

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BİR
SINIFININ TAYLOR VE HERMİTE SERİLERİ İLE YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİ VE REZİDÜEL HATA ANALİZLERİ

Saba Özge KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Matematik Mühendisliği Programı

Danışman
Doç. Dr. Coşkun GÜLER

Temmuz, 2019

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BİR
SINIFININ TAYLOR VE HERMİTE SERİLERİ İLE YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİ VE REZİDÜEL HATA ANALİZLERİ**

Saba Özge KAYA tarafından hazırlanan tez çalışması çalışması 09.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, Matematik Mühendisliği Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Coşkun GÜLER

Yıldız Teknik Üniversitesi

Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Coşkun GÜLER, Danışman

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ, Üye

Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Volkan OBAN, Üye

İstinye Üniversitesi

Danışmanım Doç. Dr. Coşkun GÜLER sorumluluğunda tarafımda hazırlanan Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlerin Bir Sınıfının Taylor Ve Hermite Serileri İle Yaklaşık Çözümleri Ve Rezidüel Hata Analizleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Saba Özge KAYA

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, hiçbir konuda yardımını esirgemeyen, hoşgörülü, anlayışlı ve güler yüzü ile çalışmamın her aşamasında bana ışık tutan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Coşkun Güler'e teşekkür ederim. Ayrıca tez sürecim boyunca bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, çalışma azmi ve sabrı ile örnek olan Sayın Prof. Dr. Mehmet Sezer'e teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmama teşvik eden, verdiği moral ve destekten dolayı Çağdaş Denel'e ve hayatım boyunca destek ve güvenlerini her zaman yanımda hissettiğim sevgili aileme teşekkür ederim.

Saba Özge KAYA

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	VII
KISALTMA LİSTESİ	VIII
ŞEKİL LİSTESİ	IX
TABLO LİSTESİ	X
ÖZET	XI
ABSTRACT	XIII
1 Giriş	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez	4
2 Yöntemler	5
2.1 Taylor Matris Sıralama Metodu	5
2.2 Hermite Matris Sıralama Metodu	12
2.3 Çözümlerin Doğruluğu ve Rezidüel Hata Analizi	19
3 Araştırma Bulguları	21
3.1 Taylor Matris Sıralama Metodu Kullanılan Örnekler	21
Örnek 1	21
Örnek 2	25
Örnek 3	29
3.2 Hermite Matris Sıralama Metodu Kullanılan Örnekler	33
Örnek 4	34
Örnek 5	39

Örnek 6	45
4 Sonuç ve Öneriler	53
Kaynakça	54
Tezden Üretilmiş Yayınlar	58

SİMGELİSTESİ

$\mathbf{A}$	Bilinmeyen Katsayılar Matrisi
$\mathbf{H}$	Hermite Türev Geçiş Matrisi
N	Kesme Sınırı
$\mathbf{V}$	Lineer Olmayan Terimlerin Matrisi
$\mathbf{W}$	Lineer Terimlerin Matrisi
$\mathbf{X}$	Taylor Türev Geçiş Matrisi
$H_n(x)$	Hermite Polinomları
$R_N(x)$	Rezidüel Hata Fonksiyonu
x_i	Sıralama Noktaları
$y_N(x)$	Yaklaşık Çözüm
$y(x)$	Tam Çözüm
$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}]$	Temel Denkleme Ait Artırılmış Matris
$[\mathbf{U}; \mathbf{O}^*; \boldsymbol{\lambda}]$	Koşullar İçin Artırılmış Matris
$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{V}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$	Koşulları Kullanılmış Yeni Artırılmış Matris

KISALTMA LİSTESİ

AD	Adomian Decomposition (Ayrıştırma) Metot
FRDTM	Kesirli İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi
RK	Runga-Kutta Metot
RMS	Ortalama Hata Kareleri Toplamı Karekökü
RPSM	Artık Güç Serisi Yöntemi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 $N = 2-5$ için Örnek 2'nin gerçek çözümü ile Taylor çözümlerinin karşılaştırılması	28
Şekil 3.2 $N = 2 - 5$ için Örnek 2'nin $\bar{R}_n$ karşılaştırılması.....	29
Şekil 3.3 $N = 2 - 5$ için Örnek 5'in gerçek çözümü ile Hermite yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	43
Şekil 3.4 $N = 2 - 5$ için Örnek 5'in $\bar{R}_n$ karşılaştırılması.....	45

TABLO LİSTESİ

Tablo 3.1 Örnek 1 için $N = 2, 3, 4, 5$ ve $h = 0.1$ olmak üzere mutlak hatalar	24
Tablo 3.2 Örnek 1 için $N = 3, 4, 5$ olmak üzere L_2, L_∞ ve RMS hataları	25
Tablo 3.3 Örnek 2'nin $N = 2, 3, 4, 5$ ve $h = 0.1$ olmak üzere mutlak hataları	28
Tablo 3.4 $h=0.1$ olmak üzere Örnek 3'ün nümerik çözümleri	33
Tablo 3.5 Örnek 4 için $N = 2 - 5$ ve $h = 0.1$ olmak üzere mutlak hatalar	38
Tablo 3.6 Örnek 4 için $N = 2 - 5$ olmak üzere L_2, L_∞ ve RMS hataları	38
Tablo 3.7 Örnek 4 için $N = 5$ ve $h = 0.1$ olmak üzere tam çözüm ile Taylor ve Hermite yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	39
Tablo 3.8 $N=2-5$ ve $h=0.1$ için Örnek 5'in mutlak hataları.....	43
Tablo 3.9 $N=5$ and $h=0.1$ için Örnek 5'in gerçek çözüm ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	44

Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlerin Bir Sınıfının Taylor Ve Hermite Serileri İle Yaklaşık Çözümleri Ve Rezidüel Hata Analizleri

Saba Özge KAYA

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Coşkun GÜLER

Bu çalışmada, Taylor polinomları ve sıralama noktalarına dayanan bir matris metodu, matematik, fizik ve mühendislik alanlarında birçok uygulamaları olan lineer olmayan yüksek mertebeden adi bir diferansiyel denklem sınıfının yaklaşık çözümü için sunulmuştur. Kesilmiş Taylor polinomlarının matris formları ve bunların türevleri vasıtasıyla, kullandığımız teknik, karışık şartlarla lineer olmayan denklemin çözümünü, bilinmeyen Taylor katsayıları ile lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemine karşılık gelen bir matris denkleminin çözümüne indirgemektedir.

Ayrıca, karışık koşullar altında lineer olmayan terimlerle yüksek mertebeden adi bir diferansiyel denklemi çözmek için bir Hermite polinomu yaklaşımı da sunulmuştur. Kullandığımız yöntem, kesilmiş Hermite serileri ile birlikte sıralama noktalarına dayanan bir matris yöntemidir ve denklemin çözümünü bilinmeyen Hermit katsayıları ile lineer olmayan cebirsel denklem sistemine

karşılık gelen bir matris denkleminin çözümüne indirgemektedir. Ek olarak, yöntemin geçerliliği ve uygulanabilirliğini göstermek için, rezidüel hata analizi ile birlikte bazı sayısal örnekler uygulanmış ve elde edilen sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Taylor Polinomları ve Serileri, Hermite Polinomları ve Serileri, Rezidüel Hata Analizi, Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemler, Matris ve Sıralama Yöntemi

Approximate Solutions Of A Class of Nonlinear Ordinary Differential Equations In Taylor And Hermite Series And Residuel Error Analyses

Saba Özge KAYA

Department of Mathematical Engineering

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Coskun GULER

In this study, a matrix method based on Taylor polynomials and collocation points is presented for the approximate solution of a class of nonlinear differential equations, which have many applications in mathematics, physics and engineering. By means of matrix forms of the truncated Taylor polynomials and their derivatives, the technique we have used reduces the solution of the nonlinear equation with mixed conditions to the solution of a matrix equation which corresponds to a system of nonlinear algebraic equations with the unknown Taylor coefficients.

Moreover, it is also presented a Hermite polynomial approach for solving a high-order ordinary differential equation with nonlinear terms under mixed conditions. The method we used is a matrix method based on collocation points together with truncated Hermite series and reduces the solution of equation to solution of a matrix equation which corresponds to a system of nonlinear algebraic equations with unknown Hermite coefficients. In addition, to illustrate the validity and applicability of the method, some numerical examples together

with residual error analysis are performed and the obtained results are compared with the existing result in literature.

Keywords: Taylor Polynomials And Series, Hermite Polynomials And Series, Residual Error Analysis, Nonlinear Ordinary Differential Equations, Matrix And Collocation Method

1.1 Literatür Özeti

Son yıllarda,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x)y^{(k)}(x) + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p Q_{pq}(x)y^{(p)}(x)y^{(q)}(x) = g(x) \quad (1.1)$$

yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(a_{kj}y^{(k)}(a) + b_{kj}y^{(k)}(b) + c_{kj}y^{(k)}(c) \right) = \lambda_j \quad (1.2)$$

$$a \leq c \leq b, j = 0, 1, \dots, m-1$$

karışık koşulları göz önüne alınarak ve $-\infty < a \leq x \leq b < \infty$ aralığında $P_k(x), Q_{pq}(x)$ ve $g(x)$ tanımlı fonksiyonlar olup a_{kj}, b_{kj}, c_{kj} ve λ_j uygun sabitler ve $y(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere oluşturulan (1.1) - (1.2) tipindeki doğrusal olmayan problemlere biyoloji, fizik ve mühendislik uygulamalarında artan bir ilgi olduğu iyi bilinmektedir. Lineer olmayan adi diferansiyel denklemler birçok fiziksel ve teknik uygulamada önemli bir rol oynar ve kimyasal reaksiyonlar, yay kütle sistemleri, kırılganların bükülmesi ve benzeri gibi birçok fiziksel durumun modellenmesi için gerekli araçlardır [1-3,28,29]. Bu tip denklemlerin çoğunun analitik çözümü yoktur ve yaklaşık çözümler elde etmek için sayısal yöntemler gereklidir [1-3].

Ayrıca, sayısal çözüm yöntemleri pek çok yazar tarafından çok hızlı ve yoğun olarak geliştirilmiştir [1,2,3,13,14,15,16,22,23,24]. [17] 'de, artık güç serisi yöntemi (RPSM) kullanımına dayalı Fredholm-Integral denklemlerinin sistemi

için analitik yaklaşık çözümleri elde etmek için yeni bir analitik teknik sunuldu. [18] 'de Caputo fraksiyonel türev anlamında yeni bir genel form kesirli güç serisi tanıtıldı. Genelleştirilmiş Taylor serisi formülüne dayalı yaklaşık diferansiyel cebirsel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için nispeten yeni bir analitik yinelemeli teknik uygulamalar ve analiz, Caputo anlamda, sırasıyla [19,20] 'de Kesirli İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemini (FRDTM) kullanarak uygun başlangıç koşullarına tabi olan bir lineer olmayan kesirli Klein-Gordan denklemi sınıfının çözümlerini sağlamak için analitik-sayısal bir yaklaşım sunar.

Son zamanlarda, Sezer ve arkadaşları [4,25,6,30,31,32], özel polinomlar açısından lineer ve lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemleri çözmek için matris ve sıralama yöntemlerini sunmuşlardır.

Bu çalışmada, M. Sezer ve iş arkadaşları [4-6] tarafından verilen sıralama noktalarına dayanan matris metotları kullanılarak, Taylor'da ve Hermite'de eşdeğer (1.1) denkleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için yeni sayısal metotlar geliştirdik. Bunlardan birincisi için kullanılan kesilmiş seri formu aşağıdaki gibi olan

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n, \quad a \leq x \leq b \quad (1.3)$$

ve belirlenecek olan bilinmeyen katsayılar $a_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots, N \geq m$ olmak üzere, $y_N(x), a \leq x \leq b$ aralığında N. derece Taylor polinomudur.

Belirtilen ikinci metot için kullanılan diğer kesilmiş seri formu

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(x), \quad -\infty < a \leq x \leq b < \infty \quad (1.4)$$

şeklinde olan ve belirlenecek olan bilinmeyen Hermite katsayılar $a_n, n = 0, 1, \dots, N \geq m$ olmak üzere

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n! 2^{n-2k}}{(n-2k)! k!} x^{n-2k} \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanan $H_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N$, Hermite polinomlarıdır. $y_N(x)$, $-\infty < a \leq x \leq b < \infty$ aralığında N . derece Hermite polinomudur.

Hermite polinomları, ortogonal polinomlar ailesi içerisinde. Bu polinomlar iyi yakınsama özelliklerine sahiptir. $-\infty < a \leq x \leq b < \infty$ aralığında $w(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $H_n(x)$ Hermite polinom ailesi, (1.5) serisel gösterimine sahip olup

$$(H_m, H_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad ; m \neq n$$

denklemleri ile ortogonaliteyi ifade edilir.

$m = n$ durumunda ise Hermite polinomunun normu elde edilir:

$$(H_n, H_n) = \|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

$$\|H_n\| = (2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}.$$

Ve genellikle Rodriguez formülü ile gösterilirler:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}.$$

Buradan elde edilen ilk birkaç Hermite polinomları aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x,$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.$$

Ayrıca Hermite polinomları, rekürans formülünü sağlar:

$$H'_0(x) = 0, H'_1(x) = 2H_0(x)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı, (1.1) tipindeki m . mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin bir sınıfının (1.2) karışık koşulları altında, yaklaşık çözümlerini (1.3)-(1.4) şeklinde sırası ile sonlu Taylor serisi ve sonlu Hermite serisi formunda bulmak amacı ile, “Taylor Matris Yaklaşımı” ve “Hermite Matris Yaklaşımı” isimlerinde iki ayrı sayısal metotlarını geliştirmektir. Bunlardan ilki olan Taylor Matris Yaklaşımı, Taylor polinomlarının ve türevlerinin matris formlarını kullanarak, sözü geçen diferansiyel denklemlerin karışık koşullarına göre yaklaşık çözümünü, bilinmeyen Taylor seri katsayılarının bulunduğu bir lineer olmayan matris denkleminin çözümüne indirger. Benzer şekilde Hermite Matris Yaklaşımı, Hermite polinomlarının ve bunların türevlerinin matris biçimlerini kullanarak, istenilen diferansiyel denklemlerin karışık koşullarına göre yaklaşık çözümünü, bilinmeyen Hermite katsayılarının olduğu bir lineer olmayan matris denkleme indirger. Ek olarak, Ortalama Değer teoremi ve rezidüel fonksiyon kullanarak hataların üst sınırını belirleyen bir fonksiyon gösterilir ve metotların doğruluğunu göstermek adına detaylı örnekler verilir. Verilen iki yöntem birbiri ile karşılaştırılıp literatürdeki yöntemlerle kıyaslanır.

1.3 Hipotez

(1.1) formundaki m . mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin bir sınıfının, (1.2) şeklindeki belirli koşullar altında yaklaşık çözümlerini bulmak için Taylor matris yaklaşımı ve Hermite matris yaklaşımı metodu sunulmuştur. Belirtilen yöntemler ile elde edilen yaklaşık çözümler problemin analitik çözümü ve literatürdeki yöntemler aracılığı ile bulunun yaklaşık çözümleri ile yakınlık göstermesi yöntemlerin doğruluğu ve güvenilirliği konusunda bilgi vermiştir. Ayrıca, rezidüel hata analizi ile hataların üst sınırını belirleyen bir teknik sunularak tam çözümü bilinmeyen problemlere bir hata tahmini yapılmıştır.

2.1 Taylor Matris Sıralama Metodu

Bu bölümde m . mertebeden lineer olmayan (1.1) adi diferansiyel denkleminin (1.2) karışık koşulları altında

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n, \quad a \leq x \leq b$$

kesilmiş Taylor serisi formunda nümerik çözümlerini elde etmek için, Taylor polinomları ve kollokasyon noktaları kullanılarak, Taylor matris sıralama metodu ifade edilecektir.

2.1.1 Taylor Matris Sıralama Metodu İçin Temel Matris Bağlılıkları

Şimdi (1.1) denklemini göz önünde bulunduruyoruz ve denklemden her bir terimin matris formlarını buluyoruz. İlk önce (1.3) ile tanımlanan Taylor polinom denklemini aşağıdaki matris formuna dönüştürürüz:

$$y(x) \cong \mathbf{X}(x)\mathbf{A} \quad (2.1)$$

Burada $\mathbf{X}(x)$ ve $\mathbf{A}$ matrisi şöyle tanımlanır:

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad \dots \quad x^N], \mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T.$$

Bunun yanı sıra, açık bir şekilde $\mathbf{X}(x)$ matrisi ve bunun türevleri olan $\mathbf{X}^{(k)}(x)$ matrisleri arasında rekürans ilişkisi olduğu aşağıda görülmektedir:

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2$$

$$\mathbf{X}^{(3)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^3$$

⋮

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k, k = 0, 1, \dots, m \quad (2.2)$$

Burada $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{B}^k$ matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanır[7]:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}.$$

(2.1) ve (2.2) bağıntılarından

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{A} \quad (2.3)$$

$$= \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k\mathbf{A}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

matris ilişkisi elde edilir.

Ek olarak, (2.1) ve (2.3) bağıntıları ile benzer hesaplamalar yaparak $(y^{(0)}(x))^2$, $y^{(1)}(x)y^{(0)}(x)$, $(y^{(1)}(x))^2$, $y^{(2)}(x)y^{(1)}(x)$, $y^{(2)}(x)y^{(0)}(x)$ ve $(y^{(2)}(x))^2$ ifadelerinin aşağıdaki matris formları elde edilir[4,6]:

$$(y^{(0)}(x))^2 = \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(x)\bar{\mathbf{A}} \quad (2.4)$$

$$y^{(1)}(x)y^{(0)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(x)\bar{\mathbf{A}} \quad (2.5)$$

$$(y^{(1)}(x))^2 = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(x)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}} \quad (2.6)$$

$$y^{(2)}(x)y^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}} \quad (2.7)$$

$$y^{(2)}(x)y^{(0)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x)\bar{\mathbf{A}} \quad (2.8)$$

$$(y^{(2)}(x))^2 = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x)\bar{\mathbf{B}}^2 \quad (2.9)$$

Elde edilen matrislerde kullanılan yardımcı matrisler aşağıda belirtilmiştir:

$$y^{(0)}(x) = y(x), \quad y^{(1)}(x) = y'(x), \quad y^{(2)}(x) = y''(x)$$

$$\bar{\mathbf{X}}(x) = \text{diag}[\mathbf{X}(x) \quad \mathbf{X}(x) \quad \dots \quad \mathbf{X}(x)]; \quad \bar{\mathbf{X}}(x)_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

$$\bar{B} = \text{diag}[\mathbf{B} \quad \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{B}]; \bar{B}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

$$\overline{B^2} = \text{diag}[\mathbf{B}^2 \quad \mathbf{B}^2 \quad \dots \quad \mathbf{B}^2]; \overline{B^2}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_0 \mathbf{A} \\ a_1 \mathbf{A} \\ \vdots \\ a_N \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}.$$

Sıralama noktaları

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, i = 0, 1, \dots, N; a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.10) sıralama noktalarını, (1.1) denkleminde yerine yazarak $i = 0, 1, \dots, N$ için aşağıdaki matris denklem sistemi elde edilir:

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i) y^{(k)}(x_i) + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p Q_{pq}(x_i) y^{(p)}(x_i) y^{(q)}(x_i) = g(x_i).$$

Kısaca kompakt olarak yazarsak

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{Y}^{(k)} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{Y}^{(p,q)} = \mathbf{G} \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilir.

Buradaki matrislerin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{P}_k = \text{diag}[P_k(x_0) \quad P_k(x_1) \quad \dots \quad P_k(x_N)]$$

$$\mathbf{Q}_{pq} = \text{diag}[Q_{pq}(x_0) \quad Q_{pq}(x_1) \quad \dots \quad Q_{pq}(x_N)]$$

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}^{(p,q)} = \begin{bmatrix} y^{(p)}(x_0)y^{(q)}(x_0) \\ y^{(p)}(x_1)y^{(q)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(p)}(x_N)y^{(q)}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

(2.10) sıralama noktaları, bağıntı (2.3)'ün içine yazılır ve bir matris denklemi elde edilir.

$$y^{(k)}(x_i) = \mathbf{X}(x_i)\mathbf{B}^k\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{X}\mathbf{B}^k\mathbf{A} \quad (2.12)$$

$\mathbf{Y}^{(k)}$ matrisi sıralama noktalarının k . türevlerinin $(N \times 1) \times 1$ boyutlu matrisini, $\mathbf{X}$ matrisi ise bu noktaların $((N+1) \times (N+1))$ boyutlu N . dereceye kadar olan türevlerinin matrisidir:

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{bmatrix}.$$

Diğer taraftan denklem (11) in lineer olmayan kısmını aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{Y}^{(p,q)} = \mathbf{Q}_{00} \mathbf{Y}^{(0,0)} + \mathbf{Q}_{10} \mathbf{Y}^{(1,0)} + \mathbf{Q}_{11} \mathbf{Y}^{(1,1)} +$$

$$\mathbf{Q}_{20} \mathbf{Y}^{(2,0)} + \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Y}^{(2,1)} + \mathbf{Q}_{22} \mathbf{Y}^{(2,2)}.$$

(10) sıralama noktalarını, sırası ile (9-1), (9-2), (9-3), (9-4), (9-5) ve (9-6) bağıntılarına yerleştirerek $\mathbf{Y}^{(0,0)}$, $\mathbf{Y}^{(1,0)}$, $\mathbf{Y}^{(1,1)}$, $\mathbf{Y}^{(2,0)}$, $\mathbf{Y}^{(2,1)}$ and $\mathbf{Y}^{(2,2)}$ matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{(0,0)} &= \mathbf{X}_{0,0}^* \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{Y}^{(1,0)} &= \mathbf{X}_{1,0}^* \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{Y}^{(1,1)} &= \mathbf{X}_{1,1}^* \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{Y}^{(2,0)} &= \mathbf{X}_{2,0}^* \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{Y}^{(2,1)} &= \mathbf{X}_{2,1}^* \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{Y}^{(2,2)} &= \mathbf{X}_{2,2}^* \bar{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Burada matrislerin elde edilmesi $\mathbf{X}, \mathbf{B}, \bar{\mathbf{X}}$ ve $\bar{\mathbf{B}}$ matrislerinin sıralama noktalarındaki değerleri ve $\mathbf{A}$ matrisi ile ilişkilidir. Açık ifadeleri aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{0,0}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0)\bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1)\bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N)\bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix} & \mathbf{X}_{1,0}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix} \\ \mathbf{X}_{1,1}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(x_0)\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{X}(x_1)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(x_1)\bar{\mathbf{B}} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(x_N)\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} & \mathbf{X}_{2,0}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix} \\ \mathbf{X}_{2,1}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x_0)\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{X}(x_1)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x_1)\bar{\mathbf{B}} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x_N)\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} & \mathbf{X}_{2,2}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x_0)\bar{\mathbf{B}}^2 \\ \mathbf{X}(x_1)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x_1)\bar{\mathbf{B}}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N)\mathbf{B}^2\bar{\mathbf{X}}(x_N)\bar{\mathbf{B}}^2 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{A}} &= [\mathbf{a}_0\mathbf{A} \quad \mathbf{a}_1\mathbf{A} \quad \dots \quad \mathbf{a}_N\mathbf{A}]^T. \end{aligned}$$

2.1.2 Çözüm Yöntemi

Matris bağıntıları (2.12) ve (2.13)'ü Denklem (2.11)'e ekleyerek temel matris denklemini elde edilir:

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \mathbf{A} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{X}_{p,q}^* \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}.$$

Kısaca kompakt halde (2.14) denklemine ulaşılır.

$$\mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{V}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G} \quad (2.14)$$

Buradaki temel matris denklemindeki lineer kısım $\mathbf{W}$ matrisi ve lineer olmayan kısım $\mathbf{V}$ matrisini temsil eder.

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k = [w_{ij}]; \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$\mathbf{V} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{X}_{p,q}^* = [v_{mn}]; \quad m = 0, 1, \dots, N \quad n = 0, 1, \dots, (N+1)^2 - 1$$

Aynı zamanda, (2.14) temel matris denklemi genişletilmiş matris formunda kompakt olarak

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}] \quad (2.15)$$

yazılır.

Açık olarak

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} ; & v_{00} & v_{01} & \cdots & v_{0(N+1)^2-1} : & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} ; & v_{10} & v_{11} & \cdots & v_{1(N+1)^2-1} : & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} ; & v_{N0} & v_{N1} & \cdots & v_{N(N+1)^2-1} : & g(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Ayrıca, (2.3) matris ilişkisini kullanarak (1.2) deki karma koşulların temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} \mathbf{X}(a) + b_{kj} \mathbf{X}(b) + c_{kj} \mathbf{X}(c)) \mathbf{B}^k \mathbf{A} = [\lambda_j]$$

olarak yazılır.

Kısaca

$$\mathbf{U} \mathbf{A} + \mathbf{O}^* \bar{\mathbf{A}} = \lambda \Rightarrow [\mathbf{U}; \mathbf{O}^*; \lambda] \quad (2.16)$$

ve anlaşılır bir ifade ile

$$[\mathbf{U}; \mathbf{O}^*; \boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 & : & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 & : & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 & : & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

genişletilmiş matrisi olarak ifade edilir.

Buradaki $\mathbf{U}$, $\mathbf{O}^*$ ve $\boldsymbol{\lambda}$ matrisleri sırası ile

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}]; j = 0, 1, \dots, m-1 \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj}\mathbf{X}(a) + b_{kj}\mathbf{X}(b) + c_{kj}\mathbf{X}(c))\mathbf{B}^k \\ \mathbf{O}^* &= [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \text{ (sıfır matrisi)}; \mathbf{O}^*_{m \times (N+1)^2} \\ \boldsymbol{\lambda} &= [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_{m-1}]^T \end{aligned}$$

matrislerini temsil eder.

Sonuç olarak, a_n ($n = 0, 1, \dots, N$) Taylor katsayılarını bulmak için, (1.1)-(1.2) probleminin (1.3) şeklindeki yaklaşık çözümü ile ilgili olarak, (2.15) deki genişletilmiş matrisin son m satırını (ya da herhangi bir m satırını) (2.16) daki genişletilmiş matrisin m satırı ile yer değiştirerek, yeni genişletilmiş matris (2.17) elde edilir.

$$\begin{aligned} &[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{V}}; \widetilde{\mathbf{G}}] \\ &= \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N}; & v_{00} & v_{01} & \cdots & v_{0(N+1)^2-1}; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N}; & v_{10} & v_{11} & \cdots & v_{1(N+1)^2-1}; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N}; & v_{N-m,0} & v_{N-m,1} & \cdots & v_{N-m,(N+1)^2-1}; & g(x_N) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (2.17) \end{aligned}$$

Bu lineer olmayan sistemden, ki bu $\widetilde{W}A + \widetilde{V}\bar{A} = G$ matris denklemdir, bilinmeyen Taylor katsayıları a_n ($n = 0, 1, \dots, N$) hesaplanır. Bu katsayılar (1.3)'te yerine yazılarak

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$$

kesilmiş Taylor serisi yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

2.2 Hermite Matris Sıralama Metodu

Bu bölümde m. Mertebeden lineer olmayan (1.1) diferansiyel denkleminin (1.2) karışık koşulları altında

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(x) \quad , -\infty < a \leq x \leq b < \infty .$$

kesilmiş Hermite serisi formunda nümerik çözümlerini elde etmek için, Hermite polinomları ve kollokasyon noktaları kullanılarak, Hermite matris sıralama metodu ifade edilecektir. Burada $H_n(x)$, Hermite polinomlarını ve a_n , $n = 0, 1, \dots, N \geq m$, bilinmeyen Hermite katsayılarını göstermektedir.

Hermite polinomları (1.5) ifadesi ile tanımlanmaktadır:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n! 2^{n-2k}}{(n-2k)! k!} x^{n-2k}.$$

Belirtilen bu polinomlar $(-\infty, \infty)$ aralığında $w(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler ve genellikle Rodrigues formülü ile ifade edilirler:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}. \quad (2.18)$$

İlk birkaç hermite polinomu, (1.5) ve (2.18) arasındaki bağıntı ile aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 120, H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x, \\ H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120. \end{aligned}$$

Ayrıca $H_n(x)$, Hermite polinomları dizisi rekürans bağıntısına sahiptir.

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= 2nH_{n-1}(x) \\ H'_0(x) &= 0, H'_1(x) = 2H_0(x) \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.2.1 Hermite Matris Sıralama Metodu İçin Temel Matris Bağıntıları

Şimdi m . mertebeden lineer olmayan (1.1) diferansiyel denklemini göz önünde bulunduruyoruz ve denklemde her bir terimin matris formlarını buluyoruz. İlk önce (1.4) ile tanımlanan kesilmiş Hermite serisini aşağıdaki matris formuna dönüştürürüz:

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{A} \quad (2.20)$$

Burada $\mathbf{H}(x)$, Hermite polinom matrisi ve $\mathbf{A}$ bilinmeyen Hermite katsayılar matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x) &= [H_0(x) \quad H_1(x) \quad \cdots \quad H_N(x)] \\ \mathbf{A} &= [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T. \end{aligned}$$

Aynı zamanda (2.19) ifadesini kullanarak, $n = 0, 1, \dots, N$ için, $\mathbf{H}(x)$ ve bunların türevleri olan $\mathbf{H}^{(k)}(x)$ matrisleri arasında bir rekürans bağıntısı buluruz:

$$\mathbf{H}^{(k)}(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^k, k = 0, 1, \dots, m \quad (2.21)$$

Kullanılan $\mathbf{M}^k$ matrisinin birim ve genel matrisinin açık ifadesi şöyledir:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

(20) ve (21) ifadelerini kullanarak bir matris ilişkisi elde ederiz:

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &\cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{H}^{(k)}(x)\mathbf{A} \\ &= \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{A}, k = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ek olarak, (2.20) ve (2.22) bağıntıları ile benzer hesaplamalar yaparak $(y^{(0)}(x))^2$, $y^{(1)}(x)y^{(0)}(x)$, $(y^{(1)}(x))^2$, $y^{(2)}(x)y^{(1)}(x)$, $y^{(2)}(x)y^{(0)}(x)$ ve $(y^{(2)}(x))^2$ ifadelerinin aşağıdaki matris formları elde edilir[6,7]:

$$(y^{(0)}(x))^2 = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(x)\bar{\mathbf{A}} \quad (2.23)$$

$$y^{(1)}(x)y^{(0)}(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(x)\bar{\mathbf{A}} \quad (2.24)$$

$$(y^{(1)}(x))^2 = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(x)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} \quad (2.25)$$

$$y^{(2)}(x)y^{(1)}(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(x)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} \quad (2.26)$$

$$y^{(2)}(x)y^{(0)}(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(x)\bar{\mathbf{A}} \quad (2.27)$$

$$(y^{(2)}(x))^2 = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(x)\bar{\mathbf{M}}^2\bar{\mathbf{A}} \quad (2.28)$$

Elde edilen matrislerde kullanılan yardımcı matrisler aşağıda belirtilmiştir:

$$y^{(0)}(x) = y(x), \quad y^{(1)}(x) = y'(x), \quad y^{(2)}(x) = y''(x)$$

$$\bar{\mathbf{H}}(x) = \text{diag}[\mathbf{H}(x) \quad \mathbf{H}(x) \quad \dots \quad \mathbf{H}(x)]; \quad \bar{\mathbf{H}}(x)_{(N+1)x(N+1)^2}$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \text{diag}[\mathbf{M} \quad \mathbf{M} \quad \dots \quad \mathbf{M}]; \quad \bar{\mathbf{M}}_{(N+1)^2x(N+1)^2}$$

$$\bar{\mathbf{M}}^2 = \text{diag}[\mathbf{M}^2 \quad \mathbf{M}^2 \quad \dots \quad \mathbf{M}^2]; \quad \bar{\mathbf{M}}^2_{(N+1)^2x(N+1)^2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1)x1}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_0 A \\ a_1 A \\ \vdots \\ a_N A \end{bmatrix}_{(N+1)^2x1}.$$

Şimdi sıralama noktalarını tanımlayabiliriz:

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N = b. \quad (2.29)$$

(2.29) sıralama noktalarını, (1.1) denkleminde yerine yazarak $i = 0, 1, \dots, N$ için aşağıdaki matris denklem sistemi elde edilir:

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i)y^{(k)}(x_i) + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p Q_{pq}(x_i)y^{(p)}(x_i)y^{(q)}(x_i) = g(x_i).$$

Bu denklem sistemini kompakt form olarak

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{Y}^{(k)} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{Y}^{(p,q)} = \mathbf{G} \quad (2.30)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada matrislerin açık ifadeleri

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \text{diag}[P_k(x_0) \quad P_k(x_1) \quad \dots \quad P_k(x_N)] \\ \mathbf{Q}_{pq} &= \text{diag}[Q_{pq}(x_0) \quad Q_{pq}(x_1) \quad \dots \quad Q_{pq}(x_N)] \\ \mathbf{Y}^{(k)} &= \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(p,q)} = \begin{bmatrix} y^{(p)}(x_0)y^{(q)}(x_0) \\ y^{(p)}(x_1)y^{(q)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(p)}(x_N)y^{(q)}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklindedir.

(2.29) sıralama noktalarını (2.22) matris bağıntısına koyarak, matris denklemi elde ederiz:

$$y^{(k)}(x_i) = \mathbf{H}(x_i) \mathbf{M}^k \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{H} \mathbf{M}^k \mathbf{A} \quad (2.31)$$

Burada $\mathbf{H}$ matrisi

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(x_0) \\ \mathbf{H}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0(x_0) & H_1(x_0) & \dots & H_N(x_0) \\ H_0(x_1) & H_1(x_1) & \dots & H_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0(x_N) & H_1(x_N) & \dots & H_N(x_N) \end{bmatrix}.$$

olarak verilir.

Diğer taraftan denklem (2.30) 'un lineer olmayan kısmı aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{Y}^{(p,q)} = \mathbf{Q}_{00} \mathbf{Y}^{(0,0)} + \mathbf{Q}_{10} \mathbf{Y}^{(1,0)} + \mathbf{Q}_{11} \mathbf{Y}^{(1,1)} + \quad (2.32)$$

$$\mathbf{Q}_{20} \mathbf{Y}^{(2,0)} + \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Y}^{(2,1)} + \mathbf{Q}_{22} \mathbf{Y}^{(2,2)}$$

(2.29) sıralama noktalarını, sırası ile (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (2.27) ve (2.28) bağıntılarına yerleştirerek $\mathbf{Y}^{(0,0)}$, $\mathbf{Y}^{(1,0)}$, $\mathbf{Y}^{(1,1)}$, $\mathbf{Y}^{(2,0)}$, $\mathbf{Y}^{(2,1)}$ and $\mathbf{Y}^{(2,2)}$ matrisleri aşağıdaki formlarda elde edilir:

$$Y^{(0,0)} = H_{0,0}^* \bar{A} \quad Y^{(1,0)} = H_{1,0}^* \bar{A} \quad Y^{(1,1)} = H_{1,1}^* \bar{A} \quad (2.33)$$

$$Y^{(2,0)} = H_{2,0}^* \bar{A} \quad Y^{(2,1)} = H_{2,1}^* \bar{A} \quad Y^{(2,2)} = H_{2,2}^* \bar{A}$$

Burada matrislerin elde edilmesi $H, M, \bar{H}$ ve $\bar{M}$ matrislerinin sıralama noktalarındaki değerleri ve A matrisi ile ilişkilidir. Açık ifadeleri aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{aligned} H_{0,0}^* &= \begin{bmatrix} H(x_0)\bar{H}(x_0) \\ H(x_1)\bar{H}(x_1) \\ \vdots \\ H(x_N)\bar{H}(x_N) \end{bmatrix}, & H_{1,0}^* &= \begin{bmatrix} H(x_0)M\bar{H}(x_0) \\ H(x_1)M\bar{H}(x_1) \\ \vdots \\ H(x_N)M\bar{H}(x_N) \end{bmatrix} \\ H_{1,1}^* &= \begin{bmatrix} H(x_0)M\bar{H}(x_0)\bar{M} \\ H(x_1)M\bar{H}(x_1)\bar{M} \\ \vdots \\ H(x_N)M\bar{H}(x_N)\bar{M} \end{bmatrix}, & H_{2,0}^* &= \begin{bmatrix} H(x_0)M^2\bar{H}(x_0) \\ H(x_1)M^2\bar{H}(x_1) \\ \vdots \\ H(x_N)M^2\bar{H}(x_N) \end{bmatrix} \\ H_{2,1}^* &= \begin{bmatrix} H(x_0)M^2\bar{H}(x_0)\bar{M} \\ H(x_1)M^2\bar{H}(x_1)\bar{M} \\ \vdots \\ H(x_N)M^2\bar{H}(x_N)\bar{M} \end{bmatrix}, & H_{2,2}^* &= \begin{bmatrix} H(x_0)M^2\bar{H}(x_0)\bar{M}^2 \\ H(x_1)M^2\bar{H}(x_1)\bar{M}^2 \\ \vdots \\ H(x_N)M^2\bar{H}(x_N)\bar{M}^2 \end{bmatrix} \\ \bar{A} &= [a_0 A \quad a_1 A \quad \dots \quad a_N A]^T \end{aligned}$$

2.2.2 Çözüm Yöntemi

Şimdi m. mertebeden lineer olmayan (1.1) denkleminin karşılık gelen temel matris denklemini oluşturmaya hazırız. Bu amaçla, (2.31)-(2.33) deki matris bağıntılarını (2.30)'daki denkleminde yerine koyarak, temel matris denklemini,

$$\sum_{k=0}^m P_k H M^{(k)} A + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p Q_{pq} H_{(p,q)}^* \bar{A} = G$$

şeklinde ortaya çıkar ve kompakt halde

$$WA + V\bar{A} = G \quad (2.34)$$

olarak gösterilir; öyle ki

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{H} \mathbf{M}^k = [w_{ij}] ; \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$\mathbf{V} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{H}_{p,q}^* = [v_{mn}] ; \quad m = 0, 1, \dots, N; n = 0, 1, \dots, (N+1)^2 - 1.$$

Buradaki temel matris denklemindeki lineer kısım $\mathbf{W}$ matrisi ve lineer olmayan kısım $\mathbf{V}$ matrisini temsil eder.

Aynı zamanda (2.34) matris denklemini genişletilmiş matris formunda

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}]$$

ya da açık ifadesi ile

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} ; & v_{00} & v_{01} & \cdots & v_{0(N+1)^2-1} : & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} ; & v_{10} & v_{11} & \cdots & v_{1(N+1)^2-1} : & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} ; & v_{N0} & v_{N1} & \cdots & v_{N(N+1)^2-1} : & g(x_N) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bunun yanında, (2.22) matris bağıntısı yardımı ile, (1.2) karışık koşulları için matris bağıntısı

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} \mathbf{H}(a) + b_{kj} \mathbf{H}(b) + c_{kj} \mathbf{H}(c)) \mathbf{M}^k \mathbf{A} = [\lambda_j]$$

olarak elde edilir veya kısaca

$$\mathbf{U} \mathbf{A} + \mathbf{O}^* \bar{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\lambda} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{U}; \mathbf{O}^*; \boldsymbol{\lambda}]$$

veya anlaşılır biçimde

$$[\mathbf{U}; \mathbf{O}^*: \boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 : & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 : & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 : & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\mathbf{U} = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}] ; \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} \mathbf{X}(a) + b_{kj} \mathbf{X}(b) + c_{kj} \mathbf{X}(c)) \mathbf{B}^k$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_{m-1}]^T$$

$$\mathbf{O}^* = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \text{ (sıfır matrisi).}$$

Sonuç olarak, a_n ($n = 0, 1, \dots, N$) Hermite katsayılarını bulmak için, (1.1) denkleminin (1.2) karışık koşulları altındaki (1.4) yaklaşık çözümü ile alakalı, (2.35) genişletilmiş matrisin son m tane satır matrisini (ya da herhangi bir m satırını) (2.36) genişletilmiş matrisin m satırı ile yer değiştirerek, yeni genişletilmiş matris elde edilir.

$$[\widetilde{\mathbf{W}}: \widetilde{\mathbf{V}}: \widetilde{\mathbf{G}}]$$

$$= \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} ; & v_{00} & v_{01} & \cdots & v_{0(N+1)^2-1} ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} ; & v_{10} & v_{11} & \cdots & v_{1(N+1)^2-1} ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} ; & v_{N-m,0} & v_{N-m,1} & \cdots & v_{N-m,(N+1)^2-1} ; & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Bu lineer olmayan cebirsel denklem sistemden, ki bu $\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$ matris denklemdir, bilinmeyen Hermite katsayıları a_n ($n = 0, 1, \dots, N$) hesaplanır. Bu katsayılar (1.4)'te yerine yazılarak

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(x)$$

kesilmiş Hermite serisi yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

2.3 Çözümlerin Doğruluğu ve Rezidüel Hata Analizi

Çalışmada ileri sürülen Taylor matris-sıralama ve Hermite matris-sıralama yöntemleri kullanılarak, sırası ile kesilmiş Taylor serisi ve kesilmiş Hermite serisi formlarında yaklaşık çözümlere ulaşıldığından, bulunan sonuçlar ile gerçek değerinin denklemde verdiği sonucu arasında bir miktar hata oluşması öngörülen bir durumdur. Bu hatayı belirli bir tolerans ile atama yaparak elde edilen çözümlerin doğruluğu aşağıdaki şekilde kontrol edilir[7]. Denklem (1.1)'in (1.3) yaklaşık çözümü kesilmiş Taylor serisi ve (1.4) yaklaşık çözümü kesilmiş Hermite serisi olduğundan, bu $y_N(x)$ polinomları ve türevleri Denklem (1.1)'de yerine yazıldığında lineer olmayan diferansiyel denklem yaklaşık olarak sağlanacaktır. Böylelikle,

$$x = x_l \in [a, b], \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$R_N(x_l) = \left| \sum_{k=0}^m P_k(x_l) y^{(k)}(x_l) + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p Q_{pq}(x_l) y^{(p)}(x_l) y^{(q)}(x_l) - g(x_l) \right| \cong 0$$

ya da

$$R_N(x_l) \leq 10^{-k_l}; \quad k_l \text{ herhangi bir pozitif sayı}$$

biçiminde olacaktır.

$\max 10^{-k_l} = 10^{-k}$ (k pozitif bir sayı) daha önceden belirlenirse, bu durumda her bir nokta için $R_N(x_l)$ farkı önceden belirtilen 10^{-k} dan daha küçük oluncaya kadar N kesme sınırı artırılır. N yeteri kadar büyük olduğunda $R_N(x_l) \rightarrow 0$ denk oluyorsa hata azalıyor demektir.

Diğer tarafından $R_N(x)$ tarafından izah edilen rezidüel hata fonksiyonu ve verilen $[a, b]$ aralığında $|R_N(x)|$ 'in ortalama değer fonksiyonu ile, elde edilen çözümün doğruluğu denetlenebilir ve hata sınırı tahmin edilebilir[8].

Böylece üçgen eşitsizliği ve $|R_N(x)|$ üzerinde ortalama değer teoremini uygulayarak, ortalama hatanın üst sınırı $\bar{R}_n$ aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\left| \int_a^b R_N(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx$$

ve

$$\left| \int_a^b R_N(x) dx \right| = (b-a)|R_N(c)|, a \leq c \leq b$$

kullanılarak

$$\left| \int_a^b R_N(x) dx \right| = (b-a)|R_N(c)| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx$$

$$|R_N(c)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \bar{R}_N$$

elde edilir.

Ek olarak, hata analizinde kullanılan hata normlarından bazıları da kullanılabilir. Bunlardan birkaçı şu şekilde tanımlanmıştır[12]:

$e_i = |y(x_i) - y_N(x_i)|$ ve y ve y_N sırası ile (1.1)-(1.2) probleminin gerçek çözümü ve yaklaşık çözümleri olmak üzere

$$1- L_2 - hata = (\sum_{i=0}^n (e_i)^2)^{1/2}$$

$$2- L_\infty - hata = \max(e_i), 0 \leq i \leq n$$

$$3- RMS - hata = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (e_i)^2}{n+1}}.$$

3.1 Taylor Matris Sıralama Metodu Kullanılan Örnekler

Bu bölümde lineer olmayan diferansiyel denklemlerin bir sınıfının yaklaşık çözümü için sıralama noktalarına dayalı Taylor matris metodu gösterilmektedir. Yöntemin doğruluğu ve geçerliliğini kanıtlamak amacıyla birkaç örnek verilmektedir. Bu örnekler aynı zamanda rezidüel hata analizleri ile birlikte verilmekte ve elde edilen sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. Tüm hesaplamalar MATLAB2017b programında her bir örnek için ayrı olarak yazılmış kodlar kullanılarak elde edilmiştir.

Örnek 1

İlk olarak, gerçek çözümü $y(x) = 1 + 2e^x$ olan

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) + y^2(x) - y''(x)y(x) = g(x) \quad (3.1)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleminin, $g(x) = 2 + 2e^x$ olmak üzere

$$y(0) = 3, y'(0) = 2 \quad (3.2)$$

$$0 \leq x \leq 1$$

koşulları altındaki çözümünü ele alalım. (3.2) koşulları altında (3.1) lineer olmayan diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümlerini bulalım.

Burada, $P_0(x) = 1, P_1(x) = -2, P_2(x) = 1, Q_{00}(x) = 1, Q_{20}(x) = 1, g(x) = 2 + 2e^x$ olup $N = 2$ için Taylor polinomları ile

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n x^n$$

yapısında çözümler araştırılacaktır. $N = 2$ için kollokasyon noktaları

$$\left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\right\}$$

olarak hesaplanır. Problemin ana matris denklemi

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \mathbf{A} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{X}_{p,q}^* \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

$$(\mathbf{P}_0 \mathbf{X} \mathbf{B}^0 + \mathbf{P}_1 \mathbf{X} \mathbf{B}^1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{X} \mathbf{B}^2) \mathbf{A} + (\mathbf{Q}_{00} \mathbf{X}_{0,0}^* + \mathbf{Q}_{20} \mathbf{X}_{2,0}^*) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

şeklinde dir. Buradaki matrisler

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & P_0(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & P_0(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0(0) & 0 & 0 \\ 0 & P_0\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & P_0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{20} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^0 = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \mathbf{X}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{X}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{0,0}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) \bar{\mathbf{X}}(0) \\ \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) \bar{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{X}(1) \bar{\mathbf{X}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{2,0}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) \mathbf{B}^2 \bar{\mathbf{X}}(0) \\ \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{B}^2 \bar{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{X}(1) \mathbf{B}^2 \bar{\mathbf{X}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) \\ g(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 + 2e^{\frac{1}{2}} \\ 2 + 2e \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = [a_0 \mathbf{A} \quad a_1 \mathbf{A} \quad a_2 \mathbf{A}]^T$$

$$= [a_0 a_0 \quad a_0 a_1 \quad a_0 a_2 \quad a_1 a_0 \quad a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \quad a_2 a_0 \quad a_2 a_1 \quad a_2 a_2]^T$$

şeklinde dir. Problem karşılık gelen $[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}]$ matrisi

$$[W; V; G] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & ; & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & ; & 4 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & ; & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{7}{4} & -\frac{7}{8} & -\frac{7}{16} & ; & 2 + 2e^{\frac{1}{2}} \\ 1 & -1 & -1 & ; & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & ; & 2 + 2e \end{bmatrix}$$

olup, verilen koşullara karşılık gelen genişletilmiş matrisleri

$$Y^{(0)} = X(x_i)B^0A = X(0)A = [1 \ 0 \ 0]A = 3$$

$$Y^{(1)} = X(x_i)B^1A = X(0)B^1A = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A = [0 \ 1 \ 0]A = 2$$

kullanılarak

$$[U_0; O^*: \lambda_0] = [1 \ 0 \ 0 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 3]$$

$$[U_1; O^*: \lambda_1] = [0 \ 1 \ 0 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 2]$$

şeklinde ifade edilir. Böylece $[W; V; G]$ matrisinin tercihen son 2 satırının başlangıç koşulları ile yer değiştirilmesi ile elde edilmiş genişletilmiş matris

$$[\widetilde{W}; \widetilde{V}; \widetilde{G}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & ; & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & ; & 4 \\ 1 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 3 \\ 0 & 1 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

formuna dönüşür. Bu matrise karşılık gelen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözülmesi ile Taylor bilinmeyen katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur; katsayıların (1.3) denkleminde yerine yazılması ile $N = 2$ için $y_2(x)$ Taylor yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = 3 + 2x + x^2$$

olarak elde edilir. Bu ifade aynı zamanda problemin tam çözümüne denktir. Benzer şekilde $N = 3, 4, 5$ için yaklaşık çözümler MATLAB2017 programında yazılan kod ile

$$y_3(x) = 3 + 2x + x^2 + 0.3942x^3,$$

$$y_4(x) = 3 + 2x + x^2 + 0.3251x^3 + 0.1072x^4,$$

$$y_5(x) = 3 + 2x + x^2 + 0.334149x^3 + 0.079586x^4 + 0.022571x^5$$

olarak hesaplanır.

Tablo 3.1 ve Tablo 3.2’de $N = 2, 3, 4, 5$ için sırası ile mutlak hatalar ve L_2 , L_∞ ve RMS hataları gösterilmiştir.

Tablo 3.1 Örnek 1 için $N = 2, 3, 4, 5$ ve $h = 0.1$ olmak üzere mutlak hatalar

Mutlak Hatalar				
x_l	e_2	e_3	e_4	e_5
0	0	0	0	0
0.1	3.41836e-04	5.23638e-05	6.01615e-06	4.98080e-07
0.2	2.80552e-03	3.48083e-04	3.31963e-05	2.24337e-06
0.3	9.71762e-03	9.25784e-04	7.15951e-05	3.92686e-06
0.4	2.36494e-02	1.57940e-03	9.86752e-05	4.72833e-06
0.5	4.74425e-02	1.83245e-03	1.05041e-04	5.66754e-06
0.6	8.42376e-02	9.09599e-04	1.22880e-04	8.24884e-06
0.7	1.37505e-01	2.29481e-03	2.57394e-04	1.01147e-05
0.8	2.11082e-01	9.25145e-03	7.21536e-04	2.60625e-06
0.9	3.09206e-01	2.18344e-02	1.87440e-03	6.66051e-05
1	4.36564e-01	4.23636e-02	4.26365e-03	2.56735e-04

Tablo 3.2 Örnek 1 için $N = 3, 4, 5$ olmak üzere L_2, L_∞ ve RMS hataları

N	L_2 -hata	L_∞ -hata	RMS -hata
3	4.86820e-02	4.23636e-02	2.43410e-02
4	4.72452e-03	4.26365e-03	2.11287e-03
5	2.65709e-04	2.56735e-04	1.08475e-04

Örnek 2

İkinci örnekte, gerçek çözümü $y(x) = \sin x$ olan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2(x) = 1 - \sin(x) \quad (3.3)$$

formundaki ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemini

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 \text{ [13]}. \quad (3.4)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım.

(3.4) koşulları altında (3.3) denkleminin yaklaşık çözümlerini gösterelim.

Burada, $P_2(x) = 1, Q_{00}(x) = 1, Q_{11}(x) = 1, g(x) = 1 - \sin(x)$ olup $N = 2$ için Taylor polinomları ile

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n x^n$$

formundadır. $N = 2$ için kollokasyon noktaları

$$\left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\right\}$$

olarak hesaplanır. Problemin ana matris denklemi

$$\sum_{k=0}^2 P_k X B^k A + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p Q_{pq} X_{p,q}^* \bar{A} = G$$

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{X} \mathbf{B}^2 \mathbf{A} + (\mathbf{Q}_{00} \mathbf{X}_{0,0}^* + \mathbf{Q}_{11} \mathbf{X}_{1,1}^*) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

şeklinde olup buradaki matrisler

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \mathbf{X}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{0,0}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) \bar{\mathbf{X}}(0) \\ \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) \bar{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{X}(1) \bar{\mathbf{X}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{1,1}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) \mathbf{B} \bar{\mathbf{X}}(0) \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{B} \bar{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{2}\right) \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{X}(1) \mathbf{B} \bar{\mathbf{X}}(1) \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) \\ g(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 491 \\ 500 \\ 99 \\ 100 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = [a_0 \mathbf{A} \quad a_1 \mathbf{A} \quad a_2 \mathbf{A}]^T$$

$$= [a_0 a_0 \quad a_0 a_1 \quad a_0 a_2 \quad a_1 a_0 \quad a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \quad a_2 a_0 \quad a_2 a_1 \quad a_2 a_2]^T$$

şeklinde. Problem karşılık gelen $[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}]$ matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & ; & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 2 & ; & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} & \frac{9}{8} & \frac{17}{16} & ; & \frac{491}{500} \\ 0 & 0 & 2 & ; & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & ; & \frac{99}{100} \end{bmatrix}$$

olup, verilen koşullara karşılık gelen genişletilmiş matrisleri

$$\mathbf{Y}^{(0)} = \mathbf{X}(x_i) \mathbf{B}^0 \mathbf{A} = \mathbf{X}(0) \mathbf{A} = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{X}(x_i) \mathbf{B}^1 \mathbf{A} = \mathbf{X}(0) \mathbf{B}^1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 1$$

kullanılarak

$$[\mathbf{U}_0; \mathbf{O}^*: \boldsymbol{\lambda}_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_1; \mathbf{O}^*: \boldsymbol{\lambda}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece $[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}]$ matrisinin tercihen son 2 satırının başlangıç koşulları ile yer değiştirilmesi ile elde edilmiş genişletilmiş matris

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{V}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & ; & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

biçimine dönüşür. Bu matrise karşılık gelen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözülmesi ile Taylor bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur; katsayıların (1.3) denkleminde yerine yazılması ile $N = 2$ için $y_2(x)$ Taylor yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = x$$

olarak elde edilir. Bu ifade aynı zamanda problemin tam çözümüne denktir. Benzer şekilde $N = 3, 4, 5$ için yaklaşık çözümler MATLAB2017 programında yazılan ayrı bir kod ile

$$y_3(x) = x - 0.16398x^3,$$

$$y_4(x) = x - 0.16971x^3 + 0.00987x^4,$$

$$y_5(x) = x - 0.16673x^3 + 0.00030x^4 + 0.00793x^5$$

olarak

hesaplanır.

$N = 2 - 5$ için Şekil 3.1'de (3.3) denkleminin yaklaşık çözümleri gerçek çözümü ile karşılaştırılmıştır. Ek olarak Tablo 3.3'de $N = 2 - 5$ için mutlak hatalar gösterilmiştir.

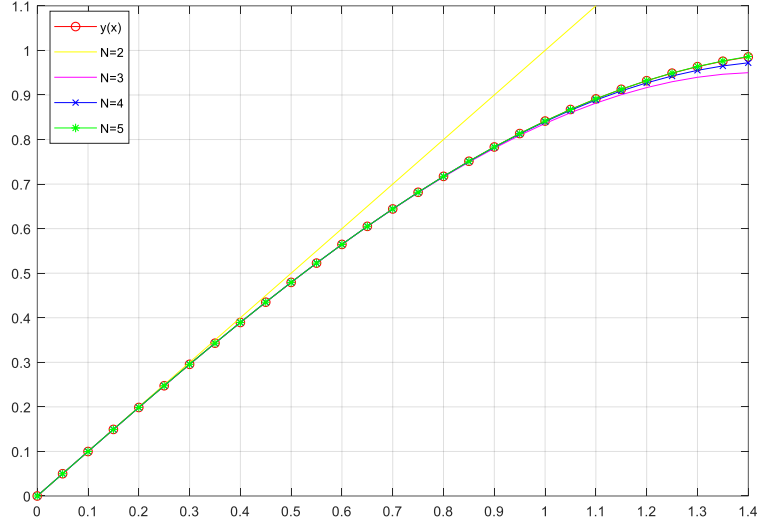


Fig.1 Comparison of the Taylor polynomial solutions and exact solution of Example 2 for N=2-5

Şekil 3.1 $N = 2 - 5$ için Örnek 2'nin gerçek çözümü ile Taylor yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 3.3 Örnek 2'nin $N = 2, 3, 4, 5$ ve $h = 0.1$ olmak üzere mutlak hataları

Mutlak Hatalar				
x_n	e_2	e_3	e_4	e_5
0	0	0	0	0
0.1	1.66583e-04	2.60335e-06	2.13964e-06	3.73468e-08
0.2	0.00133	1.88292e-05	1.12187e-05	1.53195e-07
0.3	0.00448	5.23333e-05	2.24296e-05	2.16761e-07
0.4	0.01058	8.69376e-05	2.71103e-05	1.79108e-07
0.5	0.02057	7.69613e-05	2.24136e-05	2.26104e-07
0.6	0.03536	6.21533e-05	2.06813e-05	6.36595e-07
0.7	0.05578	4.62827e-04	5.84302e-05	1.25213e-06
0.8	0.08264	1.31385e-03	2.04858e-04	4.68499e-07

0.9	0.11667	2.86832e-03	5.69792e-04	6.33607e-06
1	0.15853	5.45098e-03	1.31098e-03	2.90151e-05

Örnek 2'nin ortalama hatanın üst sınırı, $\bar{R}_n$, $N = 2 - 5$ için 2.3 bölümünde verilen metoda göre $\bar{R}_2 = 7.930306e - 01$, $\bar{R}_3 = 4.02186e - 02$, $\bar{R}_4 = 1.706537e - 02$, $\bar{R}_5 = 4.145337e - 04$ olarak hesaplanmıştır ve Şekil 3.2'de $\bar{R}_n$ ifadeleri karşılaştırılmıştır.

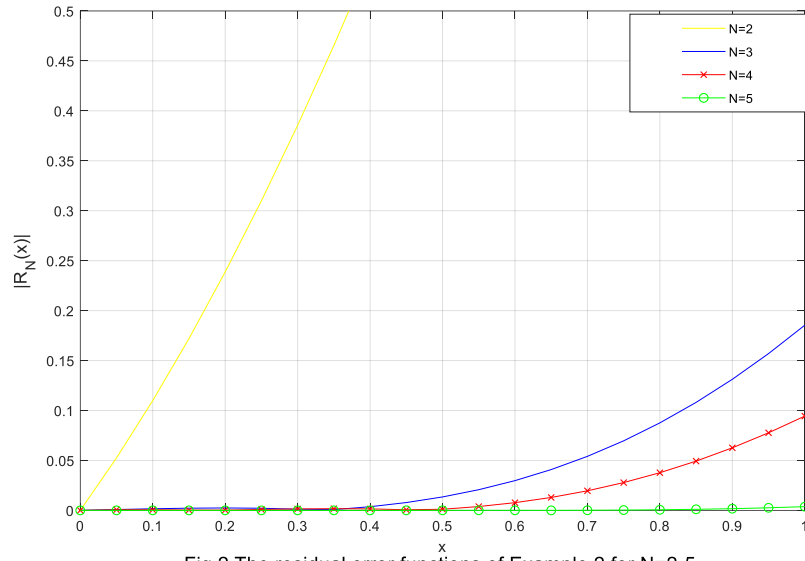


Fig.2 The residual error functions of Example 2 for N=2-5

Şekil 3.2 $N = 2 - 5$ için Örnek 2'nin $\bar{R}_n$ karşılaştırılması

Örnek 3

Volterra tarafından tanıtılan kapalı bir sistemin popülasyon büyümesi için bir model olan Volterra'nın Nüfus Modelini düşünelim.

Model, lineer olmayan integro-diferansiyel denklem ile tanımlanır[9].

$$\kappa \frac{du}{dx} = u - u^2 - u \int_0^t u(x) dx, u(0) = 0.15 \quad (3.5)$$

κ önceden belirlenen bir parametredir. Özdeş bireylerin ölçeklendirilmiş popülasyonunun matematiksel davranışını $u(x)$, incelemek için aşağıdaki gibi birkaç dönüşüm yapılır.

$$y(t) = \int_0^t u(x)dx, y'(t) = u(t), \quad y''(t) = u'(t) \quad (3.6)$$

(3.6) ifadesini (3.5) denkleminde yerine yazarak ve sayısal amaçla $\kappa = 0.25$ kullanarak başlangıç koşulları ile birlikte yeni ikinci mertebeden lineer olmayan bir diferansiyel denklem elde edilir.

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y'(t)^2 + 4y'(t)y(t) = 0 \quad (3.7)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0.15 \quad [10] \quad (3.8)$$

Bu problemin bilinen bir gerçek çözümü yoktur. Ancak belirli metotlar ile nümerik çözümleri bulunup kıyaslanabilir.

Burada, $P_1(x) = -4$, $P_2(x) = 1$, $Q_{11}(x) = 4$, $Q_{10}(x) = 1$, $g(x) = 0$ olup $N = 2$ için Taylor polinomu

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n x^n$$

formundadır. $N = 2$ için kollokasyon noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olarak hesaplanır. Problemin ana matris denklemi

$$\sum_{k=0}^2 P_k X B^k A + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p Q_{pq} X_{p,q}^* \bar{A} = G$$

$$(P_1 X B^1 + P_2 X B^2) A + (Q_{10} X_{1,0}^* + Q_{11} X_{1,1}^*) \bar{A} = G$$

şeklinde olup buradaki matrisler

$$P_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$Q_{10} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ X(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{1,1}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{2}\right)\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{X}(1)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(1)\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{1,0}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(0) \\ \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{X}(1)\mathbf{B}\bar{\mathbf{X}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) \\ g(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= [a_0\mathbf{A} \quad a_1\mathbf{A} \quad a_2\mathbf{A}]^T \\ &= [a_0a_0 \quad a_0a_1 \quad a_0a_2 \quad a_1a_0 \quad a_1a_1 \quad a_1a_2 \quad a_2a_0 \quad a_2a_1 \quad a_2a_2]^T \end{aligned}$$

şeklinde. Problem karşılık gelen $[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}]$ matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 & ; & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & -4 & -2 & ; & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 5 & 4 & 6 & 5 & ; & 0 \\ 0 & -4 & -6 & ; & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 12 & 8 & 16 & 24 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

olup, verilen koşullara karşılık gelen genişletilmiş matrisleri

$$\mathbf{Y}^{(0)} = \mathbf{X}(x_i)\mathbf{B}^0\mathbf{A} = \mathbf{X}(0)\mathbf{A} = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{X}(x_i)\mathbf{B}^1\mathbf{A} = \mathbf{X}(0)\mathbf{B}^1\mathbf{A} = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = [0 \quad 1 \quad 0]\mathbf{A} = 1$$

kullanılarak

$$[\mathbf{U}_0; \mathbf{O}^*; \lambda_0] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0]$$

$$[\mathbf{U}_1; \mathbf{O}^*; \lambda_1] = [0 \quad 1 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0.15]$$

şeklinde ifade edilir. Böylece $[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}]$ matrisinin tercihen son 2 satırının başlangıç koşulları ile yer değiştirilmesi ile elde edilmiş genişletilmiş matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 & ; & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0.15 \end{bmatrix}$$

formuna dönüşür. Bu matrise karşılık gelen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözülmesi ile Taylor bilinmeyen katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.15 \\ 0.51 \\ \frac{0.51}{2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur; katsayıların (1.3) denkleminde yerine yazılması ile $N = 2$ için $y_2(x)$ Taylor nümerik çözümü

$$y_2(x) = 0.15x + \frac{0.51}{2}x^2$$

olarak elde edilir. (3.8) koşulları altında (3.7) denkleminin $N=5$ için nümerik çözümü MATLAB2017 programında yazılan bir kod yardımı ile Taylor yaklaşık çözümü bulunmuştur. Tablo 3.4'de $x \in [0,1]$ için problemin Runge-Kutta metot(RK)[21], Adomian Decomposition metot(ADM)[10] ve önerilen metot ile elde edilen yaklaşık çözümleri karşılaştırılmıştır.

ADM ile elde edilen nümerik çözüm

$$y_A(x) = 0.15x + \frac{0.51}{2}x^2 + \frac{0.6669}{2}x^3 + \frac{0.1246}{2}x^4 - \frac{0.85901}{2}x^5$$

şeklindedir.

$N=5$ için hesaplanan Taylor yaklaşık polinomu

$$y_5(x) = 0.15x + 0.2550x^2 + 0.27107596x^3 - 0.12335678x^4 - 0.108288366x^5$$

şeklindedir.

Tablo 3.4 $h = 0.1$ olmak üzere Örnek 3'ün nümerik çözümleri

x_n	RK için yaklaşık çözüm değerleri	ADM için yaklaşık çözüm değerleri	Önerilen metot için çözüm değerleri
0	0	0	0
0.1	1.77737e-02	1.77742e-02	1.78076e-02
0.2	4.19657e-02	4.19670e-02	4.21365e-02
0.3	7.36730e-02	7.36813e-02	7.40067e-02
0.4	1.13439e-01	1.13495e-01	1.13882e-01
0.5	1.60989e-01	1.61261e-01	1.61540e-01
0.6	2.15187e-01	2.16202e-01	2.15944e-01
0.7	2.74266e-01	2.77198e-01	2.75111e-01
0.8	3.36210e-01	3.42288e-01	3.35980e-01
0.9	3.99101e-01	4.04491e-01	3.95286e-01
1	4.61346e-01	4.37632e-01	4.44430e-01

3.2 Hermite Matris Sıralama Metodu Kullanılan Örnekler

Bu bölümde lineer olmayan diferansiyel denklemlerin bir sınıfının yaklaşık çözümü için sıralama noktalarına bağlı Hermite matris metodu gösterilmektedir. Yöntemin doğruluğu ve geçerliliğini kanıtlamak amacıyla birkaç örnek verilmektedir. Bu örnekler aynı zamanda rezidüel hata analizleri ile birlikte verilmekte ve elde edilen sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlarla ve 3.1 bölümündeki Taylor matris metodu karşılaştırılmaktadır. Tüm hesaplamalar MATLAB2017b programında her bir örnek için ayrı olarak yazılmış programlar yardımıyla elde edilmiştir.

Örnek 4

Gerçek çözümü $y(x) = 1 + 2e^x$ olan

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) + y^2(x) - y''(x)y(x) = g(x) \quad (3.9)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleminin, $g(x) = 2 + 2e^x$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y(0) &= 3, y'(0) = 2 \\ 0 &\leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

koşulları altındaki çözümünü ele alalım. (3.10) koşulları altında (3.9) lineer olmayan diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümlerini bulalım.

Bu problem için, $P_0(x) = 1, P_1(x) = -2, P_2(x) = 1, Q_{00}(x) = 1, Q_{20}(x) = -1, g(x) = 2 + 2e^x$ olarak belirlenir.

$N = 2$ için kesilmiş Hermite serisi ile oluşturulan $y_2(x)$ yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n H_n(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x)$$

olarak tanımlanır. $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olmak üzere problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{P}_k \mathbf{H} \mathbf{M}^k \mathbf{A} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{H}_{p,q}^* \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

şeklinededir. Buraki matrisler

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \begin{bmatrix} P_0(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & P_0(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & P_0(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0(0) & 0 & 0 \\ 0 & P_0\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & P_0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_{20} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(x_0) \\ \mathbf{H}(x_1) \\ \mathbf{H}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{H}}(x) = \text{diag}[\mathbf{H}(x) \quad \mathbf{H}(x) \quad \mathbf{H}(x)]$$

$$\mathbf{H}_{0,0}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(0)\bar{\mathbf{H}}(0) \\ \mathbf{H}\left(\frac{1}{2}\right)\bar{\mathbf{H}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{H}(1)\bar{\mathbf{H}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{2,0}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(0)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(0) \\ \mathbf{H}\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{H}(1)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 16 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) \\ g(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 + 2e^{\frac{1}{2}} \\ 2 + 2e \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_0\mathbf{A} \quad \mathbf{a}_1\mathbf{A} \quad \mathbf{a}_2\mathbf{A}]^T$$

$$= [a_0a_0 \quad a_0a_1 \quad a_0a_2 \quad a_1a_0 \quad a_1a_1 \quad a_1a_2 \quad a_2a_0 \quad a_2a_1 \quad a_2a_2]^T$$

şeklindedir.

Temel matris denkleminin lineer kısmı olan

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^2 \mathbf{P}_k \mathbf{H} \mathbf{M}^k = \mathbf{P}_0 \mathbf{H} \mathbf{M}^0 + \mathbf{P}_1 \mathbf{H} \mathbf{M}^1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{H} \mathbf{M}^2$$

matrisinde gerekli matrisler yerine yazılarak

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Diğer taraftan temel matris denkleminin lineer olmayan kısmı olan

$$\mathbf{V} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{H}_{p,q}^* = \mathbf{Q}_{00} \mathbf{H}_{00}^* + \mathbf{Q}_{20} \mathbf{H}_{20}^*$$

matrisinde ilgili matrisler yerine yazılarak

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 20 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -9 & -9 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & -6 & -12 & -12 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Böylece problem karşılık gelen $[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}]$ matrisi

$$\begin{aligned} & [\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}] \\ = & \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & ; & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 20 & ; & 4 \\ 1 & -3 & 1 & ; & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -9 & -9 & 9 & ; & 2 + 2e^{\frac{1}{2}} \\ 1 & -2 & -6 & ; & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & -6 & -12 & -12 & ; & 2 + 2e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olup, verilen koşullara karşılık gelen genişletilmiş matrisleri (2.31) bağıntısını kullanarak

$$\mathbf{y}^{(k)}(x_i) = \mathbf{H}(x_i) \mathbf{M}^k \mathbf{A}$$

$$\mathbf{y}^{(0)}(0) = \mathbf{H}(0) \mathbf{M}^0 \mathbf{A} = \mathbf{H}(0) \mathbf{A} = [1 \quad 0 \quad -2] \mathbf{A} = 3$$

$$\mathbf{y}^{(1)}(0) = \mathbf{H}(0) \mathbf{M}^1 \mathbf{A} = \mathbf{H}(0) \mathbf{M}^1 \mathbf{A} = [1 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = [0 \quad 2 \quad 0] \mathbf{A} = 2$$

şeklinde hesaplanır. Bu başlangıç koşulları

$$[\mathbf{U}_0; \mathbf{O}^*; \boldsymbol{\lambda}_0] = [1 \quad 0 \quad -2 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 3]$$

$$[\mathbf{U}_1; \mathbf{O}^*; \boldsymbol{\lambda}_1] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 2]$$

olarak ifade edilir. Böylece $[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}]$ matrisinin tercihen son 2 satırının başlangıç koşulları ile yer değiştirilmesi ile elde edilmiş genişletilmiş matris

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{V}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & ; & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 20 & ; & 4 \\ 1 & 0 & -2 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 3 \\ 0 & 2 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

formuna dönüşür. Bu matrise karşılık gelen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözülmesi ile Hermite bilinmeyen katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur; katsayıların (2.20) denkleminde yerine yazılması ile $N = 2$ için $y_2(x)$ Hermite yaklaşık çözümü

$$y(x) \cong y_2(x) = 3 + 2x + x^2$$

olarak elde edilir. Bu ifade aynı zamanda problemin tam çözümüne ve $N = 2$ için Taylor yaklaşık çözümüne denktir. Benzer şekilde $N = 3, 4, 5$ için yaklaşık çözümler MATLAB2017 programında yazılan program ile

$$y_3(x) = 3 + 2x + x^2 + 0.3944x^3$$

$$y_4(x) = 3 + 2x + x^2 + 0.32544x^3 + 0.10704x^4$$

$$y_5(x) = 3 + 2x + x^2 + 0.336336x^3 + 0.074608x^4 + 0.025772x^5$$

olarak hesaplanır.

Tablo 3.5 ve Tablo 3.6'da $N = 2, 3, 4, 5$ için sırası ile mutlak hatalar ve L_2 , L_∞ ve *RMS* hataları gösterilmiştir.

Tablo 3.7'de, $N = 5$ için problemin tam çözümü, Taylor matris metodu ile elde edilen yaklaşık çözümü[12] ve önerilen Hermite matris metodu ile bulunan yaklaşık çözümü $x \in [0, 1]$ aralığında karşılaştırılmıştır.

Tablo 3.5 Örnek 4 için $N = 2 - 5$ ve $h = 0.1$ olmak üzere mutlak hatalar

Mutlak Hatalar				
x_l	e_2	e_3	e_4	e_5
0	0	0	0	0
0.1	3.4184e-04	5.2564e-05	5.6922e-06	2.21837e-06
0.2	2.8000e-03	3.4968e-04	3.0732e-05	1.27917e-05
0.3	9.7000e-03	9.3118e-04	6.3711e-05	3.04095e-05
0.4	2.3600e-02	1.6100e-03	8.1011e-05	4.99869e-05
0.5	4.7440e-02	1.9000e-03	7.2541e-05	6.78585e-05
0.6	8.4200e-02	9.5280e-04	7.0177e-05	8.42649e-05
0.7	1.3751e-01	2.2000e-03	1.7919e-04	1.02848e-04
0.8	2.1110e-01	9.1000e-03	6.1299e-04	1.26842e-04
0.9	3.3092e-01	2.1700e-02	1.7000e-03	1.51611e-04
1	4.3664e-01	4.22000e02	4.1000e-03	1.53143e-04

Tablo 3.6 Örnek 4 için $N = 2 - 5$ olmak üzere L_2, L_∞ ve RMS hataları

N	L_2 -hatası	L_∞ -hatası	RMS -hatası
2	5.997233e-01	4.365636e-01	2.998616e-01
3	4.842227e-02	4.216365e-02	2.421113e-02
4	4.483755e-03	4.083656e-03	2.241877e-03
5	2.973264e-04	1.531430e-04	1.486632e-04

Tablo 3.7 Örnek 4 için $N = 5$ ve $h = 0.1$ olmak üzere tam çözüm ile Taylor ve Hermite yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

	Tam	Taylor	Hermite
x_l	Çözüm	Yaklaşık Çözümü	Yaklaşık Çözümü
0	3	3	3
0.1	3.21034	3.21034	3.21034
0.2	3.44280	3.44280	3.44281
0.3	3.69971	3.69972	3.69974
0.4	3.98364	3.98365	3.98369
0.5	4.29744	4.29744	4.29751
0.6	4.64423	4.64424	4.64432
0.7	5.02750	5.02751	5.02760
0.8	5.45108	5.45107	5.45120
0.9	5.91920	5.91913	5.91935
1	6.43656	6.43630	6.43671

Örnek 5

Gerçek çözümü $y(x) = \sin x$ olan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2(x) = 1 - \sin(x) \quad (3.11)$$

formundaki ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemini

$$y(0) = 0, y'(0) = 1[11]. \quad (3.12)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım.

(3.12) koşulları altında (3.11) denkleminin yaklaşık çözümlerini gösterelim.

Bu problemde, $P_2(x) = 1, Q_{00}(x) = 1, Q_{11}(x) = 1, g(x) = 1 - \sin(x)$ olup $N = 2$ için kesilmiş Hermite serisi ile oluşturulan $y_2(x)$ yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n H_n(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x)$$

olarak tanımlanır. $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\right\}$$

olmak üzere problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{P}_k \mathbf{H} \mathbf{M}^k \mathbf{A} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{H}_{p,q}^* \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

şeklindedir. Buradaki matrisler

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(x_0) \\ \mathbf{H}(x_1) \\ \mathbf{H}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{H}}(x) = \text{diag}[\mathbf{H}(x) \quad \mathbf{H}(x) \quad \mathbf{H}(x)]$$

$$\mathbf{H}_{0,0}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(0)\bar{\mathbf{H}}(0) \\ \mathbf{H}\left(\frac{1}{2}\right)\bar{\mathbf{H}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{H}(1)\bar{\mathbf{H}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{1,1}^* = \begin{bmatrix} H(0)M\bar{H}(0)\bar{M} \\ H\left(\frac{1}{2}\right)M\bar{H}\left(\frac{1}{2}\right)\bar{M} \\ H(1)M\bar{H}(1)\bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 16 & 0 & 16 & 64 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) \\ g(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{491}{500} \\ \frac{99}{100} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= [\mathbf{a}_0 \mathbf{A} \quad \mathbf{a}_1 \mathbf{A} \quad \mathbf{a}_2 \mathbf{A}]^T \\ &= [a_0 a_0 \quad a_0 a_1 \quad a_0 a_2 \quad a_1 a_0 \quad a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \quad a_2 a_0 \quad a_2 a_1 \quad a_2 a_2]^T \end{aligned}$$

şeklindedir.

Temel matris denkleminin lineer kısmı olan

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^2 \mathbf{P}_k \mathbf{H} \mathbf{M}^k = \mathbf{P}_2 \mathbf{H} \mathbf{M}^2$$

matrisinde gerekli matrisler yerine yazılarak

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Diğer taraftan temel matris denkleminin lineer olmayan kısmı olan

$$\mathbf{V} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{H}_{p,q}^* = \mathbf{Q}_{00} \mathbf{H}_{00}^* + \mathbf{Q}_{11} \mathbf{H}_{11}^*$$

matrisinde ilgili matrisler yerine yazılarak

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 5 & 7 & -1 & 7 & 17 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 8 & 20 & 2 & 20 & 68 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Böylece problem karşılık gelen $[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}]$ matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & ; & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 4 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 8 & ; & 1 & 1 & -1 & 1 & 5 & 7 & -1 & 7 & 17 & ; & \frac{491}{500} \\ 0 & 0 & 8 & ; & 1 & 2 & 2 & 2 & 8 & 20 & 2 & 20 & 68 & ; & \frac{99}{100} \end{bmatrix}$$

olup, (2.31) bağıntısı kullanılarak verilen koşullara karşılık gelen genişletilmiş matrisleri

$$Y^{(0)} = H(x_i)M^0A = H(0)A = [1 \ 0 \ -2]A = 0$$

$$Y^{(1)} = H(x_i)M^1A = H(0)M^1A = [1 \ 0 \ -2] \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A = [0 \ 2 \ 0]A = 1$$

kullanılarak

$$[U_0; O^*: \lambda_0] = [1 \ 0 \ -2 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 0]$$

$$[U_1; O^*: \lambda_1] = [0 \ 2 \ 0 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 1]$$

şeklinde ifade edilir. Böylece $[W; V; G]$ matrisinin tercihen son 2 satırının başlangıç koşulları ile yer değiştirilmesi ile elde edilmiş genişletilmiş matris

$$[\widetilde{W}; \widetilde{V}; \widetilde{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & ; & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 4 & ; & 1 \\ 1 & 0 & -2 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

biçimine dönüşür. Bu matrise karşılık gelen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözülmesi ile Hermite bilinmeyen katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur; katsayıların (2.20) denkleminde yerine yazılması ile $N = 2$ için $y_2(x)$ Hermite yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = x$$

olarak elde edilir. Bu ifade aynı zamanda problemin tam çözümüne denktir. Benzer şekilde $N = 3,4,5$ için yaklaşık çözümler MATLAB2017 programında yazılan ayrı bir program ile

$$y_3(x) = x - 0.163980335781936x^3,$$

$$y_4(x) = x - 0.1697171792058040x^3 + 0.009876360178284074x^4,$$

$$y_5(x) = x - 0.166728x^3 + 0.000304x^4 + 0.007936x^5$$

olarak hesaplanır.

(3.11) denkleminin $N = 2 - 5$ için Şekil 3.3'de gerçek çözümü ile yaklaşık çözümleri karşılaştırılmış ve Tablo 3.8'de mutlak hataları gösterilmiştir. Ek

olarak Tablo 3.9’da problemin gerçek çözümü, $N = 5$ için elde edilen Taylor yaklaşık çözümü ve Hermite yaklaşık çözümü karşılaştırılmıştır[26].

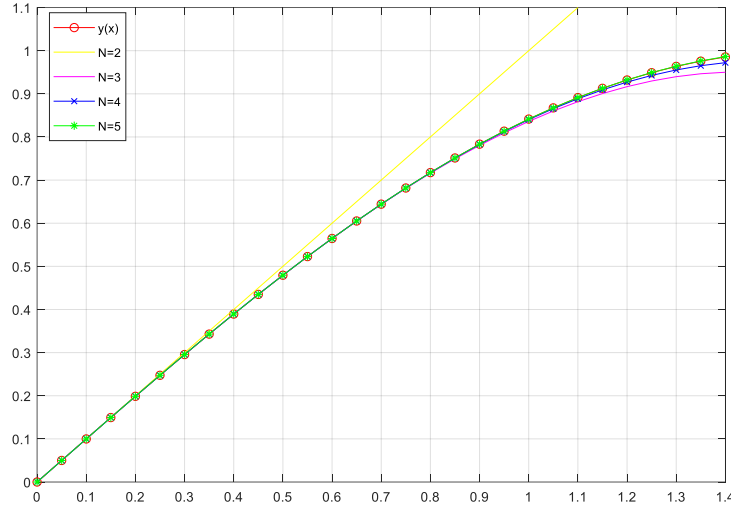


Fig.1 Comparison of the Taylor polynomial solutions and exact solution of Example 2 for $N=2-5$

Şekil 3.3 $N = 2 - 5$ için Örnek 5’in gerçek çözümü ile Hermite yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 3.8 $N = 2 - 5$ ve $h = 0.1$ için Örnek 5’in mutlak hataları

Mutlak Hatalar				
x_n	e_2	e_3	e_4	e_5
0	0	0	0	0
0.1	1.665833e-04	2.603017e-06	2.146190e-06	3.488682e-08
0.2	1.330669e-03	1.882651e-05	1.126605e-05	1.28875e-07
0.3	4.479793e-03	5.232427e-05	2.257198e-05	1.157813e-07
0.4	1.058165e-02	8.691620e-05	2.740695e-05	1.127313e-07
0.5	2.057446e-02	7.691942e-05	2.291349 e-05	4.613957e-07
0.6	3.535752e-02	6.222592e-05	2.140782 e-05	7.803649e-07
0.7	5.578231e-02	4.629424e-04	5.936562 e-05	1.402682e-06

0.8	8.264390e-02	1.314022e-03	2.059295 e-04	4.15998e-06
0.9	1.166730e-01	2.868574e-03	5.708533 e-04	1.396141e-05
1	1.585290e-01	5.451320e-03	1.311803 e-03	4.101519e-05

Tablo 3.9 $N = 5$ and $h = 0.1$ için Örnek 5'in gerçek çözümü ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

	Tam	Taylor	Hermite
x_l	Çözüm	Yaklaşık	Yaklaşık
		Çözümü	Çözümü
0	0	0	0
0.1	0.0998334	0.0998333	0.0998333
0.2	0.1986693	0.1986691	0.1986692
0.3	0.2955202	0.2955199	0.2955201
0.4	0.3894183	0.3894181	0.3894184
0.5	0.4794255	0.4794253	0.4794260
0.6	0.5646424	0.5646418	0.5646432
0.7	0.6442176	0.6442164	0.6442190
0.8	0.7173560	0.7173556	0.7173602
0.9	0.7833269	0.7833332	0.7833408
1	0.8414709	0.8415000	0.8415120

Örnek 5'in ortalama hatanın üst sınırı, $\bar{R}_n$, $N = 2 - 5$ için 2.3 bölümünde verilen metoda göre $\bar{R}_2 = 7.93031e - 01$, $\bar{R}_3 = 4.124611e - 02$, $\bar{R}_4 = 1.305709e - 02$, $\bar{R}_5 = 2.25636e - 03$ olarak hesaplanmıştır ve Şekil 3.4 de $\bar{R}_n$ ifadeleri karşılaştırılmıştır.

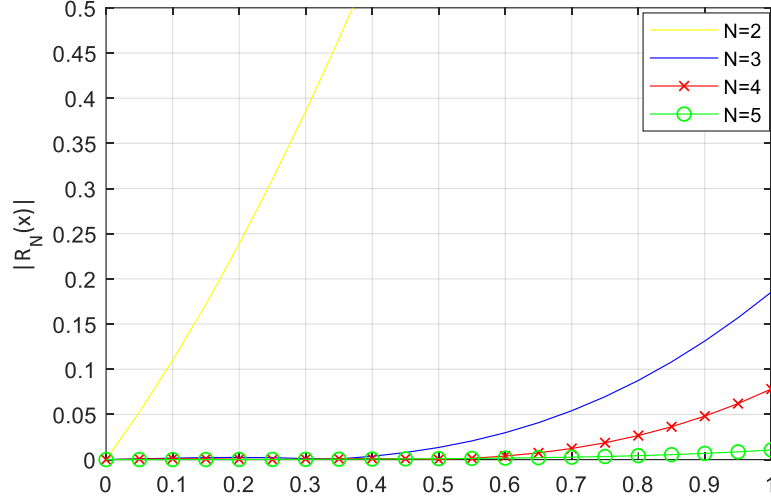


Fig.2 The residual error functions of Example 2 for N=2-5

Şekil 3.4 $N = 2 - 5$ için Örnek 5'in $\bar{R}_n$ karşılaştırılması

Örnek 6

Son olarak

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ x^2 - 2, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

parçalı fonksiyonuna sahip ve gerçek çözümü

$$y(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

olan 1. mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemi

$$y'(x) - 2y(x) + y^2(x) = g(x) \quad (3.13)$$

$$y(0) = 0 \quad (3.14)$$

sınır koşulu ile göz önüne alalım.

Problemi parçalı fonksiyonun tanımlı olduğu aralıklardaki $g(x)$ denklemlerine göre ayrı değerlendirilip, o aralık için problemin yaklaşık çözümleri bulunur.

Bu problemde,

$$P_0(x) = -2, P_1(x) = 1, Q_{00}(x) = 1$$

şeklindedir.

İlk olarak $0 \leq x \leq 1/2$ aralığında inceleyelim.

Bu aralıkta

$$g_1(x) = (x - 1)^2$$

olup; problem

$$y'(x) - 2y(x) + y^2(x) = (x - 1)^2$$

$$y(0) = 0$$

$$0 \leq x \leq 1/2$$

biçimine dönüşür.

$N = 2$ için kesilmiş Hermite serisi ile oluşturulan $y_2(x)$ yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n H_n(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x)$$

olarak tanımlanır. $N = 2$ için sıralama noktaları belirtilen aralık için

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2} \right\}$$

olmak üzere problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^2 P_k H M^k A + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p Q_{pq} H_{p,q}^* \bar{A} = G$$

$$P_1 H M A + P_0 H M^0 A + Q_{00} H_{00}^* \bar{A} = G$$

şeklindedir. Buradaki matrisler

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(0) \\ \mathbf{H}\left(\frac{1}{4}\right) \\ \mathbf{H}\left(\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{H}}(x) = \text{diag}[\mathbf{H}(x) \quad \mathbf{H}(x) \quad \mathbf{H}(x)]$$

$$\mathbf{H}_{0,0}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(0)\bar{\mathbf{H}}(0) \\ \mathbf{H}\left(\frac{1}{4}\right)\bar{\mathbf{H}}\left(\frac{1}{4}\right) \\ \mathbf{H}\left(\frac{1}{2}\right)\bar{\mathbf{H}}\left(\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{8} & -\frac{7}{4} & -\frac{7}{8} & \frac{49}{16} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_1\left(\frac{1}{4}\right) \\ g_1\left(\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = [a_0\mathbf{A} \quad a_1\mathbf{A} \quad a_2\mathbf{A}]^T$$

$$= [a_0a_0 \quad a_0a_1 \quad a_0a_2 \quad a_1a_0 \quad a_1a_1 \quad a_1a_2 \quad a_2a_0 \quad a_2a_1 \quad a_2a_2]^T$$

şeklindedir.

Temel matris denkleminin lineer kısmı olan

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^1 \mathbf{P}_k \mathbf{H} \mathbf{M}^k = \mathbf{P}_0 \mathbf{H} \mathbf{M}^0 + \mathbf{P}_1 \mathbf{H} \mathbf{M}^1$$

matrisinde gerekli matrisler yerine yazılarak

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & \frac{11}{2} \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Diğer taraftan temel matris denkleminin lineer olmayan kısmı olan

$$\mathbf{V} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{H}_{p,q}^* = \mathbf{Q}_{00} \mathbf{H}_{00}^*$$

matrisinde ilgili matrisler yerine yazılarak

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{16} & -\frac{7}{8} & -\frac{7}{16} & \frac{49}{64} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Böylece problem karşılık gelen temel matris denklemi

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & \frac{11}{2} \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{A} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{16} & -\frac{7}{8} & -\frac{7}{16} & \frac{49}{64} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

şeklinde oluşur.

Sınır koşuluna karşılık gelen genişletilmiş matris (2.31) bağıntısı yardımı ile

$$\mathbf{y}^{(0)}(0) = \mathbf{H}(0) \mathbf{M}^0 \mathbf{A} = \mathbf{H}(0) \mathbf{A} = [1 \quad 0 \quad -2] \mathbf{A} = 0$$

olarak hesaplanır ve

$$[1 \quad 0 \quad -2] \mathbf{A} + [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \bar{\mathbf{A}} = 0$$

biçiminde ifade edilir.

Temel matris denkleminde tercihen 2. satırı sınır koşulu ile yer değiştirilmesi ile istenilen genişletilmiş matris denklemi

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{A} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

formuna dönüşür.

Böylece problem karşılık gelen $[\tilde{\mathbf{W}}: \tilde{\mathbf{V}}: \tilde{\mathbf{G}}]$ matrisi

$$[\widetilde{W}:\widetilde{V}:\widetilde{G}] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 & ; & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & ; & 1 \\ 1 & 0 & -2 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ -2 & 0 & 6 & ; & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & ; & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu matrise karşılık gelen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözülmesi ile Hermite bilinmeyen katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur; katsayıların (2.20) denkleminde yerine yazılması ile $N = 2$ için $y_2(x)$ Hermite yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = x$$

olarak bulunur.

Ardından $1/2 < x \leq 1$ aralığında inceleyelim.

Bu aralıkta

$$g_2(x) = x^2 - 2$$

olup $y(x) = x$ dikkate alınarak $x = \frac{1}{2}$ için sınır koşulu $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ elde edilir.

Böylece problem

$$y'(x) - 2y(x) + y^2(x) = x^2 - 2$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < x \leq 1$$

biçimine dönüşür.

$N = 2$ için sıralama noktaları belirtilen aralık için aşağıdaki gibidir:

$$\left\{x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = 1\right\}$$

Problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{P}_k \mathbf{H} \mathbf{M}^k \mathbf{A} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{H}_{p,q}^* \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{H} \mathbf{M}^0 \mathbf{A} + \mathbf{P}_1 \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{A} + \mathbf{Q}_{00} \mathbf{H}_{00}^* \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

şeklindedir. Buradaki matrisler

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^0 = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{H}\left(\frac{3}{4}\right) \\ \mathbf{H}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{H}}(x) = \text{diag}[\mathbf{H}(x) \quad \mathbf{H}(x) \quad \mathbf{H}(x)]$$

$$\mathbf{H}_{0,0}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{H}\left(\frac{1}{2}\right) \bar{\mathbf{H}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{H}\left(\frac{3}{4}\right) \bar{\mathbf{H}}\left(\frac{3}{4}\right) \\ \mathbf{H}(1) \bar{\mathbf{H}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} g_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ g_1\left(\frac{3}{4}\right) \\ g_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} \\ 23 \\ -\frac{1}{16} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= [\mathbf{a}_0 \mathbf{A} \quad \mathbf{a}_1 \mathbf{A} \quad \mathbf{a}_2 \mathbf{A}]^T \\ &= [a_0 a_0 \quad a_0 a_1 \quad a_0 a_2 \quad a_1 a_0 \quad a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \quad a_2 a_0 \quad a_2 a_1 \quad a_2 a_2]^T \end{aligned}$$

şeklindedir.

Temel matris denkleminin lineer kısmı olan

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^1 \mathbf{P}_k \mathbf{H} \mathbf{M}^k = \mathbf{P}_0 \mathbf{H} \mathbf{M}^0 + \mathbf{P}_1 \mathbf{H} \mathbf{M}^1$$

matrisinde gerekli matrisler yerine yazılarak

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & \frac{11}{2} \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Diğer taraftan temel matris denkleminin lineer olmayan kısmı olan

$$\mathbf{V} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{H}_{p,q}^* = \mathbf{Q}_{00} \mathbf{H}_{00}^*$$

matrisinde ilgili matrisler yerine yazılarak

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Böylece problem karşılık gelen temel matris denklemi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & \frac{11}{2} \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{23}{16} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

şeklinde oluşur.

Sınır koşuluna karşılık gelen genişletilmiş matris (2.31) bağıntısı yardımı ile

$$\mathbf{y}^{(0)} \left(\frac{1}{2} \right) = \mathbf{H} \left(\frac{1}{2} \right) \mathbf{M}^0 \mathbf{A} = \mathbf{H} \left(\frac{1}{2} \right) \mathbf{A} = [1 \quad 1 \quad -1] \mathbf{A} = \frac{1}{2}$$

olarak hesaplanır ve

$$[1 \quad 1 \quad -1] \mathbf{A} + [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}$$

biçiminde ifade edilir.

Temel matris denkleminde tercihen 2. satırı sınır koşulu ile yer değiştirilmesi ile istenilen genişletilmiş matris denklemi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

formuna dönüşür.

Böylece problem karşılık gelen $[\tilde{\mathbf{W}}: \tilde{\mathbf{V}}: \tilde{\mathbf{G}}]$ matrisi

$$[\tilde{\mathbf{W}}: \tilde{\mathbf{V}}: \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 & ; & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & ; & -\frac{7}{4} \\ 1 & 1 & -1 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & \frac{1}{2} \\ -2 & -2 & 4 & ; & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu matrise karşılık gelen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözülmesi ile Hermite bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur; katsayıların (2.20) denkleminde yerine yazılması ile $N = 2$ için $y_2(x)$ Hermite yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = 1 - x$$

olarak bulunur.

(3.14) koşulu altında (3.13) denkleminin belirtilen aralıklardaki çözüm kümesi

$$y(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

problemin tam çözümü ile örtüşmektedir.

Mühendislik, matematik, fizik, ekoloji veya birçok modelleme problemlerinde kullanılan doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin analitik olarak çözülmesi genellikle zor ya da mümkün değildir. Bu çalışmada, tutarlı bir yaklaşık çözüm bulmak için karışık koşullar altında bir lineer olmayan diferansiyel denklem sınıfını çözmeye dayalı Taylor ve Hermite polinomlarına ve sıralama noktalarına bağlı iki farklı matris metodu verilmiştir. Ayrıca, artık hata analizi problemlerin tam çözümlerinin var olmadığı durumlarda hata üst sınırı yaklaşık olarak tahmin edilmesi ve çözümlerin doğruluğu için geliştirilmiştir. Elde edilen neticelerle, metotların problemlerde doğru ve tesirli çalıştığı gösterilmiştir.

Yöntemlerin her problem için hata analizleri yapılmış ve çözümlerin tutarlılığı incelenmiştir. Şekiller ve tablolarda hata tahminlerinin uygunluğu ile yöntemin etkili olduğu gözlemlenmiştir.

Önerilen yöntemlerin bir diğer önemli bir avantajı, elde edilecek çözümün Taylor ve Hermite katsayılarının bilgisayar programları geliştirilerek bulunabilmesidir.

Yöntemde 2. mertebeden lineer olmayan terimli kısım m . mertebeye yükseltilebilir ve ayrıca diğer yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için yeni stratejiler ile geliştirilebilir ve uygulanabilir.

- [1] G. R. Gavalas, "Nonlinear differential equations of chemically reacting systems," Springer Science & Business Media, vol. 17, 40–49, 2013.
- [2] S. Fucik and A. Kufner, "Nonlinear differential equations," Elsevier, vol. 2, 324–338, 2014.
- [3] Y. Ordokhani ve M.J. Mohtashami, "Approximate Solution of Nonlinear Fredholm Integro-Differential Equations with time delay by using Taylor Method," Journal of Science (Kharazmi University), vol. 9, no. 1, 73–84, 2010.
- [4] G. Yüksel, M. Gülsu ve M. Sezer, "Chebyshev polynomial solutions of a class of second-order nonlinear ordinary differential equations," Journal of Advanced Research in Scientific Computing, vol. 3, no. 4, 11–24, 2011.
- [5] C. Güler, "A new numerical algorithm for the Abel equation of the second kind," International Journal of Computer Mathematics, vol. 84, no. 1, 109–119, 2007.
- [6] B. Bülbül ve M. Sezer, "Numerical solution of Duffing equation by using an improved Taylor matrix method," Journal of Applied Mathematics, vol. 2013, 2013.
- [7] M. Gülsu ve M. Sezer, "On the solution of the Riccati equation by the Taylor matrix method," Applied Mathematics and Computation, vol. 176, no. 2, 414–421, 2006.
- [8] M. A. Balcı ve M. Sezer, "Hybrid Euler–Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro-differential difference equations," Applied Mathematics and Computation, vol. 273, 33–41, 2016.
- [9] A. M. Wazwaz, "Analytical approximations and Padé approximants for Volterra's population model," Applied Mathematics and Computation, vol. 100, no. 1, 13–25, 1999.
- [10] A. M. Wazwaz, "Partial differential equations and solitary waves theory," Springer Science & Business Media, 443–444, 2010.
- [11] M. S. Rawashdeh ve S. Maitama, "Solving nonlinear ordinary differential equations using the NDM," Journal of Applied Analysis and Computation, vol. 5, no. 1, 77–88, 2015.

- [12] B. Bülbül ve M. Sezer, "A new approach to numerical solution of nonlinear Klein-Gordon equation," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, 2013.
- [13] S. H. Strogatz, "Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering," CRC Press, 2018.
- [14] R. Grimshaw, "Nonlinear ordinary differential equations," Routledge, 2017.
- [15] M. Mohsenyadeh, K. Maleknejad ve R. Ezzati, "A numerical approach for the solution of a class of singular boundary value problems arising in physiology," *Advances in Difference Equations*, vol. 2015, no. 231, 2015.
- [16] C. M. Bender ve S. A. Orszag, "Approximate Solution of Nonlinear Differential Equations," *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* Springer, New York, NY, 152–171, 1999.
- [17] I. Komashynska, M. Al-Smadi, A. Atewi et al., "Approximate analytical solution by residual power series method for system of Fredholm integral equations," *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 10, no. 3, 975–985, 2016.
- [18] A. El-Ajou, O. A. Arqub ve M. Al-Smadi, "A general form of the generalized Taylor's formula with some applications," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 256, 851–859, 2015.
- [19] K. Moaddy, M. Al-Smadi ve I. Hashim, "A novel representation of the exact solution for differential algebraic equations system using residual power-series method," *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2015, 1–12, 2015.
- [20] E. Abuteen, A. Freihat, M. Al-Smadi, et al., "Approximate series solution of nonlinear, fractional Klein-Gordon equations using fractional reduced differential transform method," *Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 12, no. 1, 23–33, 2016.

- [21] R. L. Burden ve J. D. Faires, “Numerical analysis,” vol. 2001, Brooks/Cole, USA, 2001.
- [22] H. R. Marzban, “A hybrid approach to parameter identification of linear delay differential equations involving multiple delays,” *International Journal of Control*, vol. 91, no. 5, 1034–1052, 2018.
- [23] H. R. Marzban, “Parameter identification of linear multi-delay systems via a hybrid of block-pulse functions and Taylor’s polynomials,” *International Journal of Control*, vol. 90, no. 3, 504–518, 2017.
- [24] A. El-Ajou, O. A. Arqub, S. Momani, et al., “A novel expansion iterative method for solving linear partial differential equations of fractional order,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 257, 119–133, 2015.
- [25] B. Gürbüz ve M. Sezer, “Laguerre polynomial approach for solving Lane-Emden type functional differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 242, 255– 264, 2014.
- [26] C. Güler ve S. Ö. Kaya, “A Numerical Approach Based on Taylor Polynomials for Solving a Class of Nonlinear Differential Equations”, *Mathematical Problems in Engineering*, 2018.
- [27] E. Gökmen, G. Yüksel ve M. Sezer, “A numerical approach for solving Volterra type functional integral equations with variable bounds and mixed delays”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 311, 354-363, 2017.
- [28] T.L. “Saaty, *Modern Nonlinear Equations*”, New York, 1981.
- [29] J. Hale, “*Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag”, New York, 1987.

- [30] S. Yalçınbaş, M. Aynigül ve M. Sezer, “A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations”, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 6 1128–1139, 2011.
- [31] E. Gökmen ve M. Sezer, “Approximate solution of a model describing biological species living together by Taylor collocation method”, *New Trends in Math. Sci.*, vol. 3, no. 2, 147-158, 2015.
- [32] N. Akgönüllü, N. Şahin ve M. Sezer, “A Hermite Collocation Method for the Approximate Solutions of High-Order Linear Fredholm Integro-Differential Equations”, *Numerical Methods for Partial Differential Eqautions*, vol. 27, no. 6, 1707-1721, 2011.

İletişim Bilgisi: sabaozgekaya@gmail.com

Makaleler

- [1] C. Güler, M. Sezer ve S. Ö. Kaya, “Numerical Solutions of A Class of Non-linear Ordinary Differential Equations in Hermite Series”, Thermal Science, vol. 23, no. 1, pp. 339–351, 2019.
- [2] Güler, C. ve Kaya, S. Ö., “A Numerical Approach Based on Taylor Polynomials for Solving a Class of Nonlinear Differential Equations”, Mathematical Problems in Engineering, 2018, 2018.

Konferans Bildirileri

- [1] S. Ö. Kaya, C. Güler ve M. Sezer, “Hermite Polynomial Approach for A Class of Nonlinear Ordinary Differential Equations and Residual Error Estimation”, ICAAMM 2018 7th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling, İstanbul, 20-24 Haziran 2018.
- [2] S. Ö. Kaya ve C. Güler, “Numerical Solutions of A Class of Nonlinear Ordinary Differential Equations in Hermite Series”, ICPAS 2017 4th International Conference on Pure and Applied Science: Renewable Energies, İstanbul, 23-25 Ekim 2017.
- [3] S. Ö. Kaya, C. Güler ve M. Sezer, “A Numerical Approach Based on Taylor Polynomials for Solving A Class of Nonlinear Differential Equations”, ICAAMM 2017 International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling, İstanbul, 03-07 Temmuz 2017.