

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMAN -TÜREVLİ HÜCRESEL SİNİR AĞLARI VE
UYGULAMALARI**

OĞUZHAN YAVUZ

**DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM
DALI
ELEKTRONİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. VEDAT TAVŞANOĞLU**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN-TÜREVLİ HÜCRESEL SİNİR AĞLARI VE
UYGULAMALARI

Oğuzhan YAVUZ tarafından hazırlanan tez çalışması 28.05.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vedat TAVŞANOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vedat TAVŞANOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Sabri ARIK
Işık Üniversitesi

Doç. Dr. Müştak E. YALÇIN
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Tülay YILDIRIM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Oruç BİLGİÇ
İstanbul Kültür Üniversitesi

ÖNSÖZ

Öncelikle doktora çalışmam boyunca sadece zekâsına, engin bilgisine ve yol göstericiliğine değil, aynı zamanda ders anlatma stiline ve entellektüel kişiliğine de hayran olduğum, bana bundan sonraki kariyerimde her yönden örnek oluşturan ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili danışman hocam Prof. Dr. Vedat TAVŞANOĞLU'na,

Her türlü bilgiyi paylaşmaktan kaçınmayan, zaman zaman benimle çalışan ve bana büyük yardımları dokunan, birlikte zaman geçirmekten zevk aldığım sevgili arkadaşım Nergis TURAL-POLAT'a,

Her türlü sıkıntılı anımda yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Tülay YILDIRIM'a ve Burcu ERKMEN'e,

Her türlü desteklerinden dolayı Nerhun YILDIZ'a, Evren CESUR'a, Murathan ALPAY'a, her tür ruh halime katlanan ve çalışmaktan zevk aldığım dostlarım Revna ACAR-VURAL'a, Nihan KAHRAMAN'a, Umut Engin AYTEN'e, Arda GÜNEY'e, Ali Rıza YILMAZ'a, Onur Can KURBAN'a,

Beni büyük fedakârlıklarla yetiştiren ve bugünlere getiren canım annem Emekli Öğretmen Emine YAVUZ'a ve canım babam Emekli Öğretmen Ali YAVUZ'a ve beni zorla akademik dünyaya ittiren bu günlerimin mimari ağabeyim Dr. Fatih YAVUZ'a,

Ve son olarak tez sürecinin tüm sıkıntılarını benimle birlikte yaşayan, bana olan inancı, desteği ve güveniyle her zaman yüzümü güldüren sevgili hayat arkadaşım Zeyneb'e yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Haziran, 2013

Oğuzhan YAVUZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	vii
KISALTMA LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	x
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiv
ÖZET.....	xv
ABSTRACT	xvii
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Orijinal Katkı.....	4
BÖLÜM 2	6
HÜCRESEL SİNİR AĞLARI	6
2.1 Standart HSA Yapısı	7
2.2 Standart HSA Denklemleri.....	8
2.3 HSA'nın Vektör-Matris Diferansiyel Denklemleri.....	11
2.4 HSA İle Lineer Görüntü İşleme.....	13
2.5 Sonuçlar	14
BÖLÜM 3	15
ZAMAN-TÜREVLİ HSA	15
3.1 ZTHSA'nın Simülasyonu için Tasarlanan Yeni Yöntemin Analizi I.....	26
3.2 ZTHSA'nın Simülasyonu için Tasarlanan Yeni Yöntemin Analizi II	37
3.3 Sonuçlar	39
BÖLÜM 4.....	43

3-BOYUTLU UZAY-ZAMANSAL GABOR-TİPİ FİLTRENİN ZTHSA İLE TASARIMI	43
4.1 3-Boyutlu Uzay-Zamansal Gabor-Tipi Filtrenin ZTHSA ile Tasarımı	48
4.2 3-Boyutlu Uzay-Zamansal Gerçek Gabor-Tipi Filtrenin ZTHSA ile Gerçeklenmesi	59
4.3 Sonuçlar	65
BÖLÜM 5	67
3-BOYUTLU UZAY-ZAMANSAL FİLTRELERİN ZTHSA İLE TASARIMI	67
5.1 2-Boyutlu Frekans Dönüşümleri	69
5.1.1 2-Boyutlu Uzamsal AGF - 2-Boyutlu Uzamsal Yönlü AGF Dönüşümü	69
5.1.2 2-Boyutlu Uzamsal AGF - 2-Boyutlu Uzamsal YGF Dönüşümü	70
5.1.3 2-Boyutlu Uzamsal YAGF - 2-Boyutlu Uzamsal Yönlü YGF Dönüşümü	70
5.1.4 2-Boyutlu Uzamsal AGF - 2-Boyutlu Uzamsal BGF Dönüşümü	71
5.1.5 2-Boyutlu Uzamsal AGF - 2-Boyutlu Uzamsal BSF Dönüşümü	72
5.2 2- Boyutlu Filtrelerin HSA Gerçeklemeleri	73
5.3 3-Boyutlu Uzay-Zamansal Filtrelerin ZTHSA ile Tasarımı	76
5.3.1 3-Boyutlu Uzay-Zamansal AGF'nin ZTHSA ile Tasarımı	76
5.3.2 3-Boyutlu Zamansal AGF ve Uzamsal YGF'nin ZTHSA ile Tasarımı	79
5.3.3 3-Boyutlu Zamansal AGF ve Uzamsal BGF'nin ZTHSA ile Tasarımı	80
5.3.4 3-Boyutlu Uzay-Zamansal YGF'nin ZTHSA ile Tasarımı	83
5.3.5 3-Boyutlu Uzay-Zamansal YYGF'nin ZTHSA ile Tasarımı	85
5.3.6 3-Boyutlu Zamansal YGF ve Uzamsal AGF'nin ZTHSA ile Tasarımı	85
5.3.7 3-Boyutlu Zamansal YGF ve Uzamsal BGF'nin ZTHSA ile Tasarımı	87
5.3.8 3-boyutlu Uzay-Zamansal BGF'nin ZTHSA ile Tasarımı	88
5.3.9 3-Boyutlu Zamansal BGF ve Uzamsal AGF'nin ZTHSA ile Tasarımı	91
5.3.10 3-Boyutlu Zamansal BGF ve Uzamsal YGF'nin ZTHSA ile Tasarımı	93
5.4 Sonuçlar	94
BÖLÜM 6	96
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	96
KAYNAKLAR	100
ÖZGEÇMİŞ	103

SİMGE LİSTESİ

(i,j)	HSA hücre indisi
$C(i,j)$	(i,j) HSA hücresi
$S_i(i,j)$	(i,j) HSA hücresi etki alanı
r	HSA komşuluğu
$x_t(i,j)$	Bir HSA hücresinin durum değişkeni
$u_t(i,j)$	Bir HSA hücresinin girişi
$y_t(i,j)$	Bir HSA hücresinin çıkışı
A	Geri besleme klonlayıcı şablonu
B	İleri besleme klonlayıcı şablonu
$\frac{dx_t(i,j)}{dt}$	Bir HSA hücresinin durum değişkeninin türevi
$\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$	Giriş, durum ve çıkış vektörleri
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	Durum matrisleri
$\mathbf{I}$	Birim matris
$\tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$	İleri besleme klonlayıcı şablonunun ayrık-uzay Fourier dönüşümü
$\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$	Geri besleme klonlayıcı şablonunun ayrık-uzay Fourier dönüşümü
R	Bir HSA hücresinin lineer direnci
C	Bir HSA hücresinin lineer kapasite elemanı
$H(e^{j\omega})$	Ayrık-zaman (veya ayrık-uzay) transfer fonksiyonu
$H(s)$	Sürekli-zaman (veya sürekli-uzay) transfer fonksiyonu
A_q	ZTHSA q. türev geri besleme klonlayıcı şablonu
B_q	ZTHSA q. türev ileri besleme klonlayıcı şablonu
A_1	ZTHSA 1. türev geri besleme klonlayıcı şablonu
A_2	ZTHSA 2. türev geri besleme klonlayıcı şablonu
B_1	ZTHSA 1. türev ileri besleme klonlayıcı şablonu
$H_T(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_T)$	ZTHSA'nın transfer fonksiyonu
$H_G(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_T)$	3-boyutlu Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu
$v_t(i,j)$	Bir ZTHSA hücresinin çıkışı
$\mathbf{v}_t$	Bir ZTHSA hücresinin çıkış vektörü
t	Sürekli zaman bileşeni

ω_x, ω_y	Uzamsal frekanslar
Ω_t	Zamansal frekans
T_S	HSA ayırık-zaman simülasyon adımı
T_F	Hareketli görüntünün periyodu
λ	Bir matrisin özdeğerlerinden biri
$\mathbf{\Lambda}$	Özdeğerler matrisi
$\mathbf{T}$	Özvektörler matrisi

KISALTMA LİSTESİ

AUFD	Ayrık-Uzay Fourier Dönüşümü
AFD	Ayrık Fourier Dönüşümü
CNN	Cellular Neural/Nonlinear Networks
HSA	Hücrel Sinir Ağları
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
OPL	Outer Plexiform Layer
TDCNN	Time Derivative Cellular Neural Networks
VLSI	Very Large Scale Integration
ZTHSA	Zaman-Türevli HSA
FIR	Finite Impulse Response
AGF	Alçak Geçiren Filtre
YAGF	Yönlü Alçak Geçiren Filtre
YGF	Yüksek Geçiren Filtre
YYGF	Yönlü Yüksek Geçiren Filtre
BGF	Band Geçiren Filtre
BSF	Band Söndüren Filtre

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1	Yatay hücre modeli (RC analog ağ) [2]2
Şekil 2.1	Dörtgensel HSA yapısı [8]7
Şekil 2.2	(a) $r = 1$ (3x3 komşuluk) (b) $r = 2$ (5x5 komşuluk) [8].....8
Şekil 2.3	Standart çıkış nonlineerliği.....8
Şekil 2.4	(a) satır satır paketleme, (b) köşegensel paketleme, (c) sütun sütun paketleme [8]11
Şekil 2.5	$\hat{\mathbf{A}}$ ve $\hat{\mathbf{B}}$ matrislerinin genel yapısı [24].....12
Şekil 3.1	ZTHSA genlik frekans yanıtı [15]16
Şekil 3.2	ZTHSA'nın SIMULINK ile elde edilen birim dürtü yanıtı [24]17
Şekil 3.3	$\Omega_{t0} = 8rad / s$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki BGF SIMULINK simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [14,24].....18
Şekil 3.4	$\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ için çeşitli zamansal frekanslardaki BGF SIMULINK simülasyon sonuçları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [14,24].18
Şekil 3.5	ZTHSA'nın (3.6) kullanılarak elde edilen birim dürtü yanıtı [24]20
Şekil 3.6	$\Omega_{t0} = 8rad / s$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki BGF'nin (3.6) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].....21
Şekil 3.7	$\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ için çeşitli zamansal frekanslardaki BGF'nin (3.6) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].21
Şekil 3.8	ZTHSA'nın (3.9) kullanılarak elde edilen birim dürtü yanıtı [24]23
Şekil 3.9	$\Omega_{t0} = 8rad / s$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki BGF'nin (3.9) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].....24

Şekil 3.10	$\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ için çeşitli zamansal frekanslardaki BGF'nin (3.9) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].	24
Şekil 3.11	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şablonları ile verilen ZTHSA'nın birim dürtü yanıtı	33
Şekil 3.12	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şablonları ile verilen ZTHSA'nın birim dürtü yanıtı	35
Şekil 3.13	$\Omega_{t0} = 8rad / s$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki BGF'nin (3.45) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.	36
Şekil 3.14	$\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ için çeşitli zamansal frekanslardaki BGF'nin (3.45) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.	36
Şekil 3.15	$\Omega_{t0} = 8rad / s$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki BGF'nin (3.49) eşitliğine ode45 uygulanması ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].	38
Şekil 3.16	$\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ için çeşitli zamansal frekanslardaki BGF'nin (3.49) eşitliğine ode45 uygulanması ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].	39
Şekil 4.1	2-boyutlu direnç devresi ile HSA gerçekleştirilmesi	43
Şekil 4.2	Shi tarafından verilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtre tasarımı [19]	44
Şekil 4.3	1-boyutlu zamansal filtrenin gerçekleştirilmesi [19]	45
Şekil 4.4	$\Omega_{t0} = 8rad / s$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin çıkışlarının gerçel kısmı. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.	47
Şekil 4.5	$\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ için çeşitli zamansal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin çıkışlarının gerçel kısmı. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.	48

Şekil 4.6	Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ olan ve ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik-frekans yanıtı.....	51
Şekil 4.7	Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ olan ve ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik-frekans yanıtı.....	52
Şekil 4.8	Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ olan ve ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik-frekans yanıtı.....	52
Şekil 4.9	$\Omega_{t0} = 8rad / s$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile elde edilen çıkışlarının gerçel kısmı. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.....	53
Şekil 4.10	$\Omega_{t0} = 8rad / s$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile elde edilen çıkışlarının sanal kısmı. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.....	54
Şekil 4.11	$\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ için çeşitli zamansal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile elde edilen çıkışlarının gerçel kısmı. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.	55
Şekil 4.12	$\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ için çeşitli zamansal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile elde edilen çıkışlarının sanal kısmı. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.	56
Şekil 4.13	Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı.....	60
Şekil 4.14	Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı.....	61
Şekil 4.15	Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı.....	61
Şekil 4.16	Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı	63
Şekil 4.17	Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı.....	64

Şekil 4.18	Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı.....	64
Şekil 5.1	3-boyutlu uzay-zamansal AGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	77
Şekil 5.2	3-boyutlu uzay-zamansal AGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	77
Şekil 5.3	3-boyutlu uzay-zamansal AGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	78
Şekil 5.4	3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal YGF'nin genlik-frekans yanıtı	80
Şekil 5.5	3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal BGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	81
Şekil 5.6	3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal BGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	82
Şekil 5.7	3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal BGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	82
Şekil 5.8	3-boyutlu uzay-zamansal YGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	84
Şekil 5.9	3-boyutlu zamansal YGF ve uzamsal AGF'nin genlik-frekans yanıtı	86
Şekil 5.10	3-boyutlu zamansal YGF ve uzamsal BGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	87
Şekil 5.11	3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	89
Şekil 5.12	3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	89
Şekil 5.13	3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	90
Şekil 5.14	3-boyutlu zamansal BGF ve uzamsal AGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	92
Şekil 5.15	3-boyutlu zamansal BGF ve uzamsal YGF'nin genlik-frekans yanıtı.....	93

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3.1 İterasyon başına düşen işlem yükü [24].....	25
Çizelge 3.2 ZTHSA eşitliği ve türevleri [24]	42
Çizelge 4.1 Çeşitli uzamsal frekanslar ve $\Omega_{i0} = 8rad / s$ için üç filtre tipinin gerçel çıkışının genlik değerleri.....	57
Çizelge 4.2 Çeşitli zamansal frekanslar ve $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 1rad / pix$ için üç filtre tipinin gerçel çıkışının genlik değerleri	57
Çizelge 5.1 1-boyutlu zamansal filtre frekans dönüşümleri	68
Çizelge 5.2 2-boyutlu uzamsal filtrelerin HSA şablonları [14, 20]	75

ZAMAN-TÜREVLİ HÜCRESEL SİNİR AĞLARI VE UYGULAMALARI

Oğuzhan YAVUZ

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vedat TAVŞANOĞLU

Biyolojik organizmalar yüksek miktarda veriyi gerçek-zamanlı olarak işlemekte uzmanlaşmış iken bilgisayarda aynı işlemleri yapmak bilgisayarların nokta işlemci yapısından dolayı oldukça zordur. Bu nedenle bilgisayarda görme çalışmalarında biyolojik yapılardan esinlenilerek makineler geliştirilmesi yolunda çalışılmıştır. Bu görme makineleri retinadakine benzer temel düşük seviyeli özellik algılayıcılarına ihtiyaç duymaktadır. Bu algılayıcılar ölçek, yön, hız gibi yerel görüntü özelliklerini ölçmektedir. Az sayıda bağlantıya sahip aktif dirençsel yayılma ağları olarak adlandırılan modelin bu temel seviyeli özellik algılayıcıların gerçekleştirilmesinde ortak bir yapı sunduğu literatürde gösterilmiştir.

Hücresel sinir ağları (HSA) hücre olarak adlandırılan ve yalnızca en yakın komşularıyla haberleşen temel işlem birimlerinin uzayda düzgün dizilmesiyle oluşan bir ağ yapısıdır. HSA yapısı hem biyolojik organizmalara çok benzer bir yapıdadır hem de hücrelerin sadece en yakın komşularıyla bağlantılı olması ve her bir hücre için bağlantı ağırlıklarının genellikle konumla değişmemesi gibi nedenlerden ötürü analog VLSI gerçekleştirme için çok uygundur.

Bu çalışmanın konusu HSA'nın genel hali olan ve literatürde yeni ortaya atılan zaman-türevli HSA (ZTHSA) yapısıdır. Öncelikle ZTHSA için önerilen ve ileri ve geri Euler yaklaşıklıklarının birlikte kullanılması ile elde edilen simülasyon yöntemi incelenmiştir. Bu yöntemin kullanılabilmesi için sağlanması gereken ve deneysel olarak belirlenen şartın ispatı verilmiştir. Bunlara ek olarak şu ana kadar literatürde sadece 3-boyutlu band geçiren filtrenin (BGF) gerçekleştirilmesinde kullanılan ZTHSA ile 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin gerçekleştirilmesi yapılmıştır. 3-boyutlu BGF'nin tasarımında

kullanılan değişkenlerin sayısının fazlalığı ve görevlerin belli olmamasından dolayı, 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtenin ZTHSA ile tasarımı 3-boyutlu BGF'nin tasarımına göre daha kolaydır. Ayrıca 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile tasarımı için kullanılan yöntem ile diğer 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin ZTHSA tasarımının literatürde var olan şablonlar kullanılarak kolaylıkla yapılabileceği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hücresel sinir ağları, zaman-türevli hücresel sinir ağı, 3-boyutlu uzay-zamansal filtreler, Gabor-tipi filtre

ABSTRACT

TIME-DERIVATIVE CELLULAR NEURAL NETWORKS AND THEIR APPLICATIONS

Oguzhan YAVUZ

Department of Electronics and Communications Engineering
PhD. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Vedat TAVSANOGLU

Biological organisms excel at processing large amount of data in real time whereas computers usually are not good at such tasks because of their point processor architecture. Thus a great deal of effort has been spent on the development of machines inspired by biological structures in computer vision studies. Such vision machines require the simple low-level feature detectors similar in that of the retina. The low-level feature detectors measure local image properties as scale, orientation, and velocity. It has been shown that active resistive diffusion networks with low connectivity offer a common framework for the implementation of the low-level feature detectors commonly used in vision.

Cellular Neural Networks (CNNs) consist of regular arrays of simple processing units that interact with only their nearest neighbors. The CNN architecture bears striking resemblance to aforementioned biological organisms and they are tailor-made for analog VLSI implementations because of their nearest neighbor connections and usually space invariant connection weights.

The scope of this thesis is time-derivative CNN (TDCNN) architecture which is the general case of CNN and has been introduced recently in literature. Firstly, the simulation method of TDCNN which combines forward and backward Euler approximations is examined. The empirical condition which must be met for the method is proved. In addition, the TDCNN structure, which has only been used for the realization of 3-D band-pass filter in literature so far, is employed in the realization of a 3-D spatio-temporal Gabor-type filter. The TDCNN realization of 3-D spatio-temporal Gabor-type filter is simpler and more straightforward than that of the 3-D band-pass filter, since there are many more variables using in the 3-D band-pass filter realization

and also their function and the process of tuning the filter are not clear. What is more, it is shown that the TDCNN realization of the other 3-D spatio-temporal filters could be easily done with the existing CNN templates in literature by using the method which is used for TDCNN realization of 3-D spatio-temporal Gabor-type filter.

Keywords: Cellular neural network, time-derivative cellular neural network, 3-D spatio-temporal filter, Gabor-type filter

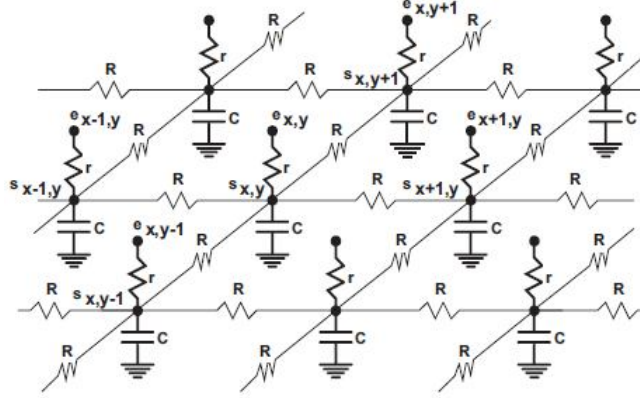
BÖLÜM 1

GİRİŞ

Günümüzde birçok üniversitede kedi, sinek, maymun ve tavşan gibi çeşitli hayvanların görsel algılama yapıları incelenmektedir. Aynı zamanda, bir silisyum yonganın destekleyeceği karmaşıklık derecesi de gün geçtikçe artmaktadır. Bu gelişmelerden ve incelemelerden yola çıkılarak canlı hücrelerin temel görsel veri işleme davranışını taklit eden, nöromorfik (nöron benzeri) tümleşik devreler olarak anılan bazı devreler geliştirilmiştir ve bu devreler artık birtakım ürünlerde kullanılabilecek düzeye erişmişlerdir. Uzun vadede, nöromorfik tasarım kuralları sayesinde makinelerin çevreleriyle klavye vb. birimlerle değil gerçek zamanlı, sağlam, hızlı, ucuz, küçük ve akıllı sensör yapıları aracılığıyla etkileşebileceği düşünülmektedir.

1.1 Literatür Özeti

İnsanlar ve diğer memeliler için görme sisteminden daha önemli bir sensör yapısı bulunmamaktadır. Biyolojik görme sisteminin ilk ve en iyi bilinen kısmı retinadır. Retina sadece bir görsel alıcı veya statik kamera olmanın ötesinde, sürekli giriş ve çok sayıda paralel çıkış kanalına sahip karmaşık bir özellik ön-işleyicisidir. Birbirleriyle etkileşim halindeki bu kanallardan gelen veriler yorumlanarak görüntü algılanır. Retinada kenar belirleme, ışık ve gürültü seviyesi ayarı, renk ön-işleme, hareket algılama gibi temel işlemler gerçekleştirilmektedir. Retinanın yatay hücrelerinin elektriksel olarak modellenmesi ilk defa C. Mead tarafından yapılmıştır. Şekil 1.1'de Mead ile Mahowald tarafından verilen retina modeli görülmektedir [1-2]. Burada yatay hücrelerin sinapsları dirençlerle, membran hücreleri de kondansatörlerle modellenmiştir. Elde edilen model dirençlerden ve kondansatörlerden oluşan dörtgensel bir ızgara yapısıdır. Bu yapı RC analog ağ olarak da adlandırılır. Biyolojik retinanın daha ayrıntılı özelliklerini içeren modeller Boahen [3] ve Andreou vd. [4-6] tarafından geliştirilmiştir.



Şekil 1.1 Yatay hücre modeli (RC analog ağ) [2]

Retina modelinin gerçekleştirilmesinde hücresel sinir ağları (HSA) yaygın olarak kullanılmaktadır. Şekil 1.1'deki dirençsel ağ aynı zamanda bir HSA gerçekleştirilmesidir [7]. HSA, analog, doğrusal olmayan ve dinamik yapıya işlemcilerin birbirlerine bağlanmasından oluşan Hopfield Sinir Ağlarının özel bir halidir. HSA'da her bir hücre yalnızca en yakın komşu hücrelere doğrudan bağlıdır. Buna “yerel bağlantı özelliği” denir. Doğasından gelen paralel işlem yeteneği sayesinde HSA görüntü işleme uygulamalarında çok yüksek hızlara erişebilmektedir. Konumla değişmeyen HSA'da ise her bir hücrenin komşularına bağlılık katsayıları her hücre için aynı olduğundan bu tür HSA'lar yerel olarak kendilerini yineleyen bir yapıya sahiptir [8].

Şekil 1.1'de verilen ve lineer bir HSA gerçekleyen devreye düğümler arasında türevli ilişki oluşturacak kondansatörlü bağlantıların eklenmesiyle daha geniş kapsamlı uzay-zamansal filtrelerin gerçekleştirilebileceği gösterilmiştir [9-13]. Komşu hücreler arasında türev bağlantılarına sahip olan zaman-türevli HSA (ZTHSA) ile lineer HSA'ların modelleyemediği çeşitli filtre yapılarını gerçekleştirmek mümkündür. Literatürdeki tek ZTHSA uygulaması Ip vd. tarafından sunulan hem zamanda hem uzayda filtrelemenin yapıldığı 3-boyutlu uzay-zamansal band geçiren filtre (BGF) uygulamasıdır. Bu filtrenin simülasyonu SIMULINK blok diyagramları kullanılarak yapılmıştır [9-10]. Kullanılan yöntem çok fazla işlem gerektirmekte ve tasarım esnasında hatalara açıktır. Tural-Polat vd. ZTHSA'nın simülasyonunu SIMULINK'e göre çok daha hızlı yapan ve ileri ile geri Euler yaklaşıklıklarının kombinasyonu olan yeni bir yöntem sunmuştur [14-15]. Ancak bu yöntemin ZTHSA'ya uygulanması için giriş görüntüsünün her çerçevesi en az 3 iterasyon boyunca sabit tutulmalıdır. Bu zaman

şartı bu yöntemi ortaya atanlar tarafından gözlem ile belirlenmiş ve bu şartın nedeni verilmemiştir [14-15].

Birçok çalışmada [16-18] kullanılmış olan 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtreyi HSA ile gerçekleştirilebileceği detayları ile veren Shi'dir [19]. Shi, 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu ile 1-boyutlu zamansal BGF'nin transfer fonksiyonunu çarparak 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonunun elde edilebileceğini belirtmiştir. Bu transfer fonksiyonları alçak geçiren filtre (AGF)'lerin transfer fonksiyonlarının frekansta ötelenmesi ile elde edilmiştir. Ayrıca, her iki filtrenin devrelerini birbirine kaskad bağlayarak 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin tasarımını verilmiştir. Giriş görüntüsü öncelikle 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtreye uygulanmakta, bu filtrenin çıkışı 1-boyutlu zamansal BGF'den geçirilmektedir. 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin devresi, video çerçevelerinin geliş süresinden çok daha hızlı sonuca yakınsamaktadır. Başka bir deyişle 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtre, 1-boyutlu zamansal BGF'den önce işlemini gerçeklemektedir. Böylelikle giriş hem zamanda hem uzayda işlenebilmektedir [19]. Ancak önerilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin sadece HSA ve HSA türevi yapılar kullanılarak tasarımı verilmemiştir.

Tavşanoğlu ve Tural-Polat 1-boyutlu zamansal analog filtrelerin transfer fonksiyonlarından esinlenerek 2-boyutlu uzamsal filtrelerin sürekli-uzay transfer fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Bu transfer fonksiyonlarından diferansiyel denklemleri türetilip bu diferansiyel denklemleri ayrıştırarak bu filtrelerin HSA ile gerçekleştirilebileceğini göstermişlerdir [14, 20]. Ancak 1-boyutlu zamansal analog filtreler için tanımlı olan frekans dönüşümleri, bu 2-boyutlu uzamsal filtreler için tanımlanmamıştır.

1.2 Tezin Amacı

Tural-Polat vd. tarafından ortaya atılan, ileri ve geri Euler yaklaşıklıklarının kombinasyonu olan ZTHSA simülasyon yöntemi [15] için gözlemsel ve ispatsız verilen zaman şartının nedeninin ve ispatının verilmesi, bu zaman şartının nedeni belirlendikten sonra bu yöntemin her türlü 1. türevli ZTHSA uygulamasının simülasyonunda kullanılabilecek şekilde genelleştirilmesi amaçlanmıştır. Ayrıca önerilen yöntemin, 2. mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümünü elde ettiği ve bu çözümün 1.

mertebeden bir diferansiyel denklem olan ZTHSA'nın çözümüne karşılık geldiğinin gösterilmesi tezin diğer bir amacıdır.

Bu çalışmanın bir diğer amacı, Shi [19] 'nin verdiği 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu ile 1. türevli ZTHSA'nın transfer fonksiyonu arasındaki ilişki verildikten sonra bu filtrenin ZTHSA ile tasarımının verilmesidir. Bunlara ek olarak 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile tasarımında kullanılan yöntem ile diğer 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin ZTHSA ile gerçekleştirilebileceği gösterilecektir. Bu 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin transfer fonksiyonlarını frekans dönüşümleri ile elde etmek için 2-boyutlu uzamsal frekans dönüşümlerinin tanımlanması çalışmanın bir diğer amacıdır.

1.3 Orijinal Katkı

Bu çalışmanın ana özgün katkısı Tural-Polat vd. önerdiği ZTHSA simülasyon yönteminin [14-15] geliştirilmesi ve ileri analizlerin verilmesidir. İleri ve geri Euler yaklaşıklarının kombinasyonu olan bu yöntem ile ZTHSA'yı simule etmek için uyulması gereken zaman şartının nedeninin ve ispatının verilmesi, bu zaman şartının nedeni belirlendikten sonra bu yöntemin her türlü 1. türevli ZTHSA uygulamasının simülasyonu için kullanılacak şekilde genelleştirilmesi bu çalışmanın özgün değerleridir. Diğer özgün katkı ise bu yöntem için belirtilen zaman şartı sağlandığı takdirde 2. mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümü 1. mertebeden bir diferansiyel denklem olan ZTHSA'nın çözümüne denk düştüğünün gösterilmesidir.

Bu çalışmanın başka bir özgün katkısı ise 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA tasarımının verilmesidir. Burada, Shi [19]'nin önerdiği 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu ile 1. türevli ZTHSA'nın 3-boyutlu transfer fonksiyonu arasındaki ilişki verildikten sonra 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile tasarımı 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin HSA şablonları kullanılarak elde edilmiştir.

Son olarak 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin ZTHSA tasarımlarının verilmesi bu çalışmanın bir diğer özgün katkısıdır. Bu filtrelerin sürekli-uzay sürekli-zaman transfer fonksiyonları frekans dönüşümü ile elde edilmiştir. Bundan dolayı 2-boyutlu filtre frekans dönüşümlerinin verilmesi bu çalışmanın diğer bir literatüre katkısıdır.

Bu çalışma 6 bölümden oluşmaktadır. Bölüm 2’de sonraki bölümlere hazırlık olması için genel olarak HSA hakkında bilgiler verilmiştir. Bölüm 3’te Tural-Polat ve Tavşanoğlu tarafından ortaya atılan ZTHSA simülasyon yönteminin[14,15] analizleri bulunmaktadır. Bölüm 4’te Shi tarafından önerilen 3-boyutlu Gabor-tipi filtrenin [19] ZTHSA ile gerçekleştirilmesi anlatılmıştır. Bölüm 5’te ise Bölüm 4’te verilen 3-boyutlu Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile gerçekleştirilmesinden esinlenilerek 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin ZTHSA ile tasarımı gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde 2-boyutlu uzamsal frekans dönüşümleri verilmiştir. Son bölümde sonuçlar ve ilerideki çalışmalar yer almaktadır.

BÖLÜM 2

HÜCRESEL SİNİR AĞLARI

HSA, L. O. Chua ve L. Yang tarafından 1988’de ortaya atılmıştır [21–22]. HSA, her biri birbiriyle aynı özellikteki ‘hücre’ olarak adlandırılan işlem birimlerinin N -boyutlu uzayda düzgün dizilmesiyle oluşmuş dinamik bir ağıdır. Bu hücreler iki temel özelliğe sahiptir; (i) bağlantılar sonlu bir r yarıçapı içinde yereldir, (ii) tüm durum değişkenleri sürekli değerlidir. Hücrelerin sadece en yakın komşularıyla sınırlı sayıda bağlantısının olması önemli bir sınırlama değildir, çünkü bir hücredeki bilgi hücreler arası bağlantılar ile zamanla global olarak yayılabilmektedir.

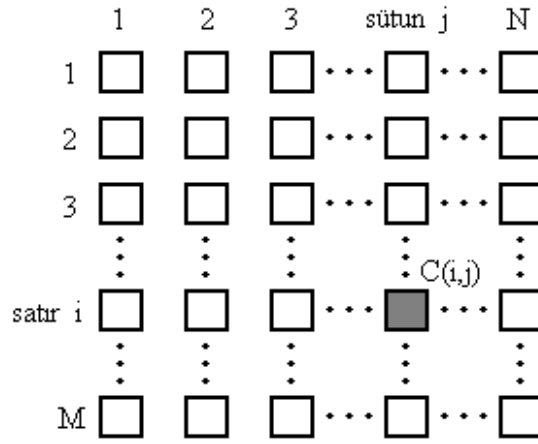
Yapay sinir ağlarında tipik olarak işlem birimlerinin arasında tam bağlantı vardır. Bundan dolayı devre gerçekleştirmesinde bu ara bağlantıların yapılması ve bağlantı ağırlıklarının saklanması için geniş bir tümdevre alanı gerekmektedir. Buna karşılık HSA yapısının yerel bağlantı özelliği sayesinde gereken alan oldukça küçülmekte ve dolayısıyla aynı alanda daha büyük ağ yapısının gerçekleştirilmesine olanak sağlanmaktadır. Buna ek olarak konumdan bağımsız HSA’nın her hücresinin bağlantı ağırlıkları aynı olduğundan devre tasarımı ve ölçeklenmesi kolaylaşmaktadır. Bu özellikleri sayesinde HSA, analog VLSI teknolojisi ile gerçeklemeye çok uygundur ki bu da yüksek hızlı görüntü işleme donanımlarının gerçekleştirilmesi için çok önemlidir.

Görüntü işleme uygulamalarında HSA yapısındaki her bir hücre görüntünün bir pikseline karşı düşmektedir, dolayısıyla HSA’nın yapısal paralelliği işleme hızını oldukça arttırmaktadır. Ayrıca bu ağlar ayırık-uzay, sürekli-zaman, sürekli-durum sistemleri olduklarından gerçek zamanlı görüntü işlemeye uygundur.

Bu bölümün amacı HSA yapısını tanıtmak, temel kavramlarını ve matematiksel modelini ortaya koyarak sonraki bölümlerde incelenen HSA ile gerçekleştirilen uzamsal ve uzay-zamansal filtre yapıları için temel oluşturmaktır.

2.1 Standart HSA Yapısı

Standart HSA birbirinin aynısı olan ve hücre olarak adlandırılan devre parçalarının uzayda düzgün bir biçimde dizilmesinden oluşan bir ağ yapısıdır. Her bir hücre sadece en yakın komşu hücreleriyle haberleşmektedir [21]. Birbirine doğrudan bağlı olmayan hücreler de her bir hücrenin komşu hücrelerine bağlı olması nedeniyle belli bir süre sonra birbirini dolaylı olarak etkileyebilmektedir. Bir $M \times N$ HSA, M satır ve N sütundan oluşan iki boyutlu bir dizidir ve i . satır j . sütundaki hücre $C(i,j)$ hücresi olarak adlandırılır. Şekil 2.1’de dörtgensel olarak dizilmiş ızgara yapısı görülmektedir [8].



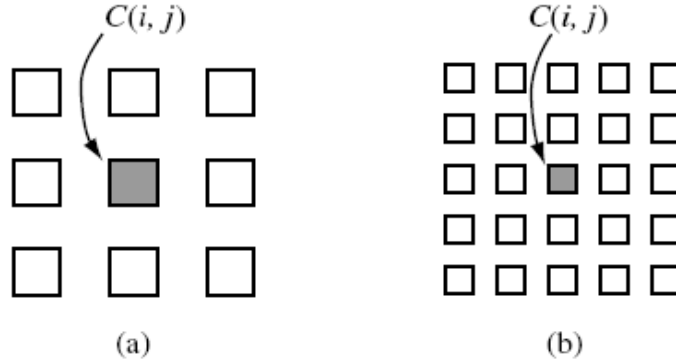
Şekil 2.1 Dörtgensel HSA yapısı [8]

Daha yüksek boyutlu veya dörtgensel olmayan diğer düzgün geometrik ızgaralı (üçgensel veya altıgensel) HSA tanımları yapılmıştır. Ancak görüntü işleme uygulamaları için dörtgensel dizilimde hücreler işlenecek görüntüdeki piksellere birebir karşı düştüğünden bu tezde iki boyutlu ve dörtgensel dizilmiş hücre yapısı üzerinde durulacaktır.

Bir HSA’da bir hücrenin r -komşuluklu olması o hücrenin her yönde etrafındaki r tane yan komşu hücreye bağlı olduğunu ifade eder. Başka bir deyişle r , hücrenin bağlantı derecesini temsil eder. Bir $M \times N$ HSA’da $C(i,j)$ hücresinin “ r -komşuluğu” şu şekilde tanımlanır [8]:

$$S_r(i, j) = \{C(k, l) \mid \max\{|k - i|, |l - j|\} \leq r, 1 \leq k \leq M, 1 \leq l \leq N\} \quad (2.1)$$

Eşitlik (2.1)'deki r , komşuluk yarıçapını gösteren pozitif bir tam sayıdır. Genellikle “ r -komşuluk” “ $(2r+1) \times (2r+1)$ komşuluk” olarak da adlandırılır. Şekil 2.2’de verildiği gibi $r = 1$ komşuluk aynı zamanda 3×3 komşuluk, $r = 2$ ise 5×5 komşuluk olarak da anılır.



Şekil 2.2 (a) $r = 1$ (3x3 komşuluk) (b) $r = 2$ (5x5 komşuluk) [8]

2.2 Standart HSA Denklemleri

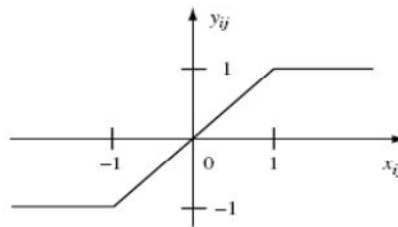
Standart HSA yapısında her bir $C(i,j)$ hücresi matematiksel olarak şu şekilde tanımlanır [8]:

$$\dot{x}(i,j) = -x(i,j) + \sum_{C(k,l) \in S_r(i,j)} A(i,j;k,l)y(i,j) + \sum_{C(k,l) \in S_r(i,j)} B(i,j;k,l)u(i,j) + z(i,j) \quad (2.2)$$

Burada $C(i,j)$ hücresi için $x(i,j)$ durum, $y(i,j)$ çıkış, $u(i,j)$ giriş ve $z(i,j)$ eşik değeri olarak adlandırılır. A ve B sırasıyla geri besleme ve ileri besleme sinaptik ağırlıkları veya şablon değerleridir. Çıkış,

$$y(i,j) = f(x(i,j)) = \frac{1}{2}(|x(i,j)+1| - |x(i,j)-1|) \quad (2.3)$$

ile elde edilir [8]. Eşitlik (2.3), standart nonlineerlik olarak bilinir. $y(i,j) = f(x(i,j))$ değişimi Şekil 2.3’te verilmektedir.



Şekil 2.3 Standart çıkış nonlineerliği

Sınır koşulları $M \times N$ ızgaranın kenarlarındaki hücrelerin $S_r(i, j)$ etki alanı içindeki $y(i, j)$ ve $u(i, j)$ değerlerini belirleyen kurallardır. Başlangıç koşulları genellikle

$$x_0(i, j) = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

şeklinde alınır. $u(i, j)$ girişi genellikle görüntünün piksel parlaklık değeridir ve $-1 \leq u(i, j) \leq +1$ 'dir. -1 siyah, +1 beyaz renge karşı düşer. Durgun bir görüntü için $u(i, j)$ her t anında sabittir. Hareketli görüntüde ise $u_t(i, j)$ t zamanın fonksiyonu olarak değişir. En genel durumda $A(i, j; k, l)$ $B(i, j; k, l)$ ve $z(i, j)$ zamanın ve (i, j) konumunun bir fonksiyonudur ancak birçok durumda zamandan ve konumdan bağımsız olarak alınır.

Konumdan bağımsız HSA'da adından da anlaşılacağı gibi $A(i, j; k, l)$, $B(i, j; k, l)$ ve $z(i, j)$ her (i, j) konumu için sabittir ve her hücre için yazılan matematiksel eşitlik aynıdır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \sum_{C(k, l) \in S_r(i, j)} A(i, j; k, l) y(i, j) &= \sum_{|k-i| \leq r} \sum_{|l-j| \leq r} A(i, j) y(i+k, j+l) \\ \sum_{C(k, l) \in S_r(i, j)} B(i, j; k, l) u(i, j) &= \sum_{|k-i| \leq r} \sum_{|l-j| \leq r} B(k, j) u(i+k, j+l) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$z_{i, j} = z$$

olur [8]. Konumdan bağımsız ve 1-komşuluklu bir HSA'da $C(i, j)$ hücresinin etki alanı

$C(i-1, j-1)$	$C(i-1, j)$	$C(i-1, j+1)$
$C(i, j-1)$	$C(i, j)$	$C(i, j+1)$
$C(i+1, j-1)$	$C(i+1, j)$	$C(i+1, j+1)$

şeklindedir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{-1,-1} & a_{-1,0} & a_{-1,1} \\ a_{0,-1} & a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,-1} & a_{1,0} & a_{1,1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{-1,-1} & b_{-1,0} & b_{-1,1} \\ b_{0,-1} & b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,-1} & b_{1,0} & b_{1,1} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

matrislerine, sırasıyla 1-komşuluklu geri besleme ve ileri besleme şablonları denir [8].

Ayrıca

$$Y(i, j) = \begin{bmatrix} y(i-1, j-1) & y(i-1, j) & y(i-1, j+1) \\ y(i, j-1) & y(i, j) & y(i, j+1) \\ y(i+1, j-1) & y(i+1, j) & y(i+1, j+1) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

matrisi (i, j) hücresi ve 1-komşuluklu çevresine ilişkin çıkış görüntüsü;

$$U(i, j) = \begin{bmatrix} u(i-1, j-1) & u(i-1, j) & u(i-1, j+1) \\ u(i, j-1) & u(i, j) & u(i, j+1) \\ u(i+1, j-1) & u(i+1, j) & u(i+1, j+1) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

ise, (i, j) hücresi ve 1-komşuluklu çevresine ilişkin giriş görüntüsüdür.

A ve B şablonları konumdan bağımsız ise aynı şablon değerleri tüm görüntü boyunca görüntü üzerinde kaydırılarak çıkış görüntüsü elde edildiğinden bu şablonlar klonlayıcı şablonlar olarak da adlandırılır [8].

$C(i, j)$ hücresi için A ve B şablonlarının katkılarını inceleyelim.

$$\begin{aligned} \sum_{C(k, l) \in S_1(i, j)} A(i, j; k, l) y(k, l) &= a_{-1, -1} y(i-1, j-1) + a_{-1, 0} y(i-1, j) + a_{-1, 1} y(i-1, j+1) \\ &\quad + a_{0, -1} y(i, j-1) + a_{0, 0} y(i, j) + a_{0, 1} y(i, j+1) \\ &\quad + a_{1, -1} y(i+1, j-1) + a_{1, 0} y(i+1, j) + a_{1, 1} y(i+1, j+1) \\ &= \sum_{k=-1}^{+1} \sum_{l=-1}^{+1} a_{k, l} y(i+k, j+l) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\sum_{C(k, l) \in S_1(i, j)} A(i, j; k, l) y(k, l) = \begin{bmatrix} a_{-1, -1} & a_{-1, 0} & a_{-1, 1} \\ a_{0, -1} & a_{0, 0} & a_{0, 1} \\ a_{1, -1} & a_{1, 0} & a_{1, 1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y(i-1, j-1) & y(i-1, j) & y(i-1, j+1) \\ y(i, j-1) & y(i, j) & y(i, j+1) \\ y(i+1, j-1) & y(i+1, j) & y(i+1, j+1) \end{bmatrix} = A \otimes Y(i, j) \quad (2.10)$$

Burada $\otimes$ işlemi eleman değerlerinin karşılıklı çarpımlarının toplamı anlamında şablon nokta çarpımı olarak adlandırılır. Ayrıca,

$$\sum_{C(k, l) \in S_1(i, j)} B(i, j; k, l) u(k, l) = \begin{bmatrix} b_{-1, -1} & b_{-1, 0} & b_{-1, 1} \\ b_{0, -1} & b_{0, 0} & b_{0, 1} \\ b_{1, -1} & b_{1, 0} & b_{1, 1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} u(i-1, j-1) & u(i-1, j) & u(i-1, j+1) \\ u(i, j-1) & u(i, j) & u(i, j+1) \\ u(i+1, j-1) & u(i+1, j) & u(i+1, j+1) \end{bmatrix} = B \otimes U(i, j) \quad (2.11)$$

olarak verilebilir. HSA durum denklemi genel olarak

$$\dot{x}(i, j) = -x(i, j) + A \otimes Y(i, j) + B \otimes U(i, j) + z(i, j) \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer A ve B şablonları simetrik ise şablon nokta çarpım işlemi konvolüsyon işlemi ile aynı olur.

Lineer HSA’da çıkış değişkeni durum değişkeninin doğrusal bir fonksiyonudur. HSA durum denkleminde $y(i, j) = x(i, j)$ ve $z(i, j) = 0$ alındığında HSA denklemi

$$\dot{x}(i, j) = A \otimes X(i, j) + B \otimes U(i, j) \quad (2.13)$$

olur . Burada,

$$X(i, j) = \begin{bmatrix} x(i-1, j-1) & x(i-1, j) & x(i-1, j+1) \\ x(i, j-1) & x(i, j) & x(i, j+1) \\ x(i+1, j-1) & x(i+1, j) & x(i+1, j+1) \end{bmatrix}$$

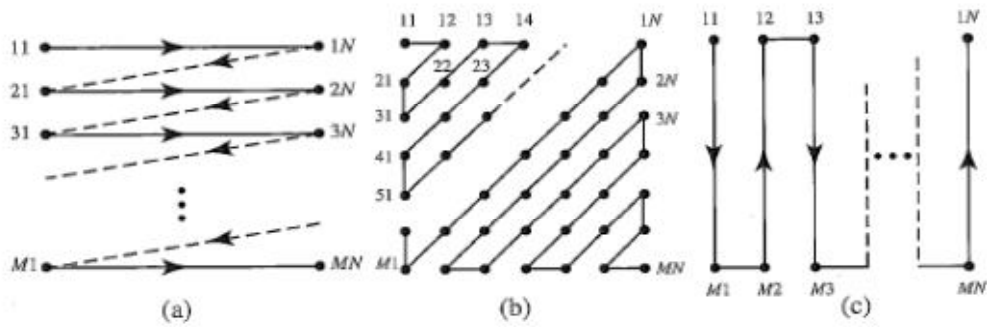
olarak tanımlanır.

2.3 HSA’nın Vektör-Matris Diferansiyel Denklemi

Diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için kullanılan teoremler ve sayısal teknikler için diferansiyel denklemler vektör-matris formunda ifade edilir. HSA denklemini vektör-matris formunda ifade etmek için kullanılan çeşitli sıralama şemaları mevcuttur. Bu şemaların en sık kullanılanları

- satır satır paketleme
- köşegensel paketleme
- sütun sütun paketleme

olarak ifade edilir. Bu paketleme şemaları Şekil 2.4’te gösterilmiştir [8].



Şekil 2.4 (a) satır satır paketleme, (b) köşegensel paketleme, (c) sütun sütun paketleme [8]

HSA’nın her (i, j) hücresi için yazılmış toplam $M \times N$ tane diferansiyel denklemden $(M \times N) \times 1$ boyutlu bir tane diferansiyel denklem elde edilecek şekilde değişkenler

yukarıdaki paketleme şemalarından herhangi biri kullanılarak vektörel formda sıralandığında

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{M \times N} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{M \times N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_{M \times N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{M \times N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \vdots \\ \hat{z}_{M \times N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} \quad (2.14)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{y} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \mathbf{z} \quad (2.15)$$

elde edilir [23-24]. Burada, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri $(M \times N) \times 1$ boyutludur ve sırasıyla durum, çıkış, giriş ve eşik vektörlerini göstermektedir. $\hat{\mathbf{A}}$ ve $\hat{\mathbf{B}}$ matrisleri $(M \times N) \times (M \times N)$ boyutludur ve sıfırdan farklı değerleri matrisin köşegeni ve civarında yerleşmiş şablon katsayılarından oluşan seyrek matrislerdir. Çoğu uygulamada bu

matrisler simetrik ve özdeğerleri gerçeldir. $A = \begin{bmatrix} a_{-1-1} & a_{-10} & a_{-11} \\ a_{0-1} & a_{00} & a_{01} \\ a_{1-1} & a_{10} & a_{11} \end{bmatrix}$ için $\hat{\mathbf{A}}$ genel yapısı

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \overbrace{a_{b_0} \ a_{b_1} \ 0 \ \dots \ 0}^N & a_{b_0} \ a_{b_1} \ 0 \ \dots \ 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} \ a_{b_1} \ \dots & a_{b_{-1}} \ a_{b_0} \ a_{b_1} \ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 \ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} \ \dots \ 0 & 0 \ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} \ \dots \ 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 \ \dots \ 0 \ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} & 0 \ \dots \ 0 \ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} & 0 & \dots & \vdots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} a_{a_0} \ a_{a_1} \ 0 \ \dots \ 0 & a_{b_0} \ a_{b_1} \ 0 \ \dots \ 0 & a_{b_0} \ a_{b_1} \ 0 \ \dots \ 0 & \dots & \vdots \\ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} \ a_{b_1} \ \dots & a_{b_{-1}} \ a_{b_0} \ a_{b_1} \ \dots & a_{b_{-1}} \ a_{b_0} \ a_{b_1} \ \dots & \dots & \vdots \\ 0 \ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} \ \dots \ 0 & 0 \ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} \ \dots \ 0 & 0 \ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} \ \dots \ 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \ \dots \ 0 \ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} & 0 \ \dots \ 0 \ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} & 0 \ \dots \ 0 \ a_{b_{-1}} \ a_{b_0} & \dots & \vdots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Şekil 2.5 $\hat{\mathbf{A}}$ ve $\hat{\mathbf{B}}$ matrislerinin genel yapısı [24]

şeklinde.

$M = N = 1000$ için $\hat{\mathbf{A}}$ ve $\hat{\mathbf{B}}$ matrislerinin boyutları $(M \times N) \times (M \times N) = 10^6 \times 10^6$ olur

2.4 HSA İle Lineer Görüntü İşleme

HSA ile Lineer görüntü işleme için $y(i, j) = x(i, j)$ ve $z(i, j) = 0$ olmalıdır. Bu durumda,

$$\dot{X}_t(i, j) = A \otimes X_t(i, j) + B \otimes U_t(i, j) \quad (2.16)$$

elde edilir. Şablonlar simetrik ise $\otimes$ işlemi yerine konvolüsyon işlemi kullanılabilir.

Eşitlik (2.16)'da bir (i, j) hücresinin durumunun türevi yalnızca (i, j) hücresinin durumuna değil, komşu durum değişkenlerine de bağlıdır. Bu durumda elde edilen $M \times N$ diferansiyel denklem birbiriyle bağlantılıdır ve bir hücrenin durumunun değişimine komşu hücrenin durumunun etkisini analiz etmek neredeyse imkânsızdır. Bu sorunu ortadan kaldırmak için (2.16) denkleminin ayrık-uzay Fourier dönüşümü (AUFD) alınabilir. Bu durumda,

$$\frac{d}{dt} \tilde{X}_t(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = \tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \tilde{X}_t(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) + \tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \tilde{U}_t(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \quad (2.17)$$

elde edilir [8]. Burada $\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ sırasıyla A ve B şablonlarının, $\tilde{X}_t(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{U}_t(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ durumların ve girişlerin AUFD'sini ifade etmektedir. Böylece her ω_x ve ω_y için elde edilen HSA diferansiyel denklemi frekansta bağılantısız hale gelir. Ayrıca $\tilde{X}_t(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$, $\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$, $\tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{U}_t(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ω_x ve ω_y 'ye göre 2π ile periyodiktir. Dolayısıyla $\tilde{X}_t(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ 'nin $-\pi \leq \omega_x \leq \pi$ ve $-\pi \leq \omega_y \leq \pi$ aralığında çözümünü bulmak yeterlidir [8].

Giriş görüntüsünün zamanla değişmediği kabul edilirse, $\tilde{U}_t(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = \tilde{U}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ olur. Eşitlik (2.17)'de verilen diferansiyel denkleminin çözümü $\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \neq 0$ için

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) &= e^{\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})t} \tilde{X}_0(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \\ &+ \frac{1}{\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \left(e^{\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})t} - 1 \right) \tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \tilde{U}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

olarak elde edilir [8]. Burada $\tilde{X}_0(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ başlangıç durumlarının AUFD'sini göstermektedir. Eğer $\text{Re}\left\{\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})\right\} < 0$ ise sistemin başlangıç koşullarından gelen sıfır-giriş çözümü $t \rightarrow \infty$ için sıfıra gider. Bu durumda lineer HSA filtresinin transfer fonksiyonu olan

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = -\frac{\tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \quad (2.19)$$

biçiminde elde edilir [8].

2.5 Sonuçlar

Bu bölümde HSA genel hatlarıyla incelenmiştir. HSA'da yapay sinir ağlarından farklı olarak hücreler arası bağlantılar yerel olup bu özellik HSA'nın VLSI ile gerçekleştirilmesini olanaklı kılmaktadır. Buna ek olarak konumdan bağımsız HSA'da her bir hücrenin komşu hücreleriyle bağlantı ağırlıkları aynıdır. Bu nedenle tüm ağı devre serimi için tek bir hücrenin tasarımının yapılması ve aynı yapının her hücre için tekrarlanması yeterli olacaktır. Böylece devre tasarımı ve ölçeklenmesi kolaylaşmaktadır.

Görüntü işleme uygulamalarında yapılan işlem genellikle görüntü pikselinin konumuna göre değişmediği için HSA topolojisi görüntü işleme uygulamalarında rahatlıkla kullanılabilir. Ayrıca görüntünün her bir pikseli HSA'daki bir hücreye birebir karşı düşmektedir ve bu yoğun paralel yapı sayısal bilgisayarlarla karşılaştırıldığında bir hız avantajı sunmaktadır. Yalnız B şablonu kullanarak HSA ile yapılan lineer görüntü işleme uzamsal FIR filtrelemeye karşı düşmektedir. A ve B şablonları ile yapılan lineer görüntü işleme ile nispeten küçük şablon boyutları ile bile keskin filtre karakteristikleri elde etmek mümkündür.

ZAMAN-TÜREVLİ HSA

Zaman-türevli HSA (ZTHSA) (Time-Derivative CNN, TDCNN) yapıları Bölüm 2'de incelenen HSA yapılarının daha genel bir halidir. İp vd. çeşitli çalışmalarında [9-13] lineer HSA ile gerçekleştirilemeyen BGF ve beynin görsel algı merkezi modeli gibi çeşitli 3-boyutlu uzay-zamansal transfer fonksiyonlarının ZTHSA ile gerçekleştirilebileceğini göstermiştir. ZTHSA devresinde lineer HSA devresine ek olarak komşu hücreler arasında türevli bağlantılar bulunmaktadır. Yapıya hücreler arası türevli bağlantıların eklenmesi durumunda daha genel uzay-zamansal filtrelerin gerçekleştirilebileceği belirtilmiş ve BGF örnekleri verilmiştir [9-13].

Genel ZTHSA denklemi

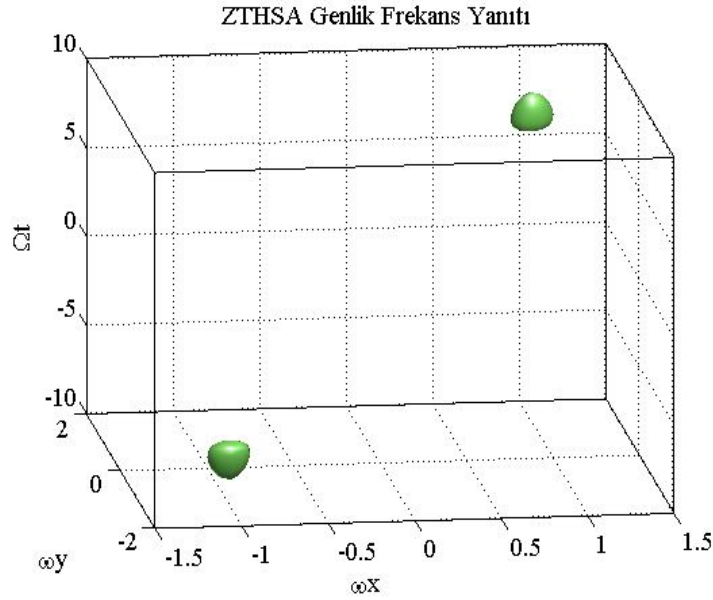
$$\begin{aligned} \frac{dv_t(i, j)}{dt} = & \sum_{k=-r}^r \sum_{l=-r}^r A(k, l) v_t(i+k, j+l) + \sum_{k=-r}^r \sum_{l=-r}^r B(k, l) u_t(i+k, j+l) \\ & + \sum_{q \in 1 \dots D} \left[\sum_{k=-r}^r \sum_{l=-r}^r A_q(k, l) \frac{d^q v_t(i+k, j+l)}{dt^q} + \sum_{k=-r}^r \sum_{l=-r}^r B_q(k, l) \frac{d^q u_t(i+k, j+l)}{dt^q} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

olarak verilmektedir. Burada (3.1) eşitliğindeki ilk üç terim lineer HSA denklemi ile aynıdır. A geri besleme klonlayıcı şablonu ve B ileri besleme klonlayıcı şablonudur. Ayrıca $A_q = a_q(k, l)_{-r \leq k, l \leq r}$ ve $B_q = b_q(k, l)_{-r \leq k, l \leq r}$ sırasıyla q . türev geri besleme ve ileri besleme klonlayıcı şablonları olarak adlandırılmıştır.

İp vd. [9-10] (3.2)'de verilen ve 1. türev bağlantıları kullanılması sonucunda elde edilen ZTHSA eşitliği ile 3-boyutlu uzay-zamansal BGF tasarımı yapmıştır.

$$\frac{dv_t(i, j)}{dt} = A \otimes V_t(i, j) + B \otimes U_t(i, j) + A_1 \otimes \frac{d}{dt} V_t(i, j) \quad (3.2)$$

Burada tasarımı yapılan filtre için iki komşuluklu başka bir deyişle Şekil 2.2b’de verilen 5x5’lik ZTHSA şablonları kullanılmıştır. Bu ZTHSA’nın ileri besleme, geri besleme ve birinci türev geri besleme şablonları [10,13]’de verilmektedir. Ayrıca Tural-Polat bu şablonlar üzerinde detaylı incelemeler yapmıştır [14-15]. Bu filtre hem zamanda hem de uzayda BGF’dir. Bundan dolayı genel HSA’nın girişleri durağan görüntü iken ZTHSA girişleri hareketli görüntüdür. Şu ana kadar ki tek ZTHSA uygulaması BGF tasarımı olduğu için aşağıdaki bölümlerde verilen ZTHSA simülasyonları [10,13,15]’de verilen şablonlar kullanılarak yapılmıştır. Bu filtre için genlik-frekans yanıtı Şekil 3.1’de verilmiştir [15]. Şekil 3.1’deki küreciklerin içinde kalan frekans aralığı filtrenin geçirme bandını, küreciklerin dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Buradan da görüleceği üzere tek katmanlı gerçel şablonlu 1. türevli ZTHSA denklemi ile uzay-zamansal BGF’ler elde edilebilir.

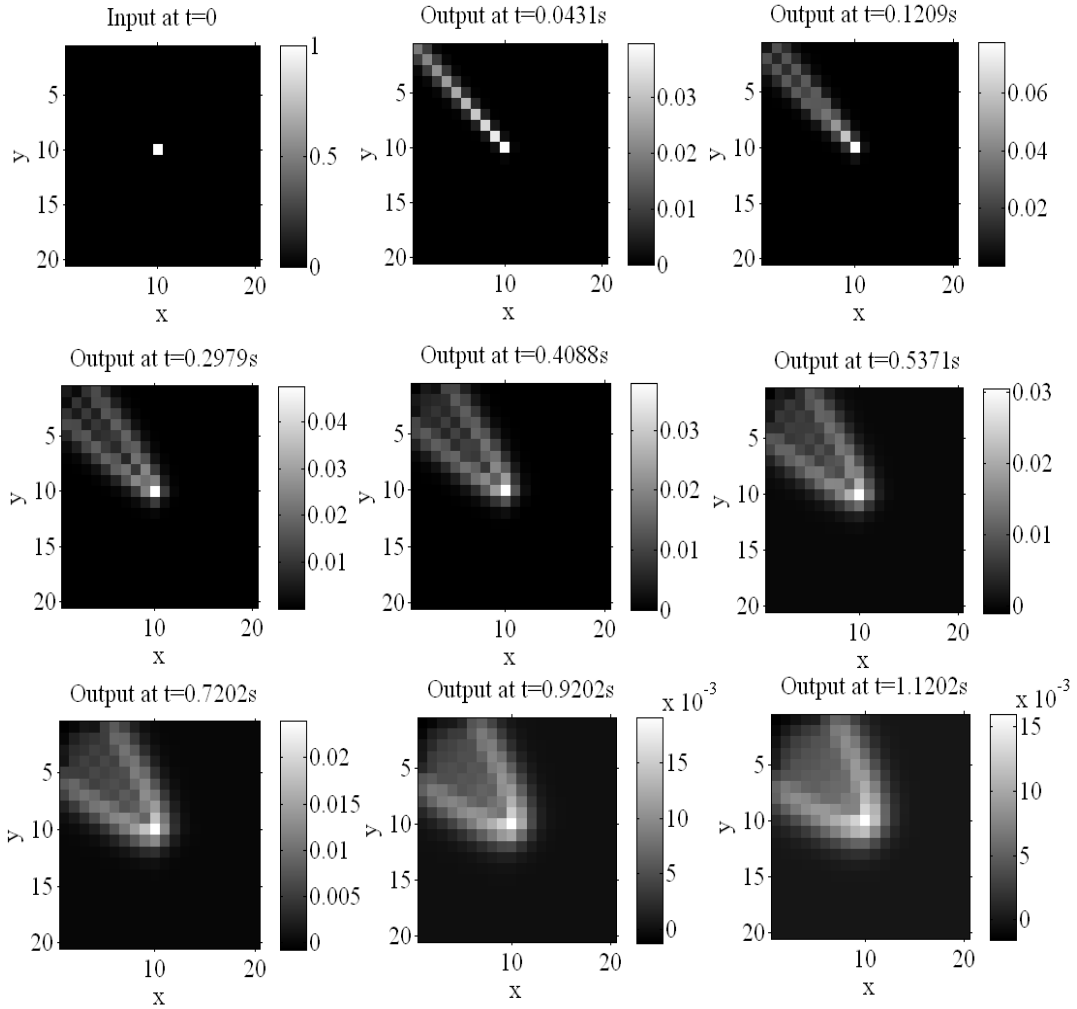


Şekil 3.1 ZTHSA genlik frekans yanıtı [15]

İp vd. 3-boyutlu uzay-zamansal BGF uygulaması için ZTHSA yapısının simülasyonunu MATLAB SIMULINK programı ile blok diyagramlar kullanarak yapmıştır [9-10]. Bu işlem oldukça karmaşıktır ve yapının hantallığı nedeniyle çok uzun zaman almaktadır [24]. Tural-Polat vd. ZTHSA için yeni bir simülasyon yöntemini [14-15] önerene kadar SIMULINK ZTHSA simülasyonu için kullanılan tek yöntemdi. Bundan dolayı SIMULINK sonuçlarını vermek ilerideki sonuçların kıyaslanması açısından faydalı

olacaktır. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ile verilen

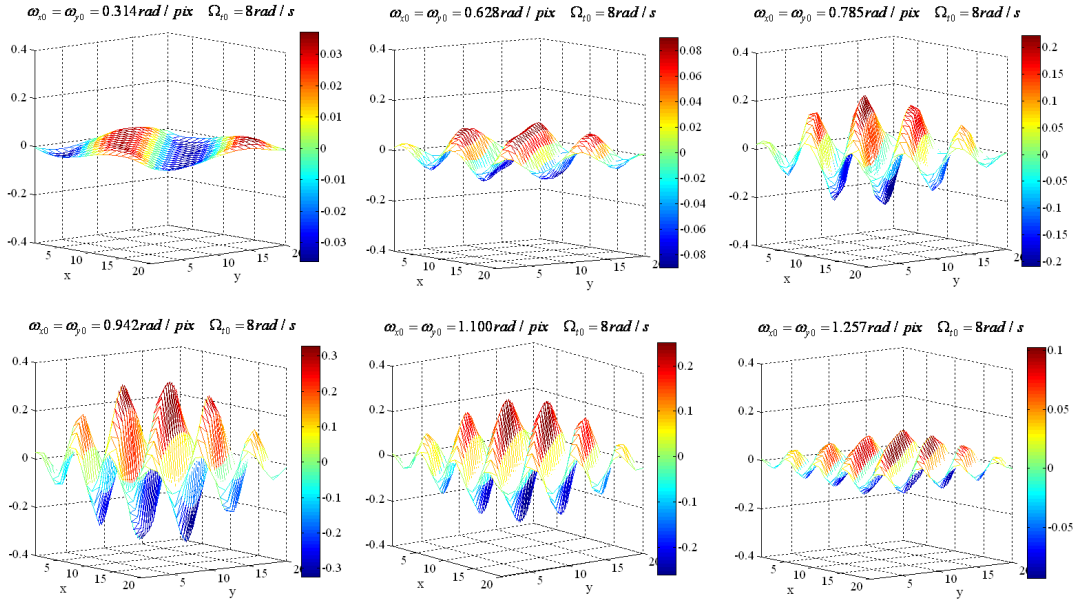
ZTHSA'nın birim dürtü yanıtı Şekil 3.2'de verilmiştir.



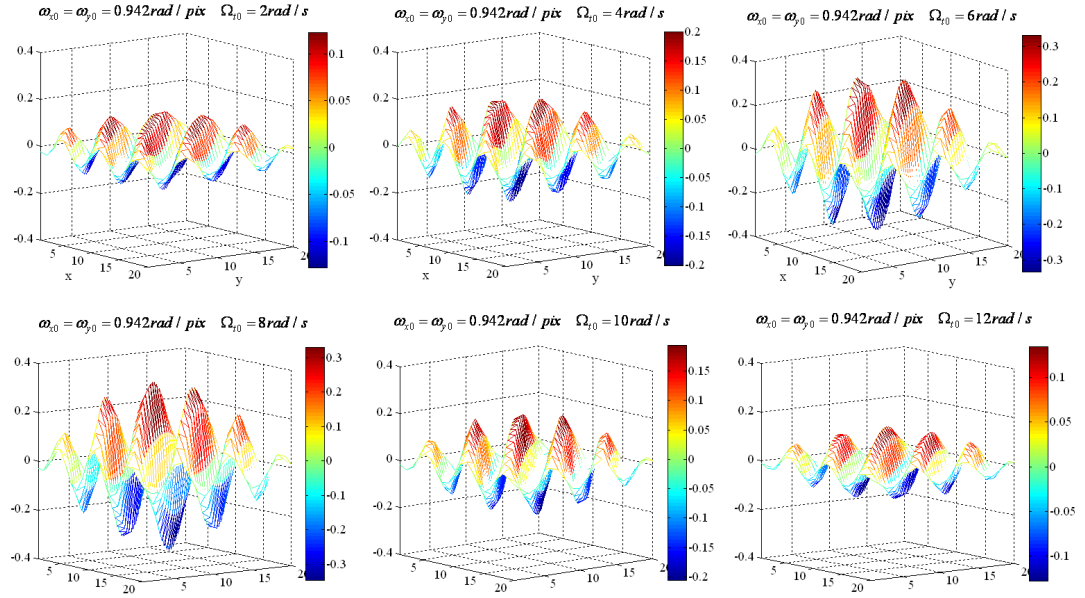
Şekil 3.2 ZTHSA'nın SIMULINK ile elde edilen birim dürtü yanıtı [24]

Şekil 3.1'de verilen ZTHSA'nın genlik-frekans yanıtında filtrenin merkez frekanslarının $\omega_{x0} \cong 1 \text{radyan / piksel}$, $\omega_{y0} \cong 1 \text{radyan / piksel}$ ve $\Omega_{t0} \cong 8 \text{radyan / s}$ civarında olduğu görülür. Dolayısıyla yalnız bu merkez frekansı civarındaki frekansa sahip girişler filtre çıkışında kuvvetlendirilmelidir. İp vd.'nin ZTHSA ile tasarladığı 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin çeşitli uzamsal ve zamansal frekanslı girişler için SIMULINK ile elde edilen sonuçları Şekil 3.3 ve 3.4'te verilmiştir. Bu örnekteki ZTHSA 20x20 boyutundadır. Şekillerden görüldüğü üzere, bu filtre $\Omega_{t0} = 8 \text{rad / s}$ ve

$\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad / pix}$ frekanslı sinüzoidal giriş için en yüksek genlikli çıkışı vermektedir.



Şekil 3.3 $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad / s}$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki BGF SIMULINK simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad / pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad / s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [14,24].



Şekil 3.4 $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad / pix}$ için çeşitli zamansal frekanslardaki BGF SIMULINK simülasyon sonuçları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad / pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad / s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [14,24].

Tural-Polat ve Tavşanoğlu [14-15] SIMULINK programının dezavantajlarından kurtulmak ve ZTHSA simülasyonunu daha az işlem ile yapmak için Şekil 2.4 (a)'da verilen tarama yönteminin kullanılmasıyla (3.3)'te verilen ZTHSA'nın vektör-matris eşitliğini elde etmişlerdir.

$$\frac{d\mathbf{v}_t}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_t + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_t + \hat{\mathbf{A}}_1 \frac{d\mathbf{v}_t}{dt} \quad (3.3)$$

Burada, A , B ve A_1 şablonlarından sırasıyla $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ ve $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisleri elde edilir. Bu matrislerin formu Şekil 2.5'te verilmiştir. Bu matrislerin her bir satırındaki elemanlar, ilgili şablonun elemanlarıdır. $M \times N$ 'lik bir ZTHSA için bu matrislerin boyutları $(M \times N) \times (M \times N)$ olmaktadır. Ayrıca $\mathbf{v}_t$ ve $\mathbf{u}_t$ vektörleri de $(M \times N) \times 1$ boyutundadır ve sırasıyla tüm hücrelerin durum ve giriş değerlerini içermektedir. Eşitlik (3.3)'ün sağındaki türev terimi ile solundaki türev terimi aynıdır. Bundan dolayı sağdaki türev terimi sola çekilebilir ve

$$(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1) \frac{d\mathbf{v}_t}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_t + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_t \quad (3.4)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_t}{dt} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} [\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_t + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_t] \quad (3.5)$$

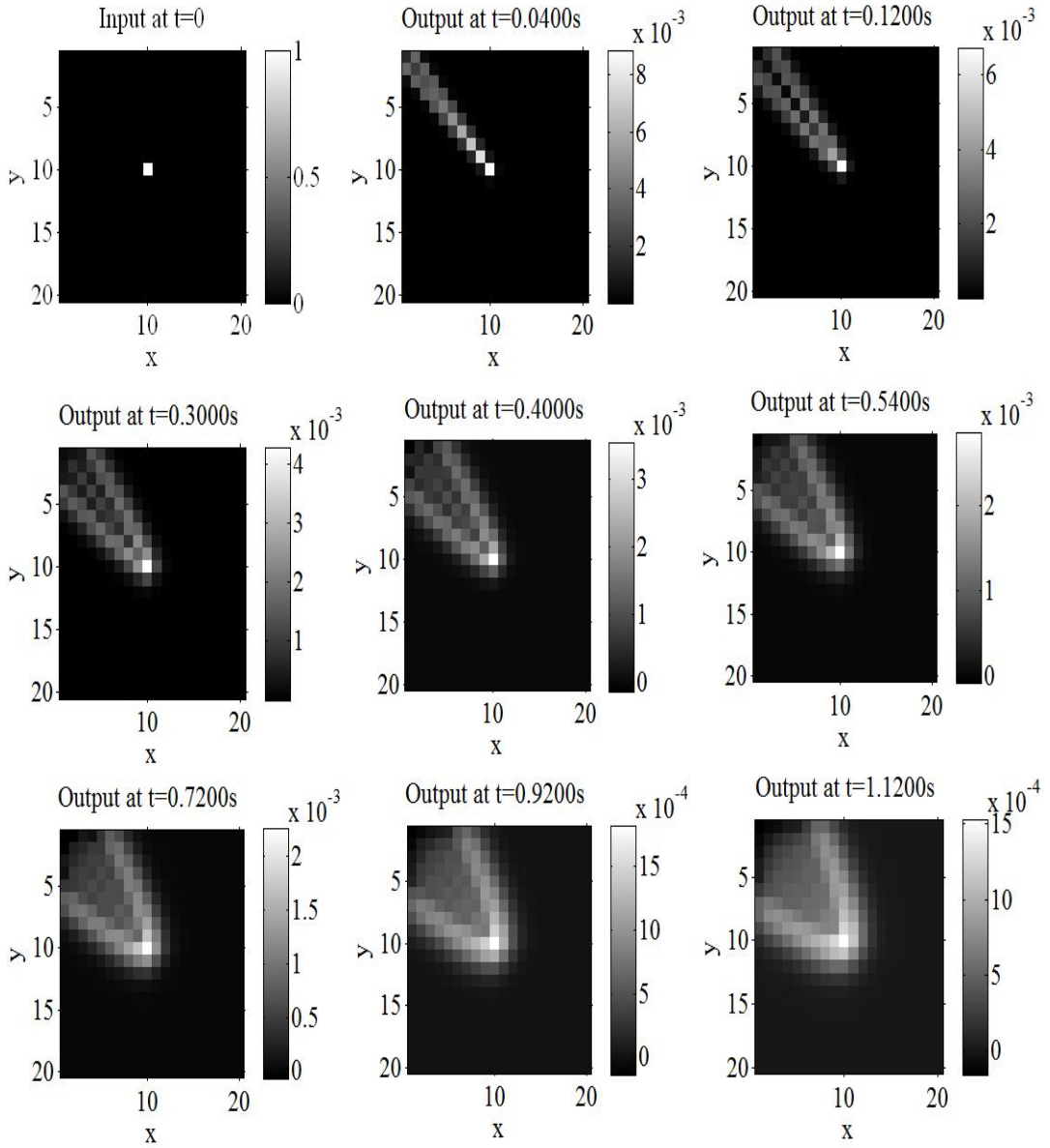
elde edilebilir. Burada $\mathbf{I}$ birim matrisi göstermektedir. Tural-Polat ve Tavşanoğlu, (3.5) eşitliğindeki türev terimine ileri Euler yaklaşıklığı uygulayarak (3.6)'da verilen fark denklemini elde etmişlerdir [14,23-24].

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + T_s (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} [\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k] \quad (3.6)$$

Eşitlik (3.6)'da verilen fark denkleminin iteratif çözümü yapılabilir. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ile verilen ZTHSA'nın (3.6)}$$

kullanılarak elde edilen birim dürtü yanıtı Şekil 3.5'te verilmiştir. Şekil 3.2'de verilen sonuç ile Şekil 3.5'te verilen sonucun uyumlu olduğu söylenebilir.



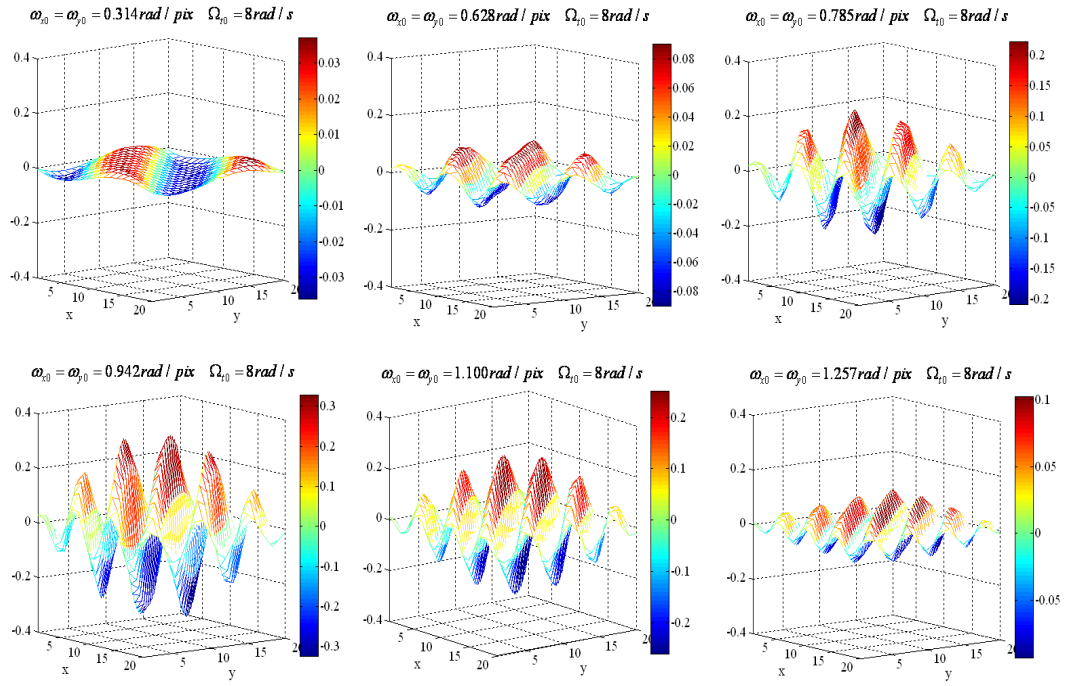
Şekil 3.5 ZTHSA'nın (3.6) kullanılarak elde edilen birim dürtü yanıtı [24]

ZTHSA'ya giriş olarak uygulanacak olan sinüzoidal giriş

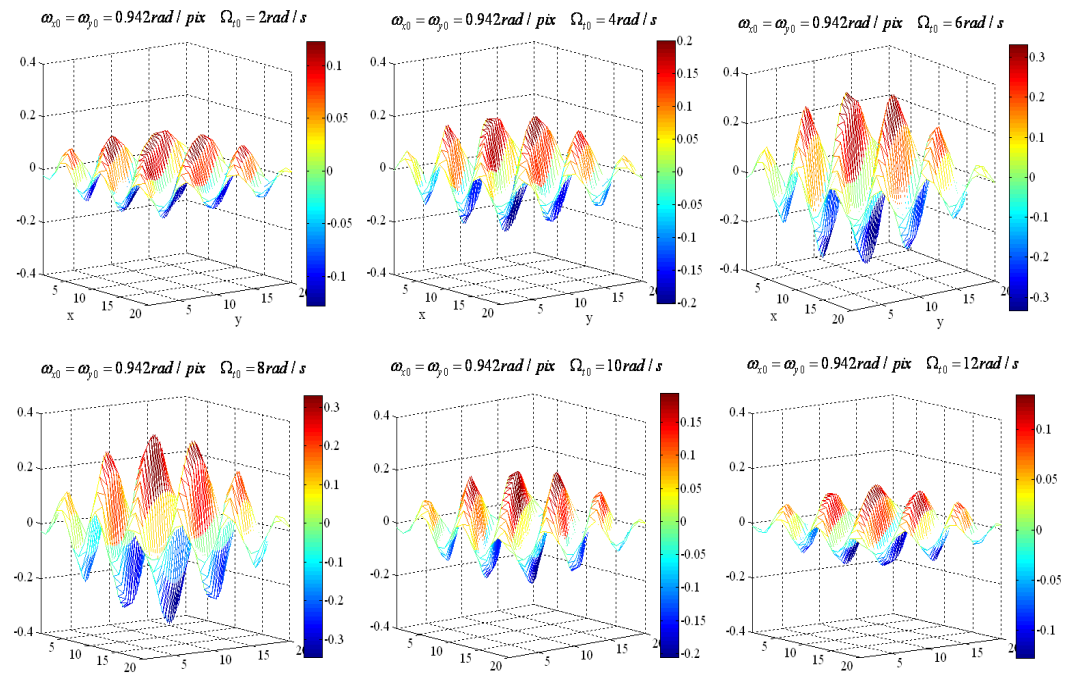
$$u_i(i, j) = \sin(\Omega_i t + \omega_m i + \omega_n j) \quad (3.7)$$

olarak alınmıştır.

Eşitlik (3.7) ile verilen giriş için (3.6) kullanılması ile elde edilen 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin çeşitli uzamsal frekanslı girişler için simülasyon sonuçları Şekil 3.6'da, çeşitli zamansal frekanslı girişler için simülasyon sonuçları Şekil 3.7'de verilmiştir.



Şekil 3.6 $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki BGF'nin (3.6) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].



Şekil 3.7 $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ için çeşitli zamansal frekanslardaki BGF'nin (3.6) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].

Şekillerden görüldüğü gibi (3.6)'nın kullanılmasıyla elde edilen ZTHSA simülasyon sonuçları SIMULINK sonuçları ile uyumludur. Eşitlik (3.6) ile 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin simülasyonunda hareketli görüntünün her çerçevesinin bir kere iterasyona girmesi, sonucun elde edilmesi için yeterlidir. Ancak vektör ve matrislerle işlem yapmak çok fazla hafıza gereksinimi doğurduğu için (3.6) kullanışlı değildir. Burada vektör-matris form matematiksel analizler için kullanılmıştır.

Eşitlik (3.2) ile verilen ZTHSA eşitliğindeki türevlere aynı yaklaşıklık yöntemi uygulandığı takdirde elde edilen fark denklemi nedensel değildir. Tural-Polat ve Tavşanoğlu bu soruna çare olarak (3.2)'nin sağındaki türev ifadesine ileri Euler yaklaşıklığı, solundaki komşu hücrelerden gelen türev ifadelerine geri Euler yaklaşıklığı uygulamayı önermişlerdir [14-15]. Bu durumda (3.2) eşitliğinden

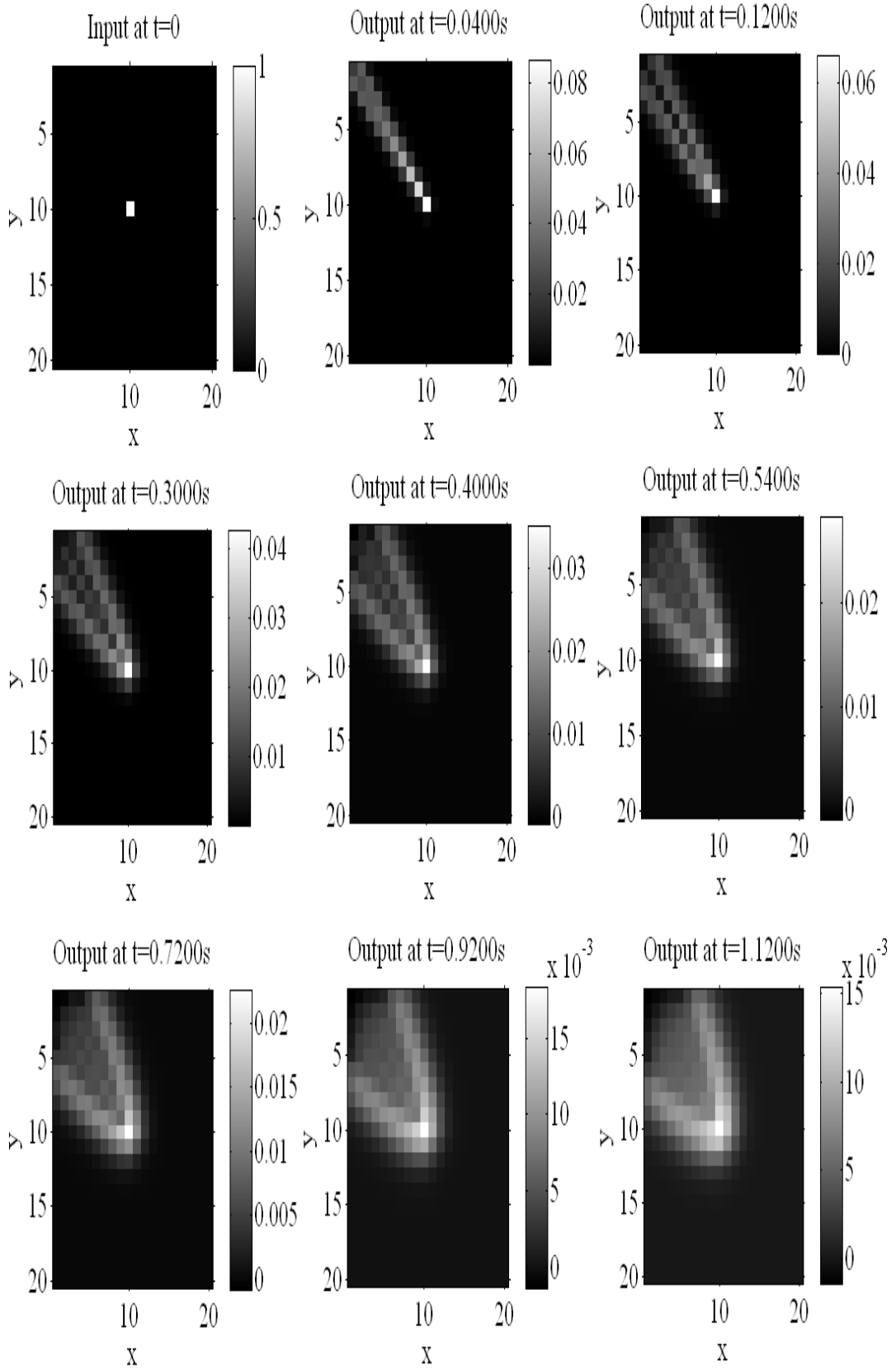
$$\frac{v_{k+1}(i,j) - v_k(i,j)}{T_s} = A \otimes V_k(i,j) + B \otimes U_k(i,j) + A_1 \otimes \left[\frac{V_k(i,j) - V_{k-1}(i,j)}{T_s} \right] \quad (3.8)$$

$$v_{k+1}(i,j) = v_k(i,j) + T_s [A \otimes V_k(i,j) + B \otimes U_k(i,j)] + A_1 \otimes [V_k(i,j) - V_{k-1}(i,j)] \quad (3.9)$$

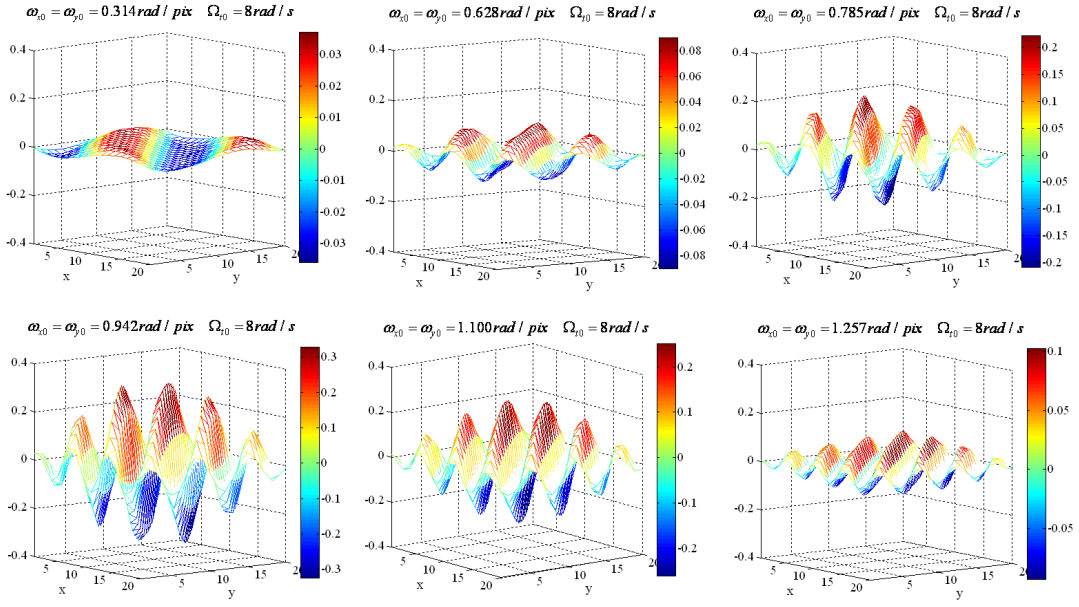
elde edilir. Bu fark denkleminin $v_0(i,j)$ ve $v_{-1}(i,j)$ başlangıç koşullarından başlayarak iteratif çözümü yapılabilir. Bu çalışmada verilen uygulamalarda başlangıç koşulları sıfır alınmıştır.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ile verilen}$$

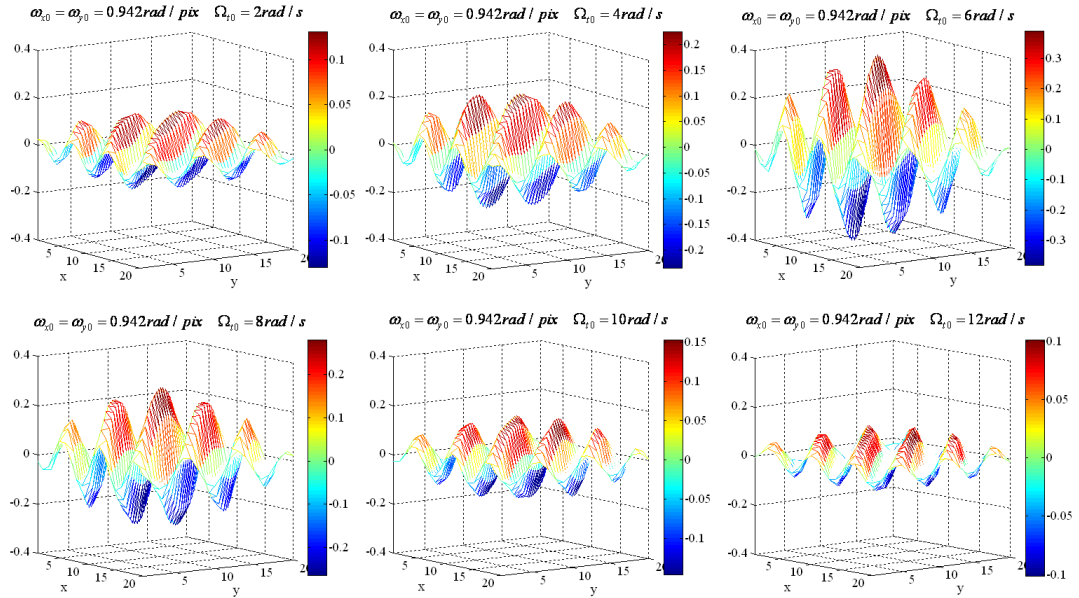
ZTHSA'nın (3.9) kullanılarak elde edilen birim dürtü yanıtı Şekil 3.8'de verilmiştir. Şekil 3.8'de verilen ZTHSA'nın birim dürtü yanıtının önceki simülasyon sonuçları ile uyumlu olduğu söylenebilir. Eşitlik (3.7) ile verilen giriş için (3.9) eşitliğinin kullanılmasıyla elde edilen 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin çeşitli uzamsal frekanslı girişler için simülasyon sonuçları Şekil 3.9'da, çeşitli zamansal frekanslı girişler için simülasyon sonuçları Şekil 3.10'da verilmiştir [14,24].



Şekil 3.8 ZTHSA'nın (3.9) kullanılarak elde edilen birim dürtü yanıtı [24]



Şekil 3.9 $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki BGF'nin (3.9) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].



Şekil 3.10 $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ için çeşitli zamansal frekanslardaki BGF'nin (3.9) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].

Şekillerden görüldüğü gibi önerilen yöntem ile elde edilen filtre simülasyon sonuçları daha önceki verilen simülasyon sonuçları ile aynıdır. Bu yöntem ile ZTHSA benzetimi, beklendiği gibi SIMULINK ve (3.6) ile yapılan ZTHSA simülasyonlarına göre çok daha hızlı çalışmaktadır. Ancak bu yöntemin kullanılabilmesi için giriş görüntüsünün her bir çerçevesinin en az üç iterasyon boyunca sabit tutulması gerekmektedir. Bu zaman şartı deneysel olarak verilmiş ve bu şartın nedeni bu yöntemi ortaya atanlar tarafından belirlenmemiştir [14-15]. Halbuki ZTHSA vektör-matris eşitliğine ileri Euler yaklaşıklığı uygulanarak elde edilen (3.6)'nın bunun gibi bir şarta ihtiyacı yoktur.

Vektör-matris formunda işlem yapmak çok fazla iş yükü getirir. Özellikle matris tersi alma işlemi $M \times N$ boyutlu bir matris için $(MN)^3$ fazladan iş yükü getirir. Burada, vektör-matris formu önerilen yöntemin analizi için kullanılmıştır. Önerilen yöntemde şablonlar kullanıldığı için hızlı bir şekilde sonuca ulaşır. Çizelge 3.1'de bir iterasyon için yöntemlerin işlem sayıları verilmiştir.

Çizelge 3.1 İterasyon başına düşen işlem yükü [24]

Yöntem	20x20 giriş görüntüsü	30x30 giriş görüntüsü	$M \times N$ giriş görüntüsü
Önerilen Yöntem[15]	$80,4 \times 10^3$	$180,9 \times 10^3$	$MN[4(2m^2-1)+5]$ (m : şablon büyüklüğü)
Vektör-matris Euler yaklaşıklığı[14, 24]	$0,96 \times 10^6$	$4,86 \times 10^6$	$6(MN)^2$

Bu bölümde ileri ve geri Euler yaklaşıklıklarının kombinasyonu ile elde edilen ZTHSA simülasyon yöntemi için gözlemsel ve ispatsız verilen zaman şartının nedeni ve ispatı verilmiştir. Bu zaman şartını her zaman sağlayan bu yöntemin genel eşitliği elde edilmiştir. Ayrıca önerilen yöntemin ZTHSA'ya uygulanması ile 2. mertebeden bir

diferansiyel denklemin çözümünün elde edildiği ve bu çözümün 1. mertebeden bir diferansiyel denklem olan ZTHSA'nın çözümüne karşılık geldiği gösterilmiştir.

3.1 ZTHSA'nın Simülasyonu için Tasarlanan Yeni Yöntemin Analizi I

İleri ve geri Euler yaklaşıklıklarının birlikte uygulanması ile elde edilen ZTHSA simülasyon yönteminin kullanılabilmesi için giriş görüntüsünün her çerçevesinin en az 3 iterasyon boyunca sabit tutulması gerektiği [14-15]'de belirtilmişti. Bu zaman şartı deneysel olarak belirlenmiş ve bu şartın nedeni açıklanmamıştır. Ancak ZTHSA vektör-matris eşitliğine ileri Euler yaklaşıklığı uygulayarak elde edilen (3.6)'nın bu gibi bir şarta ihtiyacı yoktur. Ancak (3.6)'nın kararlı olması $\left[\mathbf{I} + T_s (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} \hat{\mathbf{A}} \right]$ matrisinin özdeğerlerinin modüllerinin birden küçük olmasına bağlıdır. Burada λ_L ,

$\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} \hat{\mathbf{A}}$ özdeğeri olmakla birlikte

$$T_s < -\frac{2|\operatorname{Re}\{\lambda_L\}|}{|\lambda_L|^2} \quad (3.10)$$

şartı sağlanmalıdır [24].

İspat:

λ_L özdeğeri en genel durum için

$$\lambda_L = \operatorname{Re}\{\lambda_L\} + j \operatorname{Im}\{\lambda_L\} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{I} + T_s \mathbf{L}$ matrisinin özdeğerleri $1 + T_s \lambda_L$ 'dir. (3.6)'nın kararlı olması

$\mathbf{I} + T_s \mathbf{L}$ matrisinin tüm özdeğerleri için

$$|1 + T_s \lambda_L| < 1 \quad (3.12)$$

sağlanmalıdır. Bu durumda,

$$|1 + T_s (\operatorname{Re}\{\lambda_L\} + j \operatorname{Im}\{\lambda_L\})| < 1 \quad (3.13)$$

$$\sqrt{(1 + T_s \operatorname{Re}\{\lambda_L\})^2 + T_s^2 (\operatorname{Im}\{\lambda_L\})^2} < 1 \quad (3.14)$$

yazılabilir. Eşitlik (3.14)'te her iki tarafın karesi alınırsa

$$1 + 2T_s \operatorname{Re}\{\lambda_L\} + T_s^2 (\operatorname{Re}\{\lambda_L\})^2 + T_s^2 (\operatorname{Im}\{\lambda_L\})^2 < 1 \quad (3.15)$$

ve buradan

$$2T_s \operatorname{Re}\{\lambda_L\} + T_s^2 \left[(\operatorname{Re}\{\lambda_L\})^2 + (\operatorname{Im}\{\lambda_L\})^2 \right] < 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. Eşitlik (3.16)'da

$$|\lambda_L| = (\operatorname{Re}\{\lambda_L\})^2 + (\operatorname{Im}\{\lambda_L\})^2 \quad (3.17)$$

yazılırsa

$$(2T_s \operatorname{Re}\{\lambda_L\}) + T_s^2 |\lambda_L| < 0 \quad (3.18)$$

$$(2T_s \operatorname{Re}\{\lambda_L\}) < -T_s^2 |\lambda_L| \quad (3.19)$$

$$T_s < -\frac{2|\operatorname{Re}\{\lambda_L\}|}{|\lambda_L|^2} \quad (3.20)$$

elde edilir. Bu ispatın geçerli olabilmesi için $\operatorname{Re}\{\lambda_L\} < 0$ olmalıdır. Aynı zamanda $\operatorname{Re}\{\lambda_L\} < 0$ olması durumunda (3.5) ile verilen diferansiyel denklem kararlı olmaktadır.

Eşitlik (3.10)'un ispatı verildikten sonra analizlere devam edilebilir. Her iki yöntemin de aynı sonuçları verdiğine göre ileri ve geri Euler yaklaşıklıklarının birlikte kullanılması ile elde edilen ZTHSA simülasyon yönteminin eşitliğini vektör-matris formunda yazmak her iki yöntemi kıyaslamak için faydalı olacaktır.

Eşitlik (3.9) eşitliğinin vektör-matris formu

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + T_s [\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k] + \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{v}_k - \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{v}_{k-1} \quad (3.21)$$

biçiminde elde edilebilir. Bu eşitlik üzerinde yapılan bazı cebirsel işlemler ile (3.6) eşitliğine benzeyecek şekilde düzenlenmiştir. Bu durumda,

$$(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1 + \hat{\mathbf{A}}_1) \mathbf{v}_{k+1} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1 + 2\hat{\mathbf{A}}_1) \mathbf{v}_k + T_s [\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k] - \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{v}_{k-1} \quad (3.22)$$

$$(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1) \mathbf{v}_{k+1} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1) \mathbf{v}_k + T_s [\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k] - \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{v}_{k+1} + 2\hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{v}_k - \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{v}_{k-1} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + T_s \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_k - \mathbf{K} [\mathbf{v}_{k+1} - 2\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}] \quad (3.24)$$

elde edilir [24]. Burada $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1}$, $\mathbf{K} = \mathbf{M} \hat{\mathbf{A}}_1$ ve $\boldsymbol{\psi}_k = [\hat{\mathbf{A}} \mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_k]$ 'dir. Eşitlik (3.6) ile (3.24) arasındaki fark $\mathbf{K} [\mathbf{v}_{k+1} - 2\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}]$ terimidir. Eşitlik (3.24)'ün iteratif çözümü

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + T_s \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_0 + \mathbf{K} [\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{-1}] \quad (3.25)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + T_s \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_1 + \mathbf{K} [\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0] \quad (3.26)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + T_s \mathbf{M} [\boldsymbol{\psi}_1 - 2\mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_0] + \mathbf{K} \mathbf{v}_2 - \mathbf{K} \mathbf{v}_0 - 2\mathbf{K}^2 [\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{-1}] \quad (3.27)$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + T_s \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_2 + \mathbf{K} [\mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1] \quad (3.28)$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + T_s \mathbf{M} [\boldsymbol{\psi}_2 - 2\mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_1 + 4\mathbf{K}^2 \boldsymbol{\psi}_0] + \mathbf{K} \mathbf{v}_3 - \mathbf{K} \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{K}^2 \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{K}^2 \mathbf{v}_0 + 4\mathbf{K}^3 [\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{-1}] \quad (3.29)$$

şeklindedir ve genel olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k = & \mathbf{v}_{k-1} + T_s \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_{k-1} + T_s \mathbf{M} \sum_{r=0}^{k-2} (-2\mathbf{K})^{k-r} \boldsymbol{\psi}_r \\ & + \sum_{r=1}^{k-1} (-2)^{k-1-r} (\mathbf{K})^{k-r} [\mathbf{v}_{r+1} - \mathbf{x}_{r-1}] + (-2)^k \mathbf{K}^k [\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{-1}] \end{aligned} \quad (3.30)$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (3.30)'da $[\mathbf{v}_{k+1} - 2\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}]$ 'nin katsayısı olan $\mathbf{K}$ matrisinin üstel kuvvetleri bulunmaktadır. Eğer $\mathbf{K}$ matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerleri birden küçükse ve $\mathbf{v}_k$ sabit bir vektöre yakınsar ise, iterasyon sayısı k artarken $\mathbf{K}$ matrisinin üstel kuvvetleri sıfır matrise yaklaşacaktır. Başka bir deyişle

$$k \Rightarrow \infty \quad \mathbf{K}^k \Rightarrow \mathbf{0}$$

olacaktır. Sonuç olarak belli bir iterasyon sonra ZTHSA vektör-matris eşitliğine ileri Euler yaklaşıklığı uyguladıktan sonra elde edilen eşitlikte bulunmayan, (3.24)'te bulunan $\mathbf{K} [\mathbf{v}_{k+1} - 2\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}]$ teriminin etkisi yok olacak ve (3.6) ile (3.24) eşitlikleri aynı sonucu verecektir [24].

Öncelikle $\mathbf{v}_k$ 'nin sabit bir vektöre yakınsama durumu incelenmelidir. Bunun için (3.21)'in iteratif çözümüne bakılmalıdır. Bu durumda

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{F} \mathbf{v}_0 - \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{v}_{-1} + T_s \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_0 \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{F}\mathbf{v}_1 - \hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{v}_0 + T_s\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= (\mathbf{F}^2 - \hat{\mathbf{A}}_1)\mathbf{v}_0 - \mathbf{F}\hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{v}_{-1} + (\mathbf{I} + \mathbf{F})T_s\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{F}\mathbf{v}_2 - \hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{v}_1 + T_s\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_3 &= (\mathbf{F}^3 - \mathbf{F}\hat{\mathbf{A}}_1 - \hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{F})\mathbf{v}_0 + (\hat{\mathbf{A}}_1^2 - \mathbf{F}^2\hat{\mathbf{A}}_1)\mathbf{v}_{-1} \\ &\quad + \left[(\mathbf{I} + \mathbf{F} + \mathbf{F}^2) - \hat{\mathbf{A}}_1 \right] T_s\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \dots = \mathbf{u}_k = \mathbf{u}$ ve $\mathbf{F} = (\mathbf{I} + T_s\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}_1)$ 'dir. Buradaki $\hat{\mathbf{A}}$ ve $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisleri uygulamalarımızda simetrik olarak elde edildiği için bu matrislerin özdeğerleri gerçeldir. Eşitlik (3.33)'den görüleceği gibi eğer $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_{\hat{\mathbf{A}}_1}$, $-1 < \lambda_{\hat{\mathbf{A}}_1} < 0$ sağlıyorsa, $\mathbf{F}$ matrisinin özdeğerleri $-1 < \lambda_{\mathbf{F}} < 1$ olacaktır. Bu durumda iterasyon sayısı k arttıkça $\mathbf{F}$ matrisinin üstel kuvvetleri sıfır matrisine yaklaşacaktır. Başka bir deyişle başlangıç koşullarından gelen değerler sıfıra gidecektir ve $\mathbf{v}_k$ sabit bir vektöre yakınsayacaktır [24].

$\mathbf{v}_k$ 'nin sabit bir vektöre yakınsadığını gösterdikten sonra, $\mathbf{K}$ matrisinin üstel kuvvetlerinin sıfır matrisine yaklaşacağı gösterilmelidir. Öncelikle, $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisini

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \boldsymbol{\Lambda}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1}^{-1} \quad (3.34)$$

olarak yazılması yapılacak ispatta yardımcı olacaktır. Burada $\boldsymbol{\Lambda}_{\hat{\mathbf{A}}_1} = \text{diag}(\lambda_{\hat{\mathbf{A}}_1})$ ve $\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1}$, $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisinin özdeğerler ve özvektörler matrisleridir. Eşitlik (3.34), $\mathbf{K}$ matrisinin eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{K} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} (-\hat{\mathbf{A}}_1) \quad (3.35)$$

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \boldsymbol{\Lambda}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1}^{-1} \right)^{-1} \left(-\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \boldsymbol{\Lambda}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1}^{-1} \right) \quad (3.36)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \left[\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \right)^{-1} \left(-\boldsymbol{\Lambda}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \right) \right] \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1}^{-1} = \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \left[\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}_{\hat{\mathbf{A}}_1} \right)^{-1} \right] \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{A}}_1}^{-1} \quad (3.37)$$

elde edilir. Buradan $\mathbf{K}$ matrisinin özdeğerlerinin $\frac{-\lambda_{\hat{A}_1}}{1-\lambda_{\hat{A}_1}}$ olacağı aşikârdır.

$-1 < \lambda_{\hat{A}_1} < 0$ şartı sağlanırsa

$$0 < \frac{-\lambda_{\hat{A}_1}}{1-\lambda_{\hat{A}_1}} < 0.5 \quad (3.38)$$

olur [24]. Bu durumda $k \Rightarrow \infty$ $\mathbf{K}^k \Rightarrow \mathbf{0}$ olacaktır. $\mathbf{K}^{k_{\min}} \approx \mathbf{0}$ sağlayacak en küçük iterasyon sayısı $k_{\min}$ için giriş görüntüsünün her çerçevesi $k_{\min} \cdot T_S$ süresi kadar sabit tutulmalıdır. $k_{\min}$ ZTHSA'nın uygulamaları için elde edilen $\mathbf{K}$ matrisinin özdeğerleri incelenerek belirlenebilir. 3-boyutlu uzay-zamansal BGF uygulaması için $k_{\min} = 3$ olması yeterli olmaktadır.

Eşitlik (3.9) ile verilen bu yöntemde her uygulama için $\mathbf{K}$ 'nin (3.38)'de verilen şartı sağlamanın garantisi yoktur. $\hat{A}_1$ matrisi, A_1 şablonundan elde edildiği için bu şablonun seçimi veya değerleri önemlidir. Buradaki BGF uygulaması için bu şart sağlanmaktadır. Her problem için bu şartın sağlanması için (3.2)'de basit bir değişiklik yapılabilir. Bu eşitlikteki A_1 şablonunun merkez elemanı $a_1(0,0)$ 'ın bir kısmı sola çekilebilir. Bu durumda

$$\frac{dv_t(i,j)}{dt} = A \otimes V_t(i,j) + B \otimes U_t(i,j) + \hat{A}_1 \otimes \frac{dV_t(i,j)}{dt} - \sigma \frac{dv_t(i,j)}{dt} \quad (3.39)$$

$$(1+\sigma) \frac{dv_t(i,j)}{dt} = A \otimes V_t(i,j) + B \otimes U_t(i,j) + \hat{A}_1 \otimes \frac{dV_t(i,j)}{dt} \quad (3.40)$$

elde edilir. Burada yeni $\hat{A}_1$ şablonunun merkez elemanı dışındaki tüm elemanları A_1 şablonunun aynısı iken merkez elemanı

$$\hat{a}_1(0,0) = a_1(0,0) + \sigma \quad (3.41)$$

biçimindedir. Soldaki türevin katsayısı ile (3.40) eşitliği normalize edilirse

$$\frac{dv_t(i,j)}{dt} = \frac{1}{1+\sigma} [A \otimes V_t(i,j) + B \otimes U_t(i,j)] + \frac{1}{1+\sigma} \left[\hat{A}_1 \otimes \frac{dV_t(i,j)}{dt} \right] \quad (3.42)$$

elde edilir. $\hat{A}_1$ 'den elde edilen $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisi, Gershgorin teoremine göre

$$\left| \lambda_{\hat{A}_1} \right|_{\max} \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^N |\hat{a}_1(i, j)| \right\} \quad (3.43)$$

şartını sağlar [25]. Seçilecek olan σ

$$\sigma > \max \left\{ \sum_{i=1}^N |\hat{a}_1(i, j)| \right\} \quad (3.44)$$

koşulunu sağlarsa $\frac{1}{1+\sigma} \hat{A}_1$ matrisinin özdeğerleri $0 < \left| \hat{\lambda}_{\hat{A}_1} \right| < 1$ olur. Bu durumda (3.38)'de verilen şart sağlanmış olur. Tural-Polat ve Tavşanoğlu'nun önerdiği gibi [14-15] (3.42)'nin sağındaki türev ifadesine ileri Euler yaklaşıklığı, solundaki komşu hücrelerden gelen türev ifadelerine geri Euler yaklaşıklığı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} v_{k+1}(i, j) = & v_k(i, j) + \frac{T_s}{1+\sigma} [A \otimes V_k(i, j) + B \otimes U_k(i, j)] \\ & + \left(\frac{1}{1+\sigma} \right) \hat{A}_1 \otimes [V_k(i, j) - V_{k-1}(i, j)] \end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir. Basit bir örnek olması için $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

olarak seçilmiştir. Bu durumda,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{I}$$

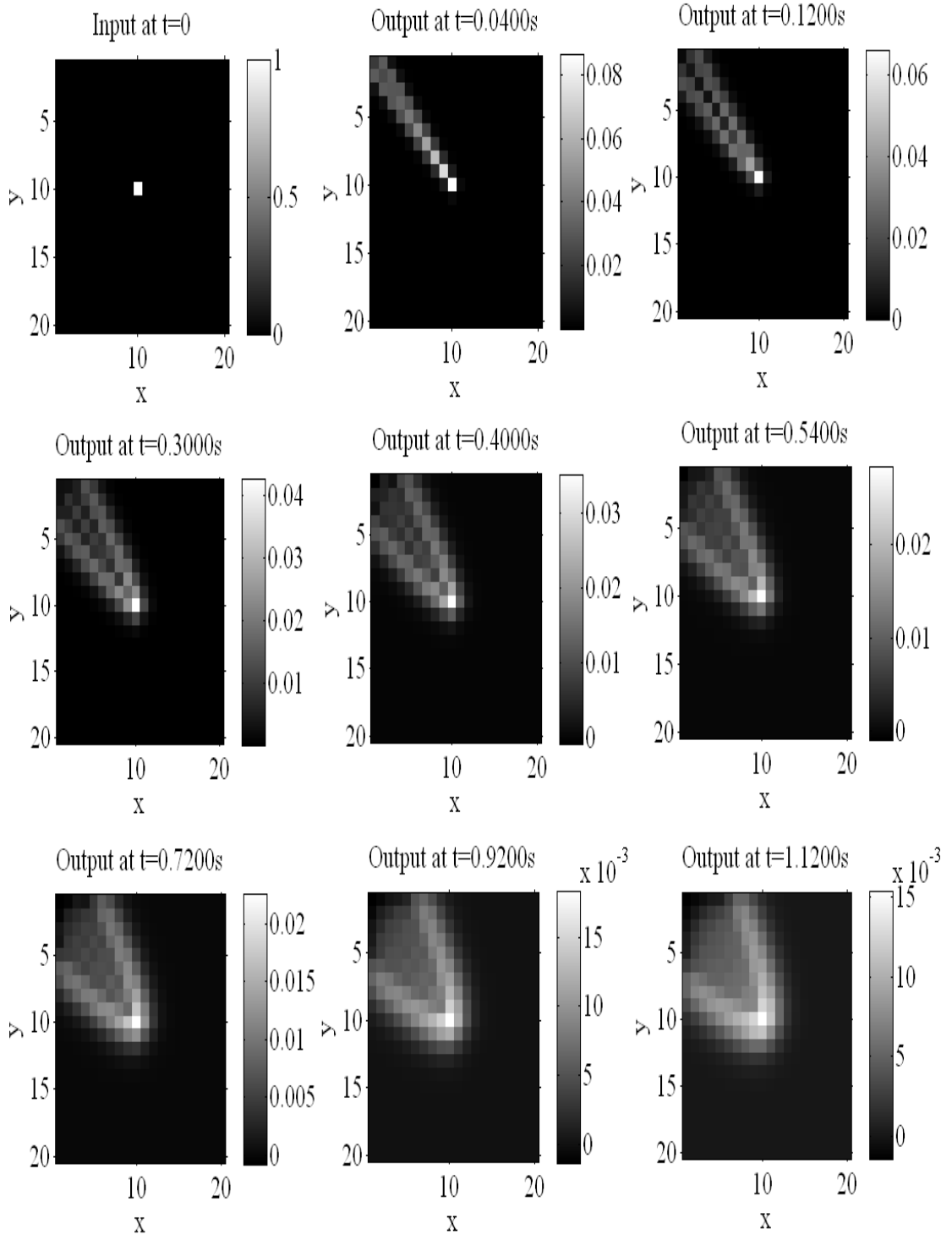
biçiminde yazılabilir. Burada $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisinin tüm özdeğerleri -1 olduğundan $\mathbf{K}$ matrisinin özdeğerleri 0.5 olur. Bu şablonlar için (3.9) kullanılabilir. Bu şablonlar ile verilen ZTHSA'nın birim dürtü yanıtı Şekil 3.11'de verilmiştir.

Bu kez şablonlar $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak seçilsin. $\hat{\mathbf{A}}$ ve $\hat{\mathbf{B}}$

matrisleri bir önceki örnekte verilmiştir. $\hat{\mathbf{A}}_1$ 'in yeni hali

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.



Şekil 3.11 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şablonları ile verilen ZTHSA'nın birim dürtü yanıtı

Bu şablonlar için $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisinin özdeğerleri -4 olur. Bu durumda (3.38)'de verilen şart sağlanmadığından (3.9) kullanılamaz.

Eşitlik (3.42)'ye göre şablonları düzenleyerek $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ şablonları ile verilen ZTHSA'nın simülasyonu yapılabilir. } \sigma = -3$$

seçerek yeni şablonlar $A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\hat{A}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak elde

edilebilir. Buna göre $\hat{\mathbf{A}}_1$

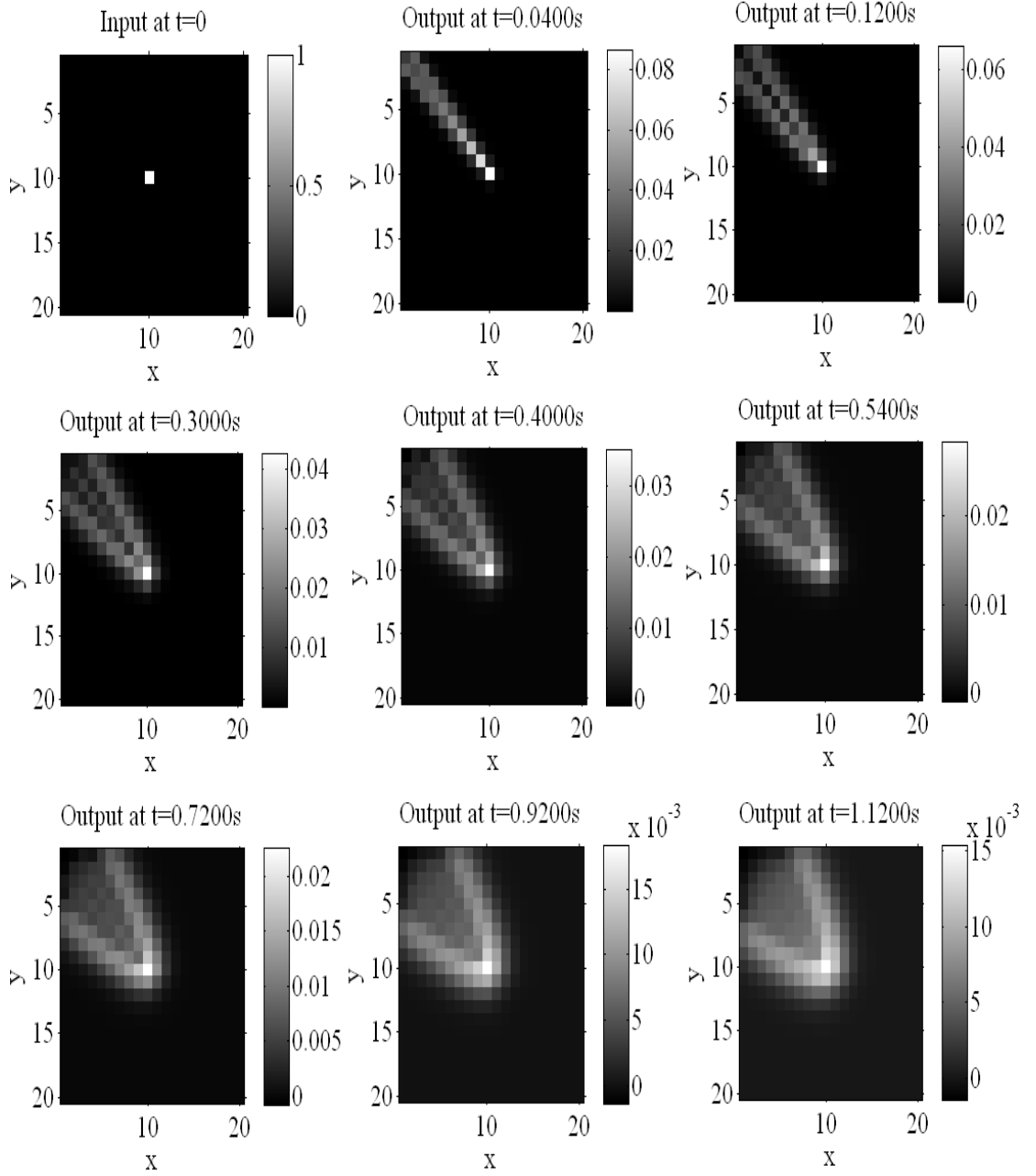
$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrisin özdeğerleri -0.125 olduğundan (3.38)'de verilen şart sağlanır. Bu

değerler için $\mathbf{K}$ matrisinin özdeğerleri 0.11 olarak bulunur. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ve $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şablonları ile verilen ZTHSA'nın simülasyonu bu düzenlemelerin

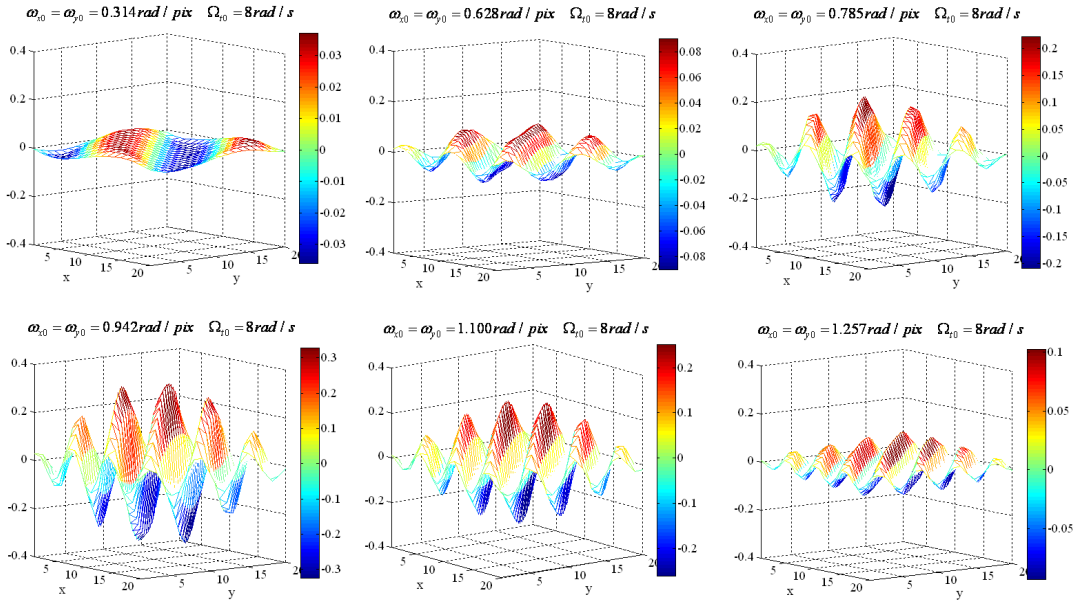
ardından (3.45) kullanılarak yapılabilir. Bu durumda ZTHSA'nın birim dürtü yanıtı Şekil 3.12'deki gibi elde edilir.



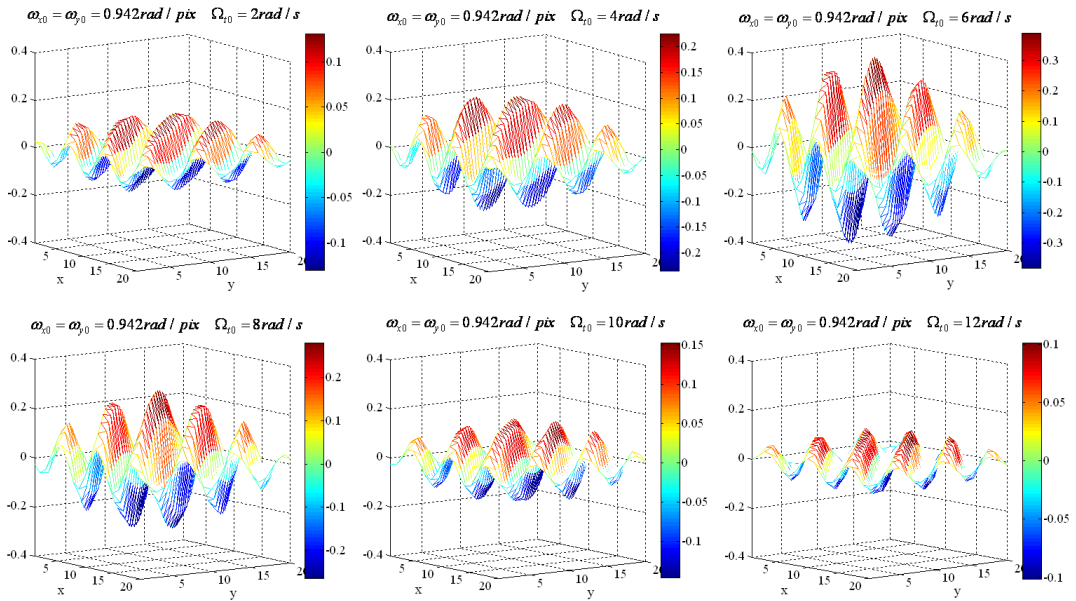
Şekil 3.12 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şablonları ile verilen

ZTHSA'nın birim dürtü yanıtı

Örnekten görüldüğü üzere (3.45) kullanılarak (3.38)'de verilen matris şartını sağlamayan şablonlar ile verilen ZTHSA'nın simülasyonu yapılabilir. (3.45), (3.9)'un geçerli olmadığı durumlarda da kullanılabildiği için (3.45), (3.9)'a göre daha genel bir ZTHSA simülasyon yöntemidir.



Şekil 3.13 $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki BGF'nin (3.45) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.



Şekil 3.14 $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ için çeşitli zamansal frekanslardaki BGF'nin (3.45) ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.

Eşitlik (3.7) ile verilen giriş için (3.45) eşitliği kullanılarak yapılan BGF'nin simülasyon sonuçları çeşitli uzamsal frekanslı girişler için Şekil 3.13'te, çeşitli zamansal frekanslı girişler için 3.14'te verilmektedir. Şekillerden görüldüğü gibi (3.45) ile elde edilen filtre sonuçları önerilen yöntem [15] ile elde edilen sonuçlar ile aynıdır.

3.2 ZTHSA'nın Simülasyonu için Tasarlanan Yeni Yöntemin Analizi II

Önerilen yöntemde ileri ve geri Euler yaklaşıklıkları kullanılması ile 1. mertebeden sürekli-zamanlı bir sistem, 2. mertebeden diferansiyel eşitlik ile temsil edilebilir. Buradaki eşitlikler vektör-matris formundadır. Bu durumu gösterebilmek için

$$\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{T_s} \cong \frac{d\mathbf{x}_t}{dt}$$

ve

$$\frac{\mathbf{x}_{k+1} - 2\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k-1}}{T_s^2} \cong \frac{d^2\mathbf{x}_t}{dt^2}$$

(3.24)'de yerine konulabilir. Bu işlem sonunda

$$\underbrace{\frac{\mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k}{T_s}}_{\frac{d\mathbf{v}_t}{dt}} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} [\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k] + T_s (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} (-\hat{\mathbf{A}}_1) \underbrace{\frac{\mathbf{v}_{k+1} - 2\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}}{T_s^2}}_{\frac{d^2\mathbf{v}_t}{dt^2}} \quad (3.46)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_t}{dt} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} [\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_t + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_t] + T_s (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} (-\hat{\mathbf{A}}_1) \frac{d^2\mathbf{v}_t}{dt^2} \quad (3.47)$$

elde edilir. Bu eşitlik ZTHSA'nın vektör-matris formunda 2. mertebeden diferansiyel denklem modelidir. $t \rightarrow \infty$ için $\mathbf{K}$ matrisinin etkisi azalacak ve (3.47)'den ZTHSA'nın vektör-matris eşitliği elde edilecektir.

Eşitlik (3.38)'de verilen şart sağlanır ve $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisi tekil olmayan bir matris ise

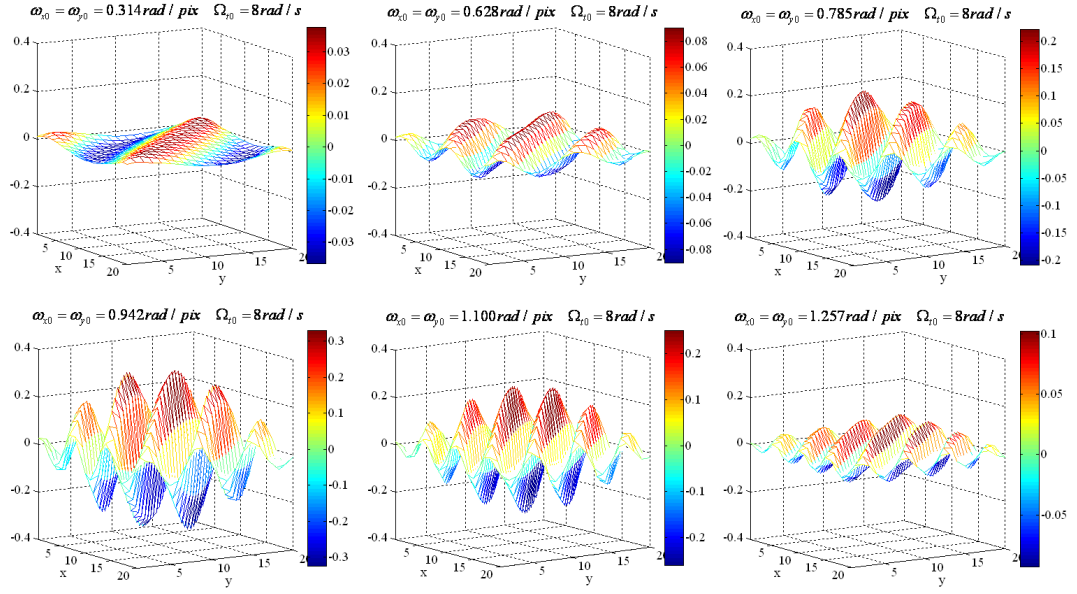
$$\frac{d^2\mathbf{v}_t}{dt^2} - \hat{\mathbf{C}}_1 \frac{d\mathbf{v}_t}{dt} + \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{v}_t = \hat{\mathbf{D}}_0 \mathbf{u}_t \quad (3.48)$$

yazılabilir [24]. Burada $\hat{\mathbf{C}}_1 = (T_s \mathbf{K})^{-1}$, $\hat{\mathbf{C}}_0 = (-T_s \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1}$ ve $\hat{\mathbf{D}}_0 = -(-T_s \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} \hat{\mathbf{B}}$ 'dir. (3.48) eşitliğini MATLAB ODE ile simule edebilmek için

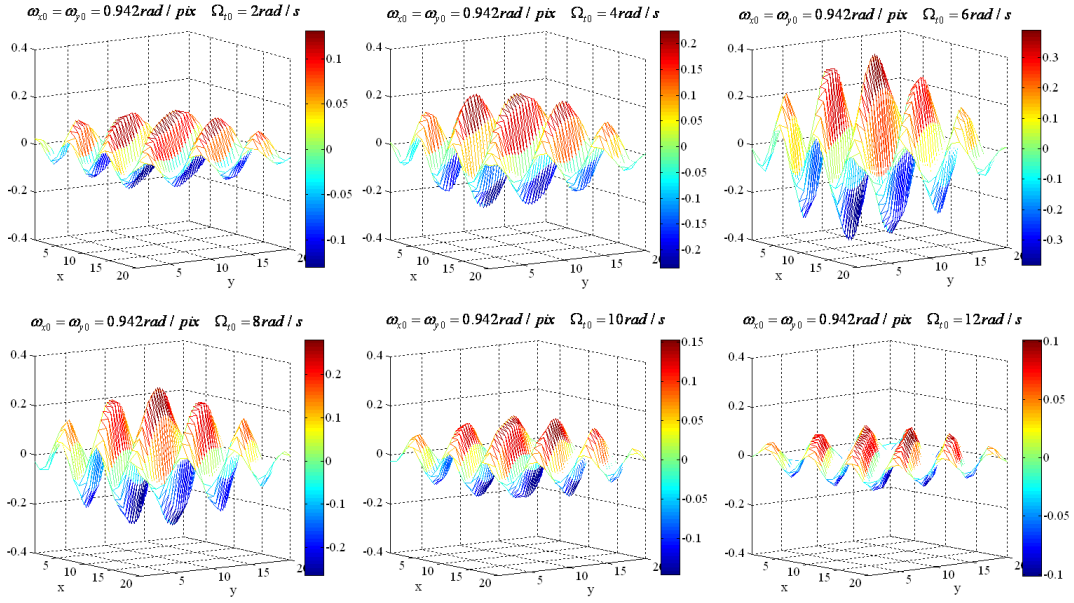
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1,t} \\ \mathbf{v}_{2,t} \end{bmatrix}_{2MN \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\hat{\mathbf{C}}_0 & \hat{\mathbf{C}}_1 \end{bmatrix}_{2MN \times 2MN} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1,t} \\ \mathbf{v}_{2,t} \end{bmatrix}_{2MN \times 1} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{D}}_0 \end{bmatrix}_{2MN \times MN} \mathbf{u}_t \quad (3.49)$$

şeklinde yazmak gereklidir. Burada $\mathbf{v}_{1,t} = \mathbf{v}_t$ ve $\mathbf{v}_{2,t} = \frac{d\mathbf{v}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{1,t}}{dt}$, dir [24]. (3.49)'un

ode45 ile yapılan simülasyon sonuçları çeşitli uzamsal frekanslı girişler için Şekil 3.15'te, çeşitli zamansal frekanslı girişler için Şekil 3.16'da verilmiştir. Sonuçlar, önceki bölümlerde verilen sonuçlar ile uyumludur.



Şekil 3.15 $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki BGF'nin (3.49) eşitliğine ode45 uygulanması ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].



Şekil 3.16 $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ için çeşitli zamansal frekanslardaki BGF'nin (3.49) eşitliğine ode45 uygulanması ile elde edilen simülasyon sonuçları. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / \text{s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür [24].

3.3 Sonuçlar

İp vd. tarafından lineer HSA ile gerçekleştirilemeyen 3-boyutlu uzay-zamansal BGF ve beynin görsel algı merkezi modeli gibi çeşitli 3-boyutlu uzay-zamansal transfer fonksiyonlarını gerçeklemek için önerilen ZTHSA yapıları [9-13], HSA yapılarının daha genel bir halidir. ZTHSA devresinde lineer HSA devresine ek olarak komşu hücreler arasına türevli bağlantılar eklenmiştir. Bu şekilde daha genel uzay-zamansal filtrelerin gerçekleştirilebileceği belirtilmiş ve BGF örnekleri verilmiştir [9-13]. Bu filtreler için tasarlanan ZTHSA'nın simülasyonu MATLAB SIMULINK programı ile blok diyagramlar üzerinden yapılmıştır [9-10]. Yapılan bu işlem kullanılan yazılımın yapısından dolayı oldukça zaman almaktadır.

Tural-Polat vd. ZTHSA'nın simülasyonunu daha az işlem ile yapmak için ileri ve geri Euler yaklaşıklıklarının kombinasyonu olan yeni bir yöntem önermişlerdir [24]. Bu yöntem ile MATLAB SIMULINK programına göre oldukça kısa sürede ve daha az işlemle ZTHSA'nın simülasyonu yapılabilirken, bu yöntemin kullanılabilmesi için giriş görüntüsünün her çerçevesinin en az 3 iterasyon boyunca sabit tutulması gerektiği deneysel olarak tespit edilmiştir. Buna karşın, ZTHSA'nın vektör-matris eşitliğine ileri Euler yaklaşıklığı uygulayarak elde edilen fark denkleminin giriş görüntüsünün her

çerçevesinin belli bir süre sabit tutulması gibi bir şarta ihtiyacı olmadığı görülmüştür [24]. Bu şartın ispatı için öncelikle ileri ve geri Euler yaklaşıklıklarının kullanılması ile elde edilen ZTHSA simülasyon yönteminin vektör-matris eşitliği türetilmiş ve bu eşitlik, ZTHSA'nın vektör-matris eşitliğine ileri Euler yaklaşıklığı uygulayarak elde edilen fark denklemi ile karşılaştırılmıştır. Bunun sonucunda iki eşitlik arasında $\mathbf{K}[\mathbf{v}_{k+1} - 2\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}]$ terim farkı olduğu belirlenmiştir. Önerilen yöntemin vektör-matris eşitliğinin iteratif çözümü yapıldığında bu $\mathbf{K}$ matrisinin üstel kuvvetlerinin ortaya çıktığı görülmüştür. Yapılan analizler sonucunda (3.38) şartı sağlanırsa $k \Rightarrow \infty \quad \mathbf{K}^k \Rightarrow \mathbf{0}$ olacağı ortaya konmuştur ve bu zaman şartının $\mathbf{K}$ matrisinin etkisinin ortadan kalkması için geçen zaman olduğu belirlenmiştir. $\mathbf{K}$ matrisinin etkisinin ortadan kalkması için $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisinin özdeğerlerinin $-1 < \lambda_{A_1} < 0$ olması gerektiği belirtilmiştir.

BGF uygulaması için $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisinin özdeğerleri yukarıda verilen şartı sağlamakta iken farklı uygulamalar için bu şart sağlanmayabilir. İleri ve geri Euler yaklaşıklıkları kullanılarak elde edilen ZTHSA simülasyon yöntemi her türlü ZTHSA uygulamasının simülasyonunda kullanılabilmesi için genelleştirilmiştir. Uygun σ değerleri için (3.45) eşitliği her türlü ZTHSA uygulamasında kullanılabilir.

İleri ve geri Euler yaklaşıklıklarının kullanılması ile elde edilen ZTHSA simülasyon yönteminin vektör-matris eşitliğinde 1. ve 2. türev yaklaşıklıkları yerine türev ifadeleri yazılarak bu eşitliğin 2. mertebeden bir diferansiyel denklemin ayrıklaştırılması ile elde edilen bir fark denklemi olduğu belirlenmiştir. Önerilen yöntemin, $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisinin özdeğerlerinin $-1 < \lambda_{A_1} < 0$ olması durumunda 2. mertebeden diferansiyel denklemin çözümünü, 1. mertebeden bir diferansiyel denklem olan ZTHSA'nın çözümüne denk düşürdüğü gösterilmiştir.

ZTHSA eşitliği ve türevleri Çizelge 3.2'de verilmiştir [24]. (1)'in solundaki türev terimine ileri Euler yaklaşıklığı, sağındaki türev terimlerine geri Euler yaklaşıklığı uygulanması ile Çizelge 3.2'deki (2) elde edilmiştir. (2) aynı zamanda önerilen yöntemde türetilen fark denklemdir. (1)'in vektör-matris eşitliği (3)'de verilmiştir. Elde edilen (3) eşitliğine ileri Euler yaklaşıklığı uygulanması ile (4) türetilmiştir. Ayrıca (5), (2) eşitliğinin vektör-matris formudur. (5)'deki türev yaklaşıklıkları yerine türev

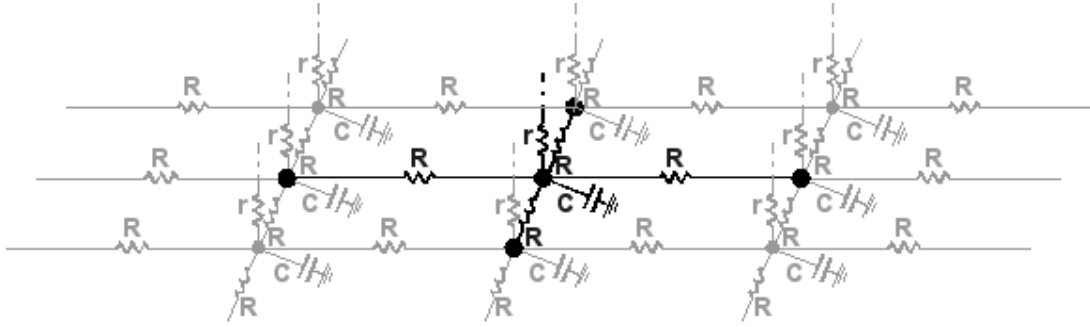
terimleri yazılarak 2. mertebeden bir diferansiyel denklem olan (6) elde edilmiştir. Her uygulamada $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisinin özdeğerlerinin $-1 < \lambda_{\hat{\mathbf{A}}_1} < 0$ olması için (1)'den (7) türetilmiştir. (7)'nin simülasyonunu yapabilmek için bu eşitliğin sol taraftaki türev terimine ileri Euler yaklaşıklığı, sağ taraftaki türev terimlerine geri Euler yaklaşıklığı uygulanması ile ZTHSA simülasyon yönteminin genel hali olan (8) elde edilmiştir.

Çizelge 3.2 ZTHSA eşitliği ve türevleri [24]

1	ZTHSA Eşitliği [15]	$\frac{dv_t(i,j)}{dt} = A \otimes V_t(i,j) + B \otimes U_t(i,j) + A_1 \otimes \frac{dV_t(i,j)}{dt}$
2	(1)'e İleri ve geri Euler yöntemi ile elde edilen fark denklemi [15]	$v_{k+1}(i,j) = v_k(i,j) + T_s \left[A \otimes V_k(i,j) + B \otimes U_k(i,j) \right] + A_1 \otimes \left[V_k(i,j) - V_{k-1}(i,j) \right]$
3	(1)'in vektör-matris formu [14,24]	$\frac{d\mathbf{v}_t}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_t + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_t + \hat{\mathbf{A}}_1 \frac{d\mathbf{v}_t}{dt}$
4	(3)'e ileri Euler yaklaşıklığının uygulanması ile elde edilen fark denklemi [14,24]	$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + T_s \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1 \right)^{-1} \left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \right)$
5	(2)'nin vektör-matris formu [23-24]	$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + T_s \left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \right) + \hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{v}_k - \hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{v}_{k-1}$
6	(5)'den elde edilen 2. mertebeden diferansiyel denklemi [24]	$T_s \mathbf{K} \frac{d^2 \mathbf{v}_t}{dt^2} - \frac{d\mathbf{v}_t}{dt} + \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1 \right)^{-1} \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_t = - \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_1 \right)^{-1} \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_t$
7	(3.38) için (1)'in düzenlenmiş hali	$\frac{v_t(i,j)}{dt} = \frac{1}{1+\sigma} \left[A \otimes V_t(i,j) + B \otimes U_t(i,j) \right] + \frac{1}{1+\sigma} \left[\hat{A}_1 \otimes \frac{V_t(i,j)}{dt} \right]$
8	(7)'e ileri ve geri Euler yöntemlerinin uygulanması ile elde edilen fark denklemi	$v_{k+1}(i,j) = v_k(i,j) + \frac{T_s}{1+\sigma} \left[A \otimes V_k(i,j) + B \otimes U_k(i,j) \right] + \left(\frac{1}{1+\sigma} \right) \hat{A}_1 \otimes \left[V_k(i,j) - V_{k-1}(i,j) \right]$

3-BOYUTLU UZAY-ZAMANSAL GABOR-TİPİ FİLTRENİN ZTHSA İLE TASARIMI

Bu bölümde Shi [19] tarafından verilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile gerçekleştirilebileceği gösterilmiştir. Bu filtreye ilişkin ZTHSA şablonları verildikten sonra bu tasarımın Ip vd.[10] tarafından verilen BGF tasarımına göre basitliğinin altı çizilmiştir.



Şekil 4.1 2-boyutlu direnç devresi ile HSA gerçekleştirilmesi

Shi ve Chu, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -(4 + \lambda^2) & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ şablonları ile verilen HSA'nın

tasarımını Şekil 4.1'deki devre ile vermiştir [7]. Bu filtrenin genlik frekans yanıtı Gauss fonksiyonuna benzediği için bu filtreye Gauss-tipi filtre ismi verilmiştir. Bir Gabor filtre, Gauss filtrenin modüle edilmesiyle veya Gauss filtresinin transfer fonksiyonunun $(\omega_{xo}, \omega_{yo})$ uzamsal frekanslarına ötelenmesi ile elde edilir. Başka bir deyişle,

$$H_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = H_{gauss}(e^{j(\omega_x - \omega_{xo})}, e^{j(\omega_y - \omega_{yo})}) \quad (4.1)$$

veya

$$h_{gabor}(x, y) = h_{gauss}(x, y) e^{j(\omega_{x0}x + \omega_{y0}y)} \quad (4.2)$$

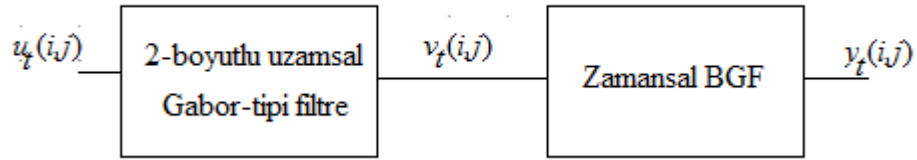
$$h_{gauss}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} \quad (4.3)$$

olarak verilebilir. Shi, modülasyon tekniğini 2-boyutlu uzamsal Gauss-tipi filtreye uygulayarak 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin HSA şablonlarını

$$A_{gabor} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\omega_{y0}} & 0 \\ e^{-j\omega_{x0}} & -(4 + \lambda^2) & e^{j\omega_{x0}} \\ 0 & e^{j\omega_{y0}} & 0 \end{bmatrix}, B_{gabor} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde etmiştir [19].

Shi [19] çalışmasının son kısmında 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin tasarımını vermiştir. Bu çalışmada Şekil 4.2’de verildiği gibi 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtreyi elde etmek için 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin analog devresi ile 1-boyutlu zamansal BGF'nin analog devresi birbirine kaskad bağlanmıştır.



Şekil 4.2 Shi tarafından verilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtre tasarımı [19]

Bu tasarımın transfer fonksiyonu 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu ile 1-boyutlu zamansal BGF'nin transfer fonksiyonunun çarpımı ile elde edilmiştir. Başka bir deyişle

$$H_G(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t) = H_{BGF}(j\Omega_t) H_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \quad (4.4)$$

olarak verilebilir. 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu

$$H_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = \frac{\lambda^2}{(4 + \lambda^2) - 2\cos(\omega_x - \omega_{x0}) - 2\cos(\omega_y - \omega_{y0})} \quad (4.5)$$

olarak verilebilir. [19]'da BGF'nin transfer fonksiyonu, AGF'nin transfer fonksiyonunun Ω_{t0} frekansına ötelenmesi ile elde edilmiştir [19]. Başka bir deyişle BGF'nin transfer fonksiyonu

$$H_{BGF}(j\Omega_t) = H_{AGF}(j(\Omega_t - \Omega_{t0})) \quad (4.6)$$

$$H_{BGF}(j\Omega_t) = \frac{1}{\alpha + j(\Omega_t - \Omega_{t0})} \quad (4.7)$$

olarak elde edilmektedir. Sonuç olarak 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu

$$H_G(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t) = \frac{1}{\alpha + j(\Omega_t - \Omega_{t0})} \frac{\lambda^2}{(4 + \lambda^2) - 2\cos(\omega_x - \omega_{x0}) - 2\cos(\omega_y - \omega_{y0})} \quad (4.8)$$

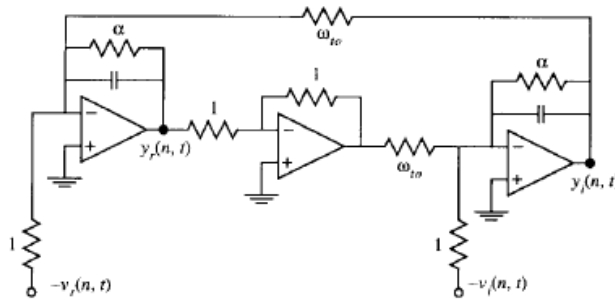
olarak verilmiştir [19]. Şekil 4.2'deki 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtre HSA ile gerçekleştirilmektedir ve bu filtrenin çıkışı $v_t(i, j)$

$$\dot{v}_t(i, j) = A_{gabor} \otimes V_t(i, j) + B_{gabor} \otimes U_t(i, j) \quad (4.9)$$

ile verilmektedir. $y_t(i, j)$, 1-boyutlu zamansal BGF'nin çıkışıdır ve matematiksel modeli

$$\dot{y}_t(i, j) = (-\alpha + j\Omega_{t0})y_t(i, j) + v_t(i, j) \quad (4.10)$$

biçiminde verilmiştir. Bu zamansal filtre, 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin çıkışının gerçel ve karmaşık kısımlarının ayrı birer giriş olarak uygulandığı Şekil 4.3'te verilen devre ile gerçekleştirilmiştir [19]. HSA yapısı gereği 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin tasarımına uygun olmadığı için böyle bir tasarım verilmiştir.



Şekil 4.3 1-boyutlu zamansal filtrenin gerçekleştirilmesi [19]

Giriş görüntüsü öncelikle 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin devresine uygulanmakta ve bu filtrenin çıkışı 1-boyutlu zamansal BGF'nin devresinden geçirilmektedir. 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin devresi, video çerçevelerinin geliş süresinden çok daha hızlı sonuca yakınsamaktadır. Shi, tasarım açısından bunun avantaj olduğunu, diğer 3- boyutlu uzay-zamansal filtrelerin de bu ilke ile kolaylıkla VLSI devresiyle gerçekleştirilebileceğini belirtmiştir [19]. Ancak bu önerilen 3- boyutlu uzay-zamansal filtrenin sayısal tasarımı üzerine herhangi bir bilgi verilmemiştir.

Shi tarafından verilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin bilgisayar simülasyonunu yapmak için iç içe olan 2 farklı fark denkleminin iteratif çözümü yapılmalıdır. Bunlardan ilki (4.9)'da verilen HSA eşitliğine ileri Euler yaklaşıklığı uygulayarak elde edilen

$$v_{k+1}(i, j) = v_k(i, j) + T_s \left(A_{gabor} \otimes V_k(i, j) + B_{gabor} \otimes U(i, j) \right) \quad (4.11)$$

fark denklemdir. Öncelikle bu denklemin sonuca yakınsaması beklenmelidir. Bazı uygulamalarda bu fark denklemi 1000 iterasyon sonunda sonuca yakınsayabilir. Diğer fark denklemi (4.10)'a ileri Euler yaklaşıklığı uygulayarak elde edilen

$$y_{k+1}(i, j) = y_k(i, j) + T_s \left[(-\alpha + j\Omega_{t0}) y_k(i, j) + v_k(i, j) \right] \quad (4.12)$$

fark denklemdir. Bu fark denkleminin bir iterasyonu için, (4.11)'in sonuca yakınsamasını beklenmelidir. Burada iki farklı fark denklemini iç içe çözmek yerine (4.9)'un vektör-matris formu olan

$$\dot{\mathbf{v}}_t = \hat{\mathbf{A}}_{gabor} \mathbf{v}_t + \hat{\mathbf{B}}_{gabor} \mathbf{u} \quad (4.13)$$

kullanılabilir. Bu eşitlikteki giriş sabit olduğu için $t \rightarrow \infty$ türev terimi sıfıra gidecektir ve bu eşitliğin çözümü

$$\mathbf{v}_k = -\hat{\mathbf{A}}_{gabor}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_{gabor} \mathbf{u}_k \quad (4.14)$$

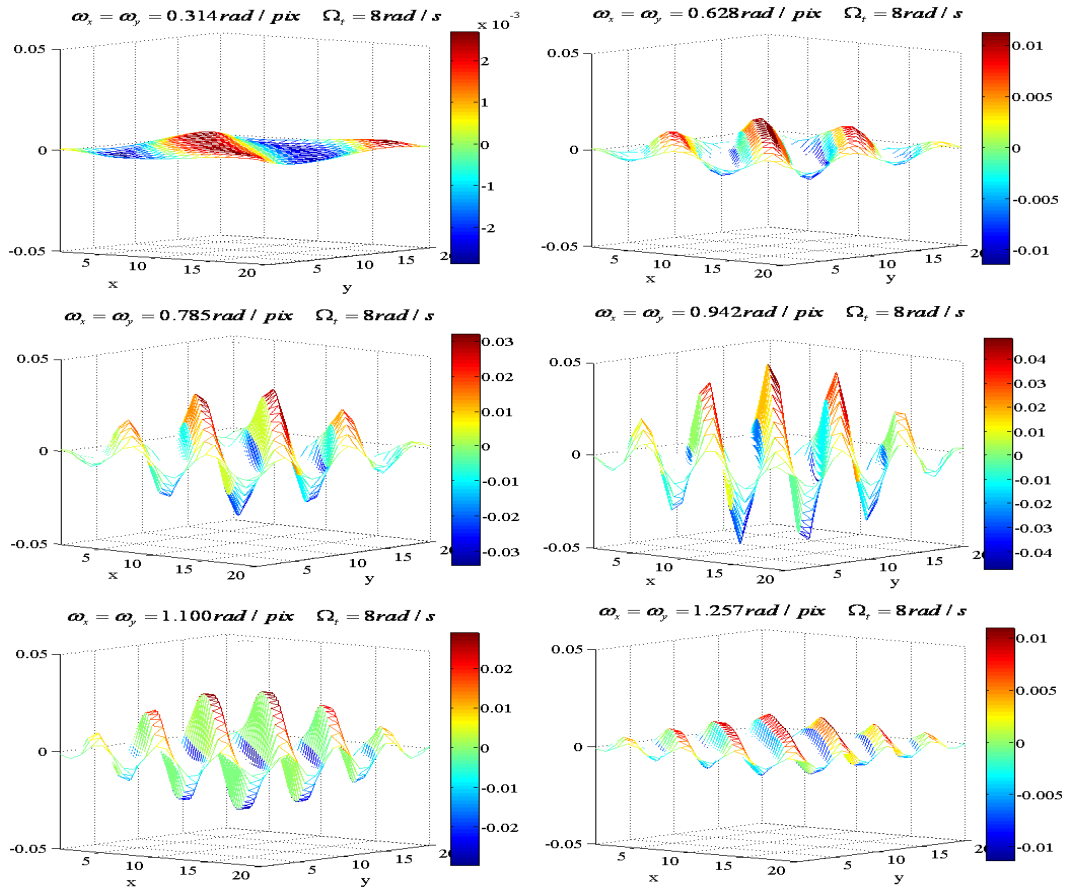
biçiminde elde edilebilir. Aynı şekilde (4.12) fark denklemi vektör-matris formunda

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + T_s \left[(-\alpha + j\Omega_{t0}) \mathbf{y}_k + \mathbf{v}_k \right] \quad (4.15)$$

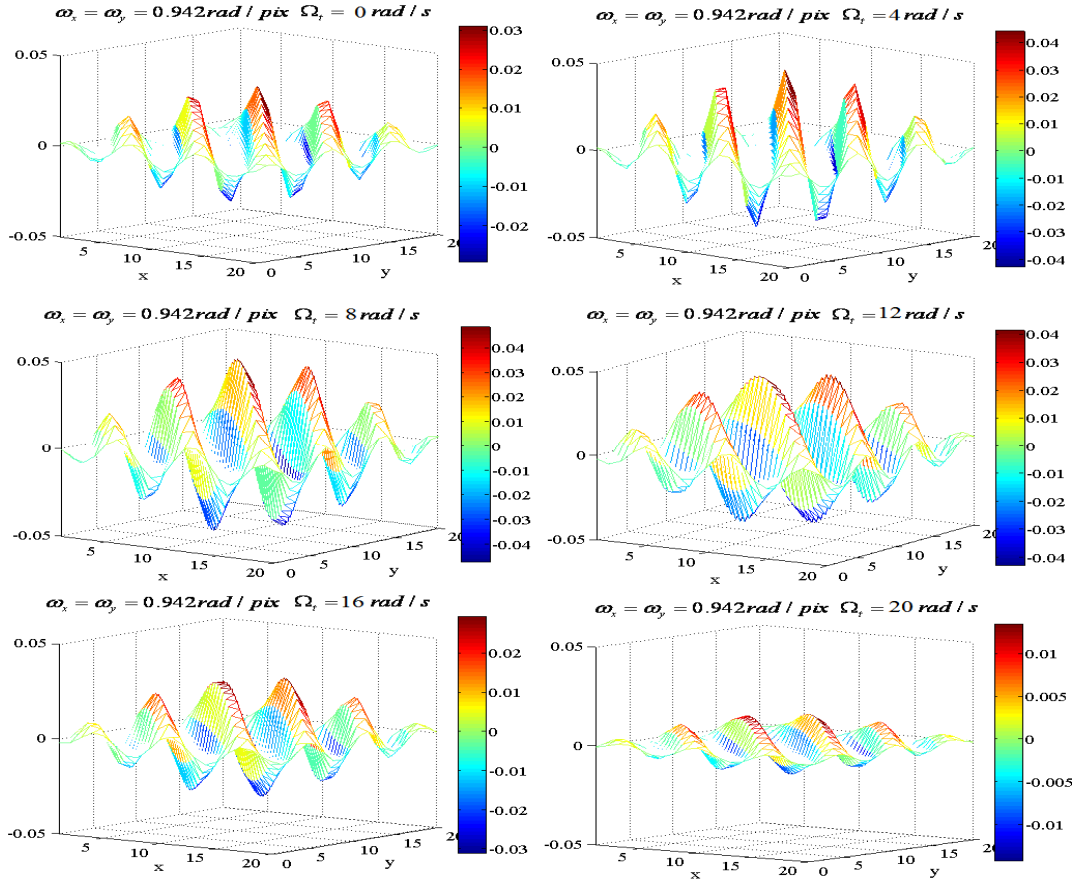
olarak yazılabilir ve (4.14) bu eşitlikte yerine konursa

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + T_s \left[(-\alpha + j\Omega_{t0}) \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{A}}_{gabor}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_{gabor} \mathbf{u}_k \right] \quad (4.16)$$

fark denklemi elde edilir. Bu şekilde tek bir fark denklemini çözerek bu filtrenin simülasyonu yapılabilir. $\alpha = 0.5$, $\lambda = 0.1$, merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ için elde edilen şablonlar için Shi tarafından önerilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin gerçel çıkışları, çeşitli uzamsal frekanslı girişler için Şekil 4.4'te, çeşitli zamansal frekanslı girişler için Şekil 4.5'te verilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi, filtrenin merkez frekans değerleri olan $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ frekans değerli girişler için en büyük genlikli çıkışlar elde edilirken, diğer frekanslı girişler bastırılmıştır.



Şekil 4.4 $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin çıkışlarının gerçel kısmı. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.



Şekil 4.5 $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ için çeşitli zamansal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin çıkışlarının gerçel kısmı. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / \text{s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.

Bu bölümde 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu ile 1.türevli ZTHSA transfer fonksiyonu arasındaki ilişki verilmiştir. Buradan yola çıkılarak iki farklı filtrenin devresinin kaskad bağlanması ile tasarlanan 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin, sadece ZTHSA ile tasarımı elde edilmiştir. Bu tasarımın, özellikle sayısal gerçekleştirme açısından, hızlı ve etkili bir tasarım olduğunun altı çizilmiştir.

4.1 3-Boyutlu Uzay-Zamansal Gabor-Tipi Filtrenin ZTHSA ile Tasarımı

Eşitlik (4.8)'de verilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu

$$H_G(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t) = \frac{1}{\alpha + j(\Omega_t - \Omega_{t0})} \frac{\tilde{B}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\left[-\tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \right]} \quad (4.17)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, $\tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ 2-boyutlu Gabor-tipi filtrenin HSA şablonlarının AUFD'sidir. Bu transfer fonksiyonu $j\Omega_t$ 'nin katsayıları bir tarafta, kalanlar diğer tarafta olmak üzere düzenlenirse

$$H_G(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t) = \frac{\tilde{B}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{-\alpha \tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) - \tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) j(\Omega_t - \Omega_{t0})} \quad (4.18)$$

$$H_G(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t) = \frac{\tilde{B}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{(-\alpha + j\Omega_{t0}) \tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) - \tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) j(\Omega_t)} \quad (4.19)$$

elde edilebilir.

Eşitlik (3.2)'de verilen ZTHSA'nın eşitliği standart konvolüsyon formunda yazabilmek için

$$\begin{aligned} \frac{dv_t(i, j)}{dt} &= \sum_{k, l=-r}^r \tilde{A}(k, l) v_t(i-k, j-l) \\ &+ \sum_{k, l=-r}^r \tilde{B}(k, l) u_t(i-k, j-l) + \sum_{k, l=-r}^r \tilde{A}_1(k, l) \frac{dv_t(i-k, j-l)}{dt} \end{aligned} \quad (4.20)$$

biçiminde düzenlenebilir [8]. Burada

$$\begin{aligned} \tilde{A}(k, l) &= \begin{cases} A(-k, -l), & |k| \leq r, |l| \leq r \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}, \tilde{B}(k, l) = \begin{cases} B(-k, -l), & |k| \leq r, |l| \leq r \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \\ \tilde{A}_1(k, l) &= \begin{cases} A_1(-k, -l), & |k| \leq r, |l| \leq r \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

olarak verilebilir. Eğer şablonlar simetrikse (3.2) ile (4.20) aynı olacaktır.

$$H_{ZTHSA}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t) = \frac{\tilde{V}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t)}{\tilde{U}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t)} \quad (4.22)$$

ile tanımlanan 3-boyutlu transfer fonksiyonu, (4.20) eşitliğinden

$$H_{ZTHSA}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t) = \frac{\tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{-\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) + (1 - \tilde{A}_1(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})) j(\Omega_t)} \quad (4.23)$$

olarak elde edilebilir. Eşitlikler (4.19)'da ve (4.23)'de verilen transfer fonksiyonları karşılaştırılırsa yapı olarak benzedikleri söylenebilir. Her iki transfer fonksiyonundaki katsayılar birbirine eşitlenirse

$$1 - \tilde{A}_1(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = -\tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \quad (4.24)$$

$$\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = (-\alpha + j\Omega_{t0}) \tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \quad (4.25)$$

ve

$$\tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = \tilde{B}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \quad (4.26)$$

yazılabilir. Öncelikle A_1 ZTHSA şablonunu, A_{gabor} şablonundan elde edelim. Bunun için A_{gabor} şablonunun AUFD olan $\tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ açık olarak yazılıp (4.24)'te yerine konulabilir ve

$$\tilde{A}_1(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = \tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) + 1 \quad (4.27)$$

$$\tilde{A}_1(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = -(4 + \lambda^2) + 2 \cos(\omega_x - \omega_{x0}) + 2 \cos(\omega_y - \omega_{y0}) + 1 \quad (4.28)$$

$$\tilde{A}_1(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = -(3 + \lambda^2) + 2 \cos(\omega_x - \omega_{x0}) + 2 \cos(\omega_y - \omega_{y0}) \quad (4.29)$$

elde edilir. Eşitlik (4.29)'un ters AUFD alınır 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtreye ilişkin A_1 ZTHSA şablonu

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\omega_{y0}} & 0 \\ e^{-j\omega_{x0}} & -(3 + \lambda^2) & e^{j\omega_{x0}} \\ 0 & e^{j\omega_{y0}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

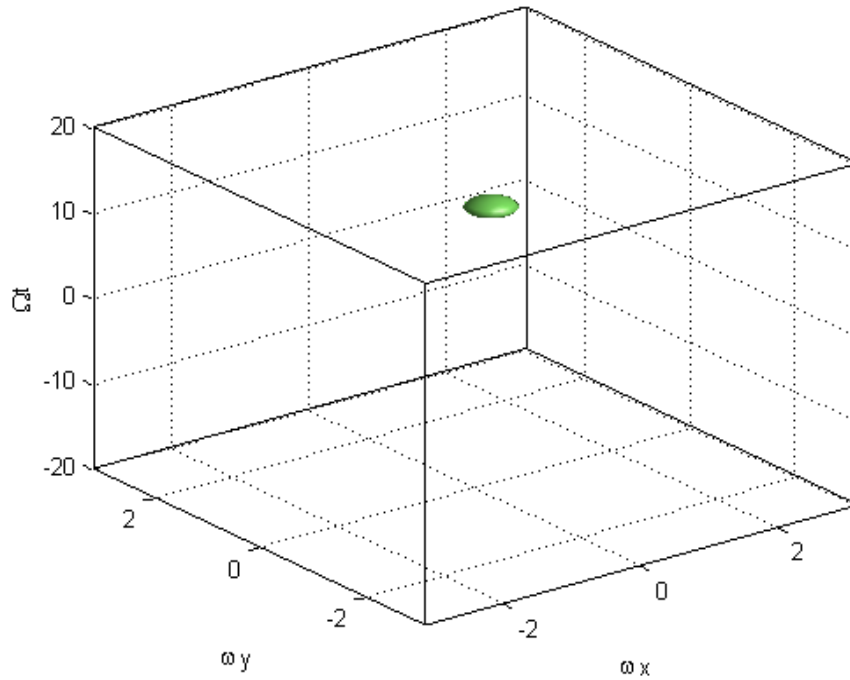
olarak verilebilir. Aynı şekilde $A_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ (4.25)'te, $B_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ da (4.26)'da yerine yazılıp elde edilen eşitliklerin ters AUFD alınır 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtreye ilişkin A ve B ZTHSA şablonları

$$A = (-\alpha + j\Omega_{t0}) \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\omega_{y0}} & 0 \\ e^{-j\omega_{x0}} & -(4 + \lambda^2) & e^{j\omega_{x0}} \\ 0 & e^{j\omega_{y0}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

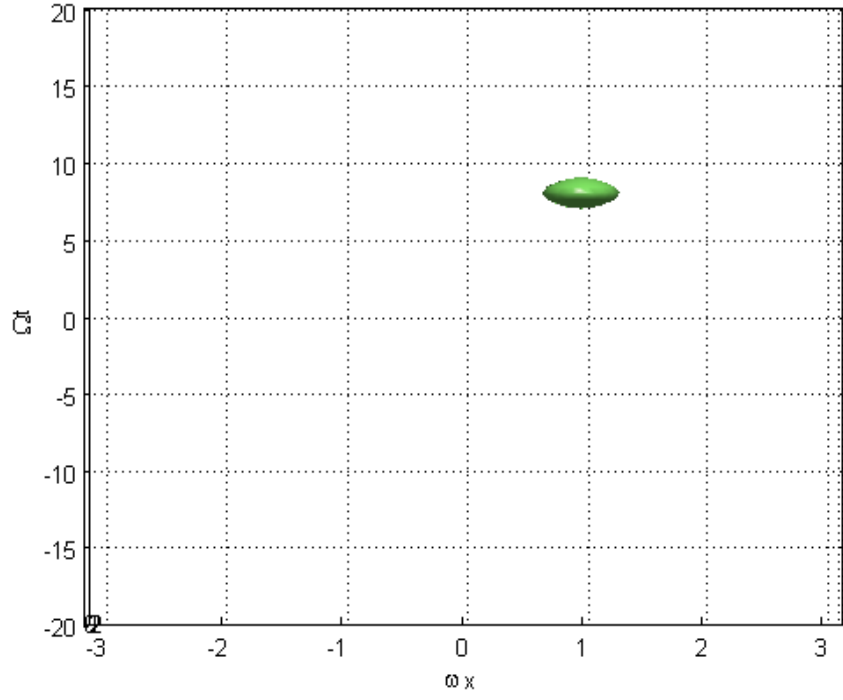
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

şeklinde bulunabilir. $\alpha = 1$, $\lambda = 0.5$, merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ için elde edilen şablonlar için Gabor-tipi filtreyi gerçekleyen ZTHSA'nın genlik-frekans yanıtı Şekil 4.6 4.7 ve 4.8'de verilmiştir.

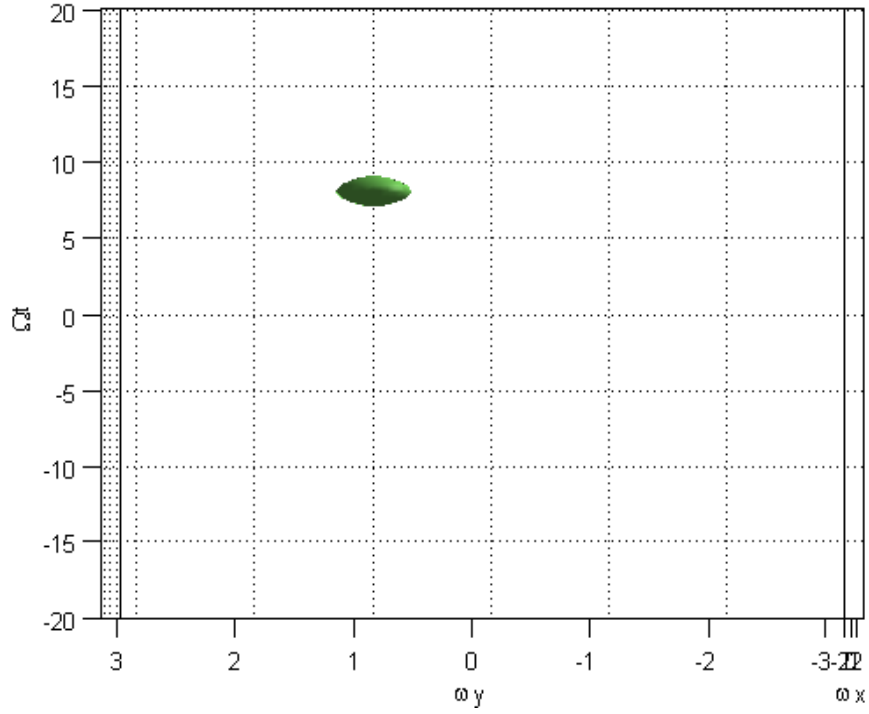
Şekillerde görülen balonun içi bu filtrenin geçirme bandını, dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Balon, filtrenin merkez frekansları olan $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ çevresindedir. Başka bir deyişle ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik-frekans yanıtı tasarımı istenen karakteristiği göstermiştir.



Şekil 4.6 Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942rad / pix$ ve $\Omega_{t0} = 8rad / s$ olan ve ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik-frekans yanıtı

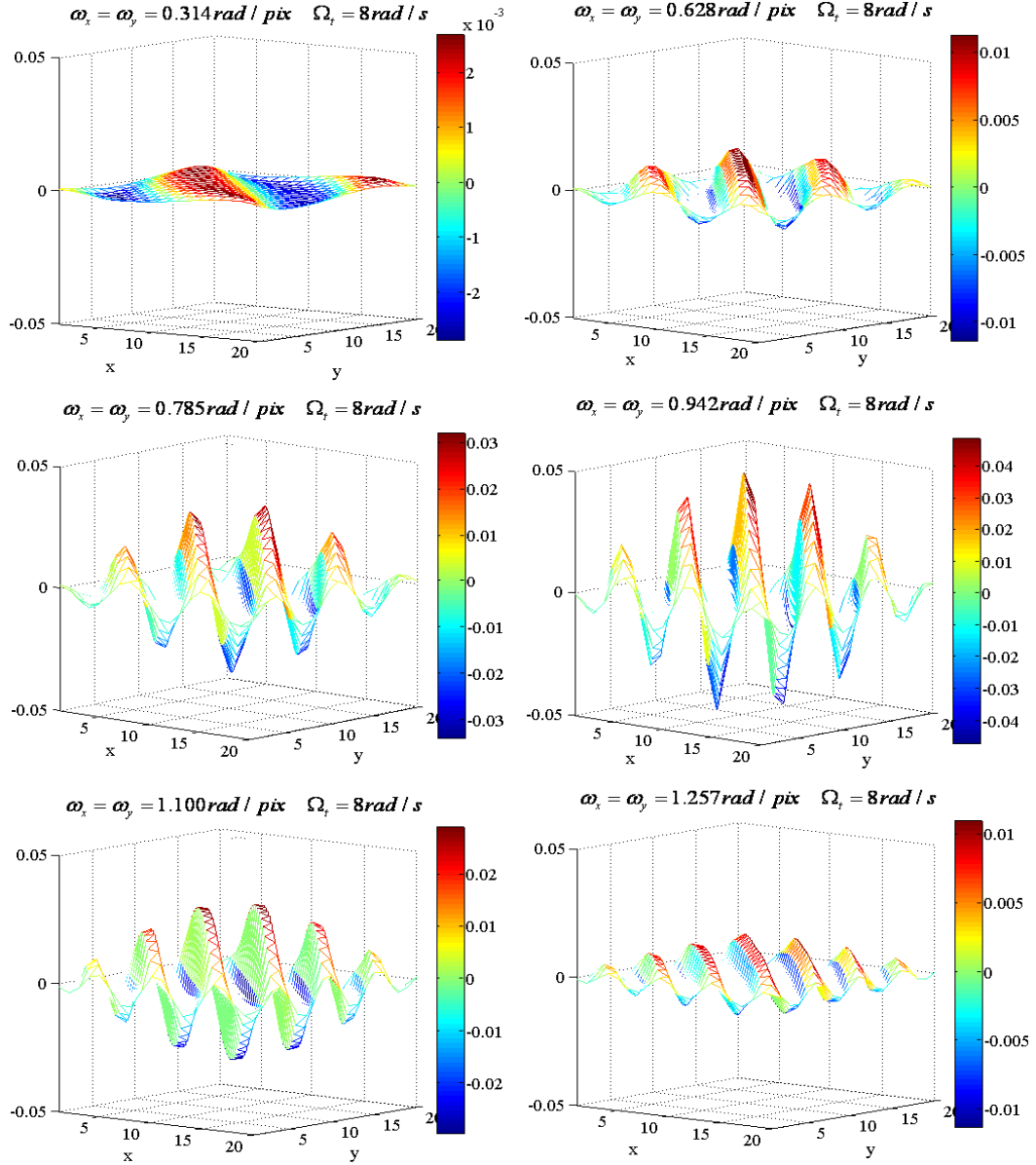


Şekil 4.7 Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ olan ve ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik-frekans yanıtı

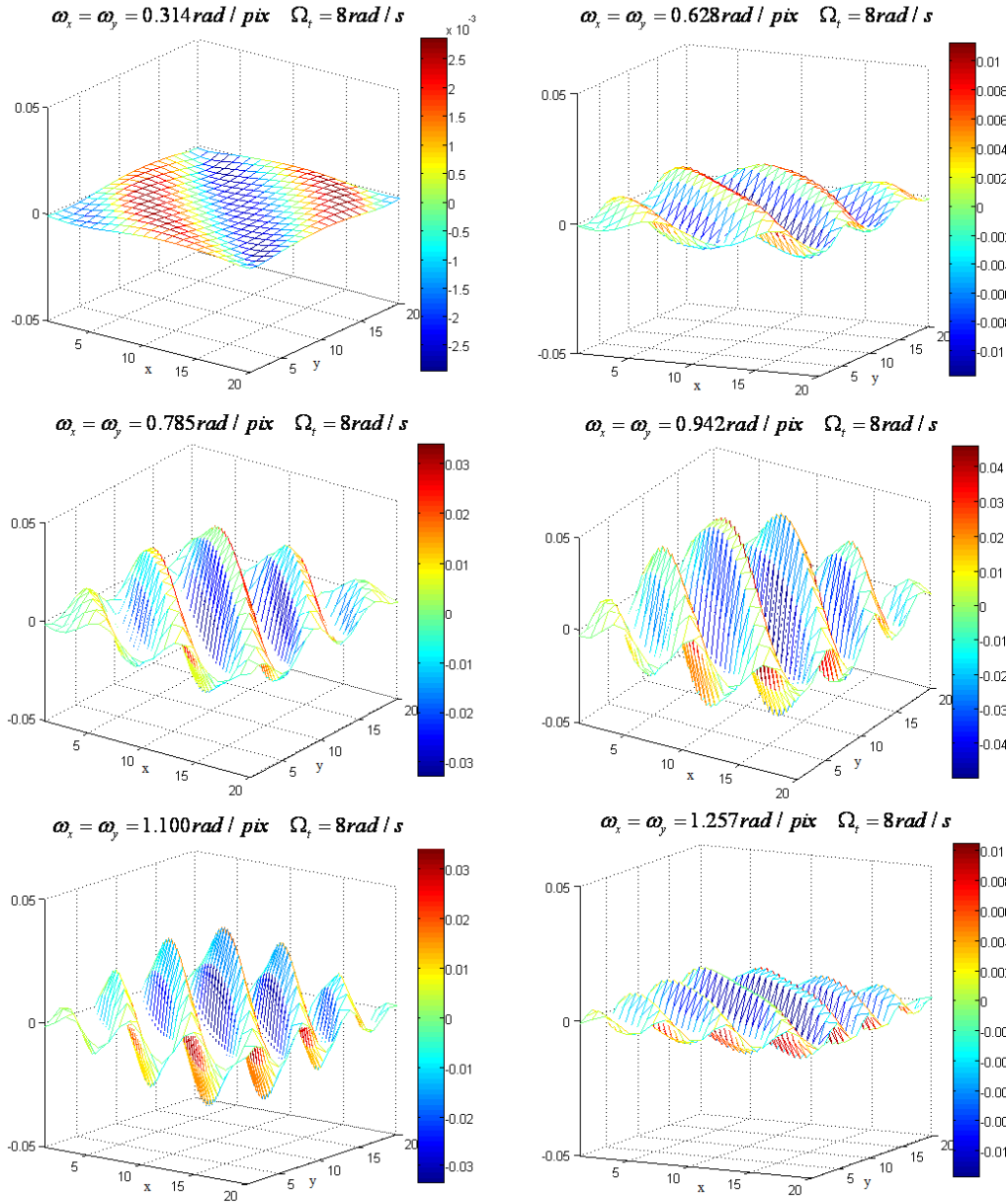


Şekil 4.8 Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ olan ve ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik-frekans yanıtı

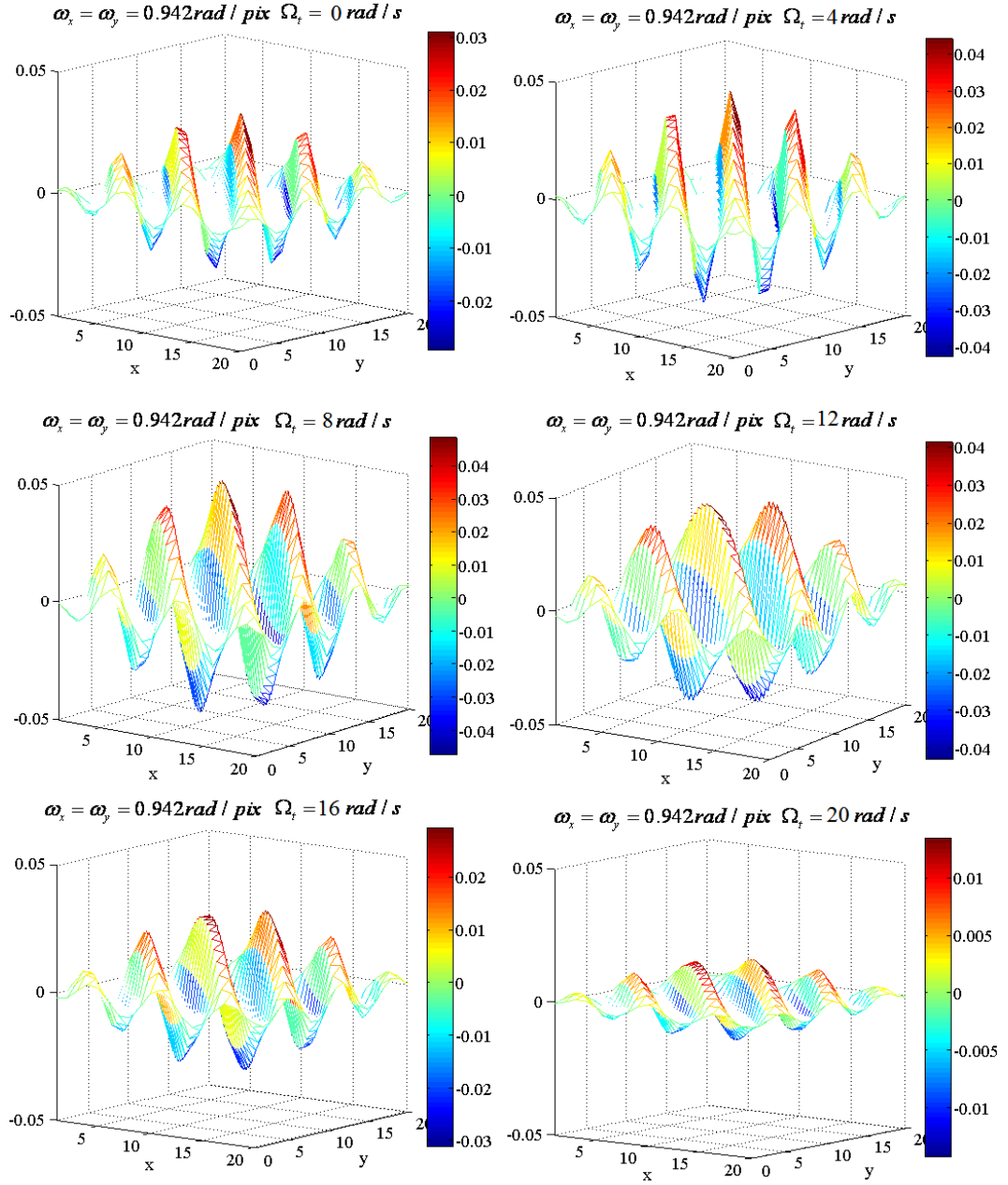
Merkez frekans değerleri $\omega_{x0} = \omega_{y0} \cong 1 \text{ rad / pix}$, $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad / s}$ olarak belirlenen ve ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin simülasyonu (3.9) kullanılarak yapılmıştır. Şekil 4.9’da ve 4.10’da $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad / s}$ ve değişik uzamsal frekanslar ile verilen sinüzoidal girişler için, Şekil 4.11’de ve 4.12’de $\omega_{x0} = \omega_{y0} \cong 1 \text{ rad / pix}$ ve değişik zamansal frekanslar ile verilen girişler için filtre çıkışının gerçel ve sanal kısımları verilmektedir.



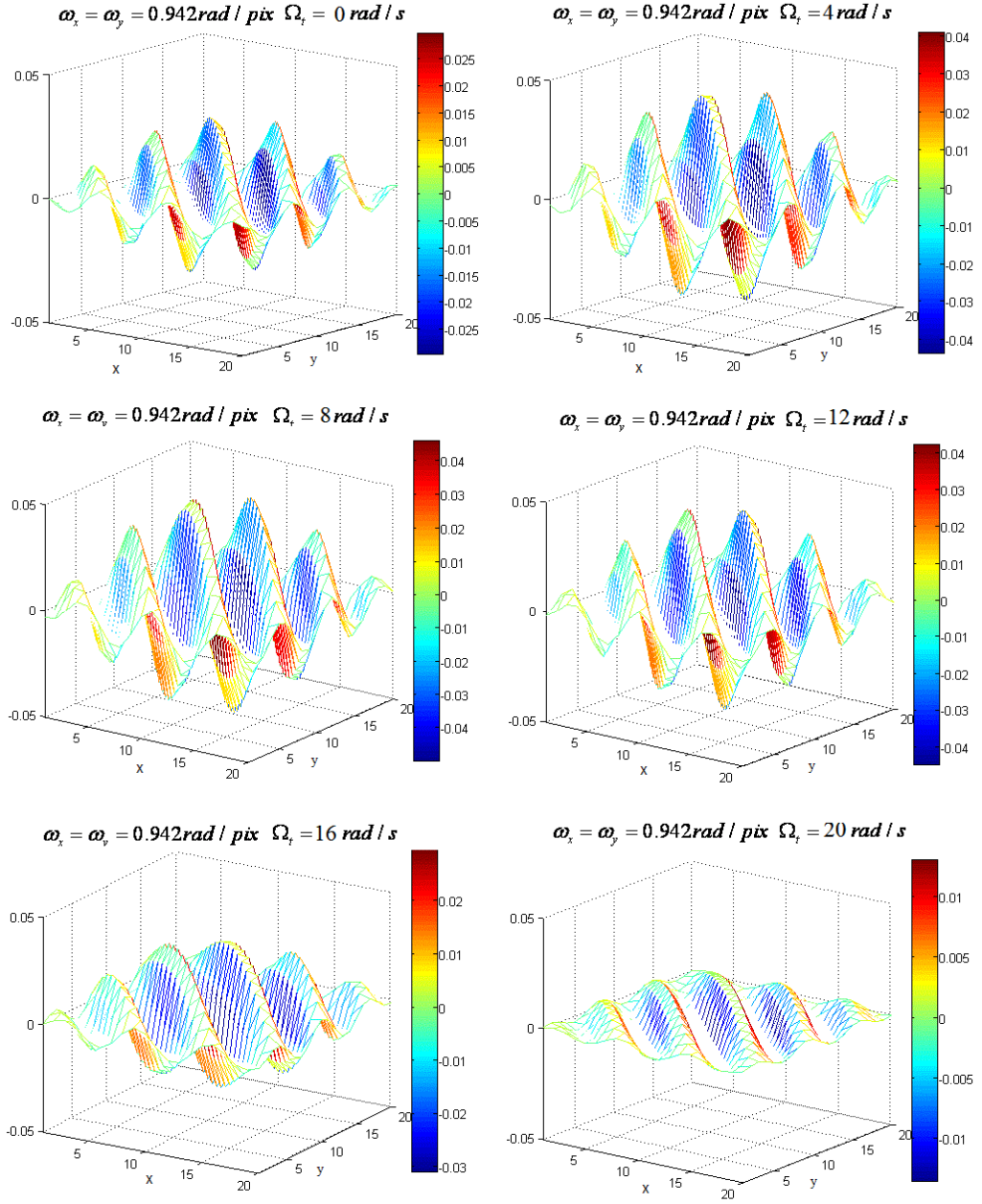
Şekil 4.9 $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad / s}$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile elde edilen çıkışlarının gerçel kısmı.
 $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad / pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad / s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.



Şekil 4.10 $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ için çeşitli uzamsal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile elde edilen çıkışlarının sanal kısmı.
 $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.



Şekil 4.11 $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ için çeşitli zamansal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile elde edilen çıkışlarının gerçel kısmı. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad/pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.



Şekil 4.12 $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ için çeşitli zamansal frekanslardaki 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile elde edilen çıkışlarının sanal kısmı. $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / \text{s}$ frekanslı giriş çıkışta en büyük değere ulaşmış, diğer frekanslar için çıkış genliği düşmüştür.

Şekillerden görüldüğü üzere ZTHSA ile tasarlanan 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtre istenen merkez frekans değerleri olan $\omega_{x0} = \omega_{y0} \cong 1 \text{ rad} / \text{pix}$, $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / \text{s}$ frekanslı girişler için en büyük genlikli çıkışı verirken diğer frekanslı girişler sönümlenmektedir.

Çizelge 4.1 Çeşitli uzamsal frekanslar ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ için üç filtre tipinin gerçel çıkışının genlik değerleri

Uzamsal giriş frekansları	Gerçel çıkışın genliği (normalize)	
$\omega_x = \omega_y$ [rad/pix]	Gabor-tipi filtre [19] ve önerilen ZTHSA Gabor-tipi filtre	ZTHSA band geçiren filtre (gerçel şablonlu) [10]
0.314	0.06	0.1946
0.628	0.2375	0.4358
0.785	0.6806	0.7602
0.942	1	1
1.100	0.6766	0.7378
1.257	0.2355	0.4256

Çizelge 4.2 Çeşitli zamansal frekanslar ve $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 1 \text{ rad} / \text{pix}$ için üç filtre tipinin gerçel çıkışının genlik değerleri

Zamansal giriş frekansları	Gerçel çıkışın genliği (normalize)	
Ω_t [rad/s]	Gabor-tipi filtre [19] ve önerilen ZTHSA Gabor-tipi filtre	ZTHSA band geçiren filtre (gerçel şablonlu) [10]
0	0.6267	0.6970
4	0.8962	0.9470
8	1	1
12	0.8982	0.8478
16	0.6287	0.5793
20	0.2834	0.2529

Çizelge 4.1'de ve 4.2'de görüldüğü üzere, Shi [19] tarafından önerilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin çıkışları ile ZTHSA tasarımı verilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin çıkışları birbiriyle aynıdır. Shi, 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtreyi iki farklı filtrenin analog devresini birbirine kaskad bağlayarak tasarlamıştır. Giriş görüntüsü öncelikle 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtreye uygulanmakta ve bu filtrenin çıkışı 1-boyutlu zamansal BGF'den geçirilmektedir. 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin devresi, video çerçevelerinin geliş süresinden çok daha hızlı sonuca yakınsamaktadır. Başka bir deyişle 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtre, 1-boyutlu zamansal BGF'den önce işlemini gerçeklemektedir. Böylelikle giriş hem zamanda hem uzayda işlenebilmektedir. Ancak Shi'nin önerdiği sistem sayısal tasarımı işlem zamanlarında sorun çıkarabilmektedir. Başka bir deyişle 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin sayısal tasarımı analog tasarımı kadar hızlı çalışamayacak, hatta bu filtre ancak iki video çerçevesi arasındaki sürede sonuç verebilecektir. Bunun nedeni 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtresinin sayısal tasarımı çok fazla iterasyon yapılarak sistemin sonuca yakınsamasının beklenmesidir. Bundan dolayı 1-boyutlu zamansal BGF'ye yeterli zaman kalmayabilir. Burada 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtre, ZTHSA ile tasarlanarak tek aşamada istenen işlemi yapmaktadır. Ayrıca sistem ek bir filtre tasarımına ihtiyaç duymamaktadır. Bu açıdan bu filtrenin ZTHSA ile tasarımı FPGA ve benzeri bir ortam ile gerçeklenmeye uygun olmaktadır.

İp vd. [10]'nın verdiği 3-boyutlu BGF tasarımı gerçel ve karmaşık ZTHSA şablonları kullanılmıştır. Bu şablonlar BGF için kabaca yapılan analizler ile elde edilmiştir. Ayrıca BGF'nin merkez frekanslarının nasıl ayarlanacağı açık değildir. Karmaşık şablonlu ZTHSA ile tasarlanan 3-boyutlu BGF'nin uygun frekanslara ayarlanması için 14 değişkenin belirlenmesi gerekmektedir ki bu değişkenlerin görevleri ve anlamları açık değildir [10]. Yukarıdaki çizelgelerdeki değerler gerçel şablonlu ZTHSA ile tasarlanan 3-boyutlu BGF'ye aittir. Burada ZTHSA ile tasarlanan 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin şablonlarındaki ω_{x0} , ω_{y0} ve Ω_{t0} değerlerini değiştirmekle filtrenin merkez frekans değerlerinin ayarlanabilir olması tasarım kolaylığı sağlamaktadır.

4.2 3-Boyutlu Uzay-Zamansal Gerçel Gabor-Tipi Filtrenin ZTHSA ile Gerçeklenmesi

Önceki bölümde verilen tasarımda 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA şablonları karmaşık değerlidir. Bu bölümde 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA gerçekleştirilmesi gerçel değerli şablonlar ile yapılmıştır.

Önceki bölümde verilen zamansal BGF'nin transfer fonksiyonu, AGF'nin transfer fonksiyonunun zamansal frekanslarda Ω_{t0} frekansına ötelenmesi ile elde edilmiştir. Bu AGF'nin genlik-frekans yanıtı $\pm\Omega_{t0}$ frekanslarına ötelenirse,

$$H_{BGF}(j\Omega_t) = H_{AGF}(j(\Omega_t - \Omega_{t0})) + H_{AGF}(j(\Omega_t + \Omega_{t0})) \quad (4.33)$$

$$H_{BGF}(j\Omega_t) = \frac{1}{\alpha + j(\Omega_t - \Omega_{t0})} + \frac{1}{\alpha + j(\Omega_t + \Omega_{t0})} \quad (4.34)$$

$$H_{BGF}(j\Omega_t) = \frac{2(\alpha + j\Omega_t)}{-\Omega_t^2 + 2j\alpha\Omega_t + (\alpha^2 + \Omega_{t0}^2)} \quad (4.35)$$

biçiminde BGF'nin gerçel katsayılı transfer fonksiyonu elde edilebilir. Eşitlik (4.4)'te (4.35)'te verilen transfer fonksiyonu yerine yazılırsa 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu

$$H_G(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t) = \frac{2(\alpha + j\Omega_t)}{-\Omega_t^2 + 2\alpha j\Omega_t + (\alpha^2 + \Omega_{t0}^2)} \frac{\tilde{B}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{[-\tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})]} \quad (4.36)$$

olarak elde edilir. Bu transfer fonksiyonu düzenlenirse

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, j\Omega_t) = \frac{2(\alpha + j\Omega_t)\tilde{B}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{[-\tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})]\Omega_t^2 + 2[-\tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})]j\alpha\Omega_t + [-\tilde{A}_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})](\alpha^2 + \Omega_{t0}^2)} \quad (4.37)$$

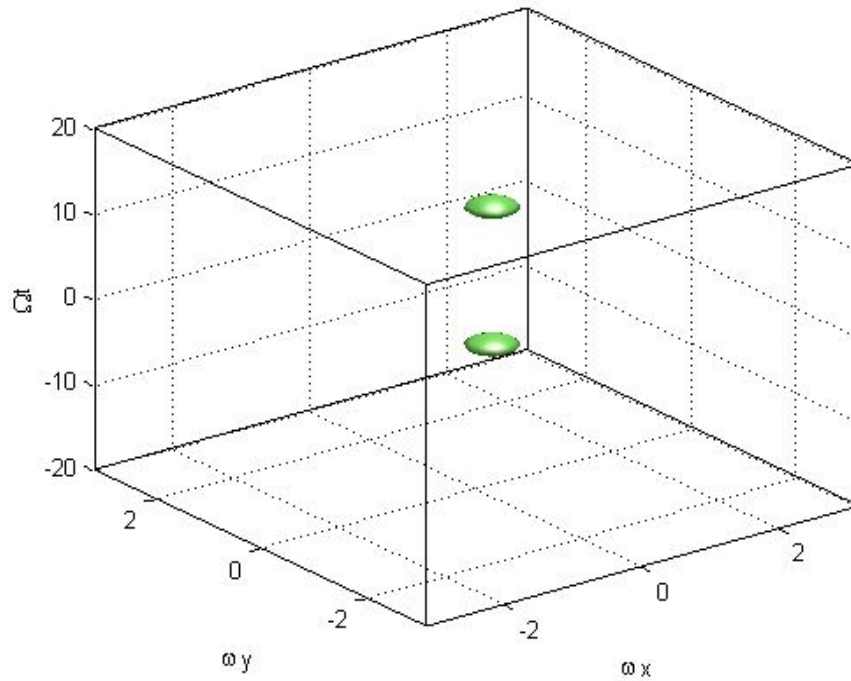
eşitliği yazılabilir. Bu transfer fonksiyonuna ters Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{dv_t(i, j)}{dt} &= \frac{1}{2\alpha}(\alpha^2 + \Omega_{t0}^2)A_{gabor} \otimes V_t(i, j) + B_{gabor} \otimes U_t(i, j) \\ &+ A_1 \otimes \frac{dV_t(i, j)}{dt} + \frac{1}{2\alpha}B_{gabor} \otimes \frac{dU_t(i, j)}{dt} + \frac{1}{2\alpha}A_{gabor} \otimes \frac{d^2V_t(i, j)}{dt^2} \end{aligned} \quad (4.38)$$

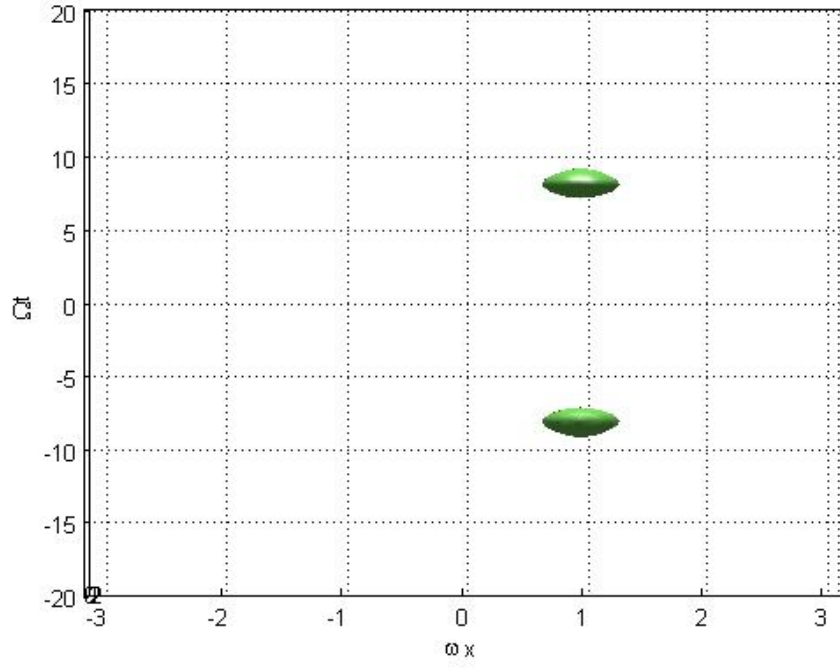
2. türevli ZTHSA eşitliği elde edilir. Burada $A_{gabor} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\omega_{y0}} & 0 \\ e^{-j\omega_{x0}} & -(4 + \lambda^2) & e^{j\omega_{x0}} \\ 0 & e^{j\omega_{y0}} & 0 \end{bmatrix}$

$B_{gabor} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ için A_1 şablonu (4.30)'da verilmiştir. $\alpha = 1$, $\lambda = 0.5$,

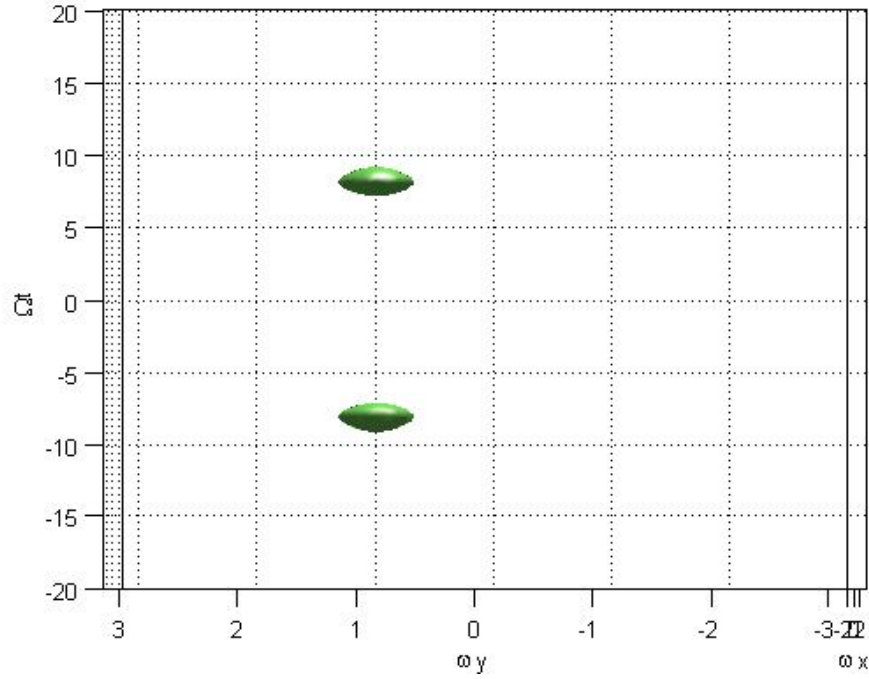
$\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / \text{s}$ için elde edilen 2. türevli ZTHSA'nın genlik-frekans yanıtı Şekil 4.13, 4.14 ve 4.15'te verilmiştir.



Şekil 4.13 Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / \text{s}$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı



Şekil 4.14 Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı



Şekil 4.15 Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / s$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı

A_{gabor} karmaşık değerli bir şablon olduğu için (4.38) ile verilen 2. türevli ZTHSA'nın şablonları karmaşık değerlidir. 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin reel değerli şablonlarını elde etmek için 2-boyutlu uzamsal Gauss-tipi filtrenin transfer fonksiyonunu $\pm\omega_{x0}$ ve $\pm\omega_{y0}$ ötelemek gerekmektedir. Bu durumda, 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu

$$H_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = H_{gauss}(e^{j(\omega_x - \omega_{x0})}, e^{j(\omega_y - \omega_{y0})}) + H_{gauss}(e^{j(\omega_x + \omega_{x0})}, e^{j(\omega_y + \omega_{y0})}) \quad (4.39)$$

$$H_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = \frac{\lambda^2}{(4 + \lambda^2) - 2\cos(\omega_x - \omega_{x0}) - 2\cos(\omega_y - \omega_{y0})} + \frac{\lambda^2}{(4 + \lambda^2) - 2\cos(\omega_x + \omega_{x0}) - 2\cos(\omega_y + \omega_{y0})} \quad (4.40)$$

$$H_{gabor}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = -\frac{\tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \quad (4.41)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = 2\lambda^2(\lambda^2 + 4) - 4\lambda^2 \cos \omega_{x0} \cos \omega_x - 4\lambda^2 \cos \omega_{y0} \cos \omega_y \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = & \left((\lambda^2 + 4)^2 + 2\cos 2\omega_{x0} + 2\cos 2\omega_{y0} \right) - 4(\lambda^2 + 4)\cos \omega_{x0} \cos \omega_x \\ & - 4(\lambda^2 + 4)\cos \omega_{y0} \cos \omega_y + 4\cos(\omega_{x0} - \omega_{y0})\cos(\omega_x + \omega_y) \\ & + 4\cos(\omega_{x0} + \omega_{y0})\cos(\omega_x - \omega_y) + 2\cos 2\omega_x + 2\cos 2\omega_y \end{aligned} \quad (4.43)$$

olarak yazılabilir. Buradan şablonlar

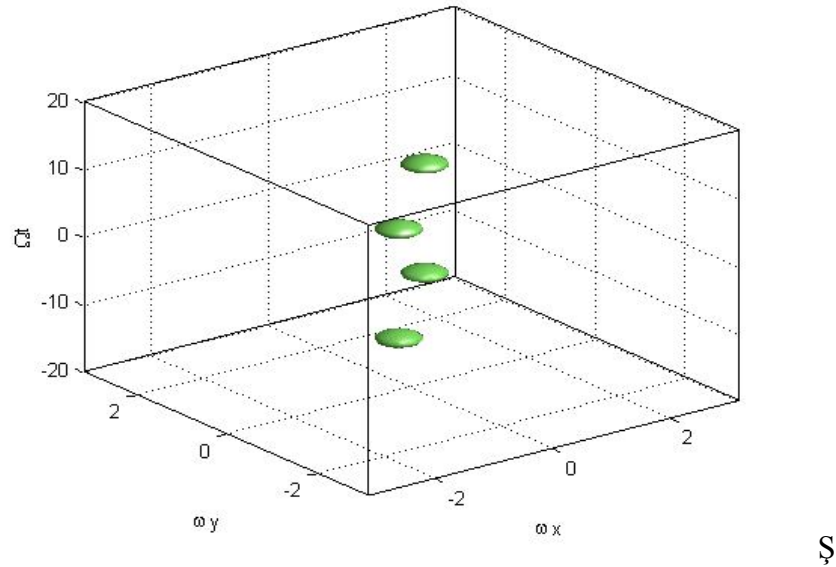
$$B_{gabor} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 \cos \omega_{y0} & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda^2 \cos \omega_{x0} & -2\lambda^2(\lambda^2 + 4) & 2\lambda^2 \cos \omega_{x0} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 \cos \omega_{y0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{gabor} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\cos(\omega_{x0}-\omega_{y0}) & 2(\lambda^2+4)\cos\omega_{y0} & -2\cos(\omega_{x0}+\omega_{y0}) & 0 \\ -1 & 2(\lambda^2+4)\cos\omega_{x0} & -\left[(\lambda^2+4)^2+2\cos 2\omega_{x0}+2\cos 2\omega_{y0}\right] & 2(\lambda^2+4)\cos\omega_{x0} & -1 \\ 0 & -2\cos(\omega_{x0}+\omega_{y0}) & 2(\lambda^2+4)\cos\omega_{y0} & -2\cos(\omega_{x0}-\omega_{y0}) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

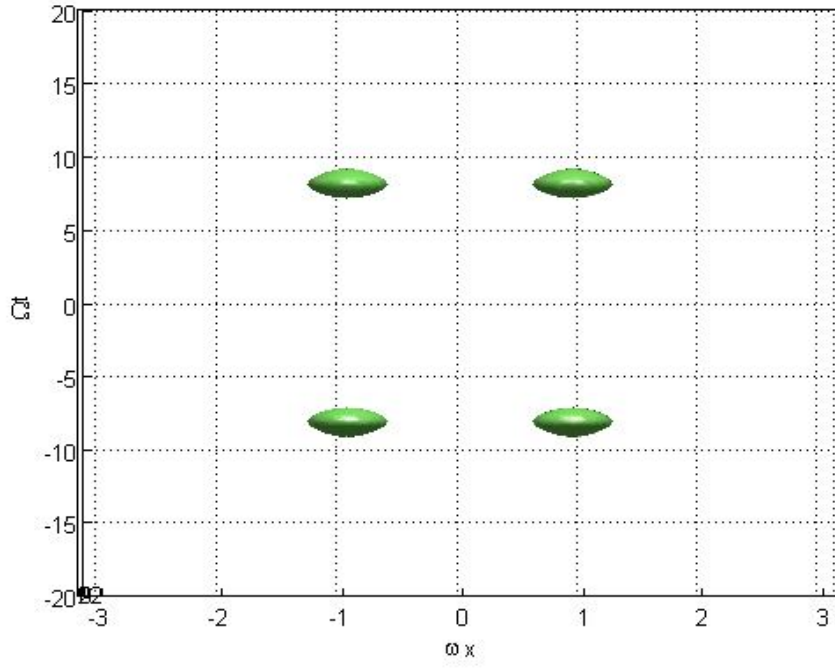
biçiminde bulunur. Bu şablonlar (4.38)'de yerlerine yazılırsa 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin gerçel şablonlu ZTHSA ile tasarımı elde edilir. Burada A_1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\cos(\omega_{x0}-\omega_{y0}) & 2(\lambda^2+4)\cos\omega_{y0} & -2\cos(\omega_{x0}+\omega_{y0}) & 0 \\ -1 & 2(\lambda^2+4)\cos\omega_{x0} & -\left[(\lambda^2+4)^2+2\cos 2\omega_{x0}+2\cos 2\omega_{y0}-1\right] & 2(\lambda^2+4)\cos\omega_{x0} & -1 \\ 0 & -2\cos(\omega_{x0}+\omega_{y0}) & 2(\lambda^2+4)\cos\omega_{y0} & -2\cos(\omega_{x0}-\omega_{y0}) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

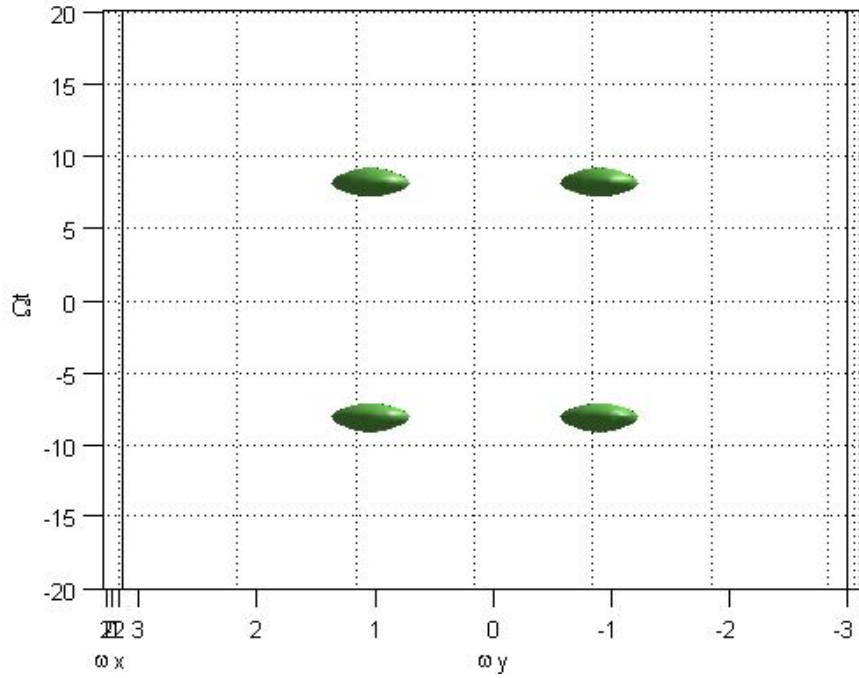
olarak elde edilebilir. $\alpha = 1$, $\lambda = 0.5$, $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942\text{rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8\text{rad} / s$ için yukarıda elde edilen şablonlar ile verilen 2. türevli ZTHSA'nın genlik-frekans yanıtı Şekil 4.16, 4.17 ve 4.18'de verilmiştir.



Şekil 4.16 Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942\text{rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8\text{rad} / s$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı



Şekil 4.17 Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / \text{s}$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı



Şekil 4.18 Merkez frekansları $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0.942 \text{ rad} / \text{pix}$ ve $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad} / \text{s}$ olan ve 2. türevli ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin genlik frekans yanıtı

Şekillerden görüldüğü gibi tasarlanan ZTHSA 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtreyi gerçeklemektedir.

4.3 Sonuçlar

Bu bölümde öncelikle Shi [19] tarafından önerilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile gerçekleştirilmesi verilmiştir. Shi, 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtreyi, 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin devresi ile 1-boyutlu zamansal BGF'nin devresini birbirine kaskad bağlayarak tasarlamıştır. Giriş görüntüsü öncelikle 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin devresine uygulanmaktadır. Bu devre bir sonraki görüntü gelene kadar sonuç vermektedir. Bu durumdan dolayı giriş hem zamanda hem uzayda işlenebilmektedir. Ayrıca bu yöntem ile diğer 3-boyutlu uzay-zamansal filtreler de gerçekleştirilebilmektedir. Ancak Shi'nin önerdiği sistemin sayısal tasarımı bu kadar hızlı sonuç vermeyecektir. Başka bir deyişle 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin sayısal tasarımı analog tasarımı kadar hızlı çalışamayacak, hatta ancak iki video çerçevesi arasındaki sürede sonuç verebilecektir. Bunun nedeni 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin sayısal tasarımında çok fazla sayıda iterasyon yapılarak sistemin sonuca yakınsamasının beklenmesidir. Bundan dolayı 1-boyutlu zamansal BGF'ye yeterli zaman kalmayabilir. Bununla birlikte her iki filtre için T_s zaman aralığının belirlenme problemi de bulunmaktadır.

Burada 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu [19] ile 1. türevli ZTHSA'nın transfer fonksiyonu arasında benzerlik olduğu gösterilerek 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile tasarımı elde edilmiştir. Bu tasarım ile tek aşamada 3-boyutlu uzay-zamansal filtreleme yapılmaktadır, ek bir filtre tasarımına ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu açıdan bu tasarım FPGA ve benzeri bir ortam üzerinde sayısal gerçeklemeye daha uygun bir tasarımdır.

İp vd. [10]'nın verdiği 3-boyutlu uzay-zamansal BGF tasarımında 5x5'lik gerçel veya 3x3'lük karmaşık değerli ZTHSA şablonları kullanılmıştır. Yazarların belirttiği üzere, bu şablonlar ile verilen BGF'nin karakteristiği, kabaca yapılan analizler ile elde edilmiştir. Bu analizlere göre karmaşık değerli şablonlu ZTHSA ile tasarlanan 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin uygun frekanslara ayarlanması için 14 farklı değişkenin belirlenmesi gerekmektedir ki bu değişkenlerin görevleri ve anlamları açık değildir [10].

Burada ZTHSA ile tasarlanan 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrede şablonlardaki ω_{x0}, ω_{y0} ve Ω_{t0} değerlerini değiştirmekle filtrenin merkez frekansları α ve λ ile de filtrenin band genişliği kolaylıkla değiştirilebilir. Katsayıların görevlerinin belirli olması açısından [10]'da verilen tasarıma göre burada verilen tasarım gerçekleştirme kolaylığı sunmaktadır.

BÖLÜM 5

3-BOYUTLU UZAY-ZAMANSAL FİLTRELERİN ZTHSA İLE TASARIMI

Bu bölümde 3-boyutlu uzay-zamansal filtreler ZTHSA ile gerçekleştirilmesi verilmiştir. Burada ZTHSA ile gerçekleştirilen 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin transfer fonksiyonları ayrıştırılabilir. Başka bir deyişle 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin transfer fonksiyonları, 1-boyutlu zamansal filtrelerin transfer fonksiyonları ile 2-boyutlu uzamsal filtrelerin transfer fonksiyonlarının çarpımı ile elde edilebilmektedir.

Bu bölümde 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin ZTHSA ile gerçekleştirilmesinde kullanılan 2-boyutlu uzamsal filtrelerin sürekli-uzay transfer fonksiyonları bir boyutlu genel zamansal analog filtre transfer fonksiyonlarından esinlenilerek oluşturulmuştur [14, 20]. Tavşanoğlu ve Tural-Polat, 2-boyutlu uzamsal AGF, yüksek geçiren filtre(YGF), BGF ve bant söndüren filtre (BSF)'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonlarını bu şekilde elde ettikten sonra bu filtrelerin diferansiyel denklemlerini vermişlerdir. Bu diferansiyel denklemlerin uzayda ayrıklaştırılması ile elde edilen fark denklemlerine zamansal türev eklenerek bu filtrelerin HSA ile gerçekleştirilebileceği gösterilmiş ve bu filtrelerin HSA şablonları elde edilmiştir [14, 20].

Bu çalışmada bu filtrelerin ayrık-uzay transfer fonksiyonları [14, 20] ile bir boyutlu genel zamansal analog filtrelerin transfer fonksiyonlarının çarpımı ile 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin ayrık-uzay sürekli-zaman transfer fonksiyonları elde edilmiştir. Elde edilen 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin ayrık-uzay sürekli-zaman transfer fonksiyonlarının ZTHSA ile gerçekleştirilebileceği gösterildikten sonra [14, 20]'de verilen

şablonlar kullanılarak bu 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin ZTHSA şablonları verilmiştir.

Shi, 2-boyutlu uzamsal AGF'nin transfer fonksiyonunu ω_{x0}, ω_{y0} frekanslarına, 1-boyutlu zamansal AGF'nin transfer fonksiyonunu da Ω_{t0} frekansına öteleyerek BGF'lerin transfer fonksiyonlarını elde etmiş ve elde ettiği bu transfer fonksiyonlarını çarparak 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonunu oluşturmuştur [19]. Bu bölümde ele alınan 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin transfer fonksiyonları, 2-boyutlu uzamsal ve 1-boyutlu zamansal AGF'nin transfer fonksiyonlarına ayrı ayrı frekans dönüşümleri uygulanması ile elde edilmiştir. 1-boyutlu zamansal filtreler için bu frekans dönüşümleri çok iyi bilinmektedir. Kısaca özetlemek gerekirse 1-boyutlu zamansal analog AGF'nin transfer fonksiyonuna uygulanan frekans dönüşümleri ve elde edilen filtrelerin transfer fonksiyonları Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1 1-boyutlu zamansal filtre frekans dönüşümleri

Frekans Dönüşümü	Prototip Filtrenin (AGF) Transfer Fonksiyonu	Elde Edilen Filtrenin Transfer Fonksiyonu
AGF-YGF Dönüşümü $s_t = \frac{1}{s_t}$	$H_{AGF}(s_t) = \frac{1}{s_t + \alpha}$	$H_{YGF}(s) = \frac{s_t}{s_t + \alpha}$
AGF-BGF Dönüşümü $s_t = \frac{s_t^2 + \Omega_{t0}^2}{s_t}$	$H_{AGF}(s_t) = \frac{1}{s_t + \alpha}$	$H_{BGF}(s) = \frac{s_t}{s_t^2 + \alpha s_t + \Omega_{t0}^2}$
AGF-BSF Dönüşümü $s_t = \frac{s_t}{s_t^2 + \Omega_{t0}^2}$	$H_{AGF}(s_t) = \frac{1}{s_t + \alpha}$	$H_{BSF}(s) = \frac{s_t^2 + \Omega_{t0}^2}{s_t^2 + \alpha s_t + \Omega_{t0}^2}$

2-boyutlu uzamsal filtreler için frekans dönüşümleri verilmemiştir. Tavşanoğlu ve Tural-Polat'ın çalışmasında bu kısım eksik kalmıştır [14, 20]. 3-boyutlu uzay-zamansal

filtrelerin ZTHSA ile gerçeklemesine geçmeden önce 2-boyutlu frekans dönüşümlerinin verilmesi faydalı olacaktır.

5.1 2-Boyutlu Frekans Dönüşümleri

1-boyutlu AGF'nin transfer fonksiyonundan esinlenerek 2-boyutlu AGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonu

$$H_{AGF}(s_x, s_y) = \frac{\tilde{V}(s_x, s_y)}{\tilde{U}(s_x, s_y)} = \frac{1}{1 - \gamma^2(s_x^2 + s_y^2)} \quad (5.1)$$

olarak verilmiştir [20]. Eşitlik (5.1)'de verilen transfer fonksiyonundan 2-boyutlu uzamsal AGF'nin sürekli-uzay diferansiyel denklemi

$$v(x, y) - \gamma^2 \left[\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right] = u(x, y) \quad (5.2)$$

şeklinde elde edilmiştir [14, 20].

Bu bölümde 2-boyutlu frekans dönüşümleri ile 2-boyutlu AGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonundan, diğer 2-boyutlu uzamsal filtrelerin sürekli-uzay transfer fonksiyonları elde edilmiştir

5.1.1 2-Boyutlu Uzamsal AGF - 2-Boyutlu Uzamsal Yönlü AGF Dönüşümü

2-boyutlu AGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonundan 2-boyutlu yönlü AGF (YAGF)'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonunu elde etmek için (5.1)'de

$$s_x^2 + s_y^2 \Rightarrow s_x^2 + s_y^2 - \alpha s_x - \beta s_y \quad (5.3)$$

dönüşümü yapılmalıdır. Bu dönüşüm 1-boyutlu analog filtrelerde yoktur. Bu durumda (5.1)'den 2-boyutlu YAGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonu

$$H_{AGF}(s_x, s_y) = \frac{1}{1 - \gamma^2 [s_x^2 + s_y^2 - \alpha s_x - \beta s_y]} \quad (5.4)$$

$$H_{YAGF}(s_x, s_y) = \frac{1}{1 + \alpha s_x + \beta s_y - \gamma^2 [s_x^2 + s_y^2]} \quad (5.5)$$

biçiminde elde edilir [14, 20]. Burada $\alpha = a\gamma^2$ ve $\beta = b\gamma^2$ 'dir. Eşitlik (5.5)'te verilen transfer fonksiyonundan 2-boyutlu uzamsal YAGF'nin sürekli-uzay diferansiyel denklemi

$$v(x, y) + \alpha \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \beta \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - \gamma^2 \left(\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = u(x, y) \quad (5.6)$$

şeklinde elde edilmiştir [20].

5.1.2 2-Boyutlu Uzamsal AGF - 2-Boyutlu Uzamsal YGF Dönüşümü

2-boyutlu AGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonundan 2-boyutlu YGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonunu elde etmek için (5.1)'de

$$s_x = \frac{s_x}{s_x^2 + s_y^2} \text{ ve } s_y = \frac{s_y}{s_x^2 + s_y^2} \quad (5.7)$$

dönüşümü yapılmalıdır. Bu dönüşümlerin 1-boyutlu analog filtrelerdeki karşılığının

$$s_t = \frac{1}{s_t} \text{ olduğu bilinmektedir. Eşitlik (5.7)'deki dönüşümler incelendiği zaman } s_x = \frac{1}{s_x}$$

ve $s_y = \frac{1}{s_y}$ dönüşümü yapıldığı söylenebilir. Bu dönüşümler (5.1)'de yerine yazılırsa 2-

boyutlu YGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonu [14, 20],

$$H_{YGF}(s_x, s_y) = \frac{V(s_x, s_y)}{U(s_x, s_y)} = \frac{s_x^2 + s_y^2}{1 - \gamma^2(s_x^2 + s_y^2)} \quad (5.8)$$

olarak elde edilebilir. Eşitlik (5.8)'de verilen transfer fonksiyonundan 2-boyutlu uzamsal YGF'nin sürekli-uzay diferansiyel denklemi

$$v(x, y) - \gamma^2 \left(\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = - \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (5.9)$$

biçiminde verilmiştir [14, 20].

5.1.3 2-Boyutlu Uzamsal YAGF - 2-Boyutlu Uzamsal Yönlü YGF Dönüşümü

2-boyutlu YAGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonundan 2-boyutlu yönlü YGF (YYGF)'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonunu elde etmek için (5.7)'de verilen

dönüşümler kullanılabilir. Bu dönüşümler (5.5)'te yerine yazılırsa 2-boyutlu YYGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonu [14, 20],

$$H_{YYGF}(s_x, s_y) = \frac{V(s_x, s_y)}{U(s_x, s_y)} = \frac{s_x^2 + s_y^2}{1 + \alpha s_x + \beta s_y + \gamma^2 [s_x^2 + s_y^2]} \quad (5.10)$$

olarak elde edilebilir. Eşitlik (5.10)'da verilen transfer fonksiyonundan 2-boyutlu uzamsal YYGF'nin sürekli-uzay diferansiyel denklemi

$$v(x, y) + \alpha \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \beta \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - \gamma^2 \left(\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = - \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (5.11)$$

biçiminde verilmiştir [14, 20].

5.1.4 2-Boyutlu Uzamsal AGF - 2-Boyutlu Uzamsal BGF Dönüşümü

2-boyutlu AGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonundan 2-boyutlu BGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonunu elde etmek için (5.1)'e

$$s_x^2 = \frac{s_x^2 - a_1 s_x + a_0}{\nu s_x + \psi s_y}, \quad s_y^2 = \frac{s_y^2 - b_1 s_y - b_0}{\nu s_x + \psi s_y} \quad (5.12)$$

dönüşümleri uygulanmalıdır. Bu dönüşümlerin 1-boyutlu analog filtrelerdeki karşılığının $s_t = \frac{s_t^2 + \Omega_{t0}^2}{s_t}$ olduğu bilinmektedir. Eşitlik (5.12)'de verilen dönüşümler

incelendiği zaman bu dönüşümlerin 1-boyutlu analog frekans dönüşümüne benzerliği görülebilir. Bu dönüşümler (5.1)'de yerine yazılırsa

$$H_{AGF}(s_x, s_y) = \frac{1}{1 - \gamma^2 \left[\left(\frac{s_x^2 - a_1 s_x - a_0}{\nu s_x + \psi s_y} \right) + \left(\frac{s_y^2 - b_1 s_y - b_0}{\nu s_x + \psi s_y} \right)^2 \right]} \quad (5.13)$$

elde edilir. Eşitlik (5.13) düzenlenirse

$$H(s_x, s_y) = \frac{\nu s_x + \psi s_y}{(\nu + a_1 \gamma^2) s_x + (\psi + b_1 \gamma^2) s_y - \gamma^2 (s_x^2 + s_y^2 - a_0 - b_0)} \quad (5.14)$$

$$H(s_x, s_y) = \frac{\nu s_x + \psi s_y}{\gamma^2 (a_0 + b_0) + (\nu + a_1 \gamma^2) s_x + (\psi + b_1 \gamma^2) s_y - \gamma^2 (s_x^2 + s_y^2)} \quad (5.15)$$

ve 2-boyutlu BGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonu [14, 20]

$$H_{BGF}(s_x, s_y) = \frac{\mu s_x + \eta s_y}{1 + \alpha s_x + \beta s_y - \gamma^2 (s_x^2 + s_y^2)} \quad (5.16)$$

biçiminde elde edilebilir. Burada $\mu = \frac{\nu}{\gamma^2(a_0 + b_0)}$, $\eta = \frac{\psi}{\gamma^2(a_0 + b_0)}$, $\alpha = \frac{(\nu + a_1\gamma^2)}{\gamma^2(a_0 + b_0)}$,

$\beta = \frac{(\psi + b_1\gamma^2)}{\gamma^2(a_0 + b_0)}$ ve $\gamma^2 = \frac{1}{(a_0 + b_0)}$ 'dir. Ayrıca a_0 ve b_0 pozitif gerçel sayılardır. Bu

filtrenin sürekli-uzay diferansiyel denklemi

$$v(x, y) + \alpha \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \beta \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - \gamma^2 \left(\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = \mu \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (5.17)$$

biçiminde elde edilmiştir [14, 20].

5.1.5 2-Boyutlu Uzamsal AGF - 2-Boyutlu Uzamsal BSF Dönüşümü

2-boyutlu AGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonundan 2-boyutlu BSF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonunu elde etmek için (5.1)'de

$$s_x^2 \Rightarrow \frac{-a_0 s_x}{s_x^2 + s_y^2 + c} \text{ ve } s_y^2 \Rightarrow \frac{-b_0 s_y}{s_x^2 + s_y^2 + c} \quad (5.18)$$

dönüşümleri yapılmalıdır. Bu dönüşümlerin 1-boyutlu analog filtrelerdeki karşılığının

$s_t = \frac{s_t}{s_t^2 + \Omega_{t0}^2}$ olduğu bilinmektedir. Eşitlik (5.18)'de verilen dönüşümler incelendiği

zaman bu dönüşümlerin 1-boyutlu analog frekans dönüşümüne benzerliği görülebilir.

Bu dönüşümler (5.1)'de yerine yazılırsa

$$H_{AGF}(s_x, s_y) = \frac{1}{1 - \gamma^2 \left[\left(\frac{a_1 s_x + a_0}{s_x^2 + s_y^2 - c} \right) + \left(\frac{b_1 s_y + b_0}{s_x^2 + s_y^2 - c} \right)^2 \right]} \quad (5.19)$$

elde edilir. Eşitlik (5.19) düzenlenirse

$$H_{BSF}(s_x, s_y) = \frac{s_x^2 + s_y^2 - c}{s_x^2 + s_y^2 - c - \gamma^2 (a_1 s_x + b_1 s_y + a_0 + b_0)} \quad (5.20)$$

$$H_{BSF}(s_x, s_y) = \frac{s_x^2 + s_y^2 - c}{s_x^2 + s_y^2 - \gamma^2 a_1 s_x - \gamma^2 b_1 s_y - c - \gamma^2 (a_0 + b_0)} \quad (5.21)$$

ve 2-boyutlu BSF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonu [14, 20]

$$H_{BSF}(s_x, s_y) = \frac{\eta^2 - \gamma^2 (s_x^2 + s_y^2)}{1 + \alpha s_x + \beta s_y - \gamma^2 (s_x^2 + s_y^2)} \quad (5.22)$$

biçiminde elde edilebilir. Burada $\gamma^2 = \frac{1}{-c - \gamma^2 (a_0 + b_0)}$, $\eta^2 = \frac{c}{-c - \gamma^2 (a_0 + b_0)}$,

$\alpha = -\frac{\gamma^2 a_1}{-c - \gamma^2 (a_0 + b_0)}$ ve $\beta = \frac{\gamma^2 b_1}{-c - \gamma^2 (a_0 + b_0)}$ 'dir Ayrıca a_0 , b_0 ve c negatif gerçel

sayılardır. Bu filtrenin sürekli-uzay diferansiyel denklemi

$$v(x, y) + \alpha \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \beta \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - \gamma^2 \left(\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = \eta^2 u(x, y) - \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (5.23)$$

biçiminde elde edilmiştir [14, 20].

5.2 2- Boyutlu Filtrelerin HSA Gerçeklemeleri

Bir önceki bölümde verilen 2-boyutlu uzamsal filtrelerin sürekli-uzay transfer fonksiyonlarından bu filtrelerin ayrık-uzay transfer fonksiyonlarının elde edilmesi ve bu filtrelerin HSA gerçeklemeleri [14]'de ve [20]'de detaylı olarak verilmiştir. Bu çalışmada bir önceki bölümde verilen 2-boyutlu uzamsal sürekli-uzay filtrelerinden elde edilen ve HSA ile gerçekleştirilen 2-boyutlu uzamsal filtrelerin ayrık-uzay transfer fonksiyonları, 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin transfer fonksiyonlarını elde ederken kullanılmıştır. Bundan dolayı bu filtrelerin HSA gerçeklemelerini, şablonlarını ve transfer fonksiyonlarını vermek faydalı olacaktır.

Eşitlik (5.2)'de verilen 2-boyutlu sürekli-uzay AGF'nin diferansiyel denklemine

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= \frac{v(i+1, j) - v(i-1, j)}{2} \\
\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &= \frac{v(i, j+1) - v(i, j-1)}{2} \\
\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{v(i+1, j) - 2v(i, j) + v(i-1, j)}{2} \\
\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{v(i, j+1) - 2v(i, j) + v(i, j-1)}{2}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

yaklaşıklıkları uygulanırsa

$$v(i, j) - \gamma^2 (v(i+1, j) + v(i-1, j) + v(i, j+1) + v(i, j-1) - 4v(i, j)) = u(i, j) \tag{5.25}$$

biçimindeki fark denklemi elde edilir. Bu filtreyi HSA ile gerçekleştirmek için (5.25) denklemi HSA denkleminde benzer şekilde matrisel olarak düzenlenirse

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & v(i, j-1) & 0 \\ v(i-1, j) & v(i, j) & v(i+1, j) \\ 0 & v(i, j+1) & 0 \end{bmatrix} + u(i, j) = A \otimes V(i, j) + B \otimes U(i, j) \tag{5.26}$$

bulunur [14, 20]. Bu eşitlik sabit giriş altında HSA denkleminin $t \rightarrow \infty$ için alacağı haldir. Geri besleme ve ileri besleme şablonları

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

olarak elde edilir[14, 20]. Aynı şekilde bir önceki bölümde verilen filtrelerin sürekli-uzay diferansiyel denklemlerine (5.24)'de verilen yaklaşıklıklar uygulanarak bu filtrelerin HSA gerçeklemeleri yapılmıştır ve HSA şablonları elde edilmiştir. Bu filtrelerin HSA şablonları Çizelge 5.2'de verilmiştir.

Çizelge 5.2 2-boyutlu uzamsal filtrelerin HSA şablonları [14, 20]

Filtre Türü	HSA Şablonları
YAGF	$A_{YAGF} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 + \frac{\beta}{2} & 0 \\ \gamma^2 + \frac{\alpha}{2} & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma^2 - \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad B_{YAGF} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
YGF	$A_{YGF} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{YGF} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
YYGF	$A_{YYGF} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 + \frac{\beta}{2} & 0 \\ \gamma^2 + \frac{\alpha}{2} & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma^2 - \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad B_{YYGF} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
BGF	$A = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 + \frac{\beta}{2} & 0 \\ \gamma^2 + \frac{\alpha}{2} & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma^2 - \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\nu}{2} & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & 0 & \frac{\mu}{2} \\ 0 & \frac{\nu}{2} & 0 \end{bmatrix}$
BSF	$A = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 + \frac{\beta}{2} & 0 \\ \gamma^2 + \frac{\alpha}{2} & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma^2 - \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & \eta^2 + 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Bu filtrelerin transfer fonksiyonu (2.19)'un kullanılması ile elde edilebilir.

5.3 3-Boyutlu Uzay-Zamansal Filtrelerin ZTHSA ile Tasarımı

Bu bölümde 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin tasarımı bir önceki bölümde verilen HSA şablonları kullanılarak yapılmıştır. Bu filtrelerin transfer fonksiyonları, bir önceki bölümde HSA şablonları verilen filtrelerin transfer fonksiyonları ile 1-boyutlu zamansal filtrelerin transfer fonksiyonlarının birbiriyle çarpılmasıyla elde edilmiştir. Başka bir deyişle 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin transfer fonksiyonları

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} H_t(s_t) \quad (5.28)$$

biçiminde elde edilmiştir.

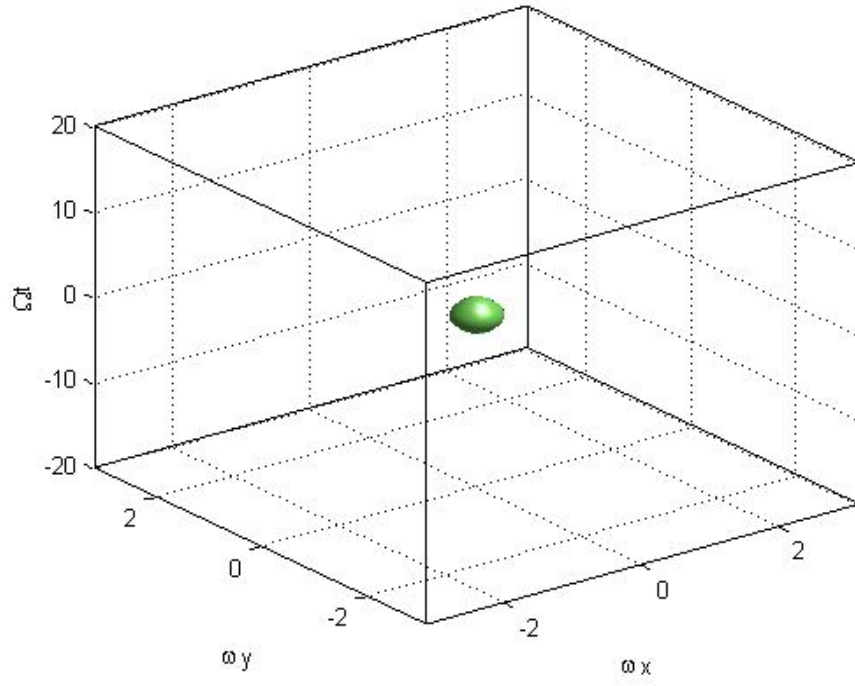
5.3.1 3-Boyutlu Uzay-Zamansal AGF'nin ZTHSA ile Tasarımı

3-boyutlu uzay-zamansal AGF'nin transfer fonksiyonu

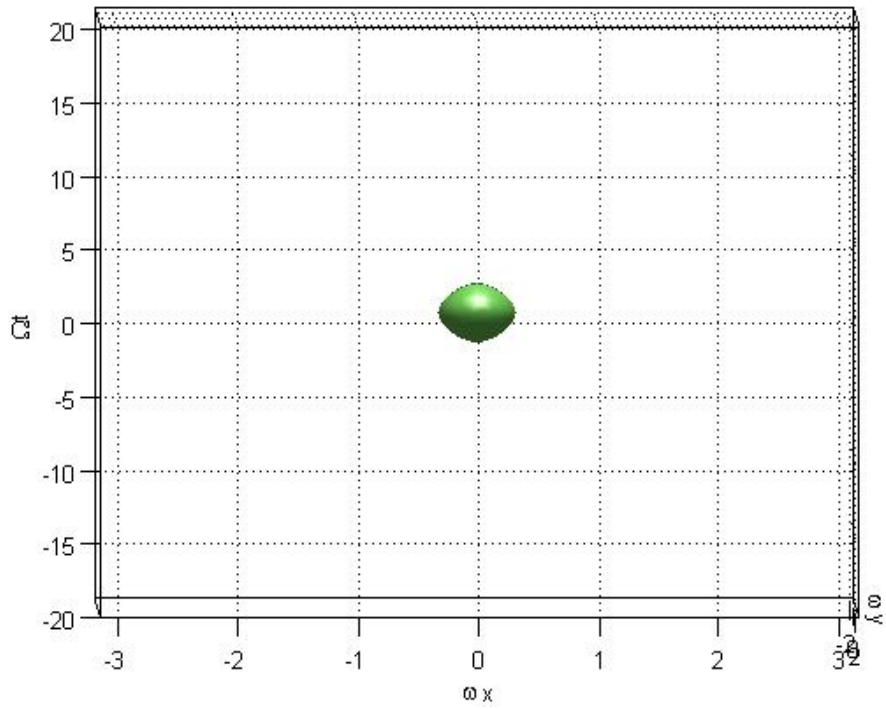
$$H_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \frac{1}{\alpha_t + s_t} \quad (5.29)$$

$$H_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\alpha_t \tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) + s_t \tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \quad (5.30)$$

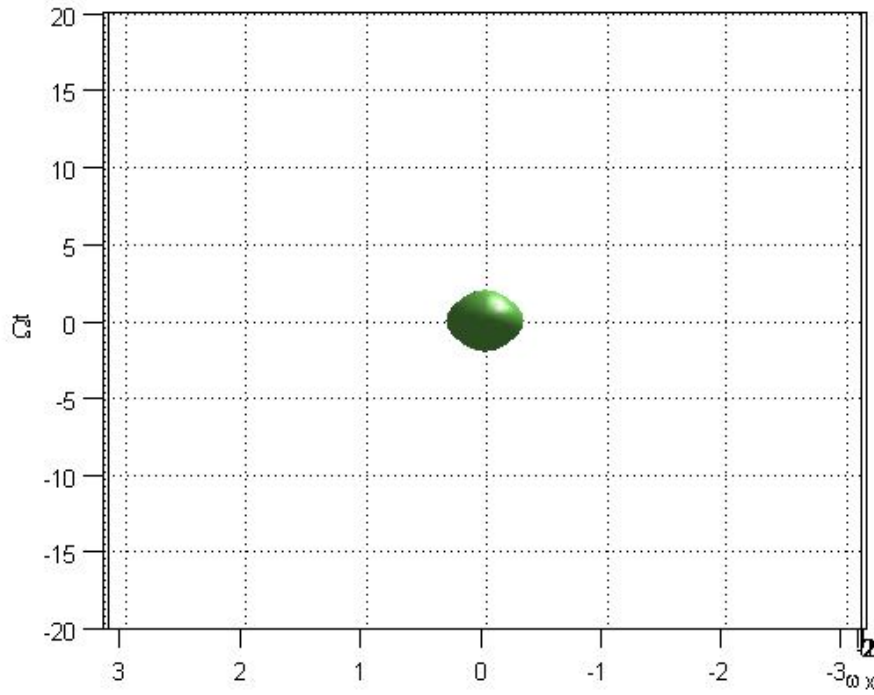
biçiminde elde edilir. Burada $\tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ (5.27)'de verilen şablonların ayrık-uzay Fourier dönüşümleridir. $\gamma = 2$ ve $\alpha_t = 2$ için 3-boyutlu uzay-zamansal AGF'nin genlik-frekans yanıtı Şekil 5.1, 5.2 ve 5.3'teki gibi elde edilir.



Şekil 5.1 3-boyutlu uzay-zamansal AGF'nin genlik-frekans yanıtı



Şekil 5.2 3-boyutlu uzay-zamansal AGF'nin genlik-frekans yanıtı



Şekil 5.3 3-boyutlu uzay-zamansal AGF'nin genlik-frekans yanıtı

Şekillerdeki balonun içi filtrenin geçirme bandını, dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Filtrenin geçirme bandı her üç frekans için sıfır frekansı çevresindedir. Bundan dolayı (5.30)'da verilen transfer fonksiyonu hem uzayda hem de zamanda AGF özelliği göstermektedir. Bu transfer fonksiyonuna ters Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{dv_t(i, j)}{dt} = A \otimes V_t(i, j) + B \otimes U_t(i, j) + A_1 \otimes \frac{dV_t(i, j)}{dt} \quad (5.31)$$

elde edilir. Eşitlik (5.31) aynı zamanda 1. türevli ZTHSA eşitliğidir. Böylelikle 3-boyutlu uzay-zamansal AGF'nin ZTHSA ile tasarımı elde edilmiştir. Bu filtrenin ZTHSA şablonları

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \\ \alpha_t \gamma^2 & -\alpha_t (1 + 4\gamma^2) & \alpha_t \gamma^2 \\ 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -4\gamma^2 & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu filtre aynı zamanda 3-boyutlu uzay-zamansal Gauss-tipi filtredir.

Bunlara ek olarak (5.29)'a Çizelge 5.2'de şablonları verilen 2-boyutlu YAGF'nin transfer fonksiyonu uygulanırsa 3-boyutlu uzay-zamansal YAGF'nin transfer

fonksiyonu elde edilir. Bu filtrenin genlik-frekans yanıtı 3-boyutlu uzay-zamansal AGF'ninkine benzerdir. Aynı şekilde 3-boyutlu uzay-zamansal YAGF'nin ZTHSA eşitliği (5.31)'de verilmiştir. Bu filtrenin ZTHSA şablonları

$$A = \alpha_t \begin{bmatrix} 0 & \left(\gamma^2 + \frac{\beta}{2}\right) & 0 \\ \left(\gamma^2 + \frac{\alpha}{2}\right) & -(1+4\gamma^2) & \left(\gamma^2 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 0 & \left(\gamma^2 - \frac{\beta}{2}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \left(\gamma^2 + \frac{\beta}{2}\right) & 0 \\ \left(\gamma^2 + \frac{\alpha}{2}\right) & -4\gamma^2 & \left(\gamma^2 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 0 & \left(\gamma^2 - \frac{\beta}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunabilir.

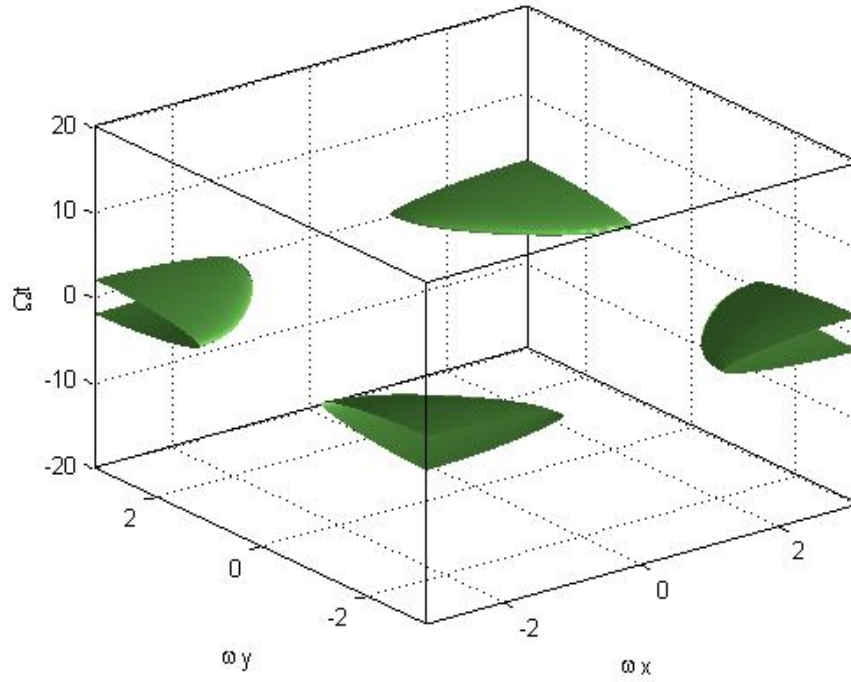
5.3.2 3-Boyutlu Zamansal AGF ve Uzamsal YGF'nin ZTHSA ile Tasarımı

3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal YGF'nin transfer fonksiyonu

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \frac{1}{\alpha_t + s_t} \quad (5.33)$$

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\alpha_t \tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) + s_t \tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \quad (5.34)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ Çizelge 5.2'de 2-boyutlu YGF için verilen şablonların ayırık-uzay Fourier dönüşümleridir. $\gamma = 0.2$ ve $\alpha_t = 2$ için 3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal YGF'nin genlik-frekans yanıtı Şekil 5.4'teki gibi elde edilir.



Şekil 5.4 3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal YGF'nin genlik-frekans yanıtı

Şekil 5.4'teki balonların içi filtrenin geçirme bandını, dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Filtrenin geçirme bandı zamansal frekanslarda sıfır etrafındayken uzamsal frekanslarda ise yüksek frekanslara karşı düşen $\pm\pi$ etrafındadır. Bundan dolayı (5.34)'te verilen transfer fonksiyonu uzayda yüksek geçiren filtre, zamanda da alçak geçiren filtre özelliği göstermektedir.

Eşitlik (5.34)'e ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, 3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal YGF'nin ZTHSA eşitliği (5.31)'deki gibi elde edilir. Buradaki ZTHSA şablonları

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \\ \alpha_t \gamma^2 & -\alpha_t (1 + 4\gamma^2) & \alpha_t \gamma^2 \\ 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -4\gamma^2 & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunabilir.

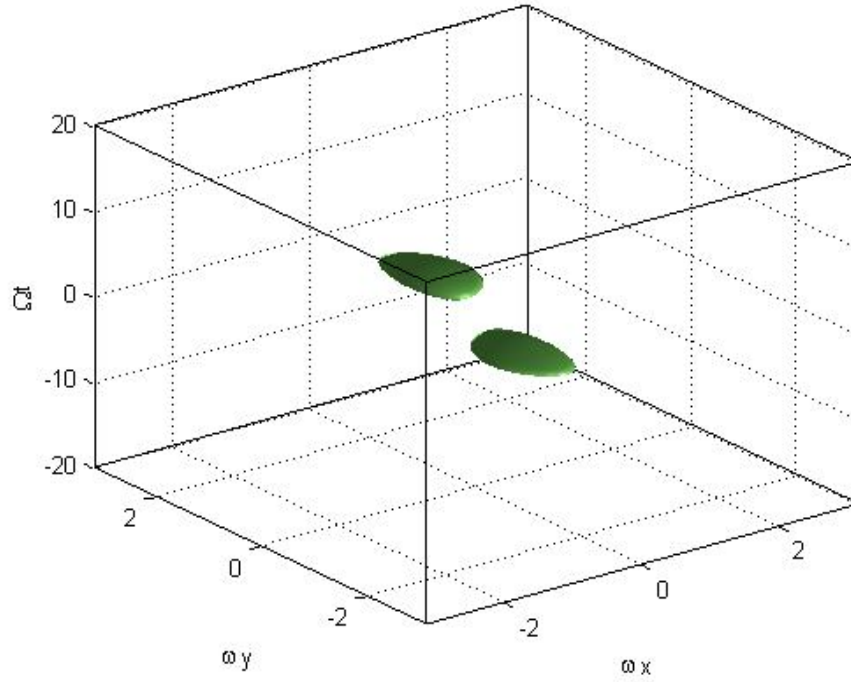
5.3.3 3-Boyutlu Zamansal AGF ve Uzamsal BGF'nin ZTHSA ile Tasarımı

3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal BGF'nin transfer fonksiyonu

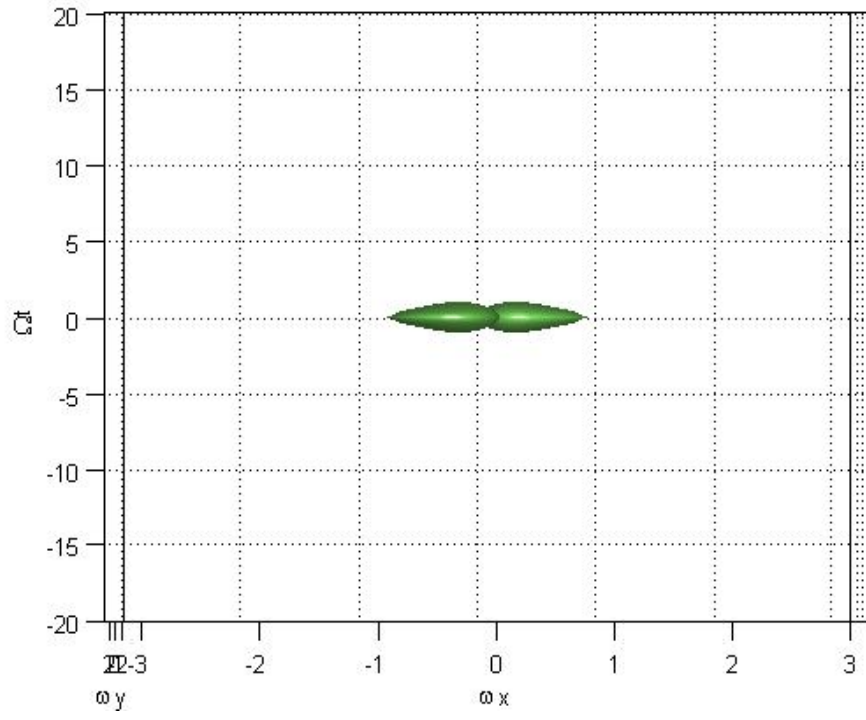
$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \frac{1}{\alpha_t + s_t} \quad (5.35)$$

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = \frac{\tilde{B}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{-\alpha_t \tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) - \tilde{A}_{BGF} s_t} \quad (5.36)$$

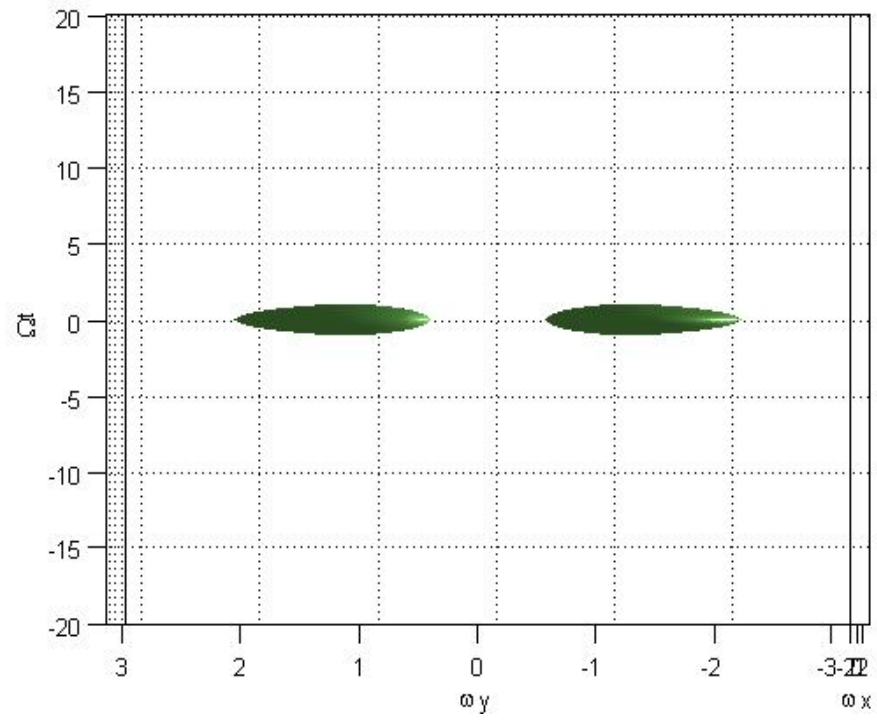
biçiminde yazılabilir. Buradaki $\tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ Çizelge 5.2'de 2-boyutlu BGF için verilen şablonların ayrık-uzay Fourier dönüşümleridir. $\gamma=1, \alpha=1, \beta=1, \mu=1, \nu=1$ ve $\alpha_t=1$ için 3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal BGF'nin genlik-frekans yanıtı Şekil 5.5, 5.6 ve 5.7'deki gibi elde edilir.



Şekil 5.5 3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal BGF'nin genlik-frekans yanıtı



Şekil 5.6 3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal BGF'nin genlik-frekans yanıtı



Şekil 5.7 3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal BGF'nin genlik-frekans yanıtı

Şekillerdeki balonların içi filtrenin geçirme bandını, dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Filtrenin geçirme bandı zamansal frekanslarda sıfır etrafındayken uzamsal frekanslarda $\pm\omega_{x0}, \pm\omega_{y0}$ etrafındadır. Bundan dolayı (5.36)'da verilen transfer fonksiyonu uzayda band geçiren filtre, zamanda da alçak geçiren filtre özelliği göstermektedir.

Eşitlik (5.36)'ya ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, 3-boyutlu zamansal AGF ve uzamsal BGF'nin ZTHSA eşitliği (5.31)'deki gibi elde edilir. Buradaki ZTHSA şablonları

$$A = \alpha_t \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 + \frac{\beta}{2} & 0 \\ \gamma^2 + \frac{\alpha}{2} & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma^2 - \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\nu}{2} & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & 0 & \frac{\mu}{2} \\ 0 & \frac{\nu}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 + \frac{\beta}{2} & 0 \\ \gamma^2 + \frac{\alpha}{2} & -4\gamma^2 & \gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma^2 - \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

olarak verilebilir.

5.3.4 3-Boyutlu Uzay-Zamansal YGF'nin ZTHSA ile Tasarımı

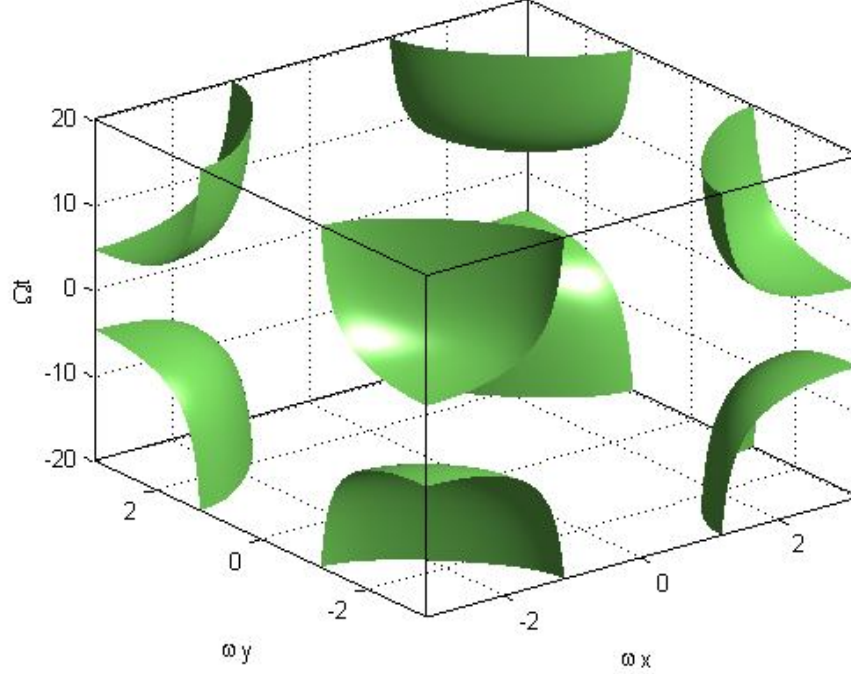
3-boyutlu uzay-zamansal YGF'nin transfer fonksiyonu

$$H_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \frac{s_t}{\alpha_t + s_t} \quad (5.37)$$

$$H_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})s_t}{\alpha_t \tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) + s_t \tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \quad (5.38)$$

biçiminde elde edilebilir. Buradaki $\tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ Çizelge 5.2'de 2-boyutlu YGF için verilen şablonların ayrık-uzay Fourier dönüşümleridir. $\gamma = 0.2$ ve

$\alpha_t = 5$ için 3-boyutlu uzay-zamansal YGF'nin genlik-frekans yanıtı Şekil 5.8'deki gibi elde edilir.



Şekil 5.8 3-boyutlu uzay-zamansal YGF'nin genlik-frekans yanıtı

Şekil 5.8'deki balonların içi filtrenin geçirme bandını, dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Filtrenin geçirme bandı zamansal ve uzamsal frekanslarda yüksek frekansların etrafındadır. Bundan dolayı (5.38)'de verilen transfer fonksiyonu uzayda ve zamanda yüksek geçiren filtre özelliği göstermektedir.

Eşitlik (5.38)'e ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, 3-boyutlu zamansal YGF'nin ZTHSA eşitliği

$$\frac{dv_t(i, j)}{dt} = A \otimes V_t(i, j) + B_1 \otimes \frac{dU_t(i, j)}{dt} + A_1 \otimes \frac{dV_t(i, j)}{dt} \quad (5.39)$$

biçiminde elde edilir. Buradaki ZTHSA şablonları

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \\ \alpha_t \gamma^2 & -\alpha_t (1 + 4\gamma^2) & \alpha_t \gamma^2 \\ 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = 0 \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -4\gamma^2 & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunabilir.

5.3.5 3-Boyutlu Uzay-Zamansal YYGF'nin ZTHSA ile Tasarımı

Eşitlik (5.38)'e Çizelge 5.2'de şablonları verilen 2-boyutlu YYGF'nin transfer fonksiyonu uygulanırsa 3-boyutlu uzay-zamansal YYGF'nin transfer fonksiyonu elde edilir. Bu filtrenin genlik-frekans yanıtı 3-boyutlu uzay-zamansal YGF'ninkine benzerdir. Aynı şekilde 3-boyutlu uzay-zamansal YYGF'nin ZTHSA eşitliği (5.39)'da verilmiştir. Bu filtrenin ZTHSA şablonları

$$A = \alpha_t \begin{bmatrix} 0 & \left(\gamma^2 + \frac{\beta}{2}\right) & 0 \\ \left(\gamma^2 + \frac{\alpha}{2}\right) & -(1+4\gamma^2) & \left(\gamma^2 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 0 & \left(\gamma^2 - \frac{\beta}{2}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad B = 0 \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \left(\gamma^2 + \frac{\beta}{2}\right) & 0 \\ \left(\gamma^2 + \frac{\alpha}{2}\right) & -4\gamma^2 & \left(\gamma^2 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 0 & \left(\gamma^2 - \frac{\beta}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

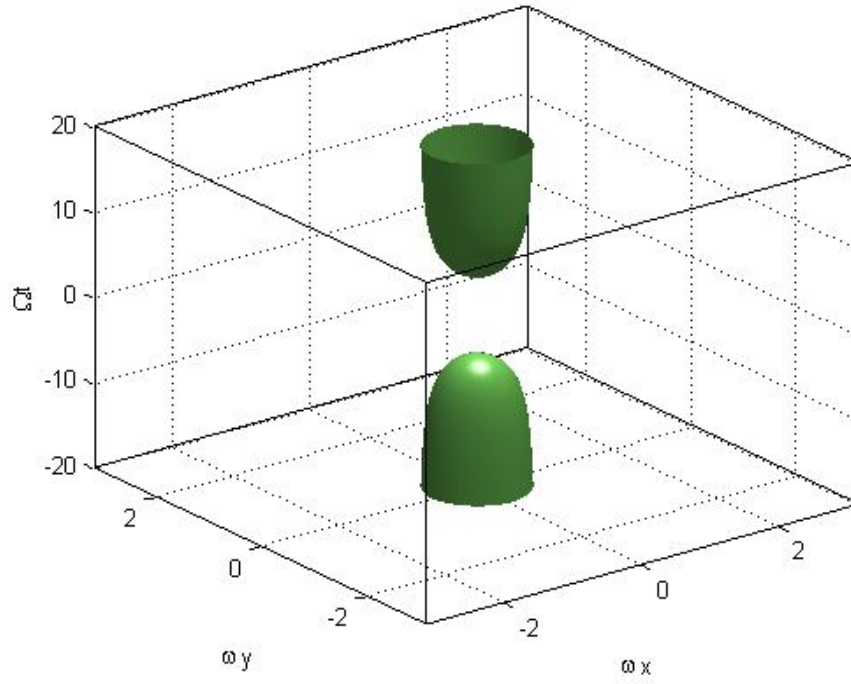
5.3.6 3-Boyutlu Zamansal YGF ve Uzamsal AGF'nin ZTHSA ile Tasarımı

3-boyutlu zamansal YGF ve uzamsal AGF'nin transfer fonksiyonu

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \frac{s_t}{\alpha_t + s_t} \quad (5.40)$$

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})s_t}{\alpha_t \tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) + s_t \tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \quad (5.41)$$

biçiminde elde edilir. Burada $\tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ (5.27)'de verilen şablonların ayrık-uzay Fourier dönüşümleridir. $\gamma = 1$ ve $\alpha_t = 5$ için 3-boyutlu zamansal YGF ve uzamsal AGF'nin genlik-frekans yanıtı Şekil 5.9'da verilmiştir.



Şekil 5.9 3-boyutlu zamansal YGF ve uzamsal AGF'nin genlik-frekans yanıtı

Şekil 5.9'daki balonların içi filtrenin geçirme bandını, dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Filtrenin geçirme bandı zamansal frekanslarda yüksek frekansların etrafında iken uzamsal frekanslarda sıfırın etrafındadır. Bundan dolayı (5.41)'de verilen transfer fonksiyonu uzayda AGF ve zamanda YGF özelliği göstermektedir.

Eşitlik (5.41)'e ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, 3-boyutlu zamansal YGF ve uzamsal AGF'nin ZTHSA eşitliği (5.39)'daki gibi elde edilir. Buradaki ZTHSA şablonları

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \\ \alpha_t \gamma^2 & -\alpha_t (1 + 4\gamma^2) & \alpha_t \gamma^2 \\ 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -4\gamma^2 & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

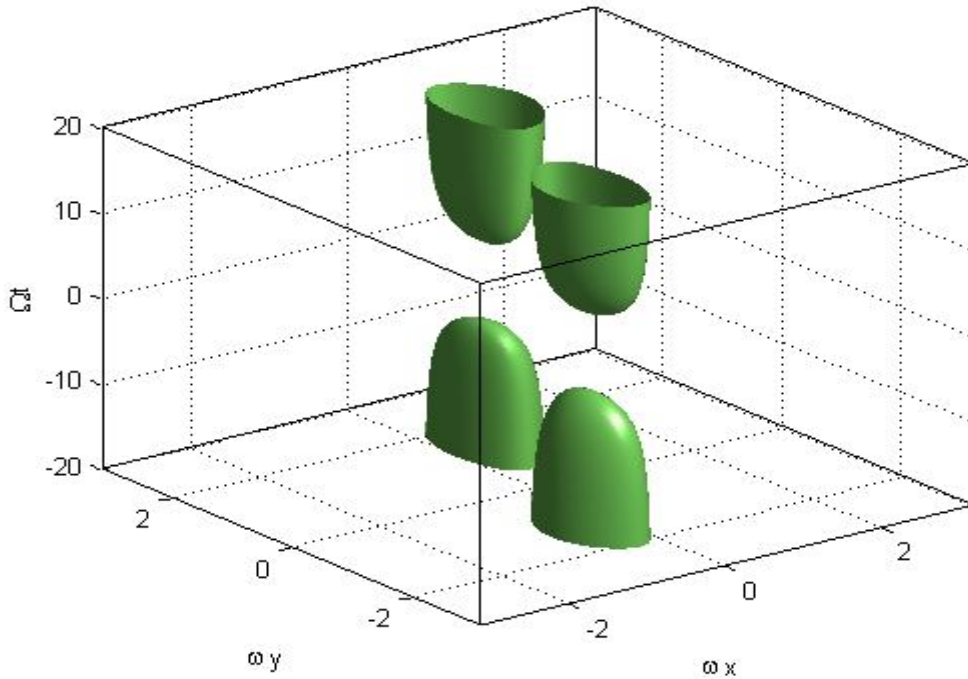
5.3.7 3-Boyutlu Zamansal YGF ve Uzamsal BGF'nin ZTHSA ile Tasarımı

3-boyutlu zamansal YGF ve uzamsal BGF'nin transfer fonksiyonu

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \frac{s_t}{\alpha_t + s_t} \quad (5.42)$$

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = \frac{\tilde{B}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) s_t}{\left[-\tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \right] s_t + \left[-\alpha_t \tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \right]} \quad (5.43)$$

olarak yazılabilir. Burada $\tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ Çizelge 5.2'de 2-boyutlu BGF için verilen şablonların ayrık-uzay Fourier dönüşümleridir. $\gamma = 1, \alpha = 1, \beta = 1, \mu = 1, \nu = 1$ ve $\alpha_t = 5$ için 3-boyutlu zamansal YGF ve uzamsal BGF'nin genlik-frekans yanıtı Şekil 5.10'da verilmiştir.



Şekil 5.10 3-boyutlu zamansal YGF ve uzamsal BGF'nin genlik-frekans yanıtı

Şekil 5.10'daki balonların içi filtrenin geçirme bandını, dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Filtrenin geçirme bandı zamansal frekanslarda yüksek frekansların

etrafında iken uzamsal frekanslarda $\pm\omega_{x0}, \pm\omega_{y0}$ etrafındadır. Bundan dolayı (5.43)'de verilen transfer fonksiyonu uzayda BGF, zamanda YGF özelliği göstermektedir.

Eşitlik (5.43)'e ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, 3-boyutlu zamansal YGF ve uzamsal BGF'nin ZTHSA eşitliği (5.39)'daki gibi elde edilir. Buradaki ZTHSA şablonları

$$A = \alpha_t \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 + \frac{\beta}{2} & 0 \\ \gamma^2 + \frac{\alpha}{2} & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma^2 - \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\nu}{2} & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & 0 & \frac{\mu}{2} \\ 0 & \frac{\nu}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 + \frac{\beta}{2} & 0 \\ \gamma^2 + \frac{\alpha}{2} & -(4\gamma^2) & \gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma^2 - \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

olarak verilebilir.

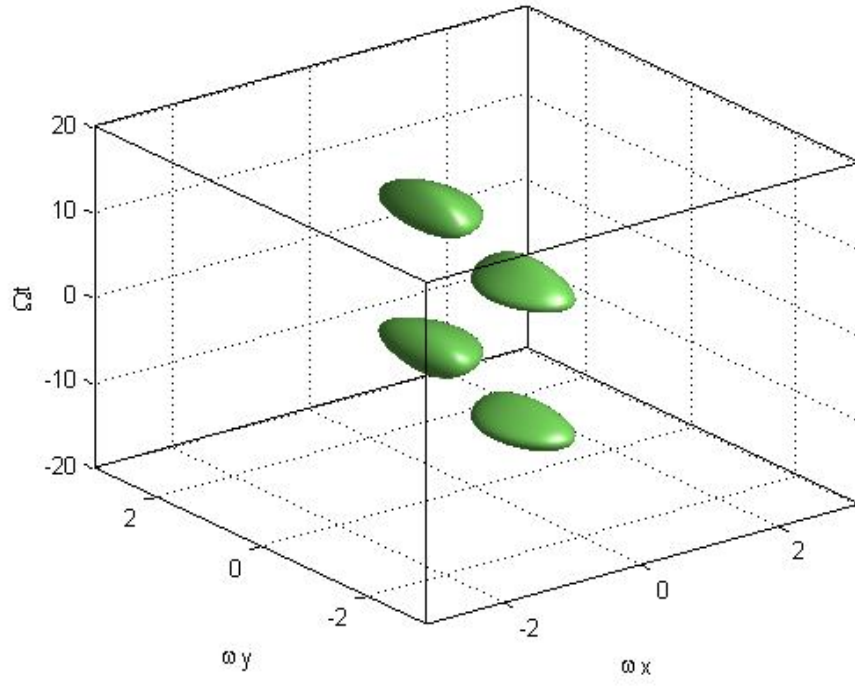
5.3.8 3-boyutlu Uzay-Zamansal BGF'nin ZTHSA ile Tasarımı

3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin transfer fonksiyonu

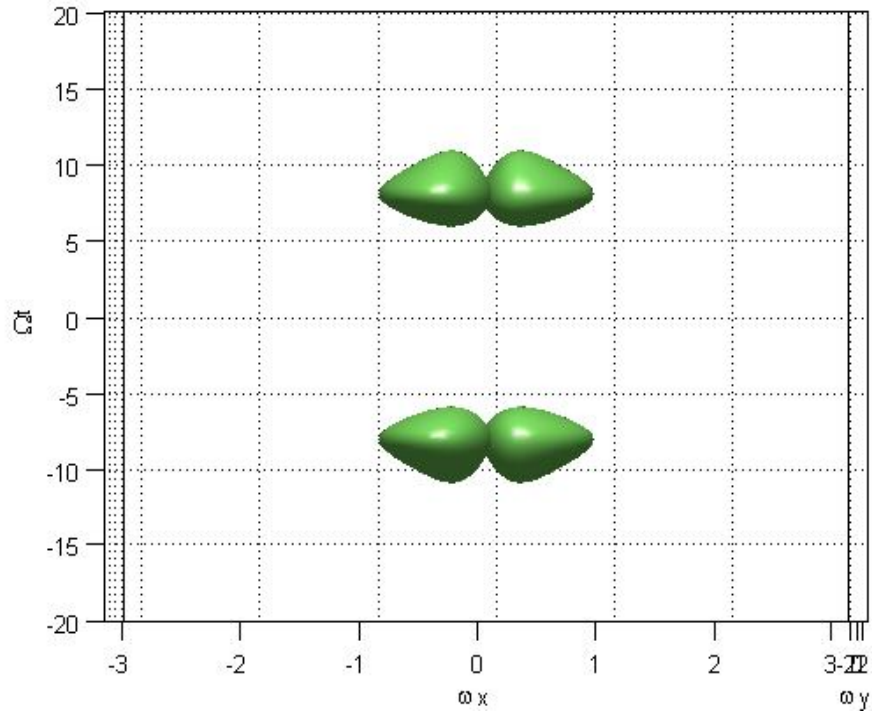
$$H_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \frac{s_t}{s_t^2 + \alpha_t s_t + \Omega_{t0}^2} \quad (5.44)$$

$$H_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = \frac{\tilde{B}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) s_t}{\left[-\tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \right] s_t^2 + \left[-\alpha_t \tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \right] s_t + \left[-\tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \right] \Omega_{t0}^2} \quad (5.45)$$

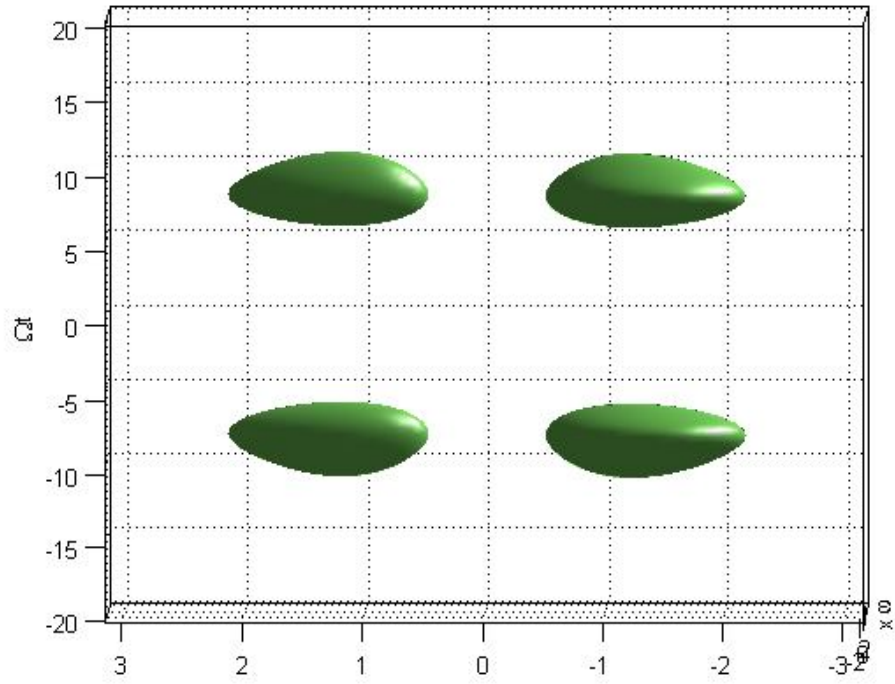
olarak yazılabilir. Burada $\tilde{A}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}_{BGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ Çizelge 5.2'de 2-boyutlu BGF için verilen şablonların ayrık-uzay Fourier dönüşümleridir. $\gamma = 1, \alpha = 1, \beta = 1, \mu = 1, \nu = 1, \Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$ ve $\alpha_t = 5$ için 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin genlik-frekans yanıtı Şekil 5.11, 5.12 ve 5.13'deki gibi elde edilir.



Şekil 5.11 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin genlik-frekans yanıtı



Şekil 5.12 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin genlik-frekans yanıtı



Şekil 5.13 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin genlik-frekans yanıtı

Şekillerdeki balonların içi filtrenin geçirme bandını, dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Filtrenin geçirme bandı zamansal frekanslarda $\pm\Omega_{t0}$ etrafında iken uzamsal frekanslarda $\pm\omega_{x0}, \pm\omega_{y0}$ etrafındadır. Bundan dolayı (5.45)'de verilen transfer fonksiyonu uzayda ve zamanda BGF özelliği göstermektedir.

Eşitlik (5.45)'e ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin ZTHSA eşitliği

$$\begin{aligned} \frac{dv_t(i, j)}{dt} = & A \otimes V_t(i, j) + B_1 \otimes \frac{dU_t(i, j)}{dt} \\ & + A_1 \otimes \frac{dV_t(i, j)}{dt} + A_2 \otimes \frac{d^2V_t(i, j)}{dt^2} \end{aligned} \quad (5.46)$$

şeklinde elde edilir. 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin ZTHSA şablonları

$$A = \Omega_{t_0}^2 \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 + \frac{\beta}{2} & 0 \\ \gamma^2 + \frac{\alpha}{2} & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma^2 - \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\nu}{2} & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & 0 & \frac{\mu}{2} \\ 0 & \frac{\nu}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_t \left(\gamma^2 + \frac{\beta}{2} \right) & 0 \\ \alpha_t \left(\gamma^2 + \frac{\alpha}{2} \right) & \alpha_t \left[-(1+4\gamma^2) \right] + 1 & \alpha_t \left(\gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \right) \\ 0 & \alpha_t \left(\gamma^2 - \frac{\beta}{2} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 + \frac{\beta}{2} & 0 \\ \gamma^2 + \frac{\alpha}{2} & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma^2 - \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

olarak verilebilir.

5.3.9 3-Boyutlu Zamansal BGF ve Uzamsal AGF'nin ZTHSA ile Tasarımı

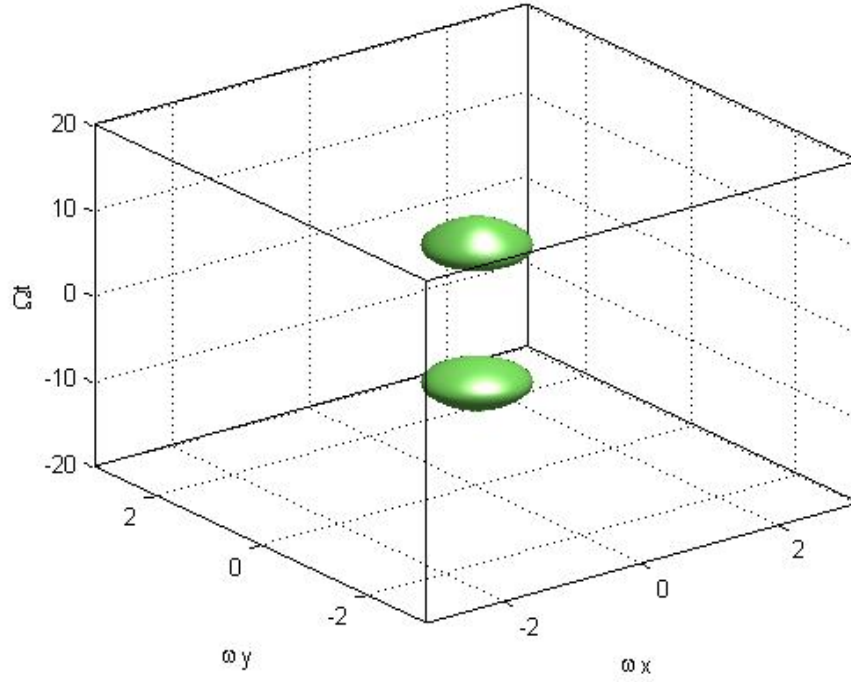
3-boyutlu zamansal BGF ve uzamsal AGF'nin transfer fonksiyonu

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \frac{s_t}{s_t^2 + \alpha_t s_t + \Omega_{t_0}^2} \quad (5.47)$$

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = \frac{\tilde{B}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) s_t}{\left[-\tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \right] s_t^2 + \left[-\alpha_t \tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \right] s_t + \left[-\tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \right] \Omega_{t_0}^2} \quad (5.48)$$

olarak yazılabilir. Burada $\tilde{A}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}_{AGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ (5.27)'de verilen şablonların ayırık-uzay Fourier dönüşümleridir. $\Omega_{t_0} = 8$ rad/s, $\gamma = 1$ ve $\alpha_t = 5$ için 3-boyutlu zamansal BGF, uzamsal AGF'nin genlik-frekans yanıtı Şekil 5.14'te verilmiştir. Şekildeki balonların içi filtrenin geçirme bandını, dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Filtrenin geçirme bandı zamansal frekanslarda $\pm\Omega_{t_0}$ etrafında iken

uzamsal frekanslarda sıfır etrafındadır. Bundan dolayı (5.48)'de verilen transfer fonksiyonu uzayda AGF, zamanda BGF özelliği göstermektedir.



Şekil 5.14 3-boyutlu zamansal BGF ve uzamsal AGF'nin genlik-frekans yanıtı

Eşitlik (5.48)'e ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, 3-boyutlu zamansal BGF ve uzamsal AGF'nin ZTHSA eşitliği (5.46)'daki gibi elde edilir. Buradaki ZTHSA şablonları

$$A = \Omega_{t0}^2 \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \\ \alpha_t \gamma^2 & -\alpha_t (1+4\gamma^2) + 1 & \alpha_t \gamma^2 \\ 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak verilebilir.

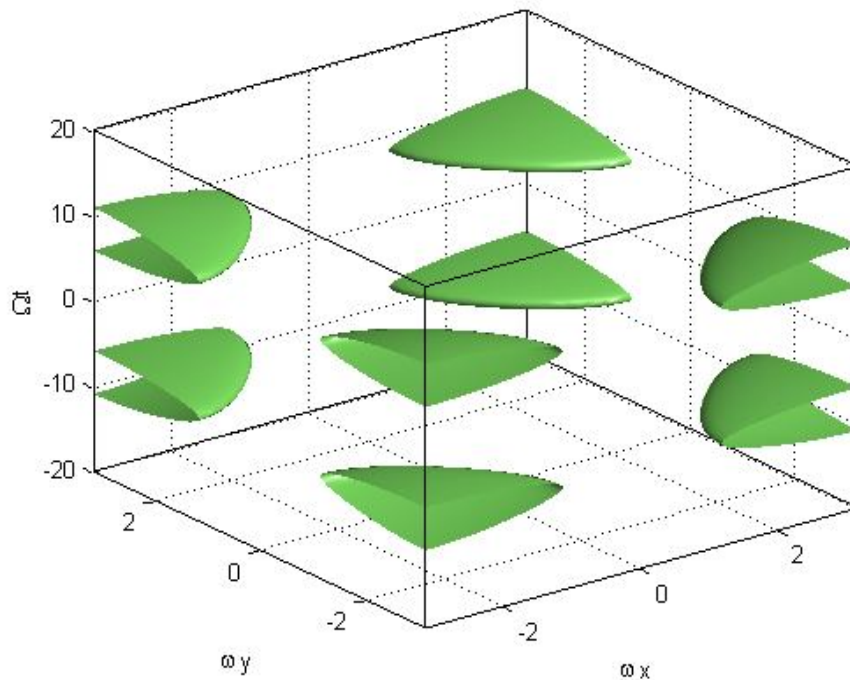
5.3.10 3-Boyutlu Zamansal BGF ve Uzamsal YGF'nin ZTHSA ile Tasarımı

3-boyutlu zamansal BGF ve uzamsal YGF'nin transfer fonksiyonu

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})}{\tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})} \frac{s_t}{s_t^2 + \alpha_t s_t + \Omega_{t0}^2} \quad (5.49)$$

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}, s_t) = -\frac{\tilde{B}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) s_t}{\tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) s_t^2 + \alpha_t \tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) s_t + \tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) \Omega_{t0}^2} \quad (5.50)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tilde{A}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ ve $\tilde{B}_{YGF}(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ Çizelge 5.2'de 2-boyutlu YGF için verilen şablonların ayrık-uzay Fourier dönüşümleridir. $\Omega_{t0} = 8 \text{ rad/s}$, $\gamma = 0.2$ ve $\alpha_t = 5$ için 3-boyutlu zamansal BGF, uzamsal YGF'nin genlik-frekans yanıtı Şekil 5.15'deki gibi elde edilir.



Şekil 5.15 3-boyutlu zamansal BGF ve uzamsal YGF'nin genlik-frekans yanıtı

Şekildeki balonların içi filtrenin geçirme bandını, dışı filtrenin söndürme bandını göstermektedir. Filtrenin geçirme bandı zamansal frekanslarda $\pm\Omega_{t0}$ etrafında iken

uzamsal frekanslarda $\pm\pi$ etrafındadır. Bundan dolayı (5.50)'de verilen transfer fonksiyonu uzayda YGF, zamanda BGF özelliği göstermektedir.

Eşitlik (5.50)'ye ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, 3-boyutlu zamansal BGF uzamsal YGF'nin ZTHSA eşitliği (5.46)'daki gibi elde edilir. Buradaki ZTHSA şablonları

$$A = \Omega_{t_0}^2 \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \\ \alpha_t \gamma^2 & -\alpha_t (1+4\gamma^2) + 1 & \alpha_t \gamma^2 \\ 0 & \alpha_t \gamma^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 & 0 \\ \gamma^2 & -(1+4\gamma^2) & \gamma^2 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak verilebilir.

5.4 Sonuçlar

Bu bölümde Shi'nin verdiği 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin [19] Bölüm 4'de verilen ZTHSA ile tasarımından esinlenilerek 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerinin ZTHSA ile gerçeklemeleri verilmiştir. Shi [19], 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonunu 1-boyutlu zamansal ve 2-boyutlu uzamsal AGF'lerin genlik-frekans yanıtlarını Ω_{t_0} ve ω_{x0}, ω_{y0} frekanslarına öteleyerek elde etmiştir.

Bu bölümde ZTHSA ile tasarımı yapılan 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin transfer fonksiyonlarını HSA ile gerçekleştirilen filtrelerin ayrık-uzay transfer fonksiyonları [20] ile 1-boyutlu filtrelerin sürekli-zaman transfer fonksiyonlarının birbirleriyle çarpılmasıyla elde edilmiştir. HSA ile gerçekleştirilen filtrelerin ayrık-uzay transfer fonksiyonları, bu filtrelerin sürekli-uzay transfer fonksiyonundan elde edilmiştir. Bu sürekli-uzay transfer fonksiyonları [14] ve [20]'de 1-boyutlu analog filtrelerin transfer fonksiyonlarından esinlenilerek türetilmiştir. Ancak bu çalışmalarda 2-boyutlu frekans dönüşümleri ile

ilgili bir bilgi verilmemiştir. Burada öncelikle 2-boyutlu uzamsal filtrelerin sürekli-uzay transfer fonksiyonlarını elde etmek için kullanılan 2-boyutlu frekans dönüşümleri verilmiştir ve bu frekans dönüşümleri 2-boyutlu AGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonuna uygulanmıştır.

HSA ile gerçekleştirilen filtrelerin ayrık-uzay transfer fonksiyonları ile 1-boyutlu filtrelerin sürekli-zaman transfer fonksiyonlarının çarpımı ile elde edilen 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin transfer fonksiyonlarına ters Fourier dönüşümü uygulanarak bu filtrelerin ZTHSA eşitlikleri elde edilmiştir. Bu filtrelerin ZTHSA şablonları da [14] ve [20]'de verilen HSA şablonları kullanılarak türetilmiştir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ZTHSA simülasyon yöntemleri ve uygulamaları üzerinde durulmuştur. ZTHSA, HSA'nın genel bir halidir ve HSA yapıları ile gerçekleştirilemeyen 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin gerçekleştirilmesi için ortaya atılmıştır [9-13]. Bunun için lineer HSA yapılarına komşu hücreler arasında türevli bağlantılar eklenmesi ile ZTHSA yapıları elde edilmiştir. Bu yapılar ile daha genel uzay-zamansal filtrelerin gerçekleştirilebileceği gösterilmiş ve BGF örnekleri verilmiştir [9-13]. Bu filtreler için tasarlanan ZTHSA yapısının simülasyonu MATLAB SIMULINK programı ile blok diyagramlar üzerinden yapılmıştır [9-10]. Yapılan bu simülasyon kullanılan yazılımın yapısından dolayı oldukça zaman almaktadır.

Tural-Polat vd. ZTHSA yapılarının simülasyonunu daha az işlem ile yapmak için ileri ve geri Euler yaklaşıklıklarının kombinasyonu olan ve kullanılabilmesi için giriş görüntüsünün her çerçevesinin en az 3 iterasyon zamanı sabit tutulmasını gereken yeni bir yöntem önermişlerdir [15]. Giriş görüntüsünün her çerçevesinin en az 3 iterasyon zamanı sabit tutulması şartı, deneysel olarak tespit edilmiştir. ZTHSA'nın vektör-matris eşitliğine ileri Euler yaklaşıklığı uygulayarak elde edilen fark denkleminin bu gibi bir şarta ihtiyacı olmadığı görüldüğü için, bu ZTHSA simülasyon yönteminin eşitliği vektör-matris formunda elde edilerek her iki eşitlik karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda iki eşitlik arasında $\mathbf{K}[\mathbf{v}_{k+1} - 2\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}]$ terim farkı olduğu belirlenmiş ve iterasyon adımlarında $\mathbf{K}$ matrisinin üstel kuvvetleri ile karşılaştırılmıştır. Yapılan analizler sonucunda (3.38) şartı sağlanırsa $k \Rightarrow \infty \quad \mathbf{K}^k \Rightarrow \mathbf{0}$ olacağı ortaya konmuştur ve bu şartın $\mathbf{K}$ matrisinin etkisinin ortadan kalkması için geçen zaman olduğu belirlenmiştir. Ayrıca $\mathbf{K}$ matrisinin etkisinin ortadan kalkması için $\hat{\mathbf{A}}_1$ matrisinin özdeğerlerinin $-1 < \lambda_{\hat{\mathbf{A}}_1} < 0$ olması gerektiği belirlenmiştir.

Bunlara ek olarak ileri ve geri Euler yaklaşıklığı kullanılarak elde edilen ZTHSA simülasyon yöntemi, her türlü ZTHSA uygulamasının simülasyonunda kullanılabilecek biçimde genelleştirilmiştir. Uygun σ değerleri için (3.45) eşitliği her türlü ZTHSA uygulamasında kullanılabilir.

İleri ve geri Euler yaklaşıklığı kullanılarak elde edilen ZTHSA simülasyon yönteminin vektör-matris eşitliğinde 1. ve 2. türev yaklaşıklıkları yerine türev ifadelerinin yazılması sonucunda bu eşitliğin 2. mertebeden bir diferansiyel denklemin ayrıklaştırılması ile elde edilen bir fark denklemi olduğu belirlenmiştir. Önerilen yöntemin, $\hat{A}_1$ matrisinin özdeğerlerinin $-1 < \lambda_{A_1} < 0$ olması durumunda 2. mertebeden diferansiyel denklemin çözümünü 1. mertebeden bir diferansiyel denklem olan ZTHSA'nın çözümüne denk düşürdüğü gösterilmiştir.

Bölüm 4'te, Shi [19] tarafından verilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA gerçekleştirilmesi yapılmıştır. Shi, 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtreyi, 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin devresi ile 1-boyutlu zamansal BGF'nin devresini birbirine kaskad bağlayarak tasarlamıştır. Giriş görüntüsü öncelikle 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin devresine uygulanmakta ve devre bir sonraki görüntünün geliş süresinden çok daha hızlı sonuca yakınsamaktadır. Ayrıca bu yöntem ile diğer 3-boyutlu uzay-zamansal filtreler de gerçekleştirilebilmektedir. Ancak Shi'nin önerdiği sistem sayısal tasarımda zamanla ilgili sıkıntılar yaratabilir. Başka bir deyişle 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin sayısal tasarımı analog tasarımı kadar hızlı çalışmayacak, hatta ancak iki video çerçevesi arasında sürede sonuç verebilecektir. Bunun nedeni 2-boyutlu uzamsal Gabor-tipi filtrenin sayısal tasarımı çok fazla iterasyon yapılarak sistemin sonuca yakınsamasının beklenmesidir. Bundan dolayı 1-boyutlu zamansal BGF'ye yeterli zaman kalmayabilir. Bununla birlikte her iki filtre için T_s zaman aralığının belirlenmesi problemi de bulunmaktadır.

Bu çalışmada 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonu [19] ile 1. türevli ZTHSA'nın transfer fonksiyonu arasında benzerlik olduğu gösterilerek 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile tasarımı elde edilmiştir. Bu tasarım ile tek aşamada 3-boyutlu filtreleme yapılmaktadır, ek bir filtre tasarımına ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu açıdan bu tasarım FPGA ve benzeri bir ortam üzerinde sayısal gerçeklemeye daha uygun bir tasarımıdır.

İp vd. [10]'nin verdiği 3-boyutlu uzay-zamansal BGF tasarımında 5x5'lik gerçel veya 3x3'lük karmaşık ZTHSA şablonları kullanılmıştır. Karmaşık şablonlu ZTHSA ile tasarlanan 3-boyutlu uzay-zamansal BGF'nin uygun frekanslara ayarlanması için 14 farklı değişkenin belirlenmesi gerekmektedir ki bu değişkenlerin görevleri ve anlamları açık değildir [10].

Bu çalışmada ZTHSA ile tasarlanan 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrede şablonlardaki ω_{x0}, ω_{y0} ve Ω_{t0} değerlerini değiştirmekle filtrenin merkez frekansları α ve λ ile de filtrenin band genişliği kolaylıkla değiştirilebilir. Katsayıların görevlerinin belirli olması açısından [10]'da verilen tasarıma göre bu filtrenin ZTHSA ile yapılan tasarımı gerçekleştirme kolaylığı sunmaktadır.

Bölüm 5'te, Bölüm 4'te verilen 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin ZTHSA ile tasarımından esinlenilerek 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerinin ZTHSA ile gerçeklemeleri verilmiştir. Shi [19], 3-boyutlu uzay-zamansal Gabor-tipi filtrenin transfer fonksiyonunu 1-boyutlu zamansal ve 2-boyutlu uzamsal AGF'lerin genlik-frekans yanıtlarını $\Omega_{t0}, \omega_{x0}, \omega_{y0}$ frekanslarına öteleyerek elde etmiştir.

Bu çalışmada ZTHSA ile tasarımı yapılan 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin transfer fonksiyonlarını HSA ile gerçekleştirilen filtrelerin ayrık-uzay transfer fonksiyonları [20] ile 1-boyutlu filtrelerin sürekli-zaman transfer fonksiyonlarının birbirleriyle çarpılmasıyla elde edilmiştir. HSA ile gerçekleştirilen filtrelerin ayrık-uzay transfer fonksiyonları, bu filtrelerin sürekli-uzay transfer fonksiyonundan elde edilmiştir. Bu sürekli-uzay transfer fonksiyonları [14] ve [20]'de 1-boyutlu analog filtrelerin transfer fonksiyonlarından esinlenilerek türetilmiştir. Ancak bu çalışmalarda 2-boyutlu frekans dönüşümleri ile ilgili bir bilgi verilmemiştir. Burada öncelikle 2-boyutlu uzamsal filtrelerin sürekli-uzay transfer fonksiyonlarını elde etmek için kullanılan 2-boyutlu frekans dönüşümleri verilmiştir ve bu frekans dönüşümleri 2-boyutlu AGF'nin sürekli-uzay transfer fonksiyonuna uygulanmıştır.

HSA ile gerçekleştirilen filtrelerin ayrık-uzay transfer fonksiyonları ile 1-boyutlu filtrelerin sürekli-zaman transfer fonksiyonlarının çarpımı ile elde edilen 3-boyutlu uzay-zamansal filtrelerin transfer fonksiyonlarına ters Fourier dönüşümü uygulanarak bu filtrelerin ZTHSA eşitlikleri elde edilmiştir. Bu filtrelerin ZTHSA şablonları da [14] ve [20]'de verilen HSA şablonları kullanılarak türetilmiştir.

İlerdeki alışmalarda ZTHSA'nın FPGA veya benzeri bir ortamda sayısal gerçeklemesinin yapılması planlanmaktadır. Seçilecek uygulamaya göre gerçek-zamanlı ZTHSA yapısının sonuçları daha önce varolan sonuçlar ile karşılaştırılarak performans analizi yapılacaktır.

KAYNAKLAR

-
- [1] Mead, C., (1989). Analog VLSI and Neural Systems, Addison-Wesley, Reading, MA.
 - [2] Mahowald, M. A. ve Mead, C., (1991). "The Silicon Retina", Scientific American, 264(5):76-82.
 - [3] Boahen, K., (1999). "Retinomorphich Chips That See Quadruple Images" Seventh International Conference On Microelectronics For Neural, Fuzzy, And Bio-Inspired Systems, April 1999, Granada Spain, 12-20.
 - [4] Andreou, A. G., Strohhahn, K. ve Jenkins R. E., (1991). "Silicon Retina For Motion Computation", Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, June 1991, Singapore, 1373 - 1376.
 - [5] Andreou, A. G., Boahen, K. A., Pouliquen, P. O., Pavasovic, A., Jenkins, R. E. ve Strohhahn, K., (1991). "Current-mode subthreshold MOS circuits for analog VLSI neural systems", IEEE Transactions on Neural Networks, 2(2):205-213.
 - [6] Andreou, A. G., Meitzler, R. C., Strohhahn, K. ve Boahen K. A., (1995). "Analog VLSI neuromorphic image acquisition and pre-processing systems", Neural Networks, 8(7):1323-1347.
 - [7] Shi, B. E. ve Chua, L. O., (1992). "Resistive Grid Image Filtering: An Input/Output Analysis Via The CNN Framework", IEEE Trans. On Circuits And Systems-I, 39(7):531-548.
 - [8] Chua, L. O. ve Roska, T., (2002). Cellular Neural Networks and Visual Computing Foundations and Applications, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
 - [9] Ip, H. M. D., Drakakis, E. M., ve Bharath, A. A., (2008). "On Analog Networks and Mixed-Domain Spatio-Temporal Frequency Response", IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 55(1): 284-297.
 - [10] Ip, H. M. D., Drakakis, E. M., ve Bharath, A. A., (2008). "Synthesis of Non-separable 3D Spatiotemporal Bandpass Filters on Analog Networks", IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 55(1): 298-310.
 - [11] Ip, H. M. D., Drakakis, E. M., ve Bharath, A. A., (2006). "Towards Analog VLSI Arrays For Nonseparable 3d Spatiotemporal Filtering," Proceedings of the 10th

- IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications, 2006, İstanbul, Turkey, 1 - 6.
- [12] Ip, H. M. D., (2007). Bioinspired Analog Networks for Spatial and Spatiotemporal Filtering: Theory and Realisations, Doktora Tezi, Department of Bioengineering, Imperial College London.
- [13] Ip, H. M. D., Drakakis, E. M., ve Bharath, A. A., (2008). "A Nonseparable 3D Spatiotemporal Bandpass Filter With Analog Networks", IEEE International Symposium on Circuits and Systems, (ISCAS 2008), 18-21 May 2008, Seattle, WA, 1376 - 1379.
- [14] Tural-Polat, S. N., (2009). Uzay ve Uzay-Zamansal Hücresel sinir Ağı Filtreleri, Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [15] Tural-Polat, S. N., ve Tavsanoğlu, V., (2009). "A New Simulation Method For Time-Derivative CNNs", 17th European Signal Processing Conference (EUSIPCO'09), Glasgow, Scotland, 288-292.
- [16] Cesur, E., Yildiz, N., ve Tavsanoğlu, V., (2012). "On an Improved FPGA Implementation of CNN-Based Gabor-Type Filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Express Briefs, 59(11): 815 - 819.
- [17] Lin, C.-T., ve Huang, C.-H., (2005). "A complex texture classification algorithm based on Gabor-type filtering cellular neural networks and self-organized fuzzy inference neural networks", IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2005), Kobe, Japonya, 3942 - 3945.
- [18] Tavsanoğlu, V., ve Saatci, E., (2000). "Feature extraction for character recognition using Gabor-type filters implemented by cellular neural networks", 6th IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications (CNNA 2000), Catania, İtalya, 63 - 68.
- [19] Shi, B.E., (1998). "Gabor-Type Filtering in Space and Time with Cellular Neural Networks", IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 45(2):121-132.
- [20] Tavsanoğlu, V. ve Tural-Polat, S.N., (2012). "2nd order 2-D spatial filters and Cellular Neural Network implementations", 13th International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and Their Applications (CNNA 2012), Torino, İtalya, 1 – 5.
- [21] Chua, L. O. ve Yang, L., (1988). "Cellular Neural Networks: Theory", IEEE Transactions on Circuits and Systems, 35:1257-1272.
- [22] Chua, L. O. ve Yang, L., (1988). "Cellular Neural Networks: Applications", IEEE Transactions on Circuits and Systems, 35:1273-1290
- [23] Yavuz, O., Tural-Polat, S.N., ve Tavşanoğlu, V., (2010). "On the Simulation of Time Derivative Cellular Neural Networks", 18th European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2010), Aalborg, Danimarka, 1340-1343 .

- [24] Tural-Polat, S.N., Yavuz, O., ve Tavşanoğlu, V., (2012). “Efficient Simulation of Time-Derivative Cellular Neural Networks”, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 59(11):2638-2645.
- [25] Scheick J.T.,(1997). Linear algebra with Applications, Mcgraw-Hill Com.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Oğuzhan YAVUZ
Doğum Tarihi ve Yeri : 03.05.1982 Köyceğiz/MUĞLA
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ogyavuz@yildiz.edu.tr / ogyavuz82@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Elektronik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2007
Lisans	Elektrik-Elektronik Mühendisliği	İstanbul Üniversitesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2005-2013	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

- 1 Tural-Polat, S.N., **Yavuz, O.**, ve Tavşanoğlu, V., (2012). “Efficient Simulation of Time-Derivative Cellular Neural Networks”, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 59(11):2638-2645.

Bildiri

- 1 **Yavuz, O.**, Tural-Polat, S.N., ve Tavşanoğlu, V., (2010) “On the Simulation of Time Derivative Cellular Neural Networks”, 18th European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2010), Aalborg, Danimarka, 1340-1343 .