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^2}, \\ &\frac{3u_1^2 + u_2^2 - 1}{1 + (u_1^2 + u_2^2)^2} - \frac{4(u_1^2 + u_2^2)(u_1^4 + u_1^2 u_2^2 - u_1^2)}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^2}, \\ &\frac{2u_1 u_2}{1 + (u_1^2 + u_2^2)^2} - \frac{4(u_1^2 + u_2^2)(u_1^3 u_2 + u_1 u_2^3 + u_1 u_2)}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^2}, \\ &\frac{2u_1 u_2}{1 + (u_1^2 + u_2^2)^2} - \frac{4(u_1^2 + u_2^2)(u_1^3 u_2 + u_1 u_2^3 - u_1 u_2)}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^2} \end{aligned} \right)$$

$$X_{u_2} = \left(\begin{aligned} &\frac{2u_1 u_2}{1 + (u_1^2 + u_2^2)^2} - \frac{4(u_1^2 + u_2^2)(u_1^3 u_2 + u_1 u_2^3 + u_1 u_2)}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^2}, \\ &\frac{2u_1 u_2}{1 + (u_1^2 + u_2^2)^2} - \frac{4(u_1^2 + u_2^2)(u_1^3 u_2 + u_1 u_2^3 - u_1 u_2)}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^2}, \\ &\frac{u_1^2 + 3u_2^2 + 1}{1 + (u_1^2 + u_2^2)^2} - \frac{4(u_1^2 + u_2^2)(u_1^2 u_2^2 + u_2^4 + u_2^2)}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^2}, \\ &\frac{u_1^2 + 3u_2^2 - 1}{1 + (u_1^2 + u_2^2)^2} - \frac{4(u_1^2 + u_2^2)(u_1^2 u_2^2 + u_2^4 - u_2^2)}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^2} \end{aligned} \right)$$

$$Y_{w_1} = (1, 0, w_2^2, 0)$$

$$Y_{w_2} = (0, 1, 2w_1 w_2, 3w_2^2)$$

olup, P noktasındaki teğet vektörleri

$$X_{u_1} = (0, 1, 0, 0), \quad X_{u_2} = (0, 0, 1, 0)$$

$$Y_{w_1} = (1, 0, 0, 0), \quad Y_{w_2} = (0, 1, 0, 0)$$

olarak bulunur. $\{X_{u_1}, X_{u_2}, \mathbf{e}_1\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan (7.6) eşitlikleri kullanılarak

$$N_1^X = X_{u_1} \times X_{u_2} \times \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0, -1) = -\mathbf{e}_4$$

ve

$$\mathbf{N}_2^X = X_{u_1} \times X_{u_2} \times \mathbf{N}_1^X = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 0, 0) = -\mathbf{e}_1$$

elde edilir. Benzer şekilde $\{Y_{w_1}, Y_{w_2}, \mathbf{e}_4\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan (7.7) eşitlikleri kullanılarak

$$\mathbf{N}_1^Y = Y_{w_1} \times Y_{w_2} \times \mathbf{e}_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, 1, 0) = \mathbf{e}_3$$

ve

$$\mathbf{N}_2^Y = Y_{w_1} \times Y_{w_2} \times \mathbf{N}_1^Y = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0, -1) = -\mathbf{e}_4$$

olarak bulunur. O halde $\{\mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_1^Y\}$ kümesi P noktasında lineer bağımsızdır, yani $d = 3$ 'tür. Böylece arakesit eğrisinin P noktasındaki teğet vektörü

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{N}_1^X \times \mathbf{N}_2^X \times \mathbf{N}_1^Y}{\|\mathbf{N}_1^X \times \mathbf{N}_2^X \times \mathbf{N}_1^Y\|} = (0, -1, 0, 0)$$

olarak elde edilir. Buradan $\mathbf{V}_1 = X_{u_1} u'_1 + X_{u_2} u'_2$ ve $\mathbf{V}_1 = Y_{w_1} w'_1 + Y_{w_2} w'_2$ eşitliklerinden $u'_1 = -1, u'_2 = 0, w'_1 = 0, w'_2 = -1$ olarak bulunur.

Verilen yüzeylerin ikinci mertebeden türevleri

$$\begin{aligned}
X_{u_1 u_1} = & \left(\frac{2u_1^9 + 12u_1^7 - 12u_1^5 u_2^4 + 12u_1^5 u_2^2 - 24u_1^5 - 16u_1^3 u_2^6 - 12u_1^3 u_2^4}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \right. \\
& - \frac{24u_1^3 u_2^2 + 20u_1^3 + 6u_1 u_2^8 + 12u_1 u_2^6 + 12u_1 u_2^2 - 6u_1}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3}, \\
& \frac{2u_1^9 - 12u_1^7 - 12u_1^5 u_2^4 - 12u_1^5 u_2^2 - 24u_1^5 - 16u_1^3 u_2^6 + 12u_1^3 u_2^4}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \\
& - \frac{24u_1^3 u_2^2 - 20u_1^3 + 6u_1 u_2^8 - 12u_1 u_2^6 - 12u_1 u_2^2 - 6u_1}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3}, \\
& \frac{6u_1^8 u_2 + 16u_1^6 u_2^3 + 20u_1^6 u_2 + 12u_1^4 u_2^5 + 36u_1^4 u_2^3 - 24u_1^4 u_2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \\
& + \frac{12u_1^2 u_2^5 - 24u_1^2 u_2^3 - 12u_1^3 u_2 - 2u_2^9 - 4u_2^7 - 4u_2^3 + 2u_2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3}, \\
& \frac{6u_1^8 u_2 + 16u_1^6 u_2^3 - 20u_1^6 u_2 + 12u_1^4 u_2^5 - 36u_1^4 u_2^3 - 24u_1^4 u_2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \\
& \left. + \frac{12u_1^3 u_2 - 12u_1^2 u_2^5 - 24u_1^2 u_2^3 - 2u_2^9 + 4u_2^7 + 4u_2^3 + 2u_2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \right) \\
\\
X_{u_1 u_2} = & \left(\frac{6u_1^8 u_2 + 16u_1^6 u_2^3 + 20u_1^6 u_2 + 12u_1^4 u_2^5 + 36u_1^4 u_2^3 - 24u_1^4 u_2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \right. \\
& + \frac{12u_1^2 u_2^5 - 24u_1^2 u_2^3 - 12u_1^3 u_2 - 2u_2^9 - 4u_2^7 - 4u_2^3 + 2u_2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3}, \\
& \frac{6u_1^8 u_2 + 16u_1^6 u_2^3 - 20u_1^6 u_2 + 12u_1^4 u_2^5 - 36u_1^4 u_2^3 - 24u_1^4 u_2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \\
& + \frac{12u_1^3 u_2 - 12u_1^2 u_2^5 - 24u_1^2 u_2^3 - 2u_2^9 + 4u_2^7 + 4u_2^3 + 2u_2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3}, \\
& \frac{-2u_1^9 - 4u_1^7 + 12u_1^5 u_2^4 + 12u_1^5 u_2^2 + 16u_1^3 u_2^6 + 36u_1^3 u_2^4}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \\
& + \frac{6u_1 u_2^8 - 24u_1^3 u_2^2 - 4u_1^3 + 20u_1 u_2^6 - 24u_1 u_2^4 - 6u_1 u_2^2 + 2u_1}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3}, \\
& \frac{-2u_1^9 + 4u_1^7 + 12u_1^5 u_2^4 - 12u_1^5 u_2^2 + 16u_1^3 u_2^6 - 36u_1^3 u_2^4}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \\
& \left. + \frac{6u_1 u_2^8 - 24u_1^3 u_2^2 + 4u_1^3 - 20u_1 u_2^6 - 24u_1 u_2^4 + 6u_1 u_2^2 + 2u_1}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{u_2 u_2} = & \left(\frac{-2u_1^9 - 4u_1^7 + 12u_1^5 u_2^4 + 12u_1^5 u_2^2 + 16u_1^3 u_2^6 + 36u_1^3 u_2^4 - 24u_1^3 u_2^2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \right. \\
& + \frac{6u_1 u_2^8 - 4u_1^3 + 20u_1 u_2^6 - 24u_1 u_2^4 - 12u_1 u_2^2 + 2u_1}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3}, \\
& \frac{-2u_1^9 + 4u_1^7 + 12u_1^5 u_2^4 - 12u_1^5 u_2^2 + 16u_1^3 u_2^6 - 36u_1^3 u_2^4 - 24u_1^3 u_2^2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \\
& + \frac{4u_1^3 + 6u_1 u_2^8 - 20u_1 u_2^6 - 24u_1 u_2^4 + 12u_1 u_2^2 + 2u_1}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3}, \\
& \frac{-6u_1^8 u_2 - 16u_1^6 u_2^3 - 12u_1^6 u_2 - 12u_1^4 u_2^5 - 12u_1^4 u_2^3 + 12u_1^2 u_2^5 - 24u_1^2 u_2^3}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \\
& + \frac{2u_2^9 - 12u_1^2 u_2 + 12u_2^7 - 24u_2^5 - 20u_2^3 + 6u_2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3}, \\
& \frac{-6u_1^8 u_2 - 16u_1^6 u_2^3 + 12u_1^6 u_2 - 12u_1^4 u_2^5 + 12u_1^4 u_2^3 - 12u_1^2 u_2^5 - 24u_1^2 u_2^3}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \\
& \left. + \frac{12u_1^2 u_2 + 2u_2^9 - 12u_2^7 - 24u_2^5 + 20u_2^3 + 6u_2}{[1 + (u_1^2 + u_2^2)^2]^3} \right)
\end{aligned}$$

$$Y_{w_1 w_1} = (0, 0, 0, 0)$$

$$Y_{w_1 w_2} = (0, 0, 2w_2, 0)$$

$$Y_{w_2 w_2} = (0, 0, 2w_1, 6w_2)$$

olup, P noktasındaki değerleri

$$X_{u_1 u_1} = (-3, -1, 0, 0),$$

$$Y_{w_1 w_1} = (0, 0, 0, 0)$$

$$X_{u_1 u_2} = (0, 0, -1, 1),$$

$$Y_{w_1 w_2} = (0, 0, 0, 0)$$

$$X_{u_2 u_2} = (-1, 1, 0, 0),$$

$$Y_{w_2 w_2} = (0, 0, 2, 0)$$

olarak bulunur. (7.9) eşitliği kullanılarak

$$\alpha'' = \lambda_1 \mathbf{N}_1^X + \lambda_2 \mathbf{N}_2^X + \lambda_3 \mathbf{N}_1^Y$$

yazılabilir. $\lambda_i, 1 \leq i \leq 3$ katsayılarının bulunabilmesi için (7.10) ve (7.11) eşitlikleri

kullanılırsa

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\langle \alpha'', \mathbf{N}_1^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle} = \frac{\langle X_{u_1 u_1}, \mathbf{N}_1^X \rangle (u'_1)^2 + 2 \langle X_{u_1 u_2}, \mathbf{N}_1^X \rangle u'_1 u'_2 + \langle X_{u_2 u_2}, \mathbf{N}_1^X \rangle (u'_2)^2}{\langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle} = 0 \\ \lambda_2 &= \frac{\langle \alpha'', \mathbf{N}_2^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle} = \frac{\langle X_{u_1 u_1}, \mathbf{N}_2^X \rangle (u'_1)^2 + 2 \langle X_{u_1 u_2}, \mathbf{N}_2^X \rangle u'_1 u'_2 + \langle X_{u_2 u_2}, \mathbf{N}_2^X \rangle (u'_2)^2}{\langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle} = 3 \\ \lambda_3 &= \frac{\langle \alpha'', \mathbf{N}_1^Y \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_1^Y \rangle} = \frac{\langle Y_{w_1 w_1}, \mathbf{N}_1^Y \rangle (w'_1)^2 + 2 \langle Y_{w_1 w_2}, \mathbf{N}_1^Y \rangle w'_1 w'_2 + \langle Y_{w_2 w_2}, \mathbf{N}_1^Y \rangle (w'_2)^2}{\langle \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_1^Y \rangle} = 2\end{aligned}$$

elde edilir.

Bulunan λ_i , $1 \leq i \leq 3$ katsayıları yerine yazılırsa

$$\alpha'' = 3\mathbf{N}_2^X + 2\mathbf{N}_1^Y,$$

yani $\alpha'' = (-3, 0, 2, 0)$ olarak elde edilir. Böylece (7.2) eşitliğinden P noktasında $u''_1 = 1$, $u''_2 = 2$, $w''_1 = -3$ ve $w''_2 = 0$ bulunur. O halde arakesit eğrisinin ikinci Frenet vektörü

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2 &= \alpha'' - \langle \alpha'', \mathbf{V}_1 \rangle \mathbf{V}_1 \\ &= (-3, 0, 2, 0) - \langle (-3, 0, 2, 0), (0, -1, 0, 0) \rangle (0, -1, 0, 0) \\ &= (-3, 0, 2, 0)\end{aligned}$$

olup,

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{E}_2}{\|\mathbf{E}_2\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}}, 0 \right)$$

ve arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1 = \langle \alpha'', \mathbf{V}_2 \rangle = \left\langle (-3, 0, 2, 0), \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}}, 0 \right) \right\rangle = \sqrt{13}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde devam edilirse P noktasındaki üçüncü mertebeden türevler

$$\begin{aligned}X_{u_1 u_1 u_1} &= (9, -9, 0, 0), & Y_{w_1 w_1 w_1} &= (0, 0, 0, 0) \\ X_{u_1 u_1 u_2} &= (0, 0, -1, -3), & Y_{w_1 w_1 w_2} &= (0, 0, 0, 0) \\ X_{u_1 u_2 u_2} &= (-1, -3, 0, 0), & Y_{w_1 w_2 w_2} &= (0, 0, 2, 0) \\ X_{u_2 u_2 u_2} &= (0, 0, -3, 3), & Y_{w_2 w_2 w_2} &= (0, 0, 0, 6)\end{aligned}$$

olarak bulunur. (7.15) eşitliği kullanılarak

$$\alpha''' = -k_1^2 \mathbf{V}_1 + \mu_1 \mathbf{N}_1^X + \mu_2 \mathbf{N}_2^X + \mu_3 \mathbf{N}_1^Y$$

yazılır. $\mu_i, 1 \leq i \leq 3$ katsayılarının bulunabilmesi için (7.16) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\langle \alpha''', \mathbf{N}_1^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle} = \frac{3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle X_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_1^X \rangle u''_{i_1} u'_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle X_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_1^X \rangle u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3}}{\langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle} = 6 \\ \mu_2 &= \frac{\langle \alpha''', \mathbf{N}_2^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle} = \frac{3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle X_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_2^X \rangle u''_{i_1} u'_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle X_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_2^X \rangle u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3}}{\langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle} = 0 \\ \mu_3 &= \frac{\langle \alpha''', \mathbf{N}_1^Y \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_1^Y \rangle} = \frac{3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle Y_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_1^Y \rangle w''_{i_1} w'_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle Y_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_1^Y \rangle w'_{i_1} w'_{i_2} w'_{i_3}}{\langle \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_1^Y \rangle} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler α''' eşitliğinde yerine yazılırsa $\alpha''' = (0, 13, 0, -6)$ elde edilir. (7.3) eşitliği yardımıyla P noktasında $u_1''' = 1, u_2''' = -6, w_1''' = 0, w_2''' = 13$ olarak bulunur. Buradan (7.19) kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3 &= \alpha''' - \langle \alpha''', \mathbf{V}_1 \rangle \mathbf{V}_1 - \langle \alpha''', \mathbf{V}_2 \rangle \mathbf{V}_2 \\ &= (0, 0, 0, -6) \end{aligned}$$

olup,

$$\mathbf{V}_3 = \frac{\mathbf{E}_3}{\|\mathbf{E}_3\|} = (0, 0, 0, -1)$$

olarak bulunur. Arakesit eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2 = \frac{\langle \alpha''', \mathbf{V}_3 \rangle}{k_1} = \frac{\langle (0, 13, 0, -6), (0, 0, 0, -1) \rangle}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $k_1' = \langle \alpha''', \mathbf{V}_2 \rangle = 0$ olarak bulunur. P noktasında dördüncü mertebeden türevler

$$\begin{aligned} X_{u_1 u_1 u_1 u_1} &= (24, 60, 0, 0), & Y_{w_1 w_1 w_1 w_1} &= (0, 0, 0, 0) \\ X_{u_1 u_1 u_1 u_2} &= (0, 0, 12, 0), & Y_{w_1 w_1 w_1 w_2} &= (0, 0, 0, 0) \\ X_{u_1 u_1 u_2 u_2} &= (12, 0, 0, 0), & Y_{w_1 w_1 w_2 w_2} &= (0, 0, 0, 0) \\ X_{u_1 u_2 u_2 u_2} &= (0, 0, 0, -12), & Y_{w_1 w_2 w_2 w_2} &= (0, 0, 0, 0) \\ X_{u_2 u_2 u_2 u_2} &= (0, -12, 0, 0), & Y_{w_2 w_2 w_2 w_2} &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

olarak bulunur. (7.21) denklemi kullanılarak

$$\alpha^{(4)} = -3k_1 k'_1 \mathbf{V}_1 + \eta_1 \mathbf{N}_1^X + \eta_2 \mathbf{N}_2^X + \eta_3 \mathbf{N}_1^Y$$

yazılır. $\eta_i, 1 \leq i \leq 3$ katsayılarının bulunabilmesi için (7.22) denklemi kullanılırsa

$$\eta_1 = \frac{\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_1^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle} = 0, \quad \eta_2 = \frac{\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_2^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle} = -69, \quad \eta_3 = \frac{\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_1^Y \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_1^Y \rangle} = -140$$

olarak hesaplanır. Bu katsayılar yerine yazılırsa $\alpha^{(4)} = (69, 0, -140, 0)$ olarak elde edilir. Buradan (7.23) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_4 &= \alpha^{(4)} - \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_1 \rangle \mathbf{V}_1 - \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_2 \rangle \mathbf{V}_2 - \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_3 \rangle \mathbf{V}_3 \\ &= \left(\frac{-564}{13}, 0, \frac{-846}{13}, 0 \right) \end{aligned}$$

olup

$$\mathbf{V}_4 = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right)$$

olarak bulunur. Buradan arakesit eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3 = \frac{\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_4 \rangle}{k_1 k_2} = \frac{47}{\sqrt{13}}$$

olarak hesaplanır.

7.2.2 $\mathbb{E}^5$ 'te İki Yüzeyin Arakesiti

$\mathbb{E}^5$ uzayında parametrik denklemleriyle verilen

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 \dots X(u_1, u_2) &= (u_2^2, u_2, u_1^3, u_1, u_1^4) \\ \mathcal{S}_2 \dots Y(w_1, w_2) &= (w_1, w_2, w_2^3, w_2, w_1^2) \end{aligned}$$

yüzeylerini göz önüne alalım. Arakesit eğrisinin $P = X(0, 0) = Y(0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0)$ noktasındaki Frenet elemanlarını bulalım.

$$\begin{aligned} X_{u_1} &= (0, 0, 3u_1^2, 1, 4u_1^3), & X_{u_2} &= (2u_2, 1, 0, 0, 0), \\ Y_{w_1} &= (1, 0, 0, 0, 2w_1), & Y_{w_2} &= (0, 1, 3w_2^2, 1, 0) \end{aligned}$$

olup, P noktasındaki teğet vektörleri

$$\begin{aligned} X_{u_1} &= (0, 0, 0, 1, 0), & X_{u_2} &= (0, 1, 0, 0, 0) \\ Y_{w_1} &= (1, 0, 0, 0, 0), & Y_{w_2} &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\{X_{u_1}, X_{u_2}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan (7.6) eşitlikleri kullanılarak

$$\mathbf{N}_1^X = X_{u_1} \times X_{u_2} \times \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0, 0, 1) = \mathbf{e}_5$$

$$\mathbf{N}_2^X = X_{u_1} \times X_{u_2} \times \mathbf{N}_1^X \times \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1, 0, 0) = \mathbf{e}_3$$

ve

$$\mathbf{N}_3^X = X_{u_1} \times X_{u_2} \times \mathbf{N}_1^X \times \mathbf{N}_2^X = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 0, 0, 0) = -\mathbf{e}_1$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\{Y_{w_1}, Y_{w_2}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan (7.7) eşitlikleri kullanılarak

$$\mathbf{N}_1^Y = Y_{w_1} \times Y_{w_2} \times \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0, 0, 1) = \mathbf{e}_5$$

$$\mathbf{N}_2^Y = Y_{w_1} \times Y_{w_2} \times \mathbf{N}_1^Y \times \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1, 0, 0) = \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{N}_3^Y = Y_{w_1} \times Y_{w_2} \times \mathbf{N}_1^Y \times \mathbf{N}_2^Y = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 0, 1, 0) = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$$

elde edilir. Bu durumda $\{\mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_3^X, \mathbf{N}_3^Y\}$ sistemi P noktasında lineer bağımsız olup $d = 4$ 'tür. Böylece arakesit eğrisinin P noktasındaki teğet vektörü

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{N}_1^X \times \mathbf{N}_2^X \times \mathbf{N}_3^X \times \mathbf{N}_3^Y}{\|\mathbf{N}_1^X \times \mathbf{N}_2^X \times \mathbf{N}_3^X \times \mathbf{N}_3^Y\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

olarak elde edilir. Buradan $\mathbf{V}_1 = X_{u_1}u_1' + X_{u_2}u_2'$ ve $\mathbf{V}_1 = Y_{w_1}w_1' + Y_{w_2}w_2'$ olduğundan $u_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}, w_1' = 0, w_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olarak bulunur.

İkinci mertebeden türevler

$$\begin{aligned} X_{u_1u_1} &= (0, 0, 6u_1, 0, 12u_1^2), & Y_{w_1w_1} &= (0, 0, 0, 0, 2) \\ X_{u_1u_2} &= (0, 0, 0, 0, 0), & Y_{w_1w_2} &= (0, 0, 0, 0, 0) \\ X_{u_2u_2} &= (2, 0, 0, 0, 0), & Y_{w_2w_2} &= (0, 0, 6w_2, 0, 0) \end{aligned}$$

olup P noktasındaki değerleri

$$\begin{aligned} X_{u_1u_1} &= (0, 0, 0, 0, 0), & Y_{w_1w_1} &= (0, 0, 0, 0, 2) \\ X_{u_1u_2} &= (0, 0, 0, 0, 0), & Y_{w_1w_2} &= (0, 0, 0, 0, 0) \\ X_{u_2u_2} &= (2, 0, 0, 0, 0), & Y_{w_2w_2} &= (0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

yazılır. (7.9) denklemini kullanılarak

$$\alpha'' = \lambda_1 \mathbf{N}_1^X + \lambda_2 \mathbf{N}_2^X + \lambda_3 \mathbf{N}_3^X + \lambda_4 \mathbf{N}_1^Y$$

yazılabilir. $\lambda_i, 1 \leq i \leq 4$ katsayılarının bulunabilmesi için (7.10) ve (7.11) denklemleri

kullanılırsa

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\langle \alpha'', \mathbf{N}_1^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle} = \frac{\langle X_{u_1 u_1}, \mathbf{N}_1^X \rangle (u'_1)^2 + 2 \langle X_{u_1 u_2}, \mathbf{N}_1^X \rangle u'_1 u'_2 + \langle X_{u_2 u_2}, \mathbf{N}_1^X \rangle (u'_2)^2}{\langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle} = 0 \\ \lambda_2 &= \frac{\langle \alpha'', \mathbf{N}_2^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle} = \frac{\langle X_{u_1 u_1}, \mathbf{N}_2^X \rangle (u'_1)^2 + 2 \langle X_{u_1 u_2}, \mathbf{N}_2^X \rangle u'_1 u'_2 + \langle X_{u_2 u_2}, \mathbf{N}_2^X \rangle (u'_2)^2}{\langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle} = 0 \\ \lambda_3 &= \frac{\langle \alpha'', \mathbf{N}_3^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_3^X, \mathbf{N}_3^X \rangle} = \frac{\langle X_{u_1 u_1}, \mathbf{N}_3^X \rangle (u'_1)^2 + 2 \langle X_{u_1 u_2}, \mathbf{N}_3^X \rangle u'_1 u'_2 + \langle X_{u_2 u_2}, \mathbf{N}_3^X \rangle (u'_2)^2}{\langle \mathbf{N}_3^X, \mathbf{N}_3^X \rangle} = 1 \\ \lambda_4 &= \frac{\langle \alpha'', \mathbf{N}_1^Y \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_1^Y \rangle} = \frac{\langle Y_{w_1 w_1}, \mathbf{N}_1^Y \rangle (w'_1)^2 + 2 \langle Y_{w_1 w_2}, \mathbf{N}_1^Y \rangle w'_1 w'_2 + \langle Y_{w_2 w_2}, \mathbf{N}_1^Y \rangle (w'_2)^2}{\langle \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_1^Y \rangle} = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan $\lambda_i, 1 \leq i \leq 4$ katsayıları

$$\alpha'' = \lambda_1 \mathbf{N}_1^X + \lambda_2 \mathbf{N}_2^X + \lambda_3 \mathbf{N}_3^X + \lambda_4 \mathbf{N}_1^Y$$

eşitliğinde yerine yazılırsa $\alpha'' = (1, 0, 0, 0, 0)$ olarak bulunur. Böylece (7.2) denklemi kullanılarak P noktasında $u''_1 = u''_2 = w''_2 = 0, w''_1 = 1$ bulunur. Buradan arakesit eğrisinin ikinci Frenet vektörü

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2 &= \alpha'' - \langle \alpha'', \mathbf{V}_1 \rangle \mathbf{V}_1 \\ &= (1, 0, 0, 0, 0) - \left\langle (1, 0, 0, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\rangle \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ &= (1, 0, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

olup,

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{E}_2}{\|\mathbf{E}_2\|} = (1, 0, 0, 0, 0)$$

ve arakesit eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1 = \langle \alpha'', \mathbf{V}_2 \rangle = \langle (1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0) \rangle = 1$$

olarak bulunur. Benzer şekilde devam edilip P noktasındaki üçüncü mertebeden türevler

$$\begin{aligned}X_{u_1 u_1 u_1} &= (0, 0, 6, 0, 0), & Y_{w_1 w_1 w_1} &= (0, 0, 0, 0, 0) \\ X_{u_1 u_1 u_2} &= (0, 0, 0, 0, 0), & Y_{w_1 w_2 w_1} &= (0, 0, 0, 0, 0) \\ X_{u_1 u_2 u_2} &= (0, 0, 0, 0, 0), & Y_{w_1 w_2 w_2} &= (0, 0, 0, 0, 0) \\ X_{u_2 u_2 u_2} &= (0, 0, 0, 0, 0), & Y_{w_2 w_2 w_2} &= (0, 0, 6, 0, 0)\end{aligned}$$

olarak bulunur. (7.15) denklemi kullanılarak

$$\alpha''' = -k_1^2 \mathbf{V}_1 + \mu_1 \mathbf{N}_1^X + \mu_2 \mathbf{N}_2^X + \mu_3 \mathbf{N}_3^X + \mu_4 \mathbf{N}_1^Y$$

yazılır. $\mu_i, 1 \leq i \leq 4$ katsayılarının bulunabilmesi için (7.16) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\langle \alpha''', \mathbf{N}_1^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle} = \frac{3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle X_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_1^X \rangle u''_{i_1} u'_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle X_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_1^X \rangle u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3}}{\langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle} = 0 \\ \mu_2 &= \frac{\langle \alpha''', \mathbf{N}_2^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle} = \frac{3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle X_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_2^X \rangle u''_{i_1} u'_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle X_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_2^X \rangle u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3}}{\langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \mu_3 &= \frac{\langle \alpha''', \mathbf{N}_3^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_3^X, \mathbf{N}_3^X \rangle} = \frac{3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle X_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_3^X \rangle u''_{i_1} u'_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle X_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_3^X \rangle u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3}}{\langle \mathbf{N}_3^X, \mathbf{N}_3^X \rangle} = 0 \\ \mu_4 &= \frac{\langle \alpha''', \mathbf{N}_1^Y \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_1^Y \rangle} = \frac{3 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \langle Y_{i_1 i_2}, \mathbf{N}_1^Y \rangle w''_{i_1} w'_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \langle Y_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{N}_1^Y \rangle w'_{i_1} w'_{i_2} w'_{i_3}}{\langle \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_1^Y \rangle} = 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu katsayılar yerine yazılırsa $\alpha''' = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ olarak elde edilir ve (7.3) eşitliği kullanılarak P noktasında $u_1''' = u_2''' = w_2''' = -\frac{1}{\sqrt{2}} w_1''' = 0$ olup, (7.19) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3 &= \alpha''' - \langle \alpha''', \mathbf{V}_1 \rangle \mathbf{V}_1 - \langle \alpha''', \mathbf{V}_2 \rangle \mathbf{V}_2 \\ &= (0, 0, \frac{3}{\sqrt{2}}, 0, 0) \end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{V}_3 = \frac{\mathbf{E}_3}{\|\mathbf{E}_3\|} = (0, 0, 1, 0, 0)$$

olarak bulunur. Arakesit eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_2 = \frac{\langle \alpha''', \mathbf{V}_3 \rangle}{k_1} = \frac{\langle (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1, 0, 0) \rangle}{1} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

olarak hesaplanır ve $k_1' = \langle \alpha''', \mathbf{V}_2 \rangle = 0$ olarak bulunur.

P noktasındaki dördüncü mertebeden türevler hesaplandığında $X_{u_1 u_1 u_1 u_1} = 24\mathbf{e}_5$ olup,

geriye kalan türevler sıfır olarak bulunur. (7.21) kullanılarak

$$\alpha^{(4)} = -3k_1 k_1' \mathbf{V}_1 + \eta_1 \mathbf{N}_1^X + \eta_2 \mathbf{N}_2^X + \eta_3 \mathbf{N}_3^X + \eta_4 \mathbf{N}_1^Y$$

yazılabilir. $\eta_i, 1 \leq i \leq 4$ katsayılarının bulunabilmesi için (7.22) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_1^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^X, \mathbf{N}_1^X \rangle} = 6 & \eta_2 &= \frac{\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_2^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_2^X, \mathbf{N}_2^X \rangle} = 0 \\ \eta_3 &= \frac{\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_3^X \rangle}{\langle \mathbf{N}_3^X, \mathbf{N}_3^X \rangle} = -4 & \eta_4 &= \frac{\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{N}_1^Y \rangle}{\langle \mathbf{N}_1^Y, \mathbf{N}_1^Y \rangle} = 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu katsayılar yerine yazılırsa $\alpha^{(4)} = (-4, 0, 0, 0, 6)$ olarak elde edilir. (7.4) eşitliği kullanılırsa P noktasında $u_1^{(4)} = u_2^{(4)} = w_2^{(4)} = 0, w_1^{(4)} = -4$ olarak bulunur. Böylece (7.23) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_4 &= \alpha^{(4)} - \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_1 \rangle \mathbf{V}_1 - \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_2 \rangle \mathbf{V}_2 - \langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_3 \rangle \mathbf{V}_3 \\ &= (0, 0, 0, 0, 6) \end{aligned}$$

olup,

$$\mathbf{V}_4 = \frac{\mathbf{E}_4}{\|\mathbf{E}_4\|} = (0, 0, 0, 0, 1)$$

bulunur. Buradan arakesit eğrisinin üçüncü eğriliği

$$k_3 = \frac{\langle \alpha^{(4)}, \mathbf{V}_4 \rangle}{k_1 k_2} = 2\sqrt{2}$$

olup, $k_1'' = \frac{11}{2}$ olarak hesaplanır. Benzer şekilde devam edilirse, P noktasında beşinci mertebeden türev için

$$\alpha^{(5)} = (k_1^4 - 3(k_1')^2 - 4k_1 k_1'' + k_1^2 k_2^2) \mathbf{V}_1 + \xi_1 \mathbf{N}_1^X + \xi_2 \mathbf{N}_2^X + \xi_3 \mathbf{N}_3^X + \xi_4 \mathbf{N}_1^Y$$

yazılırsa, (7.5), (7.26), (7.27), (7.28), (7.29) kullanılarak

$$\mathbf{V}_5 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{ve} \quad k_4 = 0$$

olarak bulunur.

8 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ilk olarak n -boyutlu Öklid uzayında kapalı denklemleriyle verilen $n - 1$ tane hiperyüzeyin enine arakesit eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplanmış ve eğrilikler hesaplanırken oluşan dejenere durumlar incelenmiştir. Kapalı denklemleriyle verilen $n - 1$ tane hiperyüzeyin arakesiti n -boyutlu uzayda kapalı bir eğri tanımladığından, Willmore metodunun genelleştirilmesiyle elde edilen sonuçlar yardımıyla Goldman'ın [14] 2005'te ortaya koyduğu açık probleme bir çözüm getirilmiştir. Ayrıca, n -boyutlu Öklid uzayında $n - 1$ tane parametrik hiperyüzeyin enine arakesit eğrisi incelenmiş ve Frenet elemanlarının hesaplanması için bir yöntem verilmiştir. Elde edilen yöntemin uygulanması için MATLAB programlama dili kullanılarak algoritmalar geliştirilmiştir. Bunlara ek olarak, $\mathbb{E}^n$ uzayında k tane kapalı ve $n-k-1$ tane parametrik formda verilen hiperyüzeyin enine arakesit eğrisinin Frenet elemanlarının da nasıl bulunabileceği gösterilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise, n -boyutlu Öklid uzayında iki parametrik yüzeyin arakesit eğrisinin diferensiyel geometrik özellikleri tespit edilmiştir. Öncelikle parametrik bir yüzey üzerinde bulunan bir eğrinin yüksek mertebeden türev formülü elde edilerek, n -boyutlu Öklid uzayında iki parametrik yüzeyin enine arakesit eğrisinin Frenet vektörlerinin ve eğriliklerinin hesaplanabilmesi için bir metot verilmiştir. Ayrıca, bir eğrinin yüksek mertebeden türevinin Frenet çatısına göre katsayılarını bulmayı amaçlayan bir algoritma geliştirilmiştir.

Bu yapılan çalışmalara ek olarak, n -boyutlu Öklid uzayında $n - 1$ hiperyüzeyin veya iki yüzeyin teğetsel arakesit eğrisi araştırılıp, diferensiyel geometrik özellikleri incelenebilir.

- [1] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [2] H. W. Guggenheimer, *Differential Geometry*. Mc Graw-Hill Company, Inc., New York, 1963.
- [3] W. Klingenberg, *A Course in Differential Geometry*. Springer-Verlag, New York Inc., 1978.
- [4] W. Kühnel, *Differential Geometry: curves-surfaces-manifolds*. 2nd ed. Student mathematical library vol. 16. A. M. S., Providence, RI, 2006.
- [5] N. M. Patrikalakis, T. Maekawa, *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- [6] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. vol.4. Publish or Perish, 3rd Edition, Houston, TX, 1999.
- [7] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1950.
- [8] C. L. Bajaj, C. M. Hoffmann, R. E. Lynch, J. Hopcroft, "Tracing surface intersections," *Computer aided geometric design*, vol. 5, no. 4, pp. 285–307, 1988.
- [9] R. E. Barnhill, G. Farin, M. Jordan, B. R. Piper, "Surface/surface intersection," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 4, no. 1-2, pp. 3–16, 1987.
- [10] C.-Y. Hu, T. Maekawa, N. M. Patrikalakis, X. Ye, "Robust interval algorithm for surface intersections," *Computer-Aided Design*, vol. 29, no. 9, pp. 617–627, 1997.
- [11] R. P. Markot, R. L. Magedson, "Procedural method for evaluating the intersection curves of two parametric surfaces," *Computer-Aided Design*, vol. 23, no. 6, pp. 395–404, 1991.
- [12] E. Hartmann, " G^2 interpolation and blending on surfaces," *The Visual Computer*, vol. 12, no. 4, pp. 181–192, 1996.
- [13] X. Ye, T. Maekawa, "Differential geometry of intersection curves of two surfaces," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 16, no. 8, pp. 767–788, 1999.
- [14] R. Goldman, "Curvature formulas for implicit curves and surfaces," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 22, no. 7, pp. 632–658, 2005.
- [15] O. Aléssio, "Geometria diferencial de curvas de intersecao de duas superficies implicitas," *Trends in Applied and Computational Mathematics*, vol. 7, no. 2, pp. 169–178, 2006.

- [16] M. A.-L. Soliman, N. H. Abdel-All, S. A. Hassan, S. A.-N. Badr, "Intersection curves of implicit and parametric surfaces in R^3 ," *Applied Mathematics*, vol. 2, no. 08, p. 1019, 2011.
- [17] N. H. Abdel-All, S. A.-N. Badr, M. Soliman, S. A. Hassan, "Intersection curves of two implicit surfaces in R^3 ," *Journal of Mathematical and Computational Science*, vol. 2, no. 2, pp. 152–171, 2012.
- [18] B. Uyar Düldül, M. Çalışkan, "On the geodesic torsion of a tangential intersection curve of two surfaces in R^3 ," *Acta Math. Univ. Comenianae*, vol. 82, no. 2, pp. 177–189, 2013.
- [19] M. Düldül, Ö. Akbaba, "Willmore-like methods for the intersection of parametric (hyper)surfaces," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 226, pp. 516–527, 2014.
- [20] B. Uyar Düldül, M. Düldül, "Can we find willmore-like method for the tangential intersection problems?" *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 302, pp. 301–311, 2016.
- [21] T. J. Willmore, *An Introduction to Differential Geometry*. Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [22] O. Aléssio, "Differential geometry of intersection curves in R^4 of three implicit surfaces," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 26, no. 4, pp. 455–471, 2009.
- [23] B. Uyar Düldül, M. Düldül, "The extension of willmore's method into 4-space," *Mathematical Communications*, vol. 17, no. 2, pp. 423–431, 2012.
- [24] O. Aléssio, "Formulas for second curvature, third curvature, normal curvature, first geodesic curvature and first geodesic torsion of implicit curve in n-dimensions," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 29, no. 3-4, pp. 189–201, 2012.
- [25] M. Düldül, "On the intersection curve of three parametric hypersurfaces," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 27, no. 1, pp. 118–127, 2010.
- [26] M. S. Lone, O. Aléssio, M. Jamali, M. H. Shahid, "Differential geometry of transversal intersection curves of hypersurfaces in R^5 ," *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, vol. 15, no. 2, pp. 147–162, 2017.
- [27] Ö. Akbaba, *Parametrik (Hiper)yüzeylerin Arakesit Eğrisi İçin Willmore Benzeri Metotlar*. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2013.
- [28] N. H. Abdel-All, S. A.-N. Badr, M. Soliman, S. A. Hassan, "Intersection curves of hypersurfaces in R^4 ," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 29, no. 2, pp. 99–108, 2012.
- [29] O. Aléssio, M. Düldül, B. Uyar Düldül, S. A.-N. Badr, N. H. Abdel-All, "Differential geometry of non-transversal intersection curves of three parametric hypersurfaces in euclidean 4-space," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 31, no. 9, pp. 712–727, 2014.
- [30] H. Abdel-Aziz, M. K. Saad, A. Abdel-Salam, "On implicit surfaces and their intersection curve in euclidean 4-space," *Houston Journal of Mathematics*, vol. 40, no. 2, pp. 339–352, 2014.

- [31] S. A.-N. Badr, N. H. Abdel-All, O. Aléssio, M. Düldül, B. Uyar Düldül, "Non-transversal intersection curves of hypersurfaces in euclidean 4-space," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 288, pp. 81–98, 2015.
- [32] O. Aléssio, M. Düldül, B. Uyar Düldül, N. H. Abdel-All, S. A.-N. Badr, "Differential geometry of non-transversal intersection curves of three implicit hypersurfaces in euclidean 4-space," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 308, pp. 20–38, 2016.
- [33] O. Aléssio, I. Guadalupe, "Determination of a transversal intersection curve of two spacelike surfaces in lorentz-minkowski 3-space L^3 ," *Hadronic Journal*, vol. 30, no. 3, p. 315, 2007.
- [34] B. Uyar Düldül, M. Çalışkan, "Spacelike intersection curve of three spacelike hypersurfaces in E_1^4 ," *Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, sectio A–Mathematica*, vol. 67, no. 1, pp. 23–33, 2015.
- [35] O. Aléssio, S. A.-N. Badr, S. A. Hassan, L. A. Rodrigues, F. N. Silva, M. Soliman, "Transversal intersection curves of two surfaces in minkowski 3-space," *Selecciones Matemáticas*, vol. 5, no. 2, pp. 137–153, 2018.
- [36] L. S. Moreira, "Geometric analogy and products of vectors in n dimensions," *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, vol. 3, no. 01, p. 1, 2013.
- [37] H. Gluck, "Higher curvatures of curves in euclidean space," *The American Mathematical Monthly*, vol. 73, no. 7, pp. 699–704, 1966.
- [38] B. M. Özçetin, M. Düldül, "Curvature computations for the intersection curves of hypersurfaces in euclidean n -space," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 84, p. 101 954, 2021.
- [39] M. Düldül, B. M. Özçetin, "Intersection curve of two parametric surfaces in euclidean n -space," *Acta Et Commentationes Universitatis Tartuensis De Mathematica*, vol. 25, no. 2, pp. 259–279, 2021.
- [40] C. M. Hoffmann, J. Zhou, "Visualization of surfaces in four-dimensional space," Purdue Univ Lafayette In Dept of Computer Sciences, Tech. Rep., 1990.

A

ARAKESİT EĞRİLERİNİN FRENET ELEMANLARINI HESAPLATAN PSEUDO KODU

Input: dimension (n), hypersurfaces $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\}$, intersection point
 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$
Let $u[1, 2, \dots, n-1], v[1, 2, \dots, n-1], w[1, 2, \dots, n-1]$ be new arrays
Compute $\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_{n-1}$
function n dimensional cross product
 $\mathcal{H} \leftarrow \nabla f_1 \times \nabla f_2 \times \dots \times \nabla f_{n-1}$
end function
Compute $\lambda, \Delta \mathcal{H}$
for $i = 2$ to $n-1$ *do*
 $\Delta^i \mathcal{H} = \lambda(\Delta^{i-1} \mathcal{H})'$
end for
Compute $\mathcal{H}(P), \lambda(P), \Delta^i \mathcal{H}(P) (i = 1, 2, \dots, n-1), V_1(P), V_2(P)$ and $\kappa_1(P)$
 $u[1] \leftarrow \mathcal{H}(P)$
for $i = 2$ to $n-1$ *do*
 $u[i] \leftarrow \Delta^{i-1} \mathcal{H}(P)$
end for
if n equal to 3
 compute V_3
end if
function n dimensional cross product
 compute V_n
end function
while n greater than or equal to 4
if n greater than 4 *then*
 $v[1] \leftarrow \mathcal{H}(P)$
 for $i = n-1 : -1 : 4$ *do*
 j equal to 2
 while $i - j$ greater than or equal to 1
 $v[j] \leftarrow \Delta^{j-1} \mathcal{H}(P)$
 end while
 $s \leftarrow n$
 while j less than or equal to $n-1$
 $v[j] \leftarrow V_s$
 end while
 function n dimensional cross product

```

        compute  $\mathbf{V}_i$ 
      end function
    compute  $\mathbf{V}_3$ 
  end for
end if
if  $n$  equal to 4 then
   $j \leftarrow 1$ 
  for  $i = n : -1 : 4$  then
     $w[j] \leftarrow \mathbf{V}_i$ 
  end for
  compute  $\mathbf{V}_3$ 
end if
end while
 $e \leftarrow 1$ 
for  $i = 2$  to  $n - 1$  then
   $e \leftarrow e.k_{i-1}$ 
  compute  $k_i$ 
end for

```

B

BEŞİNCİ MERTEBEDEN TÜREVİN HESAPLANMASI

α eğrisinin beşinci mertebeden türevini bulalım. (7.5) eşitliğinde $m = 5$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \alpha^{(5)} &= C_1 \sum_{i_1=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1} u_{i_1}^{(5)} + \sum_{r_1=1}^2 \left(C_2 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(5-r_1)} u_{i_2}^{(r_1)} \right) \\
 &+ \sum_{r_1, r_2=1}^2 \left(C_3 \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}^{(5-r_1-1)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_1-r_2+1)} \right) \\
 &+ \sum_{r_1, r_2, r_3=1}^2 \left(C_4 \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2 i_4 r_3}} X_{i_1 i_2 i_3 i_4} u_{i_1}^{(5-r_1-2)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_3)} u_{i_4}^{(r_1-r_2-r_3+2)} \right) \\
 &+ C_5 \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^2 \frac{1}{5!} X_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3} u'_{i_4} u'_{i_5}.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

olarak bulunur. $C_i, 1 \leq i \leq 5$ katsayıları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \alpha^{(5)} &= \binom{5}{1} \sum_{i_1=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1} u_{i_1}^{(5)} + \binom{5}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(4)} u'_{i_2} + \binom{5}{3} \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}''' u_{i_2}'' \\
 &+ \binom{5}{3} \binom{2}{1} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 i_3}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}''' u'_{i_2} u'_{i_3} \\
 &+ \binom{5}{3} \binom{2}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 i_3}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}''' u_{i_2}'' u_{i_3}^{(0)} \\
 &+ \binom{5}{2} \binom{3}{1} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 i_3}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}'' u'_{i_2} u_{i_3}'' \\
 &+ \binom{5}{2} \binom{3}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 i_3}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}'' u_{i_2}'' u'_{i_3} \\
 &+ \sum_{r_1, r_2, r_3=1}^2 \left(C_4 \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2 i_4 r_3}} X_{i_1 i_2 i_3 i_4} u_{i_1}^{(5-r_1-2)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_3)} u_{i_4}^{(r_1-r_2-r_3+2)} \right) \\
 &+ \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^2 \frac{1}{5!} X_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3} u'_{i_4} u'_{i_5}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

elde edilir. (B.2) eşitliğindeki

$$\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 i_3}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}''' u_{i_2}'' u_{i_3}^{(0)} \quad \text{ve} \quad \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 i_3}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}'' u_{i_2}'' u_{i_3}'$$

toplamlarından elde edilen türev mertebeleri Teorem 7.1'de verilen koşulları sağlamadığından toplama eklenmez. Böylece

$$\begin{aligned}
\alpha^{(5)} = & \sum_{i_1=1}^2 \frac{1}{k_{i_1}} X_{i_1} u_{i_1}^{(5)} + 5 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(4)} u'_{i_2} + 10 \sum_{i_1, i_2=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2}} X_{i_1 i_2} u_{i_1}''' u''_{i_2} \\
& + 20 \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 i_3}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}''' u'_{i_2} u'_{i_3} + 30 \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 i_3}} X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}'' u''_{i_2} u'_{i_3} \\
& + \underbrace{\sum_{r_1, r_2, r_3=1}^2 \left(C_4 \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 r_1 i_3 r_2 i_4 r_3}} X_{i_1 i_2 i_3 i_4} u_{i_1}^{(5-r_1-2)} u_{i_2}^{(r_2)} u_{i_3}^{(r_3)} u_{i_4}^{(r_1-r_2-r_3+2)} \right)}_I \\
& + 120 \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^2 \frac{1}{5!} X_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3} u'_{i_4} u'_{i_5}.
\end{aligned} \quad (B.3)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde I toplamında bulunan terimlerin türev mertebeleri aşağıdaki şekildedir:

				I toplamındaki türev mertebeleri			
				t_1	t_2	t_3	t_4
Durumlar	r_1	r_2	r_3	$5-r_1-2$	r_2	r_3	$r_1-r_2-r_3+2$
i	1	1	1	2	1	1	1
ii	1	1	2	2	1	2	0
iii	1	2	1	2	2	1	0
iv	1	2	2	2	2	2	-1
v	2	1	1	1	1	1	2
vi	2	1	2	1	1	2	1
vii	2	2	1	1	2	1	1
viii	2	2	2	1	2	2	0

Burada sadece **Durum i**'de verilen türev mertebelerinin Teorem 7.1'deki koşulları sağladığı açıktır. Bu nedenle, I toplamından sadece

$$\binom{5}{2} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^2 \frac{1}{k_{i_1 i_2 i_3 i_4}} X_{i_1 i_2 i_3 i_4} u_{i_1}'' u'_{i_2} u'_{i_3} u'_{i_4} \quad (B.4)$$

terimi elde edilir. (B.4) toplamı (B.3)'te I toplamı yerine yazılır ve Tablo 7.1 gereğince $k_{i_1} = 1!$, $k_{i_1 i_2} = 1!$, $k_{i_1 i_2 i_3} = 1!$, $k_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 2!$, $k_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = 2!$ ve $k_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = 3!$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\alpha^{(5)} = & \sum_{i_1=1}^2 X_{i_1} u_{i_1}^{(5)} + 5 \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}^{(4)} u'_{i_2} + 10 \sum_{i_1, i_2=1}^2 X_{i_1 i_2} u_{i_1}''' u''_{i_2} \\
& + 10 \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}''' u'_{i_2} u'_{i_3} + 15 \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 X_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}'' u''_{i_2} u'_{i_3} \\
& + 10 \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^2 X_{i_1 i_2 i_3 i_4} u_{i_1}'' u'_{i_2} u'_{i_3} u'_{i_4} + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^2 X_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} u'_{i_1} u'_{i_2} u'_{i_3} u'_{i_4} u'_{i_5}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

```

n=input('uzayın boyutunu giriniz: n=');
syms s
T1{:} = sprintf('k%d(s)',1:n-1);
syms(T1{:})
A1=[T1{:}];
B1=str2sym(A1);
T2{:} = sprintf('V%d(s)',1:n);
syms(T2{:})
A2=[T2{:}];
B2=str2sym(A2);
C(1)=k1(s)*V2(s);
for i=2:n-1
    C(i)=-B1(i-1)*B2(i-1)+ B1(i)*B2(i+1);
end
C(n)=-B1(n-1)*B2(n-1);
D=diff(B2,s);
E=k1(s)*V2(s);
F(1)=V1(s);
F(2)=k1(s)*V2(s);
alpha(1)=V1(s);
alpha(2)=k1(s)*V2(s);
F(3)=diff(E,s);
alpha(3)=subs(F(3),D(2),C(2));
for i=4:n
    alpha(i)=diff(alpha(i-1),s);
    G(1)=subs(alpha(i),D(1),C(1));
    for j=2:n
        G(j)=subs(G(j-1),D(j),C(j));
    end
    alpha(i)=G(n);
end
for i=1:n
    fprintf('alpha(%d)=%s\n',i,alpha(i))
end

```

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. B. M. Özçetin, M. Düldül, Curvature computations for the intersection curves of hypersurfaces in Euclidean n -space, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 84, p. 101954, 2021.
2. M. Düldül, B. M. Özçetin, Intersection curve of two parametric surfaces in Euclidean n -space, *Acta Et Commentationes Universitatis Tartuensis De Mathematica*, vol. 25, no. 2, p. 259-279, 2021.

Konferans Bildirisi

1. B. M. Özçetin, M. Düldül, On the intersection curve of implicit hypersurfaces in $\mathbb{E}^n$, *18th International Geometry Symposium*, 12 - 13 Temmuz 2021, ss.141, Malatya, Türkiye.