

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNDE YENİ BİR AĞ  
İNCELTME YÖNTEMİ KULLANILARAK  
ENDÜKTANS HESABI ve YAPAY SİNİR AĞLARI  
DESTEKLİ BİR ANALİTİK YÖNTEM ile  
KARŞILAŞTIRILMASI**

**Elk. Yük. Müh. Ali İhsan ÇANAKOĞLU**

**106317**

**F.B.E Elektrik Anabilim Dalında Hazırlanan**

**DOKTORA TEZİ**

**106317**

**Tez Savunma Tarihi : 18.07.2001**

**Tez Danışmanı**

**Jüri Üyeleri**

**: Doç. Dr. Nurettin UMURKAN**

**: Prof. Dr. Hüseyin ÇAKIR**

**: Doç. Dr. İbrahim ŞENOL**

**: Doç. Dr. Özcan KALENDERLİ**

**: Doç. Dr. Serhat ŞEKER**

**İSTANBUL, 2001**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KÜLTÜR VE  
DOKÜMANTASYON BAKANLIĞI**

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                      |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------|
| SİMGE LİSTESİ.....                                                                   | iv   |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                                   | vi   |
| ÇİZELGE LİSTESİ.....                                                                 | viii |
| ÖNSÖZ.....                                                                           | ix   |
| ÖZET.....                                                                            | x    |
| ABSTRACT.....                                                                        | xi   |
| 1. GİRİŞ.....                                                                        | 1    |
| 2. İKİ BOYUTLU PROBLEMLERİN ANALİZİNDE SONLU ELEMANLAR<br>YÖNTEMİ (SEY).....         | 3    |
| 2.1 Sınır Değer Problemleri.....                                                     | 3    |
| 2.2 Varyasyonel Formülasyon.....                                                     | 4    |
| 2.3 Sonlu Eleman Analizi.....                                                        | 8    |
| 2.3.1 Bölgenin Ayrıştırılması.....                                                   | 8    |
| 2.3.2 Eleman Enterpolasyon Fonksiyonları.....                                        | 10   |
| 2.3.3 Ritz Yöntemi İle SEY Eşitliklerinin Elde Edilmesi.....                         | 12   |
| 2.3.3.1 Eleman Eşitliklerinin Elde Edilmesi.....                                     | 13   |
| 2.3.3.2 Eleman Matrislerinin Birleştirilmesi ve Denklem Takımının Elde Edilmesi..... | 15   |
| 2.3.3.3 Dirichlet Sınır Şartlarının Girilmesi.....                                   | 18   |
| 3. ELEKTROMAGNETİK ALAN PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR<br>YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ.....    | 21   |
| 3.1 Lineer Elektrostatik Problemlerin Formülasyonu.....                              | 23   |
| 3.2 Lineer Magnetostatik Problemlerin Formülasyonu.....                              | 24   |
| 3.3 Nonlineer Magnetostatik Problemlerin Formülasyonu.....                           | 25   |
| 3.3.1 Birinci Mertebeden Üçgen Newton Elemanları.....                                | 29   |
| 3.4 İki Boyutlu Zamanla Değişen Alan Problemlerinin Formülasyonu.....                | 30   |
| 4. YAPAY SINIR AĞLARI (YSA).....                                                     | 33   |
| 4.1 YSA'nın Yapısı ve İşlem Elemanı.....                                             | 33   |
| 4.2 Bağlantı Geometrilere.....                                                       | 35   |
| 4.3 Eşik Fonksiyonları.....                                                          | 36   |
| 4.4 Ağırlık Uzayı.....                                                               | 36   |
| 4.5 YSA'da Eğitim (Training).....                                                    | 37   |
| 4.6 Bellek.....                                                                      | 38   |
| 4.7 Hata Toleransı.....                                                              | 38   |
| 4.8 Öğrenme Kuralları.....                                                           | 39   |
| 4.9 Perceptron (İdrak, almaç).....                                                   | 39   |
| 4.10 Çok Katmanlı İdrak (Multi-Layer Perceptron).....                                | 40   |
| 4.11 Hatanın Geriye Yayılması Algoritması ve Genelleştirilmiş Delta Kuralı.....      | 41   |
| 4.12 Öğrenme ve Momentum Katsayıları.....                                            | 46   |

|         |                                                                           |     |
|---------|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.      | SONLU ELEMANLAR AĞININ DÖRTGEN ELEMANLAR KULLANILARAK İNCELTİLMESİ.....   | 47  |
| 5.1     | Bir Üçgenin Alt Üçgen Elemanlara Bölünmesi.....                           | 48  |
| 5.2     | Üçgen ve Dörtgen Elemanların Birlikte Bulunduğu Sonlu Eleman Ağ Yapısı... | 49  |
| 5.3     | Üçgen Elemanın Dörtgen Elemanlar İçerecek Şekilde Bölünmesi.....          | 50  |
| 5.4     | İzoparametrik Elemanlar ve Bu Elemanlar Üzerinde Sayısal İntegral.....    | 52  |
| 5.4.1   | İzoparametrik Elemanlar.....                                              | 52  |
| 5.4.2   | Sayısal İntegrasyon.....                                                  | 56  |
| 5.4.3   | Ana Dörtgen Eleman Üzerinde Sayısal İntegrasyon.....                      | 58  |
| 5.5     | Örnek Ağ İnceltmesi.....                                                  | 60  |
| 6.      | BİR ELEKTROMAGNETİN ENDÜKTANSININ ANALİTİK HESABI.....                    | 63  |
| 6.1     | Genel Tanımlar.....                                                       | 63  |
| 6.2     | Endüktans Hesabında Kullanılan Analitik Yöntem.....                       | 66  |
| 6.2.1   | Magnetik Alan Problemi.....                                               | 66  |
| 6.2.1.1 | Kübik Spline Yöntemi.....                                                 | 69  |
| 6.2.1.2 | Kübik Spline Algoritması.....                                             | 74  |
| 6.2.2   | Amper Kanununun Magnetik Devreye Uygulanması ve Alan Hesabı.....          | 76  |
| 6.3     | Elektromagnetin Endüktansı.....                                           | 86  |
| 6.4     | Sabit G Eğrilerinin Yapay Sinir Ağları ile Modellenmesi.....              | 87  |
| 6.4.1   | YSA Mimarisi ve Özellikleri.....                                          | 87  |
| 6.4.2   | Geri yayılım Algoritması.....                                             | 93  |
| 7.      | ELEKTROMAGNETİN ENDÜKTANSININ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE HESABI.....     | 95  |
| 7.1     | Matematiksel Model.....                                                   | 95  |
| 7.2     | Sonlu Elemanlar Analizi.....                                              | 96  |
| 7.3     | Sonlu Elemanlar Yönteminde Endüktans Hesabı.....                          | 97  |
| 7.4     | Sonlu Elemanlar Analizinde Kullanılan Tipik Bir Ağ Yapısı.....            | 98  |
| 7.5     | Örnek Uygulama.....                                                       | 100 |
| 7.5.1   | Endüktans Hesabı.....                                                     | 100 |
| 7.5.2   | Kuvvet Hesabı.....                                                        | 106 |
| 7.6     | Yazılan Bilgisayar Programına Ait Ekran Görüntüleri.....                  | 108 |
| 8.      | SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....                                                 | 113 |
|         | KAYNAKLAR.....                                                            | 116 |
|         | ÖZGEÇMİŞ.....                                                             | 122 |

## SİMGE LİSTESİ

|               |                                                         |
|---------------|---------------------------------------------------------|
| $a$           | Bobin boyu, eleman birinci katsayı sabiti               |
| $A$           | Magnetik vektör potansiyel                              |
| $b$           | Bobin eni, eleman ikinci katsayı sabiti, kuvvet vektörü |
| $B$           | Magnetik akı yoğunluğu vektörü                          |
| $c$           | Armatür genişliği, eleman ikinci katsayı sabiti         |
| $D$           | Elektriksel akı yoğunluğu vektörü                       |
| $D$           | Toplam düğüm sayısı                                     |
| $e$           | Eleman indisi                                           |
| $E$           | Elektrik alan şiddeti vektörü                           |
| $E_p$         | Yapay sinir ağlarında karesel hata                      |
| $f$           | Kuvvet                                                  |
| $F$           | Fonksiyonel, armatüre uygulanan kuvvet                  |
| $G$           | Endüktans katsayısı                                     |
| $H$           | Magnetik alan şiddeti vektörü                           |
| $I$           | Akım                                                    |
| $J$           | Akım yoğunluğu vektörü                                  |
| $[J]$         | Jacobian matrisi (eleman katsayı hesabında)             |
| $[K_{ij}]$    | Eleman katsayı matrisi                                  |
| $L$           | Endüktans                                               |
| $M$           | Toplam eleman sayısı                                    |
| $N$           | Eleman enterpolasyon fonksiyonu, bobin sarım sayısı     |
| $o_j$         | j. düğümün çıkış değeri                                 |
| $p$           | Dirichlet sınır şartı değeri                            |
| $P_{ij}$      | Jacobian matrisi (Nonlineer analizde)                   |
| $S$           | Kübik-Spline polinomu                                   |
| $u$           | Nüve genişlikleri                                       |
| $V$           | Elektrostatik potansiyel                                |
| $w_{ij}$      | Ağırlıklar                                              |
| $W$           | Magnetik alanda depo edilen enerji                      |
| $x$           | Yapay sinir ağlarında giriş vektörü                     |
| $y$           | Yapay sinir ağlarında çıkış vektörü                     |
| $i,j,k$       | Üçgen eleman düğüm indisleri                            |
| $l,m,n$       | İç üçgen düğüm indisleri                                |
| $x,y,z$       | Kartezyen koordinat sistemi değişkenleri                |
| $\alpha$      | Momentum sabiti, Diferansiyel denklem sabit katsayısı   |
| $\beta$       | Diferansiyel denklem sabit katsayısı                    |
| $\delta$      | Armatür hava aralığı                                    |
| $\varepsilon$ | Öğrenme katsayısı                                       |
| $\phi$        | Genel potansiyel fonksiyonu                             |

|             |                                                                                        |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mu$       | Magnetik Geçirgenlik ( $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}$ H/m :Boşluğun magnetik geçirgenliği) |
| $\mu_r$     | Bağıl magnetik geçirgenlik                                                             |
| $\nu$       | Magnetik Direnç                                                                        |
| $\rho$      | Öz direnç                                                                              |
| $\sigma$    | Elektriksel iletkenlik                                                                 |
| $\eta, \xi$ | Yerel koordinat sistemi değişkenleri                                                   |
| $\Delta$    | Üçgenin alanı                                                                          |
| $\nabla$    | Diverjans operatörü                                                                    |
| $\Omega$    | Hesaplama bölgesi (eleman yüzey alanı veya hacmi)                                      |
| $\theta$    | Kutup (bias)                                                                           |



## ŞEKİL LİSTESİ

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 2.1 $\Gamma_d$ ara yüzeyi ile ayrılmış süreksizlik içeren bir bölge. ....                  | 4   |
| Şekil 2.2 4 eleman 6 düğümlü bir sonlu eleman ağı. ....                                          | 9   |
| Şekil 2.3 Kartezyen koordinatlarda tipik lineer üçgen eleman. ....                               | 11  |
| Şekil 4.1 Genel işlem elemanı yapısı. ....                                                       | 34  |
| Şekil 4.2 YSA sınıflandırıcılar. ....                                                            | 36  |
| Şekil 4.3 Çok katmanlı perceptron yapısı. ....                                                   | 40  |
| Şekil 5.1 a) Başlangıç Ağı, b) İnceltilmiş Ağ. ....                                              | 48  |
| Şekil 5.2 Üçgen ve dörtgen elemanlardan oluşan bir ağ yapısı. ....                               | 49  |
| Şekil 5.3 Tipik bir lineer üçgen elemanda iç noktalar. ....                                      | 50  |
| Şekil 5.4 Köşe noktaları l, m, n olan yeni üçgenin yerleşimi. ....                               | 51  |
| Şekil 5.5 a) Başlangıç ağındaki üçgen elemanın aldığı son durum. ....                            | 51  |
| b) Tipik dörtgen eleman. ....                                                                    | 51  |
| Şekil 5.6 Ana Elemandan sonlu eleman ağının üretilmesi. ....                                     | 53  |
| Şekil 5.7 Dörtgen eleman için Gauss noktaları. ....                                              | 59  |
| Şekil 5.8 Sonlu eleman ağ yapısında izoparametrik dörtgen eleman. ....                           | 60  |
| Şekil 5.9 4 kutuplu doğru makinasına ait $\frac{1}{4}$ simetrik geometrisi. ....                 | 61  |
| Şekil 5.10 Doğru akım makinası için başlangıç ağı. ....                                          | 61  |
| Şekil 5.11 Hava aralığında kullanılan elemanlar. ....                                            | 62  |
| Şekil 5.12 Doğru akım makinası için elde edilen akı dağılımı. ....                               | 62  |
| Şekil 6.1 Bir elektromagnetin prensip şeması. ....                                               | 63  |
| Şekil 6.2 Değişik armatür tiplerine göre tipik kuvvet-stroke karakteristikleri. ....             | 64  |
| Şekil 6.3 Yük için gerekli kuvvet. ....                                                          | 65  |
| Şekil 6.4 Değişik $DP$ oranları için kuvvet-stroke karakteristikleri. ....                       | 65  |
| Şekil 6.5 Elektromagnete ait boyutlar. ....                                                      | 66  |
| Şekil 6.6 Hesaplama bölgesi. ....                                                                | 67  |
| Şekil 6.7 $\alpha$ 'nın $\delta/a$ ile değişimi. ....                                            | 69  |
| Şekil 6.8 $[x_0, x_n]$ aralığında tanımlı eğri ve alt bölgeleri. ....                            | 71  |
| Şekil 6.9 Kübik-Spline yöntemi ile modelleme sonucunda elde edilen $\alpha$ eğrileri. ....       | 75  |
| Şekil 6.10 Rölatif hava aralığının fonksiyonu olarak sabit $G$ katsayısının değişimi. ....       | 82  |
| Şekil 6.11 Rölatif hava aralığının fonksiyonu olarak sabit $G$ katsayısının değişimi. ....       | 82  |
| Şekil 6.12 Rölatif hava aralığının fonksiyonu olarak sabit $G$ katsayısının değişimi. ....       | 83  |
| Şekil 6.13 Rölatif hava aralığının fonksiyonu olarak sabit $G$ katsayısının değişimi. ....       | 83  |
| Şekil 6.14 Rölatif hava aralığının fonksiyonu olarak sabit $G$ katsayısının değişimi. ....       | 84  |
| Şekil 6.15 Rölatif hava aralığının fonksiyonu olarak sabit $G$ katsayısının değişimi. ....       | 84  |
| Şekil 6.16 Rölatif hava aralığının fonksiyonu olarak sabit $G$ katsayısının değişimi. ....       | 85  |
| Şekil 6.17 Rölatif hava aralığının fonksiyonu olarak sabit $G$ katsayısının değişimi. ....       | 85  |
| Şekil 6.18 Rölatif hava aralığının fonksiyonu olarak sabit $G$ katsayısının değişimi. ....       | 86  |
| Şekil 6.19 YSA modelleme sisteminin ağ mimarisi. ....                                            | 88  |
| Şekil 6.20 $b/a=0.2$ için YSA ve Kübik-Spline yöntemleri ile elde edilen tahmin eğrileri. ....   | 92  |
| Şekil 6.21 $b/a=0.125$ için YSA ve Kübik-Spline yöntemleri ile elde edilen tahmin eğrileri. .... | 93  |
| Şekil 7.1 Sonlu elemanlar yöntemi için problemin matematiksel tanımı. ....                       | 95  |
| Şekil 7.2 Sonlu eleman analizinde kullanılan tipik bir ağ yapısı. ....                           | 99  |
| Şekil 7.3 Hava aralığında yeni yöntem ile ayrıştırılan elemanlar. ....                           | 99  |
| Şekil 7.4 Akı dağılımı. ....                                                                     | 100 |
| Şekil 7.5 $\delta=0.005$ m için ağ yapısı ve alan dağılımı. ....                                 | 101 |
| Şekil 7.6 $\delta=0.01$ m için ağ yapısı ve alan dağılımı. ....                                  | 102 |
| Şekil 7.7 $\delta=0.02$ m için ağ yapısı ve alan dağılımı. ....                                  | 103 |
| Şekil 7.8 Analitik ve sayısal olarak hesaplanan endüktans değerleri. ....                        | 104 |
| Şekil 7.9 Değişik geometriler için elde edilen endüktans değerleri. ....                         | 106 |

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 7.10 İki farklı yöntem ile elde edilen kuvvet değerleri.....                | 108 |
| Şekil 7.11 Program giriş sayfası. ....                                            | 108 |
| Şekil 7.12 Yeni giriş dosyası oluşturma bölümü. ....                              | 109 |
| Şekil 7.13 Çözümde kullanılan ağ yapısının görüntülediği bölüm.....               | 109 |
| Şekil 7.14 Çözüm sonucunda elde edilen alan dağılımının görüntülediği bölüm. .... | 110 |
| Şekil 7.15 Ana sayfa. ....                                                        | 110 |
| Şekil 7.16 Sabit $G$ eğrilerinin değişimini gösteren bölüm.....                   | 111 |
| Şekil 7.17 Endüktans değişiminin gösterildiği bölüm.....                          | 111 |
| Şekil 7.18 Magnetik vektör potansiyel değerlerinin hesaplandığı bölüm. ....       | 112 |
| Şekil 7.19 YSA ile modelleme sonuçlarının gösterildiği bölüm. ....                | 112 |



## ÇİZELGE LİSTESİ

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Çizelge 6.1 Belirlenen optimum eğitim parametreleri.....                         | 89  |
| Çizelge 6.2 Eğitim verileri.....                                                 | 90  |
| Çizelge 6.3 Test verileri.....                                                   | 91  |
| Çizelge 6.4 Tahmin verileri.....                                                 | 92  |
| Çizelge 7.1 Analiz edilen elektromagnetin boyutları ve diğer büyüklükleri.....   | 101 |
| Çizelge 7.2 Analitik ve sayısal yöntemlerle elde edilen endüktans değerleri..... | 104 |
| Çizelge 7.3 Armatüre uygulanan kuvvet değerleri.....                             | 107 |





## ÖNSÖZ

Bu çalışmam esnasında, her türlü maddi ve manevi desteklerini esirgemedi, büyük bir sabır ve özveri gösteren saygıdeğer Doç. Dr. Nurettin UMURKAN hocama sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez izleme komitemde bulunan ve tezimin oluşmasında değerli görüş ve katkılarını esirgemeyen Prof. Dr. Hüseyin ÇAKIR ve Doç. Dr. İbrahim ŞENOL hocalarıma da teşekkür ederim.

Çalışmamda kullandığım analitik yöntem ile ilgili olarak e-mail vasıtasıyla tanışıp, konuyla ilgili olarak tartışmalar gerçekleştirdiğimiz, yöntemin uygulanması konusunda yardımlarını esirgemeyen, Craiova (Romanya) Üniversitesi öğretim üyelerinden Prof. Dr. G.A. CIVIDJIAN hocama da teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamın her aşamasında büyük bir sabır gösteren ve beni destekleyen, başta eşim olmak üzere ailelerimize ve Yıldız Teknik Üniversitesi'nde birlikte çalışma fırsatını yakaladığım bütün hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

## ÖZET

Bu çalışmada, bir elektromagnetin bobininin endüktans hesabı, sayısal ve analitik olarak karşılaştırmalı olarak hesaplanmıştır. Sayısal yöntem olarak sonlu elemanlar yöntemi; analitik yöntem olarak, temeli kompleks düzlem dönüşümüne dayanan, sınır şartlarının güç yaklaşımı yöntemi kullanılmıştır.

Sonlu elemanlar yöntemi için bir bilgisayar programı yazılmıştır. Sonlu elemanlar yönteminde yazılan kişisel bir programda karşılaşılan en büyük zorluk, problem için seçilen başlangıç ağından, daha iyi bir çözüm elde etmek için, inceltmiş olarak adlandırılan yeni bir ağ yapısını elde edecek kodun yazılmasındadır. Çözümün doğruluğu, problem bölgesini ayrıştırmak için kullanılan eleman sayısına bağlı olduğundan, bu işlem kaçınılmazdır. Bu çalışmada, sonlu elemanlar yöntemi için, yazılan kişisel bilgisayar programlarında kolaylıkla kullanılabilecek yeni bir ağ inceltme tekniği geliştirilmiştir.

Kullanılan analitik yöntem, temeli eski olmakla birlikte oldukça yeni bir yöntemdir. Bu yöntemde kullanılan bir katsayıya ait modelleme tekniğinde, yapay sinir ağları yöntemi kullanılarak, yöntem yeni bir katkı yapılmıştır. Eğrilerin modellenmesi ve enterpolasyon ile ara değerlerin hesaplanmasında yine yapay sinir ağlarından yararlanılmış, yapay sinir ağlarının enterpolasyon tekniğinde de kullanılabilirliği gösterilmiştir.

Elektromagnete ait endüktans hesabı yapıldıktan sonra, bu elemanların seçiminde en önemli kriter olan kuvvet-stroke (kurs boyu) karakteristikleri, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Böylece bu yöntem ile, elektromagnet tasarımının yapılabilirliği ortaya konmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Sonlu Elemanlar Yöntemi, Yapay Sinir Ağları, Ağ İnceltme, Endüktans Hesabı, Eğri Modelleme.

## **ABSTRACT**

In this thesis, the inductance of a magnet is calculated with analytic and numerical methods. The results obtained from two methods are compared. The finite element method as numerical method and method of separation of variables as analytical method are used for calculation of inductance.

A computer program is developed for finite element method. Mesh refinement procedure in a personal finite element computer program is more complex structure. In refinement procedure, new elements are derived from elements, which are in initial mesh. Hence the code for this job is more complex. The accuracy of finite element method is due to the number of elements in mesh. A new mesh refinement method was developed in this thesis for use in personal finite element program.

A new method, the power approximation of boundary conditions in connected regions, is used to solve the two-dimensional magnetic field problem within the window and the gap of the magnet, considering the core uniform saturated. Expressions of inductance and magnetic flux are given. A constant in expression of inductance obtained from analytic method was modeled by artificial neural network.

Force-stroke characteristics of magnet are also obtained from finite element method. Maxwell stress and Coulomb virtual work methods are used for calculation of force applied to the armature of magnet.

Results obtained from two methods are compared and good agreement was found between two methods. The model applied for finite element method is thus used for design of a magnet.

**Keywords:** Finite Element Method, Artificial Neural Networks, Mesh Refinement, Inductance Calculation, Curve Fitting.

## 1. GİRİŞ

Bu çalışmada, sonlu elemanlar yönteminde yeni bir ağ inceltme yöntemi geliştirilerek, kişisel olarak yazılan programlar için bu işlemin kolaylaştırılması hedeflenmiştir. Sonlu elemanlar yönteminde elde edilecek sonuçlar, ağ içersindeki eleman sayısı ile doğru orantılıdır. Lineer üçgen elemanlar kullanılması durumunda, elektromagnetik problemlerde magnetik akı yoğunluğu eleman yüzeyi üzerinde sabit kabul edilir. Bu durumda eleman yüzey alanları ne kadar küçük olursa bu kabul o kadar doğru olur. Kişisel yazılan programlarda ağ yapısına ait değerler, düğüm koordinatları, eleman yerleşimleri (eleman bağlantı matrisi) ve eleman tipi (elemanın hangi malzemeyi modellediği) tek tek el ile girilmelidir. Başlangıçta yapılan ağ için veri girişinin zaman almaması için eleman sayısı genelde az tutulur. Girilen bu ilk ağ, daha sonra inceltme işlemine, yani elemanların tekrar kendi içersinde bölünmesi işlemine tabi tutularak eleman sayısının artırılmasına çalışılır. Ağ inceltme işlemi için bir çok algoritma geliştirilmiştir (Bryant, 1985; Cendes, et. al, 1983; Golios and Tsiboukis, 1992; Mitchell and Penman, 1992; Shepard, 1985). Bu çalışmalardaki temel yöntem Delaunay yöntemidir. Yöntem kişisel olarak yazılan programlarda uygulanması zor, oldukça karmaşık algoritmaya ihtiyaç duyan bir yöntemdir.

Lineer üçgen elemanları alt elemanlara bölmenin en kolay yolu, elemanın içersine, elemanların kenarlarının orta noktalarını düğüm noktası olarak alan bir üçgen yerleştirmektir. Bu durumda bir üçgen dört üçgene ayrılarak, toplam eleman sayısı ilk değerinin dört katına çıkartılmış olacaktır. Çünkü bir üçgene bölmeleme işlemi uygulandığında, ağdaki bütün elemanlar bundan etkilenecektir. Bu da çözüm süresinin dört kat artmasına ve gerekli olmayan bölgelere de inceltme işlemi uygulanması sonucunu doğuracaktır. Yeni yöntemde sadece istenen elemanlar, bir üçgen ve üç adet dörtgene bölünmek sureti ile inceltme işlemi yapılmaktadır. Bu durumda ağdaki diğer elemanlar bu işlemten etkilenmemektedir. Bölüm 4'te bu yöntem ve yeni önerilen yöntem ayrıntıları ile anlatılmıştır.

Önerilen ağ inceltme işlemi, bir elektromagnetin bobinine ait endüktans değerinin hesaplanmasına uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar analitik bir yöntem ile karşılaştırılmıştır. Kullanılan analitik yöntemde elde edilen endüktans ifadesinde, elektromagnetin geometrisine bağlı olarak değişen bir katsayıya ait değişim, yapay sinir ağları yöntemi ile modellenmiştir. Yapay sinir ağları ile modellemede kullanılan değişimler belli geometrideki bobine ait olduklarından diğer geometrilere ait değişimler yapay sinir ağlarına tahmin yaptırılmak sureti

ile kolayca elde edilmiştir. Yapay sinir ağları yönteminin bu değişimlere ait uygun ve yeterli tahminde bulunması, diğer elektromagnetik disiplinlere de uygulanabilirliğini ortaya koymuştur.

Sonlu elemanlar yönteminde uygulanan modelin analitik yöntem ile örtüşen sonuçlar vermesi, modelin doğruluğunu ortaya koymuştur. Böylece bu yöntem ile elektromagnete ait kuvvet-stroke karakteristikleri elde edilmiştir. Uygulanan model ile bir elektromagnetin tasarımının yapılabilmesi mümkün olacaktır.

Bölüm 2’de, iki boyutlu sonlu elamanlar yönteminin teorisi verilerek, sonlu elemanlar eşitliklerinin nasıl elde edileceği anlatılmıştır.

Bölüm 3’te, sonlu elemanlar yönteminin elektromagnetik problemlere uygulanması verilmiştir.

Bölüm 4’de, yapay sinir ağlarının genel açıklaması ve bu çalışmada kullandığımız *hatanın geri yayılımı* algoritması anlatılmıştır.

Bölüm 5’de, yeni ağ inceltme işlemi ve üçgen-dörtgen elemanların birlikte bulunduğu ağ yapısında genel katsayı matrisinin elde edilmesi anlatılmıştır. Dörtgen elemanlara ait eleman enterpolasyon fonksiyonlarının ve katsayı matrislerinin nasıl elde edileceği ayrıntısıyla verilmiştir.

Bölüm 6’da, problemin uygulandığı elektromagnet tanıtılmış, kullanılan analitik yöntem, ilgili katsayıya ait yapay sinir ağları modellemesi, modellemelerin Kübik-Spline yöntemi ile karşılaştırılması verilmiştir.

Bölüm 7’de ise, elektromagnete uygulanan sonlu elemanlar modeli verilerek, bu yöntem ile elde edilen sonuçların, analitik yöntem ile bulunan sonuçlar ile karşılaştırılması yapılmıştır. Aynı zamanda elde edilen tipik bir kuvvet-stroke karakteristiği de gösterilmiştir.

## 2. İKİ BOYUTLU PROBLEMLERİN ANALİZİNDE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ (SEY)

Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) bir boyutlu problemler için geliştirilmeden önce, iki boyutlu problemler için yaygın olarak kullanılmaktaydı. Analitik veya kapalı form çözümlerin elde edilemediği karmaşık fiziksel problemlerin matematik modellerine uygulanmıştır. Bugün SEY, elektromagnetik de içinde bulunduğu mühendislik ve diğer bilim alanlarında, iki boyutlu problemlerin çözümü için yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu bölümde basit lineer üçgen elemanlar kullanılarak, genel bir iki boyutlu sınır değer problemi için sonlu eleman çözümünün formülasyonu elde edilecektir.

### 2.1 Sınır Değer Problemleri

En genel şekilde iki boyutlu bir sınır değer problemi, aşağıdaki ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklem ile verilir.

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \beta \phi = f \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.1)$$

Verilen diferansiyel denklemde  $\phi$  bilinmeyen fonksiyon,  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  ve  $\beta$  problem bölgesinin fiziksel özelliklerine bağlı bilinen parametreler,  $f$  ise kaynak veya uyarma fonksiyonudur. İki boyutlu Laplace, Poisson ve Helmholtz denklemleri (2.1) denkleminin özel şekilleridir. Probleme ait sınır şartları,

$$\phi = p, \quad \Gamma_1 \text{ boyunca} \quad (2.2)$$

ve

$$\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j}\right) \cdot \mathbf{n} + \gamma \phi = q, \quad \Gamma_2 \text{ boyunca} \quad (2.3)$$

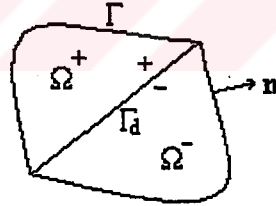
şeklinde verilir. Burada  $\Gamma(=\Gamma_1+\Gamma_2)$ ,  $\Omega$  bölgesini çevreleyen sınır,  $\mathbf{n}$  sınıra dik ve dışarı yönelmiş birim vektör,  $p$  ve  $q$  değişkenin sınırdaki değerleri,  $\gamma$  sınırın fiziksel özellikleri ile ilgili parametredir ve sınır kaynağı veya uyarması olarak algılanabilir.  $\gamma=0$  yapılarak (2.3)'ün özel bir formu olarak Neumann sınır şartı elde edilir.

Eğer  $\alpha_x$  ve  $\alpha_y$  ile karakterize edilen bölgenin özellikleri süreksizlik gösteriyorsa ve yine süreksizlik ara yüzeyinde herhangi bir yüzey kaynağı yok ise,  $\phi$  aşağıdaki süreklilik şartlarını sağlar.

$$\phi^+ = \phi^- , \quad \Gamma_d \text{ boyunca} \quad (2.4)$$

$$\left( \alpha_x^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} = \left( \alpha_x^- \frac{\partial \phi^-}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y^- \frac{\partial \phi^-}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} , \quad \Gamma_d \text{ boyunca} \quad (2.5)$$

$\mathbf{i}$  ve  $\mathbf{j}$ , sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönündeki birim vektörleri,  $\Gamma_d$  süreksizlik ara yüzeyini göstermektedir. Problemin ele alındığı genel bir bölge Şekil 2.1'de görülmektedir.



Şekil 2.1  $\Gamma_d$  ara yüzeyi ile ayrılmış süreksizlik içeren bir bölge.

## 2.2 Varyasyonel Formülasyon

Kısmi diferansiyel denklemlerin SEY formülasyonunun elde edilmesinde en çok kullanılan yöntemlerin başında *varyasyonel formülasyon* gelmektedir (Jin, 1993). Verilen sınır şartları altında bir diferansiyel denklemin varyasyonel ilkesine göre çözümü, fonksiyonel olarak adlandırılan bir bağıntının değişkenlerine göre en küçük değere indirgenmesi ile elde edilir. Yukarıda verilen sınır değer problemine eşdeğer varyasyonel problem,

$$\begin{cases} \delta F(\phi) = 0 \\ \phi = p, \Gamma_1 \text{ boyunca} \end{cases} \quad (2.6)$$

ile tanımlanır ve burada,

$$\begin{aligned} F(\phi) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \alpha_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \alpha_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \beta \phi^2 \right] d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\gamma}{2} \phi^2 - q \phi \right) d\Gamma - \iint_{\Omega} f \phi d\Omega \end{aligned} \quad (2.7)$$

ifadesiyle tanımlıdır. Eğer süreksizlik ara birimi varsa (2.6) ifadesi, (2.4) süreksizlik şartları ile tamamlanır. Varyasyonel formülasyonu uygulayabilmek için ilk önce  $F(\phi)$ 'nin  $\phi$ 'ye göre değişiminin alınması gereklidir. Bu işlem yapıldığında,

$$\begin{aligned} \delta F(\phi) = & \iint_{\Omega} \left[ \alpha_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) + \alpha_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi \delta \phi \right] d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_2} (\gamma \phi - q) \delta \phi d\Gamma - \iint_{\Omega} f \delta \phi d\Omega \end{aligned} \quad (2.8)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeyi, sınır şartları açık olarak gözükecek şekilde yazmak için aşağıdaki türev tanımlarını ve (2.11) ile verilecek olan diverjans teoremini kullanmalıyız.

$$\alpha_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \delta \phi \quad (2.9)$$

$$\alpha_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \phi \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \delta \phi \quad (2.10)$$

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\Gamma} (U i + V j) \cdot n d\Gamma \quad (2.11)$$



Bu ifadelerle (2.8) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \delta F(\phi) = & \iint_{\Omega} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi - f \right] \delta \phi \, d\Omega \\
 & + \oint_{\Gamma} \left[ \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} j \right) \cdot n \right] \delta \phi \, d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma_2} (\gamma \phi - q) \delta \phi \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$\phi$ 'nin  $\Gamma_1$  üzerinde sabit bir değere sahip olmasından dolayı,  $\delta \phi$  değişimi,  $\Gamma_1$  boyunca sıfır olacaktır. Dolayısıyla karşılık gelen integral de sıfır olacaktır. Böylece (2.12) aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \delta F(\phi) = & \iint_{\Omega} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi - f \right] \delta \phi \, d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma_2} \left[ \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} j \right) \cdot n + \gamma \phi - q \right] \delta \phi \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Son olarak değişmezlik gerekliliğini ele alarak (2.14) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi - f \right] \delta \phi \, d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma_2} \left[ \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} j \right) \cdot n + \gamma \phi - q \right] \delta \phi \, d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

(2.14)'ün,  $\delta \phi$ 'nin kabul edilebilir bütün değişimlerinde geçerli olabilmesi için yüzey ve çizgisel integrallerin ortadan kalkması gerekir. Sonuç olarak,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \beta \phi - f = 0 \quad (2.15)$$

$$\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j}\right) \cdot \mathbf{n} + \gamma \phi - q = 0, \quad \Gamma_2 \text{ boyunca} \quad (2.16)$$

eşitliklerine tekrar ulaşılır. Bu ifadeler (2.1) ve (2.3) eşitlikleri ile aynıdır. Bu problemde, (2.2) ile verilen sınır şartı Dirichlet sınır şartıdır ve değer olarak problemin çözümünde ele alınır. Elektromagnetik problemlerde genellikle homojen Dirichlet şartı kullanılır. (2.3) ile verilen sınır şartı ise Neumann sınır şartı olup, tabii sınır şartı olarak da isimlendirilir ve bu şart otomatik olarak gerçekleşir.

(2.11) ile verilen diverjans teoremini uygularken,  $\alpha_x$  ve  $\alpha_y$ 'nin bütün bölgede sürekli olduğunu kabul ettiğimizi belirtmemiz gerekir. Eğer  $\alpha_x$  ve  $\alpha_y$ 'de bir süreksizlik mevcut ise, problem bölgesi  $\alpha_x$  ve  $\alpha_y$ 'nin sürekli olduğu birkaç alt bölgeye ayrılır. Bu işlemde sonra bu bölgelerin her birine diverjans teoremi uygulanır. Çok özel bir durum olarak, bir bölgenin  $\Gamma_d$  ara yüzeyi ile iki bölgeye ayrıldığını kabul edelim (Şekil 2.1). Yukarıda açıklanan prosedür takip edilerek, (2.14) ifadesi, aşağıdaki iki integral ifadenin sol tarafına eklenerek tekrar elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_d} \left( \alpha_x^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n}^+ \delta \phi^+ d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_d} \left( \alpha_x^- \frac{\partial \phi^-}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y^- \frac{\partial \phi^-}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n}^- \delta \phi^- d\Gamma \end{aligned} \quad (2.17)$$

Burada  $\mathbf{n}^+$   $\Gamma_d$ 'ye dik ve "+" yönden "-" yöne yönelmiş birim vektörü,  $\mathbf{n}^-$  ise buna ters yöndeki sınıra dik birim vektörü göstermektedir.  $\phi$ 'nin  $\Gamma_d$  boyunca sabit olmasından dolayı (2.4) eşitliğine göre  $\delta \phi^+ = \delta \phi^-$  olmalıdır. Böylece (2.17) aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir.

$$\int_{\Gamma_d} \left[ \left( \alpha_x^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n}^+ + \left( \alpha_x^- \frac{\partial \phi^-}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y^- \frac{\partial \phi^-}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n}^- \right] \delta \phi d\Gamma \quad (2.18)$$

$\delta\phi$ 'nin keyfi değişmesinden dolayı, (2.15) ve (2.16)'ya ilaveten diğer bir Neumann şartını elde ederiz.

$$\left( \alpha_x^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n}^+ + \left( \alpha_x^- \frac{\partial \phi^-}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y^- \frac{\partial \phi^-}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n}^- = 0 \quad (2.19)$$

Sonuçta, (2.7) fonksiyoneli  $\alpha_x, \alpha_y, \beta$  ve  $\gamma$ 'nın reel veya kompleks değerleri için geçerlidir. Eğer bu parametreler sadece reel ise, aşağıdaki fonksiyonel kullanılabilir.

$$\begin{aligned} F(\phi) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \alpha_x \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^2 + \alpha_y \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|^2 + \beta |\phi|^2 \right] d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\gamma |\phi|^2 - q^* \phi - q \phi^*) d\Gamma \\ & - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (f^* \phi + f \phi^*) d\Omega \end{aligned} \quad (2.20)$$

Son yazılan denklemlerde “\*” işareti kompleks eşlenik işlemidir. Açıkça görülmektedir ki (2.20) fonksiyoneli reel büyüklüğe sahiptir. Bununla birlikte genel durumu gözönüne almak için formülasyona temel olarak (2.7) ile verilen fonksiyonel temel alınacaktır.

## 2.3 Sonlu Eleman Analizi

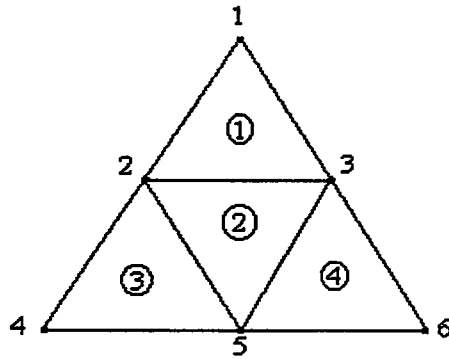
Bu bölümde, 2.1 bölümünde tanımlanan problemin çözümüne ait SEY formülasyonu, temel adımları ile açıklanacaktır. Basitlik açısından ve birçok problemde yeterli olmasından dolayı lineer, üç düğümlü üçgen elemanlar ele alınacaktır.

### 2.3.1 Bölgenin Ayrıştırılması

SEY'in ilk adımı, problem bölgesinin iki boyutlu elmanlarla alt bölgelere ayrıştırılmasıdır. Sonuçta elde edilen yapı, *sonlu eleman ağı* olarak isimlendirilir. Burada iki boyutlu elemanlarımız üç düğümlü lineer üçgen elemanlardır. Dolayısıyla aranan değişken, üçgen

elemanın bütün yüzeyinde sabit bir değere sahip olacaktır. Bölgenin ayrıştırılmasında dikkat edilecek hususlar, elemanların üstüste gelmemesi ve aralarında boşluk olmamasıdır. Elemanlar birbirlerine köşe noktaları ile bağlanmalı ve bir üçgenin köşe düğüm noktası bir başka elemanın düğümüne karşılık gelmelidir. Ayrıştırımda dikkat edilecek iki önemli husus daha vardır. Birincisi; dar elemanlardan, başka bir deyişle küçük iç açılı elemanlardan kaçınılmalıdır. Dar üçgenler kabul edilebilir elemanlar olmakla birlikte, hatayı artırırlar çünkü, sonuç üçgenin en küçük açısının sinüsü ile ters orantılıdır. İkinci husus ise, seçilen elemanların mümkün olduğu kadar küçük seçilmesidir. Başka bir deyişle, problem bölgesi mümkün olduğu kadar çok sayıda elemana bölünmelidir.

Her bir elemanı tanımlamak için, etiket olarak bir tam sayı grubu, benzer olarak, elemanların köşe noktalarına karşılık gelen düğümleri tanımlamak için de başka bir tam sayı grubu kullanılır. Dolayısıyla her bir eleman üç düğüm ile ilişkilendirilecektir. Bölge içinde bir düğüm birden fazla elemana ait olabileceğinden, bu düğümler genel olarak numaralandırılırlar. Dolayısıyla elemanların yerel düğüm numaralarına bir genel düğüm numarası karşılık gelecektir. Elemanların bu şekilde yerleşimlerinin tanımlanabilmesi için,  $3 \times M$  boyutlu bir  $n(i,e)$  tam sayı matrisi tanımlanır. Burada  $i=1,2,3$  değerlerini haiz olup elemanların yerel düğüm numaralarını gösterir.  $e=1,2,3,\dots,M$  olarak elemanın numarasına karşılık gelir. Dolayısıyla  $M$  toplam eleman sayısıdır.  $n(i,e)$ 'nin değerleri ise genel düğüm numaralarına karşılık gelir. Bu tam sayı matrisi elemanların ve düğümlerin numaralandırılmasına ait bütün bilgileri içerir.



Şekil 2.2 4 eleman 6 düğümlü bir sonlu eleman ağı.

$n(i,e)$  matrisi *bağlantı matrisi* olarak da isimlendirilir. Örnek olarak Şekil 2.2'deki ağı ait bağlantı matrisi aşağıdaki şekilde olur.

| $e$ | $n(1,e)$ | $n(2,e)$ | $n(3,e)$ |
|-----|----------|----------|----------|
| 1   | 2        | 3        | 1        |
| 2   | 5        | 3        | 2        |
| 3   | 4        | 5        | 2        |
| 4   | 5        | 6        | 3        |

(2.21)

Bağlantı matrisinde verilen numaralandırma keyfidir. Birinci elemanın üç düğümüne ait numaralandırmayı 3, 1, 2 veya 1, 2, 3 olarak da yapmak mümkündür. Ancak genelde numaralandırma saat ibresinin dönüş yönünün tersinde olacak şekilde yapılır. Bağlantı matrisine ilaveten, (2.2) ile verilen Dirichlet sınır şartlarına karşılık gelen  $\Gamma_1$  sınırındaki düğüm numaralarının saklanacağı bir diğer vektör oluşturulacaktır.

Yukarıda açıklanan verilere ilaveten, SEY formülasyonu için aşağıdaki verilerin de belirlenmesi gereklidir:

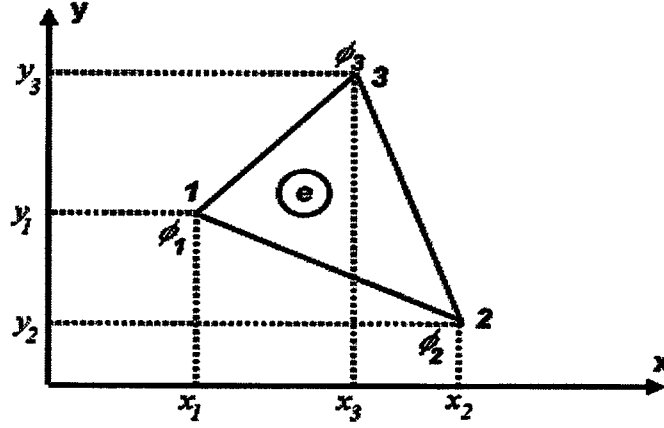
1. Düğümlerin koordinatları,  $x_i$  ve  $y_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, D$ ),  $D$ :Toplam düğüm sayısı.
2. Her bir eleman için  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\beta$  ve  $f$  değerleri.
3.  $\Gamma_1$  sınırındaki düğümlerde değişkenin  $p$  değeri (Dirichlet sınır şartı).
4.  $\Gamma_2$  sınırındaki her bir segmentteki  $\gamma$  ve  $q$  değerleri (Neumann sınır şartı).

### 2.3.2 Eleman Enterpolasyon Fonksiyonları

Bölgenin ayrıştırılması yapıldıktan sonra ikinci adım, bilinmeyen fonksiyon  $\phi$ 'nin her bir elemanda bir yaklaşım fonksiyonu ile belirlenmesidir. Lineer üçgen elemanlar için kullanılan yaklaşım fonksiyonu, üç katsayılı bir polinomdur ve aşağıdaki şekilde seçilir.

$$\phi^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y \quad (2.22)$$

Burada  $a^e$ ,  $b^e$ , ve  $c^e$  her bir eleman için belirlenecek sabit katsayılar,  $e$  ise eleman numarasıdır. Lineer üçgen elemanda üç düğüm bulunduğunu söylemiştik. Şekil 2.3 tipik bir üçgen elemanı göstermektedir.



Şekil 2.3 Kartezyen koordinatlarda tipik lineer üçgen eleman.

Düğümelerde  $\phi$  değişkeninin değerlerini sırasıyla  $\phi_1^e, \phi_2^e, \phi_3^e$  olarak gösterelim. (2.22)'ye göre düğümlerdeki  $\phi$  değerleri,

$$\begin{aligned}\phi_1^e &= a^e + b^e x_1^e + c^e y_1^e \\ \phi_2^e &= a^e + b^e x_2^e + c^e y_2^e \\ \phi_3^e &= a^e + b^e x_3^e + c^e y_3^e\end{aligned}\tag{2.22.a}$$

olacaktır. (2.23)'den sabit katsayılar hesaplanarak (2.22)'de yerine konursa, bir elemandaki  $\phi$  değeri için,

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \phi_j^e\tag{2.23}$$

ifadesi bulunur. Son yazılan ifadede  $N_j^e(x, y)$  enterpolasyon fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$N_j^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y) \quad j = 1, 2, 3\tag{2.24}$$

Enterpolasyon fonksiyonundaki katsayılar aşağıdaki şekilde hesaplanırlar.

$$\begin{aligned} a_1^e &= x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e; & b_1^e &= y_2^e - y_3^e; & c_1^e &= x_3^e - x_2^e \\ a_2^e &= x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e; & b_2^e &= y_3^e - y_1^e; & c_2^e &= x_1^e - x_3^e \\ a_3^e &= x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e; & b_3^e &= y_1^e - y_2^e; & c_3^e &= x_2^e - x_1^e \end{aligned} \quad (2.24.a)$$

$\Delta^e$  ile gösterdiğimiz üçgen elemanın alanı ise aşağıdaki determinant vasıtasıyla hesaplanır. Elemanın düğüm numaraları saat dönüş yönünde numaralandırılırsa determinantın değeri negatif çıkacaktır.

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e) \quad (2.24.b)$$

Yukarıdaki eşitliklerde  $x_j^e$  ve  $y_j^e$  ( $j=1,2,3$ ),  $e$ . elemanın  $j$ . düğümünün koordinatlarıdır. Aynı zamanda enterpolasyon fonksiyonu aşağıdaki özelliğe de sahiptir.

$$N_i^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.25)$$

Bu özellikten dolayı (2.23)'e göre  $i$ . düğümde  $\phi^e$  değeri  $\phi_i^e$  düğüm değerine indirgenir. Enterpolasyon fonksiyonunun diğer bir özelliği de, gözlem noktası olan  $(x,y)$  düğümünün karşısındaki kenarda sıfırlanmasıdır. Bu özelliğin sonucu olarak, elemanın bir kenarındaki  $\phi^e$  değeri, karşısındaki noktadaki  $f$  değerine bağlı değildir. Ancak bir kenardaki değer, komşu olduğu iki düğüm tarafından belirlenir. Bu özellik eleman kenarları arasında çözümün sürekliliğini garantiler (Reddy, 1984).

### 2.3.3 Ritz Yöntemi İle SEY Eşitliklerinin Elde Edilmesi

Diferansiyel denklemlerin sayısal yöntemlerle çözümünde, sonuçta bir lineer denklem sistemi elde edilir. SEY'de de bu sistemin elde edilmesinde çeşitli yöntemler kullanılır. Bunlardan Ritz ve Galerkin yöntemleri en çok kullanılanlardır. İlk önce Ritz yöntemi ile bu

denklemlerin elde edilmesi, ayrıntıları ile açıklanacaktır.

### 2.3.3.1 Eleman Eşitliklerinin Elde Edilmesi

Kolaylık açısından, (2.7) eşitliğinde verilen çizgisel integralin ortadan kalkması için, (2.3)'ün özel bir şekli olarak  $\gamma=0$  ve  $q=0$  yaparak sistemde homojen Neumann sınır şartlarının bulunduğu düşünülecektir. Böylece fonksiyonel aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$F(\phi) = \sum_{e=1}^M F^e(\phi^e) \quad (2.26)$$

$M$  toplam eleman sayısını,  $F^e$  bir alt fonksiyoneldir. Bu alt fonksiyonel,

$$F^e(\phi^e) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^e} \left[ \alpha_x \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right)^2 + \alpha_y \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right)^2 + \beta (\phi^e)^2 \right] d\Omega - \iint_{\Omega^e} f \phi^e d\Omega \quad (2.27)$$

ifadesine eşittir.  $\Omega^e$ ,  $e$ . elemanın bölgesini göstermektedir. (2.23)'de verilen  $\phi^e$  değeri (2.27)'de yerine konup  $F^e$ 'nin,  $\phi_i^e$ 'ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial F^e}{\partial \phi_i} = \sum_{j=1}^3 \phi_j^e \iint_{\Omega^e} \left( \alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \beta N_i^e N_j^e \right) d\Omega - \iint_{\Omega^e} f N_i^e d\Omega \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.28)$$

elde edilir, veya aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir.

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial \phi^e} \right\} = [K^e] \{\phi^e\} - \{b^e\} \quad (2.29)$$



Son yazılan eşitlik için aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial \phi^e} \right\} = \left[ \frac{\partial F^e}{\partial \phi_1^e}, \frac{\partial F^e}{\partial \phi_2^e}, \frac{\partial F^e}{\partial \phi_3^e} \right]^T; \quad \{\phi^e\} = [\phi_1^e, \phi_2^e, \phi_3^e]^T$$

$[K^e]$  matrisinin elemanları aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$K_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \left( \alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \beta N_i^e N_j^e \right) dx dy, \quad i, j=1,2,3 \quad (2.30)$$

$\{b^e\}$  vektörü ise,

$$b_i^e = \iint_{\Omega^e} f N_i^e dx dy \quad i = 1,2,3 \quad (2.31)$$

eşitliği ile verilir.  $[K^e]$  katsayılar matrisi olarak isimlendirilir ve simetrik, band ve seyrek matristir.  $\alpha_x, \alpha_y, \beta$  ve  $f$ 'i her bir elemanda sabit kabul edersek,  $\alpha_x^e, \alpha_y^e, \beta^e$  ve  $f^e$ 'ye eşit olurlar. Bu durumda (2.30) ve (2.31) analitik olarak çözülebilirler. Bu işlem için aşağıdaki temel formül kullanılabilir (Silvester and Ferrari, 1990).

$$\iint_{\Omega^e} (N_1^e)^l (N_2^e)^m (N_3^e)^n dx dy = \frac{l! m! n!}{(l+m+n+2)!} 2\Delta^e \quad (2.32)$$

Yukarıdaki formül kullanıldığında, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta^e} (\alpha_x^e b_i^e b_j^e + \alpha_y^e c_i^e c_j^e) + \frac{\Delta^e}{12} \beta^e (1 + \delta_{ij}) \quad (2.33)$$

$$b_i^e = \frac{\Delta^e}{3} f^e \quad (2.34)$$

Diğer taraftan, eğer  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\beta$  ve  $f$  her elemanda sabit değilse, (2.33) ve (2.34) eşitliklerinden hesaplanan değerler,  $\alpha_x^e, \alpha_y^e, \beta^e$  ve  $f^e$ 'nin ortalama değerleri kabul edilerek kullanılırlar. Alternatif olarak  $K_{ij}^e$  ve  $b_i^e$  değerleri sayısal olarak da hesaplanabilir. Sayısal yöntemler kullanılacaksa, elemanların oldukça küçük ve kullanılan yöntemin iyi sonuçlar vermesi gerekir.

### 2.3.3.2 Eleman Matrislerinin Birleştirilmesi ve Denklem Takımının Elde Edilmesi

(2.29) ile hesaplanan eleman matrisleri, sonlu eleman ağında bulunan bütün elemanlar için birleştirilerek lineer denklem sistemi elde edilir. Bunun için  $F^e$  stasyonerlik gerekliliği eklenerek aşağıdaki ifade yazılır.

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \phi} \right\} = \sum_{e=1}^M \left\{ \frac{\partial F^e}{\partial \phi^e} \right\} = \sum_{e=1}^M ([K^e] \{ \phi^e \} - \{ b^e \}) = \{ 0 \} \quad (2.35)$$

Yukarıdaki ifade lineer denklem sistemidir. Bu ifade daha bilinen şekliyle aşağıdaki gibi yazılabilir.  $M$ , sonlu eleman ağındaki toplam eleman sayısıdır.

$$[K] \{f\} = \{b\} \quad (2.36)$$

Burada  $[K]$ ,  $[K^e]$  eleman matrislerinin,  $\{b\}$  ise  $\{b^e\}$  eleman kaynak vektörlerinin birleştirilmiş şeklidir:

$$[K] = \sum_{e=1}^M [K^e], \quad \{b\} = \sum_{e=1}^M \{b^e\} \quad (2.37)$$

Katsayılar matrisinin elde edilmesini, Şekil1.2’de verdiğimiz altı düğümlü ağ üzerinde açıklayalım. Altı düğüm bulunmasından dolayı  $[K]$  katsayılar matrisinin boyutu  $6 \times 6$  olur.  $9 \times 9$  boyutlu olan eleman matrislerinin uygun elemanları, katsayılar matrisine ilave edilerek bulunur.  $[K^{(1)}]$ ’in (birinci elemanın) katsayılarını  $[K]$  matrisine eklerken şu prosedür takip edilir.  $K_{11}^{(1)}$  için (2.21)’de verilen bağlantı matrisine bakıldığında  $n(1,1)=2$  olduğunu görürüz.  $K_{11}^{(1)}$  bu durumda katsayılar matrisinde  $K_{22}$ ’nin elemanı olur.  $K_{12}^{(1)}$  için yine bağlantı matrisine baktığımızda,  $n(2,1)=4$  olduğunu görürüz ve bu elemanı katsayılar matrisinin  $K_{24}$  elemanına ekleriz. Bu işlem için genel kuralı şu şekilde vermemiz mümkündür. Herhangi bir elemanın eleman matrisindeki  $K_{ij}^e$  elemanı, katsayılar matrisinin  $K_{n(i,e),n(j,e)}$  elemanına eklenir. Birinci elemanın katsayılar matrisindeki dokuz eleman, katsayılar matrisine bu yolla eklendiğinde aşağıdaki matris elde edilir.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} & 0 & K_{32}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} & 0 & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{23}^{(1)} & K_{21}^{(1)} & 0 & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Aynı şekilde ikinci elemanın katsayılar matrisi  $[K^{(2)}]$ ’nin elemanları  $[K]$ ’ya eklendiğinde katsayılar matrisi aşağıdaki şekli alır.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} & 0 & K_{32}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} + K_{33}^{(2)} & 0 & K_{12}^{(1)} + K_{32}^{(2)} & K_{31}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{23}^{(1)} & K_{21}^{(1)} + K_{23}^{(2)} & 0 & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{21}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{13}^{(2)} & 0 & K_{12}^{(2)} & K_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$[K^{(3)}]$   $[K]$ ’ya eklendiğinde ise,

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} & 0 & K_{32}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} + K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{31}^{(3)} & K_{12}^{(1)} + K_{32}^{(2)} & K_{31}^{(2)} + K_{32}^{(3)} & 0 \\ 0 & K_{13}^{(3)} & K_{11}^{(3)} & 0 & K_{12}^{(3)} & 0 \\ K_{23}^{(1)} & K_{21}^{(1)} + K_{23}^{(2)} & 0 & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{21}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{13}^{(2)} + K_{23}^{(3)} & K_{21}^{(3)} & K_{12}^{(2)} & K_{11}^{(2)} + K_{22}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

elde edilir. Son olarak dördüncü elemanın katsayılar matrisindeki elemanlar da, katsayılar matrisine eklenerek işlem tamamlanır. Buraya kadar elde edilen matrisden görüldüğü gibi katsayılar matrisi simetrik bir matristir. Sonlu eleman ağındaki eleman ve düğüm sayısı arttıkça da, seyrek matris (sıfır elemanı çok olan) özelliği de kazanır. Simetrik, band ve seyrek matris olması, denklem sistemini çözmede bazı avantajlar getirir. Sonuçta dört eleman altı düğümlü ağıımızın katsayılar matrisi aşağıdaki şekli alır.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} & 0 & K_{32}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} + K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{31}^{(3)} & K_{12}^{(1)} + K_{32}^{(2)} & K_{31}^{(2)} + K_{32}^{(3)} & 0 \\ 0 & K_{13}^{(3)} & K_{11}^{(3)} & 0 & K_{12}^{(3)} & 0 \\ K_{23}^{(1)} & K_{21}^{(1)} + K_{23}^{(2)} & 0 & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} + K_{33}^{(4)} & K_{21}^{(2)} + K_{31}^{(4)} & K_{32}^{(4)} \\ 0 & K_{13}^{(2)} + K_{23}^{(3)} & K_{21}^{(3)} & K_{12}^{(2)} + K_{13}^{(4)} & K_{11}^{(2)} + K_{22}^{(3)} + K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{23}^{(4)} & K_{21}^{(4)} & K_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Benzer işlemler, lineer denklem sisteminin sağ tarafında yer alacak olan kaynak vektörünün elde edilmesi için de geçerlidir.  $\{b\}$  vektörü oluşturulurken, her elemanın  $b_i^e$  değeri  $b_{n(i,e)}$ 'ye eklenir. İşlemler yapıldığında aşağıdaki vektör elde edilir.

$$\{b\} = \begin{bmatrix} b_3^{(1)} \\ b_1^{(1)} + b_3^{(2)} + b_3^{(3)} \\ b_1^{(3)} \\ b_2^{(1)} + b_2^{(2)} + b_3^{(4)} \\ b_1^{(2)} + b_2^{(3)} + b_1^{(4)} \\ b_2^{(4)} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

### 2.3.3.3 Dirichlet Sınır Şartlarının Girilmesi

Lineer denklem sistemi çözülmenden önce, (2.2) ile tanımlanan ve  $\Gamma_1$  sınırı üzerindeki düğümlerde tanımlanmış olan Dirichlet sınır şartlarının sisteme katılması gereklidir. Bu işlemleri açıklamak için yine Şekil 2.2'deki örnek ağımızı ele alalım. Bu ağda 3,5 ve 6 numaralı düğümlerin  $\Gamma_1$  sınırını teşkil ettiğini ve bu düğümlerde bilinmeyen  $\phi$  değerinin sırasıyla  $p_3$ ,  $p_5$  ve  $p_6$ 'ya eşit olduğunu kabul edelim.  $\phi_3=p_3$  şartını sisteme katmak için aşağıdaki atamalar yapılır.

$$K_{33} = 1, \quad K_{3i} = 0, \quad i = 1,2,3,4,5,6, \quad b_3 = p_3. \quad (2.43)$$

Bununla birlikte yukarıdaki atamalar  $[K]$  matrisinin simetrisini bozar. Önemli bir özellik olan simetriyi tekrar oluşturmak için aşağıdaki atamaları yapmamız gerekir.

$$b_i \leftarrow b_i - K_{i3}p_3, \quad K_{i3} = 0, \quad i = 1,2,3,4,5,6. \quad (2.44)$$

Benzer şekilde  $\phi_5=p_5$  ve  $\phi_6=p_6$  şartları için aynı atamalar yapılırsa  $[K]$  matrisi aşağıdaki şekli alır.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Kaynak vektörü  $\{b\}$  ise,

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 - K_{13}p_3 - K_{15}p_5 - K_{16}p_6 \\ b_2 - K_{23}p_3 - K_{25}p_5 - K_{26}p_6 \\ p_3 \\ b_4 - K_{43}p_3 - K_{45}p_5 - K_{46}p_6 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

şeklini alır. Lineer denklem takımının elde edilen son hali çözüme hazırdır. Bununla birlikte üçüncü, beşinci ve altıncı satırları silersek çözüm değişmeyecektir. Silme işlemi yapıldığında,

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 - K_{13}p_3 - K_{15}p_5 - K_{16}p_6 \\ b_2 - K_{23}p_3 - K_{25}p_5 - K_{26}p_6 \\ b_4 - K_{43}p_3 - K_{45}p_5 - K_{46}p_6 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

sistemi elde edilir. Sonuç olarak sistemde sadece bilinmeyen değerler bulunduğundan daha küçük bir sistemle işlem yapılmış olur. Bilinmeyen sayısının fazla olduğu çok düğümlü problemlerde bu işlem büyük kolaylık sağlamaktadır.

Genel bir problemde,  $\Gamma_1$  sınırında  $D_1$  adet düğüm bulunduğunu düşünelim. Bu düğümlere ait genel düğüm numaralarını  $nd(i)$  isimli bir vektörde, düğümlerdeki bilinmeyen değişkenin değerlerini de  $p(i)$  isimli bir vektörde toplayalım. Sınır şartları aşağıdaki basit atamalarla yapılabilir.

$$b_{nd(i)} = p(i), \quad K_{nd(i),nd(i)} = 1, \quad K_{nd(i),j} = 0, \quad j \neq nd(i) \quad (2.48)$$

$$b_j \leftarrow b_j - K_{j,nd(i)}p_i, \quad K_{j,nd(i)} = 0, \quad j \neq nd(i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, D \quad (2.49)$$

Dirichlet sınır şartlarının sisteme girilmesi için diğer bir yol ise,  $10^{70}$  gibi çok büyük bir sayı seçilerek aşağıdaki atamaların yapılmasıdır. Yine örnek olarak Şekil 2.2'deki ağ yapısını ele alıp, üçüncü düğüm için,

$$K_{33} = 10^{70}, \quad b_3 = p_3 \times 10^{70} \quad (2.50)$$

atamaları yapılır.  $f_3$  için karşılık gelen eşitlik ise,

$$K_{31} \phi_1 + K_{32} \phi_2 + 10^{70} \phi_3 + K_{34} \phi_4 + K_{35} \phi_5 + K_{36} \phi_6 = p_3 \times 10^{70} \quad (2.51)$$

olur. Matrisin bütün elemanları ve bilinmeyenler  $10^{70}$ 'den küçük olacağından (2.51),  $f_3=p_3$  değerine eşit olacaktır. Benzer şekilde diğer sınır şartlarını ilave edersek aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & 10^{70} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & 10^{70} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & 10^{70} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ p_3 \times 10^{70} \\ b_4 \\ p_5 \times 10^{70} \\ p_6 \times 10^{70} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Yazılan son sistem simetrik özelliği de taşımaktadır.  $\Gamma_1$  sınırındaki  $D_1$  adet düğüm için aşağıdaki işlemler yapılır.

$$K_{nd(i),nd(i)} = 10^{70}, \quad b_{nd(i)} = p(i) \times 10^{70}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, D \quad (2.53)$$

En son açıklanan sınır şartı atama yolu daha kolay ve az atama gerektiren bir yol olmakla birlikte, değişkenin değerinin bilindiği düğümlerin elimine edilmemesi dezavantajıdır. (2.52) sistemi direkt ya da iteratif bir denklem sistemi çözüm yöntemi ile çözülebilir. Katsayılar matrisinin band, simetrik ve seyrek olması özelliğinden faydalanılarak, bilgisayarlarda fazla hafıza ihtiyacı göstermeyecek çözüm yöntemleri de geliştirilmiştir. *Profil depolama yöntemi* bunlardan birisidir.

### 3. ELEKTROMAGNETİK ALAN PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde SEY'in elektromagnetik problemlere uygulanışı, ana hatları ile verilecektir. 1960'lı yılların sonunda elektromagnetik problemlere uygulanmaya başlanan SEY, bugün elektrik mühendisliğinin vazgeçilmez sayısal yöntemlerinden birisidir. Röle, kontaktör gibi magnet ihtiva eden elemanlardan güç trafolarına ve büyük güçlü elektrik makinalarının analiz ve tasarımında yaygın olarak kullanılmaktadır. Yöntemi kullanan CAD (Computer Aided Design) tabanlı ticari programlar ile çözüm maliyetinin düşürülmüş olması yöntemi cazip kılan yönlerdendir.

1970'lere kadar sonlu farklar yöntemi, elektrik makinalarının analiz tasarımında yaygın olarak kullanılmakta idi (Erdelyi et al, 1965; Erdelyi et al, 1970). Bu uygulamalar geniş olarak doğru akım makinaları üzerine idi. Kullanılan ağ düzensiz fakat kare ve/veya dikdörtgen elemanlar idi. Sonlu farklar yönteminde bölgenin üçgen elemanlara ayrıştırılarak magnetik alan analizinde kullanılması yine bu yıllarda önerilmiştir.

Silvester ve Chari (1970) doyumlu magnetik alan problemlerinin sonlu eleman çözümüne ait ilk makaleyi yayınladılar. Bu yıldan itibaren SEY elektrik makinalarının analizine ve diğer elektromagnetik disiplinlere uygulanmaya başladı. Doğru akım makinalarının nonlineer analizi üzerine yayınladıkları makale ile Erdelyi ve arkadaşlarının dikkatini çekerek geniş bir bilimsel tartışmaya girdiler (Chari and Silvester, 1971.1). Turbogeneratörlerdeki magnetik alan analizinde de SEY'ni başarı ile uyguladılar (Chari and Silvester, 1971.2). Bu çalışmalar kartezyen koordinatlarda düzlem problemler üzerine yapılmıştı. Silindirik koordinatlarda yani eksenelsimetrik makinalara ait ilk sayılabilecek uygulama Andersen (1973) tarafından yapıldı. Transformatörlerdeki kaçak alan hesabı üzerine olan bu çalışmada aynı zamanda ilk bilgisayar programının tanıtımı da yapılmıştır. Nonlineer problemlerin çözümünde iterasyon tekniği olarak Newton-Raphson yönteminin uygulaması ile nüve olarak kullanılan malzemelerin B-H veya  $v-B^2$  eğrilerinin modellenmesine ait sayısal yöntemler geliştirilmeye başlandı (Silvester et al, 1973). Düşük frekanslarda girdap akımlarının analizi ve kayıplarının hesaplanmasına ait ilk uygulamalar da yine bu yıllarda verildi (Chari, 1974). Bu çalışmalarda henüz birinci dereceden lineer üçgen elemanlar kullanılmakta idi ancak elde edilen sonuçlar yöntemin ve kullanılan elemanların yeterliliğini göstermekteydi. Transformatörlerdeki magnetik alan hesabına ait uygulamalar Chari ve Andersen'in çalışmaları temel alınarak



geliştirildi ve 1970'li yılların ikinci yarısında, SEY'ni temel alan çok amaçlı bilgisayar programları yazılmaya başlandı (Brauer, 1977). Yine aynı yıllarda hareketli magnetik alan problemlerine nonlinear çözümler önerildi (Foggia et al, 1975). SEY'nin açık sınırlı problemlere uygulanabilirliği de, özel sonlu elemanlar kullanılarak gösterildi (Silvester et al, 1977).

1980'lere gelindiğinde bilgisayar programları daha da gelişmeye başladı ve sonlu eleman ağı otomatik olarak üretilmeye başlandı (Forghani et al, 1983; Campbell et al, 1984). Böylece problem bölgesine uygun bir ağ geliştirilerek analiz sonucunda yapılacak hata minimuma indirgenmeye çalışıldı (Cendes et al, 1983; Bryant, 1985; Shepard, 1995). Otomatik ağ üretimi için yazılan algoritmalar henüz iki boyutlu analizler için geliştirilmişti. Tandon ve arkadaşları (1980), elektrik makinalarının tasarımında oluk boyutlarının tayini için SEY ile permeans ve reaktans hesabına dair bir çalışma yaptılar. Çeşitli elektrik makinalarının özellikle asenkron motorların analizinde ve tasarımında kullanılacak teknikler ile dc ve adım motorlarının SEY ile formülasyonu geliştirilmeye başlandı (Brauer, 1981; 1982). Asenkron motorların nonlinear analizinde, SEY ile kompleks magnetik vektör potansiyel formülasyonu tanımlanarak yeni bir teknik geliştirildi (Ralph and Williamson, 1983). Yine asenkron motorlarda rotorun kapalı oluklu olması durumunda, rotor iletkenlerinin direnç ve reaktans hesabı bu yıllarda yapılmıştır (Williamson and Begg, 1985). Elektrik makinalarının tasarımına ait özel paket programlar yine bu yılların sonlarında piyasaya sürülmüş ve CAD sistemleri bu alanda yerini almaya başlamıştır (Krishnan et al, 1988; Belmans et al, 1989). Chavanne ve arkadaşları (1989) sabit mıknatıs ihtiva eden magnetik devrelerin nonlinear formülasyonu üzerine çalışmalarını yayınlamışlardır.

1990'lı yıllara yani günümüze gelindiğinde, SEY mevcut ticari programlarla tam olarak otomatikleşmiş ve yukarıda sıralamaya çalıştığımız gibi bütün alanlarda geniş olarak kullanılmaya devam edilmektedir. Üç boyutlu ve harici elektrik devreleri ile modelleme ve analiz yapabilen programlar geliştirilmiştir (Brauer et al, 1993). Bu programlar da üç boyutlu geometride otomatik olarak ağ üretebilmektedirler (Mitchell and Penman, 1992; Galios and Tsiboukis, 1992). Analitik çözüm sonuçlarının SEY ile bulunan sonuçlarla karşılaştırılmaya başlanması da bu yıllarda rapor edilmeye başlanmıştır (Zhu et al, 1993). Bu ise yöntemin ve yöntemi uygulayan paket programların ulaştığı noktayı göstermektedir. Zhu ve arkadaşları fırçasız doğru akım motorunun analizini yaparlarken Moallem ve Ong (1991) anahtarlamalı relüktans motorunun analizini vermişlerdir. Asenkron motorun analizinde ise Williamson ve

arkadaşları (1990), rotor ve stator kararlı-hal modelleri ile geçici rejim analizlerini vererek bu makinalara ait hesaplamalara adeta son noktayı koymuşlardır.

Ülkemizdeki çalışmalara ise, Ovacık ve Kalenderli (1989), Kalenderli ve İsmailoğlu (1991) ve Güldemir ve arkadaşlarının (1993) yaptıkları çalışmalar örnek olarak verilebilir.

### 3.1 Lineer Elektrostatik Problemlerin Formülasyonu

Elektrostatik alanlardaki enerji ifadesinin minimum değeri, Laplace denklemini sağlamak zorundadır. Dolayısıyla enerjinin minimum ifadesi yazılarak SEY eşitlikleri elde edilebilir. İki boyutlu bir alan ele alarak, varyasyonel prensibe göre bu işlemin nasıl yapılacağını gösterelim. Elektrostatik alanlarda enerji ifadesi,

$$W = \int_{\Omega} \frac{1}{2} E \cdot D d\Omega \quad (3.1)$$

olarak yazılır. İfade iki boyutlu alan değişimi için aşağıdaki şekli alır.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega \quad (3.2)$$

Burada  $V$  elektrostatik potansiyeldir. Sonlu elemanlar ağının lineer üçgen elemanlardan meydana geldiğini kabul edersek, bir eleman üzerindeki potansiyel (2.23) eşitliği ile değişecektir. Potansiyelin bu değişimi enerji ifadesinde yerine konursa, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$W = \sum^n \frac{1}{2} \epsilon \int_{\Omega} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} V_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial y} V_i \right)^2 \right] d\Omega \quad (3.3)$$

Son ifadede yüzey integrali üçgen eleman üzerinde alınacaktır. Toplam enerji ifadesini minimum yapmak için,  $V_j$  düğüm potansiyellerine göre türevini alıp sıfıra eşitlemek yeterli olacaktır.

$$\frac{\partial W}{\partial V_j} = \sum^n \varepsilon \int_{\Omega} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} V_i \right) \frac{\partial N_j}{\partial x} + \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial y} V_i \right) \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

Problem bölgesindeki bütün elemanlara göre dağılım gözönüne alındığında (3.4) ifadesi matrisyel formda,

$$\varepsilon [K][V] = 0 \quad (3.5)$$

olarak yazılır. (3.5)'teki katsayılar matrisinin açık şekli,

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e = \int_{\Omega} \varepsilon \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.6)$$

olarak yazılır. Son ifadeye göre ve 2. bölümde verilen ifadelerle katsayılar matrisi oluşturulur (Binns, et al, 1992).

### 3.2 Lineer Magnetostatik Problemlerin Formülasyonu

Yine iki boyutlu lineer magnetostatik alanlar, vektör potansiyel formülasyonu ile,

$$\nabla \cdot (\nu \nabla A) = -J \quad (3.7)$$

ifadesi ile verilir (Silvester and Ferrari, 1996). Bu diferansiyel denklem ile herhangi bir elektromagnetik elemanın kesitindeki akı dağılımının hesabı yapılabilir. İfadede  $\nu$  malzemenin magnetik direncini,  $A$  kartezyen koordinatlarda sadece  $z$  bileşeni olan, yani

sadece  $x$  ve  $y$ 'nin fonksiyonu olan magnetik vektör potansiyeli,  $J$  ise aynı şekilde akım yoğunluğu vektörünü gösterir. (3.7) ile verilen diferansiyel denklem, kaynak akım dağılımı ve bilinen sınır şartları ile çözülebilir. Varyasyonel analize göre bu diferansiyel denklemin fonksiyoneli,

$$F = \int_{\Omega} \left( \int_0^B v b db \right) d\Omega - \int_{\Omega} J \cdot A d\Omega \quad (3.8)$$

olarak elde edilir (Silvester, et al, 1973). SEY eşitliklerinin elde edilmesi yine 2. bölümde verilen yolla yapılabilir. Sonuçta SEY eşitliği bir üçgen eleman için matrisyel formda,

$$v[K][A] = [J] \quad (3.9)$$

olarak elde edilir (Chari and Silvester, 1971).  $[K]$  (2.33),  $[J]$  (2.34) eşitliklerine göre bulunurlar.  $[A]$ , düğümlerdeki magnetik vektör potansiyel değerleridir.

### 3.3 Nonlinear Magnetostatik Problemlerin Formülasyonu

Nonlinear magnetostatik problemler için diferansiyel denklemin fonksiyoneli, lineer durum ile aynıdır.

$$F(A) = \int_{\Omega} W(A) d\Omega - \int_{\Omega} J \cdot A d\Omega \quad (3.10)$$

Fonksiyonel magnetik vektör potansiyelin bir fonksiyonu olur. Vektör potansiyel problemlerinde,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.11)$$

ve

$$H = \nu B \quad (3.12)$$

olarak tanımlıdır. Ele alınan problemlerdeki bütün malzemeler için mıknatıslanma karakteristiklerinin monotonik artımlı, buna karşılık ilk türevlerinin de monotonik azalımlı olması gerekmektedir. (3.10) ile verilen fonksiyonele göre enerjinin minimum yapılması, fonksiyonelin düğüm potansiyellerine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi gerekir (Silvester and Chari, 1970).

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = 0 \quad (3.13)$$

Sonlu eleman ağında  $n$  tane üçgen eleman varsa (3.13) ifadesi,

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial A_k} \quad (3.14)$$

olarak yazılır. Türev işlemi bütün bölge gözönüne alınarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{\partial F}{\partial A_k} = \int_{\Omega} \left( \nu B \frac{\partial B}{\partial A_k} - J \frac{\partial A}{\partial A_k} \right) d\Omega \quad (3.15)$$

Sonuçta SEY eşitliği matrisyel formda,

$$\sqrt{[K]}[A] = [J] \quad (3.16)$$

olarak elde edilir (Yu, et.al, 1993). Katsayılar matrisi sadece elemanın şekline ve büyüklüğüne bağlı değildir. Aynı zamanda  $A$  ile değişen magnetik direnç değerine de bağlıdır. Magnetik

direncin vektör potansiyele bağlı olması iteratif bir çözümü gerektirir. Nonlineer denklemlerin çözümünde Newton-Raphson yöntemi uygulanabilir. Lineer problemlerde magnetik direnç bütün bölgede sabittir. Newton-Raphson yönteminin uygulanışını açıklamak istersek ve A'nın problemde gerçek çözüm, U'nun ise buna bir yaklaşım olduğunu kabul edersek,

$$U = A - \delta U \quad (3.17)$$

yazılır. Bu ifade ile hesaplanan U değeri hatalı ancak A'ya yakın bir çözümdür. (3.10) ile verilen fonksiyonel U'ya bağlı olarak yazılıp, U civarında Taylor serisine açılırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial U_i} = \left. \frac{\partial F}{\partial U_i} \right|_U + \sum_j \left. \frac{\partial^2 F}{\partial U_i \partial U_j} \right|_U \delta U_j + \dots \quad (3.18)$$

ifadesi elde edilir. Fakat (3.13) ifadesi  $U=A$  şartını gerektireceğinden serideki bütün terimlerin eğimi ortadan kalkmalıdır. Serideki ikinci dereceden büyük terimler ihmal edilerek (3.18) ifadesi, U'nun A'dan sapmasını hesaplayabilmek için,

$$\delta U = -P^{-1}V \quad (3.19)$$

olarak yazılır. Burada **P** Newton-Raphson yöntemindeki Jacobian matrisidir.

$$P_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial U_i \partial U_j} \quad (3.20)$$

V ise rezidü vektörüdür ve,

$$V_j = \frac{\partial F}{\partial U_j} \quad (3.21)$$

olarak verilir (Chedid, 1994).

Şimdi (3.19) ifadesi kullanılarak, belli  $U$  değerleri başlangıç değerleri alınmak suretiyle bir iteratif çözüm başlatılabilir. Sonuçta her adımda bulunan fark değeri, başlangıçta tahmin edilen potansiyel değerlerine ilave edilir. (3.18)'deki Taylor serisinde üçüncü ve daha yüksek mertebedeki terimler ihmal edildiğinden, (3.19) ile elde edilen çözüm yaklaşık olur. Bu çözüm ancak  $F(U)$ 'nin karesel yani ikinci ve daha yüksek mertebeli türevlerinin bulunmaması durumunda tam çözüm olacaktır. Bu ise lineer problemlerde söz konusudur ve iterasyon tek adımda çözüme yaklaşır. İteratif çözüm için,

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - [P^{(k)}]^{-1} V^{(k)} \quad (3.22)$$

işlemi yapılır.

Newton-Raphson yönteminin uygulanabilmesi için Jacobian matrisinin elde edilmesi gereklidir. Bunun için (3.20) ve (3.21)'de verilen türevler elde edilmelidir. Türev işlemleri için aşağıdaki kurallar uygulanır:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i \partial U_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 W}{\partial U_i \partial U_j} d\Omega \quad (3.23)$$

(3.23)'teki integrandın,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial U_i \partial U_j} = \frac{v}{2} \frac{\partial^2 (B^2)}{\partial U_i \partial U_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial (B^2)} \frac{\partial B^2}{\partial U_i} \frac{\partial B^2}{\partial U_j} \quad (3.24)$$

olduğu görülebilir (Silvester and Ferrari, 1996). Akı yoğunluğunun karesi için,

$$B^2 = \sum_m \sum_n (\nabla N_m \cdot \nabla N_n) U_m U_n \quad (3.25)$$

yazılır. Bu ifade (3.24)'te yerine konursa,

$$\frac{\partial W}{\partial U_i \partial U_j} = \nu (\nabla N_i \cdot \nabla N_j) + 2 \frac{d\nu}{dB^2} \times \sum_m \sum_n (\nabla N_m \cdot \nabla N_i) (\nabla N_n \cdot \nabla N_j) U_m U_n \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.26)'da sağ taraftaki ilk terim, lineer problemlerdeki ifadedir. İkinci ve karmaşık görünen terim sadece nonlinear problemlerde görünür. Matris yapısı iki durumda da aynıdır. Nonlinear problemler biraz fazla işlem gerektirmekle beraber bilgisayarlarda aynı hafıza ihtiyacını gösterir.

### 3.3.1 Birinci Mertebeden Üçgen Newton Elemanları

Eksenel yönde sonsuz uzun kabul edilen elektrik makinalarının analizinde, birinci mertebeden üçgen elemanların kullanımı yaygındır ve çözüm için yeterlidir (Robinson, 1988). (3.20)'de verilen Jacobian matrisi, lineer üçgen elemanlar için açık olarak,

$$P_{ij} = \int_{\Omega} \nu \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega + 2 \int_{\Omega} \frac{d\nu}{d(B^2)} \sum_m \sum_n (\nabla N_m \cdot \nabla N_i) (\nabla N_n \cdot \nabla N_j) U_m U_n d\Omega \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir. Birinci mertebeden üçgen eleman üzerinde akı yoğunluğu ve dolayısıyla relüktivite sabittir. Lineer problemlerde bütün elemanlar için sabit olan relüktivite, nonlinear problemlerde her eleman için farklı olur ancak yine de eleman üzerinde her noktada sabittir. Birinci mertebeden elemanların enterpolasyon fonksiyonlarının lineer olması sebebiyle türevleri bir sabite eşittir. Böylece Jacobian matrisi,

$$P_{ij} = K_{ij} + 2 \frac{d\nu}{d(B^2)} \Delta_e \sum_m \sum_n U_m (\nabla N_m \cdot \nabla N_i) (\nabla N_n \cdot \nabla N_j) U_n \quad (3.28)$$

olarak yazılır.  $\Delta_e$  üçgen elemanın alanıdır.  $K_{ij}$  lineer problemlerde olduğu gibi katsayılar matrisidir.  $K'$  ile birim relüktivite için hesaplanan katsayı matrisini gösterirsek;



$$K_{ij} = \nu K'_{ij} \quad (3.29)$$

yazılır. E yardımcı bir vektör kabul edilerek,

$$E_k = \sum_m K'_{kj} U_m \quad (3.30)$$

ifadesi ile gösterilirse, Jacobian matrisi için,

$$P_{ij} = \nu K'_{ij} + 2\Delta_e \frac{d\nu}{d(B^2)} E_i E_j \quad (3.31)$$

kısa yazılımı elde edilir. Sonuç olarak rezidü vektörü,

$$V_i = \nu \sum_m K'_{im} U_m = \nu E_i - J_i \quad (3.32)$$

olarak hesaplanır.

### 3.4 İki Boyutlu Zamanla Değişen Alan Problemlerinin Formülasyonu

Düşük frekanslı zamanla değişen problemlerin çözümünde quasi-statik Maxwell denklemleri kullanılır. Deplasman akımının ihmal edilmesi durumunda;

$$\nabla \cdot \nu \nabla A_z = s \frac{\partial A_z}{\partial t} + J_z \quad (3.31)$$

diferansiyel denkleminin çözümü gereklidir. Bu denklem difüzyon tipi diferansiyel denklemdir. Alternatif akım makinalarında karalı hal veya zaman-harmonik şartlarının gözönüne alınmasıyla alan çözümünün elde edilmesi gerekir. (3.31)'de verilen denklemden karalı hal AC çözüm için kompleks değişkenler gözönüne alınmalıdır. Dolayısıyla magnetik

vektör potansiyel ve akım yoğunluğu vektörü kompleks büyüklükler olarak ele alınır:

$$A^C = A^R + j A^I \quad (3.32)$$

İndislerden C kompleks değişkenliği, R reel kısmı, I sanal kısmı gösterir. Bu durumda (3.31) eşitliği,

$$\nabla \cdot \nu \nabla A_z^C + j \omega \sigma A_z^C = J_z^C \quad (3.33)$$

olarak yazılır. Sonuçta varyasyonel formülasyon uygulanıp SEY eşitlikleri bir lineer üçgen eleman için matrisyel formda,

$$\{ \nu[K] + j \omega \sigma[C] \} [A] = [J] \quad (3.34)$$

şeklinde elde edilir (Williamson and Begg, 1985). (3.34)'teki matrislerin açılımları aşağıdaki şekildedir.

$$K_{ij}^e = \frac{\nu}{4\Delta_e} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (3.35)$$

$$C_{ij}^e = \frac{\omega \sigma \Delta_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Akım vektörünün de kompleks değişken olarak ele alınmasıyla bir eleman için açık yazılım aşağıdaki şekilde olur.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} (3(b_1^2 + c_1^2) - 2j\alpha\Delta_e^2) & (3(b_1b_2 + c_1c_2) - j\alpha\Delta_e^2) & (3(b_1b_3 + c_1c_3) - j\alpha\Delta_e^2) \\ & (3(b_2^2 + c_2^2) - 2j\alpha\Delta_e^2) & (3(b_2b_3 + c_2c_3) - j\alpha\Delta_e^2) \\ \text{simetrik} & & (3(b_3^2 + c_3^2) - 2j\alpha\Delta_e^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^C \\ A_2^C \\ A_3^C \end{bmatrix} \\
& = 4\mu\Delta_e^2 \begin{bmatrix} J_R + jJ_I \\ J_R + jJ_I \\ J_R + jJ_I \end{bmatrix} \quad (3.37)
\end{aligned}$$

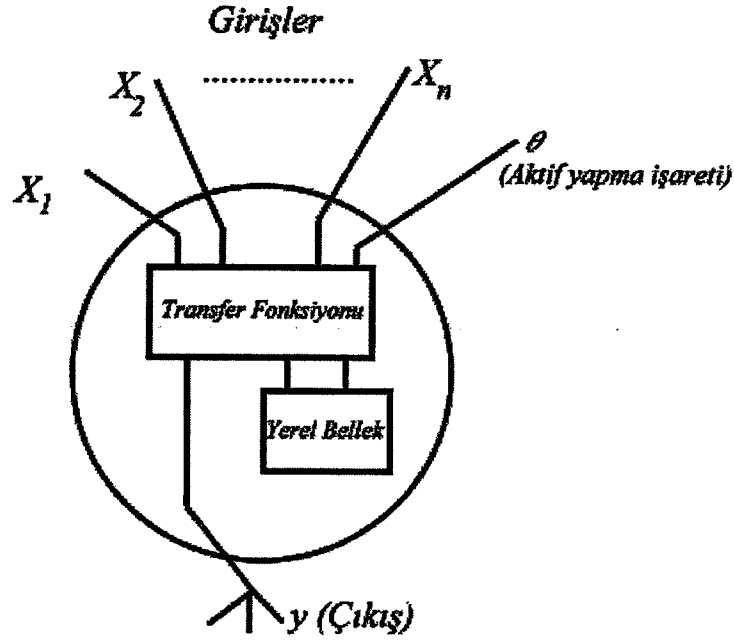
şeklinde elde edilir (Binns, et al, 1992). İfadelerde  $\alpha = \omega\sigma\mu$  alınmıştır. Nonlinear AC problemlerin çözümü de nonlinear DC problemlerin çözümüne benzer (Ralph and Williamson, 1983). Zamanla değişen problemlerde adımsal çözümler ve harici devrelerin modellenmesi ile ilgili formülasyon, verilen referanslardan görülebilir (Brauer et al, 1993). Chiampi (1993) ve arkadaşları, güç baralarının analizinde de benzer yöntemleri uygulamışlardır.

#### 4. YAPAY SİNİR AĞLARI (YSA)

YSA paralel dağılmış bir bilgi işleme sistemidir. Bu sistem tek yönlü işaret kanalları (bağlantılar) ile birbirine bağlanan işlem elemanlarından oluşur. Çıkış işareti bir tane olup isteğe göre çoğaltılabilir. YSA yaklaşımının temel düşüncesiyle, insan beyninin fonksiyonları arasında benzerlik vardır. Bu yüzden YSA sistemine insan beyninin modeli denilebilir. YSA çevre şartlarına göre davranışlarını şekillileyebilir. Girişler ve istenen çıkışların sisteme verilmesi ile kendisini farklı cevaplar verebilecek şekilde ayarlayabilir. Ancak son derece karmaşık bir içyapısı vardır. Onun için bugüne kadar gerçekleştirilen YSA, biyolojik fonksiyonların temel nöronlarını örnek alarak yerine getiren kompoze elemanlardır.

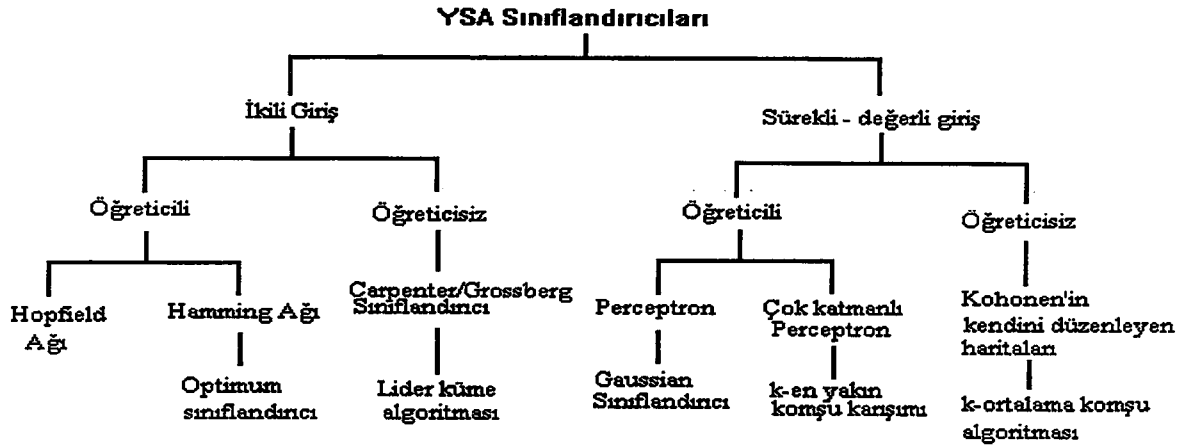
##### 4.1 YSA'nın Yapısı ve İşlem Elemanı

YSA temel olarak, basit yapıda ve yönlü bir graf biçimindedir. Her bir düğüm hücre denilen  $n$ . dereceden lineer olmayan bir devredir. Düğümler işlem elemanı olarak tanımlanır. Düğümler arasında bağlantılar vardır. Her bağlantı tek yönlü işaret iletim yolu (gecikmesiz) olarak görev yapar. Her işlem elemanı istenildiği sayıda giriş bağlantısı ve tek bir çıkış bağlantısı alabilir. Fakat bu bağlantı kopya edilebilir. Yani bu tek çıkış birçok hücreyi besleyebilir. Ağ'daki tek gecikme, çıkışları ileten bağlantı yollarındaki iletim gecikmeleridir. İşlem elemanının çıkışı istenilen matematiksel tipte olabilir. Kısmen sürekli çalışma konumunda "aktif" halde eleman bir çıkış işareti üretir. Giriş işaretleri YSA'na bilgi taşır. Sonuç ise çıkış işaretlerinden alınabilir. Şekil 4.1'de genel bir işlem elemanı (nöron, düğüm) gösterilmiştir (Lippmann, 1987). Her işlem elemanı kendisine verilen yerel veriye göre, kendisini ayarlayacak bütün YSA'nın enformasyon bölgesinin öğrenmesini sağlar. (Enformasyon bölgesi olasılık-yoğunluk fonksiyonu ilde tanımlanabilir). Enformasyon bölgesi birçok uygulamada, gerçek değer  $0$  ile  $1$  arasında normalize edilmesi gerekir. (Normalize etmek: gerçek değeri  $85$  olan bir girişi  $0.85$  şeklinde ağa uygulamaktır). Normalizasyon aynı anda bütün girişlere uygulanabilir (Karlık,1994).



Şekil 4.1 Genel işlem elemanı yapısı.

YSA birtakım alt kümelerle ayrılabilir. Bu alt kümelerdeki elemanların transfer fonksiyonları aynıdır. Bu küçük gruplara *katman* (layer) adı verilir. (örnek: çok katmanlı perceptron MLP). Ağ katmanlarının birbirlerine hiyerarşik bir şekilde bağlanmasından oluşmuştur. Dış dünyadan alınan bilgi giriş katmanı ile taşınır. Bir transfer fonksiyonları yoktur. YSA transfer fonksiyonu ve yerel bellek elemanı bir öğrenme kuralı ile giriş çıkış işareti arasındaki bağıntıya göre ayarlanır. Aktif yapma girişi için bir zamanlama fonksiyonu tanımlaması gerekebilir. Bir işlem elemanına gelen girişler matematiksel tiplerine göre etiketlenilerek sınıflandırılır. YSA, giriş veri tiplerine göre ikili giriş (0,1) ve sürekli değerli giriş olmak üzere aşağıdaki gibi sınıflandırılır.



Şekil4.2 YSA Sınıflandırıcıları

## 4.2 Bağlantı Geometrilere

Bağlantılarda taşınan işaret verisinin cinsi tanımlanmalıdır. Bağlantı geometrisi YSA için çok önemlidir. Bağlantı işareti her cinsten olabilir. Bağlantının nerede başlayıp nerede bittiğini bilmesi gerekir. 1'den N'e kadar olan bir işlem elemanı kümesinin bağlantıları aşağıda tanımlandığı gibi NxN boyutlu matris biçiminde gösterilebilir.

$$w_{ij} = w_{ji} = 1 \Leftarrow i. \text{ işlem elemanı, } j. \text{ işlem elemanına bağlı,}$$

$$w_{ij} = w_{ji} = 0 \Leftarrow \text{bağlı değil.}$$

En fazla  $N^2$  bağlantı olur. Bağlantılar çeşitli geometrik bölgeler arasında demetler halinde düşünülebilir. Bu bağlantı demetlerinin uyması gereken kurallar şunlardır.

- 1- Bağlantı demetini oluşturan işlem elemanları aynı bölgeden çıkmalıdır.
- 2- Bağlantı demetinin işaretleri aynı matematiksel tipten olmalıdır.
- 3- Bağlantı demetinin işaretleri aynı sınıftan olmalıdır.
- 4- Bağlantı demetinin bir seçim fonksiyonu ( $\sigma$ ) olmalıdır.

$$\sigma : T \rightarrow 2^s \quad T: \text{Hedef belgesi} \quad s: \text{kaynak bölgesi}$$

Hedef bölgesindeki her işlem elemanı kaynak bölgesindeki her elemana giderse *tam* (full) bağlıdır. (örnek: çok katmanlı perceptron). Eğer her hedef bölgesi elemanı  $N$  kaynak bölgesi elemanına bağlı ise *düzgün dağılmış* (uniform) olasıdır. Ayrıca her bir elemana, yine bir kaynak elemanı bağlı ise buna *bire-bir* bağlı denir.

### 4.3 Eşik Fonksiyonları

Transfer veya işaret fonksiyonları olarak da adlandırılan eşik fonksiyonları, muhtemel sonsuz domen girişli işlem elemanlarını önceden belirlenmiş sınırla çıkış olarak düzenler. Üç tane yaygın eşik fonksiyonu vardır. Bunlar, rampa, basamak ve sigmoid fonksiyonudur. Bu çalışmada eşik fonksiyonu olarak kullanılan S biçimindeki sigmoid fonksiyonu; seviyeli, lineer olmayan çıkış veren, sınırlı, monoton artan fonksiyondur (Naylor, 1990).

### 4.4 Ağırlık Uzayı

Bir çok YSA öğrenme işlemi, işlem elemanlarının ağırlığı değiştirilerek sağlanır. Böylece tanımlanan ağırlık değiştirilerek öğrenmede iyi bir model kullanıp, ağırlıkların bu modele göre değiştirilmesi esastır. Basit bir matematiksel model olarak herbir işlem elemanının "n" adet gerçek ağırlığı olduğu düşünülerek ve N adet işlem elemanı gözönüne alınırsa;

$$w = (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}, w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n}, w_{N1}, w_{N2}, \dots, w_{NN})^T \quad (4.1)$$

$$w = (w_1^T, w_2^T, \dots, w_N^T) \quad (4.2)$$

$w_1, w_2, \dots, w_N$ : işlem elemanlarının ağırlık vektörleridir.

$$w_1 = \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{1n} \end{bmatrix} \dots w_N = \begin{bmatrix} w_{N1} \\ w_{N2} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

YSA ağırlık vektörü  $N, n$  boyutlu öklid uzayında yayılır. YSA'nın enformasyon işleme performansı, ağırlık vektörünün belirli bir değeri ile bulunacaktır.

Hata değişimini inceleyen iki çeşit kural vardır;

1- Hata düzeltme kuralları,

2- Gradyen kuralları.

Hata düzeltme kuralları, her bir giriş örüntüsünde ağırlıkları yeniden ayarlayarak çıktı hatasını en aza indirmeye çalışırlar. Gradyen kurallarında ise, ağırlıklar yeniden ayarlanarak

ortalama karesel hata (MSE) en aza indirilmeye çalışılır.

Ağırlık vektörü ile çalışan YSA'da önemli noktalardan birisi, bir öğrenme kuralı geliştirip, enformasyon bölgesi kullanarak (eşik fonksiyonu ile) ağırlık vektörü "w" yı istenilen YSA performansı verecek noktaya yönleltmektir. Genellikle öğrenme kuralı için bir performans ya da maliyet fonksiyonu tanımlanır. Minimizasyon veya maksimizasyon ile "w" vektörü bulunur. Bir performasyon çeşidi olarak bilinen, MSE (karesel ortalama hata) şu şekilde tanımlanır.

$$F(w) = \int_A |f(x) - G(x, w)|^2 \rho(x) dv(x) \quad (4.4)$$

Burada amaç F'i küçültmeye çalışmaktır.

$y=G(x, w)$ : sistemin giriş çıkış fonksiyonu.

$y$ : çıkış işareti vektörü

$x$ : giriş işareti vektörü

$w$ : ağırlık vektörü

$\rho(x)$ : olasılık yoğunluk fonksiyonu

#### 4.5 YSA'da Eğitim (Training)

Eğitim algoritmaları YSA'nın ayrılmaz bir parçasıdır. Eğitim algoritması eldeki problemin özelliğine göre öğrenme kuralını YSA'na nasıl adapte edeceğimizi belirtir. Üç çeşit eğitim algoritması yaygın olarak kullanılmaktadır.

- 1- Öğreticili eğitim (supervised training).
- 2- Skor ile eğitim (graded training).
- 3- Kendini düzenleme ile eğitim (self-organization training)

Öğreticili eğitimde, elimizde doğru örnekler vardır. Yani  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  şeklindeki giriş vektörünün,  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  şeklindeki çıkış vektörü, tam ve doğru olarak bilinmektedir. Herbir  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  çifti için ağ doğru sonuçları verecek şekilde seçilen bir öğrenme kuralıyla beraber eğitilir.



Skor ile eğitmede giriş işaretlerine karşılık gelen çıkış işaretleri tam olarak bilinmemektedir. Çıkış işareti yerine skor verilir ve ağıın değerlendirilmesi yapılır. Özellikle kontrol uygulamaları için idealdir. Çeşitli maliyet (cost) fonksiyonları kullanılır.

Kendini düzenleyen ağ giriş işaretine göre kendini düzenleyerek organize eder. Olasılık yoğunluk fonksiyonlarına, sınıflandırma ve şekil tanıma problemlerine uygulanabilir.

Ne tür eğitime yöntemi kullanılırsa kullanılsın, herhangi bir ağ için gerekli karakteristik özellik, ağırlıkların verilen eğitime örneğine nasıl ayarlanacağını belirtmekle öğrenme kuralının oluşturulmasıdır. Öğrenme kuralının oluşturulması için bir örneğin ağa defalarca tanıtılması gerekebilir. Öğrenme kuralı ile ilişkili parametreler ağıın zaman içinde gelişme kaydetmesiyle değişebilir. Hangi YSA algoritmasında ne tür bir eğitime kullanıldığı bu bölümün giriş işaretlerinin sınıflandırılması kısmında gösterilmiştir.

#### 4.6 Bellek

YSA'nın önemli bir özelliği bilgiyi saklama şeklidir. YSA'da bellek dağıtılır. Bağlantı ağırlıkları YSA bellek biçimleridir. Ağırlıkların değerleri ağıın o anki bilgi durumunu temsil eder. Mesela; bir (giriş)/(istenen çıkış) çiftinin belirtilen bilgi parçası ağıın içinde birçok bellek biçimine dağıtılmıştır. Bellek üniteleri ile diğer saklı bilgiler, bu bilgiyi paylaşırlar. Bazı YSA bellekleri ilişkilidir. Öyle ki eğitilen ağa bir kısmı uygulanırsa, ağ bu girişe belleğindeki en yakın çıkışı bu giriş için seçer ve tam girişe bağlı çıkış ortaya çıkar. Eğer YSA oto-ilişkili ise, kısmi giriş vektörlerinin ağa verilmesi bu girişlerin tamamlanması ile sonuçlanır. YSA belleğinin yapısı; eksik, gürültülü ve tam seçilemeyen bir giriş uygulandığı zaman bile mantıklı çıkış üretmeye uygundur. Bu kurala *genelleme* adı verilir. Bir genellemenin kalitesi ve anlamı, uygulama çeşidine, ağıın tipine ve karmaşıklığına dayanır. Lineer olmayan çok katmanlı ağlar (özellikle geriye yayılım ağları) gizli katmandaki özelliklerden öğrenirler ve bunları çıkışlar üretmek için birleştirirler. Gizli katmandaki bilgi, yeni giriş örüntülerine akılcı çözümler oluşturmak için kullanılabilir.

#### 4.7 Hata Toleransı

Klasik hesaplama sistemleri çok az bir hatadan bile etkilenir. YSA için durum farklıdır. Bu farklılık YSA'nın hata toleranslı olmasıdır. İşlem elemanlarının az da olsa zarar görmesi

sistemin bütününe etkiler. YSA paralel dağılmış parametrelili bir sistem olduğundan her bir işlem elemanı izole edilmiş bir ada olarak düşünülebilir. Daha çok işlem elemanın zarar görmesi ile sistemin davranışı biraz daha değişir. Performans düşer ama sistem hiç bir zaman durma noktasına gelmez. YSA sistemlerinin hata toleranslı olmasının nedeni bilginin tek bir yerde saklanmayıp, sisteme dağıtılmasıdır. Bu özellik sistemin durmasının önemli bir zarara neden olacağı uygulamalarda önem kazanır.

#### 4.8 Öğrenme Kuralları

Bilginin kurallar şeklinde açıklandığı klasik uzman sistemlerin tersine, YSA gösterilen örnekten öğrenerek kendi kurallarını oluşturur. Öğrenme; giriş örneklerine veya tercihen bu girişlerin çıkışlarına bağlı olarak ağırlık bağlantı ağırlıklarını değiştiren veya ayarlayan öğrenme kuralı ile gerçekleştirilir. Günümüzde kullanılan birçok öğrenme kuralı vardır. Bilinen en çok kullanılan öğrenme kuralları şunlardır:

- Raslantısal (Hebb) öğrenme kuralı
- Performans (Widrow ve ADALINE) öğrenme kuralı
- Kompetif (Kohonen) öğrenme
- Filtreleme (Grossberg)
- Spotitemporal öğrenme
- Genelleştirilmiş Delta Kuralı Öğrenme

Burada bütün öğrenme kuralları incelenmeyecektir. Sadece tezde kullanılan "Genelleştirilmiş Delta Kuralı" öğrenmesi ilk oluşumundan yani perceptron halinden başlayıp, tüm gelişimiyle son durumu anlatılacaktır.

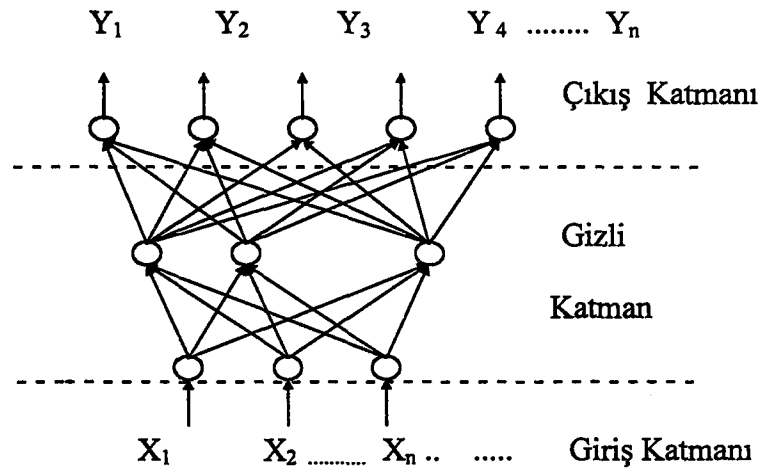
#### 4.9 Perceptron (idrak, almaç)

Perceptron ağı, ilk olarak Mc Culloch ve Pitts (1943) tarafından saptandı. Bu ilk perceptron modeline göre, giriş bilgisinin mevcut iki sınıftan hangisine eşit olabileceğini bulacak şekilde eğitilen basit bir ağıdır. Daha sonra F.Rosenblatt (1960) yukarıdaki ağ tipini biraz daha geliştirdi. Ama Minsky ve Papert (1969) bu tek katmanlı perceptronun XOR (ayrıcalıklı

veya) işlemini gerçekleştiremediğini ispatladılar. XOR gibi 3 veya daha fazla sınıfa ihtiyaç duyulan problemleri çözmek için yapılması gereken işlem, YSA'na yeni katmanlar eklemektir. Eşik bağlarıyla oluşturulan karar bölgesi şeklinin karmaşıklığı sadece eklenmiş olan katmanların sayısı ile sınırlıdır. Bilgi lineer yayılamıyorsa 2. katmanın çıkışı konveks bölgededir ve bunun neticesi olarak 3. katmandan gelecek olan çıkış bilgisinin şekli, herhangi bir bölgenin şeklinde olabilir. Bu sebeple ihtiyaç duyulan katman sayısı üç olmaktadır. Üç-katmanlı perceptronun 2. katmanında ihtiyaç olan düğümlerin sayısı, bir karar bölgesinin birleştirilmemiş hali veya bir ağ gözünün bir dış-bükey alandan meydana gelemediğinin birinden büyük olması lazımdır. 2. katmandaki düğüm sayısı en kötü durumda giriş bilgilerinin dağılımını yapan bölgenin bağlanmamış sayısına eşit olması gerekir. Birinci katmandakilerin sayısı her iki katmandaki değişim ile 3 yada 4 köşeli dışbükey bir alan oluşturmaya yeterli seviyede olmalıdır. Bunun tipik bir sonucu olarak en az 1. katmandakinden üç kat fazla miktarda olması gerekmektedir. Bununla beraber Gutierrez ve arkadaşları (1989) değişik perceptron ağlarının ihtiyacı olan düğüm sayıları hakkında çalışma yaptılar ve çok fazla düğümünde, çok az sayıda olduğu gibi zararlı etkisi olduğunu buldular. Tek katmanlı perceptron uygulanan her eğitimin seti modelinin en önemli özelliği, lineer biçimde dağılmak zorunda olmasıdır.

#### 4.10 Çok Katmanlı İdrak (Multi-Layer Perceptron)

Çok katmanlı perceptron giriş ve çıkış katmanları arasında birden fazla katmanın kullanıldığı YSA sistemleridir. Gizli katman (hidden layer) olarak isimlendirilen bu katmanlarda, düğümleri aracısız giriş olmayan ve aracısız çıkış veremeyen üniteler vardır. Şekil.4.3'de çok katmanlı perceptronun genel yapısı verilmiştir.



Şekil 4.3 Çok katmanlı perceptron yapısı.

Çok katmanlı ağlarda veriler giriş katmanı tarafından kabul edilirler. Ağ içinde yapılan işlemler sonucunda çıkış katmanında oluşan sonuç değer işlenen cevap ile karşılaştırılır. Bulunan cevap ile istenen cevap arasındaki herhangi bir ayrılık varsa ağırlıklar bu farkı azaltacak şekilde yeniden düzenlenir. Girişteki değer, ağırlıklar uygun noktaya ulaşana kadar değişmez. Hesaplanan çıkışlar istenilen cevaplarla karşılaştırılarak sonuçta gerekirse hata işaret edilir. Hata işareti gizli birimlerden çıkış birimine olan ağırlıkları değiştirmekte kullanılır. Ama bunu yaparken giriş katmanından gizli katmana gelen değiştirilip değiştirilemediğini düşünmek gerekir. Gizli birimlerden ne tür bir çıkış istendiği bilinemeyeceği için gizli birimlerin çıkışında hata işareti verilmesi kolay bir şey değildir. Bunun yerine her bir birimin çıkış biriminin hatalarına olan etkisi bilinmelidir. Bu hatalı birim için gizli birime bağlı olan çıkış birimlerinin hata işaretlerinin ağırlıkları toplamı alınarak yapılır. Çok gizli katmana sahip sistemlerde her sistemin hata işaretleri, bir önceki katmanın düzeltilmiş işaretlerinden çıkartılarak işlem tekrarlanır. Sonuç olarak ağırlık düzeltme işlemi çıkış seviyesine bağlı ağırlıklardan başlar ve işlem ters yönde, giriş seviyesine varana kadar devam eder. Sonuçta sistem hatalar yapar, ama bu hatalardan birşeyler öğrenip isteneni bulana kadar işleme devam eder. Bu yöntem *hatanın geriye yayılması algoritması* (Back-propagation algorithms) denir (Widrow and Lehr, 1990). Şimdi bu algoritmayı inceleyelim.

#### 4.11 Hatanın Geriye Yayılması Algoritması ve Genelleştirilmiş Delta Kuralı

Hatanın geriye yayılması algoritması, karesi alınmış hata fonksiyonunu minimize eden kodlu bir algoritma olup genelleştirilmiş delta kuralını eğitime için kullanılır. Algoritmaya göre her bir  $j$  biriminin çıkışı  $o_j$  şu şekilde tanımlanır;

$$o_j = f(net_j) = f(x) \Rightarrow net_j = \sum_i w_{ji} o_i + \theta_j \quad (4.5)$$

Burada  $o_j$ ;  $j$ . biriminin çıkışı  $w_{ji}$ ;  $i$  biriminden  $j$  birimine bağlantının ağırlığı,  $\theta_j$ ;  $j$  biriminin kutbu (bias)  $\{\sum_i$ ; çıkışı  $j$  birimine akan her  $i$  biriminin toplamıdır.  $f(x)$  bir monoton artan ve türevi alınabilen fonksiyondur. Daha çok pratikte bir lojistik aktivasyon fonksiyonu olarak  $f(x)=1/(1+e^{-x})$  sigmoid fonksiyonu kullanılır.

m-boyutlu giriş örüntüleri set edildiğinde  $\{ i_p = (i_{p1}, i_{p2}, \dots, i_{pn}) : p \in P \}$ 'dir. Benzer şekilde istenilen n- boyutlu çıkış örüntüleri  $\{ t_p = (t_{p1}, t_{p2}, \dots, t_{pn}) : p \in P \}$  belirtir. Burada; P:YSA uygulanan işaret şekil vb gibi örüntülerini verir.

Bir görüntü için karesel hata (MSE) fonksiyonu  $E_p$  şu şekilde tanımlanır.

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{çıkış katmanı}} (t_{pj} - o_{pj})^2 \quad (4.6)$$

Amaç uygun  $w_{ji}$  ve  $q_j$  seçimiyle toplam hatayı yeterince küçük yapmaktır. Bu amacı gerçekleştirmek için, giriş örüntüsü ard arda ve rasgele biçimde seçilir. Daha sonra  $w_{ji}$  ve  $q_j$  şöyle değiştirilir;

$i_{pi}$  : Giriş işaretinin i bileşeni;

$t_{pj}$  : Çıkış vektörünün j bileşeni;

$o_{pj}$  : YSA uygulanan P örüntü setinin ürettiği çıkış ise;

$$\delta_{pj} = (t_{pj} - o_{pj}) \quad (4.7)$$

$$\Delta_p w_{ji} = -\epsilon \left( \frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}} \right) \quad (4.8)$$

$$\Delta_p \theta_j = -\epsilon \left( \frac{\partial E_p}{\partial \theta_j} \right) \quad (4.9)$$

Burada  $\epsilon$  : öğrenme oranı adı verilen küçük bir pozitif sabit sayıdır. Şayet gizli katman yok ise; (4.8) ve (4.9)'un sağ tarafı hesaplanır, o zaman;

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial E_p}{\partial o_{pj}} \frac{\partial o_{pj}}{\partial w_{ji}} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial o_{pj}} = -(t_{pj} - o_{pj}) = -\delta_{pj} \quad (4.11)$$

$$o_p = \sum_i w_{ji} \cdot i_{pi} \quad (4.12)$$

ise;

$$\frac{\partial o_{pj}}{\partial w_{ji}} = i_{pi} \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.11) ve (4.13) ifadelerini (4.10)'da yerine koyarsak;

$$-\frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}} = \delta_{pj} i_{pi} \quad (4.14)$$

olur. Öğrenmede en küçük minimuma ulaşılmak istenir. Bu durumda j. düğümün lineer olmayan çıkışı;

$$o_{pj} = f_j(net_{pj}) \Rightarrow net_{pj} = \sum_i w_{ji} o_{pi} \quad (4.15)$$

şeklindedir. Bu durumda;

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial E_p}{\partial net_{pj}} \frac{\partial net_{pj}}{\partial w_{ji}} \Leftrightarrow \frac{\partial net_{pj}}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial}{\partial w_{ji}} \sum_k w_{jk} o_{pk} = o_{pi} \quad (4.16)$$

$$\delta_{pj} = -\frac{\partial E_p}{\partial net_{pj}} = -\frac{\partial E_p}{\partial o_{pj}} \frac{\partial o_{pj}}{\partial net_{pj}} = -\frac{\partial E_p}{\partial o_{pj}} f'_j(net_{pj}) \quad (4.17)$$

Burada iki durum var:

1-  $o_{pj}$  YSA'nın çıkışı ise; (4.11) ifadesini (4.17)'de yerine koyarsak,

$$\delta_{pj} = (t_{pj} - o_{pj}) f'_j(\text{net}_{pj}) \quad (4.18)$$

bulunur.

2- Eğer gizli katmanların çıkış işaretinden bahsediliyorsa;

$$\sum_k \frac{\partial E_p}{\partial \text{net}_{pk}} \frac{\partial \text{net}_{pk}}{\partial p_j} \quad (4.19)$$

şeklinde ise,

$$\sum_k \frac{\partial E_p}{\partial \text{net}_{pk}} \frac{\partial}{\partial o_{pj}} \sum_i w_{ki} o_{pi} = - \sum_k \delta_{pk} w_{kj} \quad (4.20)$$

olur. Bulduğumuz son işlemi (4.17)'de yerine koyarsak;

$$\delta_{pj} = f'(\text{net}_{pj}) \sum_k \delta_{pk} w_{kj} \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.20) denklemindeki (-) işareti, ağırlıkların ters yönde değiştiğini belirtir. Bütün yaptığımız işlemleri kısaca özetleyecek olursak;

1. Genelleştirilmiş  $\Delta$  (delta) kuralı:

$$\Delta_p w_{ji} = \epsilon \delta_{pj} i_{pi}$$

2. Çıkış katmanı elemanları için;

$$\delta_{pj} = (t_{pj} - o_{pj}) f'_j(\text{net}_{pj})$$

3. Gizli katman elemanları için;

$$\delta_{pj} = f'_j(\text{net}_{pj}) \sum_k \delta_{pk} w_{kj}$$

olur. İşlem elemanında, transfer (eşik) fonksiyonu olarak *sigmoid* fonksiyonu kullanılarak türevi alınır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa;

$$\frac{\partial o_{pj}}{\partial \text{net}_{pj}} = o_{pj} (1 - o_{pj}) \quad (4.22)$$

bulunur. Bunu (4.18) de yerine koyarsak, çıkış elemanı için;

$$\delta_{pj} = (t_{pj} - o_{pj}) o_{pj} (1 - o_{pj}) \quad (4.23)$$

elde edilir. (4.22)'yi (4.21) de yerine koyarsak, gizli katman elemanı için;

$$\delta_{pj} = o_{pj} (1 - o_{pj}) \sum_k \delta_{pk} w_{kj} \quad (4.24)$$

bulunur. Yukarıda toplam içerisinde gösterilen k'nın, j çıkış birimine akan her birim k olduğuna dikkat edilmelidir. Hesaplamayı hızlandırmak için momentum terimleri ( $\alpha$ ) eklenirse, en genel halde çıkış ve gizli katman ifadeleri şu şekilde olur:

$$\Delta_p w_{ji}(t+1) = \varepsilon \delta_{pj} o_{pi} + \alpha \Delta_p w_{ji}(t) \quad (4.25)$$

$$\Delta_p \theta_{ji}(t+1) = \varepsilon \delta_{pj} + \alpha \Delta_p \theta_{ji}(t) \quad (4.26)$$

Burada; t: öğrenme çevrimlerinin sayısını gösterir.  $\alpha$  küçük pozitif bir sayıdır.



#### 4.12 Öğrenme ve Momentum Katsayıları

YSA ile ilgili bir başka sorunda, düzgün bir öğrenme katsayısının ( $\epsilon$ ) ayarlanmasıdır. Ağırlıkları çok yüksek tutmak davranışın bozulmasına neden olabilir. O nedenle öğrenme katsayısını böyle bir davranışı önlemek için küçük tutmak gereklidir. Öğrenme katsayısı,  $0.01 < \epsilon < 10$  aralığında seçilen sabit bir sayıdır. Öte yandan çok küçük bir öğrenme oranı da, öğrenme işleminin yavaşlamasına yol açar. Momentum ( $\alpha$ ) fikri bu noktadan hareketle ortaya atılmıştır. Momentum mevcut delta ağırlığı üzerinden önceki delta ağırlığının belli bir kısmını besler. Böylece daha düşük öğrenme katsayısı ile daha hızlı öğrenme elde edilir. Momentum katsayısı genellikle  $0 < \alpha < 1$  aralığında değişen sabit bir sayıdır.



## 5. SONLU ELEMANLAR AĞININ DÖRTGEN ELEMANLAR KULLANILARAK İNCELTİLMESİ

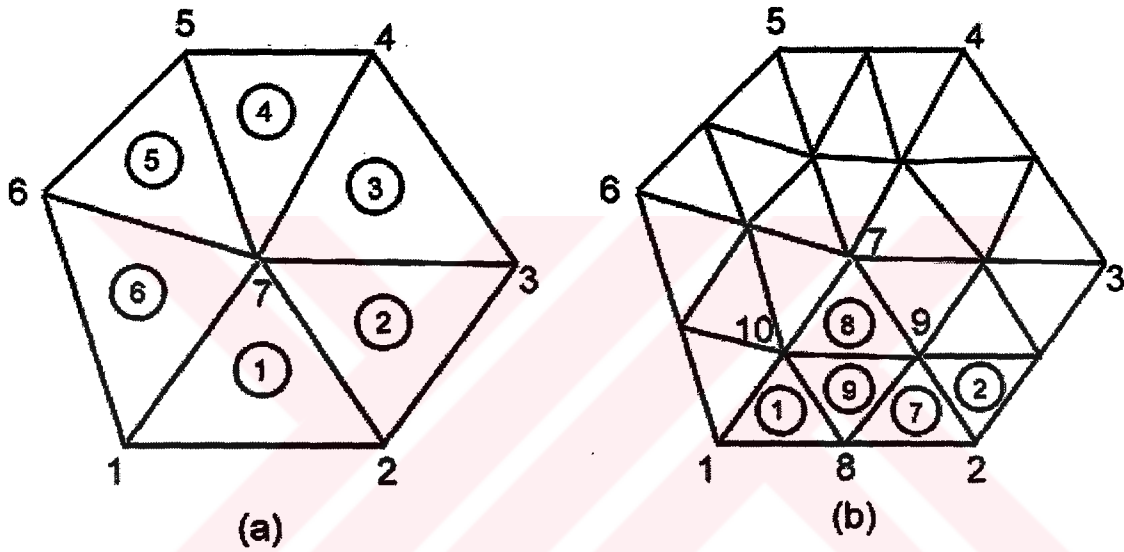
Sonlu elemanlar yönteminde yaklaşım, ağ yapısına ve kullanılan elemanlara bağlıdır. Lineer elemanlar kullanılması durumunda, birincil ve ikincil değişkenlerin, eleman üzerinde her noktada sabit olmasından dolayı elemanların alanlarının mümkün olduğu kadar küçük seçilmesi gereklidir. Yöntemin uygulandığı problemin yapısına göre, gerekli bölgelerde elemanların diğer bölgelerdeki elemanlara göre daha küçük seçilmesi, yaklaşımın doğruluğunu artırır. Bu durum özellikle, enerjinin yoğun olduğu hava aralıklarında ortaya çıkar. Bir doğru akım makinasının veya senkron makinanın analizinde, hava aralığı yoğun ve aynı zamanda küçük alanlı elemanlara bölünmelidir.

Sonlu eleman ağındaki herhangi bir bölgede bulunan elemanların inceltilmesi, elemanlarının sayılarının artırılması ve dolayısıyla alanlarının küçültülmesi anlamındadır. Bu işlem yapılırken, ağıdaki diğer elemanların (en azından komşu elemanların) bu işleminden etkilenmesi söz konusudur. Üstelik bu elemanlar sınırdaki ise, inceltme sonucunda ortaya çıkan yeni düğümlere sınır şartlarının atanması gerekir. Yeni elde edilen ağa göre, eleman ve düğüm numaralandırması tekrar düzenlenir. Ağ inceltmede kullanılan bir yöntemde, mevcut ağıdaki üçgen elemanların kenarlarının orta noktası bulunarak, bu noktalara yeni düğüm ve bunları köşe noktası kabul eden yeni elemanlar atanır. Yeni elde edilen ağıdaki eleman sayısı bir önceki ağıdakinin dört katına çıkar. Ağıdaki bütün elemanlar inceltme işleminden etkileneceği için, çözüm süresinin artması sonucu ortaya çıkar.

Bu bölümde, ağın inceltilmesi işleminde ortaya çıkan yukarıda bahsedilen dezavantajları ortadan kaldıracak yeni bir ağ inceltme yöntemi verilecektir. Bu yöntemde, problem için elde edilen ağıdaki üçgen elemanlar, bir üçgen, üç tane dörtgen elemanı içerecek şekilde alt elemanlara bölünmektedir.

### 5.1 Bir Üçgenin Alt Üçgen Elemanlara Bölünmesi

Bu yöntem, ağ inceltme işleminde, adaptif yöntemler dışında en çok kullanılan yöntemdir. Bu yöntemde, problem için tesbit edilen başlangıç ağındaki üçgen elemanların kenarlarının orta noktaları bulunur. Bu noktalar üçgenin köşe noktaları seçilmek suretiyle, üçgenler dört ayrı üçgene bölünmüş olur. Bölünen üçgenin eleman numarası yeni üçgenlerden birine atanarak, diğer üç üçgene yeni eleman numaraları atanır. Yeni oluşan düğümlere başlangıç ağındaki ilk elemandan başlamak üzere yeni düğüm numaraları atanarak işlem tamamlanır. Şekil 5.1’de, küçük bir ağ yapısı için bu işlemler gösterilmiştir.

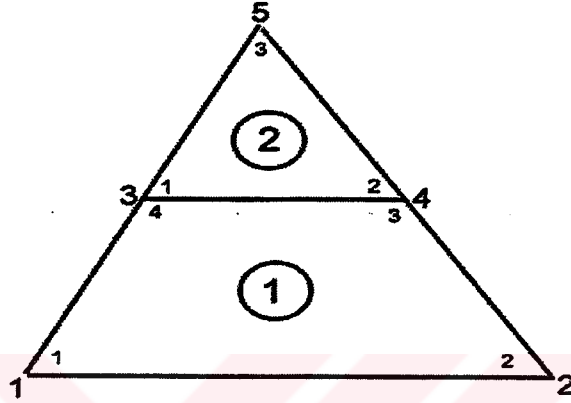


Şekil 5.1 a) Başlangıç Ağı, b) İnceltilmiş Ağ.

Bu inceltme işleminde, ağıdaki bütün elemanlara aynı işlemin uygulanması gereklidir. Birkaç elemana bu işlem uygulanıp diğerlerine uygulanmaz ise, elemanlar arası süreklilik sağlanmamış olur. Problemden Dirichlet sınır şartının geçerli olduğu sınırlara gelen yeni düğümlere sınır şartlarının atanması, prosedürde ilave işlemleri gerektirmektedir. Aynı zamanda yeni elde edilen ağ, bir önceki ağın yapısına benzeyeceğinden, başlangıç ağına uygun bir şekilde yapılması gerekmektedir. Eleman sayısının dört kat artması ise, bir sonraki çözüm aşamasında işlem süresinin çok fazla artmasını doğurmaktadır. Aynı zamanda düğüm sayısının da artması, bilgisayarda daha fazla bellek ve sabitdiskte daha fazla yer ihtiyacı demektir.

## 5.2 Üçgen ve Dörtgen Elemanların Birlikte Bulunduğu Sonlu Eleman Ağ Yapısı

Yukarıda açıklanan ağ inceltme işleminin dezavantajlarını ortadan kaldırmak üzere, bir üçgen elemanın dörtgen elemanları içerecek şekilde dört ayrı elemana bölünmektedir. Bu işlemi açıklamadan önce, üçgen ve dörtgen elemanları içeren bir ağ için, genel katsayı matrisinin oluşturulmasını gösterilecektir. Bu işlem, Bölüm 1'de üçgen elemanlar için yapılan atamaların benzeridir.



Şekil 5.2 Üçgen ve dörtgen elemanlardan oluşan bir ağ yapısı

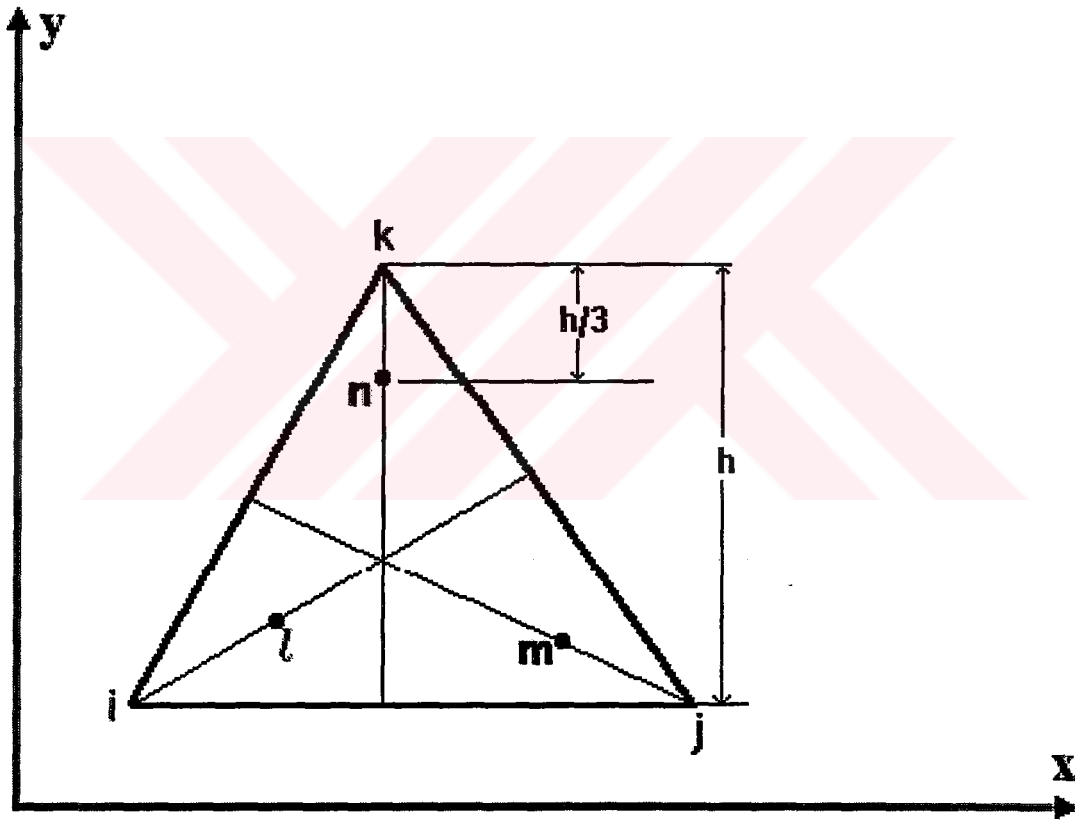
Genel katsayısı matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{14}^1 & K_{13}^1 & 0 \\ & K_{22}^1 & K_{24}^1 & K_{23}^1 & 0 \\ & & K_{44}^1 + K_{11}^2 & K_{43}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ \text{simetrik} & & & K_{33}^1 + K_{22}^2 & K_{13}^2 \\ & & & & K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Şekil 5.2'deki gibi eleman yapısında, düğümlerdeki değerlerin sürekliliği elemanlar arası sınırda birincil değişkenin sürekliliğini garantiler. Üçgen ve dörtgen elemanlar lineer seçildiğinden, elemanlararası sınırda yaklaşım lineerdir. Eleman sınırındaki yaklaşım için seçilen polinom iki sabit (sınır üzerindeki düğüm değerleri) tarafından belirlendiğinden ve bu sabit sınırı paylaşan her iki eleman tarafından aynı olduğundan, birincil değişken elemanlararası sınırda tek şekilde belirlenir.

### 5.3 Üçgen Elemanın Dörtgen Elemanlar İçerecek Şekilde Bölünmesi

Ağ inceltme işleminde, sadece istenen elemanların alt elemanlara bölünmesi, diğerlerinin bu işlemde etkilenmemesi için aşağıda tanımlanacak olan yöntem kullanılmıştır. Burada amaç, elemanlar arası sürekliliği bozmamak ve problem sınırlarına yeni düğümler ilave etmemektir. Bunun için yeni düğümleri, eleman sınırı üzerinde değil eleman içersinde seçmek gereklidir. Yöntemi bir sistematige bağlamak açısından, inceltilcek üçgenin köşe noktalarından, kenarortay üzerinde, kenarortayın  $1/3$ 'ü kadar uzunluğundaki mesafede, üç nokta tesbit edilmektedir. Şekil 5.3'te gösterilen üçgenin genel düğümleri  $i, j$  ve  $k$ 'dir. Üçgen içersinde seçilen noktalar ise  $l, m$  ve  $n$ 'dir. Yeni noktalar, ana üçgen içersinde oluşturulacak yani üçgenin köşe noktalarıdır.

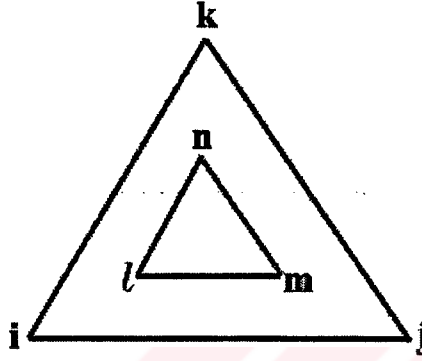


Şekil 5.3 Tipik bir lineer üçgen elemanda iç noktalar.

Yeni elde edilen düğümler üçgenin köşe noktaları olacak şekilde, ilk üçgen elemanın içersinde ikinci bir üçgen eleman oluşturulur (Şekil 5.4).

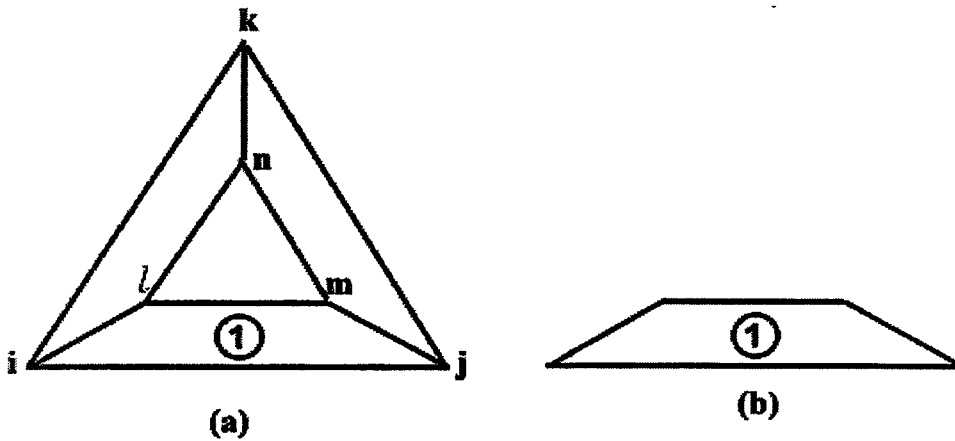
Yeni düğümlerin koordinatları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} x(l) &= \frac{4x(i) + x(j) + x(k)}{6} & y(l) &= \frac{4y(i) + y(j) + y(k)}{6} \\ x(m) &= \frac{4x(j) + x(i) + x(k)}{6} & y(m) &= \frac{4y(j) + y(i) + y(k)}{6} \\ x(n) &= \frac{4x(k) + x(i) + x(j)}{6} & y(n) &= \frac{4y(k) + y(i) + y(j)}{6} \end{aligned} \quad (5.1)$$



Şekil 5.4 Köşe noktaları l, m, n olan yeni üçgenin yerleşimi

Yeni ağı tamamlamak üzere i-l, j-m ve k-n noktaları birleştirilerek şekil 5.5.(a)'daki gibi üç adet dörtgen eleman elde edilir. Yeni elde edilen tipik dörtgen eleman şekil 5.5.(b)'de görülmektedir. Bu eleman için katsayı matrisinin hesabında, izoparametrik elemanların katsayılarının hesaplanması yöntemi kullanılabilir.



Şekil 5.5 a) Başlangıç ağındaki üçgen elemanın aldığı son durum

b) Tipik dörtgen eleman

Şekil 5.5.(a)'dan görülebileceği gibi, dörtgen elemanlar komşu üçgenlerle aynı sınırı ve

düğümlemleri paylaşmaktadırlar. Dolayısıyla istenmediği takdirde komşu üçgen elemanlara bu işlemin uygulanması sözkonusu değildir. Ağ inceltme işleminden sonra yeni elemanlara ve düğümlere numara atanması şu şekilde yapılmaktadır. Bölme işlemine tabi tutulan elemanın numarası, içerde oluşturulan üçgen elemana atanmaktadır. Dörtgen elemanlara ise, ağıdaki en son elemanın numarasından itibaren numara atanmaktadır. Düğümlere ise sırasıyla, bir önceki ağın son düğüm numarasından başlanarak atama yapılmaktadır. Yeni ağa göre, ağ bilgilerini içeren yeni dosya oluşturularak, çözüm işlemine geçilmektedir.

#### 5.4 İzoparametrik Elemanlar ve Bu Elemanlar Üzerinde Sayısal İntegral

Yeni yöntemle elde edilen ağ yapısındaki dörtgen elemanların eleman katsayı matrislerinin hesaplanmasında, izoparametrik elemanların enterpolasyon fonksiyonları kullanılmıştır. Bu bölümde genel izoparametrik elemanların enterpolasyon ve eleman katsayı matrislerinin elde edilmesi açıklanacaktır. Döner elektrik makinalarında olduğu gibi eğrisel sınıra sahip problemlerde, problem bölgesinin tam ayrıştırılmasında büyük avantajlar sağlayan bu elemanlar için gerekli katsayılar, sayısal integrasyon yöntemlerinden olan Gauss yöntemi kullanılarak hesaplanacaktır.

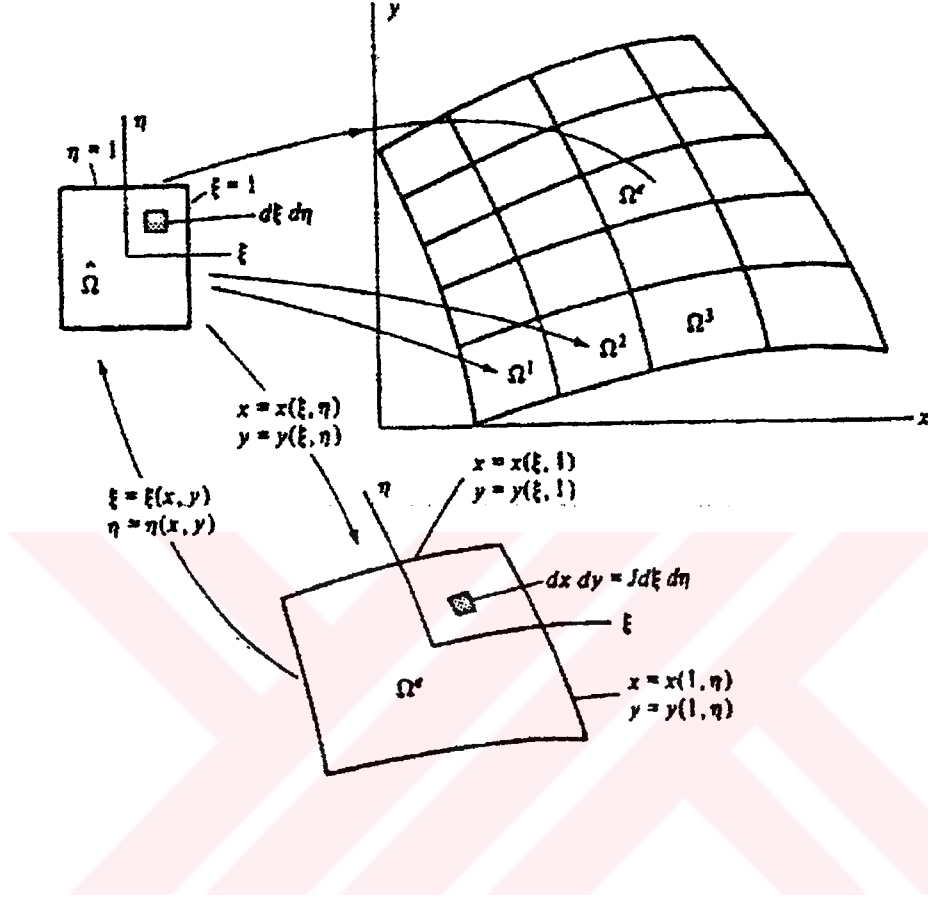
##### 5.4.1 İzoparametrik Elemanlar

İzoparametrik elemanlar, eleman geometrisinin ve bağımlı değişken fonksiyonlarının aşağıdaki şekilde tanımlanmasında kullanılabilirler:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \hat{\psi}_i \quad y = \sum_{i=1}^n y_i \hat{\psi}_i \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \hat{\psi}_i \quad (5.2)$$

Burada  $\hat{\psi}_i = \hat{\psi}_i(\xi, \eta)$  olup tabii koordinatlar olan  $(\xi, \eta)$ 'da tanımlı eleman enterpolasyon fonksiyonlarıdır. Bu elemanlarla düzensiz geometrili problem bölgelerinin kolayca tanımlanabilmesine rağmen, problem eşitliklerini tanımlamada kullanılan genel x ve y koordinatları cinsinden eleman katsayı matrisleri ve vektörlerini direkt olarak hesaplamak

zordur. Ancak bu zorluk, şekil 5.6'da gösterildiği gibi, eğrisel eleman  $\Omega^e$  ile ana eleman  $\hat{\Omega}$  arasında kurulacak bir dönüşüm tekniği ile aşılabılır. Örnek olarak ana eleman şekil 3.6'daki



Şekil 5.6 Ana elemandan sonlu eleman ağının üretilmesi

gibi seçilmiş olsun. Ana elemandaki koordinatlar,  $-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$  olacak şekilde tabii koordinatlarda  $(\xi, \eta)$  seçilmiş olsun. Bu seçim, Gauss sayısal integrasyon yönteminde sınırların seçilmesi için uygun olur. Ana elemandaki  $(\xi, \eta)$  noktasının,  $\Omega^e$  elemanındaki  $(x, y)$  noktasına dönüşümüne ait koordinatların,

$$x = x(\xi, \eta) \quad y = y(\xi, \eta) \quad (5.3)$$

şeklinde olduğunu düşünelim. Örneğin, dönüşüm,  $\xi=1$  doğrusunu,  $xy$  planında  $x = x(1, \eta)$ ,  $y = y(1, \eta)$  şeklinde parametrik olarak tanımlanabilecek bir eğriye götürür.



(5.3)'ün çok özel bir durumu olarak;

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i \hat{\psi}_i(\xi, \eta) \quad y = \sum_{i=1}^4 y_i \hat{\psi}_i(\xi, \eta) \quad (5.4)$$

ifadelerini gözönüne alalım.  $(x_i, y_i)$   $\Omega^e$  elemanın  $i$ . düğümünün genel koordinatlarıdır.  $\hat{\Omega}$  elemanındaki  $\xi=1$  doğrusunu ele alırsak,

$$\begin{aligned} x(1, \eta) &= \sum_{i=1}^4 x_i \hat{\psi}_i(1, \eta) = x_1 \cdot 0 + \frac{1}{2} x_2 (1 - \eta) + \frac{1}{2} x_3 (1 + \eta) + x_4 \cdot 0 \\ &= \frac{x_2 + x_3}{2} + \frac{x_3 - x_2}{2} \eta \\ y &= \sum_{i=1}^4 y_i \hat{\psi}_i(1, \eta) = \frac{y_2 + y_3}{2} + \frac{y_3 - y_2}{2} \eta \end{aligned} \quad (5.4.a)$$

elde edilir. Açıkça görülmektedir ki,  $x$  ve  $y$ ,  $\eta$ 'nın lineer fonksiyonudur ve bir doğru belirtir. Benzer şekilde  $\xi=-1$ ,  $\eta=\pm 1$  doğruları da  $\Omega^e$  elemanında bir doğru belirtirler. Başka bir deyişle,  $\hat{\Omega}$  ana elemanı, lineer dönüşümle,  $xy$  planında bir dörtgen elemana dönüşür.  $\hat{\psi}_i$  ikinci dereceden olursa, dönüşen eleman eğrisel kenarlı olacaktır. Sonlu eleman ağındaki farklı elemanlar, genel koordinatları atanarak ana elemandan üretilebilirler.

Eleman hesaplamalarını yapmak için  $x$  ve  $y$  fonksiyonlarını,  $\xi$  ve  $\eta$  fonksiyonlarına dönüştürmek gereklidir. (5.3) ifadelerine göre türev tanımından:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad (5.5)$$

veya

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \equiv [J]^T \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

yazılır. Burada  $[J]$  dönüşümün jacobian matrisidir. (5.6) eşitliği,  $\hat{\Omega}$  ana elemandaki  $d\xi$  ve  $d\eta$  çizgisel elemanlarının,  $xy$  planındaki  $dx$  ve  $dy$  çizgisel elemanlarına lineer dönüşümünü gösterir.  $X$  ve  $y$  koordinatlarının,  $\xi$  ve  $\eta$  koordinatlarına dönüşebilmesi için  $[J]$ 'nin tersinin mevcut olması gereklidir. (5.6) eşitliğinin dönüşümlü olabilmesi için gerek ve yeter şart, jacobian matrisinin determinanı  $J$ 'nin, ana elemandaki her  $(\xi, \eta)$  noktasında sıfırdan farklı olmasıdır.

$$J \equiv \det[J] = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \neq 0 \quad (5.7)$$

$J \neq 0$  olduğunda,

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = ([J]^{-1})^T \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

ve

$$\xi = \xi(x, y) \quad \eta = \eta(x, y) \quad (5.9)$$

ifadeleri elde edilir.

### 5.4.2 Sayısal İntegrasyon

Bu bölümde, eleman matrislerinin sayısal olarak elde edilmesindeki adımlar açıklanmıştır. İlk önce jacobian matrisi  $[J]$ 'nin hesabı açıklanacaktır. (5.1) ve (5.2) eşitliklerinden her  $\Omega^e$  elemanı için:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.10a)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \quad (5.10b)$$

Daha sonra enterpolasyon fonksiyonlarının  $x$ ,  $y$  ve  $\xi$ ,  $\eta$ 'ya göre türevleri arasında bir bağıntı kurulur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} &= \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.11a)$$

(5.11a) matrisyel formda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J^*] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.11b)$$

$$= \begin{Bmatrix} J_{11}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \\ J_{21}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.11c)$$

Burada  $J_{ij}^*$ , jacobian matrisinin tersinin (i,j) pozisyonundaki elemanıdır.

$$[J]^{-1} \equiv [J^*] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Eleman alanı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$dA = dx dy = J d\xi d\eta \quad (5.13)$$

Eğer eleman doğrusal kenarlara sahip ise, elemanların geometrisi köşe düğümlerin koordinatları ile tanımlanabilir. Bu durumda (5.10)'daki  $\hat{\psi}_i$ , eleman için lineer enterpolasyon fonksiyonu oluşturur.

(5.10) ve (5.11) eşitlikleri her  $\Omega^e$  elemanı üzerindeki integral denklemlerinin ana elemana göre dönüşümü için gerekli bağıntıları verir. Örneğin, herhangi bir  $\Omega^e$  elemanı üzerinde aşağıdaki integral eşitliklerini gözönüne alalım.

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left( a \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial x} + b \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial y} + c \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j \right) dx dy \quad (5.14)$$

a, b ve c; x ve y'nin fonksiyonudur. Sonlu eleman ağının bir  $\hat{\Omega}$  elemanından üretildiğini kabul edelim. (5.9) dönüşümüne göre aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\begin{aligned}
K_{ij}^e &= \int_{\hat{\Omega}} \left[ \hat{a} \left( J_{11}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \right) \left( J_{11}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \hat{b} \left( J_{21}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \right) \left( J_{21}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) + \hat{c} \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j \right] J d\xi d\eta \\
&\equiv \int_{\hat{\Omega}} F(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{5.15}$$

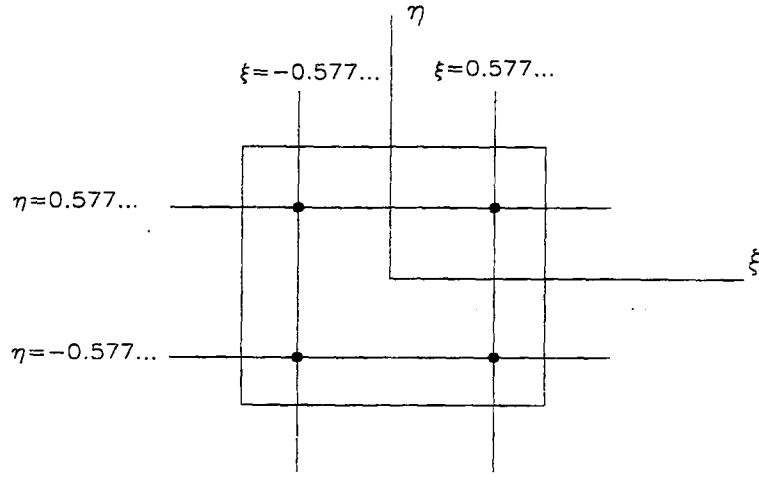
(5.10)'dan (5.15)'e kadar verilen ifadeler dörtgen ve ana üçgen elemanlar için geçerlidir.

### 5.4.3 Ana Dörtgen Eleman Üzerinde Sayısal İntegrasyon

Yeni ağ tekniğindeki gibi bir ana dörtgen eleman üzerinde ikinci dereceden integral formülasyonu bir boyutlu ikinci dereceden formülasyon yoluyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{\Omega}} F(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi \\
&= \int_{-1}^1 \left( \sum_{j=1}^N F(\xi, \eta_j) W_j \right) d\xi \\
&\equiv \sum_{I=1}^M \sum_{J=1}^N F(\xi_I, \eta_J) W_I W_J
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Yukarıda verilen yöntem Gauss integral alma yöntemidir. (5.16)'da M ve N,  $\xi$  ve  $\eta$  yönündeki integrasyon noktaları sayısıdır.  $(\xi_I, \eta_J)$  Gauss noktalarını,  $W_I$  ve  $W_J$  ise Gauss ağırlıklarını gösterir. Gauss noktalarının seçimi polinom derecesine göre yapılır. P dereceli polinom  $N=(p+1)/2$  Gauss noktası üzerinde integre edilir. Çoğu durumda enterpolasyon fonksiyonları  $\xi$  ve  $\eta$  için aynı derecelidir, dolayısıyla  $M=N$  alınır. Şekil 5.7'de dörtgen eleman için Gauss noktaları gösterilmiştir.



Şekil 5.7 Dörtgen eleman için Gauss noktaları.

Lineer dörtgen elemanlar için maksimum polinom derecesi 2, integrasyon derecesi 2x2, doğruluk derecesi 3'tür. Polinomun maksimum derecesi aşağıdaki şekilde verilen tipteki matris elemanlarının integrasyonu ile verilen,  $\xi$  veya  $\eta$ 'daki polinomun en yüksek derecesine karşılıktır.

$$M_{ij}^e = \int_{\hat{\Omega}} J \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j$$

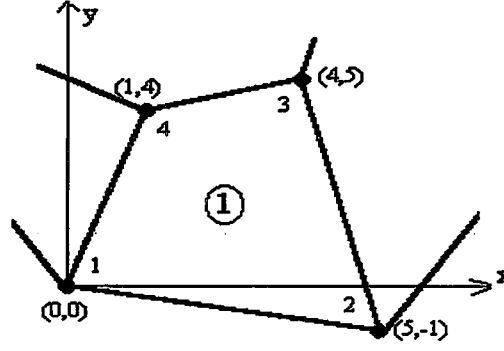
$$K_{ij}^e = \int_{\hat{\Omega}} J \left( \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial y} \right) d\xi d\eta \quad (5.17)$$

$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y}$  (5.11) eşitlikleri ile hesaplanır. NxN Gauss noktalarının yerleşimi bir boyutlu  $\xi_i$  Gauss noktalarının tensör çarpımı ile verilir:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{Bmatrix} \{ \xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \xi_n \} \equiv \begin{bmatrix} (\xi_1, \xi_1) & (\xi_1, \xi_2) & \cdots & (\xi_1, \xi_n) \\ (\xi_2, \xi_1) & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (\xi_n, \xi_1) & \cdots & \cdots & (\xi_n, \xi_n) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Şekil 5.8'deki sonlu eleman ağ yapısı içersindeki 1 nolu eleman için katsayı matrisinin hesabında kullanılacak Jacobian matrisinin ve determinantının hesabı ile elde edilen

katsayı matrisinin sonucu verilecektir.



Şekil 5.8 Sonlu eleman ağ yapısında izoparametrik dörtgen eleman.

Şekil 5.8'deki eleman için Jacobian matrisi ve determinanı;

$$[J] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8-2\eta & 2\eta \\ -2\xi & 10+2\xi \end{bmatrix} \quad J = (4-\eta)(5+\xi) + \xi\eta = 20 + 4\xi - 5\eta \quad (5.19)$$

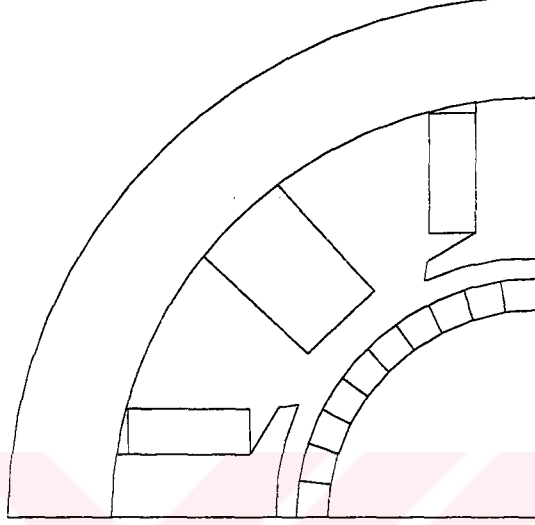
olarak elde edilir. (5.15) eşitliği kullanılarak eleman katsayı matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$[K_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0.67232 & -0.20503 & -0.33586 & -0.13144 \\ -0.20503 & 0.56606 & 0.01023 & -0.33586 \\ -0.37128 & 0.01023 & 0.70774 & -0.38212 \\ -0.13144 & -0.37128 & -0.38212 & 0.88483 \end{bmatrix}$$

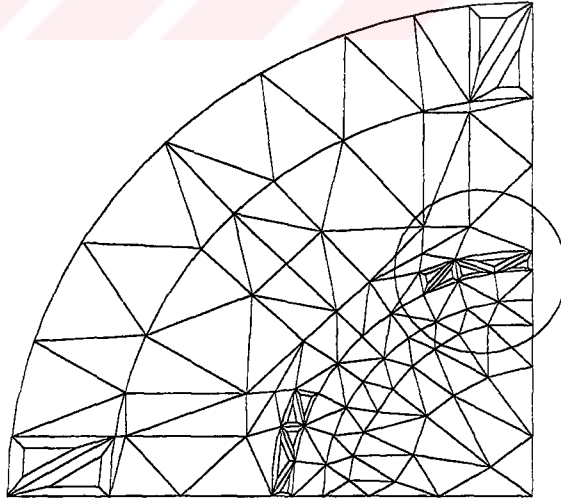
### 5.5 Örnek Ağ İnceltmesi

Yeni ağ inceltme yöntemi, 4 kutuplu bir doğru akım makinasına uygulanmıştır. Şekil 5.9'da, 4 kutuplu bir doğru akım makinasının simetrisi göz önüne alınarak oluşturulan 2 boyutlu ¼ kesiti görülmektedir. Makinanın boşa çalıştığı kabul edilmiştir. Bu durumda sadece ana alan sargılarında uyarma bulunacak, endüvi ve yardımcı kutuplardan geçen akımlar ihmal edilecektir. Hava aralığındaki magnetik akı yoğunluğunun analizde önemli olması ve enerji yoğunluğunun bu bölgede yüksek olması sebebiyle, kutup ayağı altındaki hava aralığı bölgesinde elemanlar mümkün olduğu kadar çok olmalıdır. Yeni inceltme yöntemi, bu bölgedeki elemanlar seçilmek suretiyle gerçekleştirilmiştir. Şekil 5.10'da elde edilen ağ yapısı, Şekil 5.11'de ise kutup ayağı altı bölgesinin genişletilmiş hali görülmektedir. Şekil

5.11’de sadece yeni elemanlar gösterilmiştir. Şekil 5.12’de ise sonlu elamanlar çözümü sonucunda elde edilen eş vektör potansiyel noktalarının birleştirilmesi sonucunda elde edilen akı dağılımı gösterilmiştir. Makina boşta çalıştığı için alan simetriktir. Endüvi üzerinde akı çizgilerinin yoğun olduğu kısımlar, endüvi dişlerine, diğer kısımlar ise endüvi oluklarına karşılık gelmektedir.

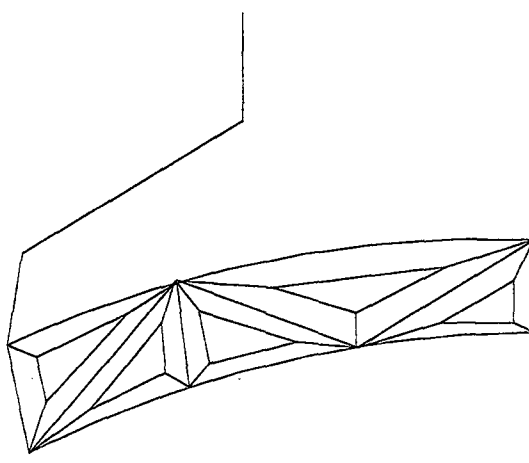


Şekil 5.9 4 kutuplu doğru makinasına ait  $\frac{1}{4}$  simetrik geometrisi.

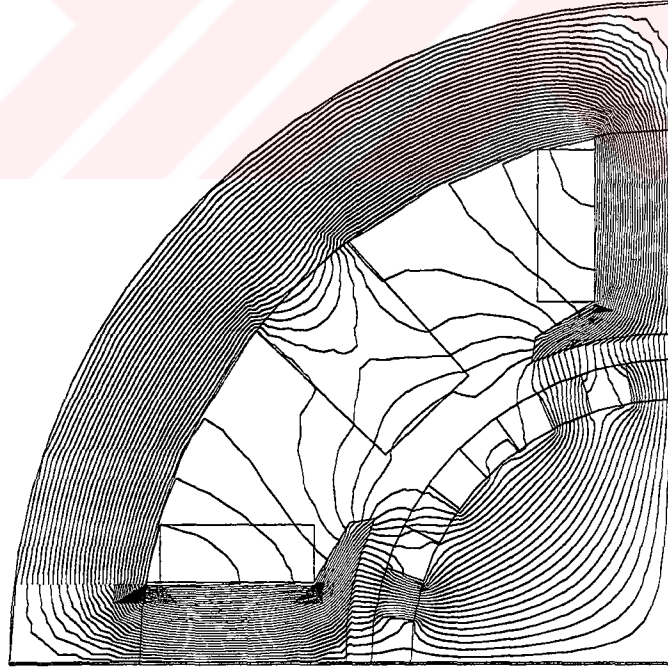


Şekil 5.10 Doğru akım makinası için başlangıç ağı.





Şekil 5.11 Hava aralığında kullanılan elemanlar.



Şekil 5.12 Doğru akım makinası için elde edilen akı dağılımı.

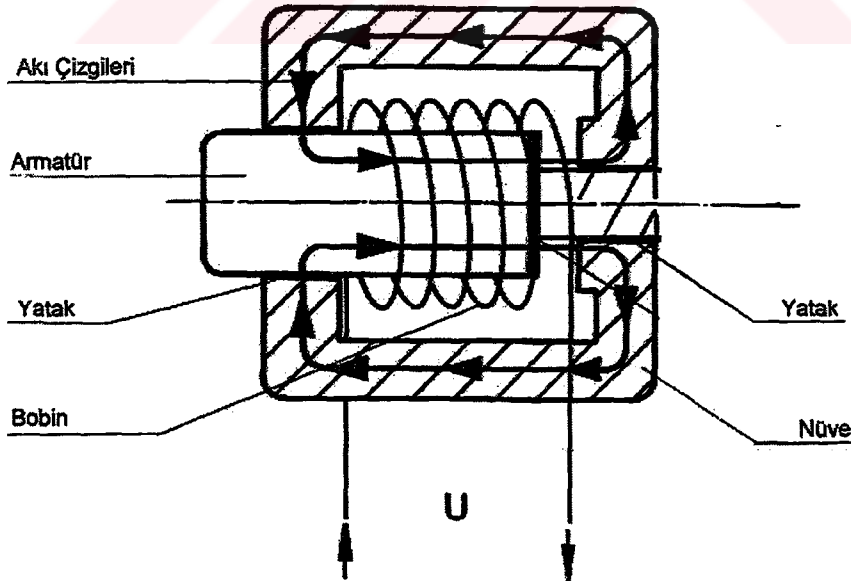
## 6. BİR ELEKTROMAGNETİN ENDÜKTANSININ ANALİTİK HESABI

Bölüm 5’de verilen ağ inceltme metodu ile sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak bir elektromagnetin sargı endüktansının hesabından elde dılecek sonuçlar, analitik bir yöntem ile elde edilecek sonuçlarla karşılaştırılacaktır. Kullanılacak analitik yöntem, değişkenlerine ayırma yöntemi ile elektromagnetik problemlerin çözümüne dayanmaktadır. Conformal Mapping tekniğini de içeren yöntem için verilecek endüktans formülündeki bir katsayının, solenoid formundaki elektromagnetin geometrik yapısına bağılı olarak değişimine ait eğriler, yapay sinir ağıları yöntemi ile modellenecek ve ara değerler için enterpole edilecektir.

Bu bölümde analitik yöntemin dayandığı temeller ile katsayıya ait yapay sinir ağıları ile modelleme ayrıntılarıyla verilecektir. Analitik yöntem ile elde edilen sonuçların, sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılması bölüm 6’da verilecektir.

### 6.1 Genel Tanımlar

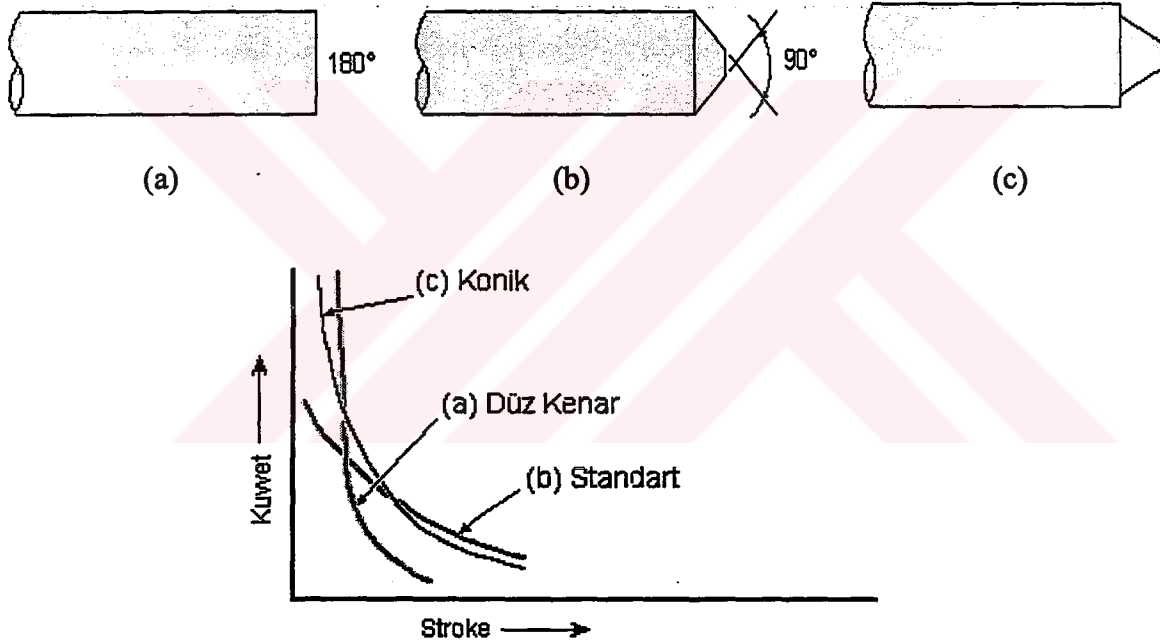
Şekil5.1’de tipik bir elektromagnete ait prensip resmi görülmektedir. Bu tipteki magnetlerin uygulama alanları çok çeşitlidir. Oyun makinalarından para ve bilet makinalarına, printer fax makinalarından bir çok endüstriyel uygulamalara kadar çok değişik sahalarda kullanılmaktadırlar.



Şekil 6.1 Bir elektromagnetin prensip şeması.

Bir elektromagnet, temel olarak elektrik enerjisini mekanik hareket enerjisine dönüştüren

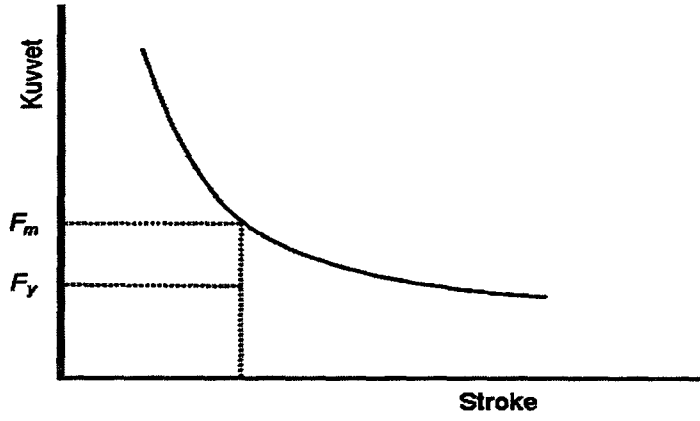
elemandır. Bobin  $U$  gerilimi ile enerjilendiğinde armatür akı çizgilerinin yönünde hareket eder. Bobin enerjilenmeden önce armatürün bulunduğu pozisyondan itibaren alacağı yol *stroke* (kurs boyu) olarak tanımlanır. Bu elektromagnetlerin uygulamalar için seçiminde önemli bir faktör olan kuvvet-stroke karakteristikleri, tasarımda oldukça zorluk çıkartmaktadır. Stroke uzunluğunun oldukça büyük olması sebebiyle, bu bölgede kaçak akının fazla olması sonucu ortaya çıkacaktır. Bu sebeple magnete ait kuvvet-stroke karakteristiklerinin belirlenmesinin yanında bobine ait endüktans hesabının da analitik olarak hesaplanması oldukça zordur. Analitik yöntemde bobin ve hava boşluğuna ait çözümler ortaya konarak, bu bölgelerdeki magnetik vektör potansiyel, akı yoğunluğu değerleri ile bobine ait endüktans ifadeleri ortaya konacaktır. Şekil 6.2’de değişik armatür şekilleri ve bu şekillere ait tipik kuvvet-stroke karakteristikleri gösterilmiştir.



Şekil 6.2 Değişik armatür tiplerine göre tipik kuvvet-stroke karakteristikleri.

Elektromagnetin belli bir stroke için üreteceği kuvvet değeri, üzerindeki yükün istediği kuvvet değerinden büyük olmalıdır (şekil 6.3). Aksi takdirde bobinden geçecek aşırı akım sargıların hasara uğramasına sebebiyet verebilir. Üretici firmaların kataloglarındaki bobin direnç değerleri 20 °C ortam sıcaklığı içindir. Bunun altındaki ve üstündeki direnç değerleri aşağıdaki formülle hesaplanabilir.

$$R_x = R_{20^\circ\text{C}} [\pm 0.00393(T_x - 20)] \quad (6.1)$$

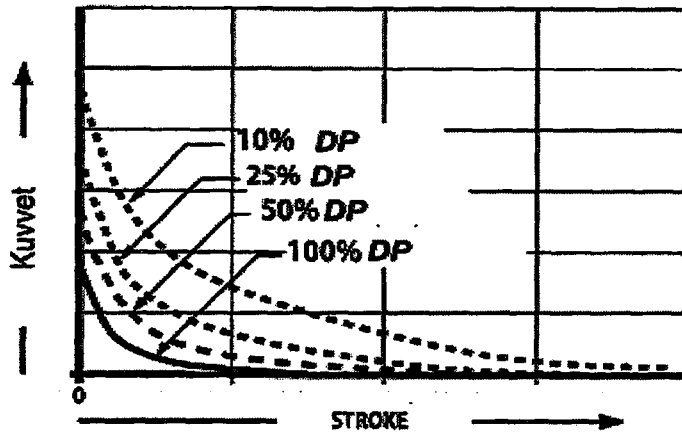


Şekil 6.3 Yük için gerekli kuvvet.

Kuvvet-stroke karakteristiklerini etkileyen bir diğer faktör ise darbe-periyot oranıdır. Darbe-periyot oranı elektromagnetin enerjili olduğu zamanın işletim zamanına oranı olarak tanımlanır.

$$\%DP = \frac{T_{on}}{T_{on} + T_{off}} \times 100 \quad (6.2)$$

Tipik bir elektromagnete ait değişik darbe-periyot oranlarına karşılık gelen kuvvet-stroke karakteristikleri şekil 6.4’de gösterilmiştir.



Şekil 6.4 Değişik DP oranları için kuvvet-stroke karakteristikleri.

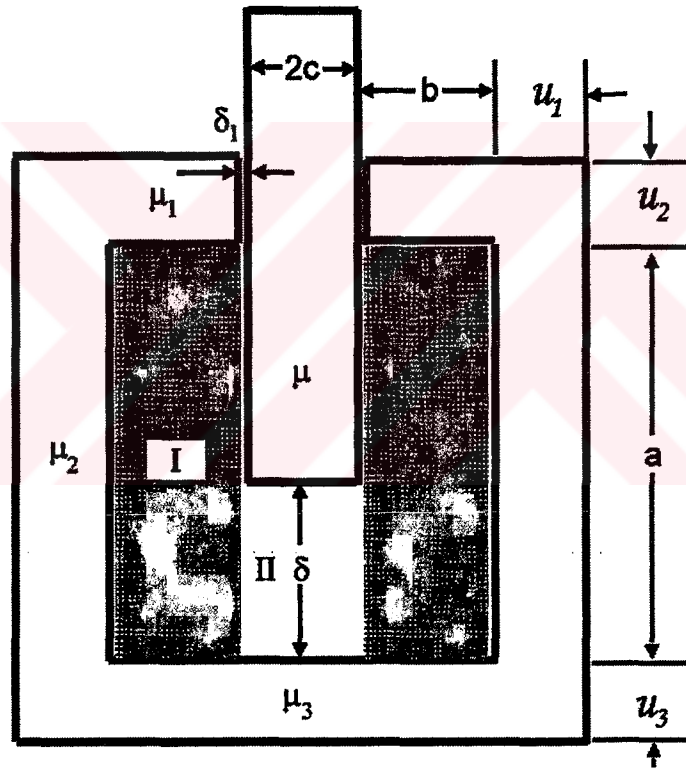
## 6.2 Endüktans Hesabında Kullanılan Analitik Yöntem

### 6.2.1 Magnetik Alan Problemi

Elektromagnetin bobin ve hava aralığındaki alanı analitik olarak hesaplamak için aşağıdaki kabulleri yapacağız.

- 1- Nüveyi oluşturan kısımların her birinde kullanılan malzeme lineer (doyumsuz)'dir.
- 2- İki boyutlu analiz yapılacağından, magnetik vektör potansiyel  $A$ , sadece  $z$  bileşenine sahiptir (Dolayısıyla  $J$  akım yoğunluğu vektörü de  $z$  bileşenini haizdir).

Şekil 6.5'de analitik yöntem için kullanılacak elektromagnete ait kesit ve ilgili büyüklükler tanımlanmıştır.



Şekil 6.5 Elektromagnete ait boyutlar.

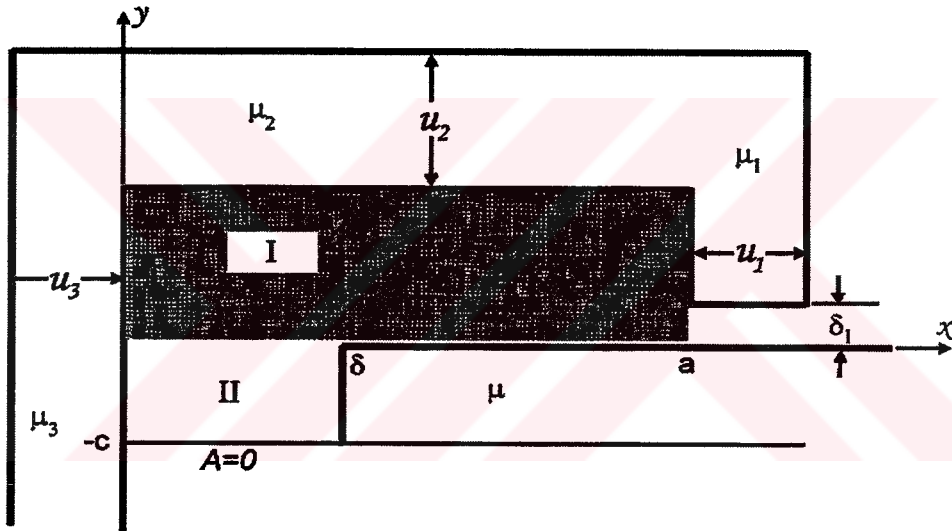
I ve II bölgelerine ait magnetik alan çözümü ile bobinin endüktansını hesaplamak mümkün olacaktır. I bobine ait sargıların bulunduğu bölgedir. Bu bölge için hesaplanacak magnetik vektör potansiyel ifadesini kullanarak, bobine aktarılan enerjiden yola çıkarak endüktans hesabını yapabiliriz. II bölgesi hava aralığı olarak tanımlanır.  $\delta$ , yukarıda tanımlanan stroke

(kurs boyu) uzunluğudur. I ve II bölgeleri için magnetik alanı tanımlayan diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\nabla \cdot (\nabla A^I) = -J \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot (\nabla A^{II}) = 0 \quad (6.4)$$

Problem bölgesinde  $y$  eksenine göre simetri vardır. Buna göre yarı bölge alınarak ve analitik yöntem için yeni koordinat eksenlerini tanımlarsak, hesaplama bölgesi için şekil 6.6'yı çizebiliriz.



Şekil 6.6 Hesaplama bölgesi.

Tanımlanan bölgeler için aşağıdaki sınır şartları geçerlidir.

$$B_x = \mu_0 H_\delta^* \quad x \in (0, \delta); y = 0 \quad (6.5a)$$

$$B_x = \mu_0 H \quad x \in (\delta, a); y = 0 \quad (6.5b)$$

$$B_x = -\mu_0 H_2 \quad x \in (0, a); y = b \quad (6.5c)$$

$$B_y = \mu_0 H_{\delta_1}^* \quad x = a; y \in (0, \delta_1) \quad (6.6a)$$

$$B_y = \mu_0 H_1 \quad x = a; y \in (\delta_1, b) \quad (6.6b)$$

$$B_y = -\mu_0 H_3 \quad x=0; y \in (0,b) \quad (6.6c)$$

$$B_y = 0 \quad \begin{cases} x \in (0,\delta); y = -c \\ x = 0; y \in (-c,0) \\ x = \delta; y \in (-c,0) \end{cases} \quad (6.6d)$$

$$A''(x,-c) = 0; \quad x \in (0,\delta) \quad (6.7a)$$

$$A'(x,0) = A''(x,0); \quad x \in (0,\delta) \quad (6.7b)$$

Yazılan ifadelerde  $B_x$  ve  $B_y$  magnetik akı yoğunluğu vektörünün bileşenleridir. Belirtilen bölgelerde magnetik vektör potansiyel değerlerini tesbit edebilmek için değişkenlerine ayırma yöntemini kullanacağız (Binns, et.al, 1992).

$\{x \in (0,\delta); y = 0\}$  ve  $\{x = a; y \in (0,\delta_1)\}$  sınırlarında magnetik alanın teğet bileşeninin aşağıdaki şekilde olduğunu kabul edelim.

$$H_\delta^*(x) = H_\delta \cdot \left[ k_1 + \frac{k_2}{\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^\alpha} \right] \quad (6.8a)$$

$$H_{\delta_1}^*(y) = H_{\delta_1} \cdot \left[ k_1 + \frac{k_2}{\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^\alpha} \right] \quad (6.8b)$$

Yazılan son iki ifadedeki  $H_\delta$  ve  $H_{\delta_1}$  hava aralığında ortalama teğet magnetik alan değerleridir.

$$\int_0^\delta H_\delta^*(x) dx = \delta H_\delta; \quad \int_0^{\delta_1} H_{\delta_1}^*(y) dy = \delta_1 H_{\delta_1} \quad (6.9)$$

$$k_1 = 1 - \frac{1}{6\alpha}; \quad k_2 = \frac{1-\alpha}{6\alpha} \quad (6.10)$$

Burada  $\alpha$  ileride tanımlayacağımız  $G(x)$  fonksiyonunun değişiminin minimize edilmesiyle bulunur.  $b/a$  oranının değişik değerleri için  $\alpha$  değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanır (Cividjian G. A., et. al., 1998).

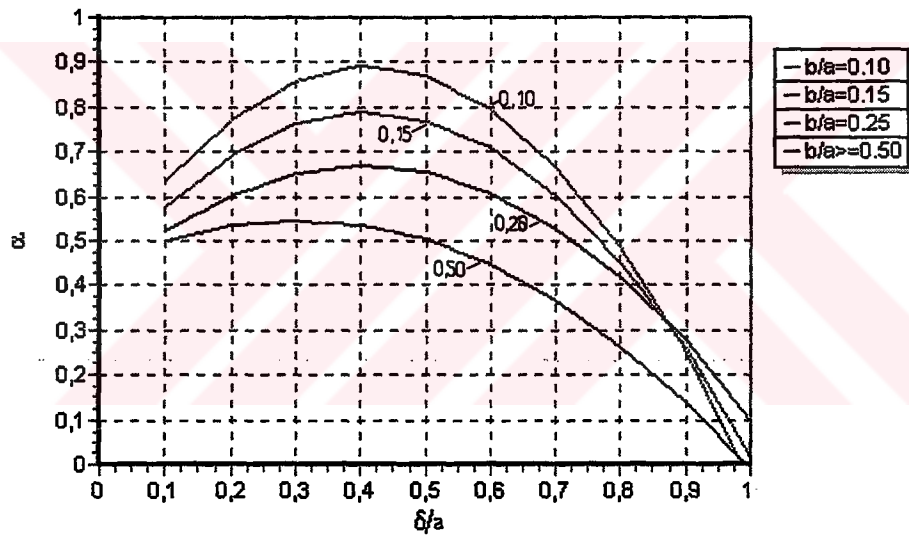
$$b/a = 0.10 \text{ için } \alpha = 0.44 + 2.2(\delta/a) - 2.68(\delta/a)^2$$

$$b/a = 0.15 \text{ için } \alpha = 0.42 + 1.80(\delta/a) - 2.20(\delta/a)^2$$

$$b/a = 0.25 \text{ için } \alpha = 0.41 + 1.29(\delta/a) - 1.60(\delta/a)^2$$

$$b/a \geq 0.50 \text{ için } \alpha = 0.44 + 0.70(\delta/a) - 1.15(\delta/a)^2$$

$\alpha$ 'nın değişimi şekil 6.7'de verilmiştir.



Şekil 6.7  $\alpha$ 'nın  $\delta/a$  ile değişimi.

$b/a$ 'nın belirtilen değerlerinin dışındaki değerleri için lineer enterpolasyon tekniği kullanılabilir. Bunun için Kübik-Spline yöntemi ile eğriler modellenip, ara  $b/a$  değerleri için modelleme yapılabilir. Şimdi Kübik-Spline yönteminin teorisine bakalım ve yöntemle ait basit bir algoritma verelim.

#### 6.2.1.1 Kübik Spline Yöntemi

SEY programlarında son yıllarda tercih edilen bir yöntemdir. ANSYS gibi CAD tabanlı programda da bu yöntem kullanılmaktadır. SEY'in elektromagnetik problemlere



uygulanmaya başlanmasından itibaren kullanılmıştır (Silvester et al, 1973; Forghani et al, 1982; Silvester and Gupta, 1991). Anizotropik malzeme karakteristiklerinin de belli açılar değerlerinde elde edilen B-H eğrileri, yine bu yöntemle modellenerek, ara açı değerleri için lineer enterpolasyon yöntemi uygulanmıştır (Shirkoochi and Liu, 1994).

Belli bir aralıkta tanımlı bir eğrinin fonksiyonunun oluşturulması ve bu aralıkta istenilen yerde fonksiyonun değerinin bulunması işlemi eğri modelleme olarak tanımlanabilir. Eğri modellemesi, uygun bir yöntemle polinomların oluşturulması ile yapılmaktadır. Enterpolasyon fonksiyonlarını elde etmek için eğrinin tanımlı olduğu aralık, alt aralıklara bölünür ve her bir alt aralıkta farklı yaklaşım polinomları oluşturulur. Bu tip yaklaşım fonksiyonlarına *parçalı yaklaşım polinomu* denir. Parçalı yaklaşım polinomlarının en basit tipi, düzenli çizgilerin bir serisi olarak  $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots (x_n, f(x_n))\}$  şeklinde veri noktaları oluşturularak birleşimini içerir ve parçalı lineer enterpolasyon olarak adlandırılır. Bu yaklaşımın dezavantajı; bu tip fonksiyon kullanılan yaklaşım problemlerinde her alt aralığın uç noktalarıdır çünkü buralarda türev işlemlerine güvenilmez. Yani bu noktalarda bir süreksizlik ile karşılaşılabilir. Geometrik olarak bu noktalarda enterpolasyon fonksiyonunun ortalaması düzgün değildir. Dolayısıyla bu noktalarda yaklaşım fonksiyonu sürekli türetilabilir olmalıdır. Parçalı yaklaşım yöntemlerinden birisi Hermite tip yaklaşımdır. Bu yöntemde,  $f$  ve  $f'$ 'nin,  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  noktalarının her birinde değerleri biliniyorsa,  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ , ...,  $[x_{n-1}, x_n]$  gibi bütün alt aralıklarda üçüncü dereceden bir Hermite polinomu kullanılabilir. Bu durumda  $[x_0, x_n]$  aralığında türetilabilir bir fonksiyon elde edilir. Hermite kübik polinomları, uzayda hareket eden partiküllerin uygulama problemlerinde yaygın olarak kullanılır (Schultz, 1966). Hermite parçalı polinomlarının kullanımında karşımıza çıkan zorluk, yaklaşım yapılacak fonksiyonun türevlerine ihtiyaç duyulmasıdır. Genelde fonksiyonun belli noktalardaki değerleri bilinir fakat türevleri bilinmez. Kübik spline yöntemi fonksiyonun türevine ihtiyaç duymaz. Bu yüzden kübik polinom yaklaşım fonksiyonu kullanan yöntemlerin içinde en kullanışlı olanıdır (De Boor, 1978).

$[x_0, x_n]$  aralığında türetilabilir parçalı polinom fonksiyonunun en basit tipi, sıralı düğüm çiftlerinin her biri arasında ikinci dereceden bir polinom kurulması ile elde edilen fonksiyondur. Bu da,  $x_0$  ve  $x_1$ 'de fonksiyona uygun  $[x_0, x_1]$  üzerinde ikinci dereceden yapılanma ile elde edilir, daha sonra  $x_1$  ve  $x_2$ 'de fonksiyona uygun  $[x_1, x_2]$  üzerinde ikinci dereceden yapılanma ile elde edilir ve böylece işlem devam eder. İkinci dereceden polinomun üç keyfi sabiti vardır. Seçilen ikinci derece yaklaşımın fleksibilitesinin olması ve

ayrıca enterpolasyonun  $[x_0, x_n]$  aralığında sürekli türevinin bulunması gereklidir. Parçalı polinomlar kullanılarak yapılan bu yaklaşımda fonksiyonun uydurulduğu aralıkların son noktaları hariç türev bilgisi gerekmemektedir. Bu yöntemdeki zorluk,  $x_0, x_n$  uç noktalarında fonksiyonun ve enterpolasyonun türevlerinin uyuşmasının sağlanmasıdır. Bu durumda, şartların yerine gelmesi için yeterli sayıda sabitlerin olamayacağı ortaya çıkar. Sıralı nokta çiftleri arasında kübik polinomlar kullanılarak yapılan parçalı polinom yaklaşıma *kübik spline enterpolasyonu* denir. Kübik polinom dört keyfi sabit içerir. Yeterli fleksibilite bu yöntemde vardır, öyle ki; herhangi bir aralıkta birinci sürekli türevlerin yanısıra ikinci sürekli türevler de bulunabilir.

$[a, b]$  aralığında tanımlanmış bir  $f$  fonksiyonu ve  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  şeklinde düğümler verilmiş olsun.  $f$  için,  $S$  kübik spline enterpolasyonu aşağıdaki koşulları sağlar.

a)  $S_j$  olarak gösterilen bir  $S$  kübik polinomu  $[x_j, x_{j+1}]$  aralığını tanımlar.

Burada  $j = 0, 1, \dots, n-1$  'dir.

b)  $S(x_j) = f(x_j)$  ve  $j = 0, 1, \dots, n$ ;

c)  $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$  ve  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ;

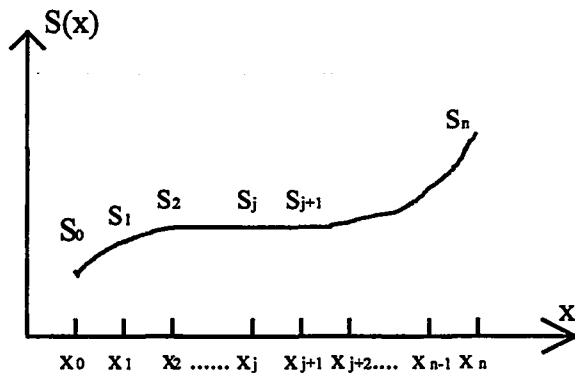
d)  $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$  ve  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ;

e)  $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$  ve  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ;

f) Sınır şartlarının oluşturulması aşağıdaki durumlardan biri ile gerçekleşir.

-  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$  (serbest sınır)

-  $S'(x_0) = f'(x_0)$  ve  $S'(x_n) = f'(x_n)$  (sıçramalı sınır)



Şekil 6.8  $[x_0, x_n]$  aralığında tanımlı eğri ve alt bölgeleri.

Serbest sınır şartları sağlandığında spline, *doğal spline* olarak adlandırılır ve onun grafiğine,  $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$  veri noktalarının herbirine doğru yönlendirilirse uzun fleksibl çubuk şeklinde yaklaşır.

Verilen  $f$  fonksiyonu için kübik spline enterpolasyonunu yapılandırırken, yukarıda sıralanan koşullar kübik polinoma uygulanabilir.

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad (6.11)$$

burada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Açık olarak ifade edilirse  $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$  olur ve (c) koşulu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) \\ &= a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 \end{aligned} \quad (6.12)$$

burada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Burada  $(x_{j+1} - x_j)$ , ortak ifade olup denklemlerde sıkça kullanılacağından daha basit gösterimle

$$h_j = x_{j+1} - x_j \quad (6.13)$$

burada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . (6.12) ifadesinde (6.13) yerine yazıldığında

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad (6.14)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde,  $b_n = S'(x_n)$  olarak bulunur. Koşul (d) uygulanarak;

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad (6.15)$$

ve  $S_j$  nin katsayıları arasındaki diğer bağıntıdan  $c_n = S''(x_n)/2$  olarak elde edilebilir ve koşul (e) uygulandığında

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \quad (6.16)$$

elde edilir. Eşitlik (6.16) dan  $d_j$  çözülür, bu değer Eşitlik (6.14) ve (6.15) de yerine yazılırsa, elde edilen yeni eşitlikler

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3} (2c_j + c_{j+1}) \quad (6.17)$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j (c_j + c_{j+1}) \quad (6.18)$$

olarak elde edilir. Eşitlik (6.17) den  $b_j$  ifadesi

$$b_j = \frac{1}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3} (2c_j + c_{j+1}) \quad (6.19)$$

elde edilir ve  $b_{j-1}$  için düzenlenerek,

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}} (a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3} (2c_{j-1} + c_j) \quad (6.20)$$

olur. Benzer şekilde Eşitlik (6.18) den  $b_j$  çekilir ve  $b_{j-1}$  için düzenlenerek elde edilen denklem ile (6.19) eşitlenirse

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \quad (6.21)$$

lineer sistem eşitliği elde edilir. Bu sistem  $Ax=b$  vektör eşitliği ile gösterilirse;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

olur.

#### 6.2.1.2 Kübik-Spline Algoritması

Kübik spline yöntemi için uygun bir algoritma aşağıdaki gibi verilebilir (Burden and Faires, 1985):

INPUT  $n$ :  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ;  $a_i$  for  $i=0, 1, \dots, n$ .

OUTPUT  $a_j, b_j, c_j, d_j$  for  $j=0, 1, \dots, n-1$ .

Adım 1 For  $i=0, 1, \dots, n-1$  set  $h_i = x_{i+1} - x_i$

Adım 2 For  $i=1, 2, \dots, n-1$

$$\text{set } \alpha_i = \frac{3[a_{i+1}h_{i-1} - a_i(x_{i+1} - x_{i-1}) + a_{i-1}h_i]}{h_{i-1}h_i}$$

Adım 3 Set  $l_0=1$

$$m_0=0$$

$$z_0=0$$

Adım 4 For  $i=1,2,\dots,n-1$

Set  $l_i=2(x_{i+1}-x_{i-1})-h_{i-1}m_{i-1}$ ;

$$m_i=h_i/l_i;$$

$$z_i=(a_i-h_{i-1}z_{i-1})/l_i.$$

Adım 5 Set  $l_n=1$ ;

$$z_n=0;$$

$$c_n=0.$$

Adım 6 For  $j=n-1,n-2,\dots,0$

Set  $c_j=z_j-m_jc_{j+1}$ ;

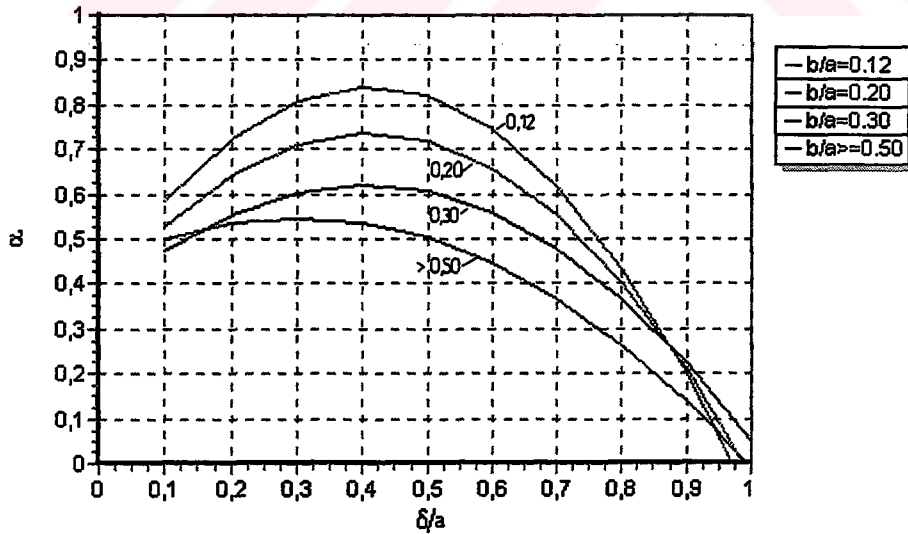
$$b_j=(a_{j+1}-a_j)/h_j-h_j(c_{j+1}+2c_j)/3;$$

$$d_j=(c_{j+1}-c_j)/(3h_j).$$

Adım 7 OUTPUT ( $a_j, b_j, c_j, d_j$  for  $j=0,1,\dots,n-1$ .)

STOP.

Kübik-Spline yöntemi ile eğrilerin modellenmesi sonucunda  $b/a=0.12, 0.20, 0.30$  değerlerine karşılık gelen  $\alpha$  değişimleri şekil 6.9'da gösterilmiştir.



Şekil 6.9 Kübik-Spline yöntemi ile modelleme sonucunda elde edilen  $\alpha$  eğrileri.

### 6.2.2 Amper Kanununun Magnetik Devreye Uygulanması ve Alan Hesabı

Şekil 6.6'daki devreye Amper kanununun uygulanması sonucunda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\delta H_\delta + (a - \delta)H + \delta_1 H_{\delta_1} + (b - \delta_1)H_1 + aH_2 + bH_3 = NI \quad (6.22)$$

$N$  bobin sarım sayısıdır. Sınırlar üzerinde permeans eşitliği, kaçak akılar ihmal ederek yazılırsa (Cividjian, G. A., et. al., 2000):

$$cH_\delta = \mu_r cH = u_1 H_{\delta_1} = \mu_{r1} u_1 H_1 = \mu_{r2} u_2 H_2 = \mu_{r3} u_3 H_3 \quad (6.23)$$

eşitlikleri elde edilir. İfadelerde  $\mu_{ri}$  değerleri ilgili kısımların bağıl magnetik geçirgenlikleridir Problem bölgesi için eşdeğer hava aralığı tanımlarsak, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\delta_e = \delta + \frac{a - \delta}{\mu_r} + \delta_1 \frac{c}{u_1} + \frac{c}{u_1} \frac{b - \delta_1}{\mu_{r1}} + \frac{c}{u_2} \frac{a}{\mu_{r2}} + \frac{c}{u_3} \frac{b}{\mu_{r3}} \quad (6.24)$$

(6.22) ve (6.23) eşitliklerinden, bölgelerde tanımladığımız magnetik alan şiddetleri için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} H_\delta &= \frac{NI}{\delta_e} \\ H_{\delta_1} &= \frac{NI}{\delta_e} \frac{c}{u_1} \\ H &= \frac{NI}{\mu_r \delta_e} \\ H_i &= \frac{NI}{\delta_e} \frac{c}{\mu_{ri} u_i} \quad i = 1 \dots 3 \end{aligned} \quad (6.25)$$

(6.3) diferansiyel denkleminin çözümünün iki bileşenin toplamına eşit olacağını

söyleyebiliriz: homojen olmayan denklemin özel çözümü ve homojen denklemin genel çözümü:

$$A^I = A_1^I + A_2^I \quad (6.26)$$

Birinci bileşen için sınır şartları sabit olacaktır ve her kısmın sınırındaki magnetik alanın ortalama değerine eşit olacaktır. Birinci bileşenin bir polinom olacağını varsayarsak, aşağıdaki gibi bir ifadeye eşit olabileceği düşünülebilir:

$$A_1^I(x, y) = \mu_0 NI \left[ \frac{a_1 x + b_1 y}{\delta_e} - \frac{a_2 x^2 + b_2 y^2}{2ab} + \frac{c}{\delta_e} + G \right] \quad (6.27)$$

Yazılan bu çözüm hem (6.3) diferansiyel denklemini hem de aşağıdaki sınır şartlarını sağlamalıdır.

$$\begin{aligned} \mu_0 H_{1x} &= \frac{\partial A_1^I}{\partial y}; & \mu_0 H_{1y} &= \frac{\partial A_1^I}{\partial x} \\ H_{1x}(x, b) &= -H_2; & H_{1y}(0, y) &= -H_3 \\ aH_{1x}(x, 0) &= \delta H_\delta + (a - \delta)H \\ bH_{1y}(a, y) &= \delta_1 H_{\delta_1} + (b - \delta_1)H_1 \end{aligned} \quad (6.28)$$

Bu sınır şartlarından (6.27)'de tanımlanan katsayılar elde edilir.

$$a_1 = \frac{c}{\mu_{r3} u_3}; \quad a_2 = \frac{1}{\delta_e} \left[ \frac{c}{u_1} \left( \delta_1 + \frac{b - \delta_1}{\mu_{r1}} \right) + \frac{b}{\mu_{r3}} \frac{c}{u_3} \right] \quad (6.29)$$

$$b_1 = \frac{1}{a} \left( \delta + \frac{a - \delta}{\mu_r} \right); \quad b_2 = \frac{1}{\delta_e} \left[ \delta + \frac{a - \delta}{\mu_r} + \frac{a}{\mu_{r2}} \frac{c}{u_2} \right] \quad (6.30)$$

Magnetik vektör potansiyel  $A^I$ 'in ikinci bileşeni aşağıdaki şartları sağlamalıdır:



$$\mu_0 H_{2x}(x, b) = \frac{\partial A_2^I}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (6.31)$$

$$\mu_0 H_{2y}(0, y) = -\frac{\partial A_2^I}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (6.32)$$

Değişkenlerine ayırma yöntemine göre ikinci bileşen aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$A_2^I(x, y) = \mu_0 NI \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_k \frac{ch[\lambda_1(b-y)]}{ch(\lambda_1 b)} \cos(\lambda_1 x) + d_k \frac{ch(\lambda_2 x)}{ch(\lambda_2 a)} \cos(\lambda_2 y) \right] \right\} \quad (6.33)$$

burada  $sh$ ,  $ch$  ve  $th$  hiperbolik fonksiyonlardır ve  $\lambda_i$ 'ler aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\lambda_1 a = \lambda_2 b = \nu \delta = k\pi \quad (6.34)$$

$c_k$  ve  $d_k$  katsayıları ise,  $y=0$  ve  $x=a$  için elde edilen şartlardan tesbit edilir. Sonuç olarak I bölgesindeki magnetik vektör potansiyel ifadesi aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$A^I(x, y) = \mu_0 NI \left\{ \left[ \frac{a_1 x + b_1 y}{\delta e} - \frac{a_2 x^2 + b_2 y^2}{2ab} + \frac{c}{\delta_e} + G \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_k \frac{ch[\lambda_1(b-y)]}{ch(\lambda_1 b)} \cos(\lambda_1 x) + d_k \frac{ch(\lambda_2 x)}{ch(\lambda_2 a)} \cos(\lambda_2 y) \right] \right\} \quad (6.35)$$

Aynı bölgede akı yoğunlukları ise:

$$B_x^I = \frac{\partial A^I}{\partial y} = \mu_0 NI \left\{ \frac{b_1}{\delta e} - \frac{b_2}{a} \frac{y}{b} - \sum \left[ \lambda_1 c_k \frac{sh[\lambda_1(b-y)]}{ch(\lambda_1 b)} \cdot \cos(\lambda_1 x) + \lambda_2 d_k \frac{ch(\lambda_2 x)}{ch(\lambda_2 a)} \sin(\lambda_2 y) \right] \right\} \quad (6.36)$$

$$B_y' = -\frac{\partial A'}{\partial x} = \left\{ -\frac{a_1}{\delta_e} + \frac{a_2}{a} \frac{x}{b} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda_1 c_k \frac{ch[\lambda_1(b-y)]}{ch(\lambda_1 b)} \cdot \sin(\lambda_1 x) - \lambda_2 d_k \frac{sh(\lambda_2 x)}{ch(\lambda_2 a)} \cos(\lambda_2 y) \right] \right\} \quad (6.37)$$

olarak elde edilir.  $y=0$  için (6.5a) ve (6.5b)'de tanımlana sınır şartlarına göre magnetik alanın teğet bileşeni aşağıdaki şekilde olmalıdır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} B_x'(x,0) &= NI \left[ \frac{b_1}{\delta_e} - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1 c_k th(\lambda_1 b) \cos(\lambda_1 x) \right] \\ &= \begin{cases} H_\delta \left[ k_1 + \frac{k_2}{\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^\alpha} \right]; & x < \delta \\ H_\delta / \mu_r; & x > \delta \end{cases} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Yazılan son ifadeyi  $\cos(\lambda_1 x)$  ile çarpıp 0-a aralığında integre edersek  $c_k$  katsayısını elde ederiz:

$$c_k = \frac{-2}{k\pi th(\lambda_1 b)} \left[ \left( k_1 - \frac{1}{\mu_r} \right) \frac{\sin(\lambda_1 \delta)}{\lambda_1 \delta_e} + k_2 \frac{\delta}{\delta_e} F(\alpha, \lambda_1 \delta) \right] \quad (6.39)$$

$F$  fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır (Cividjian, G. A., et. al, 1998):

$$F(\alpha, z) = \int_0^1 \frac{\cos[z(1-t)]}{t^\alpha} dt \quad (6.40)$$

Verilen integral sayısal yöntemlerle hesaplanabilir. (6.6a) ve (6.6b) şartlarına göre,  $x=a$  için magnetik alanın teğet bileşeni aşağıdaki şekilde olmalıdır:

$$\frac{1}{\mu_0} B_y'(a, y) = NI \left[ -\frac{a_1}{\delta_e} + \frac{a_2}{b} - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_2 d_k \operatorname{th}(\lambda_2 a) \cos(\lambda_2 y) \right] \quad (6.41)$$

$$= \begin{cases} \frac{H_{\delta_1}}{\mu_{r1}}; & x > \delta_1 \\ H\delta_1 \left[ k_1 + \frac{k_2}{\left(1 - \frac{x}{\delta_1}\right)^\alpha} \right]; & x < \delta_1 \end{cases}$$

(6.41) ifadesini de  $\cos(\lambda_2 y)$  ile çarpıp 0-b aralığında integre edersek,  $d_k$  katsayısını elde ederiz:

$$d_k = \frac{-2}{k\pi \operatorname{th}(\lambda_2 a)} \frac{c}{u_1} \left[ \left( k_1 - \frac{1}{\mu_{r1}} \right) \frac{\sin(\lambda_2 \delta_1)}{\lambda_2 \delta_e} + k_2 \frac{\delta_1}{\delta_e} F(\alpha, \lambda_2 \delta_1) \right] \quad (6.42)$$

II bölgesinde magnetik vektör potansiyel (6.4) diferansiyel denklemini ve (6.6d) ile (6.7) şartlarını sağlamalıdır. Bu bölgedeki vektör potansiyel ifadesi,  $v\delta = k\pi$  olmak üzere, aşağıdaki şekilde yazılır:

$$A''(x, y) = \mu_0 NI \left[ \frac{y+c}{\delta_e} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\operatorname{sh}[v(y+c)]}{\operatorname{ch}(vc)} \cos(vx) \right] \quad (6.43)$$

Bu bölgedeki magnetik akı yoğunluğunun bileşenleri de aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$B_x'' = \mu_0 NI \left[ \frac{1}{\delta_e} + \sum_{k=1}^{\infty} v b_k \frac{\operatorname{ch}[v(y+c)]}{\operatorname{ch}(vc)} \cos(vx) \right] \quad (6.44)$$

$$B_y'' = \mu_0 NI \left[ \sum_{k=1}^{\infty} v b_k \frac{\operatorname{ch}[v(y+c)]}{\operatorname{ch}(vc)} \sin(vx) \right] \quad (6.45)$$

$c_k$  katsayısını elde etmek için benzer şekilde (6.5) şartlarından faydalanarak, magnetik alanın teğet bileşenini yazmalıyız.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} B_x''(x,0) &= NI \left[ \frac{1}{\delta_e} + \sum_{k=1}^{\infty} v b_k \cos(vx) \right] \\ &= \frac{NI}{\delta_e} \left[ k_1 + \frac{k_2}{\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^a} \right] \end{aligned} \quad (6.46)$$

İfadeyi  $\cos(vx)$  ile çarpıp  $0-\delta$  aralığında integre edersek,  $b_k$  katsayısını elde ederiz.

$$b_k = \frac{2k_2}{v\delta_e} F(\alpha, k\pi) \quad (6.47)$$

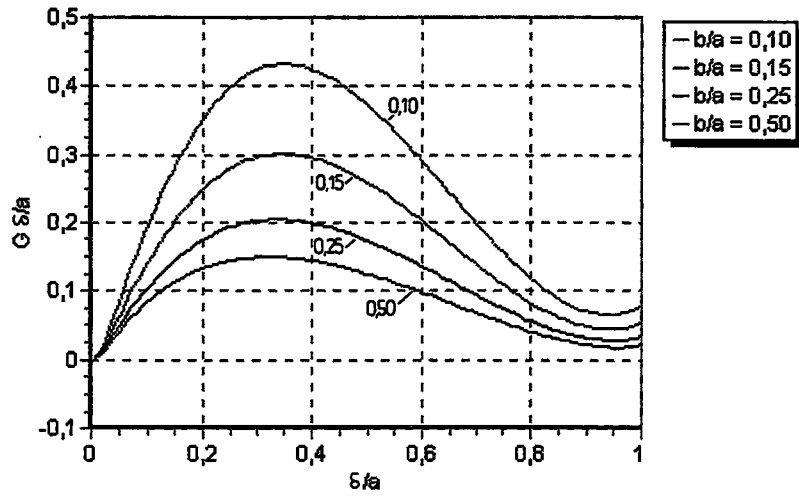
(6.27) ve (6.35) ifadelerindeki  $G$  sabiti, (6.7b) şartına göre aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$G(x) = \frac{a_2 x^2}{2ab} - \frac{a_1 x}{\delta_e} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ b_k \operatorname{th}(vc) \cos(vx) - c_k \cos(\lambda_1 x) - d_k \frac{\operatorname{ch}(\lambda_2 x)}{\operatorname{ch}(\lambda_2 a)} \right] \quad (6.48)$$

Bu ifadeyi  $0-\delta$  aralığında integre edip  $\delta$  ile bölersek,  $G(x)$ 'in ortalama değerini elde ederiz:

$$\frac{G}{\delta} = \frac{a_2 \delta^2}{6ab} - \frac{a_1 \delta}{2\delta_e} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_k \frac{\sin(\lambda_1 \delta)}{\lambda_1 \delta} + d_k \frac{\operatorname{sh}(\lambda_2 \delta)}{\lambda_2 \delta \operatorname{ch}(\lambda_2 a)} \right] \quad (6.49)$$

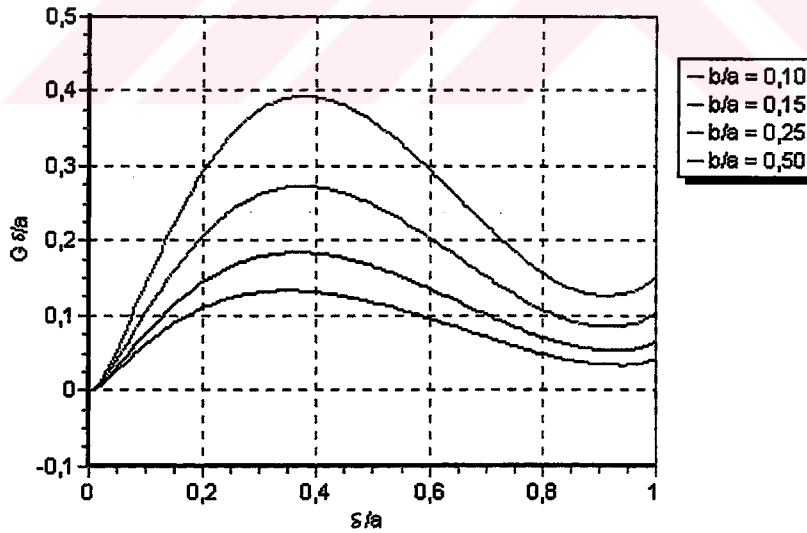
Şekil 6.10'da  $b/a$  parametre olmak üzere,  $\delta/a$ 'nın fonksiyonu olarak,  $c=u_i$  ve  $\mu_i=1000$  ( $i=1..3$ )  $\delta_i/a=0.05$  olmak üzere,  $G\delta/a$ 'nın değişimi görülmektedir.



Şekil 6.10 Bağlı hava aralığının fonksiyonu olarak sabit  $G$  katsayısının değişimi.

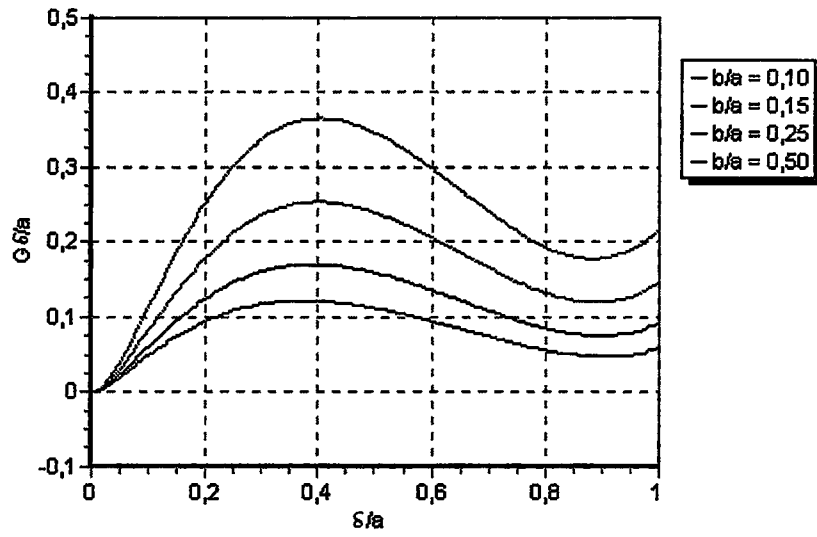
$$\mu_i=1000, c=u_i, \delta_l/a=0.05$$

Şekil 6.11-6.18'de ise değişik boyutlara ve  $\delta_l/a$  oranlarına göre sabit  $G$  değerinin değişimleri görülmektedir.



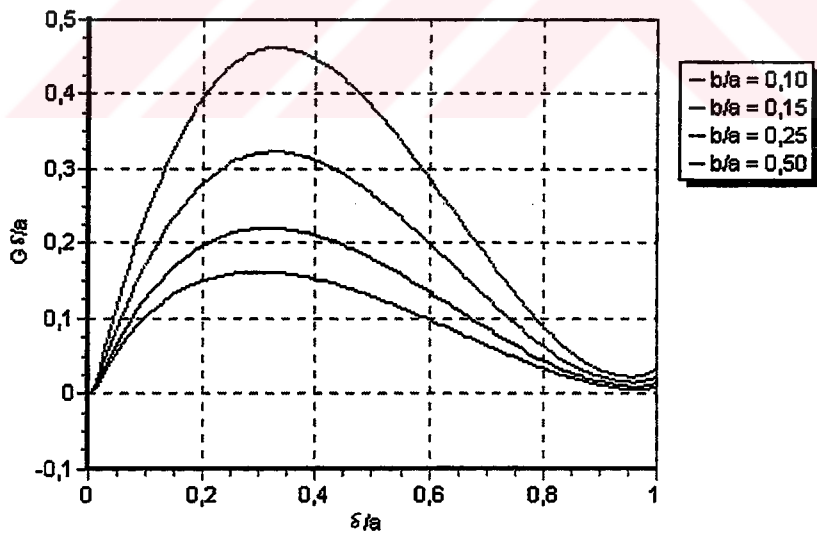
Şekil 6.11 Bağlı hava aralığının fonksiyonu olarak sabit  $G$  katsayısının değişimi.

$$\mu_i=1000, c=2u_i, \delta_l/a=0.05$$



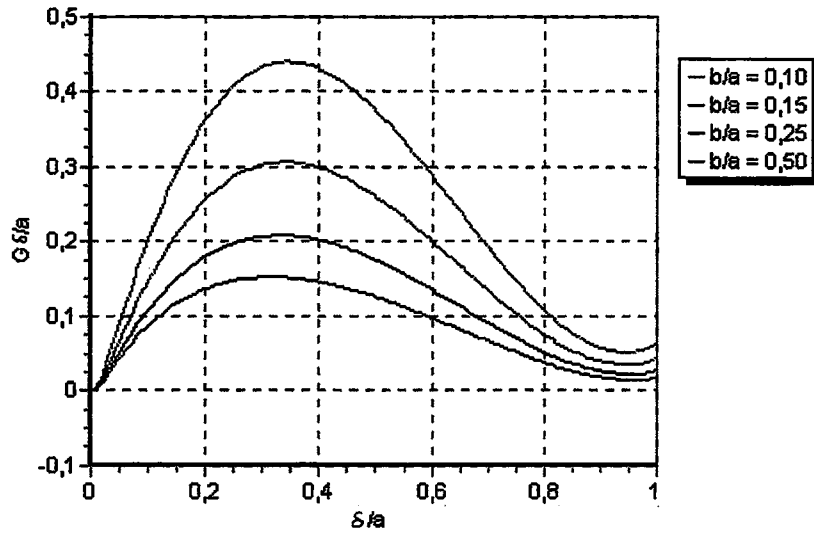
Şekil 6.12 Bağlı hava aralığının fonksiyonu olarak sabit  $G$  katsayısının değişimi.

$$\mu_i=1000, c=3u_i, \delta_l/a=0.05$$



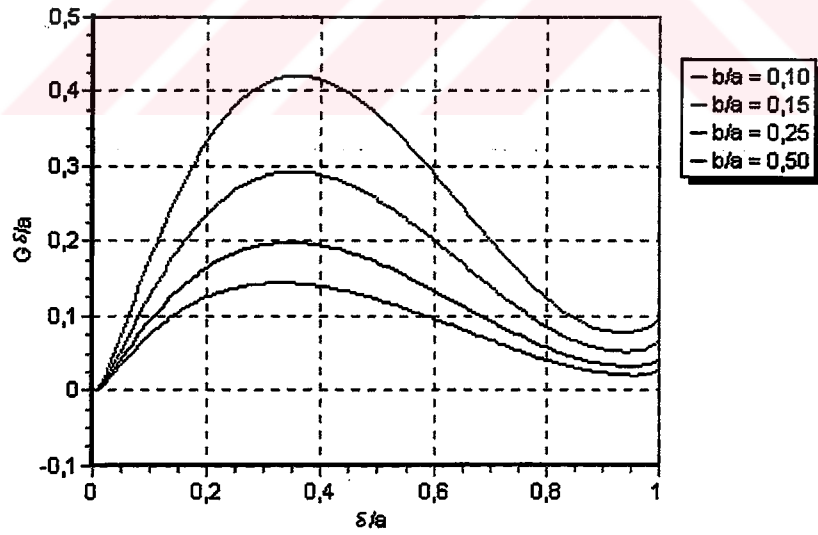
Şekil 6.13 Bağlı hava aralığının fonksiyonu olarak sabit  $G$  katsayısının değişimi.

$$\mu_i=1000, c=u_i, \delta_l/a=0.02$$



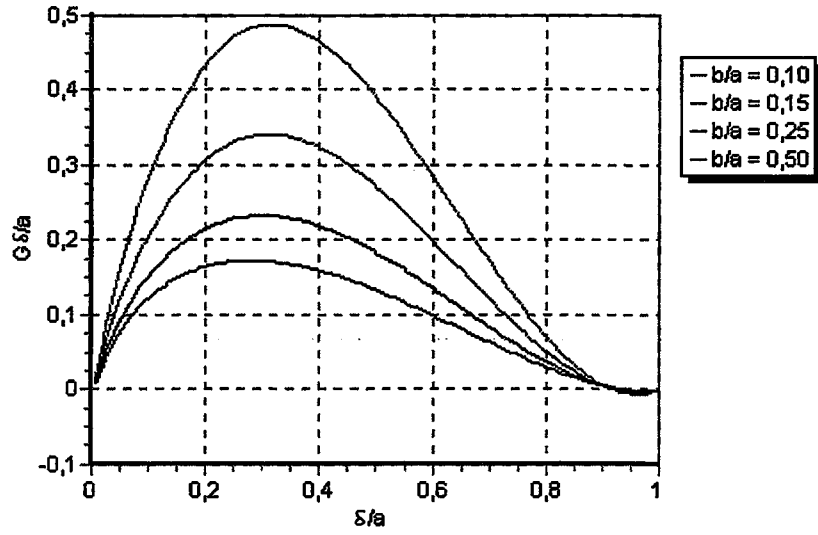
Şekil 6.14 Bağlı hava aralığının fonksiyonu olarak sabit  $G$  katsayısının değişimi.

$$\mu_i=1000, c=2u_b, \delta_l/a=0.02$$



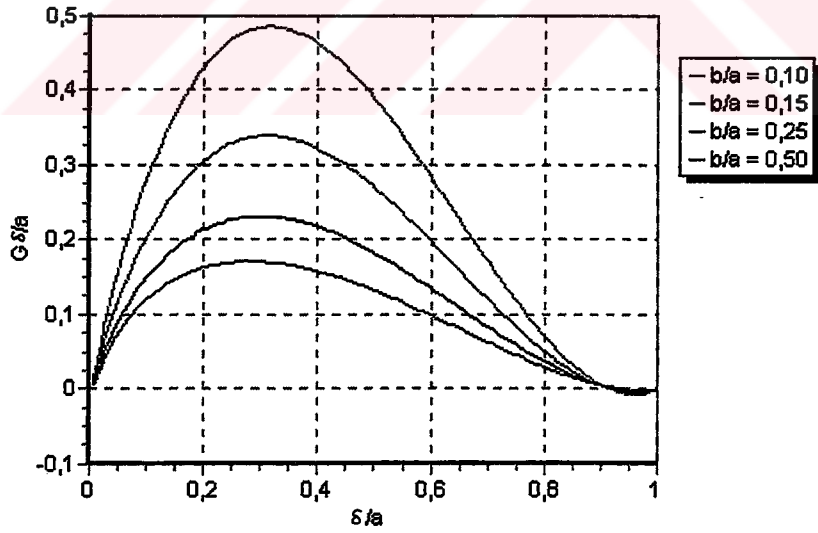
Şekil 6.15 Bağlı hava aralığının fonksiyonu olarak sabit  $G$  katsayısının değişimi.

$$\mu_i=1000, c=3u_b, \delta_l/a=0.02$$



Şekil 6.16 Bağlı hava aralığının fonksiyonu olarak sabit  $G$  katsayısının değişimi.

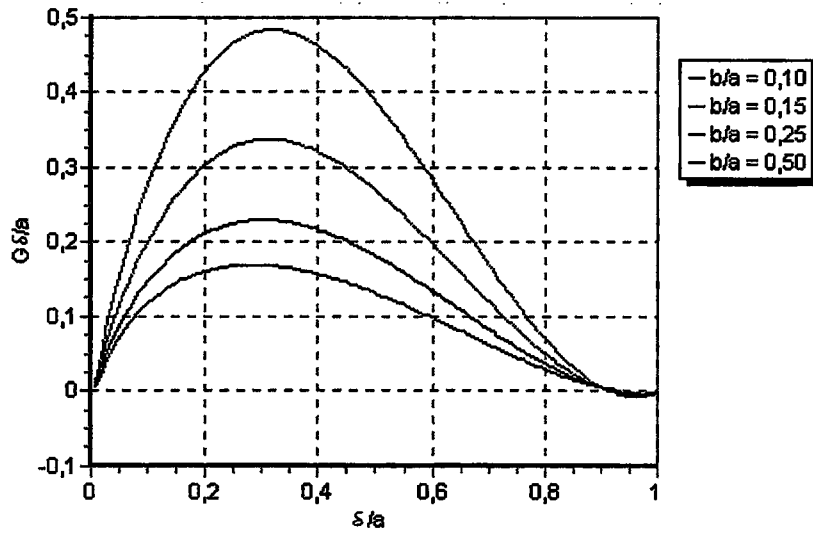
$$\mu_i=1000, c=u_i, \delta_l/a=0$$



Şekil 6.17 Bağlı hava aralığının fonksiyonu olarak sabit  $G$  katsayısının değişimi.

$$\mu_i=1000, c=2u_i, \delta_l/a=0$$





Şekil 6.18 Bağıl hava aralığının fonksiyonu olarak sabit  $G$  katsayısının değişimi.

$$\mu_i=1000, c=3u_i, \delta_1/a=0$$

### 6.3 Elektromagnetin Endüktansı

$S$  yüzeyi ile sınırlanmış bir  $V$  hacminde depolanan magnetik alan enerjisi aşağıdaki ifadeyle hesaplanır (Stratton, 1940).

$$W = \frac{1}{2} \left[ \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \, dv + \oint_S (\mathbf{A}_t \times \mathbf{H}_t) \cdot d\mathbf{s} \right] \quad (6.50)$$

$\mathbf{A}_t$  ve  $\mathbf{H}_t$  magnetik vektör potansiyelin ve magnetik alan şiddetinin  $S$  yüzeyindeki teğet bileşenleridir. Bobinde depo edilen enerjiyi, (6.35) ifadesini bobin yüzey alanında integre ederek bulabiliriz.

$$W = \frac{1}{2ab} \int_0^a \int_0^b A'(x,y) \, dx dy \quad [J/m] \quad (6.51)$$

$$W = \frac{\mu_0 (NI)^2}{2} \left[ G + \frac{c}{\delta_e} + \frac{a_1 a + b_1 b}{2\delta_e} - \frac{a_2 a^2 + b_2 b^2}{6ab} \right] \quad (6.52)$$

Bobinin sargı sonlarını dikkate almadan, simetrik durumu da göz önüne alarak, bobinin endüktansı [H/m] olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$L = 2\mu_0 N^2 \left[ G + \frac{c}{\delta_e} + \frac{a_1 a + b_1 b}{2\delta_e} - \frac{a_2 a^2 + b_2 b^2}{6ab} \right] \quad (6.53)$$

#### 6.4 Sabit G Eğrilerinin Yapay Sinir Ağları ile Modellenmesi

Bu bölümde, analitik yöntemde endüktans hesabı için tanımlanan sabit  $G$  eğrilerinin modellenmesi ve ara değerler için tahmin edilmesi için önerilen Yapay Sinir Ağı (YSA) yaklaşımının model yapısı ve ağ mimarisi açıklanmaktadır. YSA için gerekli olan parametrelerin optimize edilmesi, eğrilerin modellenmesinde seçilen veriler ve gerekli işlemler için yazılan bilgisayar programına ait akış şemaları verilmiştir.

##### 6.4.1 YSA Mimarisi ve Özellikleri

Bu sistemde, üç ana işlem aşaması vardır. Bunlar; verilerin hazırlanması, tahmin işlemleri ve tahmin sonuçlarının değerlendirilmesidir. Bu yapısal aşamalardan olan ilk işlemde, YSA'nın eğitiminde, test edilmesinde ve tahmin işlemlerinde kullanılacak verilerin tümü hazırlanmaktadır. İkinci işlemde ise bu veri yapısına uygun YSA mimarisinin optimize edilmesi, test edilmesi ve tahmin işlemi yapılmasıdır. Üçüncü aşamada ise yapılan tahminlerden elde edilen sonuçların grafiksel sunumu yer almaktadır. Bu adımları aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

##### 1. Verinin Hazırlanması

-Eğitme verisi

-Test verisi

-Tahmin verisi

## 2. Tahmin İşlemleri

-YSA parametrelerinin optimizasyonu

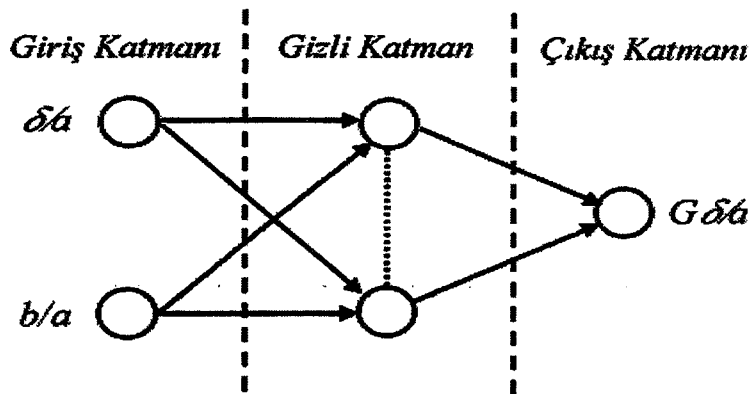
-YSA'nın eğitilmesi

-Tahmin işlemleri

## 3. Değerlendirme işlemleri

-Tahminlerin grafiksel sunumu

Öğrenme işlemi YSA sisteminin en önemli bölümüdür. Bu bölüm, hem YSA algoritmalarının kendi arasında ve hem de YSA ile geleneksel yöntemler arasındaki temel farklılıktır. En temel olarak kullanılan öğrenme kuralı, *Delta Kuralı*dır. Bu yaklaşımın kullanılabilmesi için, öğrenme aşamasında doğru cevapların bilinmesi gerekmektedir. Bu öğrenme biçimine supervised öğrenme kuralı da denilmektedir. Bu kurallar içerisinde en yaygın ve tanınmış olanı geriyayılım (backpropagation) algoritmasıdır. Bu öğrenme algoritması en güvenilir olanlardan birisidir. Bu çalışmada da bu özelliklerinden dolayı bu algoritma uygulanmıştır. Bu yaklaşımın ağ mimarisi Şekil 6.19'da görülmektedir. Sistemin ilk ana kademesi eğitmedir. İleri beslemeli geri yayılım algoritması kullanan sistem, sınırlı sayıda patern çiftleri (değeri bilinen noktaların giriş-çıkış değerleri) ile eğitilir. Gizli katman çıkışları ağırlık değerleri ve giriş değerlerinin çarpılıp kümülatif toplamının sigmoid fonksiyondan geçirilmesi ile elde edilir. Sigmoid fonksiyonu çok değişik dağılımdan gelen değerleri 0-1 arasında değerlendirmektedir. Bunun için giriş değerleri gerekirse YSA' ya beslenmeden önce öğrenmenin etkinliğini arttırmak için 0-1 arasında normalize edilir.



Şekil 6.19 YSA modelleme sisteminin ağ mimarisi.

Geri yayılım algoritması önceden optimize edilerek set edilmiş ağ parametrelerini kullanır ve veri yapısına göre değişmektedir. Bu parametreler; katman sayısı, her katmanda yer alan düğüm sayısı, öğrenme oranı ve momentum parametresidir. Birçok araştırmacı (Scarselli, & Tsoi, 1998; Fujita, 1998; Qian, 1999) bu parametrelerin önceden belirlenerek sisteme uygulanması konusunda değişik yaklaşımlar önermektedir. Bunun yanında deneme yanılma yöntemi, bu çalışmada kullanılan bir yöntem olarak sıkça kullanılan bir yaklaşımdır. Bu yaklaşıma göre bu parametrelerin ayarlanması için birçok eğitme çalışması yapılmıştır. Bu parametrelerden gizli katmanda yer alan düğüm sayısı, öğrenme oranı ve momentum parametresi, öğrenme hızını direkt olarak etkileyen üç ana değişken parametredir. Diğer parametrelerde öğrenme hızını etkilemekte ancak bu parametreler eğitme işlemleri sonuna kadar sabit tutulmaktadır.

Öğrenme parametrelerin optimizasyonu için belirlenen bir toplam hata oranına düşünceye kadar ağ eğitilmekte ve bu hata oranına düştüğü andaki iterasyon sayısı kaydedilmektedir. Bu çalışmada bu hata oranı 0.0001 kabul edilmiştir. Daha sonra her bir değişken öğrenme parametre değeri değiştirilerek aynı hata oranında en küçük iterasyon sayısı belirlenmektedir. Böylece farklı parametre seçenekleri denenerek en küçük iterasyon sayısındaki eğitme parametreleri optimize edilmektedir. Bu çalışmada kullanılan veri için bu yöntemle optimize edilen eğitme parametreleri Çizelge 6.1’de verilmektedir.

Çizelge 6.1 Belirlenen optimum eğitme parametreleri.

| Eğitme parametreleri              | Optimize edilen parametre değerleri |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| Katman sayısı                     | 3                                   |
| Gizli katmandaki düğüm sayısı     | 17                                  |
| Öğrenme oranı ( $\epsilon$ )      | 0.9                                 |
| Momentum katsayısı ( $\alpha$ )   | 0.5                                 |
| Giriş değişkeni sayısı            | 2                                   |
| Çıkış değişkeni sayısı            | 1                                   |
| Eğitme verisindeki pattern sayısı | 68                                  |

Bu çalışmada uygulanan ağ mimarisinde katman sayısı 3 olarak sabit tutulmaktadır. Bunlar giriş katmanı gizli katman ve çıkış katmanlarıdır. Pattern sayısı ise eğitim verisi için 68 olarak alınmıştır. Giriş düğüm sayısı 2 ve çıkış düğüm sayısı ise 1 olarak yine sabit tutulmaktadır. Eğitim verisi Çizelge 6.2’de verilmiştir. Burada giriş değerleri bağıl hava aralığı ( $\delta/a$ ) ile bobin geometri oranı ( $b/a$ )’dır. Çıkış değeri ise sabit  $G$  ( $G\delta/a$ )’dir.

Çizelge 6.2 Eğitim verileri.

| $\delta/a$ | $b/a$ | $G\delta/a$ | $\delta/a$ | $b/a$ | $G\delta/a$ | $\delta/a$ | $b/a$ | $G\delta/a$ |
|------------|-------|-------------|------------|-------|-------------|------------|-------|-------------|
| 0.1        | 0.1   | 0.29        | 0.34       | 0.1   | 0.47        | 0.8        | 0.1   | 0.08        |
| 0.2        | 0.1   | 0.42        | 0.36       | 0.1   | 0.46        | 0.9        | 0.1   | 0.02        |
| 0.22       | 0.1   | 0.43        | 0.38       | 0.1   | 0.455       | 1.0        | 0.1   | 0           |
| 0.24       | 0.1   | 0.44        | 0.4        | 0.1   | 0.45        | 0.1        | 0.15  | 0.2         |
| 0.26       | 0.1   | 0.455       | 0.5        | 0.1   | 0.4         | 0.2        | 0.15  | 0.3         |
| 0.28       | 0.1   | 0.46        | 0.6        | 0.1   | 0.275       | 0.22       | 0.15  | 0.31        |
| 0.32       | 0.1   | 0.48        | 0.7        | 0.1   | 0.15        | 0.24       | 0.15  | 0.32        |
| 0.24       | 0.25  | 0.218       | 0.8        | 0.25  | 0.07        | 0.36       | 0.5   | 0.155       |
| 0.26       | 0.25  | 0.2185      | 0.9        | 0.25  | 0.01        | 0.38       | 0.5   | 0.153       |
| 0.28       | 0.25  | 0.219       | 1.0        | 0.25  | 0           | 0.4        | 0.5   | 0.15        |
| 0.32       | 0.25  | 0.3         | 0.1        | 0.5   | 0.11        | 0.5        | 0.5   | 0.145       |
| 0.34       | 0.25  | 0.219       | 0.2        | 0.5   | 0.15        | 0.6        | 0.5   | 0.13        |
| 0.36       | 0.25  | 0.2185      | 0.22       | 0.5   | 0.153       | 0.7        | 0.5   | 0.09        |
| 0.38       | 0.25  | 0.218       | 0.24       | 0.5   | 0.155       | 0.8        | 0.5   | 0.07        |
| 0.4        | 0.25  | 0.217       | 0.26       | 0.5   | 0.16        | 0.9        | 0.5   | 0.01        |
| 0.5        | 0.25  | 0.215       | 0.28       | 0.5   | 0.16        | 1.0        | 0.5   | 0           |
| 0.6        | 0.25  | 0.175       | 0.32       | 0.5   | 0.16        | 0.36       | 0.5   | 0.155       |
| 0.7        | 0.25  | 0.15        | 0.34       | 0.5   | 0.16        |            |       |             |

Eğitme işlemi yapıldıktan sonra, eğitme işleminin hassasiyetinin ölçülebilmesi için, bilinen veri değerlerinden yaklaşık %10'u seçilerek öğrenme test edilmektedir. Bunun için seçilen test verisi Çizelge 6.3'de görülmektedir.

Çizelge 6.3 Test verileri.

| $\delta/a$ | $b/a$ | $G\delta/a$ |
|------------|-------|-------------|
| 0.1        | 0.1   | 0.29        |
| 0.22       | 0.1   | 0.43        |
| 0.9        | 0.1   | 0.02        |
| 0.28       | 0.15  | 0.327       |
| 0.7        | 0.15  | 0.2         |
| 0.36       | 0.25  | 0.2185      |
| 0.38       | 0.25  | 0.218       |
| 0.1        | 0.5   | 0.11        |
| 0.32       | 0.5   | 0.16        |
| 0.7        | 0.5   | 0.09        |
| 0.8        | 0.5   | 0.07        |

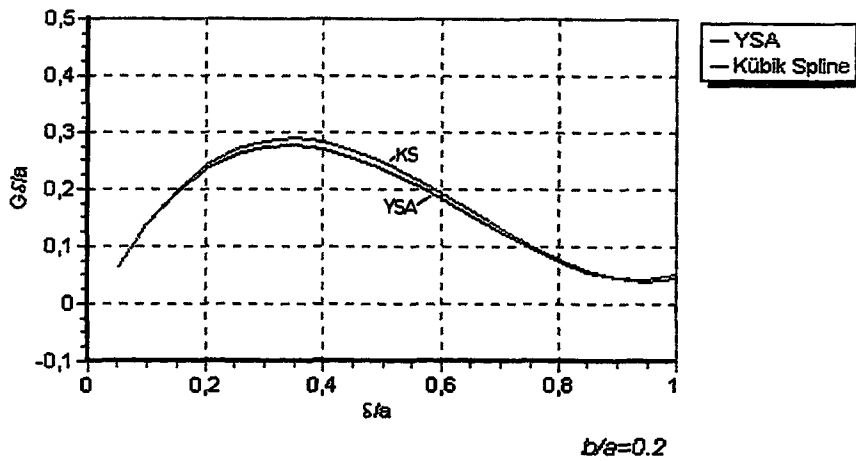
Test işlemi tamamlandıktan sonra değeri bilinmeyen noktalara tahmin yapılmaktadır. Tahmin işleminde kullanılan veri yapısı Çizelge 6.4 'de görülmektedir. Burada sadece bobin geometri oranı ( $b/a$ ) eğitme verisi için seçilmiş değerlerin dışında olan 0.2 değeri seçilmiştir. Öğrenme aşamasında bu veri yapısı için belirlenen ağırlıklar bir dosyada saklanmakta ve tahmin aşamasında bu ağırlıklar kullanılmaktadır.



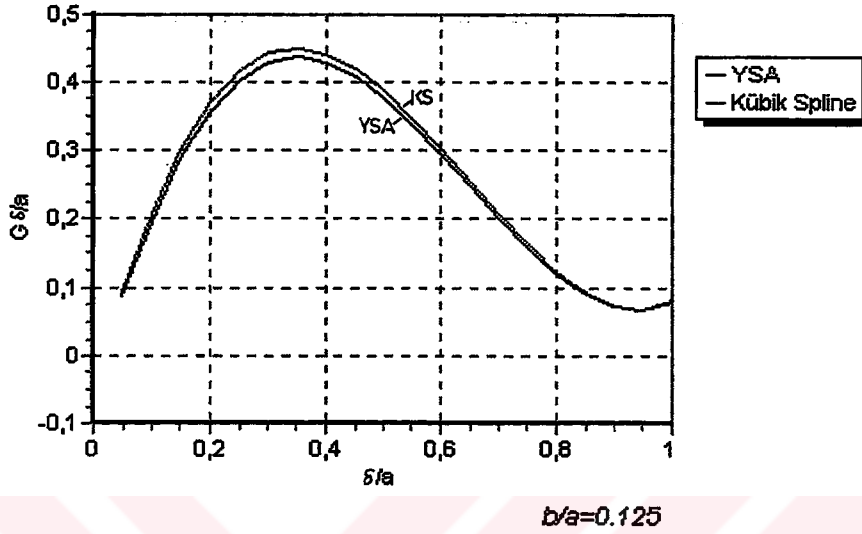
Çizelge 6.4 Tahmin verileri.

| $\delta/a$ | $b/a$ | $\delta/a$ | $b/a$ | $\delta/a$ | $b/a$ | $\delta/a$ | $b/a$ |
|------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|
| 0.1        | 0.2   | 0.14       | 0.2   | 0.18       | 0.2   | 0.24       | 0.2   |
| 0.11       | 0.2   | 0.15       | 0.2   | 0.19       | 0.2   | 0.26       | 0.2   |
| 0.12       | 0.2   | 0.16       | 0.2   | 0.2        | 0.2   | 0.28       | 0.2   |
| 0.13       | 0.2   | 0.17       | 0.2   | 0.22       | 0.2   | 0.32       | 0.2   |
| 0.34       | 0.2   | 0.42       | 0.2   | 0.5        | 0.2   | 0.6        | 0.2   |
| 0.36       | 0.2   | 0.44       | 0.2   | 0.52       | 0.2   | 0.7        | 0.2   |
| 0.38       | 0.2   | 0.46       | 0.2   | 0.56       | 0.2   | 0.8        | 0.2   |
| 0.4        | 0.2   | 0.48       | 0.2   | 0.58       | 0.2   | 0.9        | 0.2   |

Şekil 6.20’de YSA ve Kübik-Spline yöntemleri ile  $b/a=0.2$  için Çizelge 6.4’de verilen tahmin verileri kullanılarak elde edilen eğriler görülmektedir. Şekil 6.21’de ise  $b/a=0.125$  için elde edilen değerler karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Şekil 6.20  $b/a=0.2$  için YSA ve Kübik-Spline yöntemleri ile elde edilen tahmin eğrileri.

Tahmin etmede iki yöntem arasındaki fark, her iki yöntem için de geçerli olmak üzere, alınan tahmin verilerinin sıklık aralığına bağlı olmaktadır. Ancak Şekil 6.20'den görüldüğü üzere, iki yöntem arasındaki fark çok büyük değildir. Kübik-Spline ile modellemede, eğrilerin tek tek



Şekil 6.21  $b/a=0.125$  için YSA ve Kübik-Spline yöntemleri ile elde edilen tahmin eğrileri.

modellenmesi ve ara değerler için, komşu iki eğri arasında lineer bir değişim olduğunu kabul edilmesi gerekmektedir. Ancak YSA ile modellemede, bütün eğriler bir defada modellenmektedir.  $b/a$  parametre değeri, giriş değerlerinden birisi olduğu için de ara değerlerin tahmin edilmesinde tamamen YSA'nın öğrenme yeteneği kullanılmaktadır. Sonuç olarak, YSA ile modelleme, Kübik-Spline veya diğer benzeri yöntemlere göre bu iki avantajı ile öne çıkmaktadır.

#### 6.4.2 Geriyayılım Algoritması

Aşağıda YSA ile modellemede kullanılan geriyayılım algoritması verilmiştir.

*Adım 0. Ağırlıklara ilk değerleri ata:* Küçük rasgele değerler.

*Adım 1. Sabitleri ata:*  $\epsilon$ ,  $\alpha$ , gizli katman düğüm sayısı.

*Adım 2. Giriş-Çıkış değerlerini gir:* Giriş vektörü  $u^k$ , istenen çıkış vektörü  $y^k$ .

*Adım 3. İlerleme aşaması:* İlk gizli katmandan başlayarak, çıkış katmanına kadar:

*3.1 Giriş değerleri ile ağırlıkların çarpımlarının toplamını al:*  $L$  katmanındaki bir



düğüm için

3.1.1  $L-1$  giriş katmanı ise:

$$a_{h_L}^k = \sum_{j=1}^N w_{jh_L} u_{j_k}^k$$

3.1.2 eğer  $L-1$  gizli katman ise:

$$a_{h_L}^k = \sum_{j_{L-1}=1}^{N_{L-1}} w_{j_{L-1}h_L} u_{j_{L-1}}^k$$

3.2  $L$  katmanındaki düğümler için çıkış değerlerini hesapla:

$$x_{h_L}^k = f_L(a_{h_L}^k)$$

Adım 4. Çıkış Hataları: Çıkış katmanındaki hata değerlerini bul:

$$\delta_i^k = (y_i^k - x_i^k) f'_0(a_i^k)$$

Adım 5. Geri yayılım aşaması: Hata giriş katmanına doğru ilerletilirken her bir  $L$  katmanındaki hatayı aşağıdaki şekilde hesapla:

$$\delta_k(\alpha_L) = f'_L[a_k(i_L)] \sum_{i_{L+1}=1}^{N_{L+1}} \delta_k(i_{L+1}) w(\alpha_L, i_{L+1})$$

Adım 6. Ağırlıkları ayarla:

$$w_{j_{L-1}, \alpha_L}(t+1) = w_{j_{L-1}, \alpha_L}(t) + \epsilon \delta_{\alpha_L}^k y_{j_{L-1}}$$

Adım 7. Tekrar: 1-6 adımlarını toplam hata:

$$\langle e^k \rangle = \langle \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (y_i^k - x_i^k) \rangle$$

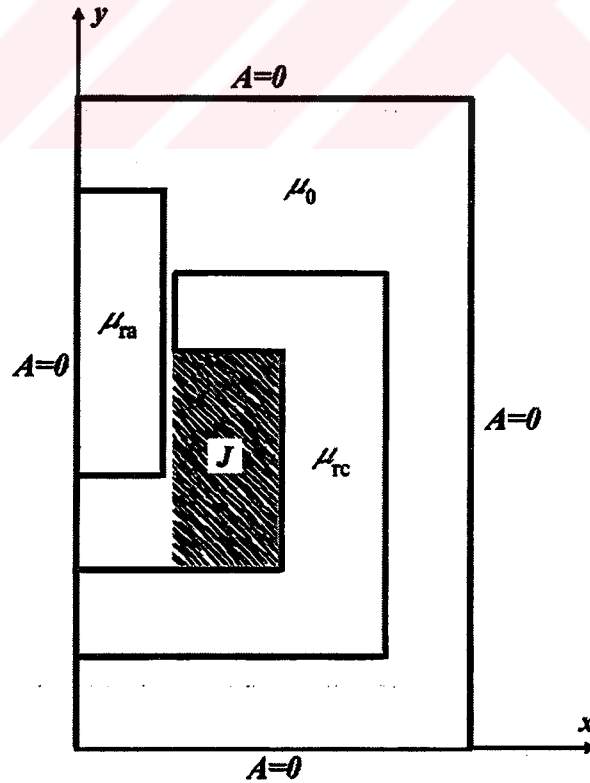
belirlenen tolerans dahilinde olana dek tekrarla.

## 7. ELEKTROMAGNETİN ENDÜKTANSININ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE HESABI

Bu bölümde, elektromagnetin sonlu elemanlar yöntemi ile analizi yapılarak, bobin endüktansı hesaplanmıştır. Hesaplamalarda Bölüm 5’de verilen ağ inceltme yöntemi kullanılmış ve Bölüm 6’da analitik yolla hesaplanan endüktans değerleri ile karşılaştırılmıştır. Endüktans değerlerinin yanında, hesaplanan magnetik vektör potansiyel değerleri de karşılaştırılmalı olarak verilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi ile armatüre uygulanan kuvvet değerleri de hesaplanarak, elektromagnete ait kuvvet-stroke karakteristikleri de elde edilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminde de problem iki boyutlu olarak incelenmiş dolayısı ile sargı sonları ihmal edilmiştir.

### 7.1 Matematiksel Model

Sonlu elemanlar yönteminde de, Bölüm 5’de analitik yöntem için tanımlanan hesaplama bölgesi (Şekil 5.6) kullanılmıştır. Simetriden dolayı elektromagnetin yarı bölgesinin modellenmesi yeterlidir. Şekil 7.1’de bölgenin tanımlaması ve sınır şartları gösterilmiştir.



Şekil 7.1 Sonlu elemanlar yöntemi için problemin matematiksel tanımı.

Elektromagnet bölgesi yapay sınırla kapatılmış ve sınırlarda magnetik vektör potansiyel değerleri sıfır olarak alınmıştır (Dirichlet sınır şartı). İki boyutlu analiz çözüm için yeterlidir. Üç boyutlu analiz ile iki boyutlu analiz arasındaki fark %1-3 civarındadır. Dolayısı ile bu problemde de iki boyutlu analiz yeterli olmuştur. Şekil 7.1'de gösterilen problem bölgesi tanımlandıktan sonra aşağıdaki işlem aşamaları gerçekleştirilir:

- 1- Bölgenin lineer üçgen elemanlarla ayrıştırılması (kullanılacak başlangıç ağının seçilmesi ve gerekli olan bölgelere ağ inceltme işleminin uygulanması).
- 2- Malzeme tiplerinin ve sınır şartlarının belirlenmesi.
- 3- Bağlantı matrisinin oluşturulması.
- 4- Denklem sisteminin oluşturulması.
- 5- Denklem sisteminin çözülmesi.
- 6- Çıkış dosyasının oluşturulması.

## 7.2 Sonlu Elemanlar Analizi

Bir elektromagnetik cihazın kesit alanındaki akı dağılımı, denklem (2.7)'yi açık olarak yazmak suretiyle aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J \quad (7.1)$$

Burada  $J$  bobindeki akım yoğunluğudur. (7.1) denklemi, akım yoğunluğunun tanımlanması ve sınır şartlarının bilinmesi durumunda çözülebilir. Problemin (2.8) ile verilen varyasyonel analiz temelli fonksiyoneli de aşağıdaki şekilde tekrar yazabiliriz.

$$F = \frac{1}{2} \iint \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 - \iint J A dx dy \quad (7.2)$$

(7.2) ile verilen fonksiyonelin fiziksel manası açıktır. Sağ taraftaki birinci terim

$B^2/2\mu$  olmak üzere magnetik enerji, ikinci terim ise elektriksel enerjiye karşılık gelmektedir. Böylece (7.2) ile tanımlanan fonksiyonele minimizasyon işleminin uygulanması durumunda elektrik ve magnetik enerji arasında denge sağlanmış olur, yani elektrik enerjisi magnetik alanda depo edilen enerjiye dönüşmüş olacaktır. Lineer üçgen elemanlar kullanılması durumunda, bir eleman üzerinde magnetik vektör potansiyel için (1.22) denklemini problemimize uyguladığımızda,

$$A = a_1 + b_1x + c_1y \quad (7.3)$$

ifadesini yazabiliriz.  $a_1, b_1$  ve  $c_1$  sabitleri (1.24a)'da verildiği şekilde hesaplanıp, 1.3.3.1 ayrıtında açıklanan işlemler takip edildiğinde sonuç olarak tanımladığımız problem bölgesinde bir eleman için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{v}{4\Delta^e} \begin{bmatrix} (b_i^2 + c_i^2) & (b_ib_j + c_ic_j) & (b_ib_k + c_ic_k) \\ (b_jb_i + c_jc_i) & (b_j^2 + c_j^2) & (b_jb_k + c_jc_k) \\ (b_kb_i + c_kc_i) & (b_kb_j + c_kc_j) & (b_k^2 + c_k^2) \end{bmatrix} [A^e] = \frac{\Delta^e}{3} J \quad (7.4)$$

Her bir eleman için yazılan bu denklemler kullanılarak, ağdaki elemanlar yine 1.3.3.2 ayrıtında gösterildiği gibi birleştirilme işlemine tabi tutulup, denklem sistemi elde edilerek çözüme gidilir.

### 7.3 Sonlu Elemanlar Yönteminde Endüktans Hesabı

Teorik olarak, bobin endüktansı, Bölüm 5'de analitik çözümde açıklanmaya çalışıldığı üzere, bobinde depolanan enerjinin eşdeğer bir endüktansta depolanan enerjiye eşitlenmesi ile bulunabilir.

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \int J \cdot A \, dv \quad (7.5)$$

İki boyutlu sistem için (7.5) denklemi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$L = \frac{1}{I^2} \iint J \cdot A \, dx dy \quad (7.6)$$

Sonlu elemanlar eşitlikleri kullanılarak (7.6) denklemi,

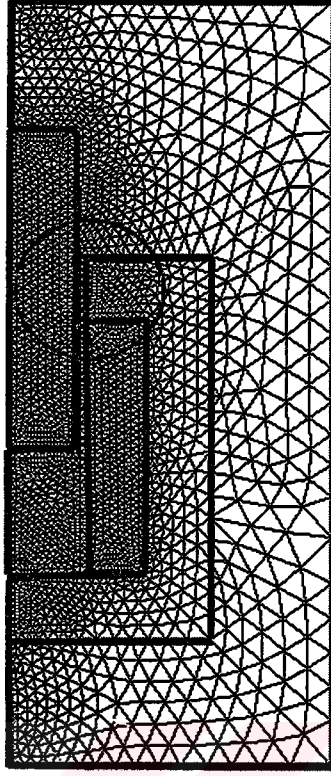
$$L = \frac{1}{I^2} \sum_{e=1}^N \sum_{i=1}^3 A_i \iint \alpha_i \, dx dy \quad (7.7)$$

$$L = \frac{1}{3I^2} \sum_{e=1}^N \Delta^e \sum_{i=1}^3 A_i \quad (7.8)$$

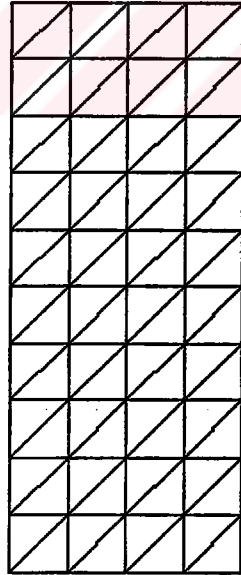
olarak yazılır ve sonlu elemanlar yönteminde endüktans hesabında kullanılacak denklem elde edilir. Burada elemanlar sadece bobini tanımlayan elemanlar olarak seçilecektir.

#### 7.4 Sonlu Elemanlar Analizinde Kullanılan Tipik Bir Ağ Yapısı

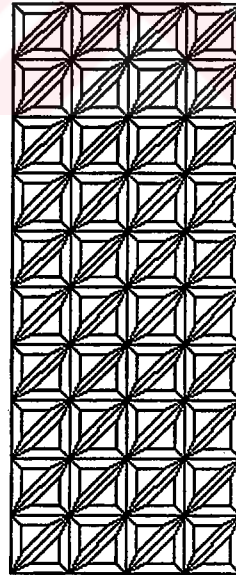
Elektromagnetin farklı boyutları için çözümler elde edilmiştir. Burada sadece tipik bir geometri için seçilen ağ yapısı ve yeni ağ inceltme yöntemi ile hava aralığındaki elemanların alt elemanlara bölünmesine ait örnek verilecektir. Hava aralığı olarak tanımlanan bölge, armatür ile nüve arasında kalan bölgedir ve Şekil 7.2'de bu bölge daire içersine alınarak gösterilmiştir. Bu bölgedeki elemanlar seçilmek suretiyle, Bölüm 5'de açıklanan ağ inceltme yöntemi elemanlara uygulanmıştır. Şekil 7.3'de bu bölgenin ayrıntısı gösterilmiştir. Şekil 7.4'de ise, Şekil 7.2'deki ağ yapısına göre elde edilen çözüm sonucunda elde edilen akı dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 7.2 Sonlu eleman analizinde kullanılan tipik bir ağ yapısı.



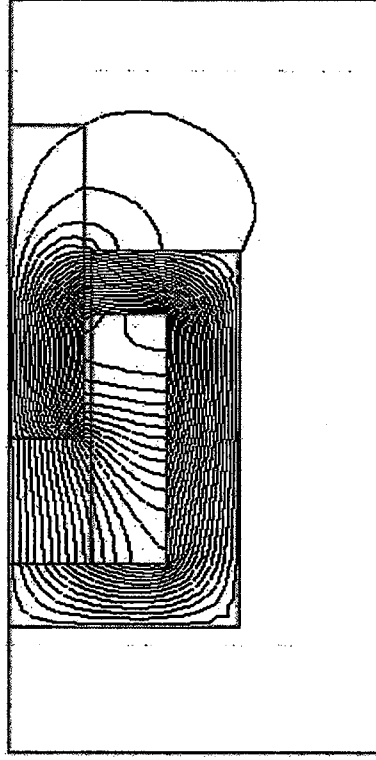
a



b

Şekil 7.3 Hava aralığında yeni yöntem ile ayrıştırılan elemanlar.

a) Orijinal ağ, b) İnceltilmiş Ağ



Şekil 7.4 Akı dağılımı.

## 7.5 Örnek Uygulama

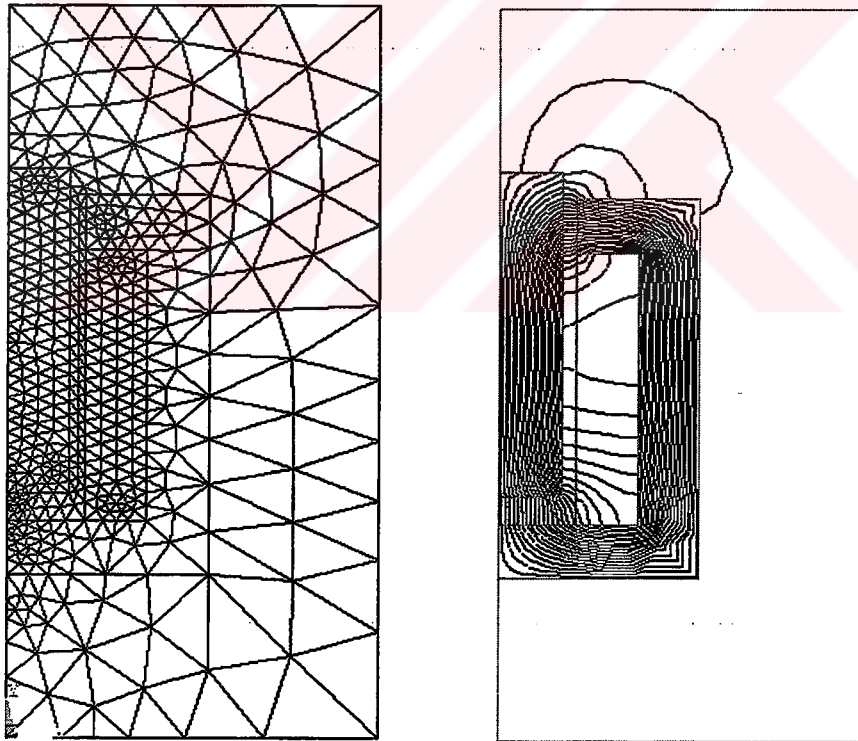
### 7.5.1 Endüktans Hesabı

Bu ayrıtta, örnek bir elektromagnet seçilerek, sonlu elemanlar yöntemi ile endüktans ve kuvvet hesabı uygulanmıştır. Elektromagnetin boyutları Çizelge 7.1’de verilmiştir. Bağlı hava aralığı olan  $\delta/a$  değeri değiştirilerek, her değer için yeni bir ağ oluşturulmuş ve endüktans ile armatüre uygulanan kuvvet değerleri ayrı ayrı hesaplanmıştır. Her yeni elde edilen ağ yapısındaki eleman ve düğüm sayıları yaklaşık olarak aynı değerde kalmıştır ve elde edilen bu değerler çözüm için yeterli olmuştur. Elde edilen sonuçlar ile Bölüm 5’te verilen analitik çözüm ile elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Endüktans değerindeki yaklaşımın son derece iyi olmasına dayanılarak, sonlu elemanlar yönteminde armatüre uygulanan kuvvet hesabı yapılarak, kuvvet-stroke karakteristikleri elde edilmiştir. Bobinin endüktansı kadar, elektromagnetin işletme karakteristikleri hakkında bilgi veren bu karakteristikler, bu elemanların seçiminde önemli bir yer tutmaktadır. Elektromagnetin hesaplama bölgesi yapay olarak kapatılıp, bu sınırlarda Dirichlet sınır şartlarının bulunduğu kabul edilmesi sebebiyle, simetri ekseninde de Dirichlet sınır şartı uygulanmıştır.

Çizelge 7.1 Analiz edilen elektromagnetin boyutları ve diğer büyüklükleri.

|                        |        |
|------------------------|--------|
| $a \text{ (m)}$        | 0.05   |
| $b \text{ (m)}$        | 0.0125 |
| $c=u_i \text{ (m)}$    | 0.01   |
| $\mu=\mu_i$            | 1000   |
| $\delta_l \text{ (m)}$ | 0.0025 |
| $N$                    | 200    |

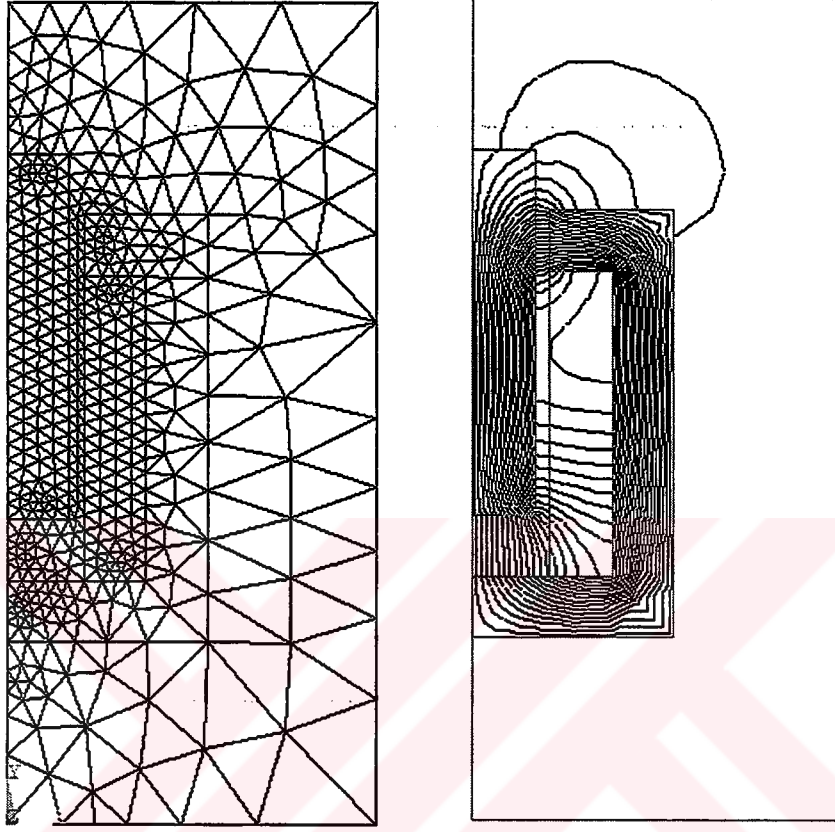
Şekil 7.5’de  $\delta=0.005$  m için ağ yapısı ve elde edilen alan dağılımı görülmektedir.

Şekil 7.5  $\delta=0.005$  m için ağ yapısı ve alan dağılımı.

Ağda kullanılan eleman sayısı 912’dir. Alan dağılımı bobinde  $400000 \text{ A/m}^2$  değerinde bir akım yoğunluğu bulunması durumu için elde edilmiştir. Bu akım yoğunluğu bobinden 1 A değerinde akım geçmesi durumuna karşılıktır. Hesaplanan endüktans değeri  $L=0.108730485 \text{ H/m}$ ’dir. Armatüre uygulanan kuvvet ise  $F=5.34 \text{ N/m}$  olarak hesaplanmıştır.

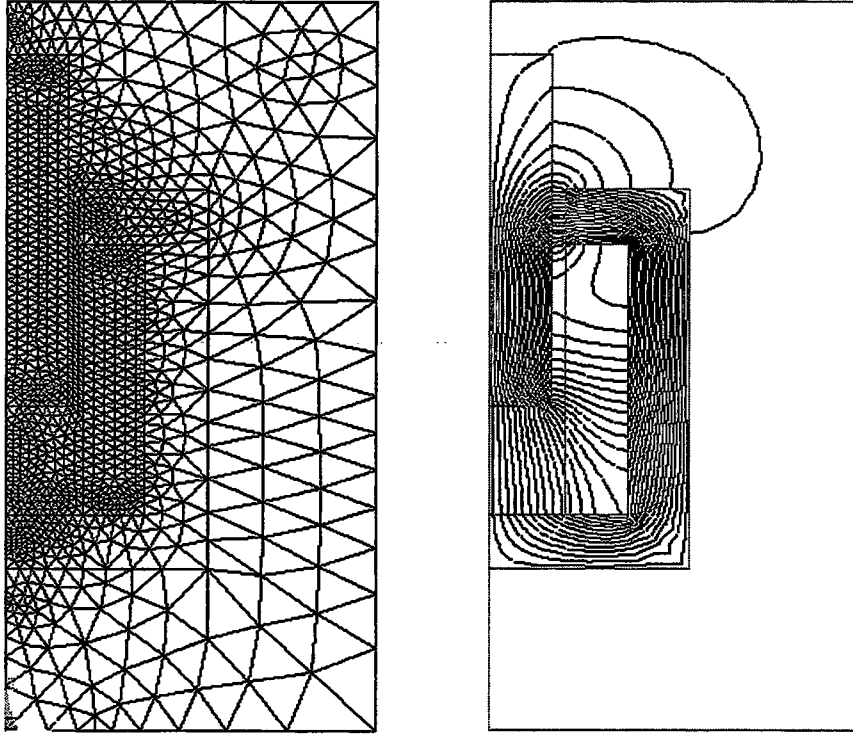


Şekil 7.6'da ise  $\delta=0.01$  m için kullanılan ağ yapısı elde edilen alan dağılımı verilmiştir. Kullanılan eleman sayısı 965'dir. Hesaplanan endüktans değeri  $L=74.65$  mH/m, kuvvet ise  $F=2.30$  N/m değerindedir.



Şekil 7.6  $\delta=0.01$  m için ağ yapısı ve alan dağılımı.

Şekil 7.7'de ise yine örnek olarak  $\delta=0.02$  m için kullanılan ağ yapısı ve elde edilen alan dağılımı görülmektedir. Kullanılan eleman sayısı 2230'dur. Bu hava aralığı için endüktans değeri  $L=44.29$  mH/m, kuvvet ise  $F=1.07$  N/m'dir.

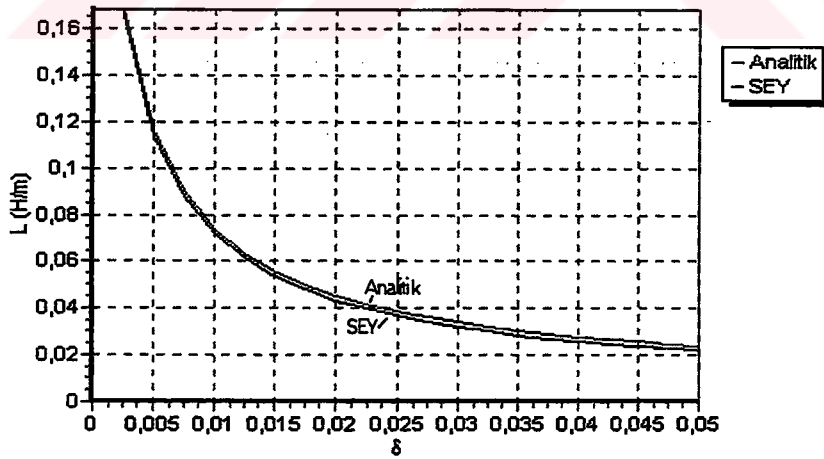


Şekil 7.7  $\delta=0.02$  m için ağ yapısı ve alan dağılımı.

Sonlu elemanlar yöntemi ile  $\delta$  hava aralığının benzer şekilde değişik değerleri için çözümler elde edilmiştir. Analitik ve sayısal yöntemlerle elde edilen endüktans değerleri Çizelge 7.2’de verilmiştir. Çizelgeden görüleceği gibi her iki yöntem ile edilen sonuçlar birbirine oldukça yakındır. İki yöntemden elde edilen sonuçlar arasındaki farklar, her iki yöntem için yapılan bir takım kabullere dayanmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde çözümde kullanılan ağ yapılarındaki eleman sayıları sonuca etkileyen en önemli faktördür. Bu yöntem için kullanılan bilgisayar programı Delphi 5 programlama dili ile yazılmıştır. Sonlu elemanlar eşitlikleri için programda açılan matris boyutları sınırlı kalmaktadır. Matris elemanlarının bir dosyaya yazılması ve büyük matris boyutlarına çıkılması mümkündür ancak bu durumda çözüm süresi, dolayısı ile çözüm maliyeti artmaktadır. Yazılan programda elde edilen maksimum eleman sayısı 2500 ile sınırlı kalmıştır ve çözüm için yeterli olmuştur. Ancak eleman sayısının daha fazla arttırılabilmesi durumunda, iki yöntem arasındaki farkın daha da azalması mümkün olacaktır. Endüktans değerinin iki yöntem sonucunda yakın değerlerle hesaplanması, sonlu elemanlar yönteminde uygulanan yaklaşımın doğruluğunu göstermektedir. Buna dayanarak bu yöntem ile elde edilen kuvvet-stroke karakteristiklerinin de doğru olduğuna karar verilebilir. Yine bu sebeple kuvvet değerlerinin analitik bir yöntem ile karşılaştırılmasına gerek görülmemiştir. Şekil 7.8’de ise Çizelge 7.2’de verilen endüktans değerleri grafiksel olarak verilmiştir.

Çizelge 7.2 Analitik ve sayısal yöntemlerle elde edilen endüktans değerleri.

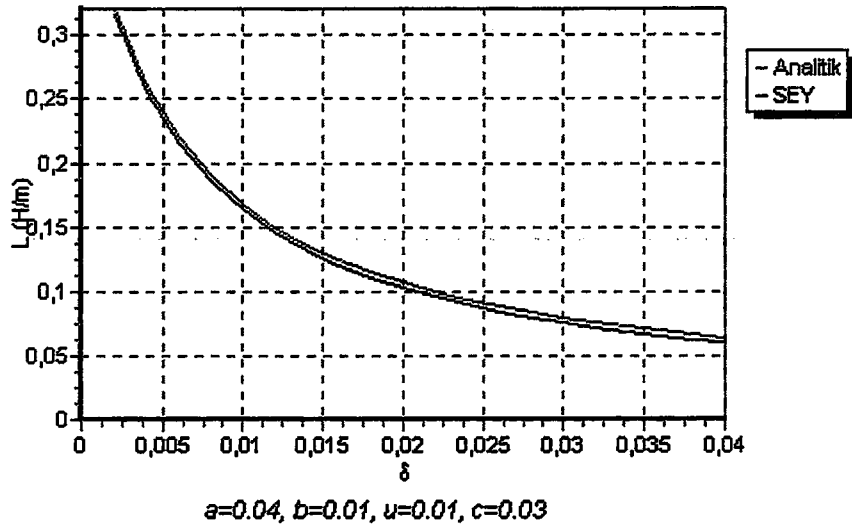
| $\delta$ (m) | $L$ (H/m) |         |
|--------------|-----------|---------|
|              | Analitik  | Sayısal |
| 0.005        | 0.116     | 0.1087  |
| 0.010        | 0.0744    | 0.0742  |
| 0.015        | 0.0558    | 0.0557  |
| 0.020        | 0.0455    | 0.0443  |
| 0.025        | 0.0388    | 0.0379  |
| 0.030        | 0.0341    | 0.0398  |
| 0.035        | 0.0305    | 0.0302  |
| 0.040        | 0.0278    | 0.0275  |
| 0.045        | 0.0257    | 0.0253  |
| 0.050        | 0.0240    | 0.0238  |



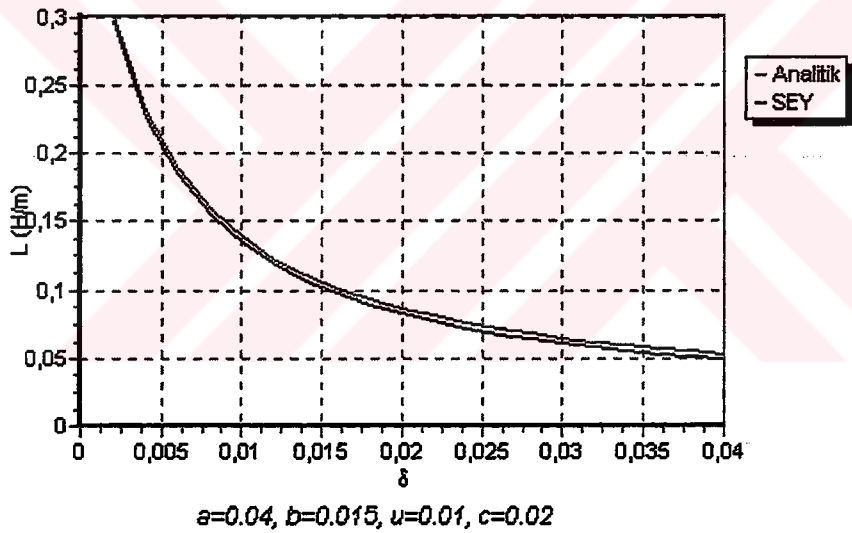
Şekil 7.8 Analitik ve sayısal olarak hesaplanan endüktans değerleri.

Aşağıdaki şekillerde ise,  $\delta=0.02$ ,  $\delta_1/a=0.05$  ve  $\mu_i=1000$  olmak üzere değişik geometriler için hesaplanan endüktans değerleri grafiksel olarak gösterilmiştir. Şekillerden görüldüğü üzere, hava aralığı değeri  $\delta$  arttıkça endüktans değeri düşmektedir. Endüktans değerinin, üzerine sarıldığı ferromagnetik malzemenin bağıl magnetik geçirgenliği ile ters orantılı olduğu

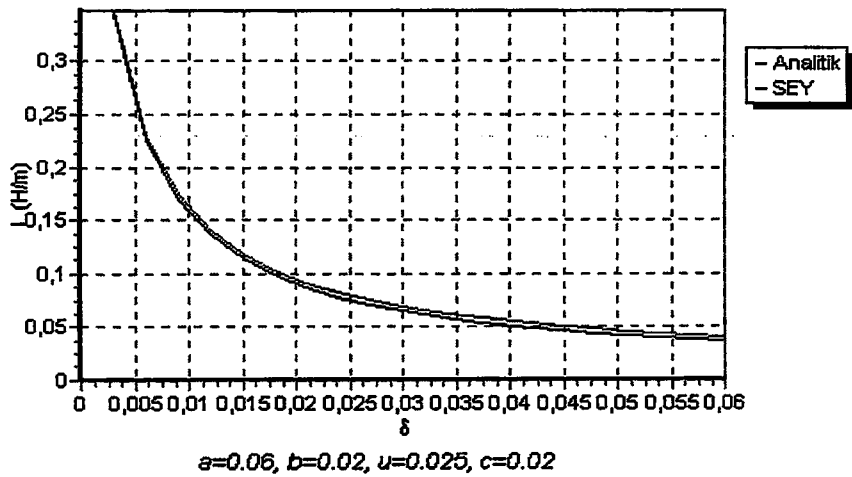
bilinmektedir. Armatürün bağıl magnetik geçirgenliğinin 1000 olması sebebiyle bu zaten beklenen bir durumdur.



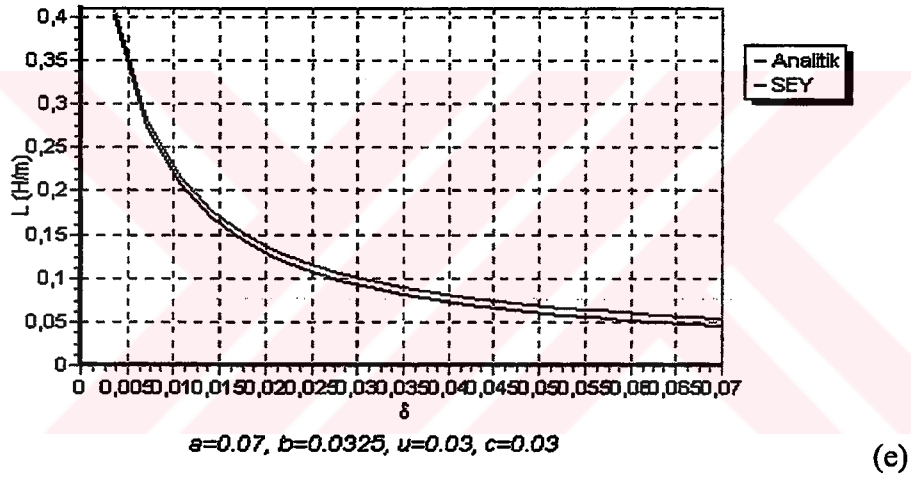
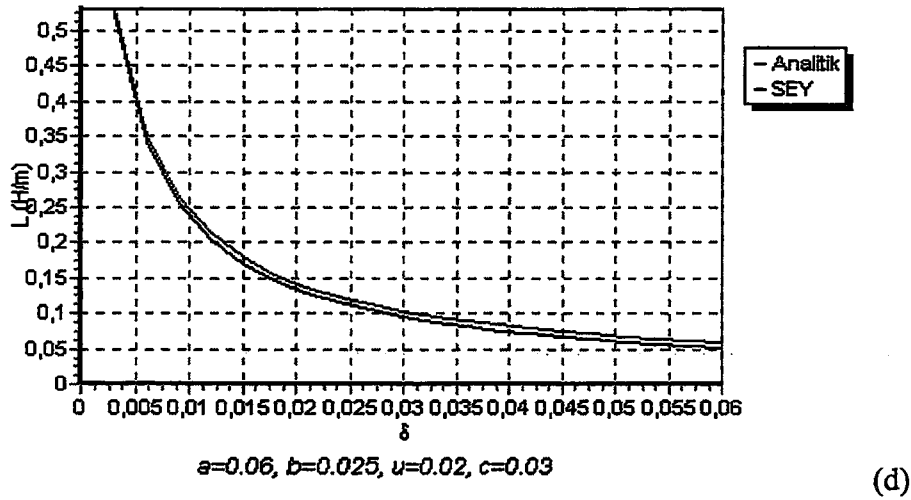
(a)



(b)



(c)



Şekil 7.9 Değişik geometriler için elde edilen endüktans değerleri.

### 7.5.2 Kuvvet Hesabı

Elektromagnetik analizde, hareketli kısımlara uygulanan kuvvet iki yolla hesaplanabilir:

- 1- Maxwell gerilme yöntemi.
- 2- Coulomb yöntemi.

Maxwell yöntemindeki yaklaşımda, kapalı bir yüzeydeki bütün noktadaki yerel gerilmeler hesaplanıp daha sonra yüzeysel integral ile bu gerilmeler toplanıp, toplam magnetik kuvvet elde edilir. Bu kuvvet değeri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$F = \oint_s \frac{1}{2\mu_0} (B_n^2 - B_t^2) ds \cdot t + \oint_s \frac{1}{\mu_0} B_n B_t ds \cdot n \quad (7.9)$$

Denklemden  $s$  kuvvete maruz kalan parçanın yüzeyi,  $B$  magnetik akı yoğunluğu,  $n$  ve  $t$  ise yüzeye ait dik ve teğet yöndeki birim vektörlerdir. İki boyutlu problemlerde yüzey integrali basitleştirme açısından çizgisel integrale indirgenir. Coulomb yönteminde ise, yaklaşım enerjinin sakınımı ve virtual iş prensibine göre türevi alınarak hesaplanır. Bu hesaplama, çözümde magnetik vektör potansiyel formülasyonu kullanılması durumunda oldukça kolaydır. Matematiksel olarak  $q$  yönündeki magnetik kuvvetin hesabı için aşağıdaki denklem kullanılır (Benhama, et.al, 2000):

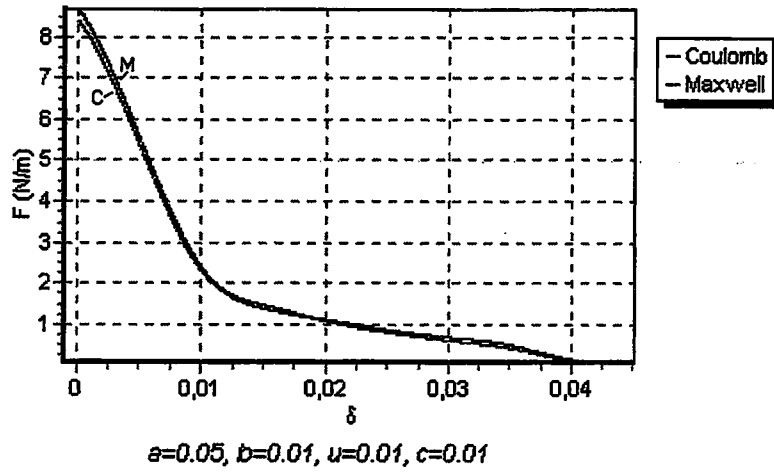
$$F_q = \frac{1}{2\mu_0} \sum_e \Omega_e \frac{\partial B^2}{\partial q} + B^2 \frac{\partial \Omega_e}{\partial q} \quad (7.10)$$

Her iki yöntem ile de armatüre uygulanan kuvvetin hesabı yapılmış ve sonuçlar Çizelge 7.3'de gösterilmiştir.

Çizelge 7.3 Armatüre uygulanan kuvvet değerleri.

| $x(m)$ | $F (N/m)$ |        |         |       |
|--------|-----------|--------|---------|-------|
|        | Maxwell   |        | Coulomb |       |
|        | $F_x$     | $F_y$  | $F_x$   | $F_y$ |
| 0.005  | 7.51      | -5.52  | 7.16    | -5.34 |
| 0.010  | 4.30      | -2.37  | 4.04    | -2.30 |
| 0.015  | 2.88      | -1.38  | 2.69    | -1.46 |
| 0.020  | 1.93      | -1.10  | 1.85    | -1.07 |
| 0.025  | 1.29      | -0.82  | 1.21    | -0.80 |
| 0.030  | 0.83      | -0.67  | 0.77    | -0.60 |
| 0.035  | 0.63      | -0.49  | 0.61    | -0.42 |
| 0.040  | 0.30      | -0.129 | 0.32    | -0.1  |
| 0.045  | 0.15      | -0.10  | 0.19    | -0.09 |

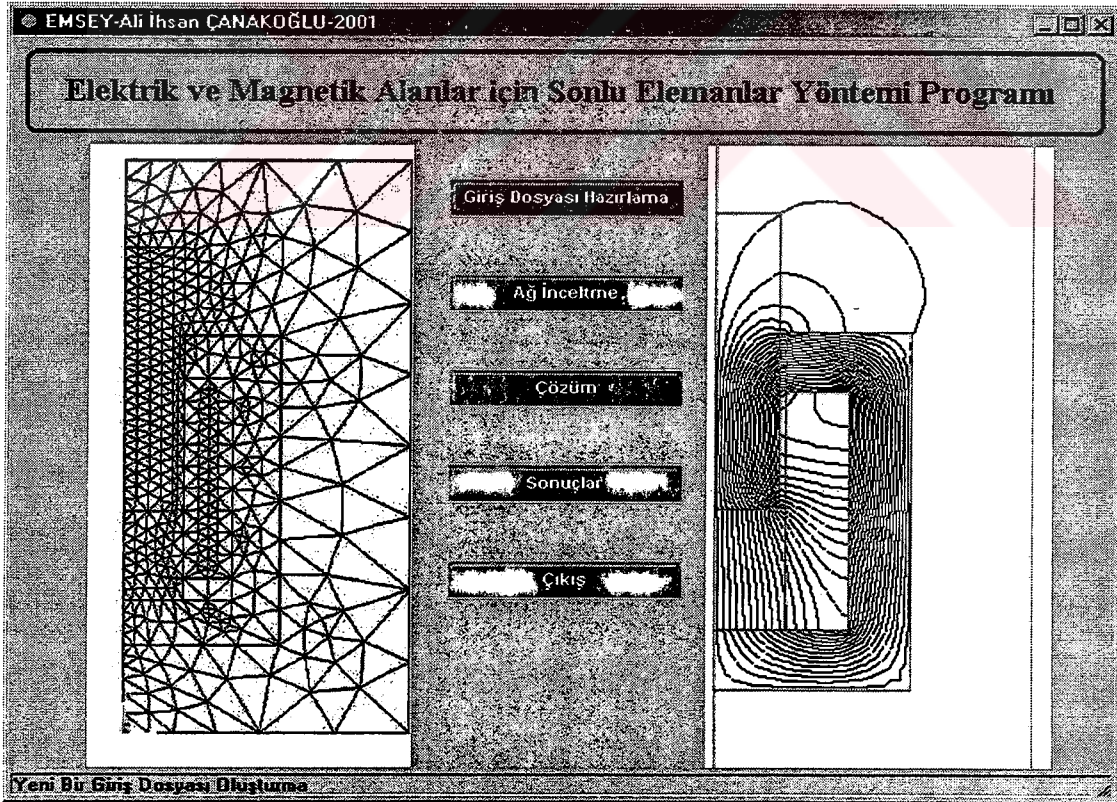




Şekil 7.10 İki farklı yöntem ile elde edilen kuvvet değerleri.

## 7.6 Yazılan Bilgisayar Programına Ait Ekran Görüntüleri

Sonlu elemanlar yöntemi için yazılan programa ait ekran görüntüleri:



Şekil 7.11 Program giriş sayfası.



**Yeni Dosya Oluşturma**

☒ **Elektrostatik** ☐ **Magnetostatik**

**Malzeme Özelliklerini Giriniz**

1. malzeme 1000

**Tabloları Aç**

**Eleman Sayısı** 58  
**Düğüm Sayısı** 46  
**Pot. Bil. D. S.** 12  
**Ağın Sn. D. S.** 18  
**Malzeme Sayısı** 1

**Düğümlemleri Koordinatlarını Giriniz** **Eleman Yataylımları ve Tipini Giriniz** **Potansiyel Bilinen Düğümler**

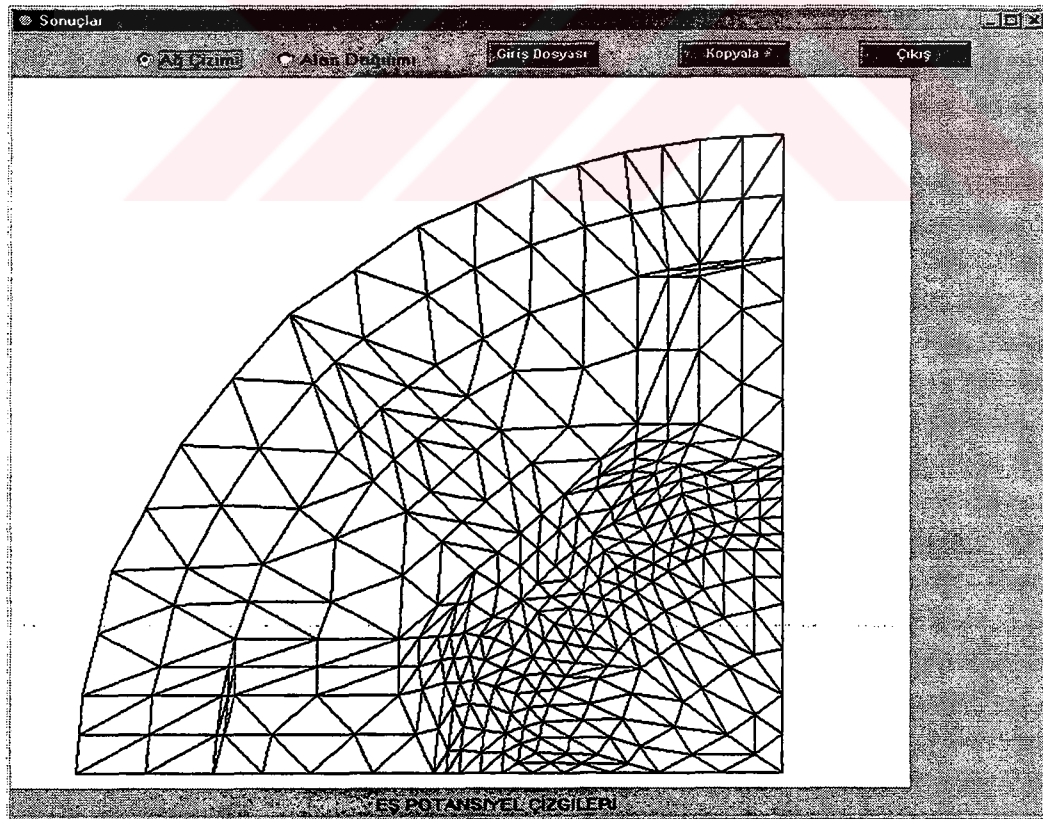
| 1. düğüm | 2. düğüm | 3. düğüm | 4. düğüm | 5. düğüm | 6. düğüm | 7. düğüm |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 0.01     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 0.03     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 0        | 0.01     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 0.01     | 0.01     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 0.03     | 0.01     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 0        | 0.02     | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |

| 1. eleman | 2. eleman | 3. eleman | 4. eleman | 5. eleman | 6. eleman | 7. eleman |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1         | 5         | 4         | 1         | 1         | 1         | 1         |
| 1         | 2         | 5         | 1         | 1         | 1         | 1         |
| 2         | 6         | 5         | 1         | 1         | 1         | 1         |
| 2         | 3         | 6         | 1         | 1         | 1         | 1         |
| 4         | 8         | 7         | 1         | 1         | 1         | 1         |
| 4         | 5         | 8         | 1         | 1         | 1         | 1         |
| 5         | 3         | 8         | 1         | 1         | 1         | 1         |

**Akım Yoğunluğu** 400000

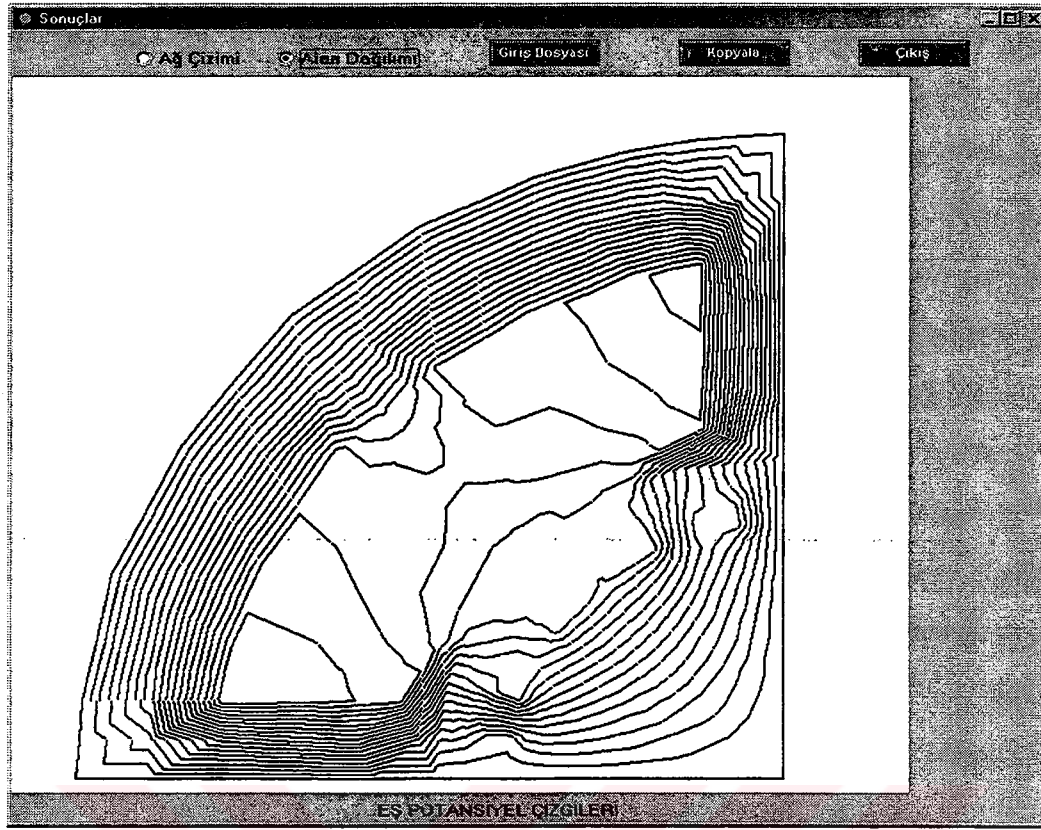
**Dosyaya Oluştur** **AÇ Çizimi** **Çıkış**

Şekil 7.12 Yeni giriş dosyası oluşturma bölümü.



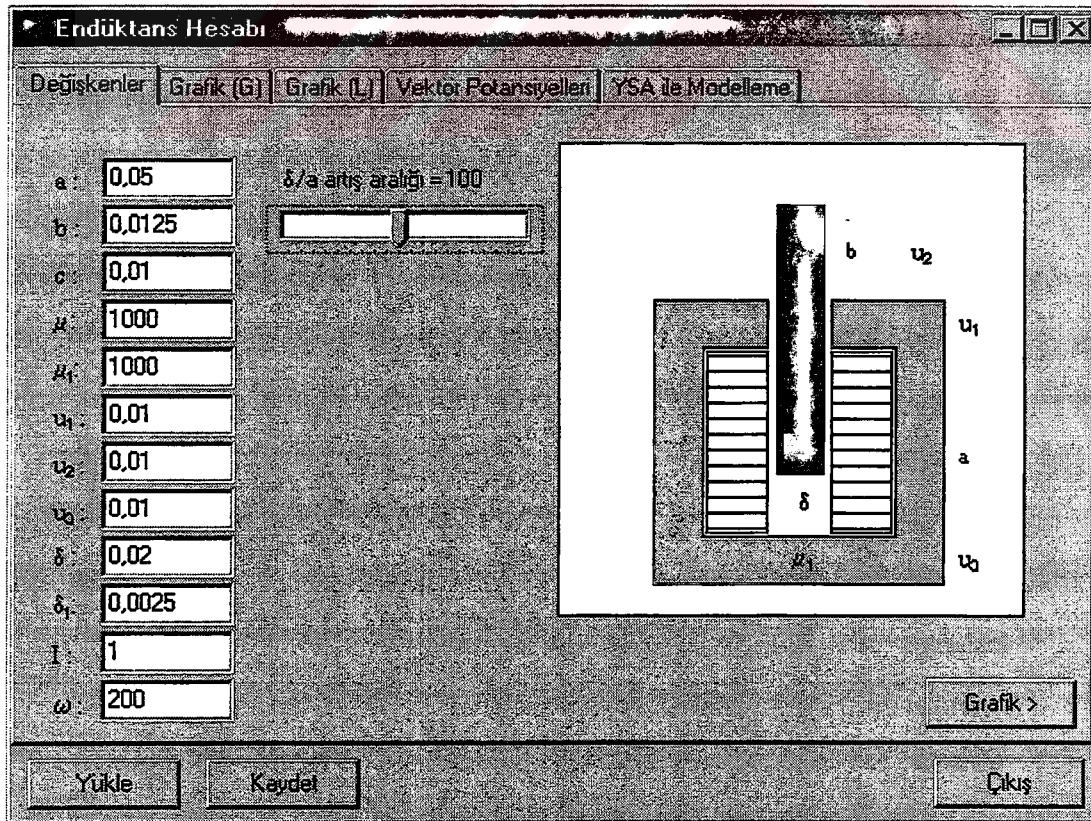
Şekil 7.13 Çözümde kullanılan ağ yapısının görüntülendiği bölüm.





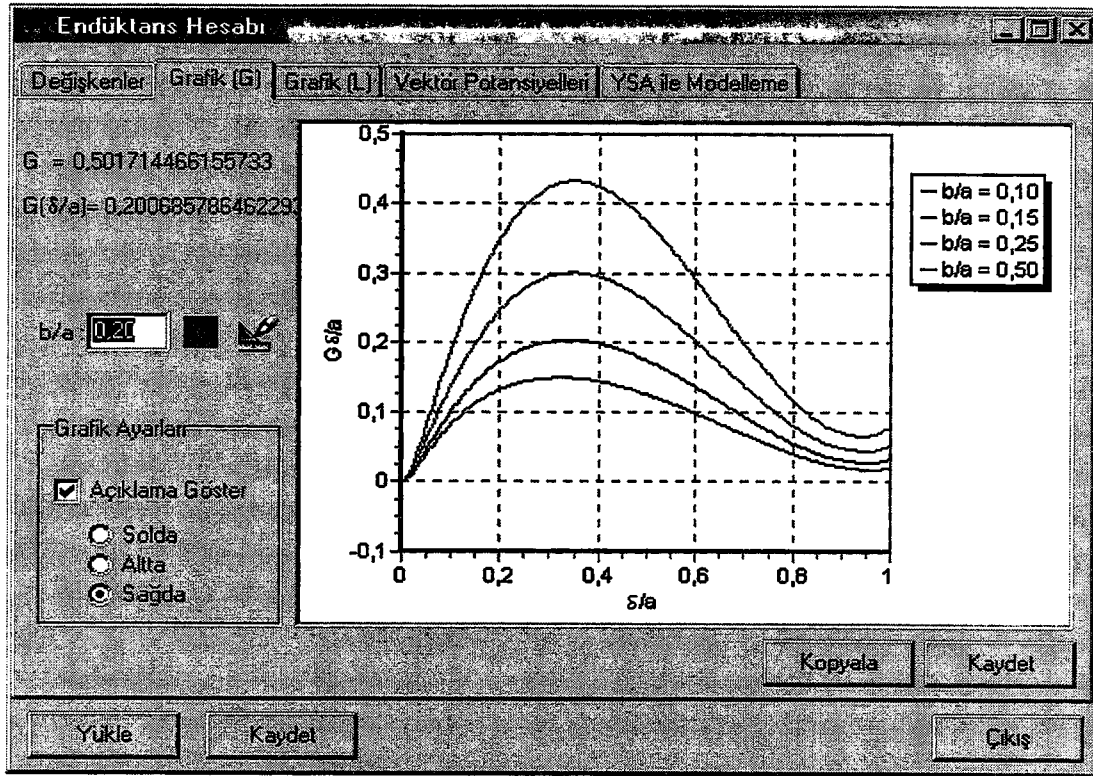
Şekil 7.14 Çözüm sonucunda elde edilen alan dağılımının görüntülendiği bölüm.

Analitik yöntem için yazılan programa ait ekran görüntüleri:

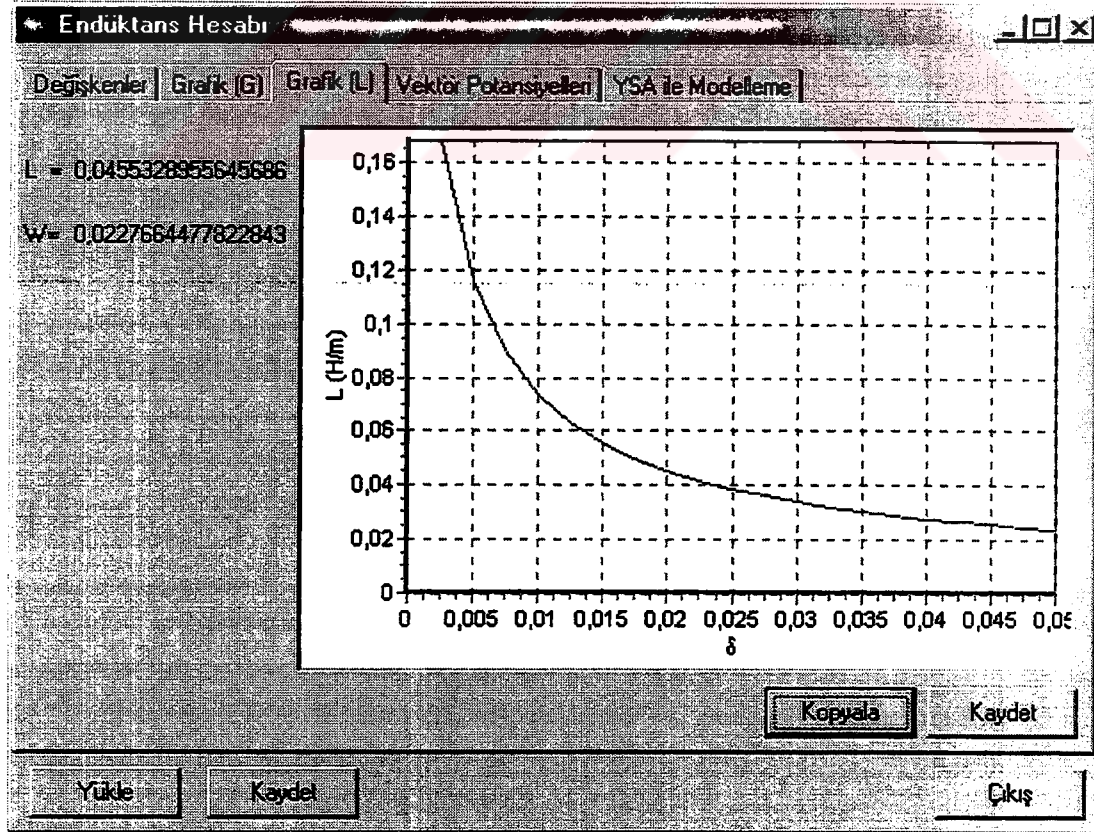


Şekil 7.15 Ana sayfa.





Şekil 7.16 Sabit  $G$  eğrilerinin değişimini gösteren bölüm.



Şekil 7.17 Endüktans değişiminin gösterildiği bölüm.



**Endüktans Hesabı**

Değişkenler | Grafik (G) | Grafik (L) | Vektör Potansiyelleri | YSA ile Modelleme

**Bölge I**

x:  Hesapla

y:

Potansiyel = 0,000206601942928254 Wb/m

**Bölge II**

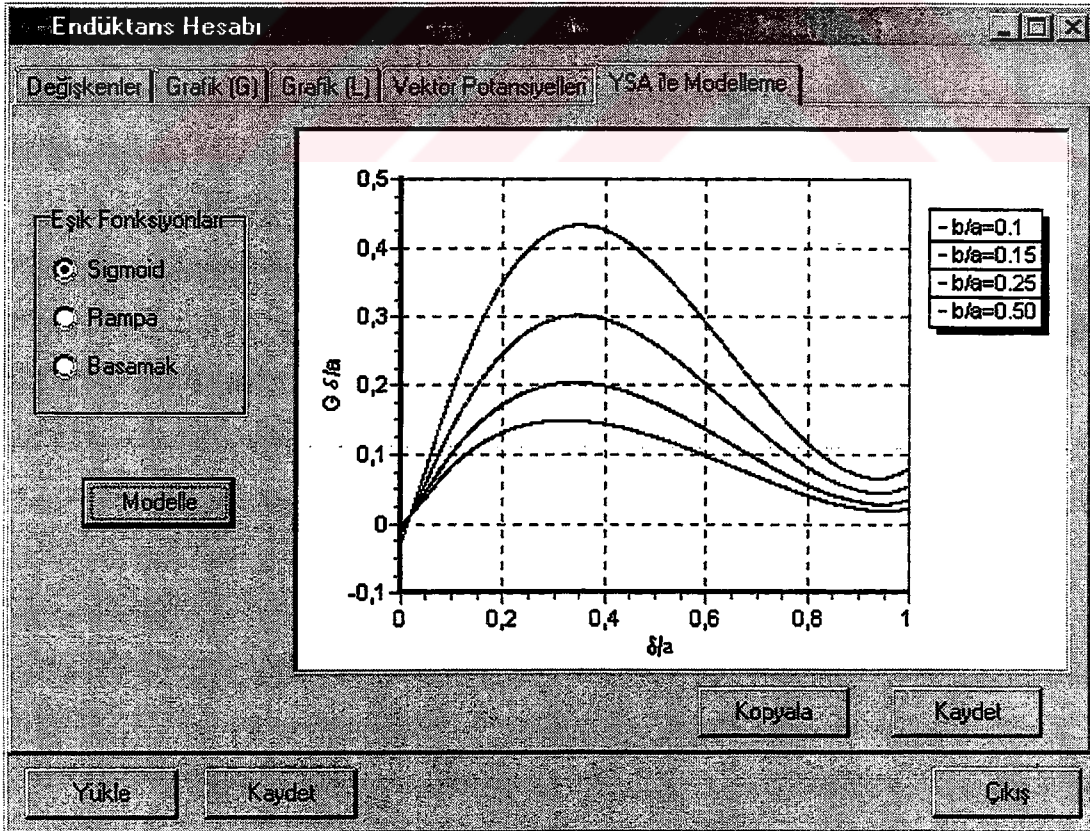
x:  Hesapla

y:

Potansiyel = 0,000100087197977046 Wb/m

Yükle Kaydet Çıkış

Şekil 7.18 Magnetik vektör potansiyel değerlerinin hesaplandığı bölüm.



Şekil 7.19 YSA ile modelleme sonuçlarının gösterildiği bölüm.

## 8. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmada, bir elektromagnetin bobinine ait endüktans analitik ve sayısal yöntemler kullanılarak hesaplanmıştır. Analitik ve sayısal yöntemlerin kullanılmasında, her iki yöntem için de yeni modelleme teknikleri sunulmuştur. Bunlar:

- 1- Analitik yöntemde enterpolasyon için Yapay Sinir Ağları yönteminin kullanılması.
- 2- Sayısal yöntemde (Sonlu Elemanlar Yöntemi) ağ inceltme işlemi için yeni bir yöntemin ortaya konması.

Analitik yöntemde yapay sinir ağları, yöntem içinde kullanılan geometriye bağlı bir katsayıya ait değişimin modellenmesinde kullanılmıştır (sabit  $G$  değerleri). Bu katsayı, elektromagnetteki bobinin en/boy ( $b/a$ ) oranına bağlıdır. Belli oranlar için elde edilen katsayı değerleri yapay sinir ağlarına öğretilip diğer bobin oranları için yapay sinir ağları ile tahmin işlemi yaparak gerekli değerlere atama yaptırılmıştır.

Yapay sinir ağlarının bu şekilde tahmin yapabilmesi, elektromagnetikte bir çok alana uygulanabilir. Bu alanlardan birisi anizotropik malzemelerin analizidir. Nüvesinde anizotropik malzeme kullanılan elektrik makinalarının analizinde, bu malzemelere ait  $B-H$  eğrilerinin modellenmesi oldukça zordur. Anizotropik malzemelerde tek bir  $B-H$  eğrisi olmayıp, permeabilitenin alan yönüyle değişmesinden dolayı, alan uygulama açısına bağlı olarak bir eğri ailesi bulunmaktadır. Özellikle bu malzemelerden imal edilen makinaların nonlineer analizinde bu eğrilerin tek tek modellenmesi gerekecektir. Ara alan uygulama açılarına bağlı olarak da ilgili değerlerin elde edilmesi gerekecektir. Yapay sinir ağları yöntemine bu eğriler öğretilip, ara açı değerleri için tahminde bulunması istenebilir. Benzer şekilde histerezis eğrilerinin de öğretilmesi mümkün olacaktır. Böylece, yapay sinir ağları özellikle alternatif makinalarının analizinde büyük kolaylık getirmiş olacaktır. Yapay sinir ağlarını sonlu elemanlar yönteminde gerekli ağ işlemine ait belirli bölgelerde eleman yoğunluk tahmininde de kullanmak mümkündür.

İkinci olarak sunulan yeni yöntem olan ağ inceltme işlemi de, sonlu elemanlar yöntemini kullanan kişilerin kendi programlarını yazmaları sonucunda kullanabilecekleri basit bir yöntemdir. Bu yöntemde çözüm sonunda elde edilecek sonuçlar bölgedeki eleman sayısı ile doğru orantılıdır. Özellikle lineer üçgen elemanların kullanılması durumunda, eleman



üzerindeki akı yoğunluğu eleman üzerinde sabit kabul edilir. Bu durumda eleman alanın mümkün olduğu kadar küçük olması gereklidir. Elemanların yüzey alanlarının küçülmesi de eleman sayısının fazlaştırılmasına bağlı olduğundan, ağ inceltme işleminin uygulanması kaçınılmazdır. Enerjinin yoğun olduğu ve hızlı değiştiği bölgelerde elzem olan bu inceltme işlemi, ilgili bölümde açıklandığı üzere, oldukça zor bir işlemdir. Sunulan yöntem ile bu işlem bir parça basitleştirilmiştir.

Üçgen elemanların yeni yöntem ile bölünmesi yine anizotropik malzemelerin analizinde bir avantaj ortaya koyacaktır. Bu avantajı şöyle açıklayabiliriz. Sınırlarında Dirichlet tipi sınır şartı bulunan problemlerde, sınıra gelen elemanın iki düğümünde vektör potansiyel değeri sıfır olacaktır. Eleman üzerindeki akı yoğunluğunun hesabında sadece vektör potansiyel değeri sıfır olmayan tek bir düğüm kullanılacaktır. Bu durumda hesaplanan değer oldukça hatalı olacaktır. Anizotropik malzemeler için alan yönü önemli bir büyüklük olduğundan bu değer de haliyle hatalı olacaktır. Sınırdaki elemanların verilen yöntem ile basitçe alt elemanlara ayrılması sonucunda, sınırdaki eleman içersine gelecek üçgen elemanda her düğümde sıfırdan farklı bir vektör potansiyel değeri hesaplanacağından, hem akı yoğunluğu değeri hem de bu alana ait açısı değeri büyük doğrulukla hesaplanabilecektir.

Bu yöntemlerin uygulandığı problem olan endüktans hesabına geldiğimizde ise, elektromagnete ait hesaplanan değerler arasında büyük yakınlık sağlanmıştır. İki yöntem arasındaki fark %1-3 civarındadır. Bu yaklaşım ile sonlu elemanlar yönteminde uygulanan modelin doğruluğu ortaya çıkmıştır. Elektromagnete ait kuvvet-stroke karakteristikleri elde edilerek elektromagnetin analizi tamamlanmıştır. Sonuçları tekrar maddelemek gerekirse:

- 1- Değişkenlerine ayırma yöntemi ile elektromagnetin endüktans ifadesi elde edilmiştir.
- 2- Analitik yöntemdeki bir katsayıya ait değişim Yapay Sınır Ağları yöntemi ile ilk defa modellenmiş ve sonuçlar Kübik-Spline yöntemi ile karşılaştırılmıştır.
- 3- Modelleme sonucunda değişik geometriler için Yapay Sınır Ağlarına tahmin işlemi yaptırılmıştır. Dolayısı ile kullanıcının değişik değerler için hesap veya başka yöntemlerle enterpolasyon işlemi yapmasına gerek kalmayacaktır.
- 4- Yapay Sınır Ağları yönteminin bu şekilde tahmin yapabilmesi, değişik malzemelerin analizinde malzemelere ait karakteristiklerin rahatlıkla modellenmesinde kullanılabilirliği ortaya çıkmaktadır.

- 5- Sonlu Elemanlar Yönteminde ortaya konan yeni ağ inceltme yöntemi, bu yöntemi kullanan kişilerin kendi programlarını yazmaları durumunda kolaylıkla kullanabilecekleri bir yöntemdir. İnceltme işlemine tabi tutulan elemanın diğer elemanları etkilememesi (yani diğer elemanlara inceltme işlemi uygulama mecburiyetinin ortadan kalkması) yöntemin en büyük avantajıdır.
- 6- Yeni ağ inceltme yöntemi yine anizotropik malzemelerin analizinde çözümün iyileştirilmesini sağlayacağı da açıkça görülmektedir.
- 7- Sonlu Elemanlar Yönteminde uygulanan modelin doğruluğunun ortaya konması ile bir elektromagnete ait tasarım işleminin gerçekleştirilmesi mümkün olacaktır.

Bu çalışmalarda nüvede kullanılan malzemenin lineer olduğu kabul edilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminde nonlinear analizin gerçekleştirilmesi kolaydır. Malzemeye ait  $B-H$  eğrilerinin modellenip buradan  $\nu-B^2$  eğrilerinin elde edilmesiyle bu işlem gerçekleştirilir (Bölüm 2). Ancak analitik yöntemde malzemenin doymasının etkisi yani nonlinear durumun göz önüne alınması bundan sonraki çalışmalara temel teşkil edebilir. Verilen yöntemlerin anizotropik malzemelere uygulanmasının yanında analitik yöntemde doymanın etkisinin incelenmesi ileri çalışma aşamaları olarak gösterilebilir.

**KAYNAKLAR**

- ANDERSEN, O. W., (1973), "*Transformer Leakage Flux Program Based on the Finite Element Method*", IEEE Trans. On PAS., Vol.PAS-92:682-689.
- BELLAH FARD, S. M., MOSES, A. J., (1994), "*A Method of Modelling the Anisotropy of Electro-Technical Steels in the Finite Element Method*", JMMM, Vol.133:536-539.
- BELMANS, R., VERDIJCK, D., GEYSEN, W., (1989), "*Computer-Aided Engineering in Electrical Machines*", Computer-Aided Engineering Journal:128-132.
- BENFORD, J. G., (1984), "*Separation of Losses in Oriented Silicon Steels from 0.13 to 0.34 mm Thick*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-20, No.5:1545-1547
- BENHAMA, A., WILLIAMSON, A.C., REECE, A.B.J., (2000), "*Virtual work approach to the computation of magnetic force distribution from finite element field solution*", IEE Proc.- Electr. Power Appl., Vol 147, No. 6:2546-2557.
- BERTOTTI, G., (1988), "*General Properties of Power Losses in Soft Ferromagnetic Materials*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-24, No.1:621-630.
- BINNS, K. J., LAURENSEN, P. J., TROWBRIDGE, C. W., (1992), "*The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields*", 1st. ed., John Wiley & Sons, Chichester:232, 314-317.
- BURDEN, R. L., FAIRES, J. D., (1985), "*Numerical Analysis*", 3rd. ed., PWS Publishers Boston:117-122.
- BRAUER, J. R., (1975), "*Simple Equations for the Magnetization and Reluctivity Curves of Steel*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-11: 81.
- BRAUER, J. R., (1977), "*Finite Element Analysis of Electromagnetic Induction in Transformers*", IEEE PES Winter Meeting, Paper A77-122-5.
- BRAUER, J. R., (1981), "*Finite Element Analysis of Single-Phase and Polyphase Induction Motors*", IEEE IAS Annual Meeting, Philadelphia, PA.
- BRAUER, J. R., (1982), "*Finite Element Analysis of DC Motors and Step Motors*", Proc. of Incremental Motion Control Symposium, Rosemont, IL, 1982-May.
- BRAUER, J. R., MAC NEAL, B.E., HIRTENFELDER, F., (1993), "*New Constraint Technique for 3D Finite Element Analysis of Multiturn Windings with Attached Electric Circuits*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-29, No.6:2446-2448.
- BRYANT, C. F., (1985), "*Two Dimensional Triangular Mesh Generation*", IEEE

Trans. On Magnetism, Vol.MAG-21, No.6:2547-2550.

CAMPBELL, P., HOOLE, S. R. H., TSALS, I., (1984), "*Finite Element Field Analysis in 2-D and 3-D on a Personal Computer*", IEEE Trans. On Magnetism, Vol.MAG-20, no.5, :1903-1905.

CENDES, Z. J., SHENTON, D., SHAHNASSER, H., (1983), "*Magnetic Field Computation using Delaunay Triangulation and Complementary Finite Element Methods*", IEEE Trans. On Magnetism, Vol.MAG-19, No.6:2551-2554.

CHARI, M. V. K., SILVESTER, P. P., (1971), "*Finite Element Analysis of Magnetically Saturated DC Machines*", IEEE Trans. On PAS., Vol.PAS-90, No.1:2362-2372.

CHARI, M. V. K., SILVESTER, P. P., (1971), "*Analysis of Turboalternator Magnetic Fields by Finite Elements*", IEEE Trans. On PAS., Vol.PAS-90, No.2:454-464.

CHARI, M. V. K., (1974), "*Finite-Element Solution of the Eddy-Current Problem in Magnetic Structures*", IEEE Trans. On PAS., Vol.PAS-93, pp. 62-72.

CHAVANNE, J., MEUNIER, G., SABONNADIÈRE, J. C., (1989), "*Nonlinear Permanent Magnets Modelling with the Finite Element Method*", IEEE Trans. On Magnetism, Vol.MAG-25, No.5:3581-3583.

CHEDID, R., (1994), "*A Practical Introduction to the Finite Element Analysis of Electromagnetic Problems*", IEEE, Vol.31:155-166.

CHIAMPI, M., CHIARABAGLIO, D., TARTAGLIA, M., (1993), "*A General Approach for Analyzing Power Busbar under AC Conditions*", IEEE Trans. On Magnetism, Vol.MAG-29, No.6:2473-2475.

CIVIDJIAN, G. A., SILVIS-CIVIDJIAN, N. G., CIVIDJIAN, A.G., (1998), "*Inductance Of a Plunger-Type Magnet*", IEEE Trans. On Magnetism, Vol. 34, No. 5:3685-3688, September.

CIVIDJIAN, G. A., SILVIS-CIVIDJIAN, N. G., CIVIDJIAN, A.G., (2000), "*Some Formulas for Two-Dimensional Permeances*", IEEE Trans. On Magnetism, Vol. 36, No. 5: 3754-3758, September.

CULLOCH, S.M. AND PITTS, W., (1943), "*A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity*", Bulletin of Mathematical Biophysics, vol.5:115-133.

DE BOOR, C., (1978), "*A Practical Guide to Splines*", Springer-Verlag, New York.

DEDULLE, J. M., MEUNIER, G., FOGGIA, A., SABONNADIÈRE, J. C., SHEN, D., (1990), "*Magnetic Fields in Nonlinear Anisotropic Grain-Oriented Iron Sheet*", IEEE Trans. On Magnetism, Vol.MAG-26, No.2:524-527.



- DI NAPOLI, A., PAGGI, R., (1983), "*A Model of Anisotropic Grain-Oriented Steel*" IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-19, No.4:1557-1561.
- EL-SHERBINY, M. K., (1973), "*Representantation of the Magnetization Characteristics by a Sum of Exponentials*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-9, No.1: 60-61
- ERDELYI, E. A., AHAMED, S. V., BURTNES, R. D., (1965), "*Flux Distribution in Saturated DC Machines at No-Load*", IEEE Winter Power Meeting Proc.:375-381.
- ERDELYI, E. A., FUCHS, E. F., (1970), "*Nonlinear Magnetic field Analysis of DC Machines, Part I: Theoretical Fundamentals*", IEEE Trans. On PAS., Vol.PAS-89 No.7:1546-1554.
- FOGGIA, A., SABONNADIÈRE, J. C., SILVESTER, P. P., (1975), "*Finite-Element Solution of Saturated Traveling Magnetic Field Problems*", IEEE Trans. On PAS., Vol-94 No.3:1435-1444.
- FORGHANI, B., FREEMAN, E., LOWTHER, D., SILVESTER, P.P., (1982), "*Interactive Modelling of Magnetization Curves*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-18, No.6: 1070-1072.
- FORGHANI, B., LOWTHER, D. A., SILVESTER, P. P., STONE, G. O., (1983), "*Newton-Raphson Finite Element Programs for Axisymmetric Vector Fields*", IEEE Trans.On Magnetics, Vol.MAG-19, No.6:2523-2526.
- FUJITA, O., (1998), "*Statistical Estimation of the Number of Hidden Units for Feedforward Neural Networks*", Neural Networks, Vol.11:851-859.
- GOLIOS, N. A., TSIBOUKIS, T. D., (1992), "*Three-Dimensional Automatic Adaptive Mesh Generation*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-28, no.2:1700-1703.
- GOURISHANKAR, V., KELLY, D. H., (1973), "*Electromechanical Energy Conversion*" 2nd. edition, Billing & Sons Ltd., London.
- GUTIERREZ, WANG, J. AND GRANDIN, R.D., (1989), "*Estimating Hidden Units for Two-Layer Perceptrons*", Proceeding of the 1st. International Conference on Artificial Neural Networks, London U.K.:120-124.
- GÜLDEMİR, H., KÜRÜM, H., AKPINAR, S., (1993), "*Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi Kullanılarak Bir Transformatorün Manyetik Alan Dağılımının İncelenmesi*", Elektrik Müh. 5. Ulusal Kongresi, Trabzon, say. 1060-1064, Cilt.4, Eylül.
- JIN, J., (1993), "*The Finite Element Method in Electromagnetics*", 1st. ed., John Wiley & Sons Inc., New York.
- KARLIK, B., (1994), "*Çok Fonksiyonlu Protezler İçin YSA Kullanılarak Miyelektirik*

*Kontrol*", YTÜ Fen Bilimleri Enst., Doktora Tezi:26-29, 1994-Mart.

KRISHNAN, R., BHARADWAJ, A. S., MATERU, P. N., (1988), "*Computer-Aided Design of Electrical Machines for Variable Speed Applications*", IEEE Trans. On Industrial Electronics, Vol.35, No.4:256-264.

LİPPMANN, (1987), "*An Introduction to Computing with Neural Nets*", IEEE ASSP Magazine:4-22.

LIU, J., BASAK, A., MOSES, A.J., SHIRKOOHI, G.H., (1994), "*A Method of Anisotropic Steel Modelling Using Finite Element Method with Confirmation by Experimental Results*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-30, No.5:3391- 3394.

MİNSKY AND PAPERT, S., (1969), "*Perceptrons*", Cambridge, MA: MIT Press, Introduction:1-20 and 73.

MITCHELL, K. G., PENMAN, J., (1992). "*Self Adaptive Mesh Generation for 3-D FE Calculation*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-28, No.2:1751-1754

MOALLEM, M., ONG, C. M., (1991), "*Predicting the Steady-State Performans of a Switched Reluctance Machine*", IEEE Trans On Industry Applications, Vol.27, no.6: 1087-1097.

NAYLOR, C.J., (1990), "*Artificial Neural Networks Review*", University of Nottingham, version 1.1 (U.K) 12.

PERA, T., OSSART, F., WAECKERLE, T., (1993), "*Field Computation in Nonlinear Anisotropic Sheets Using Coenergy Model*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-29, No.6:2425-2427.

QIAN, N., (1999), "*On the Momentum Term in Gradient Descent Learning Algorithms*", Neural Networks, Vol.12:445-151.

RALPH, J. W., WILLIAMSON, S., (1983), "*Solution of Two-Dimensional Non-Linear Field Problems with Sinusoidal Excitation Sources using First-Order Finite Elemants*", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-19:2433-2436.

SCARSELLI, F. and TSOI, A.C., (1998), "*Universal Approximation Using Feedforward Neural Networks: A Survey of Some Existing Methods and Some New Results*", Neural Networks, Vol.11, no.1:15-37.

SCHULTZ, M.H., (1966), "*Spline Analysis*", 1st. ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., New York.

SHEN, D., SABONNADIÈRE, J. C., MEUNIER, G., COULOMB, J. L., SACOTTE, M., (1987), "*3D Anisotropic Magnetic Field Calculation in Transformer Joints*" IEEE Trans.

On Magnetics, Vol.MAG-23, No.5:3783-3785.

REDDY, J. N., (1984), *"An Introduction to the Finite Element Method"*, 1st. ed., Mc-Graw Hill, New York, pp. 196-201.

ROADSTRUM, W. H., WOLAVER, D. H., (1987), *"Electrical Engineering"*, 2nd. Ed., John Wiley & Sons, New York:527.

ROBINSON, M. J., (1988), *"Finite Element Calculation of Equivalent Circuit Parameters for Induction Motors"*, Ph.D. Thesis, University of London:14-15.

SABONNADIÈRE, J. C., COULOMB, J. L., (1987), *"Finite Element Methods in CAD"* English Translation, Translated by S.J. SALON, 1st. ed., North Oxford Publishers Ltd., London:117-181.

SHEPARD, M. S., (1985), *"Automatic and Adaptive Mesh Generation"*, IEEE Trans On Magnetics, Vol.MAG-21, No. 6.

SHILLING, J. W., HOUZE, G. L., (1974), *"Magnetic Properties and Domain Structure in Grain-Oriented 3% Si-Fe"*, IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-10, No.2:195- 222.

SHIRKOOHI, G.H., ARIKAT, M. A. M., (1994), *"Anisotropic Properties of High Permeability Grain-Oriented 3.25% Si-Fe Electrical Steel"*, IEEE Transactions On Magnetics, Vol-MAG-30, No.2:928-930.

SHIRKOOHI, G.H., LIU, J., (1994), *"A Finite Element Method for Modelling of Anisotropic Grain-Oriented Steels"*, IEEE Trans. On Magnetics, Vol-MAG-30, No.2:1078-1080.

SILVESTER, P.P., CHARI, M. V. K., (1970), *"Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems"*, IEEE Trans. On PAS., Vol.PAS-89, no.7:1642- 1648.

SILVESTER, P.P., CABAYAN, H.S., BROWNE, B., (1973), *"Efficient Techniques for Finite-Element Analysis of Electric Machines"*, IEEE Trans. On PAS., Vol.PAS-92:1274-1281.

SILVESTER, P., LOWTHER, D., CARPENTER, C. J., WYATT, E. A., (1977), *"Exterior finite Elements for 2-Dimensional Field Problems with Open Boundaries"* Proc. IEE, Vol-124, No.12:688-788.

SILVESTER, P.P., GUPTA, R. P., (1991), *"Effective Computational Models for Anisotropic soft B-H Curves"*, IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-27, No.5:3804-3807

SILVESTER, P.P., FERRARI, R.L., (1996), *"Finite Element for Electrical Engineers"*, 3rd. ed., Cambridge University Press, Cambridge.

TANDON, S. C., RICHTER, E., CHARL, M. V. K., (1980), "*Finite Elements and Electric Machine Design*", IEEE Transactions On Magnetism, Vol.MAG-16, No.5:1020-1022

WIDROW AND LEHR, M.A., (1990), "*Perceptron, Madaline, and Back Propagation*", Proceedings of the IEEE vol. 78 No.9:1417-1439.

WILLIAMSON, S., BEGG, M. C., (1985), "*Calculation of the Bar Resistance and Leakage Reactance of Cage Rotors with Closed Slots*", IEE Proc., Vol-132, Pt.B, No.3:125-133.

WILLIAMSON, S., LIM, L. H., ROBINSON, M. J., (1990), "*Finite- Element Models for Cage Induction Motor Analysis*", IEEE Trans.. On Industrial Applications, Vol-26, No.6:1007-1017.

YU, C., BASAK, A., (1993), "*Optimum Design of Transformer Cores by Analysing Flux and Iron Loss with the Aid of a Novel Software*", IEEE Trans. On Magnetism, Vol.MAG-29, No.2:1446-1449.

ZHU, Z. Q., HOWE, D., (1993), "*Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet DC Motors, Part II: Armature-Reaction Field*", IEEE Trans. On. Magnetism, Vol.MAG-29, No.1:136-142.

**ÖZGEÇMİŞ**

|               |            |                                                                                   |
|---------------|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Doğum tarihi  | 15.10.1965 |                                                                                   |
| Doğum yeri    | Kütahya    |                                                                                   |
| Lise          | 1980-1983  | Kütahya Endüstri Meslek Lisesi                                                    |
| Lisans        | 1983-1989  | Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fak.<br>Elektrik Mühendisliği Bölümü              |
| Yüksek Lisans | 1989-1991  | Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü<br>Elektrik Müh. Anabilim Dalı |
| Doktora       | 1991-2001  | Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü<br>Elektrik Müh. Anabilim Dalı |

**Çalıştığı kurum(lar)**

|                   |                                                                                     |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1989-1990         | ER-ER Mühendislik San. ve Tic. Ltd. Şti.                                            |
| 1990-1994         | YTÜ Müh. Fak. Elektrik Müh. Bölümü, Elektrik<br>Makinaları Ana Bilim Dalı Arş. Gör. |
| 1994-devam ediyor | DPÜ Müh. Fak. Elektrik Müh. Bölümü, Elektrik<br>Makinaları Ana Bilim Dalı Öğr. Gör. |