

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜSPANSİYON SİSTEMLERİNİN
DIŞBÜKEY OPTİMİZASYON TABANLI " L_2 " KONTROLÜ

Elektrik-Elektronik Yük. Müh. Ali Fazıl UYGUR

FBE Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalı Kontrol ve Otomasyon Programında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 22 Eylül 2010

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Galip CANSEVER (YTÜ)

Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Burhanettin CAN (MÜ)

: Prof.Dr. Bekir ÇAKIR (KOÜ)

: Doç.Dr. İbrahim Beklan KÜÇÜKDEMİRAL (YTÜ)

: Doç.Dr. Haluk GÖRGÜN (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	v
KISALTMA LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Problemin Tanımı	2
1.1.1 Tezin Amacı	3
2. TAŞIT SÜSPANSİYON SİSTEMLERİ	6
2.1 Pasif Süspansiyon Sistemleri	7
2.2 Yarı Aktif Süspansiyon Sistemleri	8
2.3 Taşıt Süspansiyonları Üzerinde Gerçekleştirilen Kontrol Uygulamaları (Aktif Süspansiyon Sistemleri)	8
3. LİNEER MATRİS EŞİTSİZLİKLERİNE (LME) DAYALI DIŞBÜKEY OPTİMİZASYON	15
3.1 Optimizasyon Kavramı	15
3.1.1 Dışbükey Analiz	16
3.1.1.1 Süreklilik	16
3.1.1.2 Kompakt Küme Kavramı	17
3.1.1.3 Kümelerin İç ve Kuşatan Noktaları	17
3.1.1.4 Dışbükey Kümeler	17
3.1.1.5 Çok Sayıda Noktanın Dışbükey Kombinasyonu	18
3.1.1.6 Dışbükey Kümelerin Özellikleri	18
3.1.1.7 Bir Kümenin Dışbükey Kabuğu	19
3.1.1.8 Dışbükey Koni	19
3.1.1.9 Dışbükey Fonksiyonlar	19
3.1.1.10 Güya Dışbükey Fonksiyonlar	20
3.1.1.11 Affine Küme	20
3.1.1.12 Affine Fonksiyon	21
3.1.2 Dışbükey Optimizasyon	21
3.1.2.1 Yerel ve Global Anlamda Optimal (En İyi) Olma	21
3.1.2.2 Dışbükey Programlar	22
3.2 Lineer Matris Eşitsizlikleri (LME)	23
3.2.1 (LME)' nin Tanımı	25
3.2.2 Polinomsal Eşitsizliklerin (LME) Eşdeğeri	25
3.2.3 (LME)' lerin Dışbükey Olma Özelliği	26
3.2.4 (LME)' ler İçin Tek Olmama	27

3.2.5	Çok Sayıda (LME)' nin Tek Bir (LME) Olarak İfadesi	27
3.2.6	Schur Tümlen (Schur Complement)	28
3.2.7	Dayanıklı Kontrole (LME) Yaklaşımı ve Nümerik Çözüm Metotları	29
3.2.8	(LME)' lerin H^∞ Kontrol Teorisindeki Etkileri.....	30
3.2.9	Kontrol Uygulamalarında (LME)' lerin Kullanımı	32
4.	(LME) YAKLAŞIMI İLE KARARLILIK ANALİZİ VE NORM ESASLI KONTROL TASARIMI.....	33
4.1	Lyapunov Kararlılığı (Quadratik Kararlılık)	33
4.2	Dayanıklı Kararlılık	34
4.2.1	Politopik Belirsiz Sistemler	35
4.2.1.1	Politopik Sistemlerin Quadratik Kararlılığı.....	35
4.3	Lineer Sistemler için Kararlı Kılan Durum Geri beslemeli Kontrolcü.....	35
4.3.1	Zamanla Değişmeyen Sistemler	36
4.3.2	Belirsiz Sistemler.....	36
4.4	Norm Kavramı ve Norm Esaslı Kontrol Tasarım Teknikleri	37
4.4.1	Vektör ve Matris Normları	37
4.4.2	İşaret ve Sistem Uzayları	38
4.4.3	H_2 Nominal Performans ve H_2 Kontrol	40
4.4.3.1	Durum Geribeslemeli H_2 Kontrol Tasarımı.....	43
4.4.4	H^∞ Nominal Performans ve H^∞ Kontrol	44
4.4.4.1	Durum Geribeslemeli H^∞ Kontrol Tasarımı.....	46
5.	KONTROL SİSTEMLERİNDE EYLEYİCİ DOYUMU OLGUSU	48
5.1	Eyleyici Doymulu Sistemlerin Analizi	51
5.1.1	Kararlılık ve Bozucu Toleransı Problemi	53
5.1.1.1	Sıfırdan Farklı İlk Koşullar İçin Bozucu Toleransı Problemi	57
5.1.1.2	Sıfır İlk Koşulu Altında Bozucu Toleransı Problemi	59
5.1.2	Bozucu Bastırma Problemi	60
5.1.2.1	Bozucu Bastırma Düzeyi	61
5.1.2.2	$\mathcal{W}_a$ Bozucular Kümesi Üzerindeki En İyi L_2 Kazancının Tahmini.....	63
5.2	Eyleyici Doymulu Sistemler İçin L_2 Kontrol Tasarımı	65
6.	KAZANÇ PLANLAMALI KONTROL TEKNİĞİ VE LİNEER PARAMETRELERİ DEĞİŞEN (LPD) SİSTEMLER	72
6.1	Kazanç Planlamalı Kontrol.....	72
6.1.1	Kazanç Planlama Tekniğine Dair Bazı Özellikler.....	73
6.2	Lineer Parametreleri Değişen (LPD) Sistemler ve Bu Sistemlerin Kararlılığı.....	74
6.2.1	(LPD) Sistemlerin Lyapunov Kararlılığı	77
6.2.2	(LPD) Sistemler için Kararlı Kılan Durum Geribeslemeli Kontrolcü.....	79
6.2.3	(LPD) Sistemler İçin Optimal L_2 Kontrolcü Tasarımı	79
6.3	Eyleyici Doymulu (LPD) Sistemlerin L_2 Kontrolü.....	82
7.	TAŞIT SÜSPANSİYON SİSTEMLERİNİN L_2 KONTROLÜNE DAİR SİMÜLASYON SONUÇLARI VE DEĞERLENDİRMELER	85
7.1	Çeyrek Taşıtlı Süspansiyon Sisteminin Nominal Durum Uzay Modeli	86
7.2	Çeyrek Taşıtlı Süspansiyon Sisteminin (LPD) Durum Uzay Modeli.....	87
7.3	Simülasyon Sonuçları	88
7.3.1	H^∞ Kontrolcünün Performansı	89

7.3.2	Eyleyici Doyumlu <i>L2</i> Kontrolcünün Performansı.....	98
7.3.3	Eyleyici Doyumlu (LPD) tipi <i>L2</i> Kontrolcünün Performansı	107
8.	ÖNERİLER.....	110
KAYNAKLAR.....		111
ÖZGEÇMİŞ.....		116

SİMGE LİSTESİ

A	Sistem Matrisi
$\mathcal{A}$	Kapalı Çevrim Sistem Matrisi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
$\mathbb{C}^+$	Sağ Yarı Kompleks Düzlem
$\mathbb{C}^-$	Sol Yarı Kompleks Düzlem
$conv$	Dışbükey Kabuk
inf	Infimum
sup	Supremum
$trace$	Bir Matrisin İzi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathcal{T}$	Kapalı Çevrim Transfer Fonksiyonu
ω	Açısal frekans
σ_{max}	Maksimum Tekil Değer
$\ \cdot\ _\infty$	Sonsuz Normu
$\ \cdot\ _2$	2 Normu
> 0	Pozitif Tanımlı Olma
< 0	Negatif Tanımlı Olma
≥ 0	Yarı Pozitif Tanımlı Olma
≤ 0	Yarı Negatif Tanımlı Olma

KISALTMA LİSTESİ

BME	Bilineer Matris Eşitsizlikleri
GA	Genetik Algoritma
LFT	Lineer Kesirli Dönüşüm (Linear Fractional Transformation)
LME	Lineer Matris Eşitsizlikleri
LPD	Lineer Parametreleri Değişen Sistemler
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LQR	Lineer Kuadratik Regülatör (Linear Quadratic Regulator)
LTR	Loop Transfer Recovery
PD	Orantı-Türev (Proportional Derivative)
PI	Orantı-Integral (Proportional Integral)
PID	Orantı-Integral-Türev (Proportional Integral Derivative)
SEDUMI	Self Dual Minimization
SMC	Kayan Kipli Kontrol (Sliding Mode Controller)
SSV	Structured Singular Value
YALMIP	Yet Another Linear Matrix Inequality Parser

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1	Aktif Süspansiyon Sistemi Tasarımında İzlenen Yaklaşım..... 3
Şekil 2.1	Çeyrek Taşıt Süspansiyonu..... 6
Şekil 6.1	Kapalı Çevrim LPD Sistem Yapısı 76
Şekil 7.1	Çeyrek Taşıt Aktif Süspansiyon Sistemi 85
Şekil 7.2	$V_0 = 20 \text{ m/sn}$, $V_0 = 30 \text{ m/sn}$ ve $V_0 = 40 \text{ m/sn}$ 'lik Hızlara Karşılık Oluşan Tümsek Tipi T_{20} , T_{30} ve T_{40} Bozucu Girişleri 89
Şekil 7.3	" T_{20} " Tümsek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Yer Değiştirme Cevabı 90
Şekil 7.4	" T_{30} " Tümsek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Yer Değiştirme Cevabı 90
Şekil 7.5	" T_{40} " Tümsek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Yer Değiştirme Cevabı 91
Şekil 7.6	Çakıllı Yol Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Yer Değiştirme Cevabı 91
Şekil 7.7	" T_{20} " Tümsek Girişi İçin Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün İvme Cevabı 93
Şekil 7.8	" T_{30} " Tümsek Girişi İçin Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün İvme Cevabı 93
Şekil 7.9	" T_{40} " Tümsek Girişi İçin Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün İvme Cevabı 94
Şekil 7.10	Çakıllı Yol Girişi İçin Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün İvme Cevabı 94
Şekil 7.11	" T_{20} " Tümsek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti..... 96
Şekil 7.12	" T_{30} " Tümsek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti..... 96
Şekil 7.13	" T_{40} " Tümsek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti..... 97
Şekil 7.14	Çakıllı Yol Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti..... 97
Şekil 7.15	" T_{20} " Tümsek Tipi Bozucu Girişe Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü Altında Yer Değiştirme Cevabı 99
Şekil 7.16	" T_{30} " Tümsek Tipi Bozucu Girişe Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü Altında Yer Değiştirme Cevabı 99
Şekil 7.17	" T_{40} " Tümsek Tipi Bozucu Girişe Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü Altında Yer Değiştirme Cevabı 100
Şekil 7.18	Çakıllı Yol Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü Altında Yer Değiştirme Cevabı 100
Şekil 7.19	" T_{20} " Tümsek Girişi İçin Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün İvme Cevabı 101
Şekil 7.20	" T_{30} " Tümsek Girişi İçin Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün İvme Cevabı 101
Şekil 7.21	" T_{40} " Tümsek Girişi İçin Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün İvme Cevabı 102
Şekil 7.22	Çakıllı Yol Girişi İçin Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün İvme Cevabı..... 102
Şekil 7.23	" T_{20} " Tümsek Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti..... 104

Şekil 7.24	" T30" Tümsek Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu L2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti.....	104
Şekil 7.25	" T40" Tümsek Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu L2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti.....	105
Şekil 7.26	Çakıllı Yol Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu L2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti	105
Şekil 7.27	$\sigma(t)$ ' nin zamanla değişimi.....	107
Şekil 7.28	Çakıllı Yol Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu LPD tipi L2 Kontrolcü Altında Yer Değiştirme Cevabı	108
Şekil 7.29	Çakıllı Yol Girişi İçin Eyleyici Doyumlu LPD tipi L2 Kontrolcünün İvme Cevabı	108
Şekil 7.30	Çakıllı Yol Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu LPD tipi L2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti.....	109

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması noktasında bilgi görüş ve önerilerini esirgemeyen ve bana her zaman güler yüz, anlayış ve sabır göstererek destek olan kıymetli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Galip CANSEVER'e, samimi ve sevgi dolu yaklaşımıyla beni cesaretlendirerek moral veren ve değerli önerileriyle beni yönlendiren kıymetli hocam Prof. Dr. Burhanettin CAN'a, tez jürimde yer almayı kabul ederek beni onurlandıran değerli hocam Prof. Dr. Bekir ÇAKIR'a, kendisinden çok şey öğrendiğim ve bana daima arkadaşça yaklaşan değerli hocam Doç. Dr. İbrahim Beklan KÜÇÜKDEMİRAL'a, dostluk ve nezaketi ile bana hep destek olan kıymetli hocam Doç. Dr. Haluk GÖRGÜN'e, göstermiş oldukları yakın ilgiden ötürü bölüm başkanından hizmetli personeline varıncaya dek, Elektrik Mühendisliği Bölümünde görevli bütün hocalarıma ve mesai arkadaşlarıma, sevgili aileme ve isimlerini burada sayamadığım fakat desteklerini hep arkamda hissettiğim dost ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Aktif süspansiyon sistemleri, pasif süspansiyon sistemlerinden farklı olarak bünyelerindeki pasif bileşenlerin, eyleyiciler tarafından sağlanan ilave kuvvetlerle hareket ettirilmesi sayesinde oluşurlar ve aktif süspansiyonlar kullanılmak suretiyle geniş bir frekans bandında süspansiyon sistemlerinin kontrolü gerçekleştirilebilmektedir.

Şasi ile tekerlek aksamı arasına bir yay ve bir sönüm elemanı yerleştirilmek suretiyle gerçekleştirilen geleneksel pasif süspansiyon sistemleri, taşıtlar için söz konusu olan çeşitli performans ölçütleri arasında bir tavizleşme ortaya koyarlar. Aktif süspansiyon sistemleri kullanılarak arzulanan performansın yakalanması amacıyla, bu güne kadar birçok kontrol tasarım tekniği denenmiştir ve bu konudaki araştırma ve geliştirme faaliyetleri yoğun bir şekilde sürdürülmektedir.

Bu tezde, eyleyici doyumuna maruz kaldığı düşünülen süspansiyon sistemleri için sürüş konforu ve süspansiyon sapması gibi performans gereklerinin teminine odaklanacak, bir kontrol tasarımı amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda, sistemin performans çıkışlarına dair L_2 kazancının minimize edilmesini sağlayacak, L_2 optimal kontrolcünün tasarımı ele alınmıştır. Söz konusu tasarım, hem nominal sistem için hem de parametrelerin zamanla değiştiği LPD sistem yapısı üzerinde gerçekleştirilmiştir. Bu anlamda eyleyici doyumunun LPD sistem yapısı ile birlikte ele alınmış olması, kontrolcü tasarımına yeni bir yaklaşım olarak ortaya çıkmaktadır.

Tasarım probleminin ele aldığı performans gerekleri ve eyleyiciler üzerindeki doyum sınırlaması, lineer matris eşitsizlikleri cinsinden ifade edilen kısıtlara dönüştürülmüş ve ilgili kontrolcü söz konusu kısıtlara dayalı, dışbükey optimizasyon probleminin çözülmesi yoluyla elde edilmiştir. Dolayısıyla bu yaklaşım, taşıt süspansiyonlarına dair kontrol sistemi tasarımının, dışbükey kısıtlara sahip bir optimizasyon problemi olarak ele alınmasını mümkün kılmaktadır.

Kontrolcünün farklı yol koşulları altındaki performansı ise, çeyrek taşıt süspansiyon modeli üzerindeki benzetim çalışmalarıyla sınanmıştır.

Tasarlanan L_2 optimal kontrolcünün eyleyiciler üzerindeki doyum olgusu gözetilerek gerçekleştirilmiş olması, gerçek sistemlere uygulanabilirliği açısından da bir avantaj sunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Aktif Süspansiyon Sistemleri, Lineer Matris Eşitsizlikleri, Eyleyici Doyumu, Lineer Parametreleri Değişen (LPD) Sistemler

ABSTRACT

Unlike passive suspension, active suspension system work through movements their passive components by means of additional forces provided by the actuators. It is possible to control suspension systems over a wide frequency range using active components.

Conventional passive suspension systems, which are realized by placing a spring and damper between the car body and wheel assembly, provide a tradeoff between various performance requirements related to vehicle suspension systems. Many control design techniques that use active suspension systems have been tested till now. Research and development activities on active suspension systems have been going strong.

In this thesis it is aimed to design a controller which focuses to provide performance requirements such as comfort and suspension deflection for a suspension system under actuator saturation. For this purpose, L_2 optimal controller which is designed to minimize L_2 gain of the system outputs is discussed. The design is implemented for the nominal system and Linear Parameter Varying LPV system structure. In this sense, the addressing of actuator saturation problem together with LPV system structure introduces a new approach to controller design.

Performance specifications that have been taken into design problem and saturation bound on actuators are transformed to constraints which can be expressed in terms of linear matrix inequalities, and the related controller is obtained via solving convex optimization problems over those constraints. Therefore, using this approach, for vehicle suspension systems, it is possible to consider controller design problem as an optimization problem with convex constraints.

Performance of the controller is tested under different road conditions via simulation studies for quarter car suspension model.

Since L_2 optimal controller is designed by considering the saturation about actuators, it provides an advantage in terms of applicability on real systems.

Keywords: Active Suspension Systems, Linear Matrix Inequalities, Actuator Saturation, Linear Parameter Varying (LPV) Systems

1. GİRİŞ

Aktif süspansiyon sistemlerinin taşıtlar üzerinde kullanılması konusu, uzun zamandır hem akademik olarak, hem de endüstride, üzerinde oldukça fazla çalışılan bir mühendislik konusu olagelmıştır. Aktif süspansiyon sistemleri, pasif süspansiyon sistemlerinden farklı olarak bünyelerindeki pasif bileşenlerin, eyleyiciler tarafından sağlanan ilave kuvvetlerle hareket ettirilmesi sayesinde oluşurlar ve aktif süspansiyonlar kullanılmak suretiyle geniş bir frekans bandında süspansiyon sistemlerinin kontrolü gerçekleştirilebilmektedir. Kullanım amaçları ise, yoldan kaynaklanan titreşimlerin araç gövdesi üzerindeki etkisini en aza indirerek, sürüş konforunu arttırmak, aracın yol tutuşunu iyileştirmek ve bu titreşimlerin aracın mekaniği üzerindeki olumsuz yıpratma etkilerinin belli bir ölçüde azaltılmasını sağlamaktır.

Günümüzde, bu gibi performans ölçütlerini karşılamak maksadı ile tasarlanan, Aktif süspansiyon sistemlerini, tasarım biçimlerine göre Aktif ve yarı-aktif süspansiyonlar olarak ikiye ayırabiliriz. Aktif süspansiyon sistemlerinde kullanılan eyleyiciler harici bir kuvvet üretebilmektedirler. Aktif süspansiyon sistemlerinin tasarımı konusundaki çalışmalarda, daha ziyade hidrolik eyleyicilerin kullanıldığı görülmektedir. Yarı-aktif süspansiyon sistemleri ise, Aktif süspansiyon sistemlerinden farklı olarak, yapılarında harici bir eyleyici bulunmayan geri-beslemeli sistemlerdir. Bu sistemlerde sönüm elemanı yerine Magneto-Rheological (MR) damperlerden istifade edilir. MR damperlerin en önemli özelliği, sönüm oranlarının bir geri-beslemeli denetleyici vasıtası ile manyetik olarak değiştirilebilmesidir. Genel olarak, bu türden bir süspansiyon sistemi kullanmak, aktif elemanlı bir yapı kullanmaya göre daha basit bir çözüm gibi görünse de; MR damper içeren sistemlerin performansı, geleneksel süspansiyon yapıları ile karşılaştırıldığında, çok da farklı değildir. Ayrıca, MR damperli yarı-aktif sistemlerin subap donanımı ve algılayıcı donanımı oldukça pahalıdır. Yarı-aktif süspansiyon sistemlerinin az enerji harcıyor olmaları en önemli avantajlarıdır.

Tasarımlarında kullanılan eyleyici tipine göre Aktif süspansiyon sistemlerini de, Hidrolik eyleyicili ve elektromekanik eyleyicili olarak iki grupta ele almak mümkündür. Hidrolik eyleyici kullanan aktif süspansiyon sistemleri üzerinde oldukça fazla araştırma yapılmıştır. Bunun sebebi düşük bir maliyetle gerçekleştirilebilmeleri ve bu konuda yeterli bir teknik birikimin oluşmuş olmasıdır. Hidrolik eyleyicilerin dezavantajı ise kısıtlı bir band genişliği üzerinde çalışabilmeleri ve çok yüksek hızlar söz konusu olduğunda sınırlı bir etkiye sahip olmalarıdır. Yoldan kaynaklanan bozucuların (çakıllı yollar ve ani çukur ve tümsek etkileri gibi) yüksek frekanslı bileşenlere sahip olması durumunda bozucu bastırma performansları da yetersiz kalabilmektedir. Bunun yanı sıra, çalışabilmeleri için büyük hacimli güç kaynakları

gerekmesi ve sürtünme sebebiyle ortaya çıkan kayıpların fazla oluşu diğer dezavantajlarını teşkil etmektedir. Son zamanlarda öne çıkan diğer bir eyleyici tipini de lineer motorlu eyleyiciler oluşturmaktadır. Artık yüksek güçlere sahip (20-30kN) ve oldukça hızlı çalışabilen (3-4m/san) küçük boyutlara sahip lineer motorlar üretilebilmektedir. Boyutlarının çok küçük oluşu, kayıplarının azlığı, sürtünmesiz ve hızlı çalışabilmeleri, hidrolik eyleyiciler karşısındaki avantajlarını teşkil eder.

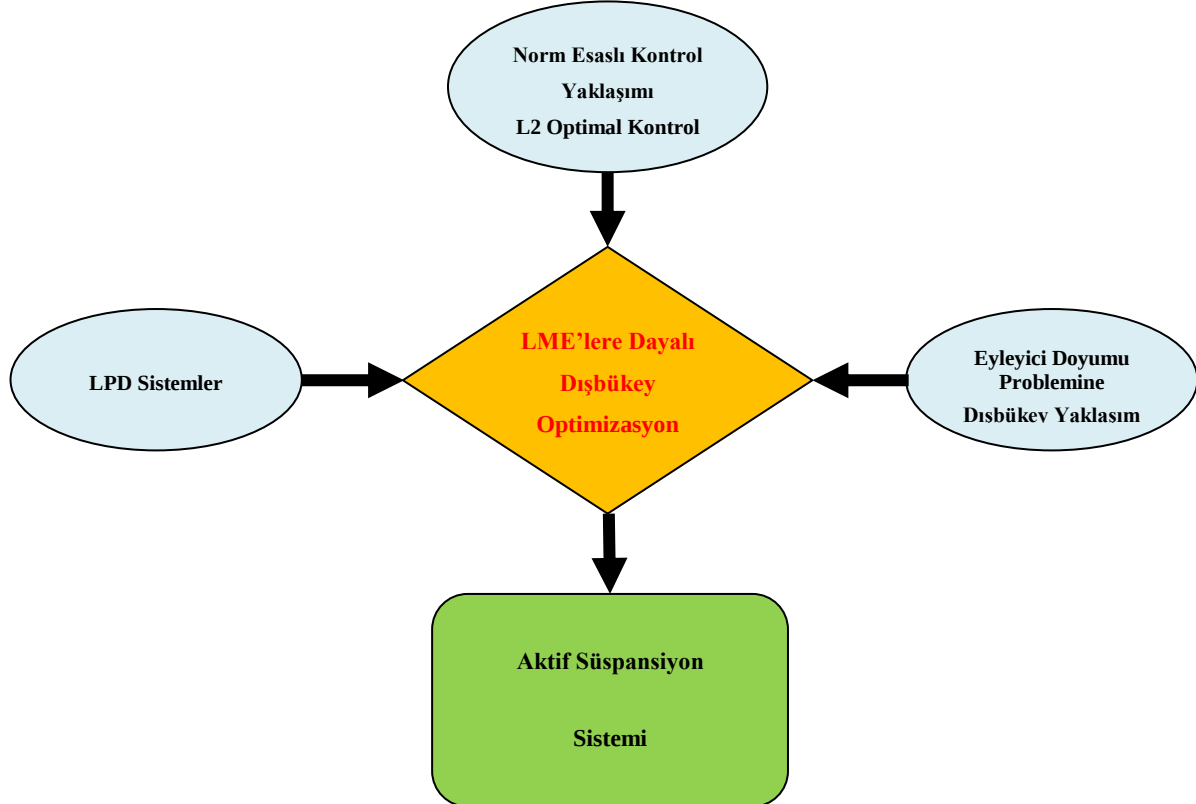
1.1 Problemin Tanımı

Taşıt gövdesi ve tekerlek bütünü arasına bir yay ve bir sönüm elemanı yerleştirilerek oluşturulan pasif süspansiyon sistemleri, sürüş konforu, süspansiyon sapması ve yol tutuş gibi performans kriterleri arasında bir tavizleşmeye giderler. Taşıtlar üzerindeki titreşimler ve şoklar bu üç önemli performans kriteri üzerinden incelenirler. Bu performans kriterlerinden, sürüş konforu ile süspansiyon sapması birbiri ile yakından ilişkilidir. Çünkü gerçekte, yapısal özellikleri sebebiyle taşıtların sahip olabileceği süspansiyon stroku belirli bir değerin üzerine çıkamamaktadır. Hal böyle olunca, süspansiyon sapmasının bu sınır değerlere ulaşması, taşıtların zarar görmesine ve sürüş konforunda azalmalara yol açmaktadır. O halde konfor amacıyla şasinin ivmelenmesinin minimizasyonuna odaklanmış aktif bir süspansiyon için taşıtın yapısal özellikleri gereğince, süspansiyon sapmasının limitleri bir kısıt teşkil etmek zorundadır. Konfor sağlamak amacıyla, yoldan kaynaklanan bozucu girişlerin sistemin çıkışı üzerinde özellikle (1 – 5Hz) arası etkili olmaması istenir. Bu aralığın dışında kalan frekans bölgelerinin konfor bakımından fazla bir önemi olmadığı bilinmektedir. Yol bozucularından, şasinin (m_s) ivmelenmesine doğru olan transfer fonksiyonu incelenecek olursa, frekans cevabı üzerinde, 1 – 5 Hz arası düşük genlikli bir tepe noktası ve yaklaşık $\omega = \sqrt{k_t/m_u}$ frekansı civarında bulunan daha yüksek genlikli ikinci bir tepe noktası dikkati çeker. Yüksek genlikli ikinci tepeyi bastırmak hiçbir kontrol sistemi ile mümkün olamamaktadır. Süspansiyon sistemleri için lineer kontrol metotları kullanarak tasarlanan süspansiyon kontrolcülerini, sisteme dair süspansiyon sapma miktarı ve sürüş konforu gibi çatışma eğilimindeki performans kriterleri arasında bir tavizleşme ortaya koyarlar. Diğer taraftan süspansiyon sistemlerinin kontrolü noktasında literatürde karşılaşılan tasarımlarda, sisteminin performansını ciddi biçimde etkileyen faktörlerden biri olan eyleyici doyumu problemi göz önüne alınmamıştır. Şu halde çözüm bekleyen iki problem söz konusudur. Bunlardan biri, sürüş konforu ve süspansiyon sapması gibi farklı performans ölçütlerinin birlikte ele alınmasını sağlayan bir kontrolcünün tasarımı, diğeri ise kontrol sistemi içerisinde yer alan eyleyicilerden kaynaklanan ve lineer olmayan eyleyici doyumu problemidir.

1.1.1 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında, yukarıda “Problem Tanımı” kısmında değinilen iki önemli probleme birlikte bir çözüm getirilmeye çalışılmıştır. Öyle ki, aktif süspansiyon sisteminin hem eyleyici doyumuna maruz olduğu düşünülmüş, hem de sistemin süspansiyon sapma miktarı ve sürüş konforu gibi farklı performansları beraberce sağlaması arzulanmıştır. Arzulanan kontrolcünün tasarımı, sistemin sözkonusu performansları ifade eden çıkışları için, bozucu girişlerden ilgili çıkışlara olan L_2 kazancı ya da L_2 normunun minimize edilmesine dayalı olacaktır. Yani norm esaslı L_2 kontrolcü tasarımı ele alınacak ve tasarım Lineer Matris Eşitsizliklerine dayalı dışbükey optimizasyon yoluyla gerçekleştirilecektir. Burada önem arz eden nokta, kontrol sistemlerinde, üretilmiş olan kontrol işaretini sisteme uygulamakta kullanılan eyleyicilerin doyuma gidebileceği gerçeğidir. Bu sebeple eyleyici doyumu olgusu, dışbükey bakış açısıyla tasarıma dahil edilmiştir. Dahası süspansiyon sistemi için eyleyici doyumu gözetilerek tasarlanan L_2 kontrolcü, yeni bir yaklaşımla Lineer Parametreleri Değişen (LPD) yapıda gerçekleştirilecektir.

Aslında, tezin amacını ortaya koymak adına buraya kadar ifade edilmiş olanları Şekil 1.1’deki şema ile özetlemek mümkündür.



Şekil 1.1 Aktif Süspansiyon Sistemi Tasarımında İzlenen Yaklaşım

Bu noktada eyleyici doyumu konusunu biraz daha açmak faydalı olacaktır. Kontrol sistemleri içerisinde yer alan eyleyicilerin üretmiş oldukları kontrol işaretlerinin, genlik değişimleri ve genlik değişim hızları üzerinde, aslında oldukça katı bir sınırlılık söz konusudur. Uygulamada herhangi bir eyleyicinin sağlayabildiği, kuvvet, tork ve benzeri kontrol değişkenleri hep belli bir sınır dahilinde olabilmektedir. Bazen de sistemden kaynaklanan yapısal zorunluluklardan ötürü, uygulanacak kontrol işaretinin sınırlandırılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Eğer kontrolcünün tasarımı aşamasında, eyleyiciler için söz konusu bu sınırlar dikkate alınmayacak olursa, sistemin kapalı çevrim performansı üzerinde kayıplar oluşabilmekte ve istenmeyen geçici durum cevapları görülebilmektedir. Bunun da ötesinde ciddi zararlar doğuran arıza durumları meydana gelebilmektedir. Bu sebeple, ister lineer, isterse lineer olmayan kontrol tasarım teknikleri açısından bakılsın, eyleyici doyumu meselesi mutlaka dikkate alınmak durumundadır.

Eyleyici doyumu altında sisteme etkiyen bozuculara karşılık, kapalı çevrim sistem tarafından karşılanması gereken temel hususlar sistem kararlılığının sağlanması ve bozucu bastırma performansının iyileştirilmesidir. Ancak süspansiyon sistemleri özünde kararlı sistemler olmaları dolayısıyla asıl ele alınması gereken sistemin bozucu bastırma yetisidir. Sistemin bozucu bastırma kabiliyeti, sistem çıkışı ile bozucunun L_2 normları arasındaki en büyük oran şeklinde ifadesini bulan L_2 kazancıyla ölçülebilir. Bozucu bastırma performansı değerlendirilirken sınırlı enerjili L_2 tipi bozucular göz önüne alınacaktır. Zira yeterince büyük bozucular karşısında sisteme dair durum ve çıkışlar, sınırlandırılmaz bir şekilde artış gösterebilirler ve bozucu bastırma bağlamında L_2 kazancı anlamını yitirmiş olur. Sistemlerin bozucuları bastırma yetilerinin bir diğer ölçüsü de, nihayetinde sistem yörüngelerinin içine hapsediği küme ile ilk koşulları ihtiva eden kümenin, göreceli büyüklüklerinin mukayesesidir. Yörüngeleri kuşatacak ya da ilk koşulları içeren nesne, pekâlâ bir elipsoid olarak düşünülebilir. Bunun sebebi, elipsoidlerin analitik ifadelerinin quadratik formda olması ve sistem yörüngeleri için quadratik Lyapunov fonksiyonları açısından bakıldığında, enerji düzey kümelerine karşılık gelmeleridir. Sistemin bozucuları bastırmadaki yeteneği, sistem yörüngelerini kuşatan elipsoidin başlangıç koşullarını içeren elipsoide olan yakınlığı ile doğru orantılıdır. Anlatılanlar ışığında elipsoid tabanlı bir kontrolcü tasarımı öne çıkmaktadır.

Böyle bir kontrol tasarım probleminde, eyleyici doyumu sebebiyle kontrol işareti üzerinde meydana gelen sınırlılık, kontrolcü tasarımında lineer olmayan bir durum teşkil eder. Özellikle lineer kontrol teknikleri kullanılarak gerçekleştirilen kontrolcü tasarımlarında, lineer olmayan doyum olgusunun, tasarımda ne şekilde ele alınacağı önemli bir problemidir.

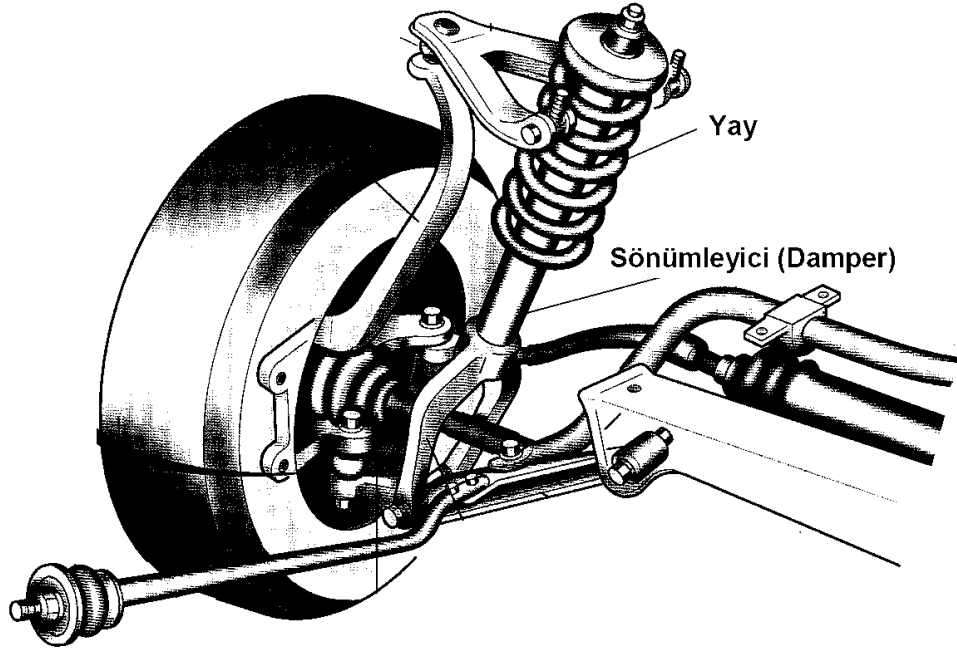
Bu problemin çözümü noktasında dikkat çeken yaklaşımlardan biri de, lineer olmayan $\text{sat}F(x)$ gibi doyumlu bir geribeslemeyle üretilen kontrol işaretinin, bir dizi lineer geribesleme tarafından şekillendirilen dışbükey bir kabuk içerisine yerleştirilmesi esasına dayanmaktadır.

Bu yaklaşımla Lineer olmayan doyum ifadesi, lineer yöntemlerle ele alınabilmekte ve böylelikle dışbükey bir optimizasyon problemi haline getirilebilen, kontrolcü tasarımı için lineer matris eşitsizliklerine (LME) dayalı bir kısıt teşkil etmektedir. Ayrıca bahsi geçen elipsoitler üzerinde ortaya çıkan kısıtlar da yine problemin LME' ler cinsinden ifade edilebilen diğer kısıtlarını oluştururlar. Dolayısıyla bu çalışmada esas olarak, eyleyici doyumunu altındaki süspansiyon sistemlerinin, elipsoid tabanlı L_2 kontrolü hedeflenmiştir. Ayrıca çalışma bir adım daha ileri götürülerek, söz konusu L_2 kontrol süspansiyon sisteminin LPD modeli gözetilerek te gerçekleştirilmiştir. Tasarlanacak LPD tipi L_2 kontrolcü, literatürde hali hazırda yer alan kontrolcülerden farklı olacaktır. Zira söz konusu LPD tipi kontrolcü aynı zamanda eyleyici doyumunu da dikkate alınarak geliştirilemiştir. Yani sonuçta Eyleyici doyumlu bir LPD- L_2 kontrolcü elde edilmiş olmaktadır.

2. TAŞIT SÜSPANSİYON SİSTEMLERİ

Süspansiyon sistemleri, sisteme haricen uygulanan kuvvete ve kontrol bant genişliğine bağlı olarak pasif, yarı aktif ve aktif süspansiyon sistemleri olarak sınıflandırılırlar.

Pasif süspansiyon sistemi, sıradan bir süspansiyon sistemi olup, Şekil 2.1’de gösterildiği gibi kontrolsüz bir yay ve darbe emici bir sönümleyiciden ibarettir.



Şekil 2.1 Çeyrek Taşıt Süspansiyonu

Yarı aktif süspansiyon sistemleri de, pasif süspansiyon sistemleriyle aynı bileşenlere sahiptir, fakat sönümleyici eleman yani damper iki ya da daha fazla seçilebilir sönüm oranına sahiptir. Aktif süspansiyonlar ise bünyelerindeki pasif bileşenlerin, hidrolik eyleyiciler tarafından sağlanan ilave kuvvetlerle hareket ettirilmesi sayesinde oluşurlar ve aktif süspansiyonlar kullanılmak suretiyle, geniş bir frekans bandında süspansiyon sisteminin kontrolü gerçekleştirilebilmektedir. Aktif süspansiyonlar, çok sayıda sensör ve valf içeren kontrolcülü sistemler olmaları itibarı ile pasif ve yarı aktif süspansiyonlara göre oldukça karmaşık bir yapıdadırlar. Taşıt süspansiyon sistemleri için gerçekleştirilen kontrol uygulamalarında, süspansiyon sistemleri için çeyrek, yarım ve tam taşıt süspansiyon sistemi modelleri kullanılmıştır. Çeyrek taşıt modeli, taşıtın düşey hareketini göz önüne alıp, sadece iki serbestlik derecesine sahip iken, tam taşıt modeli yedi serbestlik dereceli olup, düşeydeki titreşim hareketi ile birlikte taşıt için söz konusu olan kafa vurma ve yalpalama dinamiklerinin hesaba katılmasını sağlamaktadır. Taşıt süspansiyon sistemleri lineer olmayan sistemlerdir ve lineersizliği ortaya çıkaran sebeplerden biri de sistemde meydana gelen parametre

değişimleridir. Dikkat çekici bazı parametre değişimleri şu şekilde karşımıza çıkmaktadır. Taşıtın yüklenme miktarı ile taşıt kütlesi değişiklik göstermekte, lineer olmayan yapıdaki yay karakteristiği dolayısıyla, yay sabiti değişkenlik arz etmekte ve çalışma sıcaklığına bağlı olarak, damper içerisindeki akışkanın viskozite değişimi sebebiyle sönüm katsayısı farklı değerler almaktadır.

2.1 Pasif Süspansiyon Sistemleri

Günümüz ticari taşıtlarında kafa vurma ve yalpalama şeklindeki hareketler için olduğu kadar, taşıtın düşey hareketine dair dinamikleri kontrol etmek için de, pasif süspansiyon sistemleri kullanılmaktadır. Pasif tabiri, süspansiyona ait bileşenlerin, süspansiyon sistemine herhangi bir enerji aktarmadıklarını gösterir. Pasif süspansiyon sistemleri, arzulanan sürüş karakteristiğini sağlamak amacıyla, rölatif hızlarını sınırlandırarak taşıt gövdesi ve tekerlek bütünüünün hareketini kontrol eder. Bunu sağlamak için taşıtın gövdesi ve tekerlekleri arasına hidrolik bir darbe emici gibi birtakım sönümleyici elemanlar yerleştirilir. Sıradan darbe emicilerin özellikleri, gövdenin düşey ivmelenmesini minimize etmekle, lastiklerin arzulanan yola temas kuvvetini sürdürmek arasında var olan tavizleşmeyi ortaya koyar. Bu parametreler birbiriyle yakından ilişkilidir. Şöyle ki; konforlu bir sürüş sağlanması için, yumuşak sönümleyiciler kullanılarak, gövdenin düşey ivmelenmesinin sınırlandırılması arzu edilir, fakat bu durum lastiklerin yolla temas kuvveti üzerinde istenmeyen boyutta bir değişim meydana getirir ve yol tutuş performansını azaltır. Genellikle süspansiyon yer değiştirmesi olarak adlandırılan süspansiyon yol alması, müsaade edilebilir sapma miktarını sınırlandırır ki, bu da yine izin verilebilen rölatif sönümleyici hızını sınırlar. Yol tutuşun iyileştirilmesi bakımından, daha sıkı ya da darbe emiş oranı yüksek sönümleyiciler kullanılarak rölatif hızın azaltılması arzu edilir. Sönümleyici elemanın sıklığının artırılması, aynı zamanda taşıt gövdesinin ivmelenmesini de arttırdığından, talep edilen sürüş karakteristiklerini baltalamak suretiyle, sürüş kalitesi performansını azaltır. Süspansiyon sistemlerinin ilk örnekleri, pasif süspansiyonlar için arzulanan süspansiyon sıklık düzeyi, yaylanmasız kütlenin azaltılması ve en iyi kontrol edilirliliği sağlayan optimum sönüm oranının tespiti konularında, kısıtsız bir optimizasyon gerçekleştirilmesi konusuna odaklanmışlardır (Thompson 1971). Bu sebeple, pasif süspansiyonlar taşıt süspansiyon sistemlerinde yaygın olarak kullanılmışlardır. Ancak pasif süspansiyonun yay ve damper bileşenleri süspansiyon sistemine herhangi bir enerji sağlamazlar, sadece tasarımcı tarafından önceden belirlenmiş olan bir oranda süspansiyon hızını sınırlandırarak taşıt gövdesinin ve tekerlek bütünüünün hareketini kontrol ederler. Bu sebepledir ki, pasif süspansiyonun performansı yol profiline bağlı olarak değişim gösterir.

2.2 Yarı Aktif Süspansiyon Sistemleri

Yarı aktif süspansiyon sisteminin ilk örneklerinde, sönümleme kuvvetinin regülasyonu, kapalı çevrim kontrol uygulanan kontrollü damperler kullanılmak suretiyle gerçekleştiriliyordu ve bu tip süspansiyonlar sadece enerji boşaltım kabiliyetine sahipti (Williams, 1994).

Yarı aktif süspansiyon sistemlerinde, sırasıyla iki durumlu damper ve sürekli değişken damper olmak üzere iki farklı tip damper kullanıldı. İki durumlu damperler, kapalı çevrim kontrol altında iki farklı durum arasında anahtarlanırlar. Taşıt gövdesinin hareketini sönümlemek için gövde hızıyla orantılı bir kuvvet uygulanması gerekmektedir. Bu sebeple, gövde hızı damper hızıyla aynı yönde olduğunda, damper yüksek seviyeye anahtarlanır. Bunun aksine, gövde hızıyla damper hızı zıt yönlü olduğunda damper enerji boşaltmaktan ziyade giriş kuvvetini iletmek amacıyla düşük seviyeye anahtarlanır.

Bu sistemin dezavantajına gelince, gövde frekanslarını etkin biçimde kontrol etmesine karşılık, hızlı anahtarlamaların sebep olduğu yüksek frekanslı harmonikler, süspansiyon sistemini rahatsız edici hale getirir ve istenmeyen gürültülerin oluşmasına sebep olur.

Sürekli değişken damperler, geniş bir aralık üzerinde çabuk değişebilen bir karakteristik sunarlar.

Sürekli değişken damperin dezavantajı, düşük hızlarda büyük kuvvetler ve yüksek hızlarda küçük kuvvetler üretme yeteneğine sahip ve bu iki durum arasında, çabuk bir şekilde hareket edebilen cihazlar oluşturmanın zor oluşudur.

2.3 Taşıt Süspansiyonları Üzerinde Gerçekleştirilen Kontrol Uygulamaları (Aktif Süspansiyon Sistemleri)

Aktif süspansiyon sistemlerinin kontrolüne yönelik olarak ortaya konulmuş olan kontrol metotlarını kabaca; lineer, lineer olmayan ve akıllı kontrol yaklaşımları olarak sınıflandırmak mümkündür. LQR, LQG, LTR ve H_∞ gibi lineer kontrol metotları temelde optimal kontrol teorisine dayalı olup, belirlenmiş bir performans ölçütünün minimize edilmesini sağlayabilmekte, ancak yol profilindeki farklılıklara ve sistem parametrelerindeki değişimlere karşı yeterli adaptasyonu gerçekleştirememektedirler.

Akıllı kontrol teknikleri, aktif süspansiyon sistemlerinin konfor ve yol tutuş karakteristikleri üzerinde tatminkâr bir performans sergilemektedirler, fakat bu tekniklerin sistemin kararlılığı üzerinde problem oluşturma potansiyeli de bulunmaktadır. Bu teknikler kullanılarak yapılan çalışmalarda çoğunlukla kararlılıkla ilgili meseleler göz ardı edilmektedir.

Sliding mode kontrol ve adaptif kontrol gibi lineer olmayan kontrol metotları da, aktif süspansiyon sistemlerinin kontrolünde kullanılmaktadır. Bu teknikler uygulanırken makul bir performans yakalamak amacıyla çoğunlukla optimal kontrol yaklaşımıyla adaptif kontrol bir arada kullanılmaktadır. Sliding mode kontrol metodu, konfor ve yol tutuş performansı arasında söz konusu tavizleşme konusunda başarılı olmuştur. Bunun yanı sıra, bu kontrol metodu belirsizliklere karşı da oldukça dayanıklı olduğunu göstermiştir. Ancak, Sliding mode kontrolün aktif süspansiyon sistemlerinde kullanılması konusunda yapılmış olan çalışmalarda, araştırmacılar genellikle hep geleneksel kayma yüzeyini kullanmışlar ve neredeyse hiçbiri oransal-integral kayma yüzeyi metodunu kullanmamıştır.

Çeyrek taşıt modeline ilişkin aktif süspansiyon sistemleri, lineer kuvvet girişli ya da hidrolik olarak tahrik girişli olacak şekilde modellenebilirler. Hidrolik tahrik girişli aktif süspansiyon sistemleri, lineer kuvvet girişli olanlara kıyasla sistemin dinamiklerini temsil etme bakımından daha uygun olabilmektedirler. Bu sebeple aktif süspansiyonların analiz ve dizaynı konusunda hidrolik tahrik girişi kullanmak, gerçek sistemlere çok daha yakın sonuçlar ortaya koymaktadır.

Yine de, yayınlanmış olan çalışmaların çoğunda, taşıta ait durumların ve yol bozucularının bir fonksiyonu olarak görülen, arzulanan kontrol kuvvetinin hesabı noktasında, daha ziyade dış döngü kontrolcü üzerinde durulmuştur (Shen ve Peng, 2003). Yaygın olarak, hidrolik eyleyicinin ideal bir kuvvet üretici olduğu ve kontrol eden kuvveti tam olarak uygulayabildiği farz edilmektedir. Bu yüzdendir ki, bu dış- döngü kontrolcülerin simülasyonları çoğunlukla eyleyici dinamikleri göz ardı edilerek, ya da bu dinamiklerin oldukça basitleştirilmiş biçimleri kullanılmak suretiyle yapılmaktadır.

Gerçek uygulamalarda, taşıt süspansiyonu ile eyleyici arasındaki söz konusu bu dinamikler, oldukça karmaşık olup, ihmal edilmeleri mümkün değildir. Aynı zamanda, bir iç-döngü ya da kuvvet izleme kontrolcüsü gerçekleştirmeksizin, hedef kuvvete yakın bir eyleyici kuvveti yakalamak ta oldukça zordur. Bunun sebebi, eyleyicinin servo valf dinamikleri, yapısal sönüm bakiyesi ve taşıt süspansiyonu ile eyleyicinin etkileşimi sonucu ortaya çıkan ters basınç etkileri nedeniyle, hidrolik eyleyicinin sergilediği lineer olmayan davranıştır.

Geçmiş yıllar içerisinde, çok sayıda araştırmalar vasıtasıyla, konfor ve yol tutuş problemleri arasındaki tavizleşmeyi iyileştirmek maksadıyla, çeşitli kontrol yaklaşımları ortaya konulmuştur. Bu kontrol metotlarını lineer, lineer olmayan ve akıllı kontrol yaklaşımları şeklinde, genel olarak üç farklı grupta ele almak mümkündür. Aşağıda literatürde göze çarpan bu kontrol yaklaşımları kısaca özetlenmiştir. Oldukça popüler bir lineer kontrol

yaklaşımı olan optimal kontrol kavramı, araştırmacılar tarafından aktif süspansiyon sistemlerinin tasarımında kullanılmıştır (Hrovat 1997). Kullanılan optimal kontrol metotları arasında göze çarpanlar, Lineer Quadratik regülâtör (LQR), Lineer Quadratik Gaussian kontrol (LQG) ve Loop Transfer Recovery (LTR) yaklaşımlarıdır. Bahsedilen bu metotlar, lineer karesel bir amaç ölçütünün minimize edilmesine dayalıdır ki, burada söz konusu amaç ya da performans ölçütü sistemin durumlarının ve sisteme olan girişlerin bir fonksiyonudur. Lineer Quadratik regülâtör aktif süspansiyon sistemlerine uygulanması ile ilgili çalışmaları şu şekilde sıralamak mümkündür; Hrovat (1988), Tseng ve Hrovat (1990) ve Esmailzadeh ve Taghirad (1996). Hrovat (1988)'de yaylanmasız kütlelerin aktif süspansiyon sistemleri üzerindeki etkilerini incelemiştir. Esmailzadeh ve Taghirad (1996) yolcu dinamiklerini süspansiyon sistemine dâhil etmiş ve sistemin girişlerini lineer kuvvetler olarak göz önüne almışlardır. Her iki yaklaşımda da, faydalanılan konu performans ölçütünün seçimi olmuştur. Gerçek uygulamalar söz konusu olduğunda, sisteme dair tüm durumların ölçülmesi arzu edildiği için genellikle gözleyiciler kullanılmıştır. Ulsoy ve diğerleri (1994) sensör gürültülerinden ve yol bozucularından kaynaklanan problemleri ele almak amacıyla, sistemin durumlarını yeniden inşa etmek için Kalman filtresini kullanmışlardır. Bu çalışmada, parametre belirsizlikleri ve eyleyici dinamiklerine bağlı olarak, LQG kontrolcünün dayanıklılığı incelenmiştir. Süspansiyon stroku gibi bir takım ölçümlere bağlı olarak görülmüştür ki, LQG kontrolcü yeterli dayanıklılığı sağlayamamaktadır ve bu amaçla bu kontrolcünün kullanılmaması gerekmektedir. Loop Transfer Recovery ile birlikte ele alınan LQG (LQG/LTR) (1993)'te Ray tarafından, LQG kontrolcünün dayanıklılığını arttırmaya yönelik bir çözüm olarak incelenmiştir. Ancak LTR uygulandığında belirsiz sistem parametrelerinin kimliklendirilebilir olması ve beklenen belirsizlik boyutunun bilinebilmesi ya da tahmin edilebilmesi gerekmektedir; aksi takdirde LQR/LTR sistemi orijinal LQG sisteminin dayanıklılığını arttırması mümkün olmayabilirdi. Lineer kontrol yaklaşımını benimseyen çoğu araştırmacı çalışmalarında eyleyici dinamiklerini göz önüne almamıştı. Bu yüzden ortaya konulmuş olan kontrol stratejileri, sistemde kullanılan hidrolik eyleyicinin özellikleri ve sistem içerisinde belirsiz parametrelerin mevcudiyeti sebebiyle oldukça lineer olmayan bir yapıya sahip gerçek sistemi temsil etmemektedir. Üstelik sisteme lineer kontrol uygulandığında, sistem içerisinde bulunan belirsizlikler ve lineersizlikler sebebiyle, kabul edilebilir bir performans elde edilemeyebilirdi. Aslında süspansiyon sistemleri, yol profilindeki değişimlere ve süspansiyon dinamiklerine bağlı olarak lineer olmayan ve belirsiz sistemlerdir. Yol profilinin ortaya çıkardığı lineersizlikler yolun düzgün ya da bozuk oluşu sebebiyle ortaya çıkmasına karşılık süspansiyon dinamikleri ise eyleyici lineersizliklerinden

etkilenir. Yamashita ve diğerkleri (1994)'te H^∞ kontrol teorisine dayalı olarak, gerçerk hidrolık eyleyici karakteristiklerinin kullanıldığđ tam taşıt modeli için bir kontrol yaklaşımı ortaya koydular. Önerilen kontrolcü, deneysel bir taşıt üzerine uygulandı ve gerçerk yol koşullarını sağlayan bir test düzeneğđ üzerinde kontrolcünün dayanıklılığđ test edildi. Sonuçlar gösterdi ki, kapalı çevrim sistem, sınırlandırılmış bir belirsizlik tarafından bozulmaya maruz kalsa bile, sistemin dayanıklılığđ korunmaktadır. Durum geri beslemesi kullanmak yerine, Hyakawa ve diğerkleri (1999) yılında, tam taşıt modeli için dayanıklı çıkış geri beslemesi kullanılarak oluşturulmuş H^∞ optimal kontrolcü oluşturdular. Bu çalışmada, tam taşıta ait lineer dinamik model, doğđl olarak iki parçaya ayrıştırıldı ki, çıkış geri beslemeli kontrolcü daha basit ve gerçerklenebilir bir hal alsın.

(1999) yılında Fukao ve diğerkleri tarafından, aktif süspansiyon sistemleri üzerine H^∞ ve adaptif lineer olmayan kontrolün bir kombinasyonu tatbık edildi. Bu çalışma, aktif süspansiyonun yapısını iki parçaya ayırmaktaydı. Taşıtın gövde kısmında H^∞ kontrolcünden, eyleyici kısmında ise adaptif lineer olmayan kontrolcünden faydalanılmaktaydı. Sürüş kalitesi üzerinde, yol yüzeyindeki bozuklukların sebep olduğđ taşıt gövdesine dair ivmelenmeyi, yolcuların oldukça kuvvetli biçimde hissettikleri bir frekans aralığđ bulunmaktadır. Bu nedenle frekans şekillendirme yoluyla gerçerkleştirilen H^∞ kontrolcü, frekans özelliklerinin geliştirilmesine çalışır. Eyleyici üzerindeki lineersizlikler ve belirsizlikler ise, back-stepping tekniğine dayalı adaptif lineer olmayan kontrolcü ile ele alınır. Lin ve Kanellapoulos (1997)'de çeyrek taşıt modelinin aktif süspansiyonu için bir lineer olmayan back-stepping dizayn önermişlerdir. Lineersizliğın kontrol amacı, içersine kasıtlı olarak sokulması sayesinde kontrolcünün farklı çalışma bölgelerinde farklı tepkiler vermesine olanak tanınmış oldu. Lin ve Kanellapoulos (1997)'de yapmış oldukları bir başka çalışmada, aktif süspansiyon için lineer olmayan kontrolcü dizaynını yol-adaptif bir algoritmayla genişletmek suretiyle, daha da ileriye götürmüşlerdir.

(1995)'te Alleyne ve Hedrick, Lineer olmayan adaptif bir aktif süspansiyon kontrol sistemi ortaya koymuşlardır. Bu çalışma model hatalarını azaltmak amacıyla, Lyapunov analizine dayalı standart parametre adaptasyon yaklaşımını ortaya koyar. Daha sonrasında, değerkleri durum uzayında belli bir bölge içersinde değışen parametrelerin kimliklendirilmesini mümkün kılan modifiye edilmiş bir adaptasyon yaklaşımı geliştirilmiştir. Adaptasyon algoritmaları, lineer olmayan kontrol mekanizmasıyla ilintilidir öyle ki, sonuçta ortaya çıkan kontrolcü lineer olmayan adaptif bir kontrolcü olmaktadır. Teklif edilen kontrolcünün performansı, elektro-hidrolik eyleyicinin arzulanan kuvveti takip etme ya da izleme kabiliyetini gözlemek suretiyle denenmiştir. Sonuçlar tek başına lineer olmayan kontrolcüyle

kıyaslandığında böyle bir kontrolcünün, aktif süspansiyon sisteminin performansını iyileştirdiğini göstermiştir. Yol-Adaptif yaklaşım aynı zamanda (2002) yılında, Fialho ve Balas tarafından da ele alınmıştır. Onların yapmış oldukları çalışmada, Lineer parametreye bağlı kontrolcü (LPD) ile lineer olmayan back stepping tekniğinin bir kombinasyonu şeklinde, bir yol-adaptif aktif süspansiyon sistemi sunulmuştur. Bu çalışmada, iki seviyeli bir adaptasyon düşünülmüştür. Taşıt süspansiyonunun lineer olmayan karakteristiklerini şekillendirmek için, düşük düzey bir kontrol ve yol koşullarına bağlı olarak, farklı lineer olmayan karakteristikler arasında adaptif bir anahtarlama sağlamak amacıyla da daha yüksek düzeyli bir kontrol ele alınmıştır.

Bundan başka, (1999)'da Chantranuwathana ve Peng, (2000) yılında ise D'Amato ve Viassolo aktif süspansiyon kontrolcü tasarımını iki çevrim içerisinde ayırtmışlardır. Temel çevrim, arzulanan harekete geçirme (actuation) kuvvetini hesaplar. İç çevrim ise, arzulanan harekete geçirme (actuation) izlemeleri için, lineer olmayan hidrolik eyleyicileri kontrol eder. Sonuçlar önerilen kontrolcünün daha iyi performans gösterdiğini ortaya koymaktadır.

Aktif süspansiyon sistemlerinde SMC tekniği ilk olarak (1993)'te Alleyne ve diğerleri tarafından kullanılmıştır. Onların yapmış oldukları bu çalışmada, SMC stratejisi aktif süspansiyon sistemi içerisinde yer alan elektro-hidrolik eyleyicinin kontrolünde kullanılmıştır. SMC'nin performansı, oransal integral türevsel (PID) kontrolün performansı ile kıyaslanmıştır. Kontrol stratejisinin amacı, çeyrek taşıt modeli kullanılarak taşıtın sürüş kalitesinin iyileştirilmesiydi. Sürüş kalitesi, taşıt gövdesinin düşeydeki ivmelenmesi gözlenerek belirlenmektedir. Sonuçlar teklif edilen sliding mode kontrolcünün (SMC), sürüş kalitesini geliştirmek bakımından (PID) kontrolcünden daha iyi bir performans ortaya koyduğunu ancak sürüş kalitesi ile yol tutuş performansı arasındaki tavizleşme noktasında yetersiz kaldığını göstermektedir.

Kim ve Ro tarafından (1998)'de gerçek bir süspansiyon sisteminde yer alan sertleşen yay, karesel sönümlleme kuvveti ve lastik havalanma olgusu gibi bir takım lineersizlik faktörlerinin mevcudiyeti söz konusu iken, aktif süspansiyon sistemine sliding mode kontrolcü uygulamışlardır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında tasarlanan sliding mode kontrolcünün, parametrik belirsizlikler sebebiyle süspansiyon parametrelerinde meydana gelen aşırı değişimler karşısında, self-tuning kontrol yaklaşımına kıyasla daha dayanıklı olduğunu ortaya koymuştur.

Yoshimura ve diğerleri (2001)'de, aktif süspansiyon dizaynı için kuvvet giriş sinyalini üretmek maksadıyla pnömatik bir eyleyici kullandılar. Sliding mode kontrolün anahtarlama

kontrolü kısmı lineer quadratik kontrol yaklaşımı kullanılarak sağlandı. Yol profili ise, gerçekte lineer olmayan olan sistemden dönüştürülmüş olan lineer bir sisteme dayalı olarak tasarlanmış, minimum dereceden bir gözleyici yardımıyla tahmin edildi. Sonuçlar oluşturulmuş olan kontrolcünün, taşıt gövdesindeki titreşimleri izole etme bakımından, Lineer Quadratik kontrolcü tabanlı aktif süspansiyon sistemine göre daha başarılı olduğunu gösterdi.

Tam taşıt modeli için, aktif süspansiyon sisteminin kontrolü amacıyla çok giriş-çok çıkışlı (MIMO) Sliding mode kontrolcü (SMC) dizaynı (1998)'de Park ve Kim tarafından sunuldu. Son zamanlarda, bulanık mantık, yapay sinir ağları ve genetik algoritma gibi bir takım yapay zekâ tabanlı akıllı kontrol teknikleri aktif süspansiyon sistemlerine uygulandı. (1995)'te Ting ve diğerleri tarafından, çeyrek taşıt modeline dayalı aktif süspansiyon sistemi için bir sliding mode bulanık kontrol tekniği önerilmiştir. Bu çalışmada, kontrolcü iki düzeyde organize edilmiştir. Temel düzeyde bulanık kontrol dizaynını oluşturmak amacıyla, geleneksel bulanık kontrol kural kümesi ve çıkarım mekanizması inşa edilmiştir. Denetleme düzeyinde ise, kontrol performansı sistem parametrelerini değiştirmek yoluyla incelenmiştir. Kontrolcü girişi, Sliding mode ve Bulanık kontrolcünden gelen girişten oluşmaktadır. Çalışmadan elde edilen bulgular değerlendirildiğinde görülmektedir ki; Bulanık Sliding mode kontrolcü, taşıt gövdesinin ivmelenmesi ve yol tutuş açısından üstün bir performans sergilemekte, fakat süspansiyon sapması bakımından değerlendirildiğinde geleneksel sliding mode dizaynına nazaran çok kötü sonuçlar ortaya koymaktadır.

Lineer ve bulanık mantıklı kontrol teknikleri kullanılarak, otomobiller için aktif süspansiyon tasarımını konu alan bir diğer çalışma da, (1999)'da Yoshimura ve arkadaşları tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada, taşıt gövdesinin düşey ivmelenmesi asıl kontrol unsurunu oluşturmakta olup, bulanık mantıklı kontrol kısmı ise, otomobil aktif süspansiyon sisteminin tamamlayıcı kısmını teşkil etmektedir. Bulanık kontrol kuralları, belli koşullar altında, taşıt gövdesi ile süspansiyonun kısımları ve lastikte meydana gelen sıkışma miktarı arasındaki kabul edilebilir boyuttaki görelî yer değiştirmeye bağlı olarak oluşan, taşıt gövdesine dair zaman domeni, cevabının karesel ortalamasını minimize etmek suretiyle belirlenmiştir. Bulanık oransal integral ve oransal türevsel (PI/PD) kontrolcülerin ve genetik algoritmanın bir kombinasyonu, aktif süspansiyon sistemlerinin performansını geliştirmek maksadıyla Kuo ve Li tarafından (1999)'da ele alındı. Bulanık PI kontrolcü, arazi koşullarının sebebiyet verdiği yaylanmalı kütlelerin ivmelenmesini azaltmak amacıyla kullanıldı. Bulanık mantıklı kontrolcüye ait kural tablosu, genetik algoritma GA yardımıyla ayarlandı. Bir başka değişle aktif süspansiyon sistemine ait en iyi performansı elde etmek için bulanık mantıklı kontrolcü için gereken optimal karar verme mantığı, genetik algoritma yardımıyla oluşturuldu.

Yukarıdaki literatür incelemesinde görülmektedir ki, kontrolcü tasarımı için hem çeyrek hem de yarım taşıt modeline dayalı çeşitli aktif süspansiyon sistemi modelleri kullanılmıştır. Lineer kuvvet girişine sahip çeyrek taşıt modeli, (1987)'de Hac, (1997 ve 1998)'de Tseng ve Hrovat, (1991)'de Sunwoo ve diğerleri, (1993)'de Ray, (1995)'de Ting ve diğerleri, (1998)'de Kim ve Ro, (2000)'de Huang ve Chao ve (2001)'de Yoshimura ve diğerleri tarafından çalışmalarında kullanılmıştır. Aktif süspansiyon sistemlerini lineer kuvvet girişi ile modellemek işi oldukça basitleştirmekle beraber, tasarımda eyleyici dinamiklerini ihmal etmesi sebebiyle, sistemin tam bir modeli ortaya çıkmamaktadır. Dolayısıyla geliştirilen kontrolcü ve elde edilen sonuçlar, bakımından gerçek hayatta söz konusu süspansiyon sistemlerine uygulama bakımından problemler ortaya çıkmaktadır.

Bu sorunun üstesinden gelmek için, (1995)'te Rajamani ve Hedrick, (1995)'te Alleyne ve Hedrick, (1997)'deki iki ayrı çalışmalarında Lin ve Kanellakopoulos, (1999)'da Fukao ve diğerleri ve (2002)'de Fialho ve Balas, aktif süspansiyon sistemi tasarım çalışmalarında, hidrolik eyleyici dinamiklerini de göz önünde bulundurmuşlardır.

Diğer taraftan (1997 ve 1999)'da Yoshimura ve arkadaşları tarafından, yarım taşıt modeline yönelik aktif süspansiyon geliştirilmesi bakımından, bir hidrolik eyleyici önerildi. Bu yaklaşımın matematiksel olarak türetilmesi, bir önceki yaklaşıma nazaran oldukça basitti. Bununla beraber, (1997 ve 1999) Yoshimura ve arkadaşları, matematiksel türetme aşamasında, silindirlerdeki basınç farkının değişim oranı, yağın efektif hacim katsayısının büyük değerleri ile mukayese edildiğinde önemsiz olduğunu dolayısıyla türev teriminin lineer terimle değiştirilebileceğini farz etmişlerdir. Bu sebeple onların modelinde, silindirlerdeki basınç farkının değişim oranı lineer bir parametre olarak kabul edilmiştir. Ancak, gerçekte silindirlerdeki basınç farkının değişim oranı lineer olmayan yapıdadır ve bu lineersizlik, hidrolik eyleyici eyleyici dinamiklerine dair tam bir modele gerek duyulması halinde ihmal edilemez.

3. LİNEER MATRİS EŞİTSİZLİKLERİNE (LME) DAYALI DIŞBÜKEY OPTİMİZASYON

3.1 Optimizasyon Kavramı

Optimizasyon, yaşantımız boyunca hep karşılaştığımız ve farklı seçenekler içerisinde en uygun olanın seçilmesi ya da en iyi kararın verilmesi olarak ifade edebileceğimiz bir kavrama karşılık gelir. Daha teknik bir ifadeyle söylenecek olursa, aday kararlar kümesi içinden en iyisinin tespit edilmesidir. Optimizasyon, bilim ve teknolojinin hemen hemen her alanında bir şekilde karşılaşılan ya da ihtiyaç duyulan bir olgudur. Örnek olarak, endüstrideki üretim süreçleri ele alınabilir. Tüketicilerin kalite beklentisi, maliyet ve ürün özellikleri, üretimde esnekliği zorunlu kılan faktörler olarak karşımıza çıkar. Bu sebeple üretim yapılırken, ürünün olmazsa olmaz özellikleri, geniş bir kalite yelpazesi ve rekabet ortamı içerisinde, minimum kaynak tüketimi ve maksimum ekonomik fayda gözetilerek gerçekleştirilmelidir. Üretim sürecinin işleyişini etkileyen koşulların en iyi şekilde oluşturulması ya da seçimi sonucunda ciddi ekonomik faydalar sağlanabilir.

Matematiksel anlamda optimizasyon problemine bakılacak olursa, iki önemli aşama ile karşılaşılır. Bunlardan biri, aday kararlar kümesinin kendine has özelliklerinin yani bir anlamda kısıtların tespiti, diğeri ve belki de daha önemlisi, en iyi karar kavramının formüle edilmesidir. Bir optimizasyon problemi için söz konusu olan tüm kararların uzayını $\mathcal{X}$ ile bu kararlar içerisinde mümkün olan ya da aday karar diyebileceğimiz kararları ise $\mathcal{X}'$ karar uzayının altkümesi olan $\mathcal{S}$ ile ifade edelim. Aday kararlar kümesinin elemanı olan bir $x \in \mathcal{S}$ kararına ait performansın büyüklüğü, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde reel değerli bir fonksiyon yardımıyla belirlenir ki, bu fonksiyon aynı zamanda “maliyet fonksiyonu” ya da “amaç ölçütü” olarak bilinir. Yani söz konusu $x \in \mathcal{S}$ kararına dair performans $f(x)$ ’e eşit olacaktır. $\mathcal{S}$ aday kararlar kümesi üzerinden maliyet fonksiyonu f ’in en iyileştirilmesi problemi, f için yerine göre minimum değer, yerine göre ise maksimumun bulunması olarak karşımıza çıkar. Dolayısıyla en iyi ya da optimal karar, aday kararlar kümesinin maliyet fonksiyonunu minimum ya da maksimum yapan üyesine karşılık gelir.

Bir optimizasyon probleminde ele alınması gereken birkaç mesele bulunmaktadır.

- Mümkün olan en küçük maliyet ne olacaktır. Aslında bu,

$$V_{opt} := \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in \mathcal{S}\} \quad (3.1)$$

ifadesi ile verilen optimal değer tespit edilmesi demektir.

Optimal değerin $+\infty$ 'a eşit olması, aday kararlar kümesine ait bir kararın bulunmadığını, yani $\mathcal{S} \in \emptyset$ olduğunu göstermesine karşılık, $-\infty$ değerini alması ise problemin sınırlanmamış olduğunu ortaya koyar.

- Keyfi derecede küçük olabilen pozitif bir $\mathcal{E}$ sabiti için,

$$V_{opt} \leq f(x_{\mathcal{E}}) \leq V_{opt} + \mathcal{E} \quad (3.2)$$

koşuluna uyan optimale yakın bir $x_{\mathcal{E}} \in \delta$ kararı nasıl bulunabilir.

- $f(x_{opt}) = V_{opt}$ eşitliği sözkonusu mudur? Yani x_{opt} optimal kararı için f maliyet fonksiyonunun aldığı değer, optimal değere eşitmidir. Böyle ise f maliyet fonksiyonu için $f(x_0) = \min_{x \in \mathcal{S}} f(x)$ gibi bir minimumun varlığından söz etmek mümkündür.
- Bir optimizasyon probleminin çözümü olan x_{opt} optimal kararı, tek çözüm müdür?

3.1.1 Dışbükey Analiz

Bir optimizasyon problemi için, optimal çözümlerin mevcudiyetine dair birtakım koşulların ortaya çıkarılması, dışbükey analizin konusunu teşkil eder. Burada elde edilecek bulgular önemli neticeleri beraberinde getireceklerdir. Öncelikle temel teşkil eden bazı tanımlamalar yapmak gerekmektedir.

3.1.1.1 Süreklilik

Bir f fonksiyonu $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ gibi normlu iki lineer uzayı birbirine eşliyor olsun. Fonksiyonun bir $x_0 \in \mathcal{X}$ noktasında sürekli olması, her $\mathcal{E} > 0$ sayısı için $\|f(x) - f(x_0)\| < \mathcal{E}$ olmasına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ olacak şekilde, x_0 ve $\mathcal{E}$ 'a bağlı bir $\delta = \delta(x_0, \mathcal{E})$ 'nin mevcudiyetini gerektirir. Burada δ fonksiyonu sadece $\mathcal{E}$ 'a bağlı olacak şekilde ise fonksiyon için düzgün süreklilik söz konusudur. Dikkat edilecek olursa f fonksiyonu için sürekliliğin, fonksiyon tarafından birbirine eşleniyor olan lineer uzaylara dair norm tanımına da bağımlı olduğu görülecektir.

f Fonksiyonunun sürekliliğine dair bir diğer tanımlama da dizi kavramı üzerinden şu şekilde yapılabilir;

Fonksiyonun bir $x_0 \in \mathcal{X}$ noktasında sürekli olması ancak ve ancak, lineer $\mathcal{X}$ uzayında yeralan ve $n \rightarrow \infty$ için x_0 noktasına yakınsayan her $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ yakınsaması gerçekleşiyor ise mümkündür.

3.1.1.2 Kompakt Küme Kavramı

Süreklilik tanımının yanı sıra, bir kümenin kompakt oluşu da yine dizi kavramı yardımıyla açıklanabilir. Lineer $\mathcal{X}$ uzayına ait bir $\mathfrak{S}$ altkümesinin kompakt oluşu, $\mathfrak{S}$ içerisindeki her $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için, $x_0 \in \mathfrak{S}$ 'ya yakınsayan bir $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisinin mevcudiyeti ile mümkündür.

$\mathcal{X}$ vektör uzayı sonlu boyutlu ise, bu uzayın bir $\mathfrak{S} \subset \mathcal{X}$ altkümesinin kompakt olma koşulu, $\mathfrak{S}$ 'nin sınırlı ve kapalı olmasından ibarettir.

Bir optimizasyon problemi için çözüm bulunup bulunmadığı noktasında, Teorem 3.1'de ifadesi yer alan ve Weierstrass teoremi olarak bilinen teorem oldukça faydalıdır.

Teorem 3.1: (Weierstrass teoremi)

Şayet $f: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, normlu lineer uzay $\mathcal{X}$ 'in kompakt bir $\mathfrak{S}$ altkümesi üzerinde tanımlı ise bu durumda tüm $x \in \mathfrak{S}$ 'ler için,

$$f(x_{min}) = \inf_{x \in \mathfrak{S}} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in \mathfrak{S}} f(x) = f(x_{max}) \quad (3.3)$$

ilişisini sağlayacak, $x_{min}, x_{max} \in \mathfrak{S}$ noktaları mevcuttur.

3.1.1.3 Kümelerin İç ve Kuşatan Noktaları

$\mathfrak{S}$ Kümesini, normlu vektör uzayı $\mathcal{X}$ 'in altkümesi olarak ele alalım. Şayet $\|x - y\| < E$ şartını sağlayan tüm $y \in \mathcal{X}$ noktalarının, $\mathfrak{S}$ kümesine ait olmasını temin edecek bir $\mathcal{E} > 0$ sayısı bulmak mümkün ise $x \in \mathfrak{S}$ noktası, $\mathfrak{S}$ 'nin bir iç noktasıdır. Tüm iç noktalar birlikte $\mathfrak{S}$ kümesinin içini oluştururlar. Kendi içine eşit olan küme açık küme olarak adlandırılır. Eğer tüm $\mathcal{E} > 0$ sayılarına karşılık, $\|x - y\| < E$ olacak şekilde bir $y \in \mathfrak{S}$ bulunabiliyorsa $x \in \mathcal{X}$ noktası için $\mathfrak{S}$ 'nin kuşatan noktasıdır denir. Tüm kuşatan noktalar birlikte, $\mathfrak{S}$ 'nin kuşatılmışını oluştururlar. Kuşatılmışına eşit olan bir küme ise kapalı küme olarak tanımlanır.

3.1.1.4 Dışbükey Kümeler

Lineer vektör uzayında yer alan bir $\mathfrak{S}$ altkümesine ait herhangi iki nokta,

$$\{x_1, x_2 \in \mathfrak{S}\} \Rightarrow \{x := \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \mathfrak{S}, \quad \forall \alpha \in (0,1)\} \quad (3.4)$$

koşulunu sağlıyor ise $\mathfrak{S}$ kümesi dışbükeydir. Bir kümenin dışbükey olması durumunda, küme içerisindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası, yine o küme içerisinde kalacaktır. Elbette bu geometrik bir yorumdur. (3.4)'te verilen, dışbükey küme koşulunda $\{x := \alpha x_1 +$

$(1 - \alpha)x_2 \in \mathfrak{S}, \forall \alpha \in (0,1)$ şeklinde tanımlanan x noktası, x_1 ve x_2 gibi iki noktanın dışbükey kombinasyonudur. $(0,1)$ aralığındaki her α değeri için hesaplanacak tüm dışbükey kombinasyonların birleşimi, uç noktaları x_1 ve x_2 olan doğru parçasını verir. Dolayısıyla artık, dışbükey kümenin geometrik yorumu daha da anlaşılır haldedir.

3.1.1.5 Çok Sayıda Noktanın Dışbükey Kombinasyonu

$\mathfrak{S}$ kümesi, lineer vektör uzayının bir alt kümesi olmak üzere,

$$x := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad (3.5)$$

gibi tanımlanan x noktası, $i = 1, \dots, n$ için $\alpha_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ olmak kaydıyla, $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{S}$ noktalarının dışbükey kombinasyonunu ifade eder.

3.1.1.6 Dışbükey Kümelerin Özellikleri

Dışbükey kümelerle ilgili birtakım temel özellikleri ortaya koymak amacıyla, normlu $\mathcal{X}$ vektör uzayında yer alan $\mathfrak{S}$ ve $\mathfrak{T}$ gibi iki dışbükey küme göz önüne alınsın. Bu takdirde dışbükey kümeler için aşağıdaki özellikler söz konusu olacaktır.

- Herhangi bir α skaleri için $\alpha \mathfrak{S} := \{x \mid x = \alpha s, s \in \mathfrak{S}\}$ olarak tanımlanan küme dışbükeydir.
- Tanım gereği $\mathfrak{S} + \mathfrak{T} := \{x \mid x = s + t, s \in \mathfrak{S}, t \in \mathfrak{T}\}$ ile verilen küme dışbükeydir.
- Herhangi iki $\alpha_1 \geq 0$ ve $\alpha_2 \geq 0$ skalerleri göz önüne alındığında, $(\alpha_1 + \alpha_2) \mathfrak{S} = \alpha_1 \mathfrak{S} + \alpha_2 \mathfrak{S}$ eşitliği geçerlidir.
- $\mathfrak{S}$ ve $\mathfrak{T}$ kümelerinin hem içleri hem de kuşatanları dışbükeydir.
- $\mathcal{X}$ vektör uzayında, $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ şeklinde tanımlı bir lineer dönüşüm altında, $\mathfrak{S}$ kümesinin görüntüsü, $T\mathfrak{S} := \{x \mid x = Ts, s \in \mathfrak{S}\}$ dışbükey bir kümedir.
- Aynı şekilde $\mathfrak{S}$ kümesinin ters görüntüsü de, $T^{-1}\mathfrak{S} := \{x \mid Tx \in \mathfrak{S}\}$ dışbükey bir kümedir.
- $\mathfrak{S}$ ve $\mathfrak{T}$ gibi iki kümenin kesişimi, $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T} := \{x \mid x \in \mathfrak{S} \text{ ve } x \in \mathfrak{T}\}$ yine dışbükey bir kümedir. Bu özellik ikiden fazla dışbükey kümenin kesişimi içinde geçerlidir ve verilmiş olan bir kümeyi içerecek en küçük dışbükey kümenin bulunması bakımından oldukça önemlidir.

$a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\emptyset\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak kaydıyla, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$ kümesi bir hiperdüzlemi, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$ kümesi ise bir yarı uzayı ifade ederler ve her ikisi de dışbükeydirler.

Sonlu sayıda yarı uzayın, sonlu sayıda hiperdüzlem ile kesişimi neticesinde polihedron olarak adlandırılan ve dışbükey kümelerin özelliği dolayısıyla kendisi de dışbükey olan bir küme elde edilmiş olur. Kompakt polihedronlar, politop olarak bilinirler.

3.1.1.7 Bir Kümenin Dışbükey Kabuğu

$\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ altkümesinin dışbükey kabuğu, $\text{conv}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ 'yi içeren tüm dışbükey kümelerin kesişiminden ibarettir. Ayrıca, $\mathcal{S}$ kümesinin elemanları ile oluşturulabilecek tüm dışbükey kombinasyonların yekûnu olarak ta ifade edilebilir. $\mathcal{S}$ kümesi sonlu sayıda elemana sahip ise bu elemanlar $\mathcal{S}$ kümesinin dışbükey kabuğuna dair köşe noktalarını teşkil ederler. Sonlu sayıda elemanın dışbükey kabuğu bir politop oluşturur, aynı şekilde her politop sonlu bir kümenin dışbükey kabuğuna karşılık gelir.

3.1.1.8 Dışbükey Koni

Dışbükey analiz kapsamında çeşitli sebeplerden ötürü konik kümelere ihtiyaç duyulur.

Tüm $\alpha > 0$ pozitif sayıları ve $\forall x \in \mathcal{X}$ için eğer $\alpha x \in \mathcal{S}$ oluyorsa, $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ altkümesi bir konidir. Bir Koni, dışbükey bir kümeyi ifade ediyor ise, Dışbükey Koni olarak adlandırılır. Dışbükey kümelere dair tüm özellikler Dışbükey Koniler için de söz konusudur. Dışbükey konilerin kesişimi, yine Dışbükey bir Koni oluşturur. Lineer Eşitsizliklerin çözüm kümeleri de, Dışbükey Koniler olarak karşımıza çıkarlar. Şöyle ki;

Eğer $\mathcal{X}$ vektör uzayı, iç çarpıma sahip bir Hilbert uzayı ise,

$\mathcal{S} := \{x \in \mathcal{X} \mid \langle x, k_i \rangle \leq 0, i \in A\}$ kümesi, bir A indeks kümesi için $\mathcal{X}$ uzayının birtakım k_i elemanları üzerinden, Kapalı Dışbükey bir Koni tanımlar ve aynı zamanda lineer bir eşitsizliğin çözüm kümesi olduğu aşikârdır.

3.1.1.9 Dışbükey Fonksiyonlar

Boş olmayan bir $\mathcal{S}$ kümesi üzerinde, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanmış olan bir fonksiyon tarafından, tüm $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$ noktaları ve $\alpha \in (0,1)$ skalerleri için,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (3.6)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, f fonksiyonu dışbükeydir. Eşitsizliğin kesin olması halinde, fonksiyonun da kesin Dışbükey olduğu söylenir. Reel sayılar üzerinde tanımlı, $f(x) = x^2$, ya da $[\pi, 2\pi]$ kapalı aralığında tanımlanmış olan $f(x) = \sin x$ fonksiyonları dışbükey fonksiyonlara birer örnektirler.

Eğer $-f$ fonksiyonu dışbükey ise, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu içbükeydir. Dışbükey fonksiyonlar üzerinde gerçekleştirilen çoğu işlem dışbükeyliği muhafaza eder. En basitinden bir örnek vermek gerekirse, aynı domen üzerinde tanımlı iki dışbükey fonksiyonun toplamından oluşan fonksiyon da dışbükeydir.

Optimizasyon amacıyla, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu minimum yapan noktayı bulmak yerine, fonksiyonun değerini, $\gamma \in \mathbb{R}$ gibi belli bir üst sınırdan küçük kılan, tüm $x \in \mathcal{S}$ noktalarını bulmakla ilgilenelim. Böylesi $x \in \mathcal{S}$ noktalarını, $\mathcal{S}_\gamma := \{x \in \mathcal{S} \mid f(x) \leq \gamma\}$ şeklindeki bir altseviye kümesiyle ifade etmek mümkündür.

Burada, $\gamma < \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x)$ olması halinde, $\mathcal{S}_\gamma = \emptyset$ olacağı kolayca görülebilir. $\gamma = \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x)$ olması durumunda ise, $\mathcal{S}_\gamma$ altseviye kümesi, f 'i global anlamda minimum yapan noktalar kümesini verir. Çoklu performans ölçütlerini içeren kontrol problemleri için beklenen cevabın belirlenmesi noktasında, alt seviye kümelerinden faydalanılmaktadır. İki γ değeri arasında, $\gamma' \leq \gamma''$ ilişkisi var ise, bu γ değerlerine karşılık gelen $\mathcal{S}_\gamma$ altseviye kümeleri için, $\mathcal{S}_{\gamma'} \subseteq \mathcal{S}_{\gamma''}$ durumu söz konusudur. Bu durum, $\mathcal{S}_\gamma$ altseviye kümelerinin, γ 'nın dışbükey bir fonksiyonu olduğunu ortaya koymaktadır. Yani alt seviye kümeleri, γ 'ya göre azalmayan kümelerdir. Sonuçlar yorumlanırsa, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu dışbükey olduğunda, $\mathcal{S}_\gamma$ altseviye kümesinde dışbükey olduğu ortaya çıkar.

3.1.1.10 Güya Dışbükey Fonksiyonlar

$f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Güya Dışbükeyliği ancak ve ancak tüm $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$ noktaları ve $\alpha \in (0,1)$ skalerleri için,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \max[f(x_1), f(x_2)] \quad (3.7)$$

eşitsizliğinin sağlanıyor olması ile mümkündür.

Bir başka ifadeyle, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ sayısı için, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tüm $\mathcal{S}_\gamma$ altseviye kümeleri dışbükey ise, f fonksiyonu Güya Dışbükey bir fonksiyondur. Bu durumun tabii bir sonucu olarak, her dışbükey fonksiyon aynı zamanda Güya Dışbükey bir fonksiyondur.

3.1.1.11 Affine Küme

Lineer vektör uzayında yer alan bir $\mathcal{S}$ altkümesine ait herhangi iki nokta,

$$\{x_1, x_2 \in \mathcal{S}\} \Rightarrow \{x := \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \mathcal{S}\} \quad (3.8)$$

koşulunu sağlıyor ise, $\mathcal{S}$ kümesi affine bir kümedir. Geometrik bakış açısıyla söylenecek

olursa, bir kümenin affine olması durumunda, küme içerisindeki herhangi iki noktadan geçen doğru, yine o küme içerisinde kalacaktır. Her affine küme aynı zamanda dışbükeydir de. Özel olarak tek bir nokta veya boş küme affine olarak kabul edilir.

3.1.1.12 Affine Fonksiyon

Tüm $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$ noktaları ve $\alpha \in \mathbb{R}$ sayıları için, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ olarak tanımlı fonksiyon,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (3.9)$$

eşitliğini sağlıyor ise, affine bir fonksiyondur. Tüm affine fonksiyonlar hem dışbükey hem de içbükeydirler.

3.1.2 Dışbükey Optimizasyon

Optimizasyon konusunda, ele alınan küme ve fonksiyonların dışbükey olmaları oldukça faydalıdır. Örneğin minimize edilmek istenen dışbükey bir fonksiyon için, yerel minimum noktasının daima global minimuma eşit oluşu, dolayısıyla sayısal optimizasyon problemlerinin çözümleri global bir netice ortaya çıkarmaktadır.

3.1.2.1 Yerel ve Global Anlamda Optimal (En İyi) Olma

$\mathcal{S}$ kümesi normlu vektör uzayı, $\mathcal{X}$ in bir alt kümesi olmak üzere, $\|x - x_0\| < \varepsilon$ koşuluna uyan tüm $x \in \mathcal{S}$ noktaları için,

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (3.10)$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulunabiliyor ise, $x_0 \in \mathcal{S}$ noktası $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir yerel optimal çözümüdür denir. (3.10) eşitsizliği $\forall x \in \mathcal{S}$ noktası için geçerli oluyorsa bulunan çözüm global optimal çözüme karşı gelir.

f fonksiyonu dışbükey ise durum farklı olacaktır.

Dışbükey bir $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun her yerel optimal çözümü, aynı zamanda global optimal çözümü oluşturur. Ayrıca f fonksiyonu kesin dışbükey olduğu takdirde global optimal çözüm tektir. Bu önemli sonucun ispatı şu şekilde verilebilir;

f fonksiyonu dışbükey ve $x_0 \in \mathcal{S}$ noktası da onun yerel optimal çözümü olsun. Bu durumda, $(0,1)$ açık aralığında yer alan kâfi derecede küçük bir α sayısı ve tüm $x \in \mathcal{S}$ noktaları için,

$$f(x_0) \leq f(x_0 + \alpha(x - x_0)) = f((1 - \alpha)x_0 + \alpha x) \leq (1 - \alpha)f(x_0) + \alpha f(x) \quad (3.11)$$

eşitsizliği ortaya çıkar. Bu eşitsizlik yardımıyla da,

$$0 \leq \alpha(f(x) - f(x_0)) \text{ ya da } f(x_0) \leq f(x) \quad (3.12)$$

sonucu elde edilir ve $x_0 \in \mathcal{S}$ noktasının globa optimum çözüm olduğu anlaşılır.

f fonksiyonunun kesin dışbükey olması halinde, (3.12) eşitsizliği de kesinlik kazanır ve böylece $x_0 \in \mathcal{S}$ noktası için teklik söz konusu olur.

Böyle bir ispat yardımıyla, optimal bir çözümünün varlığına dair bir şey söylemek mümkün değildir. Sadece dışbükey fonksiyonlara dair yerel optimum bir çözüm bulunabiliyorsa, bu çözümün aynı zamanda global optimal olduğu gösterilmiştir. Öyle ise dışbükey bir fonksiyon için yerel optimal çözümü bulmak, aslında global optimal çözümün bulunması demektir. Ancak bu durum güya dışbükey fonksiyonları kapsamaz.

3.1.2.2 Dışbükey Programlar

Optimizasyon problemlerinin karar uzayları genellikle, sonlu boyutlu ve reel değerli $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ vektör uzayından oluşur. Bu uzayın her noktası, n boyutlu reel bir karar vektörüne veya karar noktasına işaret eder. İlgilenilen optimizasyon problemine bağlı olarak, karar uzayında,

$$\begin{aligned} g_i(x) &\leq 0, & i &= 1, \dots, k \\ h_i(x) &= 0, & i &= 1, \dots, l \end{aligned} \quad (3.13)$$

gibi birtakım eşitsizlik veya eşitlik kısıtlarını gerçekleyen bazı $x \in \mathcal{X}$ noktaları problemin aday kararlarını oluştururlar. Aslında bu eşitlik ya da eşitsizlikler optimizasyon problemleri içerisinde rastlanan bazı kısıtlamalar ve denklik bağıntılarının ifade edilmesinde kullanılırlar ve optimizasyonun bu kısıtlar dâhilinde gerçekleştirileceğini belirtirler. Bu çerçevede optimizasyon probleminin $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ aday kararlar kümesi $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^k$ ve $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^l$ vektör değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathcal{X} \mid g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\} \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanır.

O halde bir optimizasyon problemini,

böyle bir aday kararlar kümesi üzerinde $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ gibi bir maliyet fonksiyonu ya da amaç ölçütü için, $P_{opt} := \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x)$ olarak tanımlanmış olan, optimal değerin bulunması ve $f(x_{opt}) = P_{opt}$ olacak şekilde bu optimal değeri veren $x_{opt} \in \mathcal{S}$ optimal kararının tespiti olarak ifade etmek mümkündür.

3.2 Lineer Matris Eşitsizlikleri (LME)

Lineer matris eşitsizlikleri (LME), sistem ve kontrol teorisinde çok yaygın biçimde kullanılmışlardır. (LME)'ler ilk olarak Lyapunov' un çalışmalarında karşımıza çıkar. 1892 de yapmış olduğu çalışmada Lyapunov göstermiştir ki;

$$\dot{x} = Ax \quad (3.15)$$

formundaki diferansiyel bir denklemin asimptotik kararlılığı, P pozitif tanımlı bir matris olmak üzere;

$$A^T P + P A > 0 \quad (3.16)$$

biçimindeki bir matris eşitsizliği ile ortaya konabilir.

1940'larda Sovyetler Birliğinde ilk mühendislik uygulaması ortaya çıktığında, Lure ve Postnikov, Lyapunov fonksiyonunu formüle etmek için içerisinde lineer olmayan terimler bulunan üç tane birinci mertebeden denklem takımını kullandılar. Yapmış oldukları bu çalışmayla onlar, eyleyici lineersizliği içeren kontrol sistemlerinin kararlılığı problemi için bir çözüm ortaya koymuş oldular.

Ortaya koymuş oldukları kararlılık kıstası form olarak bir (LME) şeklindeydi ve nispeten küçük sistemler için kolaylıkla çözüm bulmak mümkündü (Boyd ve diğerleri 1994a).

60'lı yıllara gelindiğinde bir takım (LME)'lerin çözümüne yönelik olarak, Yakubovich, Popov ve Kalman tarafından grafiksel bir teknik geliştirildi. Bu teknik şu anda KYP lemma olarak bilinmektedir. 60'ların sonlarında Yakubovich tarafından, lineer olmayan kontrol teorisinde yer alan bir takım matris eşitsizliklerinin çözümüne dair metotlar ortaya konuldu. Yakubovich'in kontrol teorisi alanında yaptığı çalışmalarda, (LME)'lere çok sık olarak rastlanmaktadır.

1970'lere gelindiğinde ise, Willems Quadratik optimal kontrol problemleri üzerinde yaptığı analitik incelemeler neticesinde bir dizi frekans domeni eşitsizliği ve matrissel ilişkiye ulaşmıştır. Willems (LME)'lerin hesap algoritmaları kullanılmak suretiyle, çözümleri gerektiğini fark etmiş ve bunu şöyle ifade etmiştir:

“Esasen (LME)'lerin öneminin tam olarak anlaşılmadığı görülüyor. Mesela hesap algoritmaları yoluyla işlenebilir olup olmadıklarının görülmesi ilginç olurdu.”

Mühendislik uygulamalarında karşılaşılan bazı özel (LME)'leri için, grafiksel sonuçlar bulunabiliyor idiye de, asıl mesele (LME)'lerin daha genel olan formuna yönelik çözümlerin ortaya konulmasıydı.

1980'lerin başlarında iki ayrı önemli gelişme oldu. İlki 1984'te Karmarkar tarafından önerilen Interior-point algoritmasıydı. Bu polynomial-time lineer programlama metodu, 1948'de Dantzing tarafından geliştirilmiş olan Simplex metoduna göre daha hızlıydı. İkinci önemli gelişme ise kontrol ve sistem teorisinde rastlanan (LME)'lerin dışbükey optimizasyon problemi olarak formüle edilebilir olduğunun anlaşılması oldu.

1982' de Pyatnitskii ve Skorodinskii, Lur'e tarafından ortaya konulmuş olan bir problemi, (LME)'leri içeren ve elipsoid algoritması adı verilen bir algoritma yardımıyla çözülebiliyor olan dışbükey bir optimizasyon problemine indirgediler. O sıralarda Interior-points algoritması ve içerisinde (LME)'lere dayalı dışbükey optimizasyonu barındıran kontrol sistemi problemleri iki farklı çalışma alanıydılar. 1980'lerin sonlarına gelindiğinde ise, diğer bazı bilim adamları tarafından, kontrol sistemleri; yapısında (LME)'leri barındıran dışbükey optimizasyon problemleri şeklinde formüle edilmeye başlandı.

Buna bir örnek olarak, belirsiz sistemlerin quadratik olarak kararlı kılınma problemini ve bu problemin lineer programlama yoluyla çözümünü göstermek mümkündür.

Boyd ve arkadaşlarının çalışması, dışbükey optimizasyonun kontrolcü tasarımında önem kazanan bir teknik olduğunu gösterdi (1988). Bu çalışmada, yerleşme zamanı, aşım, tek çevrim kazanç ve faz marjinleri gibi bir takım kontrol gereksinimleri veya ölçütleri, tüm kararlı kılın kontrolcülerin Youla parametrizasyonu yapılmak suretiyle, standart dışbükey programlama problemine dönüştürüldü.

1988 yılında Rusya'da Nesterov ve Nemirovski, Interior-Points algoritmasını (LME) kısıtları üzerinde gerçekleştirilen dışbükey optimizasyon problemlerine genelleştirdiler. Ancak ne var ki; bir on yıl sonrasına kadar yapmış oldukları çalışma pek adından söz ettirmedi.

Lineer bir matris eşitsizliği dışbükey bir kısıt ifade eder. Bu sebeple dışbükey amaç fonksiyonlarına sahip optimizasyon problemleri ve LME kısıtlar bazı hazır yazılımlar yardımıyla etkin bir biçimde kolaylıkla çözülebilmektedir. Lineer eşitsizlikler, dışbükey quadratik eşitsizlikler, matris norm eşitsizlikleri ve kontrol teorisinden kaynaklanan Lyapunov ve Riccati eşitsizlikleri gibi birtakım eşitsizliklerin tümü, lineer matris eşitsizlikleri şeklinde yazılabilmektedirler. Ayrıca, çok sayıda LME söz konusu olduğunda bunların hepsini daha büyük boyutlu tek bir LME olarak yazmak ta mümkün olmaktadır. Bu durum, LME' leri çok çeşitli optimizasyon ve kontrol problemlerinin çözümüne yönelik faydalı bir araç haline getirmiştir. Bununla beraber ele alınan çoğu kontrol problemi LME' ler formunda yazılamadığı halde, Bilineer matris eşitsizlikleri BME' ler olarak adlandırılan daha genel bir formda yazılabilmektedir. Esas olarak BME' ler üzerinde yapılacak hesaplamalar, LME' ler

için söz konusu hesaplamalara göre hem daha zor, hem de BME' lerin çözümüne yönelik hazır paket yazılımlar bulunmamaktadır. Ancak BME' ler için de birtakım algoritmalar geliştirilmekte ve bunlar fazla karmaşık olmayan bazı süreç kontrol problemlerine uygulanabilmektedirler. LME ve BME' lerin teorik açıdan pek çok güzel özelliklere sahip olmaları sebebiyle, optimizasyon ve kontrol problemlerinin formülasyonunda iyi bir çözüm zemini oluşturmaktadırlar.

3.2.1 (LME)' nin Tanımı

Genel olarak Lineer bir Matris Eşitsizliği, denklem (3.17)'de gösterilen formdadır.

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0 \quad (3.17)$$

Burada $x \in \mathcal{R}^m, F_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$

Eşitsizlik, $F(x)$ in pozitif tanımlı bir matris olduğu anlamına gelmektedir, şöyle ki $F(x)$ matrisi;

$$z^T F(x) z > 0, \quad \forall z \neq 0, \quad z \in \mathcal{R}^n \quad (3.18)$$

olacak şekilde, denklem (3.18)'deki quadratik ifadeyi pozitif yapar.

Simetrik " F_i " $i = 0, 1, \dots, m$ matrisleri sabit olup, x değişkendir. Bu ise, $F(x)$ in x elemanlarının affine bir fonksiyonu olduğunu gösterir.

Denklem (3.17) kesin pozitif tanımlı bir Lineer matris eşitsizliğini göstermektedir. $F(x)$ 'in yarı pozitif tanımlı olması durumu, kesin olmayan bir Lineer matris eşitsizliği olarak ifade edilir.

Eğer $\{x \mid F(x) \succ 0\}$ kümesi boş değil ise, kesin pozitif tanımlı bir LME' nin fizibil (gerçeklenebilir) olduğu söylenir.

3.2.2 Polinomsal Eşitsizliklerin (LME) Eşdeğeri

LME' lerin skaler eşitsizlikler cinsinden ifadesi aydınlatıcı olmaktadır. Daha açıklayıcı olması bakımından, (3.17) numaralı denklemde gösterilen LME' nin n tane polinomsal eşitsizliğe eşdeğer olduğunu söyleyebiliriz.

Bunu görebilmek maksadıyla, matris teorisine ait şu sonucu göz önüne alalım, şöyle ki;

A matrisinin " ij " inci elemanı " A_{ij} " ile gösterildiği takdirde A matrisine ait asal minörlerin ifadesi,

$$A_{11}, \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \dots, \det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

şeklinde olup, $(n \times n)$ boyutlu simetrik bir "A" matrisi ancak ve ancak tüm asal minörlerinin pozitif olması durumunda pozitif tanımlıdır.

Buna göre denklem, (3.17)'deki LME' nin denklem (3.20)'de gösterilen n tane polinomsal eşitsizliğe eşdeğer olduğu kolaylıkla görülebilir.

$$F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11} > 0 \quad (\text{Lineer bir eşitsizlik})$$

$$\begin{aligned} & \left(F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11} \right) \left(F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11} \right) \\ & \quad (\text{Quadratik bir eşitsizlik}) \\ & - \left(F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11} \right) \left(F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11} \right) > 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\det \begin{pmatrix} F(x)_{11} & \dots & F(x)_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F(x)_{k1} & \dots & F(x)_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{k. inci dereceden polinomsal bir eşitsizlik})$$

⋮

$$\det(F(x)) > 0 \quad (\text{n. inci dereceden polinomsal bir eşitsizlik})$$

3.2.3 (LME)' lerin Dışbükey Olma Özelliği

C bir küme ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere, eğer tüm $x, y \in C$ 'ler için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ oluyorsa, C kümesi dışbükeydir denir. Ayrıca LME' ler x değişken kümesi üzerinde dışbükey bir kısıt oluştururlar yani;

$$\{x \mid F(x) > 0\} \quad (3.21)$$

kümesi dışbükey bir kümedir ve denklem, (3.17)'deki LME' nin fizibil kümesini ifade eder.

$F(x) > 0$ ve $F(y) > 0$ eşitsizliklerini sağlayan iki vektör x ve y olup $\lambda \in (0,1)$ olsun.

Buna göre;

$$\begin{aligned}
F(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= F_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i) F_i \\
&= \lambda F_0 + (1 - \lambda)F_0 + \lambda \sum_{i=1}^m x_i F_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m y_i F_i \\
&= \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) > 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

ilişkisi LME' lerin dışbükeyliğini ortaya koyar.

3.2.4 (LME)' ler İçin Tek Olmama

Farklı LME' lerin fizibil kümeleri birbirinin aynı olabilmektedir. Bunun görülebilmesi bakımından, öncelikle şunu belirtmek gerekir. Eğer $A(x)$ pozitif tanımlı bir matris ise;

$$\forall x \neq 0 \text{ için } A > 0 \Leftrightarrow x^T A x > 0 \tag{3.23}$$

ilişkisi geçerlidir.

Ayrıca M tekil olmayan bir matris olmak koşuluyla, $M^T A M$ "Congruence transformasyonu" olarak adlandırılır ve A matrisi Congruence transformasyonu altında yine pozitif tanımlı kalır yani;

$$\forall z \neq 0 \text{ için } M^T A M > 0 \Leftrightarrow z^T M^T A M z > 0 \tag{3.24}$$

ilişkisi söz konusudur.

Bu söylenenlere dayalı olarak rahatlıkla söylenebilir ki, bir matrise ait elemanlar farklı bir şekilde düzenlenirlerse,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix} > 0 \tag{3.25}$$

LME' nin fizibil kümesi değişmez.

3.2.5 Çok Sayıda (LME)' nin Tek Bir (LME) Olarak İfadesi

Hiç kuşkusuz kontrol problemlerinin LME' ler yoluyla ifade edilmesi durumunda, elde edilen avantajlardan biri de her biri ayrı ayrı LME' lerle ifade edilen çok sayıda kontrol gereksiniminin birleştirilip tek bir LME haline getirilebilmesidir.

(3.26)'daki gibi r adet LME den oluşmuş bir küme;

$$F^1(x) > 0; F^2(x) > 0; \dots; F^r(x) > 0; \quad (3.26)$$

bütün bu LME' lere eşdeğer tek bir LME ile (3.27)'deki gibi yazılabilmektedir.

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 = \text{diag}\{F^1(x) > 0; F^2(x) > 0; \dots; F^r(x) > 0\} \quad (3.27)$$

ki burada,

$$F_i = \text{diag}\{F_i^1, F_i^2, \dots, F_i^r\}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, m \quad (3.28)$$

şeklindedir.

$Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ matris bloklarından oluşmuş blok diyagonal matris

$$\text{diag}\{Q_1, Q_2, \dots, Q_r\} \quad (3.29)$$

formuna sahiptir.

Bu durum, blok diyagonal bir matrisin özdeğerlerinin, söz konusu matrisin her bir bloğuna ait özdeğerlerin birleşimine eşit olması ya da pozitif tanımlılıktan hareketle açıklanabilir.

3.2.6 Schur Tümlen (Schur Complement)

Schur Tümlen, lineer olmayan dışbükey matris eşitsizliklerinin LME' lere dönüştürülmesinde kullanılan önemli bir araçtır. Schur Tümlen'in ifadesi (3.30)-(3.33)'te verildiği gibidir.

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

blok matrisi ancak ve ancak,

$$Q > 0 \text{ ve } R - S^T Q^{-1} S > 0 \quad (3.31)$$

şeklindeki matris eşitsizliklerinin ve yine ancak ve ancak,

$$R > 0 \text{ ve } Q - S R^{-1} S^T > 0 \quad (3.32)$$

matris eşitsizliklerinin sağlanması halinde,

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \quad (3.33)$$

olacak şekilde pozitif tanımlıdır.

Bunun böyle olduğunu göstermek bakımından, $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ blok matrisi sağdan ve soldan uygun blok matrislerle (3.34)'deki gibi çarpılırsa;

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S^T Q^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -Q^{-1}S \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^T Q^{-1}S \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

sonucuna ulaşılmış olur ki, bu sonuç ta Schur Tümleyen ifadesini doğrular.

Dolayısıyla Schur Tümleyen yardımıyla (3.31) ve (3.32) numaralı lineer olmayan matris eşitsizliklerinin (3.33) numaralı LME' ye dönüştürülmesi mümkün olmaktadır.

Bir örnek olması bakımından, (3.35)'deki quadratik matris eşitsizliğini göz önüne alalım.

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0 \quad (3.35)$$

Bu matris eşitsizliğinde $A, B, Q = Q^T$ ve $R = R^T > 0$ verilmiş olan uygun boyutlu matrisleri, $P = P^T$ ise değişkeni göstermektedir ki, bu eşitsizlik P değişkenine bağlı quadratik matris eşitsizliğidir. Daha öncede ifade edildiği üzere Schur Tümleyen yardımıyla;

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0 \quad (3.36)$$

gibi bir LME haline getirilmesi mümkündür.

3.2.7 Dayanıklı Kontrole (LME) Yaklaşımı ve Nümerik Çözüm Metotları

Sistem ve kontrol teorisi içerisinde yer alan ve analitik olarak çözülemeyen çoğu (LME) problemi, nümerik olarak ele alınmış ve Interior-Points algoritması yoluyla çözülmüştür. Mesela 1993 yılında Packard ve Doyle tarafından, yapılandırılmış kompleks tekil değer (SSV) adı verilen μ ' nün üst sınırı ve (LME) arasındaki ilişki incelenmiştir. Gerek μ analizi, gerekse μ sentezinde, (LME)' lerle karşılaşılmaktadır. Doyle ve Packard, aslında kendileri de (LME)' lerin özel birer formu olan ve dayanıklı kontrol problemlerindeki temel hesap unsurlarını oluşturan, Lyapunov ve Riccati eşitliklerinin yerini (LME)'lerin alacağını iddia etmişlerdir.

1990'ların başında artık biliniyordu ki, dayanıklı kontrol problemlerinin (LME)'lerle ifade edilmesi mümkündü (Packard ve arkadaşları 1991, Boyd ve arkadaşları 1993). Ancak elipsoid algoritması gibi mevcut algoritmalar dışbükey problemlerin çözümünde yetersiz kalıyordu.

Bernussou ve diğerlerinin 1989'da yaptıkları çalışmada, dayanıklı quadratik durum geri beslemesi için Cutting-plane algoritması kullanıldığında, dışbükey programlama probleminin boyutunun, belirsiz parametrelerin sayısı ile neredeyse üstel olarak değişmekte olduğu

görüldü. Genel yapıdaki (LME)'lerin çözümü için daha verimli algoritmalara ihtiyaç duyulması sebebiyle, araştırmacılar (LME)'lere dayalı problemleri çözebilmek adına, Interior-Points metotlarını geliştirme yoluna gittiler (Boyd ve diğerleri 1993, Boyd ve El Ghaoui 1993).

Sonrasında ise, 1988 yılında dışbükey programlama için Nesterov ve Nemirovski tarafından geliştirilmiş olan Interior-Points algoritması, neredeyse (LME) tekniklerinin kullanıldığı tüm çalışmalarda göze çarpar oldu ve uygulama noktasında gerçekten verimli sonuçlar alınıyordu (Boyd ve diğerleri 1993).

Interior-Points algoritmasının şöhretinin doruk noktasını ise, Nesterov ve Nemirovski'nin 1994 yılındaki popüler yayınları oluşturdu. Dışbükey programlama teorisindeki bu gelişmeler, lineer programlama, konik quadratik programlama ve semidefinite programlama gibi ilgi çekici teorik çalışma alanları oluşturmanın yanı sıra sayısal dışbükey programlama sürecinin etkinliğini de çarpıcı biçimde arttırdı (Vandenberghe ve Boyd 1996).

(LME)'lere dayalı dışbükey optimizasyon yoluyla ele alınan kontrol sistemlerine ait çeşitli problemler, Interior-Points algoritmaları yoluyla kolaylıkla çözülebilmektedirler. Polynomial time dışbükey (LME) problemleri için bu algoritmaların etkinliği nümerik çalışmalar yoluyla ortaya konulmuştur. Bu algoritma aynı zamanda izdüşümsel olarak ta bilinmektedir. İlk olarak ticari bir yazılım olan MATLAB' in (LME) araç kutusu içinde gerçekleştirilmiştir (Gahinet ve diğerleri 1995). Sturm tarafından geliştirilmiş olan diğer bir çözücü de SeDuMi'dir. Hem Interior-Points algoritması, hem de SeDuMi, 2004 yılında Lofberg tarafından geliştirilmiş olan ve (LME)'lerin MATLAB içerisinde uygun formda yazılmalarına imkân tanıyan ve YALMIP olarak adlandırılan ayrıştırıcı yazılımla uyumlu çalışabilmektedirler.

3.2.8 (LME)'lerin H_∞ Kontrol Teorisindeki Etkileri

90'lı yıllarda, bu yeni (LME) yaklaşımının en fazla etkilediği alanlardan birisi de H_∞ kontrol teorisi olmuştur. 1990' da H_∞ optimizasyon problemi üzerinde yoğun olarak çalışan araştırmacılardan biri de Scherer' di. Onun çalışmaları, Willems'in 1971' deki çalışmalarına dayanıyordu. Willems H_∞ optimizasyonun vazgeçilmez araçları olan, Riccati eşitsizlikleri ve Sınırlı Reel Lemma'nın çözülebilirliği üzerinde çalışmalar yapmıştı.

1992'de Lu ve Doyle, 1994'te Packard gibi diğer araştırmacılar ise Lineer Kesirsel Dönüşümleri (LFT) kullanarak, H_∞ kontrol problemini durum uzayı içerisinde dışbükey bir kısıt olarak ifade etmişlerdir. 1994'te Iwasaki ve Skelton tarafından bir H_∞ kontrolcünün mevcudiyetine dair gerek ve yeter koşullar (LME)'ler çerçevesinde ortaya koyulmuştur.

İlk olarak yine 1994'te, (LME) yaklaşımlı H_∞ kontrol probleminin çözülebilirlik koşullarını Gahinet ifade etmiştir. 1994'te Gahinet ve Apkarian, H_∞ kontrolcü sentezi problemini, önce bir Lyapunov matrisinin bulunması ve ardından kontrolcünün elde edilmesi şeklinde iki adımda gerçekleştirmiş ve bu çalışmada, Riccati eşitlikleri yerine Riccati eşitsizlikleri kullanılmıştı.

Bu şekilde eşitsizlikler kullanılarak gerçekleştirilen formülasyon, tüm H_∞ suboptimal kontrolcülerin parametrelendirilmesini sağlamanın yanı sıra, kontrolcünün hesaplanması işini, (LME)'lerin çözümüne indirgemekte idi.

1997 yılına gelindiğinde Gahinet, nümerik optimizasyonun getirmiş olduğu külfeti ortadan kaldırmak maksadıyla, tek adımlı bir prosedür önerdi. Bunun yanı sıra H_∞ performans problemine yönelik çeşitli kısıtların birleştirilmesi konusunda, (LME) tekniklerinin sunduğu esneklik üzerinde yapılan çalışmalar da mevcuttu.

1996'da Chilali ve Gahinet, 1999'da ise Chilali ve diğerleri tarafından, H_∞ performansı, H_2 performansı ve kutup atama hedeflerini birlikte ele alıp ifade eden (LME) formülasyonu sunulmuştur. Bu formülasyon ve beraberinde 1995'te Scherer' in ortaya koyduğu karma H_2/H_∞ formülasyonu için kontrol sistemleri içerisinde yer alan ve (LME) tekniklerine dayalı çok amaçlı optimizasyonu konu edinen ilk araştırmalar ya da çalışmalar denilebilir.

Bazı araştırmacılar ise, tümleşik (unified) bir yaklaşım oluşturmak maksadıyla daha genel bir çerçeve çizmişlerdir. 1995'te Skelton ve Iwasaki Kovaryans kontrol yaklaşımı ile (LME) yaklaşımını bir araya getirerek, hesaplama bakımından daha verimli bir sonuç ortaya koymuşlardır. Bu yaklaşım sayesinde ayrı ayrı ele alınan problemlerin tamamı tek bir Lineer Cebir problemi halinde ifade edilebilmiştir. Şunu da söylemek faydalı olur, şöyle ki; bahsedilen (LME) teknikleri üzerinde sağlanan tüm gelişmeler ya da araştırmalar durum uzayı zemininde ortaya konulmuştur.

Ancak bununla beraber (LME)'ler için polynomial sistemlere dayalı çalışmalar da yok denemez. Bu konuda Henrion'un 2000 ve 2003 yılındaki incelemelerine bakılabilir. Belirsiz sistemlerin dayanıklı kararlılığı ve performans analizinin, (LME)'ler yoluyla gerçekleştirilmesi ve dayanıklı H_2 analizi konularında, 1999 yılında Balakrishnan ve Kashyap ve yine 1999 yılında Paganini'nin çalışmaları bulunmaktadır.

3.2.9 Kontrol Uygulamalarında (LME)'lerin Kullanımı

Bu konudaki çalışmalara bakılacak olursa, 1996'da Niewoehner ve Kaminer tarafından (LME) teknikleri bir uçak dizaynında kullanılmıştır. Geliştirdikleri yeni yöntem sayesinde entegre biçimde uçak-kontrolcü tasarımı sayısal bir çerçeveye oturtulmuştur. Uçağa ait bir takım parametrelerin tasarımı, kontrolcü tasarımıyla birlikte ele alınarak değerlendirilmiştir. Onlar aynı zamanda diğer araştırmacıların da üzerinde durmuş oldukları, uçağın manevra kabiliyetine dair gereksinimler gibi uçuş kalitesini etkileyen faktörlerin, (LME)'ler tarzında ifade edilebilir olduğunu göstermişlerdir. 2000 yılında Seto ve arkadaşları tarafından bir F-16 uçağına ait otomatik iniş sistemine dair kontrol problemi, (LME) yaklaşımı yoluyla kutup atama kısıtları bulunan bir H_∞ kontrolcü tasarlamak suretiyle çözülmüştür.

Çok giriş çok çıkışlı bir kontrol problemine örnek olarak ise, 2002'de Dettori ve Scherer tarafından bir kompakt disk player için çok sayıda norm gereksinimleri barındıran karma bir H_2/H_∞ kontrolcü dizaynı gerçekleştirilmiştir. Scherer ve arkadaşları tarafından 1997'de tasarlanmış olan karma H_2/H_∞ kontrolcü dizaynı, 2004'te Clement tarafından bir uzay aracı taşıyıcı roketinde ve yine 2004'te Frapark tarafından bir uydu kontrolcü tasarımında kullanılmıştır.

Biannic tarafından (LME)'ler bir savaş uçağının kontrolünde dayanıklılık analizi için kullanılmış ve 1997 yılında Megretski ve Rantzer tarafından ortaya konulmuş olan integral quadratik kısıt yaklaşımı sadece lineer zamanla değişmeyen belirsizlikler için değil, aynı zamanda lineer zamanla değişen belirsizlikler için de uygulanmıştır.

Danes 2004'te mobil bir robota ait çok kıstaslı görsel servo için, bir (LME) yaklaşımı ortaya koymuştur. Prempain ve Postlethwaite bilgisayarlı helikopter kontrolü için çevrim şekillendirmeye dayalı, statik H_∞ kontrolcü tasarlamışlardır. Bu kontrolcü düşük mertebeli olarak tasarlanmış ve uçuş testleri başarıyla gerçekleştirilmiş olup elde edilen performans düzeyinin oldukça tatminkâr olduğu görülmüştür.

Tüm bu uygulamalar gösterdi ki, (LME) teknikleri klasik kontrol metotlarının ortaya koyduğu sonuçları geliştirmekteydi. Fakat bununla beraber hala konservatif sonuçlar ortaya çıkıyor ve düşük dereceden kontrolcüler gerekiyordu. Bazı durumlarda, modern (LME) çözücülerden kaynaklanan sayısal sınırlamalar, -değişkenlerin sayısı gibi- ortaya çıkmaktaydı.

(LME) tekniklerinin kullanıldığı gerçek uygulamalar söz konusu olduğunda, ortaya çıkan problemler, dışbükey optimizasyon sahasında yeni araştırmalara yol açtı (Nesterov ve Nemirovski 1994).

4. (LME) YAKLAŞIMI İLE KARARLILIK ANALİZİ VE NORM ESASLI KONTROL TASARIMI

4.1 Lyapunov Kararlılığı (Kvadratik Kararlılık)

$$\dot{x} = Ax \quad (4.1)$$

gibi Lineer zamanla değışmeyen bir sistem göz önüne alındığında, bu sistemin Lyapunov anlamında kararlı olması için;

$$P > 0, \quad A^T P + PA < 0 \quad (4.2)$$

eşitsizliğinin sağlanıyor olması gerekmektedir ki, bu eşitsizlik Lyapunov eşitsizliği olarak bilinir.

Lyapunov göstermiştir ki;

aslında bir LME olan Lyapunov eşitsizliği, $Q = Q^T > 0$ şeklinde simetrik pozitif tanımlı herhangi bir Q matrisi için çözülebilmektedir.

$\dot{x} = Ax$ Sisteminin kararlı olması halinde,

$$A^T P + PA = -Q \quad (4.3)$$

lineer denkleminin çözümü olan P matrisinin pozitif tanımlı olduğu kesindir. Ayrıca bu problemi bir LME fizibilite problemi olarak ele almakta mümkündür.

Bu durumda; $x(0) = x_0$, ilk koşulu için $\dot{x} = Ax$ sistemini ve

$$J = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt \quad (4.4)$$

ölçüt fonksiyonunu ele alalım ve sistemin kararlı olduğunu varsayalım.

O halde, $\dot{x} = Ax$ sistemine ait tüm çözümler sınırlı olup, ölçüt fonksiyonu J' yi, sonlu kılar yani $J < \infty$ olur. Bunun böyle olduğunu görmek için J' yi sınırlamak maksadıyla,

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (4.5)$$

(4.5)'deki kvadratik Lyapunov fonksiyonunu ele alalım. Lyapunov'un ikinci metodu gereğince, herhangi bir $P = P^T > 0$ matrisi için, sisteme ait tüm yörüngeler ve tüm t anları için,

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = \frac{d}{dt}(x(t)^T P x(t)) \leq -x^T(t) Q x(t) \quad (4.6)$$

eşitsizlik koşulu sağlanmalıdır. (4.6) eşitsizliğinin, $t = 0$ 'dan $t = T$ 'ye kadar integre edilmesi sonucu, $x(T)^T P x(T) \geq 0$ olması sebebiyle söz konusu (4.6) eşitsizliği,

$$x(T)^T P x(T) - x(0)^T P x(0) \leq - \int_0^T x(t)^T Q x(t) dt \quad (4.7)$$

haline gelir ki, bu durum $t \rightarrow \infty$ için de geçerlidir. Buradan da,

$$J = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt \leq x(0)^T P x(0) \quad (4.8)$$

sonucuna ulaşılır. Bu da bize J ölçüt fonksiyonunun,

$$J \leq x_0^T P x_0 \quad (4.9)$$

şeklinde üstten sınırlandırıldığını söyler.

(4.6) eşitsizliğindeki türev ifadesi alındığı takdirde,

$$\frac{d}{dt}(x(t)^T P x(t)) = x^T(t)(A^T P + P A)x(t) \leq -x(t)^T Q x(t) \quad (4.10)$$

olduğu görülür ki, (4.6) eşitsizliği kendisine dair herhangi bir $P = P^T$ çözümü için,

$$A^T P + P A + Q \leq 0 \quad (4.11)$$

koşuluna eşdeğer olmaktadır. Böylelikle J ölçüt fonksiyonunu sınırlayan bir P matrisinin LME fizibilite probleminin çözülmesi yoluyla elde edilebileceğini söylemek mümkün olur.

4.2 Dayanıklı Kararlılık

$\dot{x} = Ax$ sistemi tekrar göz önüne alınıp, $\mathcal{A}$ kapalı dışbükey bir küme olmak üzere $A \in \mathcal{A}$ şeklinde seçilecek olursa sistemin dayanıklı kararlılığı şu şekilde tanımlanabilir.

Tanım: $\dot{x} = Ax$ sistemi her $A \in \mathcal{A}$ için asimptotik kararlı ise, o halde dayanıklı kararlıdır denilir.

4.2.1 Politopik Belirsiz Sistemler

Belirsiz parametre kümesi,

$$\Omega := \left\{ \zeta \mid \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N), \quad \forall \zeta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1 \right\} \quad (4.12)$$

şeklinde ele alındığında,

$$\mathcal{A} := \text{conv}[A_1, \dots, A_N] = \left\{ A(\zeta) \mid A(\zeta) = \sum_{i=1}^N \zeta_i A_i, \quad \forall \zeta \in \Omega \right\} \quad (4.13)$$

gibi tanımlı sistemler politopik belirsiz sistemlerdir.

4.2.1.1 Politopik Sistemlerin Quadratik Kararlılığı

$\mathcal{A} := \text{conv}[A_1, \dots, A_N]$ ve $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere, $\dot{x} = Ax$ sistemi için quadratik kararlılık koşulu,

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4.14)$$

eşitsizliğini sağlayan $P = P^T > 0$ matrisinin bulunabilmesidir.

Dikkat edilmesi gereken nokta, eğer $\dot{x} = Ax$ sistemi Quadratik kararlı ise bütün bir politopik sistemler ailesi Dayanıklı Kararlıdır. Bu durumu şu şekilde göstermek mümkündür.

Açıkça bilinmektedir ki, Politopik kümeye ait herhangi bir $\bar{A}$ sisteminin, $\bar{A} = \sum_{i=1}^N \bar{\zeta}_i A_i$ şeklinde ifade edilmesini sağlayacak $\bar{\zeta} \in \Omega$ mevcuttur. $\bar{\zeta} \in \Omega$ ise $\bar{\zeta}_i \geq 0$ olduğuda malumdur. O halde (4.14) eşitsizlikleri $\bar{\zeta}_i$ 'ler ile çarpılıp toplanacak olurlarsa,

$$P > 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^N (\bar{\zeta}_i A_i^T) P + P \sum_{i=1}^N (\bar{\zeta}_i A_i) = \bar{A}^T P + P \bar{A} < 0 \quad (4.15)$$

sonucuna varılır ki, bu da $\bar{A}$ 'nin kararlılığı anlamına gelir. Bu durum her $A \in \mathcal{A}$ için söz konusu olacağından tüm bir politopik sistemler ailesinin Dayanıklı Kararlılığı ortaya çıkar.

4.3 Lineer Sistemler için Kararlı Kılan Durum Geri beslemeli Kontrolcü

Zorlanmamış durumda kararsız olan lineer sistemlerin durum geri beslemeli kontrol uygulanarak, kararlı kılınmaları mümkün olabilmektedir. Durum geri beslemesi uygulanacak Lineer sistemleri zamanla değişmeyen ve belirsiz sistemler olmak üzere, iki başlıkta ele almak mümkündür.

4.3.1 Zamanla Değişmeyen Sistemler

$$\dot{x} = Ax + B_u u, \quad x(0) = x_0 \quad (4.16)$$

gibi zamanla değişmeyen bir sisteminin, kararlı kılınması problemi ele alınsın.

$u = Kx$ geri beslemesi ile, $\dot{x} = A_{cl}x$, $x(0) = x_0$ şeklindeki kapalı çevrim sisteme ait sistem matrisi, $A_{cl} = A + B_u K$ olarak bulunur. Lyapunovun quadratik kararlılığı gereğince,

$$P > 0, \quad (A^T + K^T B_u^T)P + P(A + B_u K) < 0 \quad (4.17)$$

eşitsizliklerini birlikte çözen $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $P \in \mathbb{S}^n$ matrislerinin bulunabilmesi durumunda (4.16) sistemi için, $u = Kx$ durum geribeslemesi ile kararlı kılınabilir denir. Değişkenlerine göre lineer olmayan (4.17) eşitsizliklerinin, lineerleştirme amacıyla her iki tarafı sağdan ve soldan P^{-1} ile çarpılıp $X := P^{-1}$ ve $L := KX$ değişken dönüşümleri uygulanırsa,

$$X > 0, \quad AX + XA^T + B_u L + L^T B_u^T < 0 \quad (4.18)$$

Şeklindeki LME' ler elde edilir ve kararlı kılan durum geribesleme kazancı, bu LME' leri birlikte çözen $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $X \in \mathbb{S}^n$ matrisleri yardımıyla $K = LX^{-1}$ şeklinde belirlenir.

4.3.2 Belirsiz Sistemler

$$\dot{x} = Ax + B_u u, \quad x(0) = x_0, \quad (A, B_u) \in \text{conv}\{(A_1, B_{u1}), \dots, (A_N, B_{uN})\} \quad (4.19)$$

sistemi politopik yapıda belirsiz bir sistem olsun. $u = Kx$ durum geribeslemesiyle, böyle bir sistemi kararlı kılacak olan K kontrolcüsü araştırılsın. Bu durumda,

$$\dot{x} = A_{cl}x, \quad x(0) = x_0, \quad A_{cl} = (A + B_u K) \in \text{conv}\{(A_1 + B_{u1}K), \dots, (A_N + B_{uN}K)\} \quad (4.20)$$

şeklinde ortaya çıkan kapalı çevrim sistem de politopik yapıda olacaktır. Yine Lyapunovun quadratik kararlılığı gereğince,

$$P > 0, \quad (A_i^T + K^T B_{ui}^T)P + P(A_i + B_{ui}K) < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.21)$$

eşitsizliklerini beraber çözen $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $P \in \mathbb{S}^n$ matrislerinin bulunabilir olması halinde, (4.19) sistemi $u = Kx$, şeklindeki geribeslemeli kontrol yardımıyla kararlı kılınabilir.

(4.21) eşitsizlikleri K ve P gibi iki değişkenin çarpımını ihtiva ettiğinden, değişkenlerine göre lineer değildirler. Söz konusu eşitsizlikleri LME haline getirebilmek maksadıyla, Congruence dönüşümü yapılır. Önce eşitsizlikler sağdan ve soldan P^{-1} ile çarpılır ve ardından $X := P^{-1}$ ve $L := KX$ değişken dönüşümleri uygulanırsa, elde edilen LME' leri aynı zamanda sağlayan $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $X \in \mathbb{S}^n$ matrisleri yardımıyla, $K = LX^{-1}$ şeklindeki kontrol kuralına ulaşılır.

4.4 Norm Kavramı ve Norm Esaslı Kontrol Tasarım Teknikleri

4.4.1 Vektör ve Matris Normları

X Vektör uzayı üzerinde tanımlı reel değerli $\|\cdot\|$ fonksiyonu bu uzaya ait bir ölçü fonksiyonu olup, “norm” olarak adlandırılır ve $x, y \in X$ olmak kaydıyla (4.22)’deki özellikleri sağlar.

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$; α , herhangi bir skaler
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; Üçgen eşitsizliği

(4.22)

En genel durum olarak bir x vektörünün p -normu;

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (4.23)$$

şeklinde tanımlıdır.

Özel olarak, p ’nin 1,2 ya da ∞ olması durumunda bir vektör için 1,2 ve ∞ normlarına dair ifadeler (4.24)-(4.26)’daki gibi olacaktır,

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|; \quad (4.24)$$

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}; \quad (4.25)$$

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|; \quad (4.26)$$

Aslında norm, 3-boyutlu Öklid uzayındaki mesafe ya da uzunluk kavramının daha genel bir ifadesidir. Buradan da anlaşılmaktadır ki 3-boyutlu Öklid uzayındaki bir vektörün uzunluğu ya da orijine olan mesafesi onun 2 normuyla örtüşmektedir yani aynı şeydir.

Bir x vektörünün p -normundan hareketle, $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisi için indüklenmiş

p -normu, denklem (4.27)’de verilen ifadeyle tanımlanabilir;

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \quad (4.27)$$

Vektör normlarında olduğu gibi yine özel olarak $p=1,2$ ve ∞ olması durumunda,

$A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ Matrisi için indüklenmiş norm ifadeleri,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|; \quad (4.28)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}; \quad (4.29)$$

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|; \quad (4.30)$$

olarak ifade edilirler.

4.4.2 İşaret ve Sistem Uzayları

İşaretler sonsuz boyutlu vektörler olarak düşünüldüğünde, işaret ya da fonksiyonların da, sonsuz boyutlu vektör uzayları oluşturduğu söylenebilir. Öyle ki, bu vektör uzaylarının elemanları veya vektörleri işaretler ya da fonksiyonlardır. $\mathbb{C}$ kompleks alanı üzerinde X bir vektör uzayı olmak üzere, X vektör uzayında, elemanları işaretler olan ve

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := X \times X \rightarrow \mathbb{C} \quad (4.31)$$

şeklinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olan " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ " iç çarpımın $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri söz konusudur;

- $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- Eğer $x \neq 0$ ise o halde $\langle x, x \rangle$ pozitiftir.

İç çarpımlı bir X vektör uzayı "iç çarpım uzayı" olarak adlandırılır. İç çarpımlı tam uzaylar "Hilbert Uzayları" olarak bilinirler. Burada uzayın tam oluşundan kasıt, söz konusu uzaydaki her Cauchy dizisinin yakınsak olduğudur. Hilbert uzayı iç çarpımlı olduğundan, bu uzay üzerinde iç çarpım yoluyla indüklenmiş bir norm söz konusudur. $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı olup karesel olarak integrallenebilen ve Lebesgue ölçülebilir olan fonksiyonlar üzerinde iç çarpım;

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \text{trace}[f(t)^* g(t)] dt \quad (4.32)$$

(4.32) eşitliğindeki gibi tanımlanır ve bu fonksiyonlar sistem ve kontrol teorisinde çokça

rastlanan ve " $\mathcal{L}_2[a, b]$ uzayı" olarak adlandırılan Hilbert uzayını oluştururlar. Diğer önemli Hilbert uzayları arasında, $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$, $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ ve $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ fonksiyon uzaylarını saymak mümkündür.

Lineer kontrol teorisinde işaret ve sistemler zaman domeninden ziyade Laplace, yani (s) ya da frekans, yani ($j\omega$) domeninde ifade edilirler. G Sisteminin Laplace domenindeki ifadesi olan $G(s)$ sistemin transfer fonksiyonu olarak adlandırılır. Sistemin $G(s)$ transfer fonksiyonu ancak ve ancak sağ yarı kapalı s düzleminde ($\text{Re } s \geq 0$) analitik olması durumunda karardır. Eğer $G(j\infty)$ sonlu değere sahipse proper olduğu ve eğer $G(j\infty) = 0$ ise kesin proper olduğu söylenir.

Önemli bazı " $j\omega$ " ya da " s " domeni uzayları şunlardır:

- Sanal eksen ($j\mathbb{R}$) üzerinde tanımlı olan ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[F^*(j\omega)F(j\omega)]d\omega < \infty \quad (4.33)$$

(4.33) integralini sonlu kılan matris-değerli kompleks F fonksiyonlarının oluşturduğu Hilbert uzayı, " $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$ uzayı" olarak adlandırılır. Bu Hilbert uzayı üzerinde, iç çarpım üzerinden indüklenen norm ifadesi;

$$\|F\|_2 = \sqrt{\langle F, F \rangle} \quad (4.34)$$

(4.34) eşitliği ile verilir. Bu uzay üzerindeki iç çarpım ifadesi ise F ve $G \in \mathcal{L}_2$ olmak üzere;

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[F^*(j\omega)G(j\omega)]d\omega \quad (4.35)$$

(4.35) eşitliği ile tanımlıdır.

- $\mathbb{C}^+$ 'da yani sağ yarı açık s düzleminde ($\text{Re } s > 0$) analitik olan matris-değerli $F(s)$ fonksiyonlarından oluşan " H_2 uzayı", $\mathcal{L}_2$ uzayının bir alt uzayıdır. Kesin proper olan ve kararlı reel rasyonel matris transfer fonksiyonlarının tümü H_2 uzayının reel rasyonel alt uzayını oluşturur ve bu alt uzay " RH_2 " şeklinde gösterilir.
- Sanal eksen ($j\mathbb{R}$) üzerinde sınırlı olan ya da sonlu değer alan matris-değerli fonksiyonların Banach uzayı, " $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$ uzayı" olarak adlandırılır. Bu uzaya ait fonksiyonlara ilişkin sonsuz normu, (4.36) eşitliği ile

$$\|F\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \overline{\sigma}[F(j\omega)] \quad (4.36)$$

olarak ifade edilir.

- $\mathbb{C}^+$ 'da yani sağ yarı açık s düzleminde ($\text{Re } s > 0$) analitik ve sonlu değer alan matris-değerli $F(s)$ fonksiyonlarından oluşan " H_{∞} uzayı", $\mathcal{L}_{\infty}$ uzayının bir alt uzayıdır. Kesin proper ve kararlı reel rasyonel matris transfer fonksiyonlarının tümü, H_{∞} uzayının reel rasyonel alt uzayını oluşturur ve bu alt uzay " RH_{∞} " şeklinde gösterilir. Söz konusu bu uzay için H_{∞} normu ise (4.37) eşitliğinde

$$\|F\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \overline{\sigma}[F(s)] \quad (4.37)$$

olarak tanımlıdır.

4.4.3 H_2 Nominal Performans ve H_2 Kontrol

Kesin proper olan bir sistemin transfer matrisi $G(s)$ için H_2 normu,

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(G(i\omega)^* G(i\omega)) d\omega} \quad (4.38)$$

şeklinde tanımlıdır. H_2 Normu, sistemin bir impuls girişi karşılık olarak gösterdiği davranış açısından yorumlanabilir. Şöyle ki, $G(s)$ sisteminin H_2 normu, sistemin impuls cevabı için toplam çıkış enerjisine karşılık gelmektedir. Parseval teoremine dayanarak sistemin transfer matrisi $G(s)$ 'in H_2 normunun sisteme dair impuls cevabı açısından ifadesinin,

$$\|G(s)\|_2 = \|g(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(g^T(\tau) g(\tau)) d\tau} \quad (4.39)$$

(4.39)'daki gibi olacağı gösterilebilir. Burada impuls cevabı matrisi $g(t)$ 'nin ifadesi, (4.40) eşitliğinde verildiği gibidir.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ce^{At}B + D\delta(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

$D = 0$ olmak kaydıyla, trace operatörü lineer bir operatör olduğundan;

$G(s)$ sisteminin H_2 normu için,

$$\|G(s)\|_2^2 = \text{trace} \left\{ C \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt C^T \right\} = \text{trace}(C W C^T) \quad (4.41)$$

ya da

$$\|G(s)\|_2^2 = \text{trace} \left\{ B^T \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt B \right\} = \text{trace}(B^T M B) \quad (4.42)$$

eşitlikleri söz konusudur. (4.41) ve (4.42) no'lu eşitliklerde yer alan " W " ve " M " matrisleri sırasıyla sistemin kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik gramiyenleri olup, (4.43) ve (4.44)'de gösterilen biçimde tanımlanmışlardır.

$$W := \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (4.43)$$

$$M := \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (4.44)$$

Sisteme ait " W ", kontrol edilebilirlik ve " M ", gözlenebilirlik gramiyenleri,

$$A W + W A^T + B B^T = 0 \quad (4.45)$$

ve

$$A^T M + M A + C^T C = 0 \quad (4.46)$$

biçimindeki matrissel Lyapunov denklemlerini sağlarlar ve sistem matrisi A 'nın özdeğerlerinin sol yarı s düzleminde ya da başka bir deyişle $\mathbb{C}^-$ 'de yer alması durumunda, söz konusu denklemlerin yek çözümlerini oluştururlar. Bir sistem için yukarıdaki gibi tanımlanan H_2 nominal performans için Lineer matris eşitsizlikleri açısından bir tanımlama yapmak maksadıyla Teorem 4.1 faydalı olacaktır.

Teorem 4.1:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x + B w, \\ z &= C x + D w, \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

sistemi göz önüne alınsın.

Sisteme ait transfer fonksiyonunun ifadesi; $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ olmak üzere,

sistemin kararlı farz edilmesi durumunda,

- Sistemin H_2 normunun sonlu olabilmesinin ancak ve ancak $D = 0$ olmak kaydıyla mümkün olduğu yani,

$$\|G(s)\|_2 < \infty \Leftrightarrow D = 0 \quad (4.48)$$

olduğu söylenir ya da,

- $D = 0$ olması halinde eşdeğer olarak (4.49)-(4.53) ilişkileri söz konusudur.

a) $\|G(s)\|_2 < \gamma \quad (4.49)$

$G(s)$ 'in 2 normu γ 'dan küçüktür

b) $AX + XA^T + BB^T < 0$ ve $\text{trace}(CXC^T) < \gamma^2 \quad (4.50)$

eşitsizliklerini sağlayan bir $X > 0$ matrisi vardır.

c) $A^TY + YA + C^TC < 0$ ve $\text{trace}(B^TYB) < \gamma^2 \quad (4.51)$

eşitsizliklerini sağlayan bir $Y > 0$ matrisi vardır.

- d) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^T > 0$ olacak biçimde pozitif tanımlı simetrik bir $\mathcal{X}$ matrisiyle beraber öyle bir Z matrisi vardır ki,

$$\begin{bmatrix} A^T\mathcal{X} + \mathcal{X}A & \mathcal{X}B \\ B^T\mathcal{X} & -I \end{bmatrix} < 0; \begin{bmatrix} Z & C \\ C^T & \mathcal{X} \end{bmatrix} > 0 \text{ ve } \text{trace}(Z) < \gamma^2 \quad (4.52)$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

- e) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^T > 0$ olacak biçimde pozitif tanımlı simetrik bir $\mathcal{X}$ matrisiyle beraber öyle bir Z matrisi vardır ki,

$$\begin{bmatrix} A\mathcal{X} + \mathcal{X}A^T & \mathcal{X}C^T \\ C\mathcal{X} & -I \end{bmatrix} < 0; \begin{bmatrix} Z & B^T \\ B & \mathcal{X} \end{bmatrix} > 0 \text{ ve } \text{trace}(Z) < \gamma^2 \quad (4.53)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

H_2 Normunun tanımı gereğince, zaten söz konusu ilk madde geçerli olmak durumundadır. Teorem 4.1'in ikinci kısmına bakılacak olursa, $\|G(s)\|_2 < \gamma$ olabilmesi için ancak "W" gibi bir kontrol edilebilirlik gramiyeni tarafından yine H_2 normunun tanımı gereğince $\text{trace}(CWC^T) < \gamma^2$ eşitsizliğinin sağlanıyor olması gerektiği görülür.

Ayrıca bilinmektedir ki kontrol edilebilirlik gramiyeni, $AW + WA^T + BB^T = 0$ biçimindeki

matrisel Lyapunov denkleminin yek çözümüdür. O halde $AX + XA^T + BB^T < 0$ ve $trace(CXC^T) < \gamma^2$ eşitsizliklerini sağlayan bir $X > 0$ matrisi vardır denilebilir. Bu da aslında $\mathcal{X} := X^{-1}$ olarak tanımlanmak suretiyle, $A^T\mathcal{X} + \mathcal{X}A + \mathcal{X}BB^T\mathcal{X} < 0$; $C\mathcal{X}^{-1}C^T < Z$ ve $trace(Z) < \gamma^2$ şeklindeki eşitsizlikleri geçerli kılan bir $\mathcal{X} > 0$ ve bir Z matrisinin mevcut olması anlamına gelmektedir. Yine burada $A^T\mathcal{X} + \mathcal{X}A + \mathcal{X}BB^T\mathcal{X} < 0$ ve $C\mathcal{X}^{-1}C^T < Z$ eşitsizliklerine Schur Tümlen uygulananak olursa, $\|G(s)\|_2 < \gamma$ olabilmesinin ancak,

$$\begin{bmatrix} A^T\mathcal{X} + \mathcal{X}A & \mathcal{X}B \\ B^T\mathcal{X} & -I \end{bmatrix} < 0; \begin{bmatrix} Z & C \\ C^T & \mathcal{X} \end{bmatrix} > 0 \text{ ve } trace(Z) < \gamma^2 \quad (4.54)$$

şeklindeki (4.54) eşitsizliklerini sağlayan $\mathcal{X} > 0$ ve Z matrislerinin bulunuyor olması ile mümkün olduğu görülmektedir.

4.4.3.1 Durum Geribeslemeli H_2 Kontrol Tasarımı

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax + B_w w + B_u u, \\ z &= C_z x + D_{zu} u, \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Sistemi için sistemin w girişinden z çıkışına transfer fonksiyonunun, H_2 normunu minimize eden $u = Kx$ durum geribesleme kontrol kuralının belirlenmesi problem ele alınsın. Kolayca görülecektir ki kapalı çevrim sistemin ifadesi,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_u K)x + B_w w, \\ z &= (C_z + D_{zu} K)x, \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

biçiminde olacaktır. Yukarıda H_2 performansa dair elde edilmiş olan analiz sonuçları

(4.56)'daki kapalı çevrimin sistem matrisleri cinsinden yazılacak olursa,

$$\begin{bmatrix} (A + B_u K)^T \mathcal{X} + \mathcal{X}(A + B_u K) & \mathcal{X}B_u \\ B_u^T \mathcal{X} & -I \end{bmatrix} < 0; \quad (4.57)$$

$$\begin{bmatrix} Z & (C_z + D_{zu} K) \\ (C_z + D_{zu} K)^T & \mathcal{X} \end{bmatrix} > 0 \quad \text{ve} \quad trace(Z) < \gamma^2 \quad (4.58)$$

buradan da,

$$A^T\mathcal{X} + \mathcal{X}A + K^T B_u^T \mathcal{X} + \mathcal{X}B_u K + \mathcal{X}B_w B_w^T \mathcal{X} < 0 \quad (4.59)$$

$$Z > (C_z + D_{zu} K)\mathcal{X}^{-1}(C_z + D_{zu} K)^T \quad \text{ve} \quad trace(Z) < \gamma^2 \quad (4.60)$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa, bu eşitsizliklerin dışbükey olmadıkları görülür.

O halde, (4.59) eşitsizliği sağdan ve soldan $\mathcal{X}^{-1}$ ile çapılır ve $X := \mathcal{X}^{-1}$ ve $L := KX$ değişken dönüşümleri yapılacak olursa,

$$AX + XA^T + B_u L + L^T B_u^T + B_w B_w^T < 0 \quad (4.61)$$

$$\begin{bmatrix} Z & C_z X + D_{zu} L \\ * & X \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{ve} \quad \text{trace}(Z) < \gamma^2 \quad (4.62)$$

Şeklindeki LME' lere ulaşılır. Bu LME' lerini bir arada çözen $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $X \in \mathbb{S}^n$ matrisleri yardımıyla, kapalı çevrim sistemin w girişinden z çıkışına transfer fonksiyonunun, H_2 normunu minimize eden $u = Kx$ durum geribesleme kontrol kuralı, $u = LX^{-1}x$ olarak belirlenir.

4.4.4 H_∞ Nominal Performans ve H_∞ Kontrol

Lineer ve zamanla değişmeyen bir sistemin transfer fonksiyonuna dair H_∞ normu, sistemin performansı için önemli bir göstergedir.

Transfer fonksiyonu, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ şeklinde ifade edilen

$$\dot{x}(t) = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0 \quad (4.63)$$

(4.63)'daki sistemin asimptotik olarak kararlı olduğu farz edildiği taktirde, $G(s)$ 'in $\mathbb{C}^+$ da yani sağ yarı açık s düzleminde ($\text{Re } s > 0$) tüm $s \in \mathbb{C}$ ler için sonlu değer alması ya da başka bir ifadeyle, $\sigma_{\max}(G(s))$ 'in, yani transfer fonksiyonunun en büyük tekil değerinin, sonlu değere sahip olması söz konusudur.

$\mathbb{C}^+$ Pozitif reel kısma sahip kompleks sayıları göstermek üzere, $\mathbb{C}^+$ da analitik olup $T: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^{p \times m}$ olarak tanımlanan ayrıca sonsuz normu sonlu değere sahip yani

$$\|T\|_\infty := \sup_{s \in \mathbb{C}^+} \sigma_{\max}(T(s)) < \infty \quad (4.64)$$

olan matris değerli kompleks fonksiyonların tümü H_∞ isimli Hardy Uzayını oluştururlar. Her ne kadar H_∞ uzayına ait fonksiyonlar $\mathbb{C}^+$ da tanımlanmış olsalar da, bu fonksiyonların sanal eksen üzerine yek biçimde genişletilmeleri mümkündür. Bir sistemin sanal eksen üzerinde tanımlı olan transfer fonksiyonu için sonsuz normu,

$$\|T\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(T(j\omega)) \quad (4.65)$$

biçiminde ifade edilir. Buradan görülür ki sistemin H_∞ normu, sisteme ait frekans cevabının, maksimum tekil değerinin, tüm frekanslar üzerinden supremumuna eşittir.

Sistemin transfer fonksiyonunun H_∞ normu,

$$\|T\|_{2,2} := \sup_{0 < \|w\|_2 < \infty} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (4.66)$$

(4.66)'da gösterilen biçimde karesel olarak integrallenebilen çıkış ve giriş sinyalleri tarafından indüklenmiş bir norm olarak düşünülebilir. Sistemin H_∞ normunun üstten sınırlandırılabilir olduğu Teorem 4.2 ile ortaya koyulmuştur.

Teorem 4.2:

γ Pozitif bir sayı olmak üzere,

$$\dot{x}(t) = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0 \quad (4.67)$$

ile verilen sistemin A matrisinin Hurwitz olması yani sistemin iç kararlı olması durumunda eşdeğer olarak (4.68)-(4.70) ifadelerini sıralamak mümkündür.

a) Sistemin transfer fonksiyonunun sonsuz normu γ dan küçüktür.

$$\|T\|_\infty < \gamma \quad (4.68)$$

b) Sistemin ilk koşulunun $x(0) = 0$ olması halinde, sisteme uygulanacak tüm karesel olarak integrallenebilen ya da diğer bir ifadeyle enerjisi sonlu w girişleri için,

$$\|T\|_{2,2} := \sup_{0 < \|w\|_2 < \infty} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma \quad (4.69)$$

koşulu söz konusudur.

c) Sistem $s(w, z) = \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2$ gibi bir arz fonksiyonu için kesin dissipatiftir.

$$d) \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} < 0 \quad (4.70)$$

şeklindeki LME için bir $K = K^T$ çözümü mevcuttur ve $T(j\omega)^* T(j\omega) < \gamma^2 I$

eşitsizliği tüm $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ lar için geçerlidir.

(4.70) eşitsizliğini eşdeğer olarak, (4.71)'deki gibi yazmak mümkündür

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (4.71)$$

Schur Tümlenene göre (4.71) eşitsizliği, (4.72) ile ifade edilebilir ki bu bir LME değildir.

$$A^T P + PA + C^T C + (PB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(B^T P + D^T C) < 0, \quad P > 0 \quad (4.72)$$

Ya da (4.71) eşitsizliği

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (4.73)$$

şeklinde yazılıp Schur Tümlen formülü uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (4.74)$$

(4.74)'deki LME' ne ulaşılır.

Analiz anlamında buraya kadar söylenenler ışığında kapalı çevrim bir sistem için, H_∞ kontrolcünün sentezi noktasında denilebilir ki, böyle bir kontrolcü kapalı çevrim sistemin kararlılığını sağlar ve kapalı çevrim transfer fonksiyonunun sonsuz normunu γ gibi pozitif bir sayıdan küçük kılar.

Bu durum $\rho(\mathcal{A}) \subset \mathbb{C}^-$ ve $\|\mathcal{T}\|_\infty < \gamma$ gösterimiyle ifade edilebilir.

4.4.4.1 Durum Geribeslemeli H_∞ Kontrol Tasarımı

$$\dot{x}(t) = Ax + B_w w + B_u u, \quad (4.75)$$

$$z = C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u, \quad x(0) = x_0$$

sistemi için, $u = Kx$ durum geribeslemesi altındaki kapalı çevrim sistemin transfer fonksiyonunun H_∞ normunu γ gibi pozitif bir sayıdan küçük kılan kontrol kuralının belirlenmesi problemi ele alınsın. Kapalı çevrim sistemin ifadesi,

$$\dot{x}(t) = (A + B_u K)x + B_w w, \quad (4.76)$$

$$z = (C_z + D_{zu} K)x + D_{zw} w, \quad x(0) = x_0$$

şeklindedir. Yukarıda ele alınan Teorem 4.2'den elde edilmiş analiz sonuçları, (4.76)'daki kapalı çevrim sistem için düşünülecek olursa,

$\|\mathcal{T}_{cl}(K, s)\|_\infty < \gamma$ olması ancak ve ancak,

$$\begin{bmatrix} (A + B_u K)^T P + P(A + B_u K) & PB_w & (C_z + D_{zu} K)^T \\ B_w^T P & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ (C_z + D_{zu} K) & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (4.77)$$

şeklindeki matris eşitsizliklerini, aynı zamanda çözen $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $P \in \mathbb{S}^n$ matrislerinin mevcudiyetini gerektirir. Problemin bu haliyle bir LME problemi olmadığı açıkça ortadadır. Bu sebeple, (4.77) eşitsizliğinin her iki yanı sağdan ve soldan, $\text{diag}\{P^{-1}, I, I\}$ ile çarpılır ve $X := P^{-1}$, $L := KX$ dönüşümleri göz önüne alınırsa söz konusu eşitsizlikler (4.78) no'lu LME' lere dönüştürülmüş olur.

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_u L + L^T B_u^T & B_w & XC_z^T + L^T D_{zu}^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ * & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0 \quad (4.78)$$

Kapalı çevrim transfer fonksiyonunun optimal H_∞ normu için, γ 'nın en küçük değerinin ilgili eşitsizliklere göre aranması gerekir. Bu noktada Optimal H_∞ kontrolcü ise, $u(t) = LX^{-1}x(t)$ olarak hesaplanır.

5. KONTROL SİSTEMLERİNDE EYLEYİCİ DOYUMU OLGUSU

Kontrol uygulamalarında kullanılan eyleyiciler, aslında oldukça katı genlik ve değişim sınırlamalarına sahiptirler. Uygulamada herhangi bir eyleyicinin sağlayabildiği, kuvvet, tork, strok ve benzeri kontrol değişkenleri, hep belli bir sınır dahilinde olabilmektedir.

Eğer kontrolcü tasarım aşamasında, eyleyiciler için söz konusu bu sınırlar dikkate alınmayacak olursa, kapalı çevrim performansı üzerinde kararsızlığa kadar gidebilen performans kayıpları oluşabilmekte ve istenmeyen geçici durum cevapları görülebilmektedir.

Bu konuda bir örnek vermek gerekirse, manevra kabiliyetinin ön plana çıktığı ileri teknoloji ürünü savaş uçaklarında eyleyici doyumuna bağlı olarak uçuş performansı olumsuz yönde etkilenmekte ve bunun da ötesinde bazen hayati sonuçlar doğuracak arıza durumları meydana gelebilmektedir. Hal böyle olunca da, ister lineer isterse lineer olmayan kontrol tasarım teknikleri açısından bakılsın, eyleyici doyumunu meselesi mutlaka dikkate alınmak durumundadır ve bunun doğal sonucu olarak bu konuya yönelik çalışmalar ilgi odağı olmaya ve giderek yoğunluk kazanmaya başlamıştır.

Eyleyici doyumunu problemini ele alan çalışmalara tarihi süreçte, optimal kontrol teorisine dayalı çözüm (Hsia, 1967) arayışlarıyla başlanmış ve anti-windup kompanzasyonu (Astrom ve Rundqwist, 1989), hata yönetim tekniği (Kapasouris vd., 1988), Lyapunov ve Riccati tekniklerini esas alan yerel veya global kararlı kılma yöntemleri, pozitif reel, sınırlı reel ve mutlak kararlılık teorilerinin kullanıldığı çeşitli çalışmalarla devam edilmiştir. Süre gelen çalışmalarla, bu konudaki literatür oldukça zenginleşmiş olup, şimdilerde doyumlu eyleyiciler içeren kontrol tasarımları çerçevesinde, bozucuların bastırılması, sistemin çekim domeninin tahmini, performans kayıplarının azaltılması ve belirsizlik ve gecikmeler karşısında dayanıklılığın sağlanması konularında araştırmalara devam edilmektedir.

Konuyla ilgili, konservatif olmayan ve etkin çözüm algoritmalarının kullanıldığı bir takım tekniklere aşağıda değinilmiştir.

Yapısında eksponansiyel kararsız modlar ihtiva eden lineer sistemlerin, girişlerinde genlik ve genlik değişimine dair doyum bulunması durumuna ilişkin anti-windup kontrolcu tasarımı Barbu vd. (2000) tarafından ele alınmış ve geniş bir çalışma bölgesi üzerinde tatminkar sonuçlar ortaya konulmuştur. Ayrıca burada Barbu vd. (2000) konuya dair daha önce yapmış oldukları çalışmalarda, göze çarpan yerel ve global kontrolcülere değinmekte ve bu tipte bir sistem için yerel performans ve global kararlılık anlamında gerek koşulları ortaya koymaktadırlar. Yine bu çalışmada, eyleyici doyumunu altında kararsız bir uçağın uçuş kontrolü

ele alınmış ve keskin manevralara karşılık kararlılığın sürdürüldüğü gösterilmek suretiyle önerilmiş olan kontrolcünün etkinliği kanıtlanmıştır.

Evvela sadece simetrik doyumlu eğleyicileri göz önünde bulundurarak, lineer ve exponansiyel olarak kararsız sistemlerin kararlılığı ve boş kontrol edilebilir bölge konusunda çalışmalar yapmış olan Hu vd., sonrasında gerçekte daha ziyade karşılaşılan asimetrik doyumlu eğleyicilerle ilgili bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmada, asimetrik eyleyicilerden ötürü, uygulamada karşılaşılan problemlerle ilgili olarak, Hu vd. (2000a) tarafından üstel olarak kararsız lineer sistemler için boş kontrol edilebilir bölge karakterize edilmiş ve bu bölge üzerindeki kararlılık gösterilmiştir. Ayrıca lineer quadratik kontrol uygulanmış olan ikinci dereceden kararsız bir sistem için çekim domeninin, yüksek değerli kazanç geribeslemesi altında keyfi biçimde genişletilmek suretiyle boş kontrol edilebilir bölgeye yaklaştırılabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

Jabbari (2001) gerçekleştirdiği çalışmada, bozucu bastırma problemini, Lineer Parametreleri Değişen (LPD) sistemler üzerinden ele almış ve bu problem için eyleyici doyumunu konusuna odaklanmıştır. Eyleci doyumlu kontrol problemi, LPD kontrol problemi haline getirildikten sonra, sabit bir Lyapunov fonksiyonu kullanarak, çıkış geri beslemeli kontrolcü tasarımı politopik LPD sistemler için incelenmiştir. Gerçekleştirilen LPD tasarımı, sabit Lyapunov fonksiyonu kullanmaktan kaynaklanan konservatifliği ortadan kaldırmak maksadıyla, parametre bağımlı Lyapunov fonksiyonları kullanılmıştır. Neticede girişteki genlik ve genlik değişimine dair doyum probleminin LPD kontrol tasarımı yoluyla ele alınarak çözüme kavuşturulabileceği ortaya konulmuştur. Önerilen tekniğin başarısı ise, iki sayısal örnek üzerinde sınanmıştır.

Zamanla değişmeyen lineer sistemler için, genlikleri sınırlı kontrol girişlerine karşılık, dinamik çıkış geribeslemeli yerel H_2 performans kontrolcüsünün sentezi, Iwasaki ve Fu (2002) tarafından ele alınmıştır. Tasarım sonucu ortaya çıkarılan kapalı çevrim sistemin kararlılığına ve H_2 performansına dair incelemelerde, daire tekniği ve lineer analiz yöntemlerinden faydalanılmıştır. Durum uzayının Eyleyiciği doyuma götüren bölgeleri için daire tekniği, doyum meydana gelmeyen bölgelerde ise lineer analiz yöntemleri ele alınmıştır. Önerilen yöntemin lineer yöntemler karşısında performans konusunda daha başarılı sonuçlar ortaya koyduğu görülmüştür.

Pare vd. (1999) çekim domeninin genişliği, bozucu bastırma düzeyi ve L_2 kazancı olmak üzere üç ayrı performans ölçütünü göz önüne alarak, yapısında doyum barındıran geribeslemeli sistemler için yerel kararlılık ve yerel performansa odaklı optimal kontrolcü

tasarımıyla ilgilenmişlerdir. Ortaya konan tasarımın, Popov kriterlerine ve doyum olgusunun sektör sınırlı lineer olmayan yapıdaki ifadesine dayandığı göze çarpmakta ve sentezlenen optimal kontrolcünün LME' ler yardımıyla karakterize edildiği görülmektedir.

Mevcut çalışmaların, zamanda sürekli sistemler üzerinde gerçekleştirildiğini, ancak uygulamada dijital sistemlerin önem arz ettiğini vurgulayan Pan ve Kapila (2001), doyumlu eyleyiciler ihtiva eden ayırık zamanlı sistemleri ele almışlardır. Pan ve Kapila eyleyici doyumunu altında ayırık zamanlı sistemler için durum ve çıkış geribeslemeli kontrolcü tasarımı, LME ler yardımıyla ele almışlardır. Sentezlenen kontrolcünün etkinliği, sayısal örneklerle ortaya konulmuştur. Ayrıca ortaya çıkan sonuçlardaki konservatifliği azaltacak bir yöntem önermişlerdir.

Tarbouriech ve Garcia (2002) dayanıklı çıkış geri beslemeli kontrolcünün, belirsizliklere sahip ve eyleyici doyumuna maruz sistemler için LME' ler Riccati denklemleri üzerinden tasarımına eğilmişlerdir. Sınırlı normlu ve zamanla değişen parametrik belirsizliklere sahip sistemler söz konusu olduğunda, tasarlanmış olan kontrolcünün dayanıklı kararlılık ve performans sergilediği görülmüştür. Ayrıca bahsedilen tasarım yöntemiyle, kararsız açık çevrim sistemler için yerel kararlılık temin edilebilmektedir. Sayısal örneklerle de sonuçlar desteklenmiştir. Çalışmanın bir diğer yönü ise, lineer olmayan doyum ifadesinin yeni bir bakış açısıyla politopik olarak ifade edilmiş olmasıdır

Genlik doyumlu eyleyicilere sahip sistemler hakkındaki geribesleme problemi, Wu vd. (1998) tarafından ele alınmıştır. Wu vd. LPD kontrol tasarım yöntemini esas alarak bir anti-windup kontrol tekniği sunmuşlardır. Önerilmiş olan bu teknikle, LPD kontrolcü için planlama değişkeni olarak doyum gösterge parametresi kullanılmıştır. LPD kontrolcünün tasarımında kullanmış oldukları LME' lerin çözümü için ise Interior Point algoritmasından faydalanmışlardır.

Yapmış oldukları çalışmada, da Silva Jr ve Tarbouriech (2005), eyleyici doyumuna maruz lineer sistemlerin kararlı olduğu bölgenin genişletilmesini hedeflemişlerdir. Eyleyici doyumunun söz konusu olmadığı durumda, lineer bir sistemi kararlı kılan dinamik çıkış geribeslemeli kontrolcü esas alınarak, kapalı çevrimin çekim domeni hakkında maksimum bir tahmini gerçekleştirecek anti-windup kazanç metodu teklif edilmiştir. Kontrolcü ve anti-windup yapısı ölü bölge şeklinde modellenerek, quadratik Lyapunov fonksiyonuna dayalı kararlılık şartlarını bulmak amacıyla değiştirilmiş sektör koşullarından faydalanılmıştır. Elde edilen kararlılık koşullarının LME' ler cinsinden ifade edildiği görülmektedir.

Lyapunov tekniğinin sistemli biçimde kullanılması suretiyle, Hu vd. (2006) tarafından

doyumlu sistemler için yerel kararlılık ve performans analizi üzerinde durulmuş ve sisteme uygulanan bozucu girişlerin sınırlı enerjiye sahip olması halinde çekim domeninin tahmin edilmesi, lineer olmayan L_2 kazancı gibi birtakım problemler incelenmiştir.

Yine enerjisi sınırlı bozuculara mukabil, eyleyicilerinde doyum bulunan lineer kontrol sistemlerinin tasarımı Castelan vd. (2006) tarafından ele alınmıştır. Kapalı çevrim sistemin, sonlu L_2 kazancıyla kararlı oluşunu temin edecek durum geribesleme kazancı LME kısıtları olarak ifade edilmiştir. Bu kısıtların quadratik Lyapunov fonksiyonları yardımıyla elde edilmesi noktasında, birden çok amaç ölçütü karşısında konservatiflik derecesi en düşük çalışma bölgesini veren Finsler yardımcı teoremi ve Lineer olmayan sektör koşullarının ifadesinde kullanılan modifiye sektör koşulları gibi iki önemli araçtan faydalanılmıştır.

5.1 Eyleyici Doyumlu Sistemlerin Analizi

Bu bölümde, eyleyici doyumunda ve L_2 tipi bozuculara karşılık, lineer sistemler için analiz ve kontrolcü tasarım problemi ele alınacaktır. Geri-beslemenin lineer olarak gerçekleştirildiği kabul edilecektir. Bozucuların genlikleri üzerinde bir sınırlama varsayımı yapılmayacak ve sistemin ilk koşullarının sıfır olması gereği aranmayacaktır. Daha net ifade etmek gerekirse, eyleyici doyumunda ve L_2 tipi bozucular altında,

$$\dot{x} = Ax + B_u \text{sat}(u) + B_w w \quad (5.1)$$

$$z = Cx$$

şeklinde ifade edilen bir sistem göz önüne alınacaktır.

Burada $x \in \mathbb{R}^n$ 'ler durumları, $w \in \mathbb{R}^q$ bozucu girişi, $\text{sat}(\cdot)$ ise birim düzeyli standart doyum fonksiyonunu ifade etmektedir. Dikkat edilirse birim olmayan doyum düzeyinin, B_u matrisi ve u kontrol işareti içerisine aktarılmasının mümkün olduğu görülür.

Lineer bir sistem için, bozucu bastırma kabiliyeti, sistem çıkışı ve bozucunun L_2 normları arasındaki en büyük oran şeklinde ifadesini bulan L_2 normu yardımıyla ölçülebilir.

Ancak ne var ki yeterince büyük bir bozucu sebebiyle durum geribeslemesi altında, (5.1) sistemine dair durum ve çıkışlar, sınırlandırılmaz bir şekilde artış gösterebilirler ve bozucu bastırma bağlamında L_2 kazancı anlamını yitirmiş olur.

Bu sebeple enerjisi sınırlı bozucular üzerine yoğunlaşmıştır. Yani söz konusu bozucular, pozitif bir α sabiti verildiğinde ,

$$\mathcal{W}_\alpha := \left\{ w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q: \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt \leq \alpha \right\} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlı bir bozucu kümesinden alınacaklardır.

Araştırılacak husus, söz konusu bozucular kümesine ait tüm bozucular için sistemin durumlarının sınırlı kalmasını sağlayacak maksimum α değerinin ne olması gerektiğidir. Bu problem bozucu tolere etme problemi olarak adlandırılır ve burada, başlangıç koşullarının sıfır olup olmamasına bağlı olarak iki farklı durumla karşılaşılır.

Sistemin tolere edebileceği bozuculara ait maksimum enerji düzeyi, α_{max} belirlendikten sonra, $\alpha < \alpha_{max}$ olmak kaydıyla $\mathcal{W}_\alpha$ kümesinden seçilen bozucuların bastırılması problemi ele alınabilir.

Sistemin bozucu bastırma yeteneğinin bir ölçüsü olarak, verilen $\mathcal{W}_\alpha$ kümesi üzerinde tanımlı, sınırlandırılmış L_2 kazancı ya da sistemin durum yörüngelerini kuşatan zarfın genişliği kullanılabilir.

Bahsedilen problemlere bir yaklaşım olarak, bir elipsoid içerisinde başlayan sistem yörüngelerinin, yine bu elipsoidi kuşatan, dış bir elipsoid kabuk içerisinde kalmasını temin edecek bir koşulun belirlenmesi düşünülebilir.

Verilen bir geribesleme kuralı çerçevesinde, kapalı çevrim sistemin kararlılığı ve bozucu bastırma yeteneği, söz konusu bu iki elipsoidin büyüklüğü ve bunlar arasındaki fark yardımıyla değerlendirilebilir.

Diğer taraftan, bozucu toleransının ölçüsü, böylesi iki elipsoidin mevcudiyetini mümkün kılan en büyük α değeri olarak ta ifade edilebilir.

Bahsedilen bu hususlar çerçevesinde, sisteme ait kararlılık, bozucu toleransı ve bozucu bastırma yeteneği problemlerinin, kısıtlı optimizasyon problemleri şeklinde ifade edilmeleri mümkün olmaktadır. Bu durumda, optimizasyon problemlerinin kısıtları, lineer matris eşitsizlikleri şeklindedirler. Bu sebeple problemlerin çözümleri de kolaylıkla gerçekleştirilebilmektedir.

Ayrıca sistemin L_2 kazancı cinsinden bozucu bastırma yeteneği için, yine söz konusu lineer matris eşitsizliklerine dayalı bir optimizasyon probleminin çözümü kullanılacaktır.

Geribesleme kazancının ekstra bir bağımsız parametre olarak hesaba katılması halinde, bu optimizasyon problemi kolaylıkla bir kontrolcü tasarım problemine dönüşebilmektedir. Üzerinde durulan bu analiz ve tasarım metodu yardımıyla, bahsi geçen problemlerin çözümü

noktasında kayda değer bir katkı ortaya konulmuş olmaktadır.

Elde edilen sonuçlar esasen, lineer olmayan $satF(x)$ gibi doyumlu bir geribeslemenin, bir dizi lineer geribesleme tarafından oluşturulan dışbükey bir kabuk içerisine yerleştirilmesi fikrine dayalıdır. Hu ve Lin (2001).

(5.1)' deki sistem göz önüne alındığında, genlikleri sınırlı olan bozuculara mukabil, söz konusu sistem için değişmez bir küme tanımlayan koşullar, Hu vd. (2002) tarafından benzer bir yaklaşım kullanılarak elde edilmiştir. Bozucular sınırlı genlikli olmayıp, L_2 tipi yani sınırlı enerjili olduklarında, sisteme dair değişmez bir küme elde etmek mümkün olmamaktadır.

Burada kullanılacak analiz yöntemi, her ne kadar elipsoidlerden faydalıyor olsa da, alternatif analiz yaklaşımları da söz konusu olabilmektedir. Buna bir örnek olarak, Benzaouia ve Hmamed (1993) tarafından yapılmış olan çalışmayı vermek mümkündür. Bu çalışmada, eyleyiciyi doyuma götürmeyen durumlar tarafından şekillendirmiş olan polihedronların pozitif değişmezliğinden istifade edilmiştir.

Bununla beraber elipsoidlere dayalı sonuçlar, eyleyicinin lineer çalışma bölgesinin ötesini de kapsamaktadırlar. Fang vd. (2004)

5.1.1 Kararlılık ve Bozucu Toleransı Problemi

$u = Fx$ durum geribeslemesi ile kapalı çevrim haline getirilmek istenen (5.1) sistemini göz önüne alalım. Bozucuların mevcudiyeti söz konusu olduğunda, kapalı çevrim sistem tarafından karşılanması gereken esas gereklilik, sisteme dair durum yörüngelerinin sınırlandırılabilmesidir. Durum yörüngelerini sınırlandıracak ya da yörüngelerin içerisinde kalacağı nesne, pekala bir elipsoid olabilir. Sisteme etkiyen bozucuların L_∞ normları sınırlı ise, sistem yörüngelerini hapseden ya da sınırlayan değişmez bir elipsoid bulunması mümkün olabilmektedir. Hal böyle olmayıp, bozucular genlik anlamında sınırlı olmaktansa, sahip oldukları enerjileri bakımından sınırlı iseler, ya da başka bir ifadeyle L_2 normları sonlu ise, sistem yörüngelerinin içerisine hapsolacağı değişmez bir elipsoid bulunamamaktadır.

Böyle değişmez bir elipsoidin bulunamadığı bu durum için, biri diğerinin içerisinde yer alan ya da iç içe geçmiş diyebileceğimiz iki elipsoid yardımıyla, sistemin durum yörüngeleri sınırlandırılmaya çalışılır.

Bu durumda beklenti, enerjisi pozitif bir α sabitiyle sınırlanmış $w \in \mathcal{W}_\alpha$ bozucularına mukabil, içerideki elipsoid'ten kaynaklanan herhangi bir durum yörüngesinin, dış kısımda yer alan elipsoid kabuk içerisinde hapsolması yönünde olacaktır.

Bu konuyu, Teorem 5.1’de ispatıyla beraber ele almadan önce, konuyla ilgili olarak ileride kullanılacak olan bazı tanımlamaların yapılması ve söz konusu teoremin ispatında kullanılacak olan bir Lemma’nın sunulması oldukça faydalı olacaktır. Durum uzayında bir elipsoid tanımlayan durumların kümesi, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitif tanımlı bir matris ve ρ pozitif bir reel sayı olmak kaydıyla,

$$\mathcal{E}(P, \rho) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^T P x \leq \rho \} \quad (5.3)$$

tanımlamasıyla verilebilir.

Verilmiş olan, $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibi bir geribesleme kazanç matrisi için, kullanılan eyleyiciyi doyuma götürmeyen durumların kümesi ise,

$$\mathcal{Q}(F) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |F_i x| \leq 1, \ i \in [1, m] \} \quad (5.4)$$

Şeklinde tanımlanabilir ki burada F_i , geribesleme kazanç matrisinin i . satırına karşılık gelir. Son olarak, köşegen üzerindeki her elemanı, 1 yada 0 değerini alabilen $m \times m$ boyutlu köşegen matrislerin oluşturduğu $\mathfrak{D}$ ile gösterilen kümeyi ele alalım. Açıktır ki, bu kümenin D_i ’ler ile temsil edilen 2^m tane elemanı vardır yani $i = 1, \dots, 2^m$ olacaktır.

O halde, $D_i^- = I - D_i$ tanımlaması altında D_i^- matrislerinin de $\mathfrak{D}$ kümesine dahil olduğunu görmek mümkündür.

Lemma 5.1: (Hu ve Lin, 2001)

Bu lemma, izleyen teoremden elde edilecek olan sonuçlar bakımından oldukça önemlidir.

m boyutlu Reel vektör uzayının iki elemanı, $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ ve $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T$ olarak göz önüne alındığında, eğer v vektörünün tüm bileşenleri mutlak değerce 1’den küçük veya 1’e eşit iseler, yani, $|v_i| \leq 1, \ \forall i \in [1, m]$ durumu söz konusu ise o halde,

$$\text{sat}(u) \in \text{conv} \{ D_i u + D_i^- v \mid i \in [1, 2^m] \} \quad (5.5)$$

ifadesi geçerli olacaktır. Bu durum sözle ifade edilecek olursa,

u vektörünün standart doyum fonksiyonu altındaki görüntüsü, u ve v vektörlerinin şekillendirdiği dışbükey örtü içerisinde yer almaktadır denilebilir.

Teorem 5.1: (Fang vd, 2004)

Verilmiş olan $u = Fx$ geri beslemesine karşılık, (5.1) sistemi göz önüne alındığında, bilinen pozitif tanımlı bir P matrisi için şunları söylemek mümkündür.

i) Eğer ;

$$\left(A + B_u(D_i F + D_i^- H) \right)^T P + P \left(A + B_u(D_i F + D_i^- H) \right) + \frac{1}{\eta} P B_w B_w^T P \leq 0, \quad (5.6)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

eşitsizliklerini sağlayan, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibi bir matris ve $\eta > 0$ pozitif sayısı mevcut ise, ayrıca $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \subset \mathcal{L}(H)$ ise yani $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ elipsoidi, $\mathcal{L}(H)$ tarafından kapsanıyorsa, -ki burada $\mathcal{L}(H), H$ matrisi ile lineer olarak geri beslenebilecek durumların kümesini ifade etmektedir- O halde $\mathcal{W}_\alpha$ bozucu kümesinden seçilen her w bozucusuna karşılık, kapalı çevrim sisteme dair tüm yörüngeler, $\mathcal{E}(P, 1)$ elipsoidi içerisinde kaynaklandıkları taktirde daima $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ elipsoidi içinde kalacaklardır.

ii) $\mathcal{E}(P, \alpha\eta) \subset \mathcal{L}(H)$ durumu söz konusu olacak ve (5.6) no'lu eşitsizlikler sağlanacak

şekilde bir $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi ve $\eta > 0$ pozitif sayısı mevcut ise, $\mathcal{W}_\alpha$ 'ya ait bütün w 'lar için orijinden yola çıkan tüm kapalı çevrim sistem yörüngeleri, daima $\mathcal{E}(P, \alpha\eta)$ elipsoidi içerisinde kalacaklardır.

İspat:

$V(x) = x^T P x$ ifadesi, kapalı çevrim sistemin Lyapunov fonksiyonu olarak seçilsin. Söz konusu Lyapunov fonksiyonunun kapalı çevrim sistemin yörüngeleri boyunca zamana nazaran türevinin ifadesi,

$$\dot{V} = 2x^T P [Ax + B_u \text{sat}(Fx) + B_w w] \quad (5.7)$$

şeklinde olacaktır. O halde bir $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi için $\mathcal{E}(P, \rho) \subset \mathcal{L}(H)$, ilişkisini gerçekleyen bir $\mathcal{E}(P, \rho)$ elipsoidi içerisinde seçilen tüm durumlar, yani $\forall x \in \mathcal{E}(P, \rho)$ için (5.7) no'lu türev ifadesinde yer alan $\text{sat}(Fx)$ 'e karşılık Lemma 5.1 gereğince,

$$\begin{aligned} & 2x^T P [Ax + B_u \text{sat}(Fx) + B_w w] \\ & \leq \max_{i \in [1, 2^m]} 2x^T P [Ax + B_u (D_i F + D_i^- H)x + B_w w] \end{aligned} \quad (5.8)$$

eşitsizliğinin yazılması mümkündür.

Şöyle ki; Lyapunov fonksiyonunun türevinde yer alan doyum ifadesi, Lemma 5.1'den dolayı, türev fonksiyonunun bir türev fonksiyonları politopu içerisinde yer aldığını söyler. Bu sebeple sistemin Lyapunov fonksiyonuna dair türev fonksiyonu için, politopun köşe noktaları tarafından temsil edilen türev fonksiyonlarının, maksimum değerlisinden, küçük ya da eşit kalacağı sonucuna varılır.

Dikkat edilirse,

$$2x^T P B_w w \leq \frac{1}{\eta} x^T P B_w B_w^T P x + \eta w^T w, \quad \forall \eta > 0 \quad (5.9)$$

ilişkisi göze çarpar. O halde (5.8) no'lu eşitsizlik,

$$\dot{V} \leq \max_{i \in [1, 2^m]} 2x^T P [A x + B_u (D_i F + D_i^- H)] x + \frac{1}{\eta} x^T P B_w B_w^T P x + \eta w^T w, \quad (5.10)$$

$$\forall x \in \mathcal{E}(P, \rho)$$

şeklinde düzenlenebilir.

Teorem 5.1'in (i) şıkkındaki (5.6) no'lu koşul, (5.10) eşitsizliğinde değerlendirilecek olursa,

$$\dot{V} \leq \eta w^T w, \quad \forall x \in \mathcal{E}(P, \rho) \quad (5.11)$$

eşitsizliğine ulaşılır. $\mathcal{E}(P, \rho)$ elipsoidi için ρ değeri, $\rho = 1 + \alpha\eta$ olarak alınıp, (5.11) no'lu eşitsizliğin her iki tarafı, (0'dan t 'ye kadar) integre edildiği takdirde,

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(0)) + \eta \int_0^t w^T(\tau) w(\tau) d\tau \\ &\leq V(x(0)) + \alpha\eta \end{aligned} \quad (5.12)$$

sonucu elde edilir.

Dikkat edilirse, başlangıç koşullarına dair enerji değerinin, $V(x(0)) \leq 1$ olarak sınırlandırılması halinde, -ki bu başlangıç koşullarının $\mathcal{E}(P, 1)$ elipsoidi içerisinde bulunmaları anlamına gelir- (5.12) no'lu eşitsizliğin, $V(x(t)) \leq 1 + \alpha\eta$ dan ibaret olduğu görülür. Bu durum, yörüngelerin enerji düzeylerinin, $1 + \alpha\eta$ değeriyle sınırlanmış olduğunu, ya da başka bir ifadeyle, $x(t)$ yörüngelerinin $\forall t$ anı için $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ elipsoidi içerisine hapsediklerini gösterir.

Özetle söylemek gerekirse, $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ olması durumunda, $\forall t \geq 0$ için,

$$x(t) \in \mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \text{ olacağı aşikardır.}$$

Teorem 5.1'in (ii) şıkkı da (i)'dekine benzer şekilde doğrulanabilir. Tek fark, $\rho = \alpha\eta$ olarak seçilmesi ve $V(x(0)) = 0$ yani $x(0) = 0$ şeklinde göz önüne alınmasıdır. Bu durumda kapalı çevrim sisteme ait, orijinden kaynaklanan tüm yörüngelerin, $w \in \mathcal{W}_\alpha$ bozucuları karşısında, $\mathcal{E}(P, \alpha\eta)$ elipsoidi içerisinde kalacakları sonucuna ulaşılır.

Ayrıca eğer Teorem 5.1'in (5.6) no'lu koşulundaki " ≤ 0 " durumu, " < 0 " şeklinde değiştirilirse, sisteme etkiyen herhangi bir bozucu giriş bulunmaması halinde, ispatın sonunda ulaşılmış olan, $\dot{V} \leq \eta w^T w$ neticesi yerine, $x \in \mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \setminus \{0\}$ durumlarına karşılık, $\dot{V} < 0$ sonucu elde edilecektir. Bu sonuç ise söz konusu $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ elipsoidinin, sistemin çekim domeni içerisinde yer aldığını ortaya koyar.

Bu teoremin sonuçlarından faydalananarak, eyleyici doyumlu lineer sistemlerin bozucu toleransı, 0'dan farklı ya da 0 başlangıç koşulları için ayrı ayrı ele alınmalıdır.

5.1.1.1 Sıfırdan Farklı İlk Koşullar İçin Bozucu Toleransı Problemi

Sistemin başlangıç koşullarının, $n \times n$ 'lik pozitif tanımlı bir S matrisiyle ifade edilen $\mathcal{E}(S, 1)$ elipsoidi tarafından kuşatılmış olduğu farzedilsin. O halde bozucu toleransı meselesi, enerjileri α değeri ile sınırlı tüm $w \in \mathcal{W}_\alpha$ bozucuları için, maksimum bozucu enerjisi düzeyi α ne olmalıdır ki, sistemin durum yörüngeleri sınırlandırılabilir olsun? sorusunun cevabını bulmaya denk düşer.

Bu maksatla Teorem 5.1 ile sunulan iç içe geçmiş iki elipsoid yaklaşımı kullanılacaktır. Bu noktada, sistemin başlangıç koşullarını çevreleyen $\mathcal{E}(S, 1)$ elipsoidinin, iç içe geçmiş iki elipsoidin içte kalanı tarafından kuşatıldığını ifade eden $\mathcal{E}(S, 1) \subset \mathcal{E}(P, 1)$ kabulü yapılacaktır. Bu durumda problem, tüm $w \in \mathcal{W}_\alpha$ bozucuları karşısında, $\mathcal{E}(S, 1)$ elipsoidinden kaynaklanan sistem yörüngelerinin sınırlılığını, $\mathcal{E}(P, 1)$ ve $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ gibi iki elipsoidin mevcudiyeti yoluyla temin edecek maksimum α değerinin bulunması olarak ifade edilebilir. Bu da aslında birtakım kısıtlar altında, α 'nın supremumunu bulduracak (5.13) no'lu optimizasyon problemine karşı gelir.

$$\sup_{P>0, \eta>0, H} \alpha$$

öyle ki,

$$a) \mathcal{E}(S, 1) \subset \mathcal{E}(P, 1)$$

$$b) (A + B_u(D_i F + D_i^- H))^T P + P(A + B_u(D_i F + D_i^- H)) + \frac{1}{\eta} P B_w B_w^T \leq 0, \quad (5.13)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

$$c) \mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \subset \mathcal{L}(H)$$

kısıtları sağlansın.

Burada (a) kısıtı için,

$$\mathcal{E}(S, 1) \subset \mathcal{E}(P, 1) \equiv \begin{bmatrix} S & I \\ I & P^{-1} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \text{ denkliği,}$$

(c) kısıtı için ise H matrisinin i . satırının h_i ile temsil edildiği kabul edilerek,

$$\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \subset \mathcal{L}(H) \equiv (1 + \alpha\eta)h_i P^{-1} h_i^T \leq 1, \quad i = [1, m]$$

denkliği söz konusudur. Daha sonra, $\mu = 1 / (1 + \alpha\eta)$, $Q = P^{-1}$, ve $Y = HQ$ kabulleri yapılarak devam edilecek olursa (a) kısıtı için,

$$\begin{bmatrix} S & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (5.14)$$

(c) kısıtı için ise,

$$\begin{bmatrix} \mu & y_i \\ y_i^T & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m] \quad (5.15)$$

denkliklerine ulaşılır.

Burada y_i , Y matrisinin i . satırına karşılık gelmektedir ve μ değerinin $(0, 1)$ aralığında değiştiği kolaylıkla görülebilir.

Ayrıca (b) kısıtı için de,

$$Q(A + B_u D_i F)^T + (A + B_u D_i F)Q + (B_u D_i^- Y)^T + B_u D_i^- Y + \frac{\alpha\mu}{1 - \mu} B_w B_w^T \preccurlyeq 0, \quad (5.16)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

Denkliği söz konusudur, ki burada, $\bar{\alpha} = \sqrt{\alpha}$ kabulüne istinaden, Schur Tümleniyeni işletilecek olursa, (b) kısıtı için son olarak,

$$\begin{bmatrix} Q(A + B_u D_i F)^T + (A + B_u D_i F)Q + (B_u D_i^- Y)^T + B_u D_i^- Y & \bar{\alpha} B_w \\ \bar{\alpha} B_w^T & \frac{\mu - 1}{\mu} I \end{bmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (5.17)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

denkliği yazılabilir.

Toparlayarak ifade edilecek olursa, (5.13) no'lu optimizasyon probleminin ifadesi, μ 'nün $(0, 1)$ aralığındaki belli bir değerine karşılık,

$$\sup_{Q>0, Y, \mu \in (0,1)} \bar{\alpha}$$

öyle ki,

$$a) \begin{bmatrix} S & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

$$b) \begin{bmatrix} Q(A + B_u D_i F)^T + (A + B_u D_i F)Q + (B_u D_i^- Y)^T + B_u D_i^- Y & \bar{\alpha} B_w \\ \bar{\alpha} B_w^T & \frac{\mu-1}{\mu} I \end{bmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (5.18)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

$$c) \begin{bmatrix} \mu & y_i \\ y_i^T & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m]$$

kısıtları sağlansın.

şeklinde ifade edilen ve tüm kısıtları lineer matris eşitsizliklerinden oluşan bir optimizasyon problemine dönüştürülmüş olur. Problemin çözümü elde edilmek istenildiğinde, μ için söz konusu olan tüm değer aralığının taranması gerekecektir.

5.1.1.2 Sıfır İlk Koşulu Altında Bozucu Toleransı Problemi

Bu problemin amacı, sistem tarafından tolere edilebilecek, en büyük bozucu değerinin, ilk koşulların "0" olması durumu için tahmin edilmesidir. Ele alınacak olan bu problem, sisteme dair $\mathcal{W}_\alpha$ bozucular kümesi üzerindeki, kısıtlanmış L_2 kazancının tespitine temel teşkil eder. Çünkü, ancak orijinden başlayan yörüngelerin sınırlılığı, L_2 kazancını anlamlı kılar. Söz konusu problem bir Optimizasyon problemidir ve (5.19) gibi ifade olunur.

$$\sup_{P>0, H} \alpha$$

öyle ki,

$$a) (A + B_u(D_i F + D_i^- H))^T P + P(A + B_u(D_i F + D_i^- H)) + \frac{1}{\eta} P B_w B_w^T P \preccurlyeq 0, \quad (5.19)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

$$b) \mathcal{E}(P, \alpha) \subset \mathcal{L}(H)$$

kısıtları sağlansın.

Burada, $P^{-1} = Q$ ve $v = 1/\alpha$ şeklinde seçilirse, ele alınan problemin,

$$\inf_{Q>0, H} v$$

öyle ki,

$$a) \quad Q \left(A + B_u(D_i F + D_i^- H) \right)^T + \left(A + B_u(D_i F + D_i^- H) \right) Q + B_w B_w^T \leq 0, \quad (5.20)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

$$b) \quad h_i Q h_i^T \leq v, \quad \forall i \in [1, m]$$

kısıtları sağlansın.

şeklindeki optimizasyon problemine denkliği ortaya çıkar.

h_i 'ler H matrisinin i . satırına karşılık gelmektedirler. Devam edilecek olursa, $Y = HQ$ dönüşümü ile beraber Schur Tümleneni altında probleme dair kısıtlar, Lineer Matris Eşitsizliklerine dönüşür ve (5.21) gibi bir Optimizasyon problemi elde edilmiş olur.

$$\inf_{Q>0, Y} v$$

öyle ki,

$$a) \quad Q(A + B_u D_i F)^T + (A + B_u D_i F)Q + (B_u D_i^- Y)^T + B_u D_i^- Y + B_w B_w^T \leq 0, \quad (5.21)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

$$b) \quad \begin{bmatrix} v & y_i \\ y_i^T & Q \end{bmatrix} \succ 0, \quad \forall i \in [1, m]$$

kısıtları sağlansın.

Burada y_i 'ler Y matrisinin i . satırını göstermektedir.

5.1.2 Bozucu Bastırma Problemi

L_2 kazancı, sistemlerin bozucu bastırma yetilerinin bir ölçüsü olarak kullanılagelmiştir. Ancak burada sistemlere dair ilk koşullar önem kazanmaktadır. Lineer bir sistemin ilk koşullarının etkisi zaman içerisinde ortadan kalkıyor olsa da, lineer olmayan sistemler söz konusu olduğunda, sistemin seyri üzerinde ilk koşullardan kaynaklanan etki varlığını sürdürebilmektedir.

Sistemlerin bozucuları bastırma yetilerinin bir diğer ölçüsü de, nihayetinde sistem yörüngelerinin içine hapsediği küme ile ilk koşulları ihtiva eden kümenin, göreceli büyüklüklerinin mukayesesidir. Sistemin bozucuları bastırmadaki yeteneği, sistem

yörüngelerini kuşatan kümenin başlangıç koşullarını içeren kümeye olan yakınlığı ile doğru orantılıdır. Daha önce de ifade edildiği üzere, söz konusu bu iki küme, $\mathcal{E}(P, 1)$ ve $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ biçiminde iki elipsoid ile ifade edilmektedir. Bu elipsoidlerin göreceli büyüklükleri birbirine ne kadar yakın ise, ya da başka bir ifadeyle aralarındaki fark ne kadar küçükse bu durum o kadar iyi bir bozucu bastırma yeteneğini ortaya koymaktadır.

Elipsoidler arasındaki farkı ya da göreceli büyüklüğü etkileyen faktör, η parametresinin değeridir. Yani $\mathcal{W}_\alpha$ kümesinden seçilen bozucuların, sistem tarafından ne ölçüde bastırıldığını η değeri ortaya koyar. η ne kadar küçük ise, sistemin bozucu bastırma düzeyi o kadar iyi olacaktır. Çünkü η küçüldükçe, elipsoidler birbirlerine yaklaşmış olacaklardır.

5.1.2.1 Bozucu Bastırma Düzeyi

Bu problemin çözümünde amaç, bozucu bastırma düzeyini ifade eden η değerinin minimizasyonudur. Bu amaçla sistemin ilk koşullarının içerisinde yer aldığı, $\mathcal{E}(S, 1)$ elipsoidi biliniyor olsun. Ayrıca sistemin tolere edebiliyor olduğu, maksimum enerjisi α_{max} 'a eşit ya da küçük belirli bozuculara maruz kaldığı farzedilsin. O halde η 'nın minimizasyonunu ifade eden optimizasyon problemi,

$$\inf_{P>0, H} \eta$$

öyle ki,

$$a) \mathcal{E}(S, 1) \subset \mathcal{E}(P, 1)$$

$$b) (A + B_u(D_i F + D_i^- H))^T P + P(A + B_u(D_i F + D_i^- H)) + \frac{1}{\eta} P B_w B_w^T P \leq 0, \quad (5.22)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

$$c) \mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \subset \mathcal{L}(H)$$

kısıtları sağlansın

şeklinde olacaktır.

Problemin kısıtlarının lineerleştirilmesi noktasında, Schur Tümleniyeni işletilecek olursa, $\bar{\eta} = 1/\eta$, $Q = P^{-1}$, $Y = HQ$ değişken dönüşümleri altında optimizasyon probleminin,

$$\sup_{Q>0, Y} \bar{\eta}$$

öyle ki,

$$a) \begin{bmatrix} S & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

$$b) Q(A + B_u D_i F)^T + (A + B_u D_i F)Q + (B_u D_i^- Y)^T + B_u D_i^- Y + \bar{\eta} B_w B_w^T \preccurlyeq 0, \quad (5.23)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

$$c) \begin{bmatrix} Q & y_i^T & y_i^T \\ y_i & 1 & 0 \\ y_i & 0 & \bar{\eta}/\alpha \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m]$$

kısıtları sağlansın.

şeklini aldığı görülür.

Nasıl ki bozucular söz konusu olmadığı durumda, sistemin çekim domeninin genişletilmesi arzulanıyor ise, bozucuların mevcudiyeti altında da sistemin ilk koşullarına dair kümenin, belirli bir bozucu bastırma düzeyini garantileyecek tarzda, maksimum kılınması arzulanır bir durumdur. Bu amaca hizmet edecek optimizasyon problemi, bir önceki problemin amaç ölçütü olan, $\sup_{Q>0, Y} \bar{\eta}$ ’nın yerine, amaç ölçüt fonksiyonu olarak, $Trace(Q)$ ’nın seçilmesinden ibarettir.

Yani problem, η değeri sabit alınmak suretiyle,

$$\sup_{Q>0, Y} Trace(Q)$$

öyle ki,

$$a) \begin{bmatrix} S & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

$$b) Q(A + B_u D_i F)^T + (A + B_u D_i F)Q + (B_u D_i^- Y)^T + B_u D_i^- Y + \bar{\eta} B_w B_w^T \preccurlyeq 0, \quad (5.24)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

$$c) \begin{bmatrix} Q & y_i^T & y_i^T \\ y_i & 1 & 0 \\ y_i & 0 & \bar{\eta}/\alpha \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m]$$

kısıtları sağlansın.

olarak ortaya konur.

5.1.2.2 $\mathcal{W}_\alpha$ Bozucular Kümesi Üzerindeki En İyi L_2 Kazancının Tahmini

Bu problem, söz konusu kapalı çevrim sistemin, $\mathcal{W}_\alpha$ bozucu kümesi dahilinde sahip olabileceği L_2 kazancına dair bir üst sınır tahminini ifade eder. Bu problem ele alınırken Teorem 5.2 faydalı olacaktır.

Teorem 5.2: (Fang vd, 2004)

Sistemin tolere edebildiği, belirlenmiş maksimum bozucu enerjisi düzeyi α_{max} olmak üzere, $\alpha \leq \alpha_{max}$ koşuluna uyan bozucular ele alınıyor olsun. Verilmiş olan pozitif γ sayısına mukabil, $\mathcal{E}(P, \alpha) \subset \mathcal{L}(H)$ olacak şekilde,

$$P(A + B_u(D_i F + D_i^- H)) + (A + B_u(D_i F + D_i^- H))^T P + P B_w B_w^T P + \frac{1}{\gamma^2} C^T C \preceq 0, \quad (5.25)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

eşitsizliğini sağlayabilen $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin mevcudiyeti, $w \in \mathcal{W}_\alpha$ bozucu girişlerinden, z performans çıkışlarına olan L_2 kazancının γ 'dan küçük ya da eşit olmasını sağlar.

İspat:

Dikkat edilecek olursa, Teorem 5.2'nin koşulları, Teorem 5.1'in *b*) şikkına delalet etmektedir. Yani zamanın her t anı için sisteme ait durum yörüngeleri $\mathcal{E}(P, \alpha) \subset \mathcal{L}(H)$ elipsoidi içerisinde yer alacaklardır. Bu ise L_2 anlamındaki kazanç analizi meselesinin, söz konusu elipsoid içerisinde değerlendirilmesini gerektirir. Doyumlu bir eyleyiciye sahip kapalı çevrim sistem için Lyapunov Fonksiyonu, $V(x) = x^T P x$ olarak seçildiği taktirde sistemin yörüngeleri boyunca türev ifadesi,

$$\dot{V} = x^T P [A x + B_u \text{sat}(F x) + B_w w] + [A x + B_u \text{sat}(F x) + B_w w]^T P x \quad (5.26)$$

formundadır. Tam da bu noktada eyleyici doyumunun, dışbükey bir kabuk içerisine dahil edilmesini öngören Lemma 5.1 hatırlanacak olursa,

$$\text{sat}(F x) \in \text{co}\{D_i F x + D_i^- H x, \quad i \in [1, 2^m]\}, \quad \forall x \in \mathcal{E}(P, \alpha) \subset \mathcal{L}(H) \quad (5.27)$$

olduğu akla gelir. Buna istinaden, Lyapunov Fonksiyonuna dair türev ifadesi kullanılarak,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T P [A x + B_u \text{sat}(F x) + B_w w] + [A x + B_u \text{sat}(F x) + B_w w]^T P x \\ &\leq \max_{i \in [1, 2^m]} x^T [P(A + B_u(D_i F + D_i^- H)) + (A + B_u(D_i F + D_i^- H))^T P] x + \\ &\quad + x^T P B_w B_w^T P x + w^T w \end{aligned} \quad (5.28)$$

Eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlik için, teoremin (5.25) no'lu koşulu nazarı dikkate alınarak elde edilen,

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\gamma^2} x^T C^T C x + w^T w = -\frac{1}{\gamma^2} z^T z + w^T w \quad (5.29)$$

ifadesi iki taraflı integrasyona tabi tutulduğunda,

$$V(x(t)) \leq -\frac{1}{\gamma^2} \int_0^t z(\tau)^T z(\tau) d\tau + \int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau \quad (5.30)$$

sonucuna ulaşılır.

$V(x(t))$ 'nin pozitifliği biliniyor olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_0^t z(\tau)^T z(\tau) d\tau &\leq \gamma^2 \int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau \\ \frac{\int_0^t z(\tau)^T z(\tau) d\tau}{\int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau} &= \frac{\|z\|^2}{\|w\|^2} \leq \gamma^2 \end{aligned} \quad (5.31)$$

şeklindeki eşitsizlik ifadesi ortaya çıkar ki, bu da söz konusu L_2 kazancının γ ile üstten sınırlandırıldığı anlamına gelmektedir.

Görüldüğü üzere Teorem 5.2'nin koşulları, L_2 kazancını üstten sınırlamıştır ve bu teoreme dayanarak, söz konusu L_2 kazancına dair üst sınırın minimizasyonu problemini,

$$\inf_{P>0, H} \gamma^2$$

öyle ki,

$$\begin{aligned} a) & P(A + B_u(D_i F + D_i^- H)) + (A + B_u(D_i F + D_i^- H))^T P \\ & + P B_w B_w^T P + \frac{1}{\gamma^2} C^T C \leq 0, \quad \forall i \in [1, 2^m] \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$b) \mathcal{E}(P, \alpha) \subset \mathcal{L}(H)$$

kısıtları sağlansın.

şeklinde ifade etmek mümkün olur.

Lakin problemin kısıtları yine Lineer Matris Eşitsizlikleri formunda değildir. Kısıtları Lineer Matris Eşitsizliklerine dönüştürmek maksadıyla (a) kısıtı için Schur Tümleniyeni kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} (A + B_u(D_i F + D_i^- H))^T P + P(A + B_u(D_i F + D_i^- H)) & P B_w & C^T \\ B_w^T P & -I & 0 \\ C & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (5.33)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

sonucu elde edilir.

Nihayet (a) kısıtı üzerinde, $Q = P^{-1}$, ve $Y = HQ$ tanımlamaları yapılır ve (b) kısıtı da Lineer Matris Eşitsizliği biçiminde ifade edilecek olursa, optimizasyon problemi,

$$\inf_{Q \succ 0, Y} \gamma^2$$

öyle ki,

$$a) \begin{bmatrix} Q(A + B_u D_i F)^T + (A + B_u D_i F)Q + (B_u D_i^- Y)^T + B_u D_i^- Y & B_w & Q C^T \\ B_w^T & -I & 0 \\ C Q & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (5.34)$$

$$\forall i \in [1, 2^m]$$

$$b) \begin{bmatrix} 1/\alpha & y_i \\ y_i^T & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m]$$

kısıtları sağlansın.

haline getirilmiş olur.

Dikkat edilecek olursa artık bu problem, Lineer Matris Eşitsizliklerine dayalı bir optimizasyonu ifade eder.

5.2 Eyleyici Doyumlu Sistemler İçin L_2 Kontrol Tasarımı

Buraya kadar doyumlu eyleyicilere sahip sistemlerin analizi üzerinde duruldu. Analiz sonuçlarından birisi de, sistemin tolere edebileceği maksimum bozucu enerjisi α 'nın belirlenmesiydi. Şimdi ise $x(0) \neq 0$ şeklinde sıfırdan farklı başlangıç koşulları altında, $\mathcal{W}_\alpha := \{w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q: \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt \leq \alpha\}$ olarak tanımlı, $\mathcal{W}_\alpha$ kümesinden seçilen bozuculara mukabil, aşağıda sıralanan amaç ölçütlerini eş zamanlı olarak gerçekleştirecek, $u(t) = Fx(t)$ gibi bir kontrolcünün tasarımı ele alınacaktır.

Kontrolcüden beklenen amaç ölçütleri,

- a) Kapalı çevrim sistemi L_2 anlamında kararlı kılmak,

- b) Kapalı çevrim sistem tarafından tolere edilebilecek olan en büyük başlangıç koşulları kümesi üzerinde çalışmak,
- c) Bozuculardan sistem çıkışına olan L_2 kazancının en az olmasını sağlamak,

olarak sıralanabilir.

Böyle bir kontrolcünün tasarımı için, analiz problemi incelenirken kullanılan, (5.1) sistemine, küçük bir ilave yapmak suretiyle,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u \text{sat}(u) + B_w w \\ z &= Cx + D_{zu} \text{sat}(u) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{5.35}$$

sistemi kullanılacaktır. Bu küçük değişiklikle birlikte, yukarıda bahsedilen kontrolcünün tasarımı öncesinde, daha önce verilmiş olan Teorem 5.1'i, (5.35) sistemini göz önüne alarak yeniden ifade edelim.

Teorem 5.3:

Verilmiş olan $u = Fx$ geri beslemesine karşılık, (5.35) sistemi göz önüne alındığında, bilinen pozitif tanımlı bir P matrisi için şunları söylemek mümkündür. Eğer;

$$\begin{aligned}& (A + B_u(D_i F + D_i^- H))^T P + P(A + B_u(D_i F + D_i^- H)) + \frac{1}{\eta} P B_w B_w^T P \\ & + \frac{1}{\gamma^2} [C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)]^T [C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)] \leq 0, \quad \forall i \in [1, 2^m]\end{aligned}\tag{5.36}$$

eşitsizliklerini sağlayan, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibi bir matris ve $\eta > 0$ pozitif sayısı mevcut ise ayrıca $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \subset \mathcal{L}(H)$ ise yani $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ elipsoidi, $\mathcal{L}(H)$ tarafından kapsanıyorsa, -ki burada $\mathcal{L}(H)$, H matrisi ile lineer olarak geri beslenebilecek durumların kümesini ifade etmektedir- O halde $\mathcal{W}_\alpha$ bozucu kümesinden seçilen her w bozucusuna karşılık, kapalı çevrim sisteme dair tüm yörüngeler, $\mathcal{E}(P, 1)$ elipsoidi içerisinde kaynaklandıkları takdirde daima $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ elipsoidi içinde kalacaklar ve sistem $\forall x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ başlangıç koşulu için, w girişinden z çıkışına, sonlu L_2 kazancıyla kararlı olacaktır. Söz konusu kazanç için üst sınır $\frac{\|z\|}{\|w\|} \leq \gamma \sqrt{(1 + \alpha\eta)/\alpha}$ şeklindedir.

İspat:

$V(x) = x^T P x$ ifadesi, kapalı çevrim sistemin Lyapunov fonksiyonu olarak seçilsin. Söz konusu Lyapunov fonksiyonunun kapalı çevrim sistemin yörüngeleri boyunca zamana nazaran türevinin ifadesi,

$$\dot{V} = 2x^T P[Ax + B_u \text{sat}(Fx) + B_w w] \quad (5.37)$$

şeklinde olacaktır. O halde bir $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi için $\mathcal{E}(P, \rho) \subset \mathcal{L}(H)$, ilişkisini gerçekleyen bir $\mathcal{E}(P, \rho)$ elipsoidi içerisinde seçilen tüm durumlar, yani $\forall x \in \mathcal{E}(P, \rho)$ için (5.37) no'lu türev ifadesinde yer alan $\text{sat}(Fx)$ 'e karşılık Lemma 5.1 gereğince,

$$\begin{aligned} & 2x^T P[Ax + B_u \text{sat}(Fx) + B_w w] \\ & \leq \max_{i \in [1, 2^m]} 2x^T P[Ax + B_u(D_i F + D_i^- H)x + B_w w] \end{aligned} \quad (5.38)$$

eşitsizliğin yazılması mümkündür. Dikkat edilirse,

$$2x^T P B_w w \leq \frac{1}{\eta} x^T P B_w B_w^T P x + \eta w^T w, \quad \forall \eta > 0$$

ilişkisi göze çarpar. O halde (5.8) no'lu eşitsizlik,

$$\dot{V} \leq \max_{i \in [1, 2^m]} 2x^T P[Ax + B_u(D_i F + D_i^- H)]x + \frac{1}{\eta} x^T P B_w B_w^T P x + \eta w^T w, \quad (5.39)$$

$$\forall x \in \mathcal{E}(P, \rho)$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada (5.36)'nın var olduğu kabulüne istinaden,

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\gamma^2} x^T [C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)]^T [C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)]x + \eta w^T w, \quad (5.40)$$

$$\forall x \in \mathcal{E}(P, \rho)$$

sonucuna ulaşılır. $\mathcal{E}(P, \rho)$ elipsoidi için ρ değeri, $\rho = 1 + \alpha\eta$ olarak alınıp, (5.40) no'lu eşitsizliğin her iki tarafı, (0'dan t 'ye kadar) integre edildiği takdirde,

$$V(x(t)) \leq -\frac{1}{\gamma^2} \int_0^t z(\tau)^T z(\tau) d\tau + \eta \int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau + V(x(0)), \quad \forall t \geq 0 \quad (5.41)$$

elde edilir. w bozucularının $\mathcal{W}_\alpha$ kümesinden seçildiği ve tüm yörüngelerin $\mathcal{E}(P, 1)$ elipsoidi içerisinde kaynaklandıkları varsayımı sebebiyle, $V(x(0)) \leq 1$ olduğu düşünülürse, $t \rightarrow \infty$ için (5.41) eşitsizliği,

$$V(x(t)) \leq 1 + \alpha\eta, \quad \forall t \geq 0$$

sonucu bulunur. Bu ise $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ olmasıyla eşdeğerdir.

Diğer taraftan $\forall t \geq 0$ için $V(x(t)) \geq 0$ olduğu bilindiğinden, (5.41) no'lu eşitsizlik yardımıyla, $\|z\|^2 \leq \gamma^2(1 + \alpha\eta)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Ki bu da sistemin L_2 kazancının, $\frac{\|z\|}{\|w\|} \leq \gamma\sqrt{(1 + \alpha\eta)/\alpha}$ şeklinde üstten sınırlandırıldığını ya da sistemin sonlu L_2 kazancıyla kararlı olduğunu ifade eder.

Ayrıca sisteme etkiyen herhangi bir bozucu giriş bulunmaması halinde, Teorem 5.3'ün (5.36) no'lu matris eşitsizlik kısıtı, negatiflik yerine kesin negatiflik şeklinde değiştirildiğinde, (5.40) no'lu eşitsizliğe dayanarak, $\forall x \in \mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ için, $\dot{V} < -\frac{1}{\gamma^2}\|z\|^2 < 0$ sonucu bulunur.

Bu ise, $\mathcal{E}(P, 1)$ elipsoidi içerisinde başlayan tüm $x(t)$ yörüngelerinin, $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ elipsoidi dışına çıkmaksızın, $t \rightarrow \infty$ için asimptotik olarak orijine yakınsayacağını göstermektedir. Bu durum ise, söz konusu $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta)$ elipsoidinin, sistemin çekim domeni içerisinde yer aldığını ortaya koyar.

Teorem 5.4: Eyleyici Doyumu Altında L_2 Kazancını Minimize Eden Optimal Kontrolcü Tasarımı

$S = S^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrisi ile beraber $\eta > 0$ ve $\beta > 0$ sabitleri verilmiş olsunlar. Sistemin başlangıç koşullarının da, $\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1)$ içinde yer aldığı farz edilsin. Bu durumda,

$$\inf_{Q>0, Y, Z} r$$

öyle ki,

$$a) \begin{bmatrix} AQ + B_u D_i Z + B_u D_i^- Y + * & B_w & QC^T + Z^T D_i D_{zu}^T + Y^T D_i^- D_{zu}^T \\ B_w^T & -\eta I & 0 \\ * & 0 & -rI \end{bmatrix} \preccurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, 2^m] \quad (5.42)$$

$$b) \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{1+\alpha\eta}\right) & y_i \\ y_i^T & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m]$$

$$c) \begin{bmatrix} 1/\beta^S & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

kısıtları sağlansın.

şeklindeki optimizasyon problemini birlikte çözen $Q > 0$, Y , Z matrisleri bulunabiliyorsa, $u = ZQ^{-1}x$ geri besleme kuralı ile oluşturulan kapalı çevrim sisteme dair L_2 kazancı, $\gamma = \sqrt{r}$ olmak kaydıyla, $\gamma\sqrt{(1 + \alpha\eta)/\alpha}$ değerinden küçük kalacaktır.

İspat:

(5.36) no'lu eşitsizlik geçerli olsun. Bu eşitsizliğin her iki yanını sağdan ve soldan P^{-1} ile çarpılıp $Q := P^{-1}$ değişken dönüşümü yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} & Q(A + B_u D_i F)^T + (A + B_u D_i F)Q + (B_u D_i^- H Q)^T + B_u D_i^- H Q + \frac{1}{\eta} B_w B_w^T \\ & + \frac{1}{\gamma^2} Q[C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)]^T [C + D_{zu}(D_i F + D_i^- H)]Q \leq 0, \quad \forall i \in [1, 2^m] \end{aligned} \quad (5.43)$$

(5.43) bulunur. Burada $Z := FQ$ ve $Y := HQ$ değişken dönüşümleri ile birlikte,

$$\begin{aligned} & AQ + B_u D_i Z + QA^T + Z^T D_i B_u^T + B_u D_i^- Y + Y^T D_i^- B_u^T + \frac{1}{\eta} B_w B_w^T \\ & + \frac{1}{\gamma^2} (QC^T + Z^T D_i D_{zu}^T + Y^T D_i^- D_{zu}^T) (QC^T + Z^T D_i D_{zu}^T + Y^T D_i^- D_{zu}^T)^T \leq 0, \quad \forall i \in [1, 2^m] \end{aligned} \quad (5.44)$$

(5.44) eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik üzerinde Schur Tümleniyeni uygulandığı takdirde, (5.42) no'lu optimizasyon probleminin *a*) kısıtı doğrudan doğruya elde edilebilir.

b) kısıtı ise aslında Teorem 5.3'te yer alan $\mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \subset \mathfrak{L}(H)$ koşulunun, (5.45)'te yer alan işlemler neticesinde, LME' ne dönüştürülmesinden başka bir şey değildir. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(P, 1 + \alpha\eta) \subset \mathfrak{L}(H) \\ & \Leftrightarrow H_i^T H_i \leq P \left(\frac{1}{1 + \alpha\eta} \right), \quad \forall i \in [1, m] \\ & \Leftrightarrow (1 + \alpha\eta) H_i^T H_i \leq P, \quad \forall i \in [1, m] \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P & H_i^T \\ H_i & \left(\frac{1}{1 + \alpha\eta} \right) I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m] \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 + \alpha\eta} \right) I \succcurlyeq H_i P^{-1} H_i^T, \quad \forall i \in [1, m] \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 + \alpha\eta} \right) I - H_i Q Q^{-1} Q H_i^T \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m] \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{1 + \alpha\eta} \right) & y_i \\ y_i^T & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m] \end{aligned} \quad (5.45)$$

olduğu görülür.

Ayrıca Teorem 5.4'te, sistemin başlangıç koşullarının da, $\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1)$ elipsoidi içinde yer alması şartı kabul edilmişti. Bu şart için ilk olarak,

$$\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} S \succcurlyeq P \quad (5.46)$$

eşitsizliği göze çarpar. Bu eşitsizlik üzerine Schur Tümleniyeni uygulandığı taktirde ise,

$$\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/\beta S & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (5.47)$$

ilişkisi elde edilir. Bu da Teorem 5.4'te yer alan $\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1)$ kabulünün, teoremden sunulan optimizasyon probleminin, c) kısıtına karşı geldiğini gösterir.

Sistemin L_2 kazancı üzerinde etkili olan parametrelerden biri de η dır. η 'nın değeri sabit tutulabileceği gibi serbest bırakılmak suretiyle, optimizasyon problemine dair bir parametre olarak ta düşünülebilir. η serbest bırakılacak olursa problemin serbestlik derecesi de arttırılmış olacaktır.

Mümkün olan maksimum başlangıç koşulları kümesi üzerinde, minimum L_2 kazancını yakalayacak kontrolcüyü tasarlamak, iki optimizasyon probleminin birlikte ele alınmasını gerektirecektir. Bu problemlerden birisi yukarıda Teorem 5.4'te ortaya konulmuş olan L_2 kazancının minimizasyonuna dair optimizasyon problemi iken diğeri sistemin başlangıç koşulları kümesinin genişletilmesi olacaktır. Başlangıç koşullarını içeren $\mathcal{E}(S, \beta)$ kümesinin genişletilmesi, doğal olarak kendisini kapsayan $\mathcal{E}(P, 1)$ elipsoidinin de genişlemesi sonucunu doğuracaktır. Başlangıç koşulları kümesini iki şekilde genişletmek mümkündür.

$vol \mathcal{E}(\dots)$ ilgili elipsoidin hacmini göstermek üzere, $vol \mathcal{E}(S, 1)$ hacminin, $det(S^{-1})$ ile doğru orantılı olduğu bilinmektedir. Öyleyse $\mathcal{E}(S, \beta)$ elipsoidinin hacmini maksimize etmek, β sabit alınmak kaydıyla, $\max \log det(S^{-1})$ probleminin çözümünü gerektirecektir. Bu da S değişkeni cinsinden $\min \log det(S)$ şeklindeki dışbükey optimizasyon problemine denk düşer. İkinci olarak ta S matrisine dokunmaksızın, β 'nın değerini büyütme suretiyle başlangıç koşulları kümesi genişletilebilir.

Bu durumda yukarıda ifade edildiği gibi, maksimum başlangıç koşulları kümesi üzerinde, minimum L_2 kazancını yakalayacak kontrolcü tasarımı;

$S = S^T \succ 0$ bilinen pozitif tanımlı bir matris ve η pozitif bir sabit olmak üzere $c := 1/\beta$ kabulü altında,

$$\inf_{c>0, Q>0, Y, Z} (\zeta_1 r + \zeta_2 c)$$

öyle ki,

$$a) \begin{bmatrix} AQ + B_u D_i Z + B_u D_i^- Y + * & B_w & QC^T + Z^T D_i D_{zu}^T + Y^T D_i^- D_{zu}^T \\ B_w^T & -\eta I & 0 \\ * & 0 & -rI \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \forall i \in [1, 2^m] \quad (5.48)$$

$$b) \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{1+\alpha\eta} \right) & y_i \\ y_i^T & Q \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall i \in [1, m]$$

$$c) \begin{bmatrix} cS & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succeq 0$$

kısıtları sağlansın.

şeklinde karma bir optimizasyon probleminin çözümüyle gerçekleştirilebilir. Negatif olmayan ζ_1 ve ζ_2 sabitleri, karma optimizasyon probleminin ağırlıkları olup tasarımcı tarafından duruma göre belirleneceklerdir.

6. KAZANÇ PLANLAMALI KONTROL TEKNİĞİ VE LİNEER PARAMETRELERİ DEĞİŞEN (LPD) SİSTEMLER

6.1 Kazanç Planlamalı Kontrol

Kontrol problemlerinin çoğuna, kazanç planlama gözü ile bakmak mümkündür. Sisteme dair kazanç değerlerinin, çalışma koşullarına bağlı olarak anahtarlanması anlamında düşünüldüğünde, lineer olmayan bir kazancın, ters kazanç kullanılarak kompanse edilmesi durumunu kazanç planlama olarak görmek mümkündür. Çeşitli kontrolcülerin anahtarlanmaları ya da beraber kullanımları da genel manada bir kazanç planlama yaklaşımıdır. Esasen kazanç planlama, tasarım aşamasında probleme nasıl yaklaşıldığını ortaya koyan bakış açısını yansıtır.

Burada hedeflenen kazanç planlama yaklaşımı, planlama değişkeninin hali hazırdaki değerini esas alarak, kontrolcü katsayılarının sürekli değişimini hedefleyen bir yaklaşım olacaktır. Kazanç planlama değişkeni sisteme dair harici ya da dahili işaretlerden oluşabilir. Kabaca söylemek gerekirse, lineer olmayan bir sistem için kazanç planlamaya dayalı kontrolcü tasarımı, her biri kendine özgü teknik açılımlar ihtiva eden dört temel adımda ele alınır. İlk olarak lineer olmayan sistemin, lineer parametreleri değişen tarzda modellenmesi gerekmektedir. Bu maksatla lineer olmayan sisteme, sistemin bir grup denge noktası civarında, jakobiye lineerleştirilmesi uygulanması, yaygın şekilde kullanılagelmiş olan bir yöntemdir. Aslında bu “lineerleştirme planlaması “ olarak bilinen bir tekniktir. Böyle adlandırılma sebebi ise, lineerleştirmenin sonucunda parametrelendirilmiş bir lineer sistemler ailesinin doğmuş olmasıdır. Burada ki parametrelendirme, sistemin dahili ya da harici değişkenlerinin, çalışma noktalarındaki sabit değerleri üzerinden gerçekleştirilmektedir.

Eğer sistem, içersinde barındırdığı lineer olmayan ifadelerle zamanla değişen parametreler gözüyle bakılarak yeniden ifade edilecek olursa, quasi-LPD olarak bilinen bir modelleme ortaya konulmuş olur. Burada planlama değişkeni olarak, kendilerine parametre nazarıyla baktığımız lineer olmayan dinamikler kullanılmaktadır. Böylelikle quasi-LPD planlamada, sistemin doğası gereği herhangi bir jakobiye lineerleştirmeye ihtiyaç duyulmaz.

İster jakobiye lineerleştirilmesi ile isterse quasi-LPD tekniği kullanılarak elde edilmiş olsun, LPD bir sistem için kontrolcü tasarımının ikinci ayağı, lineer tasarım tekniklerinin işletilmesidir. Söz konusu teknikler kullanılarak, LPD sistem için ya doğrudan doğruya bir lineer kontrolcü ailesi elde edilir ya da planlama değişkeninin belli birtakım değerlerine karşılık sentezlenmiş olan kontrolcüler kümesi üzerinde, sistemin geneline dair kontrolcü

ailesini verecek, bir enterpolasyon gerçekleştirilir. Önceleri parametrenin sabit değerlerine karşılık, arzulanan kapalı cevrim performansını ortaya koyacak lineer kontrolcülerin birleşimi yoluna gidilmiş olsa da artık daha ziyade arzulanan performansın parametrenin zamanla değişen yörüngesi boyunca sergilenmesini sağlayacak kontrolcülerin sentezine odaklanılmıştır.

Sıra üçüncü adıma geldiğinde –ki asıl kazanç planlama üçüncü adımda ortaya çıkmaktadır– öyle bir lineer kontrolcü ailesi oluşturulur ki, söz konusu bu kontrolcülerin katsayıları, planlama değişkeninin mevcut değeri esas alınarak sürekli değiştirilmekte ya da başka bir ifadeyle planlanmaktadır.

Son aşama, kazanç planlama ile yakalanan performansın değerlendirilmesini içerir. Elde edilen kazanç planlamalı kontrolcünün yerel performans ve kararlılık özellikleri analitik anlamda incelenebilir olsa da global sonuçlara ancak benzetim yapılmak suretiyle ulaşılabilmektedir.

6.1.1 Kazanç Planlama Tekniğine Dair Bazı Özellikler

Kazanç planlama tekniğinin yaygın uygulama alanlarına sahip olması, bu tekniğin sınırlarının artık iyice biliniyor oluşu ve güncel araştırmalara zemin teşkil etmesi bakımından pek çok ilginç yönü bulunmaktadır.

- Kazanç planlamada ister lineerleştirmeye dayalı klasik planlama tekniği isterse quasi-LPD yaklaşımı kullanılsın, oldukça zor ve lineer olmayan problemler güçlü ve iyi bilinen lineer tasarım araçları ya da teknikleri yardımıyla ele alınırlar.
- Sistemlere dair performans gereksinimleri, çoğu kez çeşitli zaman ve frekans bölgesi gereklerinin bir karması şeklinde olup lineer olarak ifade edilirler ve bu sayede kazanç planlamalı yaklaşım çerçevesinde hiç olmazsa yerel manada ele alınmaları mümkündür.
- Kazanç planlama yönteminde, sistem modeli için katı varsayımlara ihtiyaç olmaz ve bu yöntem, sistemin tam anlamıyla analitik bir modeli olmasa da kullanılabilir. Öyle ki, sistem hakkındaki bilgi sadece birkaç denge noktası ve bu noktadaki lineerleştirmelerden ibaret olsa dahi bilhassa lineerleştirmeye dayalı planlama tekniğinin kullanılabilirliği söz konusudur.
- Kazanç planlama tekniği ile gerçekleştirilen tasarımlarda, lineer olmayan sistemler için söz konusu olan koordinat dönüşümlerine ihtiyaç duyulmaz. Tasarım sistemin kendi fiziksel değişkenleri üzerinden gerçekleştirilir.

- Yapısı gereği kazanç planlamalı tasarım, kontrol problemlerinin alt problemlere ayrılmak suretiyle ele alınmasını mümkün kılar. Bu alt problemler hiyerarşik olmayıp sadece aralarında bir etkileşim söz konusudur ki bu etkileşim de planlama değişkeni tarafından gözler önüne serilir.
- Kazanç planlama tekniği, elde edilen kontrolcünün, değişen çalışma koşulları karşısında çabucak cevap vermesini sağlar. Bu sebeple seçilmiş olan planlama değişkeninin, çalışma koşullarındaki değişikliklere mukabil, sistem dinamiklerinde meydana gelen değişimi yansıtabiliyor olması önem arz etmektedir.
- Kazanç planlama teknikleri arasında gereken hesap yükü bakımından bir kıyas yapıldığında, lineer olmayan tasarım metotları karşısında, lineerleştirme planlaması için, çok daha az bir hesap külfetine ihtiyaç duyuluyor iken quasi-LPD planlamanın ise oldukça yoğun bir hesap yükü gerektirdiği görülür. Ancak buna karşılık quasi-LPD tekniği garantilenmiş bir performans ve kararlılık ortaya koyar.
- Kazanç planlama tekniği içerisinde, ilki incelenen problemin formüle edilmesi olan, kendine özgü çeşitli adımlar yer almaktadır. Söz konusu adımların icrası basit problemler için elverişli olsa da tasarlanacak olan kontrolcünün yapısındaki kompleksliğin artmasıyla birlikte, bahsi geçen bu adımların işletilmesi daha da zorlaşmaktadır.
- Lineerleştirmeye dayalı kazanç planlaması, sezgisel pratik kurallarla ilintili olarak gerçekleşir. Ayrıca sistemin kararlılık ve performansının değerlendirilmesi noktasında yoğun benzetim çalışmalarına ihtiyaç duyulur. Bu koşullar altında dahi kararlılık yavaş değişimler altında ancak yerel manada sağlanabilir iken, performans anlamında bir garanti söz konusu değildir. Halbuki quasi-LPD tekniği, hem kararlılık hem de performansı garanti edebilmektedir.

6.2 Lineer Parametreleri Değişen (LPD) Sistemler ve Bu Sistemlerin Kararlılığı

Kazanç planlamalı tasarımın ilk adımı, lineer olmayan bir sistemin lineer parametre bağımlı ifadesinin ortaya konulmasıdır. Bu ifadenin elde edilişinde ister jakobiyen lineerleştirme , isterse quasi-LPD yaklaşımı kullanılmış olsun nihayetinde elde edilen, " σ " gibi bir planlama değişkeni tarafından parametrelendirilmiş lineer sistemler ailesidir. Bu durum lineer parametre değişimli bir sistem oluşumunu akıllara getirir. Bu öyle bir lineer sistemdir ki, kendisine ait dinamikler, zamanla değişen harici parametrelere bağımlıdır. Söz konusu bu parametreler için parametre uzayındaki yörüngelerinin seyri önceden bilinmemekle beraber kontrolcünün kullanımı için gerçek zamanlı olarak ölçülebilmeleri mümkündür. Lineer olmayan bir

sistemden, ne şekilde elde edilmiş olursa olsun lineer parametreleri değişen bir sistemin, kompakt bir kümeden seçilen $\sigma(t)$ gibi değişken parametrelere sahip

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\sigma(t)) & B_1(\sigma(t)) & B_2(\sigma(t)) \\ C_1(\sigma(t)) & D_{11}(\sigma(t)) & D_{12}(\sigma(t)) \\ C_2(\sigma(t)) & D_{21}(\sigma(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ u \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

gibi bir yapıyla ortaya konulması mümkündür.

Parametreye bağımlı sistemler, belirsizlik ihtiva eden sistemlerden farklı olarak, kesin değerleri bilinmeyen ve zamanla değişen parametrelerin, çalışma suresi boyunca gerçek zamanlı ölçülmesi ve/veya hesaplanması yoluyla elde edilen sistemlerdir.

Görüldüğü üzere, sistemin dinamikleri zamanla değişmektedir ve

$$\sigma(t) = [\sigma_1(t) \ \sigma_2(t) \ \dots \ \sigma_q(t)]^T \quad (6.2)$$

şeklinde gösterilen parametre vektörüne bağımlıdır. Parametre vektörü ve bu vektörün zamana nazaran değişimi

$$\sigma(t) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^q \quad (6.3)$$

$$\dot{\sigma}(t) \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^q \quad (6.4)$$

olacak şekilde belirli kümeler içinde sınırlanmışlardır.

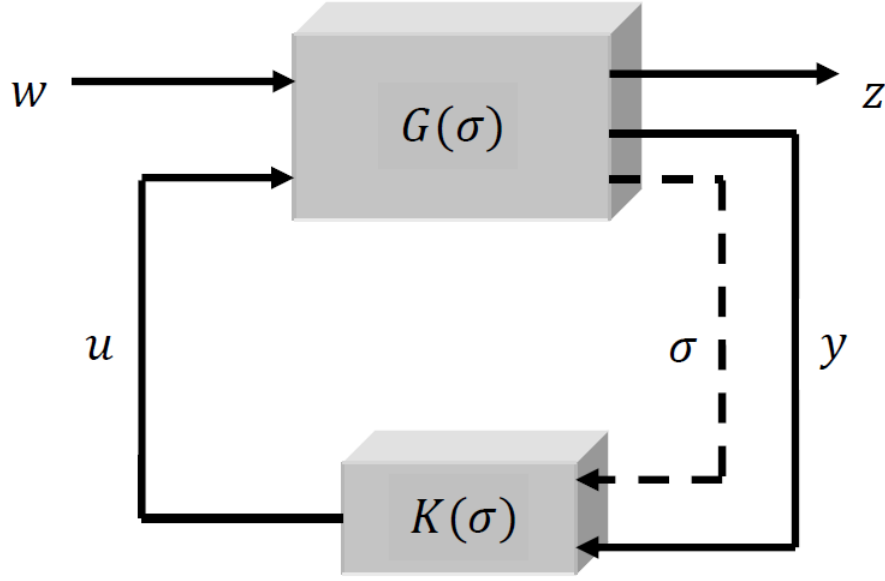
Bu ifadeler, parametrenin genlik ve değişim oranı ile ilgili kabul edilebilir sınırlamaları ortaya koyarlar. Sınırlayan “ $\mathcal{S}$ ” ve “ $\mathcal{R}$ ” kümelerinin ifadesi, $i = 1, \dots, q$ olmak üzere, önceden belli olan $\bar{\sigma}_i$ ve $\bar{\dot{\sigma}}_i$ limitlerine karşılık,

$$\mathcal{S} = \{\sigma \in \mathbb{R}^q \mid |\sigma_i(t)| \leq \bar{\sigma}_i\} \quad (6.5)$$

$$\mathcal{R} = \{\dot{\sigma} \in \mathbb{R}^q \mid |\dot{\sigma}_i(t)| \leq \bar{\dot{\sigma}}_i\}$$

olarak ifade edilirler.

LPD sistemlerin konu edildiği güncel çalışmalarda arzulanan performansın önceki çalışmalarda olduğu gibi, parametrenin sabit değerlerine karşılık değil parametrenin zamanla değişen yörüngesi boyunca sergilenmesini sağlayacak kontrolcülerin sentezine odaklanılmıştır. Bu sebeple tasarlanacak olan kontrolcünün de, performans çıkışının yanısıra harici bir giriş olarak gerçek-zamanlı ölçülen parametre bilgilerine ihtiyacı olacaktır. Bu çerçevede, kontrol edilmek istenen sistem ve kontrolcünün oluşturduğu kapalı çevrim sistemin Şekil 6.1’de gösterildiği gibi olması beklenir.



Şekil 6.1 Kapalı Çevrim LPD Sistem Yapısı

u kontrol işaretini, sisteme dair y, σ ve eğer mümkünse bir de $\dot{\sigma}$ büyüklüklerini ölçmek suretiyle üreten, LPD kontrolcünden beklenen performans, harici v girişlerinin z hata çıkışı üzerindeki etkisini makul biçimde minimize etmesidir. LPD sistemlere dair dikkat çekici bir husus ise, LPD sistemin dinamiğinin çoğunlukla genelleştirilmiş bir sistem tanımlıyor olmasıdır. Genelleştirilmiş sistemden kasıt, kontrol edilmek istenen asıl sistemin yanı sıra kapalı çevrim performansına dair gereksinimleri yansıtan ağırlıklandırma filtrelerine dair dinamiklerin de sistem formülasyonuna dahil edilmiş olmasıdır.

Denklem (6.1)' de yer alan LPD sistem,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) & G(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) \\ H(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) & E(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ u \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

gibi LPD bir kontrolcü ile geribeslendiği taktirde elde edilen kapalı çevrim sistemin ifadesi (6.7)'deki şekilde olur.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl}(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) & B_{cl}(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) \\ C_{cl}(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) & D_{cl}(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ v \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Burada, $A_{cl}(\sigma, \dot{\sigma})$, $B_{cl}(\sigma, \dot{\sigma})$, $C_{cl}(\sigma, \dot{\sigma})$ ve $D_{cl}(\sigma, \dot{\sigma})$ kapalı çevrim sistemin parametre-bağımlı matrisleridir. Dikkat çeken nokta, LPD kontrolcünün, parametre bağımlılığının yanı sıra, parametre değişim hızına da bağlı oluşudur. Bu durum pek arzu edilmese de kararlılıkla ilgili olarak parametre değişim hızına bağıllık önemli olabilmektedir.

6.2.1 (LPD) Sistemlerin Lyapunov Kararlılığı

$$\dot{x} = A_{cl}(\sigma)x \quad (6.8)$$

kapalı çevrim sistemi göz önüne alınsın ve bu sistem için, $V(t) = x^T P(\sigma)x$ şeklinde, parametre bağımlı bir Lyapunov fonksiyonu seçilmiş olsun. Öyleyse Lyapunov fonksiyonu'nun zamana göre türevi,

$$\frac{d}{dt}V(x, \sigma) = x^T \left(P(\sigma)A(\sigma) + A^T(\sigma)P(\sigma) + \dot{P}(\sigma) \right) x \quad (6.9)$$

şeklinde olacaktır. Burada P matrisi doğrudan doğruya zamana bağlı olmadığından $\dot{P}(\sigma)$ ifadesi açılacak olursa,

$$\frac{d}{dt}V(x, \sigma) = x^T \left(P(\sigma)A(\sigma) + A^T(\sigma)P(\sigma) + \sum_{i=1}^q \frac{\partial P}{\partial \sigma_i}(\sigma(t))\sigma_i(t) \right) x \quad (6.10)$$

sonucu elde edilir. Parametreleri değişen sistemlerde rastlanan parametre bağımlılığı çoğu kez Affine olmaktadır. Buna göre parametre vektörü $\sigma^T(t) = [\sigma_1(t), \dots, \sigma_q(t)]$ olmak üzere sistem matrislerinin,

$$\begin{bmatrix} A(\sigma) & B(\sigma) \\ C(\sigma) & D(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sigma_1 \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} + \dots + \sigma_q \begin{bmatrix} A_q & B_q \\ C_q & D_q \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

şeklinde yazılmaları mümkündür. Ayrıca P Lyapunov matrisi için de,

$$P(\sigma) = (P_0 + \sum_{i=1}^q \sigma_i P_i) \quad (6.12)$$

formu geçerli olacaktır. Bu matrisin zamana göre türevi hesaplanacak olursa

$$\frac{d}{dt}P(\sigma) = \dot{\sigma}_1 P_1 + \dots + \dot{\sigma}_q P_q \quad (6.13)$$

bulunur. O halde, $\frac{d}{dt}P(\sigma)$ için, $\dot{P}(\dot{\sigma}) := \dot{\sigma}_1 P_1 + \dots + \dot{\sigma}_q P_q = P(\dot{\sigma}) - P_0$ gösteriminin tanımlanması uygun olacaktır.

Parametrelerin ve değişimlerinin tarmış oldukları uzaylara dair sınırların,

$$\mathcal{S}_{vex} = \{\sigma_i^v \mid \sigma_i^v = \overline{\sigma}_i \vee \sigma_i^v = \underline{\sigma}_i, \quad \forall i = 1, \dots, q\} \quad (6.14)$$

$$\mathcal{R}_{vex} = \{\dot{\sigma}_i^v \mid \dot{\sigma}_i^v = \overline{\dot{\sigma}}_i \vee \dot{\sigma}_i^v = \underline{\dot{\sigma}}_i, \quad \forall i = 1, \dots, q\}$$

şeklinde olduğu kabul edilirse (6.8) sisteminin Lyapunov anlamında kararlı olabilme koşulu,

$$P(\sigma)A(\sigma) + A^T(\sigma)P(\sigma) + \dot{P}(\dot{\sigma}) < 0 \text{ ve } P(\sigma) > 0, \quad \forall \sigma(t) \in \mathcal{S} \text{ ve } \forall \dot{\sigma}(t) \in \mathcal{R} \quad (6.15)$$

eşitsizliklerinin sağlanıyor olmasıdır. Böyle bir kararlılık analizini zor kılan şey, her $(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) \in \mathcal{S} \times \mathcal{R}$ çifti için söz konusu eşitsizliklerin sağlanıp sağlanmadığının kontrolüdür. Dolayısıyla ortaya çıkan problem sonsuz boyutlu bir LME problemidir. Problemin sonlu boyutlu kılınması, takip eden teoremle ifade edilecek olan “Çoklu Dışbükey Argümanı” yardımıyla gerçekleştirilebilir.

Teorem 6.1: (Çoklu Dışbükey Argümanı)

$$f(\sigma_1, \dots, \sigma_q) = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i \sigma_i + \sum_{i < j} \beta_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i \gamma_i \sigma_i^2 \quad (6.16)$$

şeklinde tanımlı $f(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$, fonksiyonu $\sigma \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^q$ değişkenine bağlı karesel bir fonksiyon ise ve ayrıca $f(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ fonksiyonu için,

$$2\gamma_i = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i^2}(\sigma) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, q \quad (6.17)$$

koşulu sağlanıyorsa bu taktirde $f(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ fonksiyonuna “çoklu dışbükey fonksiyon” denir ve $f(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ çoklu dışbükey fonksiyonunun ancak ve ancak $\mathcal{S}_{vex}$ noktalarında negatif değer alması durumunda, $\mathcal{S}$ kümesi içinde negatif olacağı söylenir.

Öyle ise çoklu dışbükey argümanına dayanarak LPD sistemler için kararlılık koşullarının,

$$P(\sigma)A(\sigma) + A^T(\sigma)P(\sigma) + \dot{P}(\dot{\sigma}) < 0$$

$$P(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma(t) \in \mathcal{S}_{vex} \quad \text{ve} \quad \forall \dot{\sigma}(t) \in \mathcal{R}_{vex} \quad (6.18)$$

$$P_i A_{cli} + A_{cli}^T P_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, q$$

şeklinde ifade edilmeleri mümkün olmaktadır. Kararlılık koşulları arasında yer alan $P_i A_{cli} + A_{cli}^T P_i \geq 0$ eşitsizlikleri esasen çoklu dışbükey argümanından kaynaklanır ve skaler durum göz önüne alındığı taktirde, çoklu dışbükey fonksiyonun ikinci dereceden terimlerinin katsayıları ile ilgili $\gamma_i \geq 0$ koşulunu ifade eder.

6.2.2 (LPD) Sistemler için Kararlı Kılan Durum Geribeslemeli Kontrolcü

Durum geribeslemesi altında kapalı çevrim LPD sistemin kararlılığı için,

$A_{cl} = A(\sigma) + B(\sigma)K$ olduğu düşünülerek, LPD sistemlerin Lyapunov kararlılığına dair koşullar tekrar düzenlenecek olursa

$$P(\sigma)(A(\sigma) + B(\sigma)K) + (A(\sigma) + B(\sigma)K)^T P(\sigma) + \dot{P}(\sigma) < 0, \quad P(\sigma) > 0$$

$$\forall \sigma(t) \in \mathcal{S}_{vex} \quad \text{ve} \quad \forall \dot{\sigma}(t) \in \mathcal{R}_{vex} \quad (6.19)$$

ve

$$P_i A_{cl_i} + A_{cl_i}^T P_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q$$

koşullarına ulaşılır.

Değişkenlerine göre lineer olmayan bu eşitsizliklerin, lineerleştirme amacıyla her iki tarafı sağdan ve soldan $P^{-1}(\sigma)$ ile çarpılıp $X(\sigma) := P^{-1}(\sigma)$ ve $L(\sigma) := KX(\sigma)$ değişken dönüşümleri uygulanır ve $\frac{d}{dt}P^{-1} = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}$ eşitliği göz önünde bulundurulursa,

$$A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)A^T(\sigma) + B(\sigma)L(\sigma) + L^T(\sigma)B^T(\sigma) - \dot{X}(\sigma) < 0, \quad X(\sigma) > 0$$

$$\forall \sigma(t) \in \mathcal{S}_{vex} \quad \text{ve} \quad \forall \dot{\sigma}(t) \in \mathcal{R}_{vex} \quad (6.20)$$

ve

$$A_i X_i + X_i A_i^T + B_i L_i + L_i^T B_i^T \geq 0, \quad i = 1, \dots, q$$

şeklindeki LME' ler elde edilir. Buna göre LPD sistem için durum geribeslemeli kararlı kılan kontrol kuralı,

$$u(t) = L(\sigma)X^{-1}(\sigma)x(t) \quad (6.21)$$

olarak belirlenmiş olur.

6.2.3 (LPD) Sistemler İçin Optimal L_2 Kontrolcü Tasarımı

Bahsedildiği üzere, Lineer zamanla değişmeyen sistemler için H_∞ Optimal kontrolcü (4.77) no'lu optimizasyon probleminin çözümü olan en küçük γ değeri ile birlikte uygun boyutlu bir L matrisi ve pozitif tanımlı bir $X = X^T > 0$ matrisinin bulunması suretiyle ortaya konuyordu. LPD sistemlere dair Optimal L_2 Kontrolcünün tasarımı noktasında ise H_∞ Optimal kontrolcü için elde edilmiş olan (4.77) no'lu sentez eşitsizlikleri üzerine çoklu dışbükey argümanı uygulanması gerekecektir. Öncelikle,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\sigma)x(t) + B_w(\sigma)w(t) + B_u(\sigma)u(t) \\ z(t) &= C_z(\sigma)x(t) + D_{zu}(\sigma)u(t)\end{aligned}\tag{6.22}$$

ile verilen LPD sistemin Lyapunov fonksiyonu $V(t) = x^T P(\sigma)x$ şeklinde alınsın ve türevi,

$$\dot{V} + z^T z - \gamma^2 w^T w \leq 0\tag{6.23}$$

eşitsizliğini sağlıyor olsun. (6.23) eşitsizliğinin 0'dan T 'ye kadar integrali alınıp, $V(0) = 0$ kabul edilecek olursa,

$$\int_0^T z^T z dt \leq \gamma^2 \int_0^T w^T w dt\tag{6.24}$$

sonucu bulunur. Bu eşitsizlik, $\lim T \rightarrow \infty$ için,

$$\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma\tag{6.25}$$

eşitsizliğine karşılık gelir.

(6.22)'deki LPD sistemden $u = K(\sigma)x$ durum geribeslemesi ile elde edilen kapalı çevrim sistemin ifadesi,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A(\sigma) + B_u(\sigma)K(\sigma))x + B_w(\sigma)w \\ z &= ((C_z(\sigma) + D_{zu}(\sigma)K(\sigma))x\end{aligned}\tag{6.26}$$

gibi olacaktır.

Buna göre (6.23) eşitsizliğini, kapalı çevrim sistem denklemleri üzerinden açıp, notasyonda kargaşayı önlemek amacıyla matrislerin parametre bağımlılığını da gizleyecek olursak,

$$\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + x^T \dot{P} x + x^T C_{cl}^T C_{cl} x - \gamma^2 w^T w \leq 0\tag{6.27}$$

ve burada kapalı çevrim dinamiği yerine konulursa

$$2x^T P A x + 2x^T P B_u K x + 2x^T P B_w w + x^T \dot{P} x + x^T C_{cl}^T C_{cl} x - \gamma^2 w^T w \leq 0\tag{6.28}$$

elde edilir. $\zeta^T = [x^T w^T]$ denilirse, $\Omega := PA + A^T P + PB_u K + K^T B_u^T P + \dot{P} + C_{cl}^T C_{cl}$ kabulü altında

$$\zeta^T \begin{bmatrix} \Omega & P B_w \\ B_w^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \zeta \leq 0\tag{6.29}$$

sonucuna varılır. Schur tümleyeni gereğince (6.29) eşitsizliği,

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega} & PB_w & C_{cl}^T \\ B_w^T P & -\gamma^2 I & 0 \\ C_{cl} & 0 & -I \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (6.30)$$

Halini alır ki burada, $\bar{\Omega} := PA + A^T P + PB_u K + K^T B_u^T P + \dot{P}$ olarak kabul edilmiştir.

Dışbükey bir yapı elde etmek amacıyla eşitsizliğin her iki yanı sağlı sollu $diag\{P^{-1}, I, I\}$ ile çarpılır ve $X := P^{-1}$, $L := KX$ değişken dönüşümlerine tabi tutulur ise,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & B_w & (C_z X + D_{zu} L)^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & 0 \\ C_z X + D_{zu} L & 0 & -I \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (6.31)$$

Bu son eşitsizlikte $\tilde{\Omega} := AX + XA^T + B_u L + L^T B_u^T - \dot{X}$ olarak alınmıştır. Buna göre LPD sistemler için Optimal L_2 kontrolcünün hesabı izleyen teorem yardımıyla ifade edilir.

Theorem 6.2:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma)x(t) + B_w(\sigma)w(t) + B_u(\sigma)u(t), \\ z(t) &= C_z(\sigma)x(t) + D_{zu}(\sigma)u(t) \end{aligned} \quad (6.32)$$

sistemi göz önüne alınsın.

Sistem için en küçük ya da optimal L_2 kazancı (6.33) no'lu optimizasyon probleminin çözümü neticesinde, $u(t) = L(\sigma)X^{-1}(\sigma)x(t)$ olarak elde edilir.

$\inf \mu$

öyle ki,

$$a) \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}(\sigma) & B_w(\sigma) & (C_z(\sigma)X(\sigma) + D_{zu}(\sigma)L(\sigma))^T \\ B_w^T(\sigma) & -\mu I & 0 \\ C_z(\sigma)X(\sigma) + D_{zu}(\sigma)L(\sigma) & 0 & -I \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (6.33)$$

$$b) \begin{bmatrix} A_i X_i + X_i A_i^T + B_{ui} L_i + L_i^T B_{ui}^T & (C_{zi} X_i + D_{zui} L_i)^T \\ * & 0 \end{bmatrix} \succ 0, \quad \forall i = 1, \dots, q$$

$$c) (X_0 + \sum_{i=1}^q \sigma_i X_i) \succ 0, \quad \forall \sigma(t) \in \mathcal{S}_{vex} \quad \text{ve} \quad \forall \dot{\sigma}(t) \in \mathcal{R}_{vex}$$

kısıtları sağlansın.

$\tilde{\Omega}(\sigma) := A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)A^T(\sigma) + B_u(\sigma)L(\sigma) + L^T(\sigma)B_u^T(\sigma) - \dot{X}(\sigma)$ olarak alınmıştır.

Burada sistemin L_2 kazancının $\sqrt{\mu}$ 'ye eşit olduğu görülmektedir.

6.3 Eyleyici Doyumlu (LPD) Sistemlerin L_2 Kontrolü

$$\dot{x} = A(\sigma)x + B_u(\sigma)sat(u) + B_w(\sigma)w$$

$$z = C(\sigma)x + D_{zu}(\sigma)sat(u) \quad (6.34)$$

$$x(0) = x_0$$

şeklinde eyleyici doyumlu ve Lineer Parametreleri Değişen (LPD) bir sistem ele alınsın.

Sistemin $A(\sigma)$, $B_u(\sigma)$, $B_w(\sigma)$, $C(\sigma)$ ve $D_{zu}(\sigma)$ matrisleri, değeri gerçekte zamanlı olarak ölçülebilen ve kompakt bir küme içerisinde yer alan $\sigma(t) = [\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_q(t)]$ parametre vektörüne, lineer olarak bağımlı olan uygun boyutlu matrislerdir.

Söz konusu sistemler için, $x(0) \neq 0$ şeklinde sıfırdan farklı başlangıç koşulları altında, $\mathcal{W}_\alpha := \{w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q: \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt \leq \alpha\}$ bozucularına mukabil, aşağıdaki amaç ölçütlerini, her $\sigma(t)$ için eş zamanlı olarak gerçekleştirecek, $u(t) = F(\sigma)x(t)$ gibi parametre bağımlı bir kontrolcünün tasarımı ele alınacaktır. Kontrolcünden beklenen amaç ölçütleri,

- a) Kapalı çevrim sistemi L_2 anlamında kararlı kılmak,
- b) Kapalı çevrim sistem tarafından tolere edilebilecek olan en büyük başlangıç koşulları kümesi üzerinde çalışmak,
- c) Bozuculardan sistem çıkışına olan L_2 kazancının en az olmasını sağlamak,

olarak sıralanabilir. Bu konuda izlenecek yol, Eyleyici Doyumlu Lineer Zamanla Değişmeyen sistemlerin L_2 Kontrolüne oldukça benzerdir. Burada sistem için öngörülen Lyapunov fonksiyonu da doğal olarak, $V(x) = x^T P(\sigma)x$ şeklinde parametre bağımlı olacaktır.

Teorem 6.3:

Verilmiş olan $u = F(\sigma)x$ geri beslemesine karşılık, (6.34) sistemi göz önüne alındığında, bilinen pozitif tanımlı bir $P(\sigma)$ matrisi için şunları söylemek mümkündür. Eğer ;

$$\begin{aligned} & \left(A(\sigma) + B_u(\sigma)(D_i F(\sigma) + D_i^- H(\sigma)) \right)^T P(\sigma) + P(\sigma) \left(A(\sigma) + B_u(\sigma)(D_i F(\sigma) + D_i^- H(\sigma)) \right) \\ & + \frac{1}{\eta} P B_w(\sigma) B_w^T(\sigma) P(\sigma) + \dot{P}(\sigma) \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$+ \frac{1}{\gamma^2} [C(\sigma) + D_{zu}(\sigma)(D_i F(\sigma) + D_i^- H(\sigma))]^T [C(\sigma) + D_{zu}(\sigma)(D_i F(\sigma) + D_i^- H(\sigma))] \preceq 0,$$

$$\forall i \in [1, 2^m] \text{ ve } \forall (\sigma, \dot{\sigma}) \in \mathcal{S} \times \mathcal{R}$$

eşitsizliklerini sağlayan, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibi bir matris ve $\eta > 0$ pozitif sayısı mevcut ise ayrıca $\forall \sigma \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{E}(P(\sigma), 1 + \alpha\eta) \subset \mathcal{L}(H(\sigma))$ sağlanıyor ise, O halde $\mathcal{W}_\alpha$ bozucu kümesinden seçilen her w bozucusuna karşılık, kapalı çevrim sistemin tüm yörüngeleri, $\mathcal{E}(P(\sigma), 1)$ elipsoidi içerisinde kaynaklandıkları taktirde daima $\mathcal{E}(P(\sigma), 1 + \alpha\eta)$ elipsoidi içinde kalacaklar ve sistem $\forall x(0) \in \mathcal{E}(P(\sigma), 1)$ başlangıç koşulu için, w girişinden z çıkışına, sonlu L_2 kazancıyla kararlı olacaktır. Söz konusu kazanç için üst sınır, $\frac{\|z\|}{\|w\|} \leq \gamma \sqrt{(1 + \alpha\eta)/\alpha}$ şeklindedir.

Teoremin ispatı, Teorem 5.3'ün ispatına oldukça benzerdir.

Teorem 6.4: (Eyleyici Doyumlu LPD Sistemlerin L_2 Kazancını Minimize Eden Optimal Kontrolcü Tasarımı)

$S = S^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrisi ile beraber $\eta > 0$ ve $\beta > 0$ sabitleri verilmiş olsunlar. Sistemin başlangıç koşullarının da, $\mathcal{E}(S, \beta) \in \mathcal{E}(P, 1)$ elipsoidi içinde yer aldığı farz edilsin. Bu durumda,

$$\inf_{Q(\sigma) > 0, Y(\sigma), Z(\sigma)} r$$

öyle ki,

$$a) \begin{bmatrix} A(\sigma)Q(\sigma) + B_u(\sigma)D_i Z(\sigma) + B_u(\sigma)D_i^- Y(\sigma) - \dot{Q}(\sigma) + * & B_w(\sigma) & \Omega(\sigma) \\ B_w^T(\sigma) & -\eta I & 0 \\ * & 0 & -rI \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \forall i \in [1, 2^m] \text{ ve } \forall (\sigma, \dot{\sigma}) \in \mathcal{S} \times \mathcal{R} \quad (6.36)$$

$$b) \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{1+\alpha\eta} \right) & y_i(\sigma) \\ y_i^T(\sigma) & Q(\sigma) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall i \in [1, m] \text{ ve } \forall \sigma \in \mathcal{S}$$

$$c) \begin{bmatrix} 1/\beta^S & I \\ I & Q(\sigma) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}$$

kısıtları sağlansın.

şeklindeki optimizasyon problemini birlikte çözen $Q(\sigma) = Q(\sigma)^T > 0$, $Y(\sigma)$, $Z(\sigma)$ matrisleri bulunabiliyorsa, $u = Z(\sigma)Q^{-1}(\sigma)x$ geri besleme kuralı ile oluşturulan kapalı çevrim sisteme dair L_2 kazancı, $\gamma = \sqrt{r}$ olmak kaydıyla, $\gamma \sqrt{(1 + \alpha\eta)/\alpha}$ değerinden küçük kalacaktır. Problemde yer alan $\Omega(\sigma)$ için, $\Omega(\sigma) := Q(\sigma)C^T(\sigma) + Z^T(\sigma)D_i D_{zu}^T(\sigma) + Y^T(\sigma)D_i^- D_{zu}^T(\sigma)$ tanımlaması yapılmıştır., Teorem 5.4'e benzerliği sebebiyle teoremin ispatına gerek duyulmamıştır.

Ancak problem bu haliyle kontrolcü tasarımına uygun değildir. Zira söz konusu optimizasyon problemi sonsuz boyutlu olup, her $(\sigma, \dot{\sigma}) \in \mathcal{S} \times \mathcal{R}$ çifti için problemin kısıtlarının test edilmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Problemi sonlu boyutlu kılmak amacıyla, çoklu dış bükey argümanı kullanılabilir.

Şu halde tasarım problemi, başlangıç koşulları kümesinin genişletilmesini de içerecek şekilde ortaya konulacak olursa, L_2 Kazancını Minimize Eden Optimal LPD Kontrolcü, $S = S^T > 0$ bilinen pozitif tanımlı bir matris ve η pozitif bir sabit olmak üzere $c := 1/\beta$ kabulü altında,

$$\inf_{c>0, Q(\sigma)>0, Y(\sigma), Z(\sigma)} (\zeta_1 r + \zeta_2 c)$$

öyle ki,

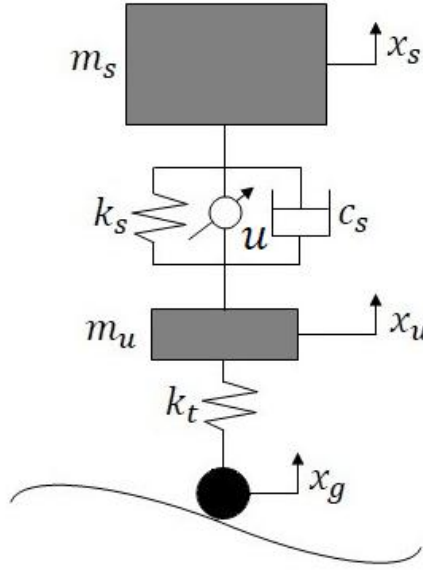
$$\begin{aligned} a) & \begin{bmatrix} A(\sigma)Q(\sigma) + B_u(\sigma)D_i Z(\sigma) + B_u(\sigma)D_i^- Y(\sigma) - \dot{Q}(\dot{\sigma}) + * & B_w(\sigma) & \Omega(\sigma) \\ B_w^T(\sigma) & -\eta I & 0 \\ * & 0 & -rI \end{bmatrix} \preceq 0, \\ & \forall i \in [1, 2^m] \text{ ve } \forall (\sigma, \dot{\sigma}) \in \mathcal{S}_{vex} \times \mathcal{R}_{vex} \\ b) & \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{1+\alpha\eta} \right) & y_i(\sigma) \\ y_i^T(\sigma) & Q(\sigma) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall i \in [1, m] \text{ ve } \forall \sigma \in \mathcal{S}_{vex} \\ c) & \begin{bmatrix} 1/\beta S & I \\ I & Q(\sigma) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_{vex} \\ d) & \begin{bmatrix} A_j Q_j + B_{u_j} D_i Z_j + B_{u_j} D_i^- Y_j + * & \Omega_j \\ * & 0 \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & \forall i \in [1, 2^m] \text{ ve } \forall j = [1, \dots, q] \end{aligned} \tag{6.37}$$

kısıtları sağlansın.

şeklinde karma bir optimizasyon probleminin çözümüyle tasarlanabilir. Negatif olmayan ζ_1 ve ζ_2 sabitleri, karma optimizasyon probleminin ağırlıkları olup tasarımcı tarafından duruma göre belirleneceklerdir. Problemde göze çarpan $\Omega(\sigma)$ ve Ω_j için, $\Omega(\sigma) := Q(\sigma)C^T(\sigma) + Z^T(\sigma)D_i D_{zu}^T(\sigma) + Y^T(\sigma)D_i^- D_{zu}^T(\sigma)$ ve $\Omega_j := Q_j C_j^T + Z_j^T D_i D_{zu_j}^T + Y_j^T D_i^- D_{zu_j}^T$ tanımlamaları söz konusudur.

7. TAŞIT SÜSPANSİYON SİSTEMLERİNİN L_2 KONTROLÜNE DAİR SİMÜLASYON SONUÇLARI VE DEĞERLENDİRMELER

Bu bölümde, 1:1 ölçekli gerçek bir çeyrek taşıt süspansiyon sistemi modeli üzerinde sırasıyla durum geri-beslemeli klasik H_∞ kontrolcü, doyumlu eyleyicilere sahip parametreleri zamanla değişmeyen nominal sistem için L_2 kontrolcü ve Eyleyici Doyumlu LPD sistem için geliştirilmiş olan L_2 kontrolcü olmak üzere 3 farklı kontrolcünün performanslarını değerlendirmek amacıyla gerçekleştirilmiş olan bir dizi simülasyon çalışması ele alınmıştır.



Şekil 7.1 Çeyrek Taşıt Aktif Süspansiyon Sistemi

Şekil 7.1’de şematik olarak gösterilmiş olan çeyrek taşıt aktif süspansiyon sistemine ait fiziksel parametreler şu şekildedir: m_s sallanan kütle göstermektedir ve nominal değeri 250kg olarak alınmıştır. LPD sistem için değişken bir parametre olarak ele alındığında ise, değerinin 150kg ile 350kg arasında değişeceği varsayılmıştır. $m_u = 45\text{kg}$, sallanmayan kütle göstermekte olup tekerlek bütünü ve aks ağırlıklarını içerir. $k_s = 16000\text{ N/m}$ olup, süspansiyon yay sabitidir. $k_t = 160000\text{ N/m}$ değerindedir ve tekerlek sertliğini ifade etmektedir. Son olarak $c_s = 1000\text{ Ns/m}$, değeri süspansiyonun sönüm katsayısına karşılık gelir. Sallanan kütlenin deplasmanı x_s , sallanmayan kütlenin deplasmanı x_u , ve yol kaynaklı bozucu giriş x_g ile ifade edilmişlerdir. u harici kuvveti gösterir ve değerinin doyumlu olarak,

$$\text{sat } u(t) = \begin{cases} u(t); & -4000\text{N} \leq u(t) \leq 4000\text{N} \\ -4000\text{N}; & u(t) < -4000\text{N} \\ 4000\text{N}; & u(t) > 4000\text{N} \end{cases}$$

şeklinde değiştiği kabul edilmiştir.

Çeyrek Taşıt Süspansiyon sistemi üzerinde simülasyon yoluyla performansları sınanacak olan kontrolcüler, LME' ler üzerinde gerçekleştirilen dışbükey optimizasyon sonucu elde edilmişlerdir ve sözkonusu kontrolcüler için tasarım zemininin durum uzayı olduğu açıktır. O halde süspansiyon sisteminin matematik modeli durum uzayında ortaya konulmak durumundadır. “Durum Geri Beslemeli H_∞ Kontrolcü” ile “Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü” nün tasarımı için nominal sistem modeline ihtiyaç duyulmakta iken “Eyleyici Doyumlu LPD tipi L_2 Kontrolcü” nün tasarımı noktasında ise sistemin LPD modelinin kullanılması gerekmektedir.

Bu sebeple simülasyon sonuçlarını vermeden önce, süspansiyon sistemine dair matematik modelin, durum uzayında hem nominal hem de LPD tipte sunulması faydalı olacaktır.

7.1 Çeyrek Taşıt Süspansiyon Sisteminin Nominal Durum Uzayı Modeli

Taşıt süspansiyonunun sadece tek tekerlek için modellenmesi sonucunda iki serbestlik derecesine sahip çeyrek taşıt süspansiyon sisteminin matematik modeli elde edilmiş olur. Söz konusu modelde; m_s yaylanmalı kütleyi ya da taşıtın kütlesini, m_u tekerlek bütününe dair kütleyi, k_s süspansiyon için yay sabitini, c_s dampere ilişkin sönüm katsayısını, k_t lastik için yay sabitini, x_g yol yüzeyinin değişimini ve f ise tekerlek bütünü ile şasi arasına uygulanan kontrol kuvvetini göstermek üzere sistemin dinamik denklemleri, Newton'un ikinci kanunu gereğince,

$$m_u \ddot{x}_u = k_t(x_g - x_u) - k_s(x_u - x_s)c_s - (\dot{x}_u - \dot{x}_s) - f \quad (7.1)$$

$$m_s \ddot{x}_s = k_s(x_u - x_s) + c_s(\dot{x}_u - \dot{x}_s) + f \quad (7.2)$$

denklem (7.1) ve (7.2)'deki gibi elde edilirler. Bu denklemler durum uzayında ifade edilecek olursa,

$$\dot{x} = Ax + [B_w \quad B_u] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$z = Cx + [D_{zw} \quad D_{zu}] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

şeklindeki ifadelere ya da matrissel formdaki,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C & D_{zw} & D_{zu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

gösterimine ulaşılır ki burada,

$x = [x_s \ x_u \ \dot{x}_s \ \dot{x}_u]^T$ durum vektörüne, $w = x_g$ bozucu girişe, $u = f$ ise kontrol girişine karşılık gelmektedir. Durum uzayı gösteriminde yer alan matrislerin içeriği ise (7.6)'daki gibi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_s/m_s & k_s/m_s & -c_s/m_s & c_s/m_s \\ k_s/m_u & -(k_s + k_t)/m_u & c_s/m_u & -c_s/m_u \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_t/m_u \end{bmatrix}^T$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/m_s & -1/m_u \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_s/m_s & k_s/m_s & -c_s/m_s & c_s/m_s \end{bmatrix}$$

$$D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 1/m_s \end{bmatrix}^T$$
(7.6)

olarak verilirler.

7.2 Çeyrek Taşıt Süspansiyon Sisteminin (LPD) Durum Uzayı Modeli

Süspansiyon sisteminin LPD modelini, denklem (6.11)'deki gibi parametreye affine bağımlı olacak şekilde elde etmek mümkündür. Parametre vektörü σ 'yı, süspansiyonun sallanan kütlelerini göz önüne alarak $\sigma_1 = \frac{1}{m_s}$ şeklinde ele alıp, (6.11) no'lu denklemde genel manada,

$$\begin{bmatrix} A(\sigma) & B(\sigma) \\ C(\sigma) & D(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sigma_1 \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} + \dots + \sigma_q \begin{bmatrix} A_q & B_q \\ C_q & D_q \end{bmatrix}$$

şeklinde verilmiş olan LPD sistem yapısını, Bölüm 7.1'de yer alan çeyrek taşıt süspansiyon sisteminin durum uzayı modeli üzerine tatbik edecek olursak sistemin durum uzayı matrisleri,

$$A(\sigma_1) = A_0 + \sigma_1 A_1$$

$$B_w(\sigma_1) = B_{w0} + \sigma_1 B_{w1}$$

$$B_u(\sigma_1) = B_{u0} + \sigma_1 B_{u1}$$

$$C(\sigma_1) = C_0 + \sigma_1 C_1$$

$$D_{zu}(\sigma_1) = D_{zu0} + \sigma_1 D_{zu1}$$
(7.7)

(7.7)'deki gibi parametreye affine bağımlı olacaklardır. Açık ifadeleri ise (7.8) gibi olacaktır.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_s & k_s & -c_s & c_s \\ \frac{k_s}{m_s} & -\frac{(k_s + k_t)}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}}_{A(1/m_s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{(k_s + k_t)}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}}_{A_0} + \frac{1}{m_s} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_s & k_s & -c_s & c_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k_t}{m_u} \end{bmatrix}^T}_{B_w(1/m_s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k_t}{m_u} \end{bmatrix}^T}_{B_{w0}} + \frac{1}{m_s} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T}_{B_{w1}} \quad (7.8)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_s} & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T}_{B_u(1/m_s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T}_{B_{u0}} + \frac{1}{m_s} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T}_{B_{u1}}$$

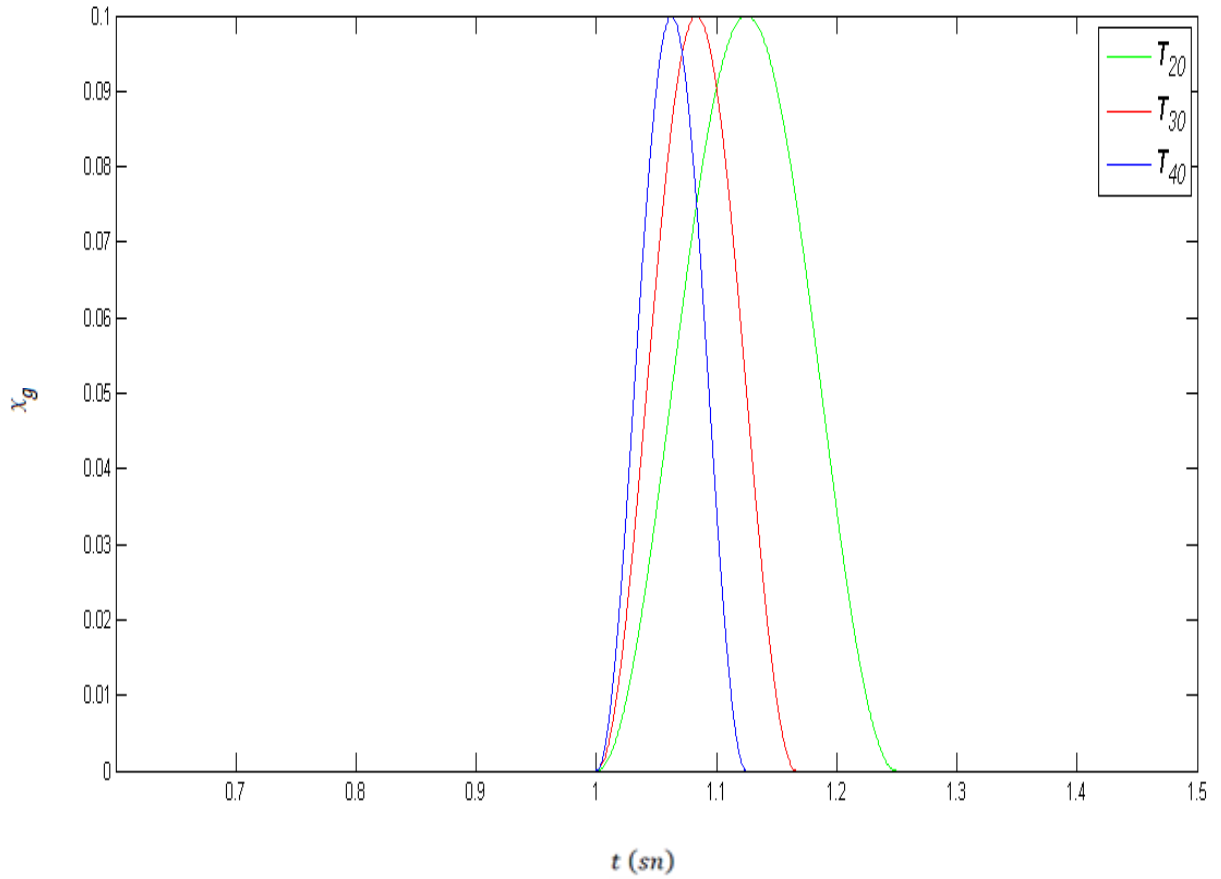
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_s & k_s & -c_s & c_s \\ \frac{k_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & \frac{-c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix}}_{C(1/m_s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_0} + \frac{1}{m_s} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_s & k_s & -c_s & c_s \end{bmatrix}}_{C_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}^T}_{D_{zu}(1/m_s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T}_{D_{zu0}} + \frac{1}{m_s} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T}_{D_{zu1}}$$

7.3 Simülasyon Sonuçları

Gerçekleştirilen simülasyonlarda süspansiyon sistemine iki farklı bozucu giriş uygulanmıştır. Bunlardan biri tümsek tipi bozucu giriş diğeri ise çakıllı yol profilinden kaynaklanan bozucu giriştir. Bu noktada tümsek tipi bozucu giriş olarak, T_{20} , T_{30} ve T_{40} şeklinde adlandırılacak olan ve tekerleğin $t = 1$ sn anında, yol üzerinde bulunan 5 metre genişliğinde ve 0.1 metre yüksekliğindeki sinüsoidal bir tümseğin üzerinden sırasıyla $V_0 = 20$ m/sn, $V_0 = 30$ m/sn ve $V_0 = 40$ m/sn'lik hızlar ile geçmesi halinde oluşacak olan, üç ayrı tümsek tipi bozucu giriş göz önüne alınmıştır. Farklı hız değerlerine mukabil oluşan tümsek tipi bozucu girişler, Şekil 7.2'de gösterilmiştir.

“ H_∞ Kontrolcü” ve “Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü” için sisteme ilk olarak Şekil 7.2'de gösterilmiş olan tümsek tipi bozucu girişler, ardından da çakıllı yol girişi uygulanmış olmasına karşılık, “Eyleyici Doyumlu LPD tipi L_2 Kontrolcü” için ise sadece çakıllı yol bozucu girişi uygulanmış ve bu bozuculara karşılık süspansiyon sistemi için şasinin yerdeğişimi ve ivmelenmesine dair kontrollü ve kontrolsüz cevaplar ile kontrolcüler tarafından üretilmiş olan kontrol işaretleri elde edilmişlerdir.



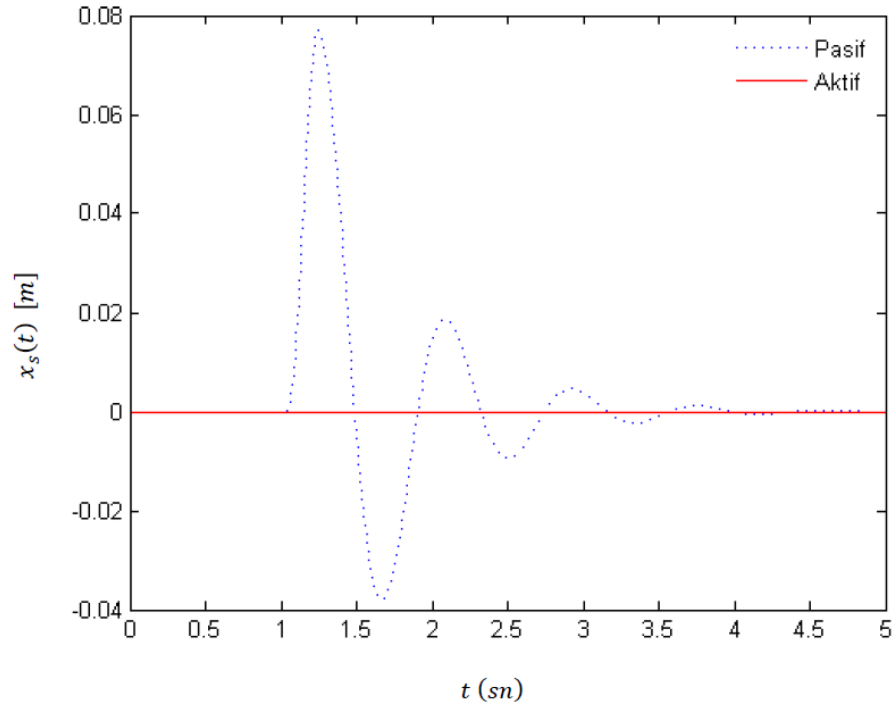
Şekil 7.2 $V_0 = 20 \text{ m/sn}$, $V_0 = 30 \text{ m/sn}$ ve $V_0 = 40 \text{ m/sn}$ 'lik Hızlara Karşılık Oluşan Tümsek Tipi T_{20} , T_{30} ve T_{40} Bozucu Girişleri

7.3.1 H_∞ Kontrolcünün Performansı

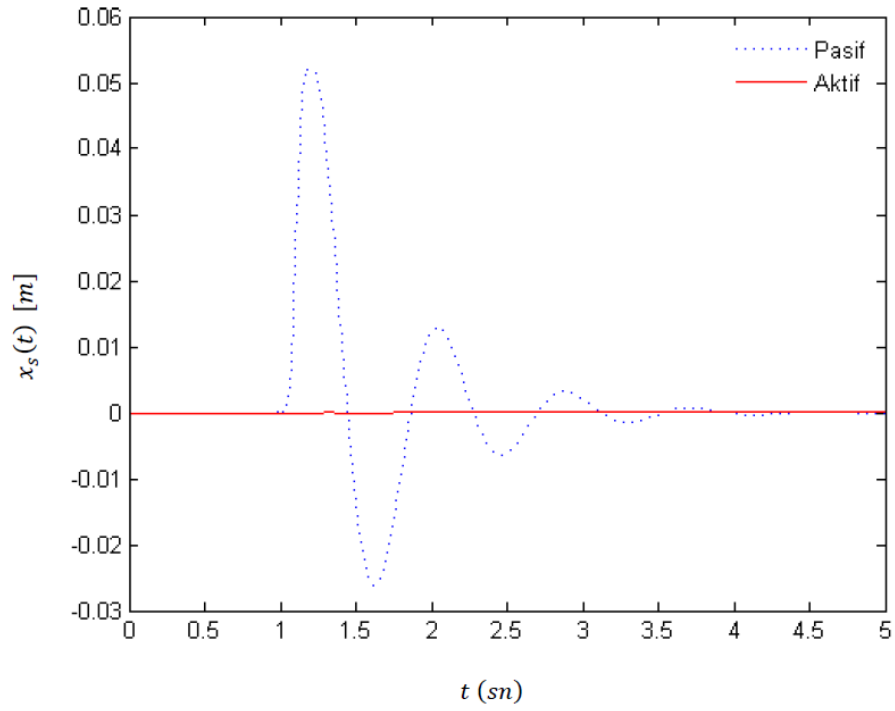
Çeyrek taşıt süspansiyon sistemi üzerinde ilk olarak durum geribeslemeli H_∞ kontrolcünün performansına dair sonuçlar sunulacaktır. H_∞ kontrolcünün tasarımı, sistem üzerinde doyum, parametre değişimi vs. gibi faktörler bulunmadığı farz edilerek gerçekleştirilmiş olduğundan, söz konusu kontrolcü için elde edilmiş olan sonuçlar, bahsedilen bu faktörlerin tasarımda yer alması halinde elde edilecek olan sonuçlarla mukayese yapılabilmesi bakımından, önem arz etmektedir.

Aşağıda, H_∞ kontrolcü altında, farklı bozucu girişlere karşılık pasif süspansiyona nazaran kontrollü ya da aktif süspansiyon tarafından sergilenmiş olan ve sırasıyla süspansiyon sapma miktarı ve şasinin ivmelenmesini gösteren, simülasyon sonuçları verilmiştir. Devamında ise böylesi sonuçlara ulaştıracak olan kontrol işareti değişimleri yer almaktadır.

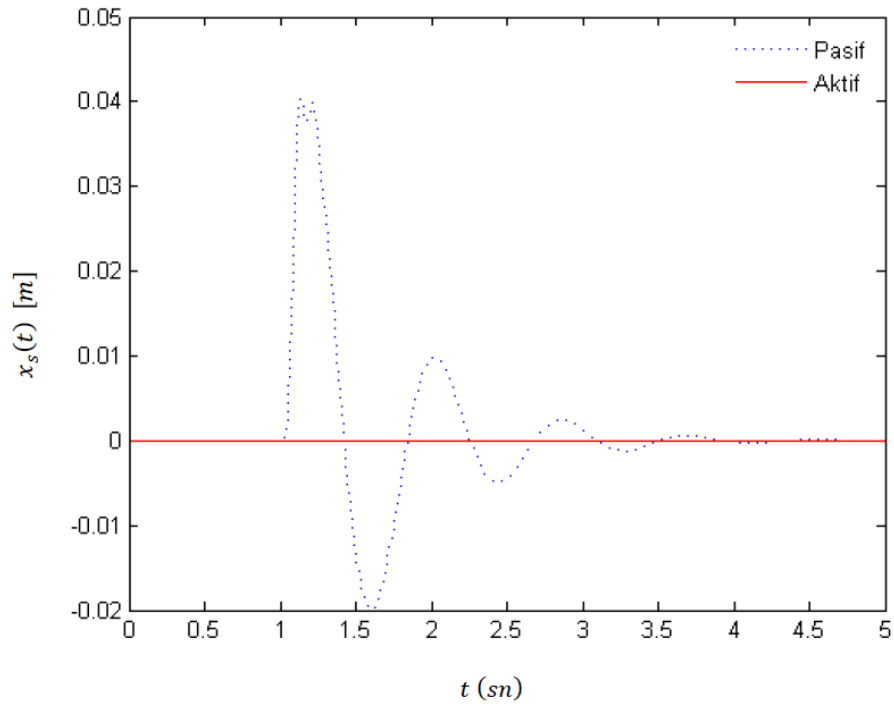
H_∞ Kontrolcü İçin Şasi Yerdeğiştirme Cevapları



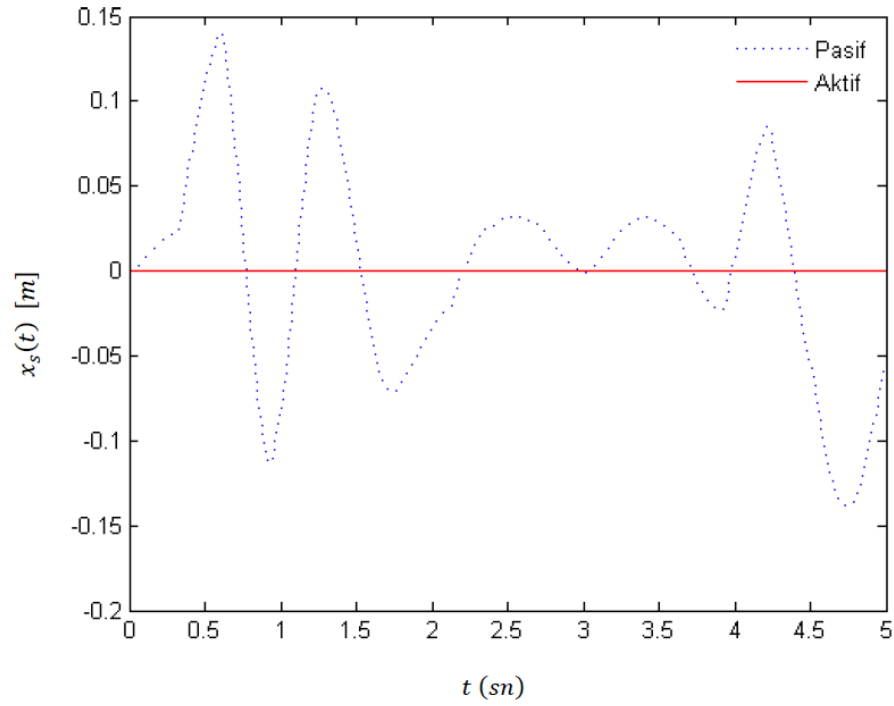
Şekil 7.3 " T_{20} " Tümsek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Yer Değiştirme Cevabı



Şekil 7.4 " T_{30} " Tümsek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Yer Değiştirme Cevabı



Şekil 7.5 " T_{40} " Tümsek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_{∞} Kontrolcünün Yer Değiştirme Cevabı

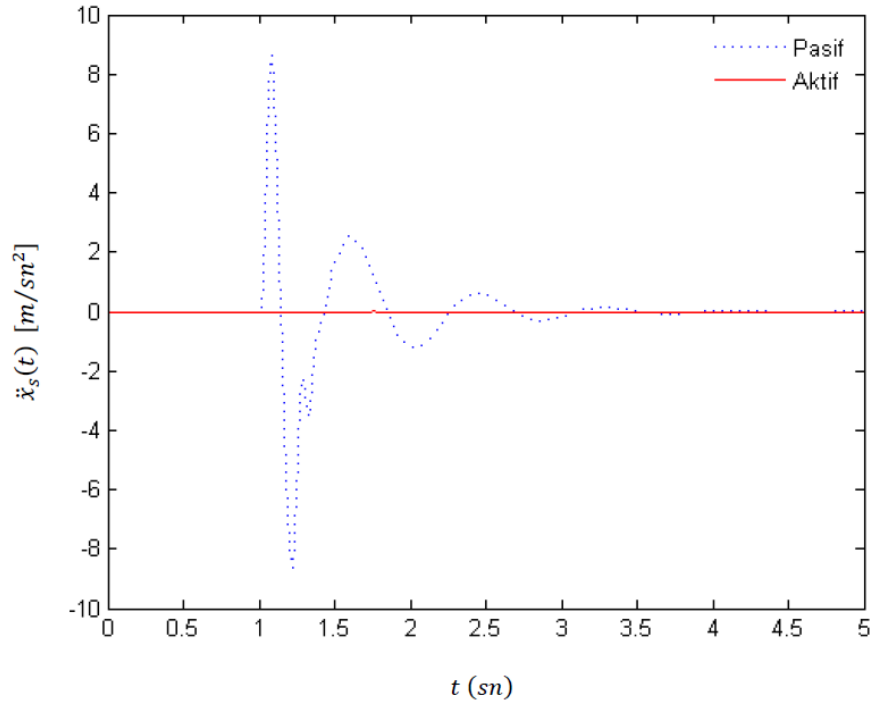


Şekil 7.6 Çakıllı Yol Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_{∞} Kontrolcünün Yer Değiştirme Cevabı

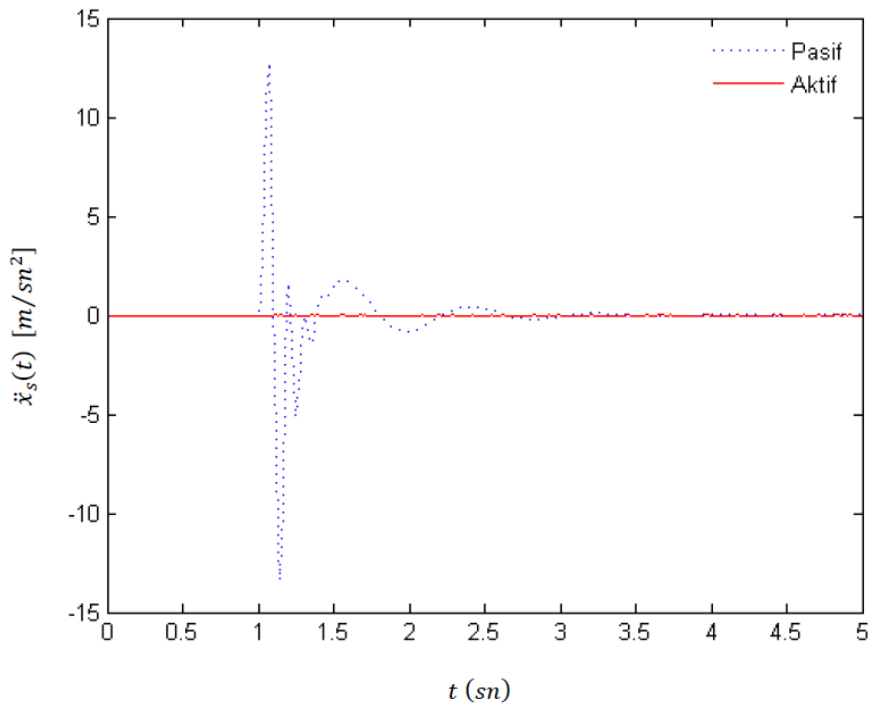
Pasif süspansiyon için tümsek girişlere karşılık şasinin neredeyse 0.08 m' lik maksimum bir sapma kaydettiği görülmektedir. Buna karşılık kontrollü süspansiyon için ortaya çıkan şasi yerdeğiştirme miktarı, pasif süspansiyona göre o derece küçük kalmaktadır ki, kontrollü durum için bakıldığında, neredeyse hiç değişim olmadığı görülmektedir. Esasen bu durum, Şekil 7.11' den Şekil 7.13'e kadar gösterilmiş olan kontrol işareti değişimlerinden de anlaşılacağı üzere kontrol işaretinin genliği üzerinde herhangi bir sınırlama olmayışından kaynaklanmaktadır. Sonuçlara bakıldığında, eyleyici tarafından süspansiyona uygulanan kontrol kuvvetinin mutlak değerce $\cong 9000\text{ N}$ değerine kadar ulaştığını görmek mümkündür. Eğer kontrol işareti üzerinde bir sınırlama söz konusu olsaydı, kontrollü süspansiyon böylesine başarılı sonuçlar ortaya koyamayacaktı.

Tümsek tipi bozucu girişler için elde edilen sonuçlara oldukça benzer şekilde, çakıllı yol profili altında da H_{∞} tipi kontrol için sistemin gövde kütlelerinde hemen hemen hiçbir yerdeğiştirme olmaması dikkat çekmektedir. Halbuki aynı yol koşullarında pasif süspansiyon için Şekil 7.6'dan görüleceği üzere taşıt gövdesi denge konumundan 0.15 m' ye varan sapmalar ortaya koymaktadır. Tabi bu miktar süspansiyon sapma aralığı (strok) ile yakından ilgilidir. Yani süspansiyon strokunun bu miktarda bir sapmaya olanak verecek genişlikte olması kuşkusuz elzemdir.

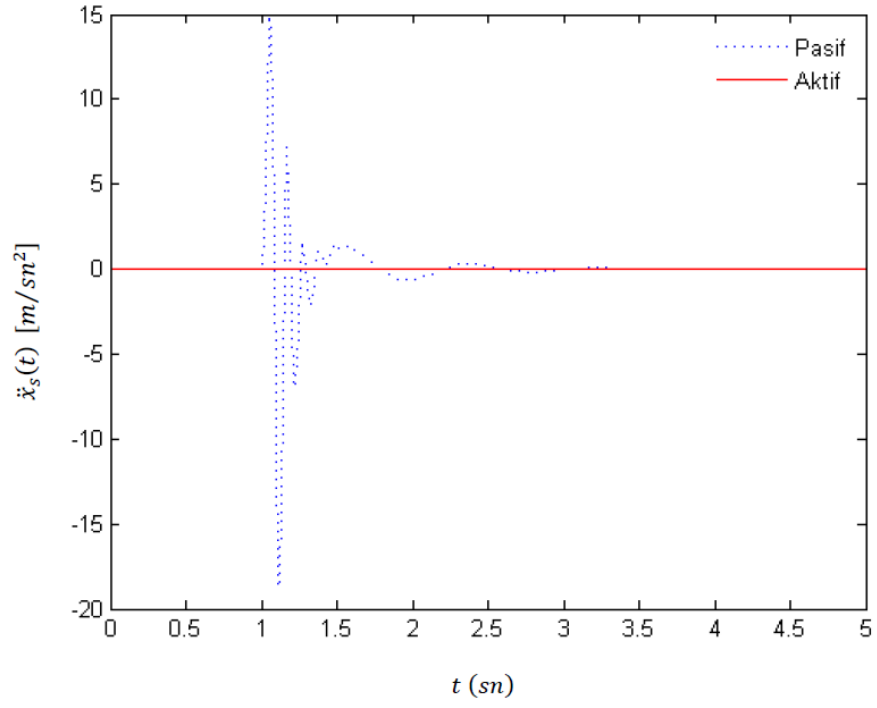
H_∞ Kontrolcü İçin Şasi İvmelenme Cevapları



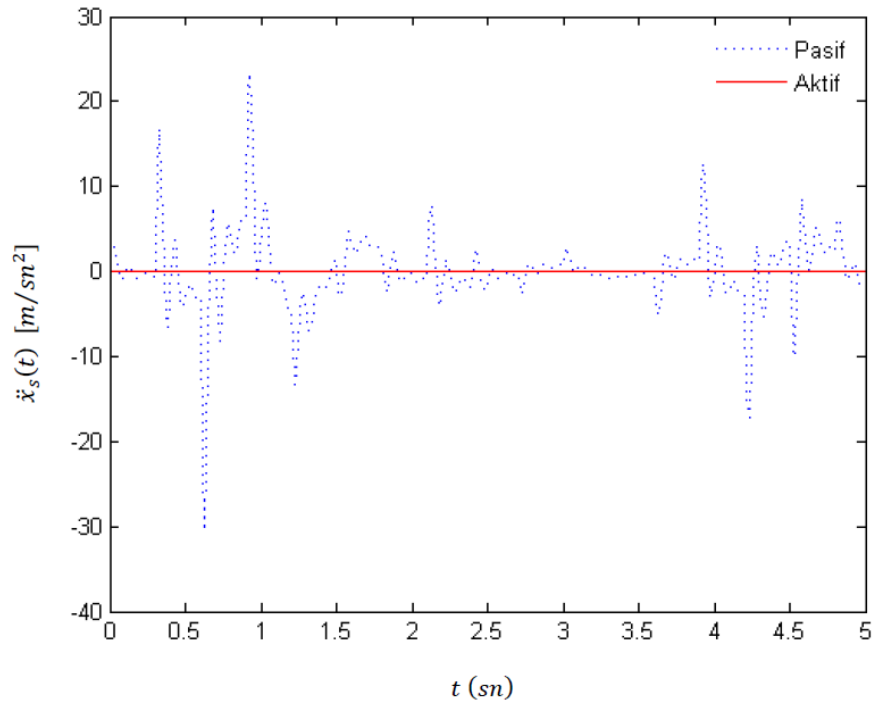
Şekil 7.7 " T_{20} " Tümsek Girişi İçin Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün İvme Cevabı



Şekil 7.8 " T_{30} " Tümsek Girişi İçin Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün İvme Cevabı



Şekil 7.9 " T_{40} " Tümsek Girişi İçin Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün İvme Cevabı

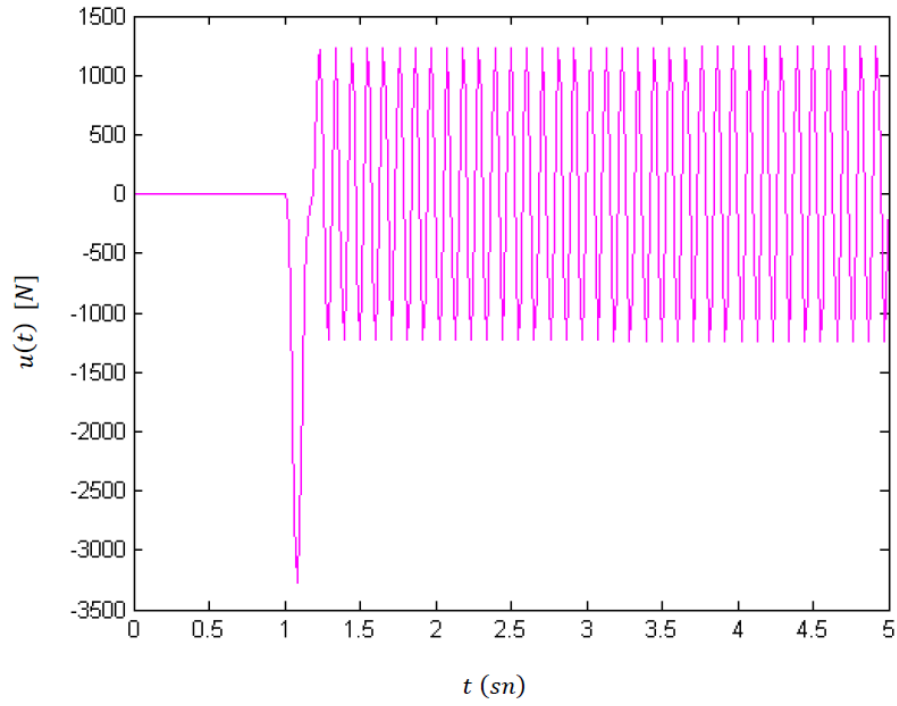


Şekil 7.10 Çakıllı Yol Girişi İçin Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün İvme Cevabı

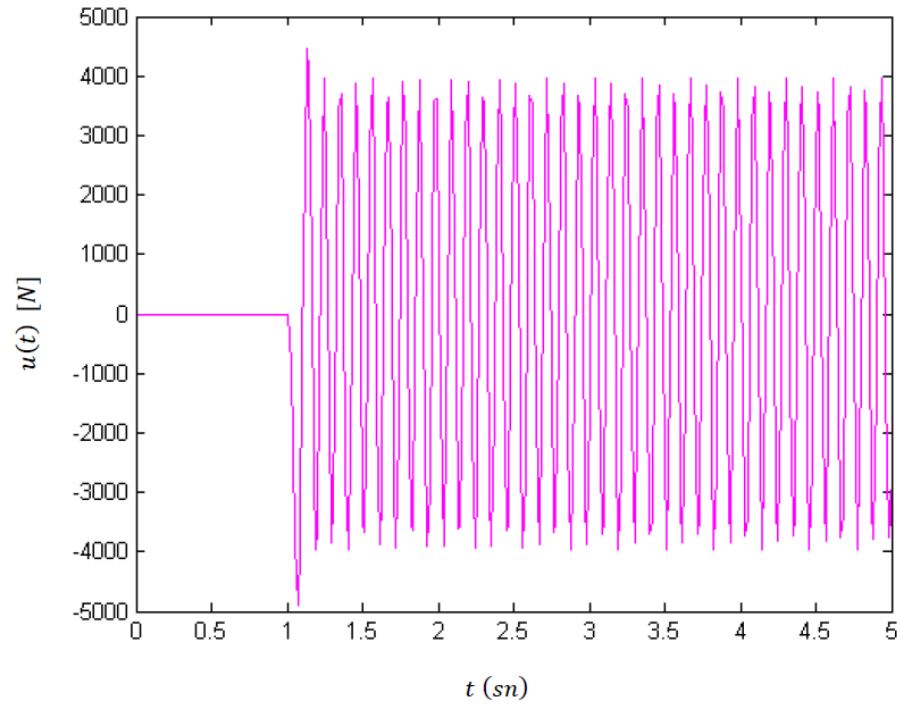
Klasik H_∞ kontrolcünün ivme çıkışı, $\ddot{x}_s(t)$ üzerindeki etkinliğini tümsek yol girişleri için sınamak gerekirse, Şekil 7.7'den Şekil 7.9'a kadar olan cevaplara ulaşılır. Süspansiyon sisteminin çakıllı bir yol profiline maruz kalması halinde ise ortaya çıkan sonuç Şekil 7.10'daki gibi olmaktadır. Tüm yol bozucularına karşılık sistemin ivme çıkışı üzerinde yine, çok iyi bir kontrol neticesinin elde edilmiş olduğunu, sonuçlara bakıldığında görmek mümkündür. Tıpkı şasi yer değişiminde olduğu gibi şasiye dair ivmelenme değerlerinin de, H_∞ kontrol uygulanan süspansiyon için pasif olana nazaran, çok çok küçük kalıyor olması sebebiyle kontrol altında şasinin neredeyse hiç ivmelenmediği gibi bir manzarayla karşılaşılmaktadır. Oysa pasif süspansiyon için bakıldığında bazen mutlak değerce 30 m/sn^2 ye varan ivme değerlerine ulaşıldığını görmek mümkündür.

Süspansiyon sisteminden beklenen konfor gereksiniminin, şasi ivmelenme miktarının minimizasyonu ile karşılandığı düşünüldüğünde, H_∞ kontrol altındaki aktif süspansiyonun konfor beklentisini fazlasıyla karşılıyor olduğunu, buna karşılık pasif süspansiyonun bu konudaki başarısızlığını açıkça görmek mümkündür. H_∞ kontrolcünün göstermiş olduğu bu başarılı performans yine kontrol işareti üzerinde herhangi bir sınırlama olmayışından kaynaklanmaktadır.

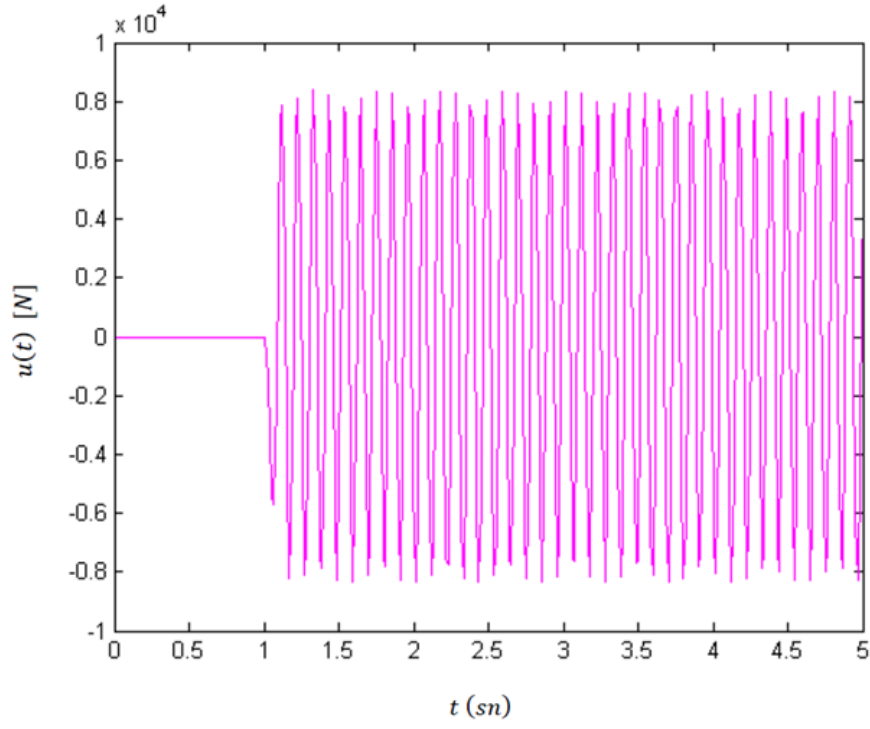
H_∞ Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşaretleri



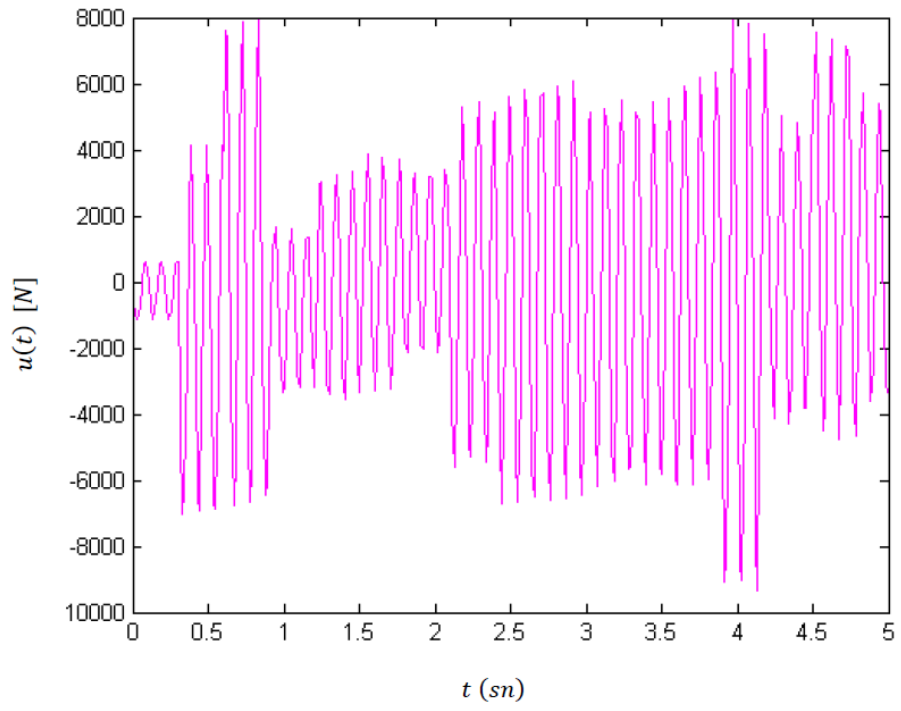
Şekil 7.11 " T_{20} " Tümssek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti



Şekil 7.12 " T_{30} " Tümssek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti



Şekil 7.13 " T_{40} " Tümsek Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti



Şekil 7.14 Çakıllı Yol Girişine Karşılık Durum Geri beslemeli H_∞ Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti

7.3.2 Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün Performansı

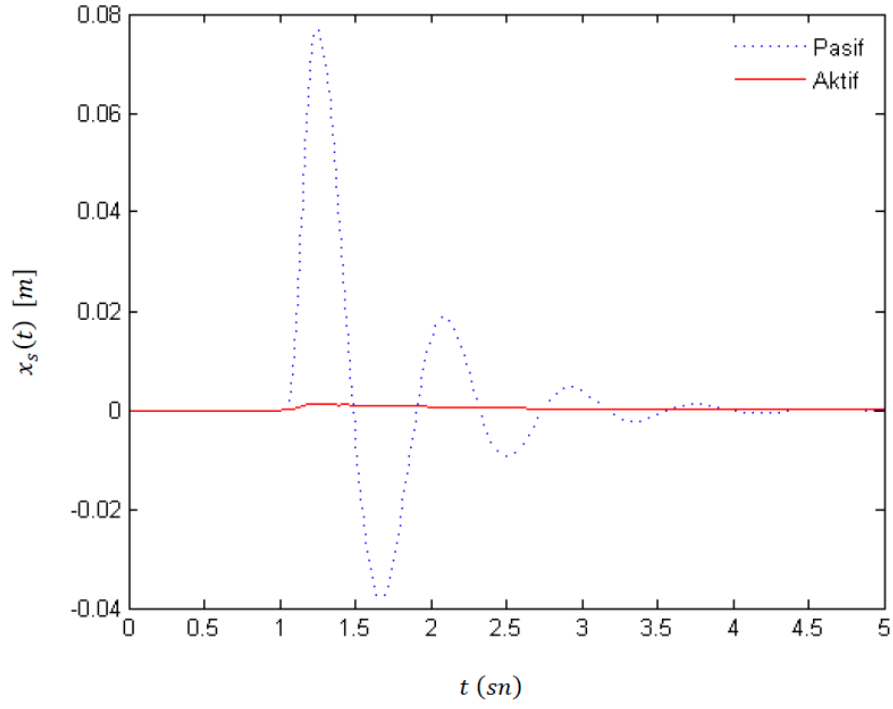
H_∞ kontrolcü, süspansiyon sistemine uygulanacak kontrol kuvveti bakımından, kontrol sisteminde kullanılan eyleyici üzerinde herhangi bir doyum lineersizliği bulunmadığı varsayılarak tasarlanmış ve çok başarılı sonuçlarla karşılaşmış olmasına rağmen, gerçekte durum oldukça farklıdır. Şöyle ki uygulanacak kontrol kuvvetini üreten fiziksel elemanlar olarak eyleyiciler, hidrolik ya da elektromekanik gibi farklı yapılarda olabilseler de üretebilecekleri kontrol kuvveti belirli bir sınır dahilindedir. Bazen de taşıtın yapısal kısıtları sebebiyle kontrol kuvveti sınırlanmak durumundadır. Bu noktada yapısal anlamdaki kısıtlılık bir yönüyle belirli bir noktadan sonra kontrol kuvvetindeki artış talebinin eyleyicinin boyutları üzerindeki artışı da beraberinde getirecek olmasıdır ki, süspansiyon sisteminin fiziksel boyutları kullanılacak eyleyici için de zaten kabul edilebilir boyutun ne olması gerektiğini ortaya koymaktadır. Yapısal kısıtlılığın diğer bir yönü ise belirli bir limitin ötesine geçen kontrol kuvvetinin, süspansiyon sistemine ve dolayısıyla taşıta zarar verebileceği gerçeğidir. Bunun için kontrol kuvvetinin kısıtlanması gerekliliği açıktır. Görüldüğü üzere ya eyleyicinin doyum şeklinde kendiliğinden bir sınırlılığı söz konusudur, ya da bazen sınırlandırılmak durumundadır.

Dolayısıyla, eyleyici üzerindeki bu doyum ya da sınırlılık olgusu, kontrolcü tasarımında lineer olmayan bir durum olarak kendini göstermektedir. Bu durum karşısında, lineer olmayan $\text{sat}F(x)$ doyumlu durum geribeslemesi, lineer geribeslemelerin şekillendirdiği dışbükey bir kabuk içinde ele alınmak suretiyle, süspansiyon sisteminin şasi yerdeğişim miktarı ile şasi ivmelenmesine karşılık gelen çıkışları için, bozucu girişlerden ilgili çıkışlara olan L_2 kazancının minimize edilmesine odaklı doyumlu bir L_2 kontrolcü, elde edilmiştir.

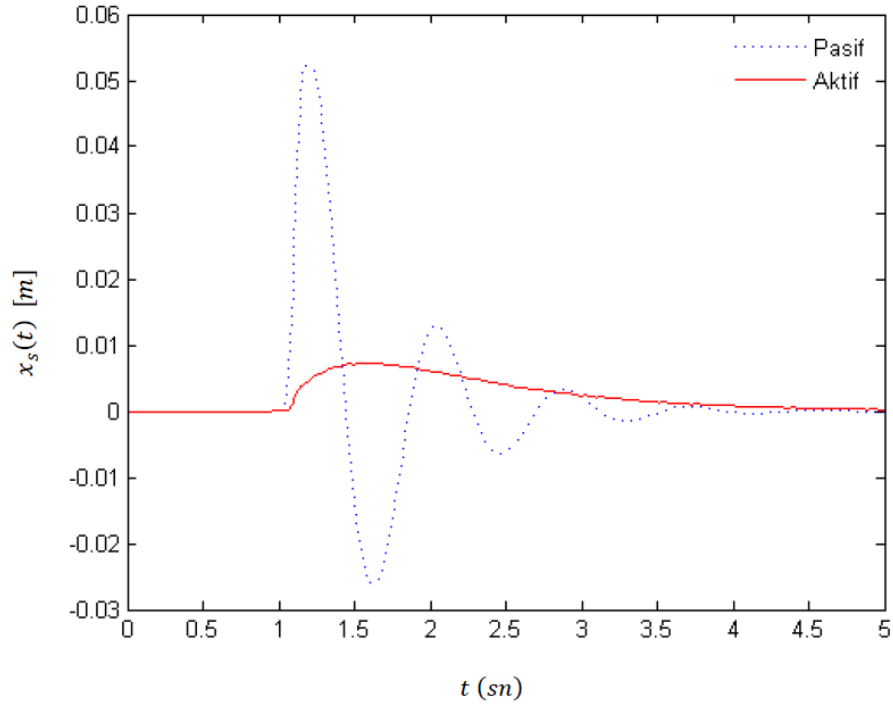
Bu yaklaşımla, Lineer olmayan doyum ifadesi, lineer yöntemlerle ele alınabilmiş ve böylelikle ilgili kontrolcü, lineer matris eşitsizliklerine dayalı dışbükey bir optimizasyon problemini çözmek suretiyle elde edilmiştir.

Eyleyici doyumlu L_2 kontrolcü tasarlanırken kullanılan optimizasyon probleminin η ve δ parametreleri, değerleri $\eta = \delta = 1$ olacak şekilde seçilmişlerdir. Ayrıca Aktif süspansiyon sistemi için başlangıç koşulları $x_0 = 0$ kabul edilerek, sistem için S ile ifade edilen başlangıç koşulları kümesinin genişletilmesi problemi göz ardı edilmiştir.

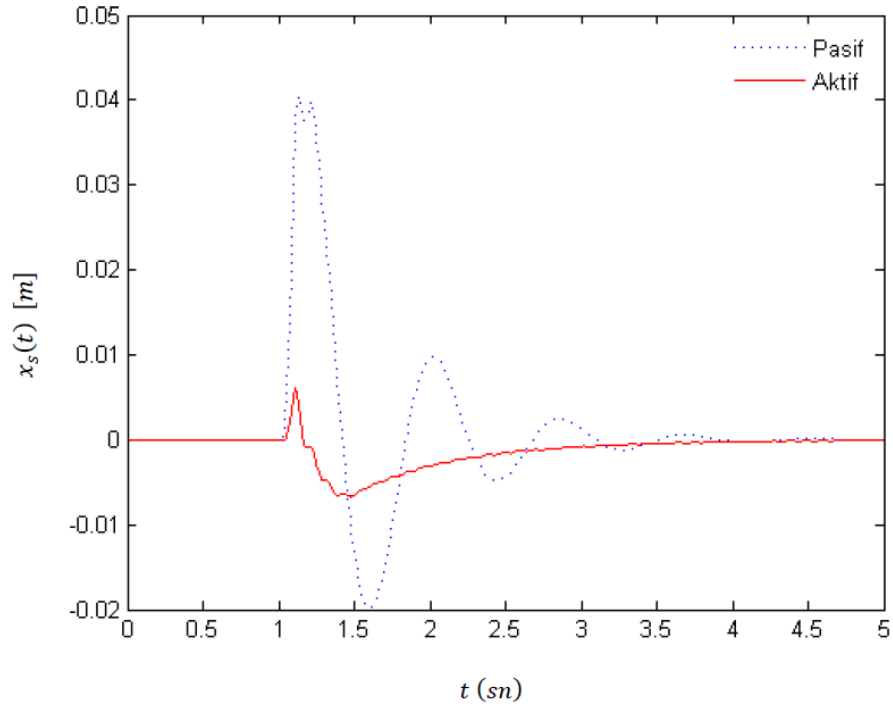
Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü İçin Şasi Yerdeğiştirme Cevapları



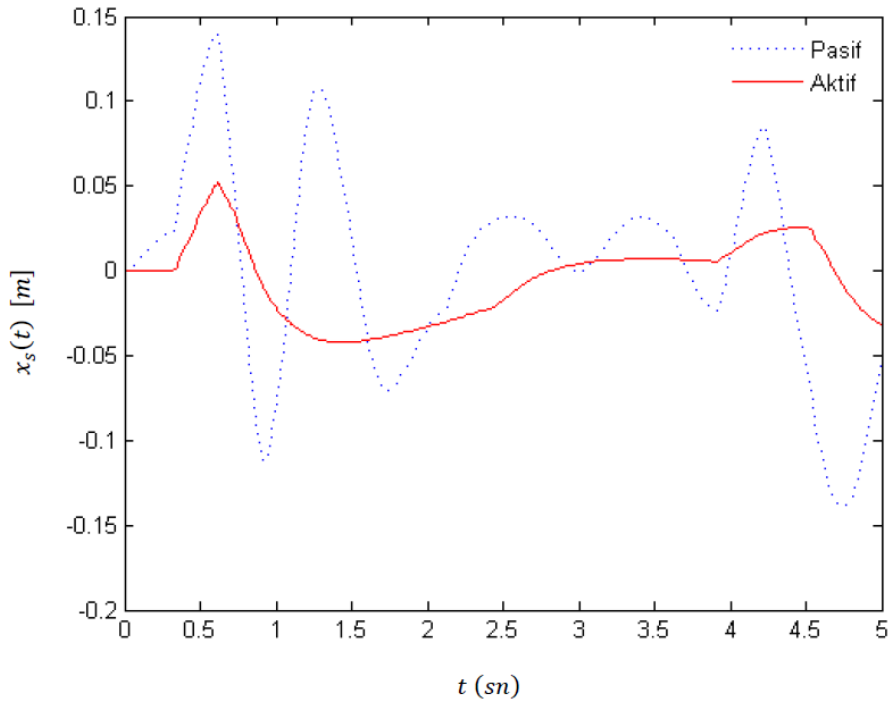
Şekil 7.15 " T_{20} " Tümsek Tipi Bozucu Girişe Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü Altında Yer Değiştirme Cevabı



Şekil 7.16 " T_{30} " Tümsek Tipi Bozucu Girişe Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü Altında Yer Değiştirme Cevabı

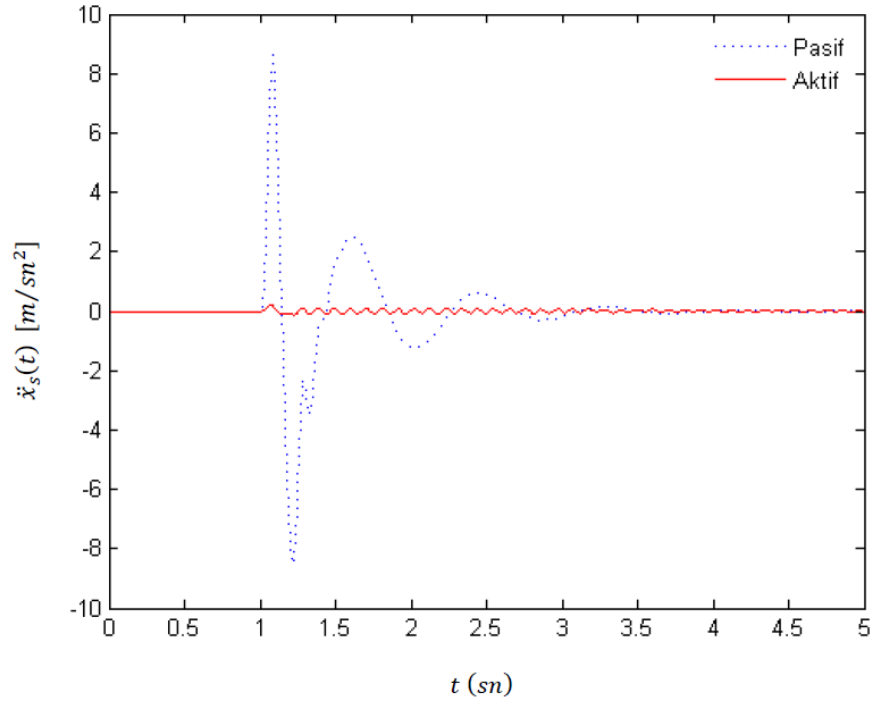


Şekil 7.17 " T_{40} " Tümsek Tipi Bozucu Girişe Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü Altında Yer Değiştirme Cevabı

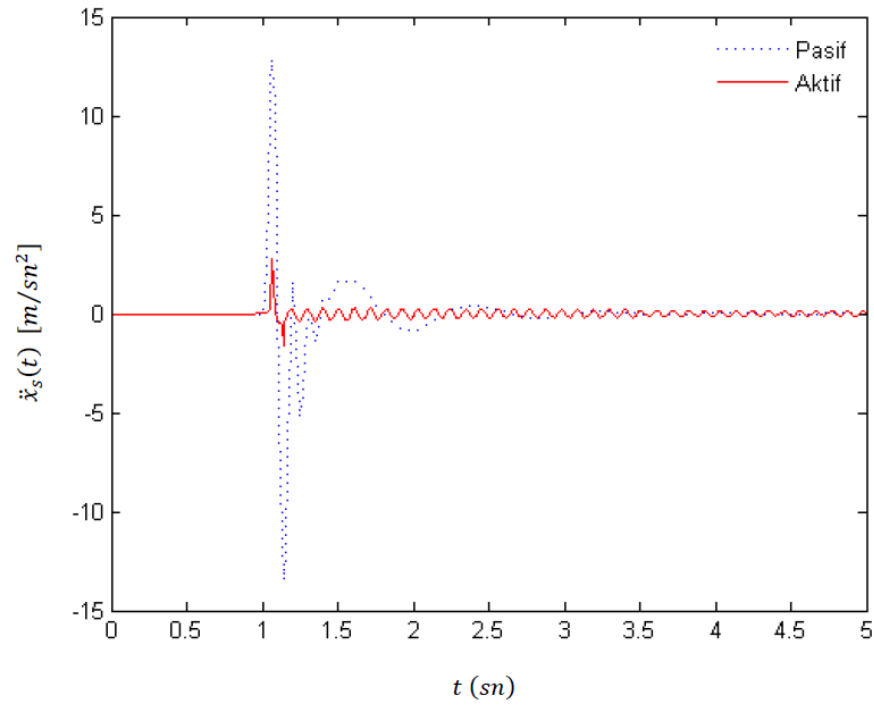


Şekil 7.18 Çakıllı Yol Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü Altında Yer Değiştirme Cevabı

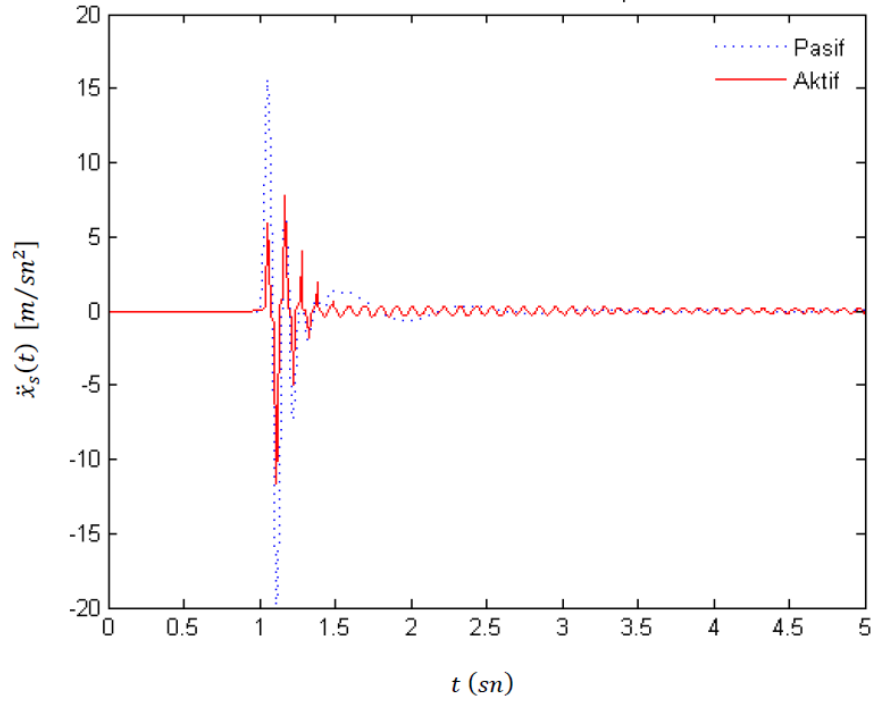
Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü İçin Şasi İvmelenme Cevapları



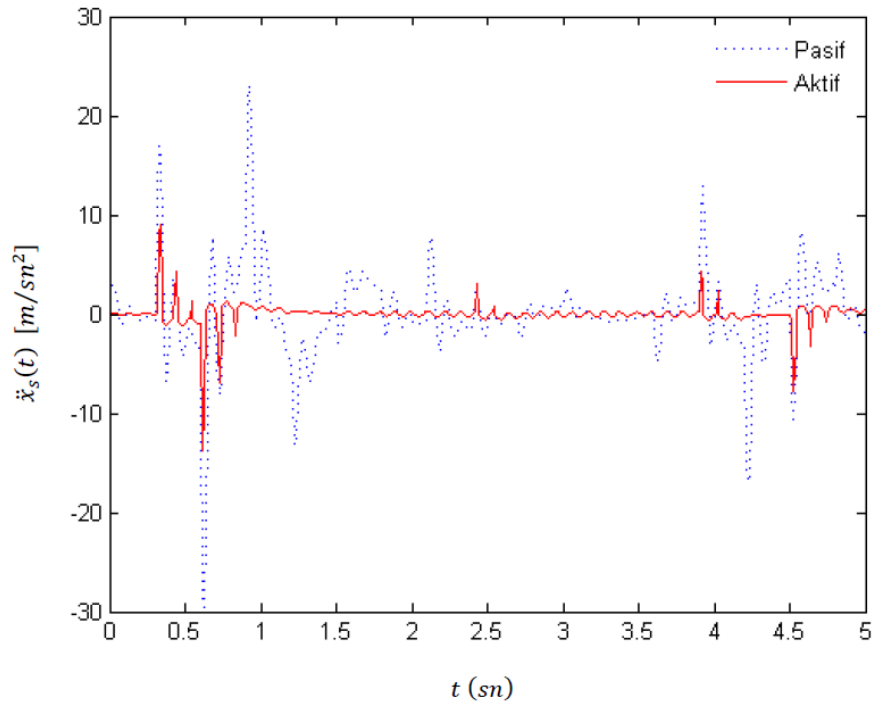
Şekil 7.19 " T_{20} " Tümeşek Girişi İçin Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün İvme Cevabı



Şekil 7.20 " T_{30} " Tümeşek Girişi İçin Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün İvme Cevabı



Şekil 7.21 " T_{40} " Tümssek Girişi İçin Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün İvme Cevabı



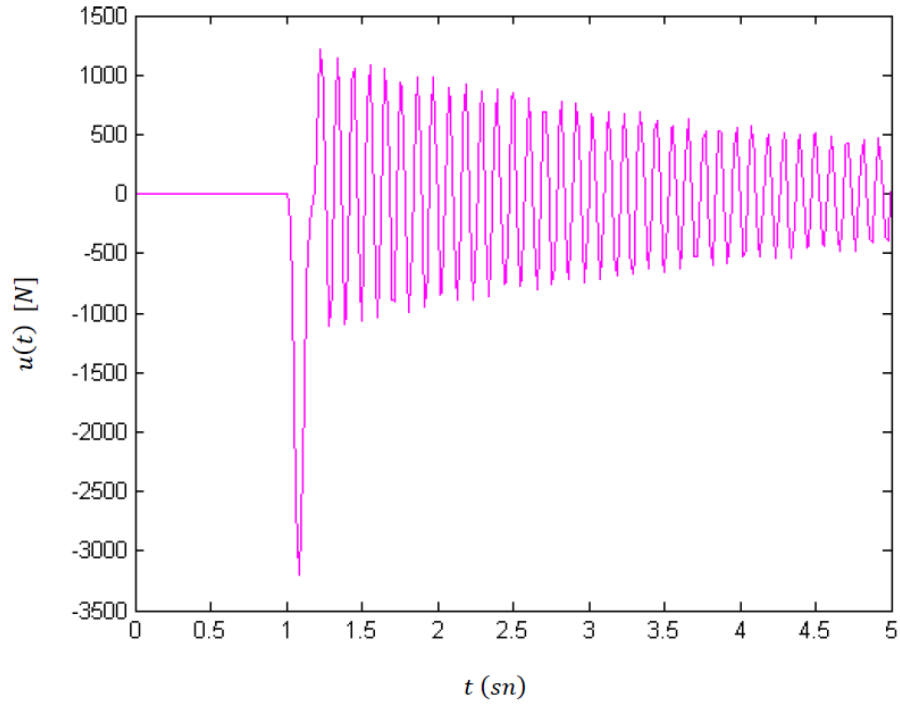
Şekil 7.22 Çakıllı Yol Girişi İçin Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün İvme Cevabı

Eyleyici doyumu hesaba katılarak elde edilmiş olan L_2 kontrolcü sisteme uygulandığında, $x_s(t)$ ' nin tümsek şeklindeki yol bozucularına olan tepkisi, Şekil 7.15, Şekil 7.16 ve Şekil 7.17' de gösterildiği gibi ortaya çıkacaktır. Aynı kontrolcü için, sistem gövde yerdeğiştirmesi $x_s(t)$ ' nin çakıllı yol profili altında, Şekil 7.18' de gösterildiği gibi gerçekleştiği görülmüştür.

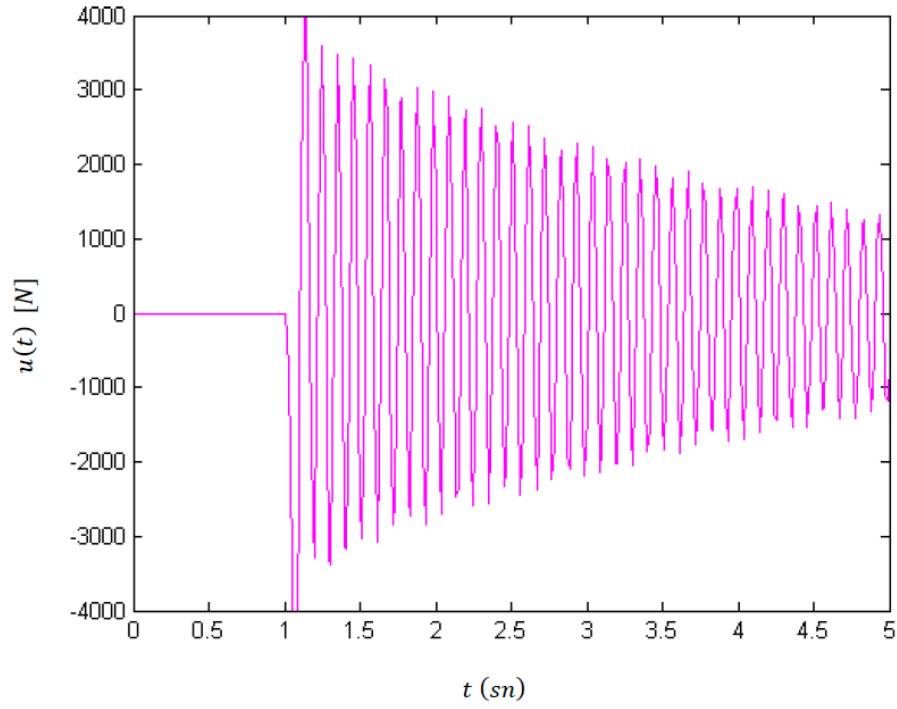
Kontrollü ve pasif olarak sistemin ivmelenmesini gösteren $\ddot{x}_s(t)$ değişimi ise, tümsek tipi girişler için Şekil 7.19, Şekil 7.20 ve Şekil 7.21' de, çakıllı yol için ise Şekil 7.22' de verilmiştir.

Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü altında, tümsek tipi girişler için, şasideki ivmelenme miktarı kontrolsüz duruma nazaran çok büyük ölçüde bastırılmış olsa da, tekerin tümseğe çarpması anında, H_∞ kontrolcü ile mukayese edildiği taktirde ivmelenme için nispeten büyük değerlere ulaşıldığını sonrasında ise kontrolcü cevabının düzelme eğilimine girerek sönümlendiği dikkati çekmektedir. Çarpma esnasında ortaya çıkan pik değerlerin sebebi, sistemde kullanılan eyleyicinin doyumlu oluşudur. Daha önce incelemiş olduğumuz ve doyum olgusunu göz ardı eden durum geribeslemeli klasik H_∞ kontrolcü, çarpma anında daha büyük kontrol işaretleri uygulayabildiği için, elde edilen sonuçlar daha başarılı olabilmekte idi. Doyum bağımlı tasarlanmış olan L_2 kontrolcünün sistem için üretmiş olduğu kontrol işaretinin büyüklüğü ise, eyleyicinin limitleri dahilinde olabilmektedir.

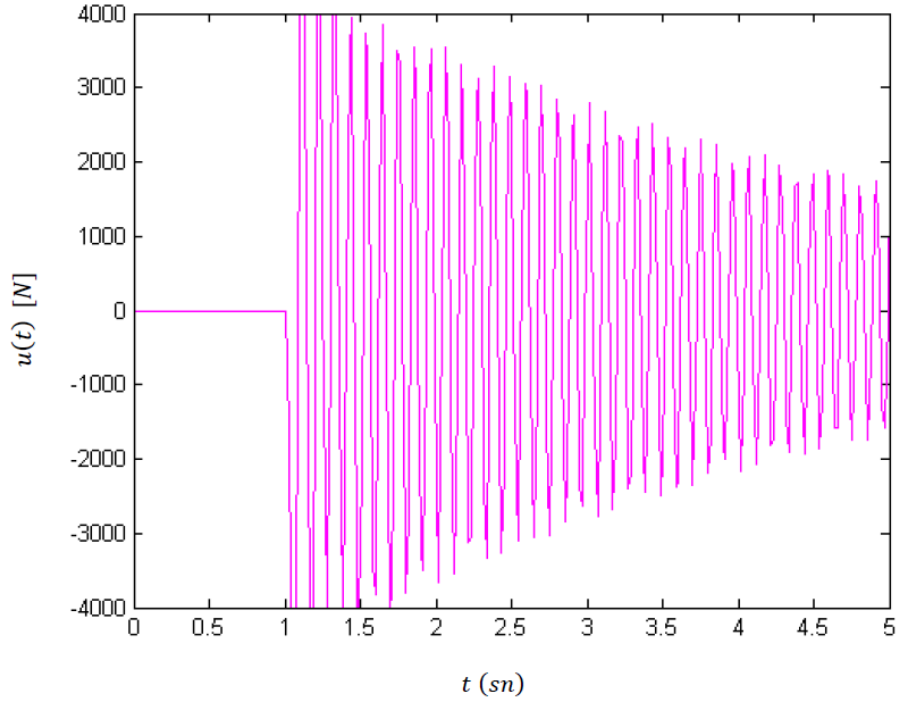
Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşaretleri



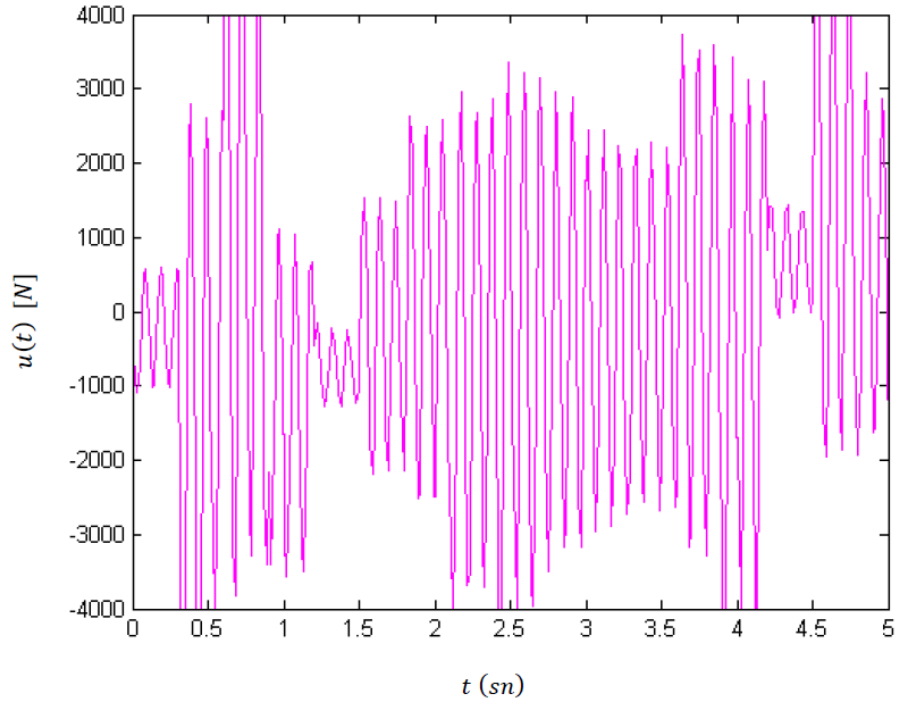
Şekil 7.23 " T_{20} " Tümsek Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti



Şekil 7.24 " T_{30} " Tümsek Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti



Şekil 7.25 " T_{40} " Tümsek Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti



Şekil 7.26 Çakıllı Yol Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti

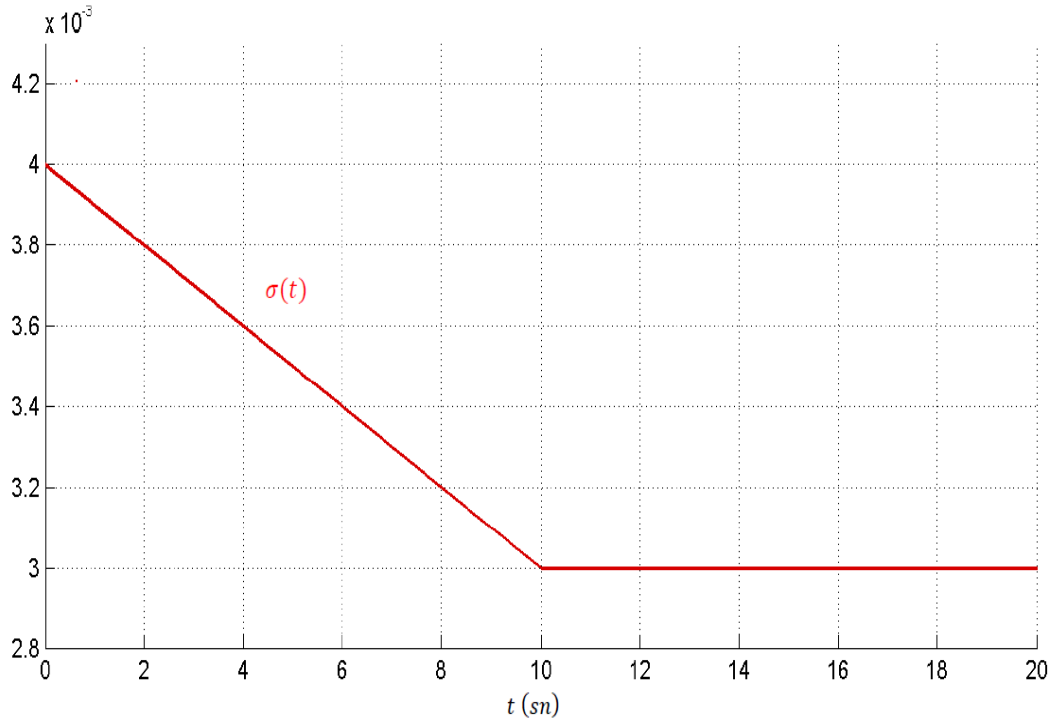
Beklenildiği gibi, eyleyici doyumu söz konusu olduğunda Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü için kapalı çevrim performansı üzerinde H_∞ kontrolcünün performansına göre dikkat çeken bir düşüş hem şasi yerdeğişimi $x_s(t)$ üzerinde hem de şasiye dair ivme cevapları $\ddot{x}_s(t)$ üzerinde göze çarpmaktadır. Ancak yine de pasif süspansiyonla kıyaslanacak olursa ilgili kontrolcünün süspansiyon sistemi üzerinde oldukça başarılı olduğu da bir gerçektir. Çünkü tasarım doyum bağımlı gerçekleştirilmiştir ve doyum dikkate alınmaksızın yapılacak kontrolün aynı başarıyı sergilemesi beklenemez.

Burada, taşıtın 20 m/sn 'lik bir hızla tümsek üzerinden geçmesi durumunda oluşan ve " T_{20} " olarak adlandırdığımız tümsek tipi bozucu giriş karşısında Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcünün, Şekil 7.15 ve Şekil 7.19 ile sunulan performansları özellikle dikkat çekmektedir. Çünkü ilgili performanslara dair kontrolcü tarafından üretilen ve Şekil 7.23 ile verilen kontrol işareti değişimi incelenecek olursa, bu değişimin eyleyicinin doyuma ulaşmadığı $-4000N \leq u(t) \leq 4000N$ aralığı içinde yer aldığı görülmektedir. Hal böyle iken, yani eyleyici üzerinde herhangi bir doyum söz konusu olmamış iken Şekil 7.15 ve Şekil 7.19'la ortaya konan şasi yerdeğişimi ve ivme cevaplarının neden H_∞ kontrolcünün performansına ulaşamadığı sorusu doğal olarak akla gelmektedir. Aslında bu sorunun cevabı oldukça açıktır. Her ne kadar kontrol kuvveti eyleyicinin doyum sınırlarına ulaşmamış olsa da L_2 kontrolcünün tasarımı dışbükey yaklaşımla doyum olgusu hesaba katılarak gerçekleştirildiği içindir ki ortaya çıkan kontrolcü tutucu (conservative) yapıdadır ve bu sebeple H_∞ kontrolcünün performansına kıyasla sergilediği performansın, aslında pekte önemli olmayan ölçüde bir düşüş göstermesi çok normaldir.

7.3.3 Eyleyici Doyumlu (LPD) tipi L_2 Kontrolcünün Performansı

Nominal süspansiyon sistemi üzerinde sınanan eyleyici doyumlu L_2 kontrolcünün ardından, sistemin LPD modeli gözetilerek, yeni bir LPD tipi Eyleyici Doyumlu L_2 kontrolcü tasarlanmış ve sisteme uygulanarak başarısı gözlenmiştir.

Eyleyici Doyumlu LPD tipi L_2 kontrolcü tasarımında sistemin ölçülebilir parametresi, $\sigma = 1/m_s$ olarak göz önüne alınmıştır. Buna göre, m_s üzerinde bir takım kabuller yapılmak suretiyle $\sigma(t)$ parametresinin değişiminin, Şekil 7.27'deki gibi olduğu farz edilmiştir.

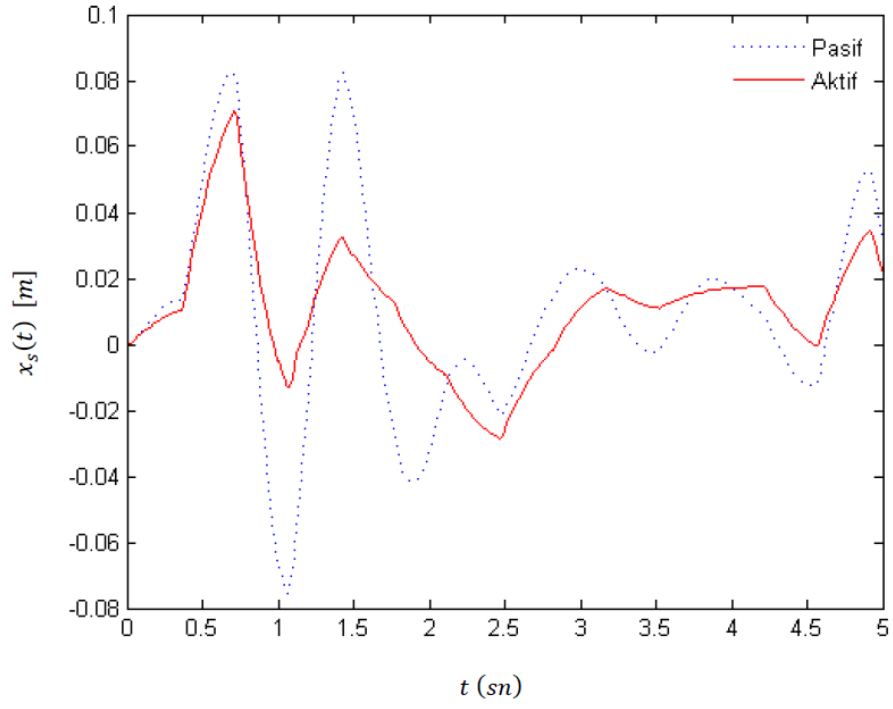


Şekil 7.27 $\sigma(t)$ ' nin zamanla değişimi

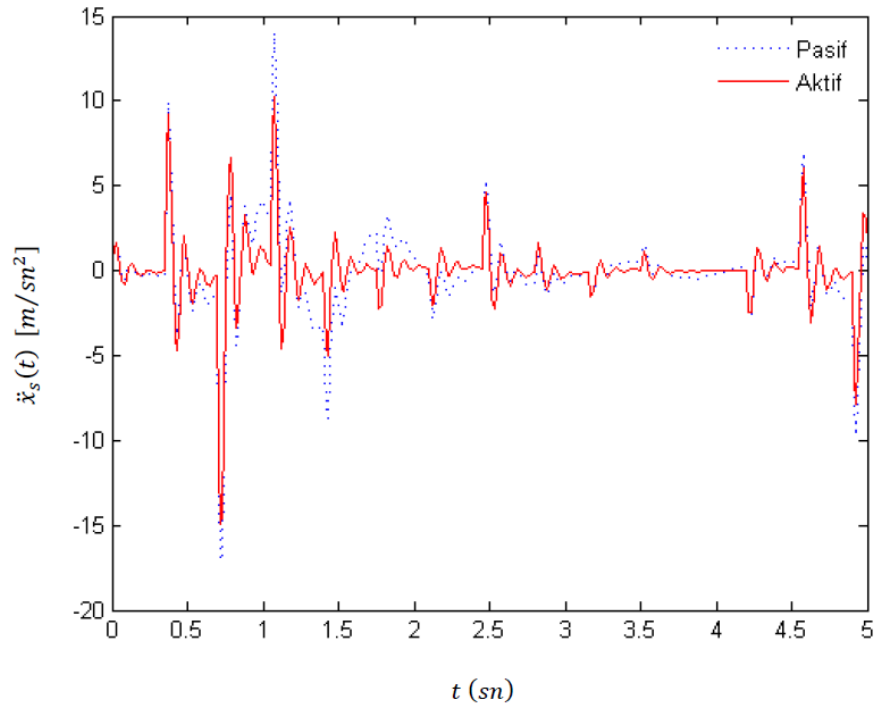
Eyleyici Doyumlu LPD tipi L_2 Kontrolcünün başarımı, sistemin sadece çakıllı yol girişine maruz kalması durumu için sınanmıştır.

Pasif ve kontrollü durumlar için şasinin denge konumuna göre sapma miktarı Şekil 7.28'deki gibi gerçekleşirken, ivmelenme performansı Şekil 7.28 ile ortaya konulmuştur.

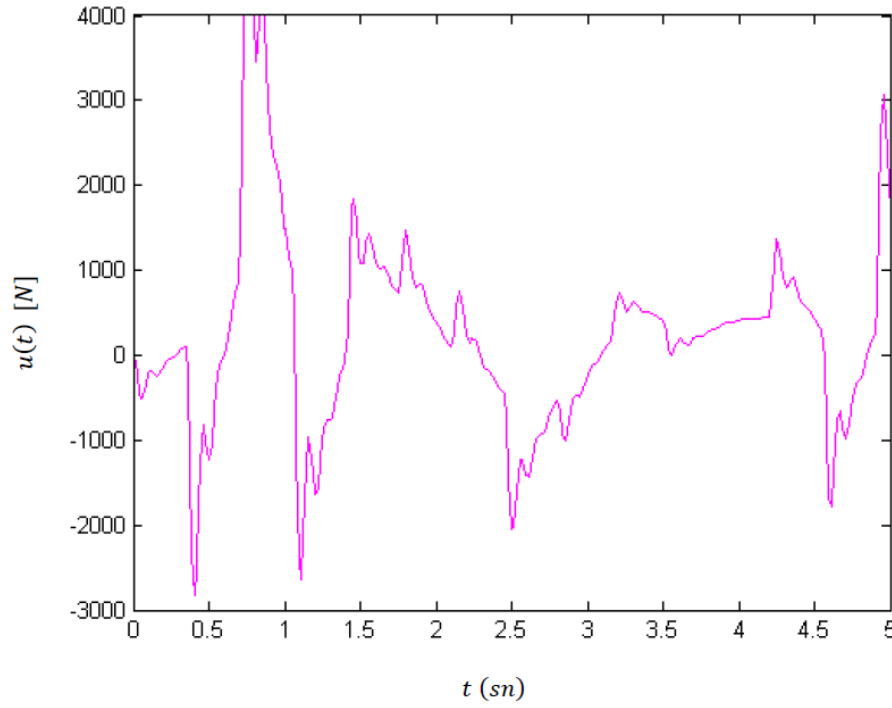
Kontrolcü için bu sonuçları doğuran kontrol işareti değişimi ise Şekil 7.30'daki gibi olmaktadır.



Şekil 7.28 Çakıllı Yol Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu LPD tipi L_2 Kontrolcü Altında Yer Değiştirme Cevabı



Şekil 7.29 Çakıllı Yol Girişi İçin Eyleyici Doyumlu LPD tipi L_2 Kontrolcünün İvme Cevabı



Şekil 7.30 Çakıllı Yol Girişine Karşılık Eyleyici Doyumlu LPD tipi L_2 Kontrolcünün Ürettiği Kontrol İşareti

1:1 ölçekli gerçek bir taşıta ait parametreler kullanılarak elde edilmiş olan çeyrek taşıt süspansiyon sisteminin LPD modeli dikkate alınarak tasarlanan söz konusu LPD kontrolcü için gerçekleştirilen simülasyon sonuçları değerlendirildiğinde, nominal sistem için tasarlanmış olan Eyleyici Doyumlu L_2 Kontrolcü kadar iyi olmasa da yine de belli bir başarımın ortaya konulmuş olduğu görülmektedir. Sistemin sahip olduğu eyleyici üzerinde doyum şeklinde bir lineersizlik bulunmasının yanı sıra, sistem parametrelerinin zamanla değişiyor olması da tasarlanan kontrolcünün daha korunumlu yapıda ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Dolayısıyla ulaşılan sonuçların nominal sistem için bulunmuş olanlar kadar iyi olmaması şaşırtıcı değildir. Elde edilen sonuçların ötesinde burada asıl önemli olan nokta odur ki; eyleyici doyumunu gözeterek gerçekleştirmiş olduğumuz Elipsoit tabanlı LPD tipi L_2 kontrolcü, dışbükey optimizasyon tabanlı doyum bağımlı kontrolcü tasarımının, değişen parametrelili sistemler açısından ele alınmış olması bakımından yeni bir yaklaşım olmuş ve süspansiyon sistemleri üzerine ilk kez uygulanıyor oluşu da, bu konudaki literatüre bir zenginlik katmıştır.

8. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Süspansiyon sistemleri için Lineer matris eşitsizlikleri kullanılarak dışbükey optimizasyona dayalı L_2 kontrolcü tasarımı, hem kontrol işareti üzerindeki eyleyici doyumu olgusu gözetilerek gerçekleştirilmiş hem de söz konusu kontrolcünün tasarımına sistemin LPD yapıda modellenmesi durumu dahil edilerek yeni bir LPD tipi L_2 kontrolcü elde edilmiştir. Söz konusu kontrolcüler, iki serbestlik dereceli çeyrek taşıt süspansiyonu esas alınarak tasarlanmış ve performansları sınanmıştır. Pekala, bu çalışma bir adım daha ileriye götürülerek çeyrek taşıt süspansiyonu üzerinde ele alınan kontrolcü tasarım yakalaşımının önce yarım taşıt modeli için ve ardından 7 serbestlik dereceli tam taşıt süspansiyon sistemine uygulanabilirliği araştırılabilir. Ayrıca gerçekleştirilmiş olan LPD tipi L_2 kontrolcünün tasarımında, süspansiyon sistemi için değişken parametre olarak yaylanan kütle ya da taşıtın şasi kütlesi göz önüne alınmıştır. Taşıt süspansiyon sistemi için şasi kütlelerinin yanı sıra zamanla değişen başka parametreler de söz konusudur. Ancak burada zamanla değişen parametre değerlerinin gerçek zamanlı olarak elde edilebilir olması gerekmektedir. Örneğin sistemin değişebilen parametreleri arasında yer almakla beraber gerçek zamanlı olarak ölçülemediği için süspansiyonun bileşenlerinden biri olan dampere ait sönüm sabiti değişen bir parametre olarak LPD kontrolcü tasarımına dahil edilememektedir. Oysa süspansiyon sistemin bir diğer bileşeni olan yay elemanı için durum böyle değildir. Bu sebeple, esasen lineer olmayan, yerdeğiştirme-kuvvet karakteristiğinin belirlemiş olduğu yay sabiti de, değişken bir parametre olarak kullanılabilir. Böylece Eyleyici Doyumlu LPD tipi L_2 kontrolcünün tasarımı şasi kütlelerinin yanı sıra yay sabiti parametresi de dikkate alınarak gerçekleştirilip, sonuçların sistem üzerinde gözlemlenmesi mümkündür.

KAYNAKLAR

- Alleyne, A. ve Hedrick, J. K. (1995), "Nonlinear Adaptive Control of Active Suspensions", IEEE Transaction on Control System Technology, 3 (1): 94 -101.
- Astrom, K.J. ve Rundqwist, L. (1989), "Integrator Windup and How to Avoid it", Proc. American Control Conference:1693–1698.
- Balakrishnan, V. ve Kashyap, R. L. (1999), "Robust Stability and Performance Analysis of Uncertain Systems Using Linear Matrix Inequalities", Journal of Optimization Theory and Applications, 100 (3): 457-478.
- Barbu, C., Reginatto, R., Teel, A.R. ve Zaccarian, L. (2000), "Anti-Windup for Exponentially Unstable Linear Systems With Inputs Limited in Magnitude and Rate: Theory and Application", Technical Report Ccec-00-0718, Center for Control Engineering and Computation. University of California at Santa Barbara.
- Benzaouia, A., ve Hmamed, A. (1993), "Regulator Problem for Linear Continuous-Time Systems with Nonsymmetrical Constrained Control". IEEE Transactions on Automatic Control, 38:1556–1560.
- Biannic, J. M. ve Apkarian, P. (1999), "Missile Autopilot Design Via A Modified LPV Synthesis Technique", Aerospace Science and Technology, 3 (3): 153-160.
- Boyd, S., Balakrishnan, V., Feron, E. ve Ghaoui, L. E. (1993), "Control System Analysis and Synthesis Via Linear Matrix Inequalities", Proceeding of the American Control Conference , San Francisco, Usa: 2147-2154.
- Boyd, S. ve Barratt, C. (1991), Linear Controller Design: Limits of Performance , Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.
- Boyd, S., Feron, E., Balakrishnan, V. ve Ghaoui, L. E. (1994a), "History of Linear Matrix Inequalities in Control Theory", Proceedings of the American Control Conference, 1 : 31-34.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. ve Balakrishnan, V. (1994b), "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory" , Studies in Applied Mathematics, SIAM.
- Boyd, S. ve Vandenberghe, L. (2004), "Convex Optimization" , Cambridge, Cambridge University Press.
- Castelan, E.B., Tarbouriech, S., Da Silva Jr, J.M.G. ve Queinnec, I. (2006), "L2-Stabilization of Continuous-Time Linear Systems With Saturating Actuators", International Journal of Robust and Nonlinear Control, 16(18):935–944.
- Chilali, M. ve Gahinet, P. (1996), "H-Infinity Design With Pole Placement Constraints: An LMI Approach", IEEE Transactions on Automatic Control, 41 (3): 358-367.
- Chilali, M., Gahinet, P. ve Apkarian, P. (1999), "Robust Pole Placement in LMI Regions", IEEE Transactions on Automatic Control, 44 (12): 2257-2270.
- Chantranuwathana, S. ve Peng, H. (1999), "Adaptive Robust Control for Active Suspensions", Proceedings of the American Control Conference, June, San Diego, California. IEEE: 1702-1706.
- Clement, B. (2004), "Robust Control With LMI Optimisation in Space Applications, Workshop on Linear Matrix Inequalities in Control" , Toulouse, France, LAAS-CNRS.
- D'amato, F. J. ve Viassalo, D. E. (2000), "Fuzzy Control for Active Suspensions", Journal of Mechatronics, 10: 897-920.

- Danes, P. (2004), "Towards An LMI Approach to Multicriteria Visual Servoing in Robotics", Workshop on Linear Matrix Inequalities in Control", Toulouse, France, LAAS-CNRS.
- Dettori, M. ve Scherer, C. W. (2002), "Mimo Control Design for A Compact Disc Player With Multiple Norm Specifications", IEEE Transactions on Control Systems Technology, 10 (5): 635-645.
- Doyle, J. C., Francis, B. A. ve R., T. A. (1992), Feedback Control Theory, New York, Macmillan.
- Dullerud, G. E. ve Paganini, F. (2000), A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach, Springer-Verlag New York.
- Esmailzadeh, E. ve Taghirad, H. D. (1996), "Active Vehicle Suspensions With Optimal State-Feedback Control", Journal of Mechanical Science, : 1- 18.
- Fang, H., Lin, Z., ve Hu, T. (2004), "Analysis of Linear Systems in the Presence of Actuator Saturation and L2-Disturbances", Automatica, 40(7), 1229–1238.
- Fialho, I., ve Ballas, G.J. (2002), "Road Adaptive Active Suspension Design Using Linear Parameter-Varying Gain Scheduling", IEEE Transactions on Control System Technology, 10(1): 43-54.
- Fukao, T., Yamawaki, A., ve Adachi, N. (1999), "Nonlinear and H-Infinity Control of Active System With Hydraulic Actuators", Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, December, Arizona, IEEE: 5125-5128.
- Gahinet, P. (1994), "A New Parametrization of H-Infinity Suboptimal Controllers", International Journal of Control, 59 (4): 1031-1051.
- Gahinet, P. (1996), "Explicit Controller Formulas for LMI-Based H-Infinity Synthesis", Automatica, 32 (7): 1007-1014.
- Gahinet, P. ve Apkarian, P. (1994), "A Linear Matrix Inequality Approach to H-Infinity Control", International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4 (4): 421-448.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. ve Chilali, M. (1995), "LMI Control Toolbox for Use With MATLAB", Natick, MA, the Mathworks, Inc.
- Ghaoui, L. E. ve Silviu-Lulian, N. (1999), Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control, Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM.
- Hac, A. (1987), "Adaptive Control of Vehicle System", Vehicle System Dynamics, 16: 57 - 74.
- Hayakawa, K., Matsumoto, K., Yamashita, M., Suzuki, Y., Fujimori, K., ve Kimura, H. (1999), "Robust H-Infinity Output Feedback Control of Decoupled Automobile Active Suspension Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, 44(2): 392-396.
- Henrion, D. (2003b), Course Notes on LMI Optimization With Application in Control, Prague, Czech Republic, LAAS-CNRS, Toulouse, France.
- Hsia, T. (1967), "on the Optimal Control of Plants With Saturation Nonlinearity", Automatic Control, IEEE Transactions on, 12(3):331–332. Hu, T., Pitsillides, A.N. Ve Lin, Z. (2000a), "Null Controllability and Stabilization of Linear Systems Subject to Asymmetric Actuator Saturation", Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 4:3254–3259.
- Hu, T., ve Lin, Z. (2001), Control Systems With Actuator Saturation: Analysis and Design, Vol. xvi (392p). Boston: BirkhHauser.

- Hu, T., Lin, Z. ve Chen, B. M. (2002), "An Analysis and Design Method for Linear Systems Subject to Actuator Saturation and Disturbance", *Automatica*, 38(2):351–359.
- Hu, T., Teel, A.R. ve Zaccarian, L. (2006), "Stability and Performance for Saturated Systems Via Quadratic and Nonquadratic Lyapunov Functions", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(11):1770–1786.
- Huang, S. J., ve Chao, H. C. (2000), "Fuzzy Logic Controller for Active Suspension System", *Proc. Instn. Mech. Engrs*, 21 4(D): 1-12.
- Hrovat, D. (1997), "Survey of Advanced Suspension Developments and Related Optimal Control Applications", *Automatica*, 33(10): 1781-1817.
- Iwasaki, T. ve Skelton, R. E. (1994b), "A Unified Approach to Fixed Order Controller Design Via Linear Matrix Inequalities", *Proc. American Control Conference* : 35-39.
- Iwasaki, T. Ve Fu, M. (2002), "Regional H₂ Performance Synthesis", *Actuator Saturation Control*, Edited By Vikram Kapila and Karolos M. Grigoriadis ,Chapter 4., Marcel Dekker, Inc.
- Jabbari, F. (2001), "Disturbance Attenuation of LPV Systems With Bounded Inputs", *Dyn. Control*, 11(2):133–150.
- Kapasouris, P., Athans, M. Ve Stein, G. (1988), "Design of Feedback Control Systems for Stable Plants With Saturating Actuators", *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, 1:469–479.
- Khargonekar, P. P. ve Rotea, M. A. (1991a), "Mixed H-2/H-Infinity Control - A Convex-Optimization Approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 (7): 824-837.
- Kim, C., ve Ro, P.I. (1998), "A Sliding Mode Controller for Vehicle Active Suspension Systems With Non-Linearities", *Proc. Instn. Mech. Engrs Part D*, 212: 79-92.
- Kuo, Y.P., ve Li, T.H.S. (1999), "GA-Based Fuzzy PI/PD Controller for Automotive Active Suspension System", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 46(6): 1051-1056.
- Leith, D.J. ve Leithead, W.E. (2000), "Survey of Gain-Scheduling Analysis and Design", *International Journal of Control*, 73(11):1001-1025.
- Lin, J.S. Kanellakopoulos, I. (1997a), "Nonlinear Design of Active Suspension", *IEEE Control System Magazine*, 17: 1-26.
- Lofberg, J. (2004), "YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB", *Proceedings of the CacsD Conference* , Taipei, Taiwan.
- Lu, L., Lin, Z. ve Fang, H. (2009), "L₂ Gain Analysis for a Class of Switched Systems", *Automatica*, 45:965-972.
- Lu, W. ve Doyle, J. (1992), "H-Infinity Control of LFT Systems: An LMI Approach", *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control* , Tucson, Arizona.
- Megretski, A. ve Rantzer, A. (1997), "System Analysis Via Integral Quadratic Constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 (6): 819-830.
- Nesterov, Y. ve Nemirovski, A. (1994), "Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications", Philadelphia, 1994.
- Packard, A. ve Doyle, J. (1993), "the Complex Structured Singular Value", *Automatica*, 29 (1): 71-109.
- Packard, A., Zhou, K., Pandey, P. ve Becker, G. (1991), "A Collection of Robust Control Problems Leading to LMIs", *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control* ,

Brighton, England: 1245-1250.

Pan, H. Ve Kapila, V. (2001), "LMI-Based Control of Discrete-Time Systems With Actuator Amplitude and Rate Nonlinearities", *Proceedings of the American Control Conference*, 5:4140–4145.

Pare, T., Hindi, H., How, J. Ve Banjerdpongchai, D. (1999), "Local Control Design for Systems With Saturating Actuators Using the Popov Criteria", 1999. *Proceedings of the American Control Conference* 5:3211–3215.

Park, J.H., ve Kim, Y.S. (1998), "Decentralized Variable Structure Control for Active Suspensions Based on A Full-Car Model", *IEEE Proc. Int. Conf. on Control Applications*, September 1-4, Trieste, Italy, IEEE: 383-387.

Prempain, E. ve Postlethwaite, I. (2004), "Static H-Infinity Loop Shaping Control of A Fly-By-Wire Helicopter", *Workshop on Linear Matrix Inequalities in Control*, Also in *Proc. of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Toulouse, France, LAAS-CNRS.

Rajamani, R., ve Hedrick, J.K. (1995), "Adaptive Observers for Active Automotive Suspension: Theory and Experiment", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(1): 86-93.

Ray, L.R. (1993), "Stability Robustness of Uncertain LQG/LTR Systems", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 38(2):304-308.

Rugh, W. J. ve Shamma, J. S. (2000), "Research on Gain Scheduling", *Automatica*, 36:1401-1425

Scherer, C. ve Weiland, S. (1999), "Lecture Notes Disc Course on Linear Matrix Inequalities in Control", Delft, the Netherlands, Dutch Institute for Systems and Control: 205.

Scherer, C. W. (1995a), "Mixed H-2/H-Infinity Control, Trends in Control", *A European Perspective*. I. A. Delft, the Netherlands, Springer-Verlag : 173-216.

Scherer, C. W. (2004), "LMI Relaxations in Robust Control (Tutorial)", *Proceedings of the Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, Leuven, Belgium.

Seto, D., Ferriera, E. ve Marz, T. (2000), "Case Study: Development of A Baseline Controller for Automatic Landing of An F-16 Aircraft Using Linear Matrix Inequalities (LMIs)", *Carnegie Mellon, Software Engineering Institute: 1-55:Research Report CMU/SEI-99-TR-020*.

Shen, X. ve Peng, H. (2003), "Analysis of Active Suspension Systems With Hydraulic Actuators", *Proceedings of the 2003 IAVSD Conference*. August. Atsugi, Japan.

Da Silva Jr, J.M.G. Ve Tarbouriech, S. (2005), "Antiwindup Design With Guaranteed Regions of Stability: An LMI-Based Approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):106–111.

Skelton, R. E. ve Iwasaki, T. (1995), "Increased Roles of Linear Algebra in Control Education", *IEEE Control Systems Magazine*, 15 (4): 76-90.

Skogestad, S. ve Postlethwaite, I. (1996), *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Chichester, John Wiley & Sons.

Sturm, J. F. (1999), "Using SeDuMi 1.02, A MATLAB Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones", *Optimization Methods and Software*, 11-12 : 625-653.

Sunwoo, M., Cheok, K.C., ve Huang, N.J. (1991), "Model Reference Adaptive for Vehicle Active Suspension Systems", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 38(3): 217-222.

- Tarbouriech, S. Ve Garcia, G. (2002), "Output Feedback Compensators for Linear Systems With Position and Rate Bounded Actuators", Actuator Saturation Control, Edited By Vikram Kapila and Karolos M. Grigoriadis ,Chapter 10., Marcel Dekker, Inc.
- Thompson, A. G. (1971), "Design of Active Suspension", Proc. Inst. Mech. Engr, 185: 553-563.
- Ting, C.S., Li, T.H., ve Kung, F.C. (1995), "Design of Fuzzy Controller for Active Suspension System", Mechatronics, 5(4): 365-383.
- Tseng, T. ve Hrovat, D. (1990), "Some Characteristics of Optimal Vehicle Suspensions Based on Quarter-Car Model", Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control, Honolulu, Hawaii, IEEE: 2232-2237.
- Ulsoy, A.G. Hrovat, D., ve Tseng, T. (1994), "Stability Robustness of LQ and LQG Active Suspension", ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control, 116: 123-131.
- Vandenberghe, L. and Boyd, S. (1996), "Semidefinite Programming", SIAM Review, 38 (1): 49-95.
- Willems, J. C. (1971), "Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation", IEEE Transactions on Automatic Control, Ac-16 (6): 621-634.
- Williams, R.A. (1994), "Electronically Controlled Automotive Suspensions", Computing & Control Engineering Journal, 5(3): 143-148.
- Wu, F., K.M., G. ve A., P. (1998), "Anti-Windup Controller Synthesis Via Linear Parameter Varying Control Design Methods", Proceedings of the American Control Conference, 1:343-347.
- Yamashita, M., Fujimori, K., Hayakawa, K., ve Kimura, H. (1994), "Application of H-Infinity Control to Active Suspension Systems", Automatica, 30(11): 1717-1792.
- Yao, G.Z., Yap, F.F., Chen, G., Li, W.H., ve Yeo, S.H. (2002), "MR Damper and Its Application for Semi-Active Control of Vehicle Suspension System", Mechatronics, 12: 963-973.
- Yoshimura, T., Nakaminamani, K., Kurimoto, M., ve Hino, J. (1999), "Active Suspension of Passenger Cars Using Linear and Fuzzy Logic Control", Control Engineering Practice, 7(2): 41-47.
- Yoshimura, T., Kume, A. Kurimoto, M. ve Hino, J. (2001), "Construction of An Active Suspension System of A Quarter Car Model Using the Concept of Sliding Mode Control", Journal of Sound and Vibration, 239: 187-199.
- Zhou, K., Doyle, J. C. ve Glover, K. (1996), Robust and Optimal Control , Englewood Cliffs,Nj:PrenticeHall.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	09/10/1974	
Doğum Yeri	Kilis	
Lise	1989 - 1992	İstanbul Pertevniyal Lisesi
Lisans	1995 - 1999	Sakarya Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1999 - 2002	Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora	2003 - 2010	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Müh. Anabilim Dalı, Kontrol ve Otomasyon Programı

Çalıştığı kurumlar

2001 - 2003	Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü Araştırma Görevlisi
2003 - Devam ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi Elektrik Mühendisliği Bölümü Araştırma Görevlisi