

Genell. Inter, Geniř, Yapı Giriş-Çıkış

Doktora Tezi

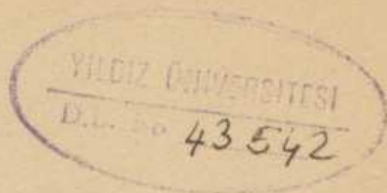
Ulviye Başer

1983

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

Kot : R 152
Alındığı Yer : Fen Bil. Ens. 68
Tarih : 9.12.1988
Fatura :
Fiatı : 2500 ₺
Ayniyat No : 1/21
Kayıt No : 45756
UDC : 378.242
Ek : 512.8





**GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTERAKTÖR
GENİŞLETİLMİŞ YAPISAL GİRİŞ-ÇIKIŞ ALGORİTMASI
LİNEER SİSTEM ANALİZİNDE TEMEL GEOMETRİK
KAVRAMLAR VE ASAL SİSTEMLER**

Ulviye BAŞER

(Doktora Tezi)

DOKTORA JÜRİSİ

Prof. : Raşit MOCAN (Tez Yöneticisi)

Prof. : Kemâl HALICI (Üye)

Doç. Dr. : Yorgo İSTEFANOPULOS (Üye)

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yönetip, bana yol gösteren Sayın hocam Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesi Elektrik Bölümü Başkanı Prof.Raşit Mocan'a teşekkürlerimi sunarım.

Bana bu çalışmayı yapma olanağı sağlayan T.B.T.A.K. Marmara Bilimsel ve Endüstriyel Araştırma Enstitüsü Müdürlüğüne, başta Uygulamalı Matematik Bölümü Başkanı Sayın Prof.Dr.Erdoğan Şuhubi olmak üzere tüm bölüm elemanlarına şükranlarımı belirtmek isterim.

Ayrıca bu tezin hazırlanıp ortaya çıkmasında değerli görüş, uyarı ve yönlendirmeleriyle bana destek olan Sayın Dr.Vasfi Eldem'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ö Z E T

Bu çalışmada doğrusal, zamanla değişmeyen n . mertebeden yönetilebilen dinamik sistemlerde transfer matrisin rankı ve sistemin giriş-çıkış boyutu üzerinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın "En Büyük Sıfır Çıkışlı Alt Uzay(1), V^* 'ın boyutu "İnteraktör"(25) kavramı yardımıyla incelenmiştir.

Yönetilebilen ve gözlenebilen sistemlerde V^* 'ın boyutu için bulunan değer kullanılarak diğer geometrik kavramlardan "En Büyük Sıfır Çıkışlı Yönetilebilen Alt Uzay(1), R^* ve V^* 'ın dualinin sıfırlayıcısı olan(18) τ alt uzayının boyutu elde edilmiştir.

V^* , R^* ve τ alt uzaylarının boyutları ve İnteraktör'ün determinantının derecesi ∂_T arasında basit bir bağıntı elde edebilmek için "Genelleştirilmiş İnteraktör" tanımı yapılmış ve ayrıca "Yapısal Giriş-Çıkış Algoritması"(19) her boyuttaki giriş ve çıkışı kapsayacak şekilde yeni bir algoritma ile orijinalinden farklı bir biçimde düzenlenmiştir. Yönetilebilen ve gözlenebilen sistemlerde, Genelleştirilmiş Yapısal Algoritmanın sonuçları ile Asal Sistemlerin(18) saptanması için gerek ve yeter koşul belirlenmiştir.

Birinci bölümde sistemler hakkında genel bilgiler ve Doğrusal Sistem Analizinde bir sistemin yönetilebilme ve göz-

lenebilme koşulları geometrik bir yaklaşımla verilmiş ve bu çalışmada kullanılan geometrik kavramlar özetlenmiştir.

İkinci bölümde literatür taraması yapılarak bu konudaki çalışmalar incelenmiş, sıfır çıkışlı alt uzaylar(1)(4)(13)(14), iletim sıfırları(2)(6)(7)(23)(28), İnteraktör(25), Yapısal Giriş-Çıkış Algoritması(19), Asal Sistemler(11)(17)(18) tanıtılmıştır. Ayrıca yapılan çalışmaya temel oluşturan "doğrusal durum geribeslemeli kontrol kuralı ile sistem mertebesini indirgeme işlemine değinilmiştir. Mertebe indirgeme işlemi ile "en büyük sıfır çıkışlı alt uzay" V^* boyutu arasındaki bağıntı açıklanmıştır.

İnteraktör(25) tam ranklı transfer matrisler için tanımlı özel yapıda bir polinom matristir. Üçüncü bölümde; transfer matris üzerindeki rank koşulu kaldırılarak "Genelleştirilmiş İnteraktör" tanımı yapılmıştır. Genelleştirilmiş İnteraktör sınıfındaki elemanların determinantlarının derecesi β_T , "en büyük sıfır çıkışlı alt uzay" V^* ve "en büyük mertebe indirgemesi" arasındaki bağıntı verilmiştir. Bunlardan başka, her boyutta giriş-çıkışa sahip sistemler için "Geniştirilmiş Yapısal Giriş-Çıkış Algoritması", "GYA" düzenlenmiştir. GYA ile Yapısal Giriş-Çıkış algoritmasıyla(19) bulunamayan " s_i , için" tam sayıları elde edilmiştir. Bu tam sayıların geri besleme ile değişmediği gösterilmiştir. GYA'da elde edilen tüm tamsayılar kullanılarak β_T için basit bir formül geliştirilmiştir. Son aşamada V^* 'in boyutu β_T 'ye bağlı olarak verilmiştir.

Tezin son bölümünde; yönetilebilen, gözlenebilen sistemler ve bunların dualine GYA'nın uygulanması sonucunda elde edilen tam sayılar yardımıyla en büyük sıfır çıkışlı yönetilebilen alt uzay R^* ve V^* 'in dualinin sıfırlayıcıları olan r alt uzayının boyutu hesaplanmıştır. V^* ve R^* 'in boyutların-

dan "İletim Şifiraları"'nın Sayısı hesaplanabilmektedir. "Asal Sistemler"'in tanıtımı için gerek ve yeter koşul saptanmış, sonuçlar örnek problemler üzerinde tartışılmıştır.

S U M M A R Y

In this thesis, we investigate the relation between "Output Nulling Invariant Subspace" V^* and the concept of Interactor(25) without any restriction on the rank of transfer matrix and the input-output dimensions in the linear, time invariant, n^{th} order, controllable dynamic systems.

In controllable and observable systems, the dimensions of the "Largest Output Nulling Controllability Subspace" R^* and the annihilator of dual V^* can be obtained from the dimension of V^* .

The notion of Interactor(25) was generalized and also the Input-Output Structure Algorithm(19), was modified in order to obtain simple relations between the dimensions of V^* , R^* and $\tau(1)(4)(13)(14)(18)(27)$, and the degree of the determinant of the Interactor, ∂_T . The "Generalized Interactor" was defined for all proper transfer matrices which do not necessarily have full rank. For systems where $\rho[T(s)] \neq p$, Structure Algorithm(19) and other modified versions of it(15)(16)(21) does not provide enough information to calculate ∂_T . But a simple expression, which yields ∂_T can be developed from the "Modified Structure Algorithm" (GYA).

Finally, a new set of necessary and sufficient conditions was introduced for a controllable and observable system to be prime(18).

In the first part, general knowledge about the linear, time invariant, multivariable systems were given and the Geometric concepts used in this thesis were summarized.

In the second part, Output Nulling Invariant Subspaces(1)(4)(13)(14)(27), Transmission zeros(2)(6)(7)(23)(28), Interactor(25), Structure Algorithm(19) and Prime Systems(11)(17)(18) were introduced. Furthermore, Maximal Order Reduction via linear state feedback was mentioned in this part.

The relation between the degree of the determinant of the Interactor, ∂_T and maximal order reduction was first developed by Antsaklis(3), for systems with $\rho[T(s)] = p$. Antsaklis had also shown that maximal order reduction was equal to the dimension of V^* . In the third section, the results presented by Antsaklis(3) will be extended to the systems with $\rho[T(s)] < \min(p,m)$. Since the Interactor was defined for only full rank transfer matrices. It has to be generalized in order to cover all proper transfer matrices. With this aim, "Generalized Interactor" was defined. When $\rho[T(s)] < \min(p,m)$, the relation between the Largest output nulling invariant subspace, V^* , maximal order reduction and ∂_T has been given. Furthermore, Modified Structure Algorithm (GYA) employs the matrices $D, CB, \dots, CA^{n-1}B$ which are available by the Laurent expansion of $T(s)$ at $s=\infty$. As a result of the application of GYA to be given system some new integers denoted by " $s_i, i \in \mathbb{N}$ " were obtained. Feedback invariance of these integers were proved. A simple expression for ∂_T was obtained by the integers from GYA. Finally the dimension of

V^* is given.

In the last part of this thesis, the dimension of R^* and τ are obtained in the controllable and observable systems. The Transmission zeros were calculated via the dimensions of V^* and R^* . A new set of necessary and sufficient conditions for a linear multivariable system to be prime(18) is introduced.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

ÖZET

İNGİLİZCE ÖZET

BÖLÜM I- ÇALIŞMANIN AMACI VE ÖN BİLGİLER

- 1.1. Giriş
- 1.2. MATEMATİKSEL ÖN BİLGİLER
- 1.3. DOĞRUSAL, ZAMANLA DEĞİŞMEYEN DİNAMİK SİSTEMLERİN TANITIMI
- 1.4. GEOMETRİK YAKLAŞIMLA DOĞRUSAL SİSTEMLERİN İNCELENMESİ, YÖNETİLEBİLEN ALT UZAYLAR, ÇÖZLENEBİLEN ALT UZAYLAR, τ DİZİSİ, YÖNETİLEBİLİRLİK İNDİSLERİNİN TANITIMI

BÖLÜM II- GENEL TANIMLAR VE LİTERATÜR ÖZETİ

- 2.1. SIFIR ÇIKIŞLI ALT UZAY, SIFIR ÇIKIŞLI YÖNETİLEBİLEN ALT UZAY VE τ ALT UZAYI
- 2.2. İLETİM POLİNOMLARININ TANITIMI
- 2.3. SİSTEMLERDE MERTEBE İNDİRGEME İŞLEMİ
- 2.4. İNTERAKTÖR TANIMI
- 2.5. ASAL SİSTEMLERİN TANITIMI
- 2.6. YAPISAL GİRİŞ-ÇIKIŞ ALGORİTMASI

BÖLÜM III- METOD

- 3.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTERAKTÖR TANIMI
- 3.2. GENİŞLETİLMİŞ YAPISAL GİRİŞ-ÇIKIŞ ALGORİTMASI (GYA)
- 3.3. EN BÜYÜK SIFIR ÇIKIŞLI ALT UZAY V^{**} 'İN BOYUTU

BÖLÜM IV- UYGULAMALAR VE SONUÇLAR

- 4.1. EN BÜYÜK SIFIR ÇIKIŞLI YÖNETİLEBİLEN ALT UZAY R^* VE τ ALT UZAYININ BOYUTLARI

- 4.2. ASAL SİSTEMLERİN TANITIMI İÇİN GEREK VE YETER KOŞULUN SAPTANMASI
- 4.3. İLETİM SIFIRLARININ SAYISI
- 4.4. ÖRNEK PROBLEM

EKLER

SONUÇLAR

KAYNAKLAR

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. PROBLEMİN TANITIMI

Bu çalışmada doğrusal, zamanla değişmeyen, n mertebeden, yönetilebilen, her boyuttan giriş ve çıkışa sahip ve transfer matrisi üzerinde herhangi bir rank koşulu olmayan dinamik sistemlerde durum geri beslemeli kontrol kuralının sistem mertebesindeki etkisi incelenerek "En Büyük Sıfır Çıkışlı Alt Uzay" V^* 'in boyutu elde edilecektir. Ayrıca yönetilebilen ve gözlenebilen sistemler için "En Büyük Sıfır Çıkışlı Yönetilebilen Alt Uzay" R^* ve V^* 'in dualinin sıfırlayıcısı olan r alt uzayının boyutları elde edilecektir. Bu nedenle ele alınan sistem ve çalışmada kullanılan alt uzaylar ve bazı kavramların kısa bir tanımını yapmak gerekmektedir.

Doğrusal, zamanla değişmeyen, çok değişkenli dinamik bir sistemin durum denklemleri, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ve $y(t) \in \mathbb{R}^p$, zamanın vektör değerli fonksiyonları, A , B , C , D uygun boyutta sabit matrisler olmak üzere

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

ve aynı sistemin transfer matrisi

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.1.2)$$

denklemleri ile gösterilir.

Dinamik sistemlerin kontrolünde kullanılan doğrusal durum geri beslemeli kontrol kuralı

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t) \quad (1.1.3)$$

olup burada F ve G sırasıyla $m \times n$, $m \times q$ sabit matrisler, $v(t)$ q boyutlu dış giriştir.

Doğrusal sistem analizinde zamanla değişmeyen dinamik sistemler Geometrik yaklaşımla incelenmiştir. Bu yaklaşımda (A, B, C, D) sistem matrisleri doğrusal dönüşümler olarak düşünülmektedir. Bu dönüşümler yardımıyla yönetilebilen alt uzay ve gözlenebilir alt uzay tanımlanmıştır. Gene bu yaklaşımda geliştirilen (A, B) değişmez alt uzaylar ve yönetilebilen alt uzaylar tanım ve algoritması ile C doğrusal dönüşümünün çekirdeği $(\text{Ker } C)$ içinde en büyük (A, B) değişmez alt uzay V^* ve V^* içindeki en büyük (A, B) değişmez yönetilebilen alt uzay bulunur (4) (13) (57). Bu çalışmada boyutu aranan "sıfır çıkışlı alt uzay" V^* ve "sıfır çıkışlı yönetilebilen alt uzay" R^* (A, B) değişmez ve yönetilebilen alt uzayların en genel şeklidir. τ ise V^* 'in dualinin sıfırlayıcısıdır*.

Aşağıda V^* , R^* ve τ alt uzaylarının tanımı verilmektedir (1) (14) (18) (22):

$$V^* \triangleq \sup_V \{ V \mid \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} V \subset \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} V + \text{Im} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \} \quad (1.1.4)$$

$$(\tau)^\perp \triangleq \sup_{\bar{V}} \{ \bar{V} \mid \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} \bar{V} \subset \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \bar{V} + \text{Im} \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \} \quad (1.1.5)$$

$$R^* \triangleq V^* \cap \tau \quad (1.1.6)$$

Burada Im simgesi "image" görüntü anlamındadır.

(*) Annihilatör kavramına karşılık "sıfırlayıcı" kullanılmıştır. (1) ile gösterilir.

İnteraktör(25); $T(s)$ tam ranklı proper transfer matrisi, K_x reel elemanlı sabit bir matris ve $\rho[K_x] = \rho[T(s)]$ ise

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s)T(s) = K_x$$

bağıntısını sağlayan sol alt üçgensel, köşegen elemanları monic* polinomlar olan tekil olmayan polinom matristir.

Sistemlerde Mertebe İndirgeme İşlemi(3): Yönetilebilen sistemlerde durum geribesleme matrisi F 'in uygun bir seçimiyle bazı kutupların gözlenemeyen kutuplar haline getirilmesi işlemine "Sistemlerde Mertebe İndirgeme İşlemi" adı verilir.

Durum geribesleme matrisi F ile sistemin mümkün olduğu kadar fazla sayıda kutbunu gözlenemeyen kutuplar haline getirilerek sistem mertebesindeki en büyük düşüşü sağlamaya "En Büyük Mertebe İndirgeme İşlemi" adı verilir.

1.1.1. Literatür Özeti ve Çalışmada İzlenen Yol

Doğrusal, zamanla değişmeyen dinamik sistemin (1.1.1) ile gösterilen durum denklemlerinde $D = 0$ ise $\text{Ker} C$ içinde bulunan en büyük (A, B) değişmez alt uzay ve yönetilebilen alt uzayın tanımları ve hesaplanış yöntemleri ilk defa Wonham tarafından verilmiştir(27). Rosenbroke, sistem matrisini tanımlamış ve rasyonel polinom matrislerin Smith Mc-Millan Formunu elde etmiştir(24). W.Dooren denklem (1.1.1)'de $D \neq 0$ olduğunda tanımlanan "en büyük sıfır çıkışlı alt uzay" V^* ve "en büyük sıfır çıkışlı yönetilebilen alt uzay" P^* 'in bazlarını, Rosenbroke'ın sistem matrislerini kullanarak ve Wonham'ın yöntemine benzer bir şekilde elde etmiştir (22).

*Monic polinom, en büyük dereceden terimin katsayısı bir olan polinomdur.

Bu çalışmada, V^* ve R^* 'in bazlarını hesaplamaksızın boyutlarını elde etme yöntemleri araştırılmıştır. Bu amaçla, ilk bölümde tanımı verilen "interaktör" incelenmiştir. Interaktör'ün determinantının derecesi ∂_T ile V^* 'in boyutunun hesaplanabileceği görülmüştür. Bu yöntemin en iyi tarafı sistem matrislerine (A,B,C,D) gerek duyulmaksızın sistemin transfer matrisinin (T(s)) $s=$ daki Laurent açılımında ortaya çıkan, D, CB, CAB, ..., $CA^{n-1}B$ matrisleri ile ∂_T 'nin ve dolayısıyla V^* 'in boyutunun hesaplanabilmesidir.

İlk bölümde tanımları verilen "sıfır çıkışlı alt uzay" V^* , interaktörün determinantının derecesi ∂_T ve "en büyük mertebe indirgeme işlemi" arasındaki bağıntı ilk defa Antsaklis(3) tarafından rank $T(s) = p$, (p sistemin çıkış boyutu) olan sistemler için incelendi. Antsaklis aynı çalışmasında sistem mertebesindeki en büyük düşüş miktarının V^* 'in boyutuna eşit olduğunu gösterdi. Interaktör, tam ranklı transfer matrisler için tanımlı olduğundan bu yöntem her sisteme uygulanamazdı. Bu nedenle çalışmada bütün proper transfer matrisler* için bulunabilen "Genelleştirilmiş Interaktör" tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş Interaktör yardımıyla transfer matrisin rankı ve sistemi giriş-çıkış boyutu üzerinde bir kısıtlama koymaksızın V^* 'in boyutunu elde etme olanağı vardır.

Interaktör ve "Yapısal Giriş-Çıkış Algoritması"(19) arasındaki bağıntı ilk defa Wolowich ve Falb tarafından verilmiştir(25). Rankı p olan transfer matrisler için Yapısal Giriş-Çıkış Algoritmasından elde edilen tam sayılar yardımıyla ∂_T hesaplanabilmektedir. Fakat yapısal giriş-çıkış algoritması ve onun diğer düzenlenmiş şekillerinden (15), (16), (21), elde edilen tam sayılar, ∂_T 'yi tüm proper transfer matrisler* için yani rank $T(s) \neq p$ olduğunda hesaplamaya yetmemektedir. Bu nedenle rank $T(s) \neq p$ olduğunda ∂_T 'yi hesaplamak için ayrıca Yapısal Giriş-Çıkış algoritmasını genişletme gereği ortaya çıkmıştır.

*Proper transfer matrislerde payın derecesi paydanın derecesinden küçük ya da eşittir.

"Genişletilmiş Yapısal Giriş Çıkış Algoritması" (GYA) ile Yapısal Algoritma sonuçlarına ek olarak yeni tam sayılar elde edilmiştir. Bu tamsayılarla $\mathfrak{A}_T$, tüm proper transfer matrisler için hesaplanabilmektedir.

GYA ve Genelleştirilmiş İnteraktör yardımıyla V^* 'ın boyutu her sistem için hesaplanabilecektir.

Bir sistemin yönetilemeyen ve gözlenemeyen sıfırları olan iletim sıfırlarının, transfer matrisin Smith Mc Millan formunda kesrin payında bulunan en büyük polinomun sıfırları olduğu gösterildi(2)(6)(10). Morse(18) $D = 0$ olduğunda iletim polinomlarının geometrik tanımını yapmıştır. Bu tanıma göre, iletim sıfırları V^* ve R^* 'ın boyutu yardımıyla hesaplanabilmektedir.

1.2. MATEMATİKSEL ÖN BİLGİLER

1.2.1. Cisim (Field)

F bir küme, $(+)$ ve $(\cdot)$ bu küme üzerinde tanımlı iki işlem olsun. $(F, +, \cdot)$ bir halka, $F \setminus \{0\}$ $(\cdot)$ işlemine göre değişmeli bir grup ve $(\cdot)$ 'nin $(+)$ üzerinde sağdan ve soldan dağılma özelliği varsa F 'e cisim denir. Örnek olarak reel sayılar ve kompleks sayılar kümesi verilebilir. Doğrusal sistem analizinde reel sayılar cismi kullanılmaktadır.

1.2.2. Doğrusal Vektör Uzayı

X , F cismi üzerinde elemanları vektörler olan bir küme, $(+)$ ve $(\cdot)$ vektör toplam ve ölçeksel çarpım işlemleri olsun. Eğer $(+, \cdot)$ değişmeli bir grup ve $\forall \alpha, \beta \in F, x, y \in X$ için

$$\alpha x \in X$$

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$

1, $(\cdot)$ işlemine göre birim eleman ve $1 \cdot x = x$ özellikleri sağlanıyorsa, X 'e F üzerinde vektör uzayı denir (X, F) ile gösterilir.

1.2.3. Alt Uzay

(X, F) vektör uzayı ve $R \subset X$ alınsın. R 'nin X 'te bir alt uzay olması için gerek ve yeter koşul (R, F) 'in vektör uzayı olmasıdır. Bu tanım;

$$\forall \alpha, \beta \in F \quad \text{ve} \quad \forall x, y \in R \quad \text{için} \\ \alpha x + \beta y \in R$$

şeklinde ifade edilebilir.

1.2.4. Sembol

k pozitif tam sayı ise k sembolü ise $\{1, 2, \dots, k\}$ kümesi gösterilir.

1.2.5. Tanım

(X, F) vektör uzayı, $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in F$ için

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$$

bağıntısı ancak ve ancak $\alpha_i = 0, i \in k$ koşulu ile sağlanıyorsa $x_i \in X, i \in k$ vektörleri F üzerinde doğrusal bağımsızdır. Eğer bu

denklemini sağlayan sıfırdan farklı en az bir α_i sayısı varsa $x_i, i \in k$ vektörleri doğrusal bağımlıdır.

1.2.6. Tanım

(X, F) vektör uzayı $A = \{x_i, i \in k\} \subset X$ doğrusal bağımsız vektör kümesi olsun. Eğer X 'e ait her vektör $x_i, i \in k$ vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazılabiliyorsa A kümesine X 'in "tabanı" denir. A 'nın elemanları taban vektörleri olup X 'i gerer ve

$$X = \text{Sp} \{x_i, i \in k\}$$

şeklinde ifade edilir.

1.2.7. Doğrusal Dönüşüm

$(X, F), (Y, F)$ vektör uzayları ve $C: X \rightarrow Y$ dönüşümü alın-sın. C 'nin doğrusal dönüşüm olabilmesi için gerek ve yeter koşul; $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$ ve $\forall x_1, x_2 \in X$ için

$$C(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Cx_1 + \alpha_2 Cx_2$$

bağıntısının sağlanmasıdır. Eğer $Y = F$ ise C , "Doğrusal Fonksiyonel" ismini alır.

1.2.8. Doğrusal Dönüşümün Matris Gösterimi

$(X, F), (Y; F)$ iki vektör uzay, $\{x_i, i \in n\}$ X 'in, $\{y_j, j \in m\}$ Y 'nin tabanı olsun. $C: X \rightarrow Y$ doğrusal dönüşümü bu tabanlarda

$$C x_i = C_{1i} y_1 + C_{2i} y_2 + \dots + C_{mi} y_m, i \in \underline{n}$$

biçiminde ifade edilir. Burada C_{ij} , $i \in \underline{n}$, $j \in \underline{m}$, F cisminde tek olarak saptanan elemanlardır.

$C = [C_{ij}]$ gösterilimi verilen taban çiftine göre C dönüşümüne ait matristir.

1.2.9. Çeşitli Alt Uzaylar ve Boyutları

1- (X, F) vektör uzayı R, S, X içinde alt uzaylar ise aşağıda tanımı verilen $R+S$ ve $R \otimes S$ kümeleri X içinde alt uzaylardır.

$$i- R+S \triangleq \{r+s \mid r \in R, s \in S\}$$

$$ii- R \otimes S \triangleq \{r+s \mid r \in R, s \in S\} \text{ ve } R \cap S = 0 \text{ (} R, S \text{ doğrusal bağımsız)}$$

Sembol: $d(\cdot)$ ile $(\cdot)$ alt uzayının boyutu ifade edilir.

$$d(R+S) = d(R) + d(S) - d(R \cap S)$$

$$d(R \otimes S) = d(R) + d(S)$$

2- $(X, F), (Y, F), C: X \rightarrow Y$ doğrusal dönüşüm ve $R \subset X$, $V \subset Y$ alındığında

$$i- \text{Ker } C \triangleq \{x \mid x \in X \text{ ve } Cx = 0\} \text{ } X \text{ içinde}$$

$$ii- \text{Im } C \triangleq \{y \mid y \in Y \text{ ve } y=Cx\} \text{ } Y \text{ içinde}$$

$$iii- CR \triangleq \{y \mid y \in Y \text{ ve } \exists x \in R \exists y=Cx\} \text{ } Y \text{ içinde}$$

$$iv- C^{-1}(V) \triangleq \{x \mid x \in X \text{ ve } Cx \in V\} \text{ } X \text{ içinde alt uzaylardır. Burada } C^{-1}, C \text{'nin fonksiyonel tersidir.}$$

$$d(CR) = d(R) - d(R \cap \text{Ker } C)$$

$$d(C^{-1}V) = d(\text{Ker } C) + d(V \cap \text{Im } C)$$

$$d(X) = d(\text{Ker } C) + d(\text{Im } C)$$

1.2.10. Bölüm Uzayı

(X, F) vektör uzayı ve $S \subset X$ alınsın.

$\forall x, y \in X$ için $x-y \in S$ ise " x, y vektörleri S moduna göre eşdeğer" denir ($x \equiv y \pmod{S}$)

TANIM: Bölüm uzayı; $\forall x \in X$ için

$$\bar{x} \triangleq \{y | y \in X, y-x \in S\}$$

şeklinde tanımlanan eşdeğerlik sınıflarının kümesidir ve X ile gösterilir. X/S , aşağıda tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre F üzerinde bir vektör uzayıdır.

$$\text{Toplama; } \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \triangleq \overline{x_1 + x_2}, \quad x_1, x_2 \in X$$

$$\text{Çarpma; } c\bar{x} \triangleq \overline{cx}, \quad x \in X, c \in F$$

$$\text{Boyutu; } d(X/S) = d(X) - d(S) \text{ dır.}$$

1.2.11. Dual Uzaylar

(X, F) vektör uzayı, X' ; $x': X \rightarrow F$ 'e bütün doğrusal fonksiyonların kümesi olsun. X' kümesi

$$(x'_1 + x'_2)x \triangleq x'_1x_1 + x'_2x_2, \quad x'_i \in X' \quad i=1,2, \quad x \in X$$

$$(kx'_1)x \triangleq k(x'_1x), \quad x'_1 \in X', x \in X, k \in F$$

işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

X' 'te $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ bazına karşı gelen dual baz X' içinde $\{x'_i, i \in \mathbb{N}\}$ ile gösterilen ve her bir x_i elemanı

$$x'_i x_j = \delta_{ij}, \quad (i, j \in \mathbb{N})$$

koşulunu sağlayan doğrusal fonksiyonellerin kümesidir. Bu küme tektir.

Herhangi bir $C: X \rightarrow Y$ dönüşümünün duali $C': Y' \rightarrow X'$ ve $\forall x \in X, \forall y' \in Y'$ için

$$[C'(y')]x = y'(Cx)$$

şeklinde tanımlanan C' dönüşümüdür. C nin baza göre matris gösterilimi $C = [C_{ij}]$ ise, dual matris $C' = [C'_{ji}]$ olup, C matrisinin devriğidir.

1.3. DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN DİNAMİK SİSTEMLERİN TANITIMI

Kontrol teorisinde fiziksel bir sistem ele alındığında, öncelikle sistemin zaman içindeki davranışını belirleyen matematiksel modeli, bilinen fizik kanunlarından yararlanılarak çıkarılmaktadır. Sistemlerin matematiksel modelleri değişik özelliklerine göre gruplara ayrılmıştır. Sistem Analizinde "Dinamik Sistem"(5) adı verilen, belirli özelliklere sahip matematiksel modeller üzerinde çalışılmaktadır.

Bu çalışmada; doğrusal zamanla değişmeyen dinamik sistemler incelenecektir. Dinamik sistemlerin matematiksel tanımı yapılmayıp, giriş, çıkış ve durum büyüklükleri tanıtılacaktır.

Durum değişkenleri, zamana göre değişim gösteren büyüklükler olup, belli bir t anında değerlerinin bilinmesi, sistem girdileri bilindiği sürece o andan itibaren bütünü ile belirlemeye yeterlidir.

1.3.1. Tanım

Verilen bir sistem T zaman kümesi içinde incelensin. $s \in T, s \geq t$ anlarında uygulanan girişler ile birlikte sistemin

gelecekteki davranışını bütün $s \in T$ ve $s \geq t$ için belirleyen t anındaki bilgiye o sistemin t anındaki durumu denir.

n - boyutlu sistemlerde durumu belirleyen ve t anında $x(t)$ ile gösterilen $\{x(t), t \in T\}$ değişkeni T yi n boyutlu Öklit uzayı olan R^n 'e dönüştüren bir fonksiyondur. Sisteme etkileyebilecek tüm farklı girişler altında elde edilen bu türden fonksiyonların kümesi X ile gösterilir X 'e "durum uzayı" adı verilir.

Sistem giriş ve çıkışı bağımsız parametre kümesi olan zamana bağımlıdır. Bu nedenle zamanın fonksiyonları olarak tanımlanır. U ile gösterilen "giriş uzayı" T yi $U \subset U$ 'ya dönüştüren u fonksiyonlarının kümesi, Y ile gösterilen "çıkış uzayı" T yi $Y \subset Y$ 'ye dönüştüren y fonksiyonlarının kümesidir. $u(t)$, u fonksiyonunun, $y(t)$, y fonksiyonunun t anındaki değerleridir.

Matematiksel modeli verilen doğrusal zamanla değişmeyen dinamik sistemlerin üç farklı gösterim şekli vardır(26). Bunlar;

- A. Durum (uzayı) gösterimi,
- B. Transfer Matris gösterimi,
- C. Diferansiyel Operatör gösterimi

olup geliştirilmiş gerçekleştirme (realization) teknikleri ile birinden diğerine geçiş mümkündür(12)(26).

A. Durum Gösterimi

Doğrusal dinamik sistem denildiğinde çoğunlukla dinamik denklemi $x(t)$ durumu için doğrusal bir vektör diferansiyel denklemi ve $y(t)$ çıkışı, $u(t)$ girişi ile $x(t)$ durumunun doğrusal fonksiyonu olan bir sistem akla gelir.

Doğrusal zamanla değişmeyen çok değişkenli dinamik bir sistemin "durum gösterilimi" $t \geq 0$ için tanımlı $x(t) \in \mathbb{R}^n$ durum, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ giriş ve $y(t) \in \mathbb{R}^p$ çıkış zamanın vektör değerli fonksiyonları ve A, B, C, D uygun boyutta, reel elemanlı sabit matrisler olmak üzere

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.3.2)$$

denklemleri ile verilir. Bu denklemler kısaca $\phi = \{A, B, C, D\}$ dörtlüsü ile ifade edilebilir.

Diferansiyel denklem çözümünün varlık ve tekliğine dayanılarak ϕ sisteminin $x(0) = x_0$ başlangıç koşuluna göre herhangi bir $t (t > 0)$ anındaki çözümü $\phi(t; u(t), x_0)$ ise bu çözüm;

$$\phi(t; u(t), x_0) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (1.2.3)$$

olacaktır. $x(t) \stackrel{\Delta}{=} \phi(t, u(t), x_0)$ alınsın. $x(t); u(t), t > 0$ girişi ile x_0 durumundan ulaşılabilen t anındaki durumu göstermektedir.

B. Transfer Matris Gösterimi

Deneyisel çalışmalarda giriş fonksiyonunu, çıkış fonksiyonuna dönüştüren fiziksel sistem, bu dönüşümü kendi iç yapısına uygun biçimde yapmaktadır. Dolayısıyla giriş fonksiyonu ile çıkış fonksiyonu arasındaki ilişkiyi belirleyen dönüşüm fonksiyonu, sistemin iç yapısıyla ilgili ve onun niteliğini belirleyen bir fonksiyondur. Tek girişli, tek çıkışlı sistemlerde, sıfır durumunda bulunan bir sisteme τ anında uygulanan birim etki (impulse) karşısındaki sistemi $t (t > \tau)$ anındaki tepkisi (response) ölçülerek, dönüşüm fonksiyonunun

t anındaki değeri bulunur. Çok giriş-çok çıkışlı sistemlerde bu fonksiyonlar Etki-Tepki Matrisi denilen bir matrisle gösterilir. p -çıkış, m -girişli olan sistemlerde etki tepki matrisi $p \times m$ boyutludur ve k ıncı kolonu, sıfır durumunda bulunan bir sisteme τ anında k ıncı girişten uygulanan birim etkiye sistemin verdiği p -çıkışın t ($t > \tau$) anındaki değerleridir. Bu işlemlerde k ıncı giriş hariç diğer girişler sıfır alınmıştır.

1.3.2. Tanım

Zamandan bağımsız, doğrusal, çok değişkenli sistemin transfer matrisi $T(s)$, etki-tepki matrisinin Laplace transformudur. Transfer (dönüşüm) fonksiyonu tek-giriş, tek-çıkışlı sistemlerde transfer matrise verilen isimdir.

$\phi = \{A, B, C, D\}$ sisteminde $T(s)$, $p \times m$ boyutlu polinom matris olup

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.3.4)$$

ile gösterilir. Bu denklemde eğer $D = 0$ ise $T(s)$ "kesin proper" transfer matris, $D \neq 0$ ise "proper" transfer matris adını alır. Birincisinde transfer matrisin herbir $t_{ij}(s)$ elemanında payın derecesi, paydanın derecesinden küçük, ikincisinde küçük veya eşittir.

$(sI - A)$ matrisinin determinantı A matrisinin karakteristik polinomudur. n . dereceden olan bu polinomun kökleri A 'nın özdeğerleri (eigenvalue) dir. (1.3.4) denklemine göre A matrisinin gözlenebilir ve yönetilebilir özdeğerleri sistemin kutuplarına eşdeğerdir.

Doğrusal çok değişkenli dinamik sistemlerde zaman ve frekans değişkeni arasındaki ilişki, Yapı (Structure) Teo-

remi(26) ile açıklık kazanır. Bu teoreme dayanarak transfer matris, iki polinom matrisinin çarpımı şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} T(s) &= R(s)P^{-1}(s) \\ T(s) &= \bar{P}^{-1}(s)Q(s) \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Bu matrisler aşağıdaki özelliklere sahiptirler;

- 1- $R(s)$, $Q(s)$ $p \times m$, $P(s)$ $m \times m$ kolon proper, $\bar{P}(s)$ $p \times p$ satır proper polinom matrisleridir.

Not: Kolon (satır) proper kavramları ile $P(s)$ ($\bar{P}(s)$)'nin her bir kolonunda (sətirında) bulunan en yüksek dereceden polinomların katsayıları ile kurulan matrisin tekil olmadığı belirtilmektedir.

Semboller: $\partial_{cj}[\cdot]$ bir matriste j . kolondaki polinomların en büyük derecesini, $\partial_{ri}[\cdot]$, i . satırın en büyük derecesini gösterir.

$$2- \partial_{cj}[R(s)] \leq \partial_{cj}[P(s)] \quad , j \in m$$

$$\partial_{ri}[Q(s)] \leq \partial_{ri}[\bar{P}(s)] \quad , i \in p$$

olmalıdır.

- 3- Genellikle (α , β pozitif skalarlar olmak üzere)
 $\det(sI-A) = \alpha \det P(s) = \beta \det \bar{P}(s)$ dir.

C. Diferansiyel Operatör Gösterimi

$D = \frac{d}{dt}$ diferansiyel operatör, $z(t)$; q boyutlu kısmi durum, $u(t)$: m boyutlu giriş ve $y(t)$: p boyutlu çıkış zamanın vektör değerli fonksiyonları, $P(D)$, $Q(D)$, $R(D)$, $W(D)$ uygun

boyutlardaki polinom matrisleri ise

$$\begin{aligned} P(D) z(t) &= Q(D)u(t) \\ y(t) &= R(D)z(t) + W(D)u(t) \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

denklemleri doğrusal, zamandan bağımsız dinamik sistemlerin diferansiyel operatör gösterimidir(26). Burada kısmi durum, sistem dinamiğini belirleyen fiziksel değişkenlerden bazılarıdır.

1.3.2. Doğrusal Zamanla Değişmeyen Dinamik Sistemlerin Yönetilebilirliği ve Gözlenebilirliği

Dinamik bir sistemden $[t_0, t_1]$ zaman aralığında amaca uygun bir çıkış elde edebilmek için, sistemin t_0 anındaki $x(t_0) = x_0$ başlangıç durumunun bilinmesi ve t_1 anında sistemi x_1 son durumuna getirecek $[t_0, t_1]$ aralığında tanımlı bir $u(t)$ girişinin saptanması gerekmektedir. Bu gereksinim sistemlerde ulaşılabilme, yönetilebilme ve gözlenebilme kavramlarının gelişmesine neden olmuştur. Aşağıda bu kavramların genel tanımları ve zamanla değişmeyen sistemlerin yönetilebilirliği ve gözlenebilirliği için gerek ve yeter koşullara yer verilmiştir.

$T = [t_0, t_1]$ aralığında tanımlı bir dinamik sistem için x ; n boyutlu durum uzayı, u ; T den R^m 'e parça parça sürekli kontrollerinin meydana getirdiği giriş uzayı ve $\phi(t; u(t), x_0)$ sistemin $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulu ile $t(t_0 < t \leq t_1)$ anındaki çözümü olsun.

1.3.3. Tanım (Ulaşılabilirlik)

Sistemin t_1 anındaki bir x_1 , ($x_1 \in X$) durumu için $\phi(t_1; u(t), x_0) = x(t_1) = x_1$

olacak şekilde bir $u \in U$ girişi varsa x_1 'e x_0 durumundan ulaşılabilir bir durum denir. x_0 durumundan ulaşılabilen bütün durumların kümesi R ise, R, X içindedir(29).

1.3.4. Tanım (Yönetilebilirlik)

Eğer $x(t_1) = 0$ durumu x_0 'dan ulaşılabilen bir durumsa x_0, t_0 anında yönetilebilen bir durumdur. Eğer her x_0 durumu t_0 'da yönetilebilirse sistem t_0 'da yönetilebilir, eğer tüm x_0 durumları, sistemin tanımlı olduğu aralıktaki her t_0 anında yönetilebilirse sisteme "tümüyle yönetilebilir" denir(29).

Zamanla değişmeyen sistemlerde yönetilebilirlik ile ulaşılabilirlik eşanlamlı olduğundan aşağıdaki tanım verilebilir.

1.3.5. Tanım

$\phi = \{A, B, C, D\}$ sisteminin tümüyle yönetilebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir t_0 anındaki x_0 durumunu herhangi bir $t_1 > t_0 \geq 0$ anında verilen her $x(t_1)$ son durumuna götüren bir $u(t)$, $0 \leq t_0 < t \leq t_1$ girişinin bulunabilmesidir.

Bu tanıma eşder bir koşul

$$\mathcal{L} \triangleq [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (1.3.7)$$

ve

$$\text{Rank } [\mathcal{L}] = n \quad (1.3.8)$$

şeklinde belirlenmiştir. $\mathcal{L}$ 'ye yönetilebilirlik matrisi ismi verilir.

1.3.6. Tanım (Gözlenebilirlik)

Sistemin $[t_0, t_1]$ zaman aralığındaki giriş ve çıkış değerlerinden t_0 anındaki x_0 durumu tek olarak bulunabiliyorsa, x_0 , " t_0 'da gözlenebilir" denir. Eğer her x_0 durumu t_0 'da gözlenebiliyorsa sistem t_0 'da gözlenebilir, eğer tüm x_0 durumları sistemin tanım aralığındaki her t_0 anında gözlenebilirse sisteme "tümüyle gözlenebilir" denir(29).

1.3.7. Tanım

$\phi = \{A, B, C, D\}$ sisteminin tümüyle gözlenebilmesi için gerek ve yeter koşul $[t_0, t_1]$ zaman aralığındaki giriş ve çıkış değerlerinden x_0 durumunun tek olarak bulunabilmesidir. Bu tanıma eşdeğer bir koşul;

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{bmatrix} \quad (1.3.9)$$

Rank $[Q] = n$

şeklinde belirlenmiş olup Q 'ya "gözlenebilirlik matris" ismi verilir.

Tümüyle yönetilebilen ve gözlenebilen bir sistemde;

$$\rho[Q] = \rho[\ell] = n \text{ ve } \rho[Q\ell] = n \quad (1.3.10)$$

dir. Böyle sistemlere "Minimal Sistem" denir.

1.3.8. Tanım: Mc Millan Derecesi

Proper, rasyonel transfer-matrisinin minimal gerçeklemesinin mertebesine Mc Millan Derecesi ismi verilir.

Semboller: Sistemin tümüyle yönetilebilirliği "(A,B) yönetilebilir", gözlenebilirliği "(C,A) gözlenebilir" biçiminde ifade edilecektir.

1.3.9. Doğrusal Durum Geribeslemesi

Tanım: $u(t)$ sistem girişi, $v(t)$ dış giriş, F ve G elemanları reel sayılarda alınan sırasıyla $m \times n$ ve $m \times q$ matrisler olmak üzere

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t) \quad (1.3.10)$$

bağıntısına "doğrusal durum geribeslemeli kontrol kuralı", F matrisine "durum geribesleme matrisi" ismi verilir.

$\phi = \{A, B, C, D\}$ sistemine durum geribeslemeli kontrol kuralı uygulanırsa;

$$\dot{x}(t) = (A + BF) x(t) + BG u(t) \quad (1.3.11)$$

$$y(t) = (C + DF) x(t) + DG u(t) \quad (1.3.12)$$

"Kapalı Çevrim Sistemi" elde edilir. Bu sistem kısaca $\phi_F = \{A + BF, BG, C + DF, DG\}$ ile gösterilir.

Bir sistemin yönetilebilirliği durum geribeslemeli kontrol kuralı ile değiştirilemez. Diğer bir deyişle eğer λ ve λ_F sırasıyla ϕ ve ϕ_F sistemlerine ait yönetilebilirlik matrisler ve ϕ yönetilebilirse;

$$\rho(\lambda) = \rho(\lambda_F) = n$$

olacaktır. Bu özelliği aşağıda tanımlanan matrisler yardımıyla ispatlayabiliriz.

$$\Lambda \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} I & \hat{a}_1 & \dots & \hat{a}_n \\ 0 & I & \hat{a}_1 & \dots & \hat{a}_{n-1} \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & I \end{bmatrix} \quad (1.3.13)$$

$$\hat{a}_i \stackrel{\Delta}{=} F A^{i-1} B \quad (1.3.14)$$

Gösterilebilir ki $\ell_F = \ell \Lambda^{-1} G$ dir. Λ^{-1} ve G tam ranklı matris olduğundan Sylvester eşitsizliğine göre $\rho[\ell] = \rho[\ell_F]$ tir.

Geri besleme matrisi sistemin yönetilebilen kısmında bulunan kutuplara etki edecektir. Bilindiği gibi A matrisinin özdeğerleri sistemin kutuplarına eşittir. Kapalı çevrim sisteminde $A+BF$ matrisinin yönetilebilen Bush biçimi düşünülürse F 'in etkisinin sadece yönetilebilen kısımda bulunan özdeğerler üzerinde olduğu görülebilir. F 'in uygun bir seçimiyle sistemin yönetilebilen kutuplarının istenildiği gibi değiştirilmesi işlemine literatürde "kutup yerleştirme" ismi verilir. Geri beslemenin bu özelliği sistemi kararlı hale getirmekte de kullanılır.

1.4. GEOMETRİK YAKLAŞIMDA LİNEER SİSTEMLERİN YÖNETİLEBİLİRLİK VE GÖZLENEBİLİRLİK İNCELEMESİ(27)

$t \geq 0$ için tanımlı $\Phi = (A, B, C, D)$ sistemine ait sonlu boyutlu X durum uzayı, U giriş uzayı ve Y çıkış uzayı reel sayılar cismi üzerinde vektör uzaylarıdır. O halde sistem matrisleri;

$$A:X \rightarrow X \quad (1.4.1)$$

$$B:U \rightarrow X \quad (1.4.2)$$

$$C:X \rightarrow U \quad (1.4.3)$$

$$D:U \rightarrow Y \quad (1.4.4)$$

eklinde tanımlanan doğrusal dönüşümlerin matris gösterimidir.

Eğer R_0 , X içinde $x_0 = 0$ durumundan ulaşılabilen durumların kümesi ise X' 'in doğrusal bir alt uzayı ve ayrıca amandan bağımsız sistemlerde yönetilebilirlik ile ulaşılabilirlik eşanlamlı kavramlar olduğu için X' 'te yönetilebilir alt uzay olacaktır. O halde R_0 'ı A ve B dönüşümleri cinden aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür:

$$R_0 \triangleq \text{Im} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (1.4.5)$$

$$\text{Im} B \triangleq B \quad (1.4.6)$$

$$\langle A|B \rangle \triangleq B + A B + \dots + A^{n-1}B \quad (1.4.7)$$

$$R_0 \triangleq \langle A|B \rangle \quad (1.4.8)$$

1.3.3) tanımına göre sistemde birtakım durumların yönetilelmesi sistemin tümüyle yönetilebilmesine yetmemektedir. O alde sistemin tümüyle yönetilebilmesi için $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ ektörlerinin tüm uzayı germesi gerekmektedir. Bu özellik aşağıdaki biçimde ifade edilir.

4.1. Tanım: Yönetilebilirlik

$\langle A|B \rangle = X$ ise (A,B) yönetilebilir.

Önceki bölümde tanımı verilen durum geribeslemeli kontrol kuralı $u = Fx + v$ ile (A,B) çifti $(A+BF, B)$ çiftine dönüşür.

A, B matrislerinin yönetilebilen kanonik biçimi gözönüne getirildiğinde F durum geri besleme matrisinin sistemin sadece yönetilebilen kısmına etki ettiği kolaylıkla görülebilir. O halde herhangi bir $F: X \rightarrow U$ durum geribeslemesi için

$$\langle A+BF | B \rangle = \langle A | B \rangle \quad (1.4.9)$$

dır. (A, B) yönetilebilirse (1.4.9) denkleminde $(A+BF, B)$ çifttininde yönetilebileceği sonucu ortaya çıkar.

1.4.2. Tanım (Gözlenebilirlik)

X durum uzayı, $d(X) = n$ alınsın. Eğer

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(CA^{i-1}) = 0 \text{ ise } (C, A) \text{ gözlenebilir.}$$

$\phi = \{A, B, C, D\}$ sisteminin gözlenebilir olması için gerek ve yeter koşul (C, A) 'nın gözlenebilir olmasıdır.

1.4.3. Tanım (Gözlenemeyen Uzay)

$$n = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(CA^{i-1}) \quad (1.4.10)$$

n 'e X 'in "Gözlenemeyen Altuzayı" denir.

1.4.4. Tanım (A, B) Değişmez Alt Uzaylar

X durum uzayında herhangi bir V alt uzayı eğer

$$A V \subset V + B \quad (1.4.11)$$

özellğine sahipse V 'ye (A, B) değişmez alt uzay ismi verilir.

Sembol: $\rho(A,B;X)$ ya da $\rho(X)$ ile X içindeki (A,B) değişmez alt uzayların sınıfı gösterilmektedir.

(1.4.11) bağıntısına göre A -değişmez alt uzayların (A,B) değişmez alt uzay oldukları açıktır. (A,B) değişmez altuzayların temel özelliği F geribesleme matrisinin uygun bir seçimiyle $(A+BF)$ değişmez yapılabilmesidir. Aşağıdaki lemma bu özelliğe açıklık getirecektir.

Lemma (1.4.1.) X' 'te alınan herhangi bir V alt uzayının (A,B) değişmez olması için gerek ve yeter koşul V 'yi $(A+BF)$ değişmez yapan bir $F: X \rightarrow U$ geribeslemesinin bulunmasıdır.

İspat: X için $(A+BF)V \subset V$ koşulu sağlansın ve $v \in V$ alındığında bir $\omega \in V$ için $(A+BF)v = \omega$ olup buradan $Av = \omega - BFv$ bulunur.

Tersine $V \in \rho(X)$ ise $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$ 'nin bazını göstermek üzere öyle bir $\omega_i \in V$ ve $u_i \in U$ ($i \in \underline{m}$) vardır ki

$$Av_i = \omega_i - Bu_i \quad i \in \underline{m}$$

olacaktır. Bir $F_0: X \rightarrow U$ dönüşümü $F_0 v_i = u_i$, $i \in \underline{m}$ şeklinde tanımlanır ve $F: F_0$ 'ın X 'e genişlemesi biçiminde alınırsa ispat tamamlanır.

Sembol: $V \in \rho(X)$ ise $\underline{F}(V)$ ile V alt uzayını $(A+BF)$ değişmez kılan $F: X \rightarrow U$ dönüşümlerinin sınıfı gösterilir.

Teorem (1.4.1) (A,B) değişmez alt uzaylarının sınıfı $\rho(X)$ alt uzay toplama işlemi altında kapalıdır ve bir tek en büyük elemanı vardır.

Sembol: K , X içinde herhangi bir alt uzay ise $\rho(K)$ il

$\rho(K) = \{V \mid V \in \rho(X), V \subset K\}$ kümesi gösterilmektedir.

Herhangi bir $K \subset X$ için $\rho(K)$, sınıfı alt uzay toplamı altında kapalı olup bir en büyük elemanı vardır ve

$$V^* \triangleq \sup \rho(K) \quad (1.4.12)$$

ile gösterilir. V^* tektir X 'teki her alt uzay, bir tek en büyük (A,B) değişmez alt uzay içerir.

(A,B) Değişmez Alt Uzaylar Algoritması

K , X içinde herhangi bir alt uzay olsun.

$$V_1 = K$$

$$V_\mu = K \cap A^{-1}(B + V_{\mu-1}), \quad \mu \in \mathbb{N} \quad (1.4.13)$$

dizisi azalan bir dizidir. Eğer k , $k \leq d(K)$ ve $\mu \geq k$ için $V_\mu = V_k$ bağıntısını sağlayan en küçük tam sayı ise

$$V_k \triangleq V^* \quad (1.4.14)$$

ve V^* , K içinde en büyük (A,B) değişmez alt uzaydır.

$$V^* = \sup \rho(K)$$

İspat: $V_\mu \subset V_{\mu-1}$ olduğu tüme varımla ispatlanabilir.

V_μ nün (A,B) değişmez alt uzayıdır. Çünkü $\mu+1$ için

$$V_{\mu+1} = K \cap A^{-1}(B + V_\mu)$$

$\exists k \exists \mu \geq k$ için $V_\mu = V_k = V^*$. O halde

$$V^* = K \cap A^{-1}(B + V^*) \text{ ve}$$

$$V^* \subset A^{-1}(B + V^*) \implies A \quad V^* \subset B + V^*$$

V_μ 'nın $\rho(K)$ içinde en büyük eleman olduğunu göstermek için herhangi bir $V \in \rho(K)$ alalım. $\rho(K)$ nin tanımına göre;

$$V \subset K \text{ ve } AV \subset V + B$$

dir. Bu iki bağıntıdan $V \subset K \cap A^{-1}(V + B)$ yazılarak V , (1.4.13) dizisi ile karşılaştırılırsa;

$$V \subset V_1 = K$$

$$V \subset K \cap A^{-1}(V + B) \subset K \cap A^{-1}(V_1 + B) = V_2$$

ve

$$V \subset V_\mu \quad \text{bulunur. Bir } k, k \leq d(K) \text{ için } V_\mu = V_k$$

O halde

$$V \subset V_k \in \rho(K) \text{ dir.}$$

1.4.5. Yönetilebilen Alt Uzaylar

Tanım: X içinde herhangi R alt uzayı alınsın.

$$R = \langle A+BF \mid \text{Im}BG \rangle \quad (1.4.15)$$

olacak şekilde bir $F: X \rightarrow U$ durum geribesleme ve $G: U \rightarrow U$ dönüşümü varsa R 'ye " (A, B) çiftinin Yönetilebilen Alt Uzayı" denir.

Semboller: $\underline{C}(X)$ ile X içinde yönetilebilen alt uzayların sınıfı gösterilir. K, X 'te alınan herhangi bir alt uzay ise $\underline{C}(K)$ ile

$$\underline{C}(K) \stackrel{\Delta}{=} \{R | R \in \underline{C}(K), R \subset K\}$$

kümesi tanımlanır.

$\text{Im } BG = B \cap R$ eşitliği ispatlanarak R 'nin tanımı yeniden düzenlenmiştir. Aşağıda bu tanımlar kısaca ifade edilmiştir.

$$R \in \underline{C}(K) \iff \exists F: X \rightarrow U$$

$$R = \langle A + BF | B \cap R \rangle \quad (1.4.16)$$

$R \in \underline{C}(K) \implies$ (1.4.16) denklemi $\forall F \in \underline{F}(V)$ için yazılabilir.

Yönetilebilen Alt Uzaylar Algoritması (Y.A.A.)

$$R, X \text{ içinde herhangi bir alt uzay, ve } \underline{S}, X \text{ içinde} \\ \underline{S} \stackrel{\Delta}{=} \{S | S = R \cap (AS + \bar{B})\} \quad (1.4.17)$$

tanımıyla verilen alt uzaylar ailesi olsun. $\underline{S}$, en küçük elemana sahiptir ve bu eleman S^* ile gösterilir.

X içinde bir S_i dizi

$$S_0 = 0 \quad (1.4.18)$$

$$S_\mu = R \cap (AS_{\mu-1} + \bar{B}) \quad , \quad \mu \in \mathbb{N}$$

denklemleri ile tanımlansın. Öyle bir $k \in \mathbb{N}$ tamsayısı vardır ki $\mu \geq k$ için $S_\mu = S_k$ ve $S_\mu \in \underline{S}$ olacaktır. $\underline{S}$ içinde en küçük eleman S^* ile gösterilmişti. O halde

$$S^* = \lim_{\mu} S_\mu = S_n \quad , \quad \mu \in \mathbb{N} \quad (1.4.19)$$

yazılabilir.

Eğer R , (A, B) değişmez bir alt uzaysa S_μ (1.4.15) tanımında verilen yönetilebilen alt uzaya eşit olacak ve S_μ 'nin hesaplanmasında kullanılan (1.4.18) denklemleri "Yönetilebilen Alt Uzay Algoritması" olarak gösterilecektir.

$R \in \underline{p}(X)$ alındığında, herhangi bir $F \in \underline{F}(R)$ ve $\hat{R} \subset R$ için

$$B \cap R + (A + BF) \hat{R} = R \cap (A \hat{R} + B) \quad (1.4.20)$$

eşitliği sağlanır. Bu denkleme göre S_μ dizisi yeniden düzenlenirse

$$S_\mu = \sum_{j=1}^{\mu} (A + BF)^{j-1} (B \cap R) \quad (1.4.21)$$

bulunur (Doğruluğu tümevarımla ispatlanabilir). (1.4.16) ve (1.4.21) denklemlerine göre

$$S_\mu = R \quad (1.4.22)$$

dir. O halde S_μ yönetilebilen bir uzaydır ve Yönetilebilen Alt Uzay Algoritması (1.4.18) denklemleri ile verilir.

1.4.2. Teorem

Herhangi bir $R \subset X$ ve (1.4.7) ile tanımlı $\underline{S}$ ailesi alınsın.

$$R \in \underline{c}(X) \iff R \in \underline{p}(X) \text{ ve } R = S^*$$

S^* ; (YAA) ile hesaplanan $\underline{S}$ 'in en küçük elemanıdır.

Not: (1.4.21) denklemine göre $R = S^* = \langle A + BF | B \cap R \rangle$ olacaktır.

İspat: $R \in \underline{C}(X)$ ya da $R \in \underline{D}(X)$ alındığında $\underline{F}(R)$ boş olmayacağından bir $F \in \underline{F}(R)$ için $R = S_n = S^*$ eşitliği sağlanarak teoremdaki gerek ve yeter koşullar ispatlanır.

Yönetilebilen alt uzaylar sınıfı olan $\underline{C}(X)$, alt uzay toplamı altında kapalıdır. K, X içinde herhangi bir alt uzay ise $\underline{C}(K)$ sınıfı da alt uzay toplamı altında kapalı olup bir en büyük elemanı vardır. O halde her K alt uzayı içinde bir tek en büyük yönetilebilen alt uzay bulunur ve

$$R^* = \sup \underline{C}(K)$$

ile gösterilir.

"En Büyük (A, B) Değişmez Alt Uzay" V^* İçinde Bulunan "En Büyük Yönetilebilen Alt Uzay" R^* 'in Tanımı ve Hesaplama Yöntemi

X durum uzayı, K, X içinde herhangi bir alt uzay ise $V^* \triangleq \sup \underline{D}(K)$, $R^* \triangleq \sup \underline{C}(K)$ alındığında herhangi bir $F \in \underline{F}(V^*)$ için

$$R^* = \langle A + BF | B \cap V^* \rangle \quad (1.4.23)$$

olup aşağıda tanımlanan dizi yardımıyla hesaplanır.

$$S_0 = 0$$

$$S_\mu = V^* \cap (AS_{\mu-1} + B), \mu \in \mathbb{N} \quad (1.4.25)$$

Öyle bir $k \geq d(V^*)$ sayısı vardır ki $\mu \geq k$ için $S_\mu = S_k$ ve

$$S_k = R^*$$

olacaktır.

τ_i Dizisi (18)

X Durum uzayı, Y çıkış uzayı olmak üzere $C: X \rightarrow Y$ doğrusal dönüşümü alınsın. $D = 0$ olan (C, A, B) sistemi için $\text{Ker} C$ içinde en büyük (A, B) değişmez alt uzay (1.4.13) denklemlerinde K yerine $\text{Ker} C$ ko, rak elde edilen dizi yardımıyla bulunur. O halde:

$$\begin{aligned} V_0 &= X \\ V_1 &= \text{Ker} C \\ V_\mu &= \text{Ker} C \cap A^{-1}(B + V_{\mu-1}), \mu \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

ve eğer $k \geq \mu$ için $V_k = V_\mu$ eşitliğini sağlayan en küçük tamsayı ise (1.4.14) ten $V_k = V^*$ olacaktır.

(1.4.16) denklemlerinde C yerine B' , A yerine A' ve $\text{Im} B$ yerine $\text{Im} C'$ koyar, dualini alırsak;

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0 \\ \tau_1 &= B \\ \tau_\mu &= B + A(\tau_{\mu-1} \cap \text{Ker} C) \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

dizisini elde ederiz. Burada da $k, \mu \geq k$ için $\tau_k = \tau_\mu$ eşitliğini sağlayan en küçük tamsayıdır ve

$$\tau_k \stackrel{\Delta}{=} \tau \quad (1.4.28)$$

şeklinde tanımlıdır. τ alt uzayı

$$B \subset \tau \text{ ve } A(\tau \cap \text{Ker} C) \subset \tau \quad (1.4.29)$$

özelliklerine sahip en küçük alt uzayıdır.

(1.4.26), (1.4.27), (1.4.28) denklemlerinde

$$\tau = (\bar{V}^*)^{\perp} \quad (1.4.30)$$

sonucu çıkacaktır. Burada $(\bar{V}^*)$, V^* 'in dualidir.

V^* alt uzayı, R_{μ} ve τ_{μ} dizisi arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilmiştir(18).

$$R_{\mu} = V^* \cap \tau_{\mu} \quad (1.4.31)$$

$$R^* = V \cap \tau \quad (1.4.32)$$

bu çalışmada çok sık kullanılan bu iki bağıntı tümevarımla doğrulanabilir.

Yönetilebilirlik İndisleri(27)

X , n boyutlu durum uzayı, U m boyutlu giriş uzayı olsun. içinde

$$S_j \triangleq B + A B + \dots + A^j B, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.4.33)$$

alt uzayları ve

$$\bar{d}_0 \triangleq m, \quad \bar{d}_j \triangleq d(S_j / S_{j-1}), \quad j \in \underline{n-1} \quad (1.4.34)$$

tam sayıları alınsın. Bu tamsayılar

$$\bar{d}_0 \geq \bar{d}_1 \geq \dots \geq \bar{d}_{n-1} \geq 0 \quad (1.4.35)$$

$$\bar{d}_0 + \bar{d}_1 + \dots + \bar{d}_{n-1} = n \quad (1.4.36)$$

özelliklerine sahiptir.

TANIM (1.4.6.) Sistemin yönetilebilirlik indisleri d_i ile gösterilsin. $i \in m$ için d_i yönetilebilirlik indisler aşağıdaki ölçümde tanımlıdır.

$d_i \triangleq \{ \bar{d}_i, i \in k \mid \geq 1 \}$ kümesindeki tamsayıların sayısı
(1.4.36), (1.4.33), (1.4.35), (1.4.36) denklemlerinden

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_m \quad (1.4.38)$$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = n \quad (1.4.39)$$

Özellikleri elde edilir. Burada d_1 'e "(A, B) çiftinin yönetilebilirlik indeksi" denir.

(A, B) yönetilebilirse

$$d_1 = \min\{j: 1 \leq j \leq n, B + A^j = x\} \quad (1.4.40)$$

denklemleriyle tanımlıdır.

BÖLÜM II

GİRİŞ

$p \times m$, proper (payın derecesi, paydanın derecesinden küçük ya da eşit) transfer fonksiyon matrisine sahip, yönetilebilen, n . mertebeden $\phi = \{A, B, C, D\}$ sistemi verildiğinde sıfır çıkışlı alt uzay V^* , sıfır çıkışlı yönetilebilen alt uzay R^* ve τ 'nin boyutları Interaktör(25) adı verilen özel bir polinom matrisinin determinantının derecesi ile elde edilecek, bulunan sonuçlara göre "Asal" sistemler(18) ve "yönetilebilirlik indisler(27)" incelenecektir.

Amaca uygun olarak bu bölümde V^*, R^*, τ alt uzayları, Interaktör, sistem sıfırları, Asal sistemler, yönetilebilirlik indislerinin tanımları verilmiş, literatürde V^* ve R^* 'in boyutu üzerinde yapılmış çalışmalar özetlenmiştir.

2.1. SIFIR ÇIKIŞLI ALT UZAYLAR(1)(3)

TANIM (2.1.1.) X durum uzayı, V , X içinde herhangi bir alt uzay ise V 'nin "Sıfır Çıkışlı Alt Uzay" olması için gerek ve yeter koşul

$$i) \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} V \subset \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad V + \text{Im} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

ii) Bazı $F: X \rightarrow U$ dönüşümleri için

$$(A+BF)V \subset V \subset \ker (C+DF) \quad (2.1.2)$$

eşdeğer koşullarından birinin sağlanmasıdır.

$D = 0$ olduğunda (1.1) ve (2.1.2) denklemleri V 'nin $\ker C$ içinde (A, B) değişmez alt uzay ve $F \in \underline{F}(V)$ olduğunu gösterir.

TANIM (2.1.2) En Büyük Sıfır Çıkışlı Yönetilebilen Alt Uzay (1)(3) V^* , en büyük sıfır çıkışlı alt uzay ve $F_m, V = V^*$ için (2.1.2) bağıntısını sağlayan bir durum geri besleme matrisi olsun.

$$\hat{S} \triangleq B \ker D \quad (2.1.3)$$

$$R^* = \langle A + BF \mid \hat{S} \cap V^* \rangle \quad (2.1.4)$$

denklemleri ile tanımlanan R^* alt uzayına "En Büyük Sıfır Çıkışlı Yönetilebilen Alt Uzay" ismi verilir. R^*, V^* içinde en büyük yönetilebilen alt uzaydır.

En Büyük Sıfır Çıkışlı Alt Uzay Algoritması(14)

Bölüm (1.4)'te verilen (A, B) değişmez alt uzaylar algoritması $\{A, B, C, D\}, D \neq 0$ sistemi için düzenlenmelidir. V^* , en büyük sıfır çıkışlı alt uzay olsun.

$$V_1 = C^{-1} (\text{Im} D) \quad (2.1.5)$$

$$V_u = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} V_{u-1} + \text{Im} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \right), u \in \underline{n}$$

dizisi azalan bir dizidir. Eğer $k, \mu \geq k$ için $V_\mu = V_k$ bağıntısını sağlayan en küçük tamsayı ise

$$V^* \triangleq V_k \quad (2.1.6)$$

olacaktır.

τ Alt Uzayı İçin Algoritma

(2.1.5) denklemleri ile verilen dizinin duali alınır ve A', C', B', D yerine sırasıyla A, B, C, D ve $(V^*)^\perp$ yerine τ yazılırsa

$$\tau_1 = B \text{Ker} D \quad (2.1.7)$$

$$\tau_\mu = [A \ B] \{ [I, 0]^{-1} \tau_1 \cap \text{Ker} [C \ D] \}$$

dizisi bulunur. Burada $k, \mu \geq k$ için $\tau_k = \tau_\mu$ eşitliğini sağlayan en küçük tamsayı ve

$$\tau = \tau_k \quad (2.1.8)$$

dir.

2.2. $\phi = \{A, B, C, D\}$ Sisteminin İletim (Transmission) Sıfırları

n boyutlu $\phi = \{A, B, C, D\}$ sistemi verilsin. $p \times m$ boyutlu transfer matris $T(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} B + D$ ve $(n+p) \times (n+m)$ boyutlu sistem matrisi (9)(24):

$$S(\lambda) \triangleq \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \text{ olsun}$$

TANIM (2.2.1)

$$\text{rank } S(\lambda) < n+r$$

(2.2.1)

$$r \stackrel{\Delta}{=} \text{rank } T(\lambda)$$

eşitsizliğini sağlayan λ kompleks sayılarına ϕ sisteminin "değişmez sıfırları" denir. Bunlar $S(\lambda)$ 'nın Smith sıfırlarıdır(9)(24).

Minimal sistemlerde Smith sıfırları "iletim sıfırları" adını alır(28). Bu özellik Davidson ve Wang(6)(7) tarafından $r = \min(p,m)$ kısıtlaması altında gösterilmiştir. $S(\lambda)$ minimal ise iletim sıfırları aynı zamanda transfer matrisin Mc Millan sıfırları(24) dır(2)(6)(7)(10).

Morse(18), $D = 0$ olan sistemlerde temel geometrik alt uzaylar yardımıyla iletim polinomlarının geometrik tanımını yapmıştır. Bunların $C(sI-A-BF)^{-1}B$ transfer matrisine ait Smith Mc Millan formundaki iletim polinomları olduğunu belirtmiştir.

Aşağıda iletimin sıfırlarının farklı iki tanımı yer almaktadır.

TANIM (2.2.2) Minimal $\phi = \{A, B, C, D\}$ sisteminin iletim polinomları $T(s)$ transfer matrisinin Smith Mc Millan(24) formunda kesrin payında bulunan en yüksek dereceden değişmez polinomlardır. Transfer matrisin Smith-Mc Millan formu $M(s)$ ile gösterilir ve aşağıdaki yapıdadır.

$$M(s) = \begin{bmatrix} \text{diag} \left\{ \frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)} \right\} & 0 \\ 0_{p-r} & m-r \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

Burada $r = \rho |T(s)|$ ve $i = 1, 2, \dots, r$ için $\varepsilon_i(s)/\varepsilon_{i+1}(s)$
 $\psi_{i+1}(s)/\psi_i(s)$ dir.

Sistemin iletim sıfırları $\varepsilon_r(s) = 0$ denklemini sağlayan s değerleridir.

TANIM (2.2.3.) n. mertebeden $\phi = \{C, A, B\}$, $D = 0$ sistemi için $\text{Ker} C$ içinde en büyük (A, B) -değişmez alt uzay V^* ve en büyük yönetilebilen alt uzay R^* olsun. V^*/R^* bölüm uzayı üzerinde A_t doğrusal dönüşümü tanımlansın.

$$A_t: V^*/R^* \rightarrow V^*/R^* \quad (2.2.4)$$

$F \in F(V^*)$ ve $A_F = A + BF$ alındığında X/R^* üzerinde tanımlanan $\bar{A}_F = \overline{A+BF}$ dönüşümünün V^*/R^* bölüm uzayına kısıtlanması A_t dönüşümüne eşittir. Yani;

$$A_t = \bar{A}_F|_{(V^*/R^*)} \quad (2.2.5)$$

A_t dönüşümüne karşı gelen matrisin karakteristik polinomunun çarpanları sistemin "yapısal değişmezleri" olup bu polinomlara "iletim polinomları", bu polinomların sıfırlarına ise "iletim sıfırları" adı verilir. A_t dönüşümü $F \in F(V^*)$ dan bağımsız ve tek olarak belirlidir.

A_t nin bu tanımına göre sistemin yönetilemeyen ve gözlenemeyen sıfırları olan iletim sıfırlarının sayısı V^*/R^* bölüm uzayının boyutudur. Bölüm uzayının (1.2.10) da verilen tanımından

$$\dim(V^*/R^*) = \dim V^* - \dim R^* \quad (2.2.6)$$

elde edilir. O halde sistem sıfırlarının sayısını bulabilmek için V^* ve R^* alt uzaylarının boyutunu bilmek gerekmektedir.

Bunun için değişik çalışmalar yapılmıştır. Çoğunlukla bu çalışmalar V^* ve R^* alt uzaylarını elde etmeye yöneliktir(22) (27). Bu çalışmada iletim sıfırlarının sayısı $D \neq 0$ olan sistemlerde en büyük sıfır çıkışlı alt uzay ve en büyük sıfır çıkışlı yönetilebilen alt uzayların boyutları yardımıyla hesaplanmıştır.

Bu kısımda sistemlerde "merteye indirgeme problemi" ele alınıp, V^* 'in boyutu ve sistem sıfırları ile ilgisi Antsaklis'in çalışmasından(3) yararlanılarak açıklanacaktır.

2.3. DOĞRUSAL SİSTEMLERDE MERTEBE İNDİRGEME İŞLEMİ ; (Maximal Order Reduction Problem)

n . mertebeden yönetilebilen ve gözlenebilen $\phi = \{A, B, C, D\}$ sistemi verilsin. $p \times m$ transfer matrisi (1.3.4) ve (1.3.5) ten

$$T(s) = C(sI-A)^{-1} B + D = R(s)P^{-1}(s) \quad (2.3.1)$$

dir. Burada $R(s)$, $p \times m$ matris, $P(s)$ $m \times m$ kolon proper matristir. Bu sisteme doğrusal durum geri besleme kontrol kuralı;

$$u = Fx + v \quad (2.3.2)$$

uygulanırsa $\phi_F = \{A+BF, B, C+DF, D\}$ kapalı çevrim sistemi elde edilir.

ϕ_F sistemine ilişkin transfer matris,

$$T_F(s) = (C+DF)(sI-A-BF)^{-1} B + D = R(s)P_F^{-1}(s) \quad (2.3.3)$$

olacaktır. Burada

$$P_F(s) \stackrel{\Delta}{=} P(s) - F(s) \quad (2.3.4)$$

denklemleri ile tanımlı kolon proper polinom matrisidir.

ϕ_F sistemi her F durum geri beslemesi için yönetilebilen bir sistemdir. Fakat ϕ_F 'in her F için gözlenebildiği söylenemez. Çünkü F 'in etkisiyle sistemin bazı kutupları çıkıştan gözlenemeyebilir. Bu halde $R(s)$ ile $P_F(s)$ nin (genellikle $G_R(s)$ ile gösterilen) ortak sağ çarpanı vardır.

$$R(s) \stackrel{\Delta}{=} \hat{R}(s) G_R(s) \quad (2.3.5)$$

$$P_F(s) \stackrel{\Delta}{=} \hat{P}_F(s) G_R(s) \quad (2.3.6)$$

tanımlarına göre $T_F(s)$;

$$T_F(s) = \hat{R}(s) G_R(s) [(\hat{P}_F(s) G_R(s))^{-1}] \quad (2.3.7)$$

biçiminde yazılır. (2.3.7) denkleminde açıkça görüldüğü gibi $T_F(s)$ de sistemin sıfırları ile kutupları arasında sadeleştirme yapmak söz konusudur. Bu durumda

$$T_F(s) = \hat{R}(s) \hat{P}_F^{-1}(s) \quad (2.3.8)$$

$$\partial[\det \hat{P}_F(s)] < \partial[\det P_F(s)] \quad (2.3.9)$$

olur.

$$n_F \stackrel{\Delta}{=} \partial[\det \hat{P}_F(s)] \quad (2.3.10)$$

tanımlanırsa n_F ; kapalı çevrim sisteminin mertebesi, ayrıca $T_F(s)$ 'nin, minimal gerçekleştirilmesinin mertebesi olacaktır.

(1.3.8) tanımına göre n_F 'e $T_F(s)$ 'nin Mc Millan Derecesi adı verilecektir.

TANIM (2.3.1.) Yönetilebilen bir sistemde F durum geri besleme matrisinin uygun bir seçimiyle sistemin bazı kutuplarını gözlenemeyen kutuplar haline getirip sistem mertebesini n 'den n_F 'e düşürmeye "Mertebe İndirgeme İşlemi" adı verilir.

TANIM (2.3.2.) Aynı sistemin mümkün olduğu kadar fazla sayıda kutbunu F ile gözlenemeyen kutuplar haline getirip sistem mertebesinde en fazla düşüşü sağlamaya "En Büyük Mertebe İndirgeme İşlemi", düşüş miktarına "En Büyük Mertebe İndirgemesi" adı verilir.

En Büyük Mertebe İndirgemesi ile V^* 'ın Boyutu

Q_F, ϕ_F sistemine ait gözlenebilirlik matrisi olsun.
(1.4.3) tanımına göre ϕ_F sistemine ait gözlenemeyen uzay;

$$\text{Ker } Q_F = \eta_F = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \left[(C+DF) (A+BF)^{i-1} \right] \quad (2.3.11)$$

dır. Boyutu gözlenemeyen kutupların sayısına eşittir. (2.3.1) tanımından

$$d(\text{Ker } Q_F) = n - n_F \quad (2.3.12)$$

yazılır.

V^* ; en büyük sıfır çıkışlı alt uzay ve $F_m, V = V^*$ için (2.1.2) denklemini sağlayan bir durum geri besleme matrisi ise

$$V^* = \text{Ker } Q_{F_m} \quad (2.3.13)$$

ve (2.3.13) ten

$$\dim V^* = \dim (\text{Ker } Q_{F_m}) = n - n_{F_m} \quad (2.3.14)$$

elde edilir. Burada n_{F_m} , $T_{F_m}(s)$ 'nin Mc Millan Derecesidir. n_{F_m} 'e sistemin en küçük mertebesi denir. Çünkü ϕ sistemine F_m geribesleme matrisinin uygulanması ile sistemin mümkün olduğu kadar fazla sayıda kutbu gözlenemeyen kutuplar haline getirilip $T_{F_m}(s)$ transfer matrisinde sıfırlar ile sadeleşmesi sağlandı. Böylece sistem derecesindeki en büyük düşüş elde edildi. (2.3.2) tanımına göre

$$\dim V^* = n - n_{F_m} = \text{en büyük mertebe indirgemesi} \quad (2.3.15)$$

yazılır.

UYARI 1: En küçük mertebeden bir sistem gözlenebilir ve yönetilebilir olup sistem mertebesi F geribeslemesi ile değiştirilemez.

S ; $p \times m$, tam ranklı, proper transfer matrislerinin kümesi olsun.

2.4. INTERAKTOR(25)

TANIM (2.4.1) $T(s) \in S$ alalım. $\chi(s)$ ile gösterilen $p \times p$ boyutlu, tekil olmayan, sol alt üçgen, köşegen üzerindeki elemanları en küçük dereceden monik polinomlar ve K_x tam ranklı sabit matris olmak üzere

$$i) \lim_{s \rightarrow \infty} \chi(s) T(s) = K_x \quad (2.4.1)$$

$$ii) \rho[T(s)] = \rho[K_x] \quad (2.4.2)$$

koşullarını sağlayan polinom matrisine "İnteraktör" adı verilir.

İnteraktör, sistemlerin giriş ve çıkış boyutlarına göre farklı yapıdadır. Çıkış sayısı girişten fazla ise ($p > m$) K_x in son $p-m$ satırı sıfırdır. Bunu göstermek için transfer matris $T(s) = R(s) P^{-1}(s)$ şeklinde alınır. Burada $R(s)$ ve $P(s)$ sağ asal polinom matrislerdir. Transfer matrisin ilk m doğrusal bağımsız satırı $T_m(s)$ ile gösterilsin.

$$R(s) \triangleq \begin{bmatrix} R_m(s) \\ R_{p-m}(s) \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

tanımına göre $T_m(s) = R_m(s) P^{-1}(s)$ ve $R_m(s)$ tekil değildir. Aralarında soldan asal olan öyle bir $\gamma_1(s)$ $\gamma_2(s)$ matrisleri vardır ki bunlar tek olup

$$R_{p-m}(s) R_m^{-1}(s) = \gamma_2^{-1}(s) \gamma_1(s) \quad (2.4.4)$$

denklemini sağlarlar. Burada $\gamma_2(s)$ köşegen elemanları monik ve hermite normal formda(*) sol alt üçgen, tekil olmayan bir matristir. (2.4.4) denkleminde

$$\gamma_2(s) R_{p-m}(s) - \gamma_1(s) R_m(s) = 0 \quad (2.4.5)$$

elde edilir.

$T_m(s)$ ye ait İnteraktör $\chi_m(s)$ olmak üzere $T(s)$ 'ye ait İnteraktör;

$$\chi(s) = \begin{bmatrix} \chi_m(s) & 0 \\ \gamma_1(s) & \gamma_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

matrisidir. Bu koşullar altında taktır.

(*) Hermite normal form: Herbir kolondaki elemanların derecesi, aynı kolondaki köşegen teriminin derecesinden küçüktür.

2.5. ASAL SİSTEMLER

Asal sistemler, durum geribeslemesi ile transfer matrisi köşegenleştirilebilen sistemlerdir.

TANIM (2.5.1) Verilen yönetilebilir bir $\phi = \{C, A, B\}$ $D = 0$ sistemi için, tek üreteçli, yönetilebilirlik alt uzayı R ile gösterilsin. Eğer

$$C(A+BF)^{i-1} b = 0 \quad (2.5.1)$$

$$C(A+BF)^{d(R)-1} b \neq 0, \quad i \in d(R)$$

koşulu sağlanacak şekilde $b \in \mathcal{R} \cap \mathcal{B}$ ve $F \in \mathcal{F}(R)$ varsa, R ye "Yönetilebilen Asal Alt Uzay" denir.

(2.5.1) denklemlerinden

$$C(\lambda I - A - BF)^{-1} b = \frac{1}{\alpha(\lambda)} y \quad (2.5.2)$$

ve

$$y = C(A+BF)^{d(R)-1} b \quad (2.5.3)$$

elde edilir. Burada $\alpha(\lambda)$, $(A+BF) | R$ dönüşümüne karşı gelen matrisin minimal polinomudur. $y \in Y$ çıkış vektörü $F \in \mathcal{F}(R)$ geri beslemesinden bağımsızdır ve CR ile gösterilen tek boyutlu alt uzayın bazıdır.

TANIM (2.5.2.) X ve Y sırasıyla durum ve çıkış uzayları olsun.

$$X = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_m \quad (2.5.4)$$

$$Y = C\mathcal{R}_1 \oplus C\mathcal{R}_2 \oplus \dots \oplus C\mathcal{R}_m \quad (2.5.5)$$

koşullarını sağlayan R_i , iem yönetilebilen asal alt uzaylar, varsa $\phi = \{C, A, B\}$ sistemine "ASAL" denir.

Eğer X ve Y uzayları (2.5.2) tanımına göre ayrıştırılabilirse herhangi bir $F \in \bigcap_{i \in \underline{m}} F(R_i)$ ve sıfırdan farklı $b_i \in B \cap R_i$, iem için

$$C(\lambda I - A - BF)^{-1} b_i = \frac{1}{\alpha_i(\lambda)} y_i, \quad i \in \underline{m} \quad (2.5.6)$$

dir. Burada $y_i \in Y$ vektörleri geri beslemeden bağımsız ve (2.5.5) denkleminde de anlaşılabacağı gibi doğrusal bağımsız olup $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ Y' 'nin bazıdır.

TANIM (2.5.3.) Verilen bir $\phi = \{C, A, B\}$ sisteminin asal olabilmesi için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

- i) $d(U) = d(Y)$, U giriş uzayı
- ii) $\nu^* = \{0\}$
- iii) $\tau_i = B + AB + \dots + A^{i-1}B$, iem

Burada $\tau_0 = 0$

$$\tau_i = B + A(Ker C \cap \tau_{i-1}), \quad i \in \underline{n} \text{ dir.}$$

Asal Sistemlerin Kanonik Yapısı

$\{H, T, F, G\}$ dönüşümlerinin grubu $\bar{\rho}$ ile gösterilsin. Burada H, Y nin, G, U nun, T de X in otomorfizmaları ve F, X' den U ya doğrusal dönüşümdür.

$\bar{\rho}$ 'ın elemanları $\phi = (C, A, B)$ sistemini

$$(HCT^{-1}, T(A+BF)T^{-1}, TBG)$$

eşdeğer sistemine dönüştürür.

$\Phi = (C, A, B)$ asal sisteminin $\bar{p}$ -kanonik yapısı;
(2.5.4) ve (2.5.5) bağıntılarına göre aşağıdaki formdadır.

$$A \sim \text{öbek köşegen } [A_1, A_2, \dots, A_m]$$

$$B \sim \text{öbek köşegen } [B_1, B_2, \dots, B_m]$$

$$C \sim \text{öbek köşegen } [C_1, C_2, \dots, C_m]$$

Burada

$$C_i = [1, 0, \dots, 0]_{1 \times n_i} \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n_i \times n_i} \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n_i \times 1}$$

olup n_i , i $\bar{m}$ yönetilebilirlik indisleridir.

2.6. YAPISAL GİRİŞ ÇIKIŞ ALGORİTMASI

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, A, B, C, D uygun boyutta sabit matrisler olmak üzere

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

sistemi verildiğinde D nin doğrusal bağımsız satırlarını içeren kısmı $\bar{D}_0$ matrisi ile gösterilsin. S_0 ; D 'nin doğrusal bağımlı satırlarını sıfırlayacak şekilde seçilen, $p \times p$, nonsingular, sabit bir matris ve

$$y_0(t) = S_0 y(t) = C_0 x(t) + \bar{D}_0 u(t)$$

olsun. $\bar{D}_0$ 'a bağlı olarak y_0 ve C_0 kısımlara ayrılırsa:

$$D_o = \begin{bmatrix} \bar{D}_o \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_o = \begin{bmatrix} \bar{y}_o \\ \tilde{y}_o \end{bmatrix}, \quad C_o = \begin{bmatrix} \bar{C}_o \\ \tilde{C}_o \end{bmatrix}$$

$\bar{y}_o = \bar{C}_o x + \bar{D}_o u$ ve $\tilde{y}_o = \tilde{C}_o x$ denklemleri elde edilir.
 $q_o \triangleq \rho(D_o)$ ve

$$M_o = \begin{bmatrix} I_{q_o} & 0 \\ 0 & I_{p-q_o} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{bmatrix} \text{ alınsın.}$$

$$M_o y_o(t) = \begin{bmatrix} \bar{C}_o \\ \tilde{C}_o A \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \bar{D}_o \\ \tilde{C}_o B \end{bmatrix} u(t)$$

Aynı işlemin k kere tekrarlanmasıyla elde edilen denklem ve matrisler şunlardır:

$$y_k(t) = C_k x(t) + D_k u(t)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_k = \begin{bmatrix} \bar{y}_u \\ \tilde{y}_u \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \tilde{C}_k \end{bmatrix}, \quad M_k = \begin{bmatrix} I_{q_k} & 0 \\ 0 & I_{p-q_k} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{bmatrix}$$

$$q_k \triangleq \rho(D_k)$$

$$M_k y_k(t) = \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \tilde{C}_k A^{k+1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ \tilde{C}_k A^k \end{bmatrix} u(t)$$

$\exists \nu > 0 \ni \nu > k$ için $\rho(D_\nu) = \rho(D_k)$ olup algoritma sona erer.

BÖLÖM III

GİRİŞ

Bu bölümün ilk ayrıtında transfer matris üzerindeki rank koşulu kaldırılarak Genelleştirilmiş İnteraksör tanımı yapılmış, Yapısal Giriş-Çıkış Algoritması öncekinden farklı bir biçimde düzenlenerek genelleştirilmiştir. Genelleştirilmiş Yapısal Algoritmadan elde edilen tam sayılar yardımıyla Genelleştirilmiş İnteraktör sınıfı içindeki elemanların determinantlarının derecesi ∂_T bulunmuş ve ∂_T için basit bir formül geliştirilmiştir. ∂_T 'nin geri beslemeden bağımsız olduğu ispatlanmış, "En Büyük Sıfır Çıkışı Alt Uzay" V^* 'ın boyutu ∂_T yardımıyla hesaplanmıştır.

3.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTERAKTÖR

İkinci bölümde, $p \times m$, tam ranklı proper transfer matrisler için sistemlerin giriş ve çıkış boyutlarına göre değişen ($p \leq m$, $p > m$) interaktör tanımı yapıldı. Verilen tam ranklı, proper transfer matrisine ait birtek interaktör elde edebilmek için interaktörün özel bir yapıda olması gerektiği belirtildi. Bu bölümde transfer matrisin tam ranklı olma koşulunu kaldırarak sistemlerin giriş ve çıkış boyutlarına bakılmaksızın interaktör tanımı yapılacaktır.

TANIM (3.1.1) Verilen $p \times m$, proper, r -ranklı transfer matris $T(s)$ için $\underline{\chi}(T(s))$ ile en küçük dereceden determinanta sahip, $p \times p$, tekil olmayan polinom matrislerinin sınıfını gösterelim. Eğer

$$\chi(s) \in \underline{\chi}(T(s)) \text{ ise}$$

$$\chi(s)T(s) \stackrel{\Delta}{=} T_{\chi}(s) \quad (3.1.1)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T_{\chi}(s) = K_{\chi} \quad (3.1.2)$$

ve $T_{\chi}(s)$ ile K_{χ} aynı indis kümesinde r doğrusal bağımsız satıra sahip, geri kalan satırları sıfıra eşdeğer olan matrislerdir. $\underline{\chi}(T(s))$ 'ye $T(s)$ nin "Genelleştirilmiş Interaktör"ü ismi verilir ve herhangi bir $\chi(s) \in \underline{\chi}(T(s))$ için $\det \chi(s)$ nin derecesi ∂_T ile gösterilir.

Lemma 3.1.1. Verilen bir $T(s)$ transfer matrisi için $\mathcal{R}_T$, (3.1.2) denkleminde tanımlanan K_{χ} matrisinin satırları tarafından gerilen bir alt uzay olsun $\mathcal{R}_T$, $\underline{\chi}(T(s))$ altında değişmez kalır.

Tanıt: Verilen bir $T(s)$ transfer matris için $\mathcal{R}_T$ alt uzayının Lemma'ya göre tanımı

$$\mathcal{R}_T = \text{Sp}\{K_{\chi}\}$$

olacaktır. $\mathcal{R}_T$ 'nin Genelleştirilmiş Interaktör $\underline{\chi}(T(s))$ altında değişmez olduğunu göstermek için $\underline{\chi}(T(s))$ 'den herhangi iki eleman alalım. (3.1.1) ve (3.1.2) denklemlerinden

$$\chi_1(s), \chi_2(s) \in \underline{\chi}(T(s)) \text{ için}$$

$$\chi_1(s)T(s) \stackrel{\Delta}{=} T_1(s), \chi_2(s)T(s) \stackrel{\Delta}{=} T_2(s) \quad (3.1.3)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T_1(s) \stackrel{\Delta}{=} K_1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} T_2(s) \stackrel{\Delta}{=} K_2 \quad (3.1.4)$$

tanımlamaları yapılsın. Eğer R_T , $\chi(T(s))$ altında değişmez kalıyorsa, herhangi bir sabit M matrisi için $K_1 = MK_2$ eşitliği sağlanacaktır. Bu sonuçtan hareket ederek lemmayı tanımlayabiliriz.

(3.1.3) denklemindeki $T_1(s)$ ve $T_2(s)$ proper transfer matrislerdir. Gerçeklemelerini sırasıyla $\{C_1, A, B, K_1\}$ ve $\{C_2, A, B, K_2\}$ ile gösterelim. (26) da verilen gerçekleştirme teorisine göre C_i 'nin sıfır satırlarının indeks kümesi ile K_i , $i \in \underline{2}$ nin indeks kümesi aynı olacaktır. Tanım (3.1.1)'den K_1 ve K_2 , transfer matris $T(s)$ nin rankına eşit sayıda doğrusal bağımsız satıra sahip ve kalan satırları sıfıra eşdeğer olan matrislerdir. K_i ($i \in \underline{2}$) matrislerinin sıfırdan farklı satırları doğrusal bağımsız ve sıfır satırları C_i ($i \in \underline{2}$) matrisleri ile aynı indeks kümesine sahip olmaları nedeniyle

$$\text{Im} C_i \subset \text{Im} K_i, \quad i \in \underline{2} \quad (3.1.5)$$

diyebiliriz.

F , herhangi bir durum geri besleme matrisi ise kapalı çevrim sistemlerinin transfer matrisleri (3) ten

$$T_{1,F}(s) = \chi_1 T_F(s) = (C_1 + K_1 F) [sI - (A + BF)]^{-1} B + K_1 \quad (3.1.6)$$

$$T_{2,F}(s) = \chi_2 T_F(s) = (C_2 + K_2 F) [sI - (A + BF)]^{-1} B + K_2$$

dir. (3.1.5) bağıntısına göre

$$C_2 + K_2 F = 0 \quad (3.1.7)$$

olacak şekilde F geri besleme matrisi seçebiliriz. O halde

$$T_F(s) = X_2^{-1}(s) T_{2,F}(s) = X_2^{-1}(s) K_2 \quad (3.1.8)$$

$$T_{1,F}(s) = X_1(s) X_2^{-1}(s) K_2 \quad (3.1.9)$$

dir. (3.1.9) denklemin her iki tarafının $s \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa;

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} X_1(s) X_2^{-1}(s) K_2 \quad (3.1.10)$$

elde edilir. Burada K_1 ve K_2 sabit elemanlı matrislerdir. Herhangi bir sabit M matrisi için

$$\lim_{s \rightarrow \infty} X_1(s) X_2^{-1}(s) = M \quad (3.1.11)$$

olması gerekmektedir. Buna göre

$$K_1 = MK_2 \quad (3.1.12)$$

sonucu elde edilir.

Aşağıda verilen lemmada, geri beslemenin $\mathcal{R}_T$ üzerindeki etkisi incelenmiş, tanım (3.1.1) ile lemma (3.1.2) birleştirilmiştir.

Lemma 3.1.2. Verilen tüm $p \times m$, r ranklı ($r \leq \min(p, m)$) $T(s)$ transfer matrisleri için durum geri beslemesi altında değişmez kalan birtek r boyutlu $\mathcal{R}_T$ alt uzayı ve birtek ∂_T tam sayısı vardır.

Tanıt: Sadece R_T 'nin durum geri beslemesi altında değişmediğini göstermek tanıt için yeterlidir. Çünkü ∂_T tam sayı olduğundan tektir.

Her transfer matris için $\chi(T(s))$ boş değildir ve elemanları en küçük dereceden determinanta sahip matrisler olduğundan tektir. $\chi(T(s))$ nin tekliği R_T 'nin tek olmasını gerektirir.

R_T , $\chi(T(s))$ ye göre değişmediğinden herhangi bir $\chi \in \chi(T(s))$ için lemmayı tanıtlamak yeterlidir.

Eğer $\chi_1 \in \chi(T(s))$ ise tanım (3.1.1) ve lemma (3.1.1) den

$$\chi_1 T(s) \stackrel{\Delta}{=} T_1(s), \quad \lim_{s \rightarrow \infty} T_1(s) = K_1 \text{ ve } K_1 \in R_T \text{ dir.}$$

Herhangi bir F durum geri besleme matrisi alınsın (3.1.6) denkleminde

$$T_{1,F}(s) = \chi_1 T_F(s) = (C_1 + K_1 F) (sI - A - BF)^{-1} B + K_1 \quad (3.1.13)$$

dir.

$s \rightarrow \infty$ için her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T_{1,F}(s) = K_1$$

bulunur. Çünkü (3.1.12) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim kesin properdir. $s \rightarrow \infty$ iken limiti sıfır matristir. $K_1 \in R_T$ olduğundan R_T , F geri beslemesi altında değişmez.

II, bölümde durum geri beslemesinin etkisi ile sistemin mertebesinin düştüğü ve "en büyük mertebe indirgemesi" nin

$$(A+BF)V^* \subset V^* \quad (3.1.14)$$

denklemini sağlayacak şekilde bir F geri beslemesinin seçimiyle yapılabileceği açıklandı(3). En büyük mertebe indirgemesi V^* 'ın boyutuna eşdeğerdir ve $d(V^*)$ ile gösterilir.

Bu bölümde (3)'te verilen sonuçları genelleştireceğiz. (3)'te $d(V^*)$ ile β_T arasındaki bağıntı sistemin giriş-çıkış boyutuna göre sadece tam ranklı transfer matrisler için kısıtlamalı olarak verilmişti. Aşağıdaki teoremle sistemlerin giriş-çıkış boyutuna ($p \leq m$, $p > m$) bakılmaksızın ve transfer matrisinde tam ranklılık koşulu kaldırılarak her proper transfer matris için β_T ile $d(V^*)$ arasında bir bağıntının varlığı gösterilecektir.

Teorem (3.1.1). Verilen pxm, proper transfer matris için $n-\beta_T = d(V^*) =$ en büyük mertebe indirgemesi (3.1.15)

Tanıt:

$$\begin{aligned} \text{Herhangi bir } \chi(s) \in \chi(T(s)) \text{ ve} \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \chi(s) T(s) = K \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

alalım. Eğer $\chi(s) T(s)$ 'nin gerçektelemesi $\{C, A, B, K\}$ ise (3.1.5) denklemi her C, K matrisleri için geçerlidir. Yani $\chi(s)$ 'nin seçimine bağlı değildir. Ö halde

$$\text{Im} C \subset \text{Im} K \quad (3.1.17)$$

olur. Bu bağıntı

$$C + KF = 0 \quad (3.1.18)$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir F geri besleme matrisinin seçilebileceğini göstermektedir. Eger $\chi(s)$ T(s) transfer matrisine (3.1.18) denklemindeki F geri besleme matrisi uygulanırsa

$$\chi(s) T_F(s) = (C+KF)(sI-A-BF)^{-1}B+K = K$$

elde edilir. $\chi(s)$, tanım (3.1.1)'e göre tekil olmayan bir matristir. O halde

$$T_F(s) = \chi^{-1}(s) K \quad (3.1.19)$$

bulunur. $\chi(s)$ ile K göreceli olarak soldan asaldır. $T_F(s)$ nin McMillan derecesi ya da minimal gerçekleştiriminin mertebesi $\chi(s)$ 'nin determinantının derecesi ∂_T 'ye eşittir. Tanım (3.1.1)'e göre $\chi(s)$ en küçük dereceden determinanta sahip bir polinom matris olduğu için aşağıdaki sonuçlar bulunur.

$$n - \partial[\det \chi(s)] = d(V^*)$$

$$n - \partial_T = d(V^*) = \text{en büyük mertebe indirgemesi Q.E.D.}$$

Yukarıda sunulan tanıt, (3) de lemma 5'in tanıtı ile aynıdır. Fakat (3)'te (3.1.18) denklemini K'nın tam ranklı olma koşulu ile elde edilir. Halbuki bu kısıtlamaya gerek yoktur. (3.1.17) denklemini, (3.1.18)'i sağlayan bir F matrisinin varlığını göstermek için yeterli bir denklemdir.

3.2. GENİŞLETİLMİŞ YAPISAL GİRİŞ-ÇIKIŞ ALGORİTMASI (G Y A)

II. bölümde verilen Yapısal Algoritma(19) ve bu algoritmanın diğer düzenlenmiş şekilleri (15)(16)(21) aynı sonuçları verirler. Bunlardan W.Dooren(21) Yapısal Algoritmada elde edilen q_i , $i \in n-1$ değerlerini Toeplitz rank araştırması ile hesaplamıştır. Wolovich ve Falb(25) Yapısal Algoritma ile

interaktör arasındaki bağıntıya değinmiştir.

Bu çalışmanın başlangıcında transfer matrisin rankı p olduğunda interaktörün determinantının derecesi ile q_1 , $i \in n-1$ sayıları arasındaki ilgi düşünülmüştür. Daha sonra transfer matrisin rankı m olduğunda son satırlarını sıfırlayan matrisin derecesini bulmaya yönelik araştırmalar Yapısal Algoritmada yeni düzenlemelere gidilerek sürdürülmüştür. Son aşamada rank koşulu kaldırılmıştır.

Genelleştirilmiş Interaktör her proper transfer matris için tanımlıdır. O halde transfer matrisinin rankı, sistemin çıkış sayısından (p) az ise $V(s) T(s) = 0$ kılan $V(s)$ polinom matrisinin minimum derecesini bilmek zorunludur. $V(s)$ 'nin minimum derecesi $T(s)$ 'nin sıfırlayıcısı (annihilator) için (8)'de tanımlanan "minimal baz"ın derecesine eşdeğerdir. Bu sayı (19)'da sunulan Yapısal Algoritma ile elde edilemeyeceği gibi (21) de verilen Toeplitz rank araştırması ile de bulunamaz. Bu nedenle Yapısal Algoritmayı düzenleyip genişletme gereksinim duyulmuştur.

(G Y A)

Verilen $\{C, A, B, D\}$ sistemi için

$$L \triangleq [D, CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B] \quad (3.2.1)$$

$$L_0 \triangleq L \quad (3.2.2)$$

$$D_0 \triangleq D \quad (3.2.3)$$

$$L_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \dots & L_0 \\ D & CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

$$D_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & D \\ D & CB \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

$$L_i \triangleq \begin{vmatrix} 0 & L_{i-1} \\ \hline D_i & CB \quad CAB \quad \dots \quad CA^{n+i-1}_B \end{vmatrix}, \quad i \in \underline{n-1} \quad (3.2.6)$$

$$D_i \triangleq \begin{vmatrix} 0 & D_{i-1} \\ \hline D & CB \quad CAB \quad \dots \quad CA^{i-1}_B \end{vmatrix} \quad i \in \underline{n-1} \quad (3.2.7)$$

olarak aşağıdaki tanımları yapalım.

$$\begin{aligned} q_0 &\triangleq \rho(D_0) \\ q_1 &\triangleq \rho(D_1) - 2q_0 \\ q_i &\triangleq \rho(D_i) - \sum_{j=0}^{i-1} (i+1-j)q_j \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

ve

$$\begin{aligned} s_0 &\triangleq p - \rho(L_0) \\ s_1 &\triangleq 2p - 2s_0 - \rho(L_1) \\ s_i &\triangleq (i+1)p - \rho(L_i) - \sum_{j=0}^{i-1} (i+1-j)s_j \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

UYARI 1- Yukarıda tanımlanan q_i değerleri (19)'da verilen "Yapısal Algoritma"dan ve aynı zamanda (21)'de gösterilen "Toeplitz" rank araştırmasından elde edilebilir. (3.2.8) denklemi (21) de verilen Toeplitz rank araştırmasını da içerir. Fakat s_i değerlerini elde etmek için L_i matrisleri ve bunların rankını tanımlamaya gerek duyulmuştur. Şimdiye kadar yapılmış olan çalışmalarda s_i değerlerine rastlanmamış ve bu nedenle her boyuttan giriş-çıkış için ($p \geq m$ ve $p > k = \text{rank } T(s)$) V^* 'ın boyutu (3.1.15) denkleminde elde edilememiştir.

UYARI 2-

L_i ve D_i 'nin rank araştırması, eğer $\sum_{i=0}^k (s_i + q_i) = p$ ise k ıncı adımda durdurulur.

Lemma (3.2.1) q_i ve s_i , $i \in n-1$ geribesleme ile değişmez.

Tanıt: q_i 'ler (19)'da verilen Yapısal Algoritma ile elde edilen tamsayılardır. Orada q_i 'lerin geribesleme ile değişmediği gösterilmiştir. O halde sadece s_i 'lerin geribesleme ile değişmediğini tanıtlamak yetecektir. L_i , $i=0,1,\dots,n-2$ üzerinde durum geribeslemesinin etkisi ek-1(lemma E1)'de gösterilmiştir.

Ek 1- (lemma E1.1 de (E 1.6) denklemine göre;

$$L_{i,F} = L_i \wedge_{n+i}(F) \quad (3.2.10)$$

$\rho[\wedge_{n+i}(F)] = m(n+i+1)$ ve tam ranklı olması nedeniyle Sylvester eşitsizliğinden

$$\rho(L_{i,F}) = \rho(L_i) \quad (3.2.11)$$

yazılabilir.

3.3. EN BÜYÜK SIFIR ÇIKIŞLI ALT UZAY

II. Bölüm (2.2) de yönetilebilen bir sisteme durum geribeslemesi uygulandığında sistem mertebesinde bir düşüş görüleceği açıklanmış ve bu işleme "Mertebe İndirgeme İşlemi" ismi verilmişti. Gene aynı bölümde Q gözlenebilirlik matrisi olmak üzere $F \in \underline{F}(V^*)$ için $\text{Ker } Q_F = V^*$ olduğu gösterildi. O halde "en büyük mertebe indirgemesi" F 'in uygun bir seçimiyle V^* 'ın boyutunu büyütmeyle elde edilir. Bu işlem, uygun bir F seçerek $\rho[(Q\mathcal{L})_F]$ değerini küçültmeye eşdeğerdir. Çünkü sistemin yönetilebildiği varsayılmıştır. Yönetilebilen bir sistemde $\forall F$ için $\rho(\mathcal{L}_F) = n$ dir. O halde Sylvester eşitsizliğinden

$$\rho[(Q\ell)_F] = \rho[Q_F]$$

bulunur. Q_F 'in rankının küçülmesi $\text{Ker } Q_F$ 'in dolayısıyla V^* in boyutunun büyümesine neden olacaktır.

Bu bölümde sistemin en küçük mertebesi olan $\mathcal{G}_T$ 'nin $\rho[(Q\ell)_F]$ in minimum değerine eşit olduğu tanıtlanmış ve buradan V^* 'in boyutu en genel anlamda hesaplanmıştır.

Teorem 3.3.1

$$\min_F \rho[(Q\ell)_F] = \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i) \quad (3.3.1)$$

Tanıt

$(G \ Y \ A)$ 'da tanımlanan L_i matrisi, $i=n-1$ için aşağıdaki formda yazılabilir.

$$L_{n-1} = [D_{n-1}; Q\ell] \quad (3.3.2)$$

Her doğrusal dönüşüm bir matris tanımladığı için L_{n-1} , D_{n-1} ve $(Q\ell)$ doğrusal dönüşümler olarak düşünülürse (3.3.2),

$$\begin{aligned} d[Im(L_{n-1})] &= d[Im(D_{n-1})] + d[Im(Q\ell)] - \\ &\quad d([Im(Q\ell)] \cap [Im D_{n-1}]) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

olmasını gerektirir.

Ek 1, (lemma 1.2) de

$$[Im(D_{n-1,F})] \cap [Im(Q\ell)_F] = \{0\} \quad (3.3.4)$$

denklemini sağlayacak şekilde bir $F : X \rightarrow U$ dönüşümünün varlığı gösterilmiştir. O halde (3.3.3) ve (3.3.4) denklemlerine göre

$$\min_F \rho[(Q\ell)_F] = \rho(L_{n-1}) - \rho(D_{n-1}) \quad (3.3.5)$$

sonucunu elde ederiz.

(3.2.8) ve (3.2.9) denklemlerinden $\rho(L_{n-1})$ ve $\rho(D_{n-1})$ i hesaplayalım.

$$\rho(L_{n-1}) = np - s_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2} (n-j)s_j = np - \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)s_j \quad (3.3.6)$$

$$\rho(D_{n-1}) = q_{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} (n-j)s_j = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)q_j \quad (3.3.7)$$

(3.3.5), (3.3.6), (3.3.7) denklemleri birleştirilirse;

$$\min_F \rho[(Q\ell)_F] = np - \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)(s_j + q_j) \quad (3.3.8)$$

ve

$$p = \sum_{j=0}^{n-1} (q_j + s_j) \text{ olduğu için}$$

$$\min_F \rho[(Q\ell)_F] = \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i) \quad (3.3.9)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.1 aşağıdaki sonucu gerektirir.

Sonuç 3.3.1

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i) = \partial_T \quad (3.3.10)$$

$$d(V^*) = n - \partial_T = n - \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i) \quad (3.3.11)$$

Tanıt

$$d(V^*) = n - \min_F \rho \left[(Q\ell)_F \right] \quad (3.3.12)$$

olduğu için

$$d(V^*) = n - \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i) \text{ ve teorem (3.1.1)'den}$$

$$\partial_T = \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i) \quad (3.3.13)$$

sonucu bulunur.

BÖLÜM IV

UYGULAMALAR VE SONUÇLAR

Önceki Bölümde Genelleştirilmiş İnteraktör içindeki elemanların determinantlarının derecesi ∂_T , Genişletilmiş Yapısal Algoritmanın sonuçlarına göre formüle edildi ve ∂_T ile "En Büyük Sıfır Çıkışlı Alt Uzay" V^* 'ın boyutu hesaplandı. İkinci Bölümde V^* 'a ek olarak (2.1.4) denklemi ile "En Büyük Sıfır Çıkışlı Yönetilebilirlik Alt Uzay" (2.1.8) denklemi ile " τ " Alt Uzayı tanımlanmıştı. Bu bölümde V^* 'ın boyutu yardımıyla R^* ve τ nun boyutları bulunacak, (G Y A) sonuçlarına göre Asal Sistemler incelenecek ve diğer uygulamalar yapılacaktır. Sonuçlar örnek problemler üzerinde gösterilecektir.

V^* , Ker C içinde en büyük (A,B)-değişmez alt uzay, R^* , gene KerC içinde (A,B) değişmez yönetilebilen alt uzay ve $\tau = (\bar{V}^*)^\perp$ alt uzayları arasında $R^* = \tau \cap V^*$ bağıntısının bulunduğu (18) de gösterilmiştir. Aynı bağıntı $D \neq 0$ olan sistemlerde elde edilmiştir. Ekte $D \neq 0$ olduğunda tanımlanan en büyük sıfır çıkışlı yönetilebilirlik alt uzay R^* ve τ alt uzay algoritması ve $D \neq 0$ durumunda $R^* = V^* \cap \tau$ bağıntısı gösterilmiştir.

4.1. R^* ve τ ALT UZAYLARININ BOYUTLARI

$\phi = \{A, B, C, D\}$ $D \neq 0$ sisteminde R^* ve τ alt uzayları (EK 2, E2.2)(EK 2, E2.8) ve (EK 2, E2.11) de tanımlandı.

$\bar{R}^*$, $\bar{V}^*$, $\bar{\tau}$ alt uzayları, dual sistem $\phi' = \{A', C', B'\}$ için R^* , V^* ve τ alt uzaylardır. (18)'de gösterildiği gibi aralarında

$$\begin{aligned} (\bar{V}^*)^\perp &= \tau & R^* &= \tau \cap V^* \\ &\text{ve} & & \\ (\bar{\tau})^\perp &= V^* & \bar{R}^* &= \bar{\tau} \cap \bar{V}^* \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

bağıntıları vardır. Ek 2. lemma E2.1'de (4.1.1) bağıntıları $D \neq 0$ olan sistemler için genelleştirilmiştir.

s_i^1 , q_i^1 , $i \in n-1$ Genişletilmiş Yapısal Algoritmanın dual sisteme uygulanmasıyla elde edilen tam sayılar ise aşağıdaki lemmayı yazabiliriz.

Lemma 4.1.1. Yönetilebilen ve gözlenebilen bir sisteme ait $p \times m$, proper transfer matrisi $T(s)$, tam ranklı ve $\rho[T(s)] = p$ olsun.

$$d(R^*) = \sum_{i=1}^{n-1} i s_i^1 \quad (4.1.2)$$

Tanıt

$$(\bar{\tau})^\perp = V^* \Rightarrow d(\bar{\tau}) = n - d(V^*) \quad (4.1.3)$$

$$d(\bar{\tau}) = n - d(V^*) = n - \left[n - \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i^1 + s_i^1) \right] \quad (4.1.4)$$

$$d(\bar{V}^*) = n - \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i^1 + s_i^1) \quad (4.1.5)$$

(4.1.1) denklemlerine göre

$$\begin{aligned} d(R^*) &= d(\tau \cap V^*) = n - d \left[(\tau \cap V^*)^\perp \right] = n - d \left[\bar{\tau} + \bar{V}^* \right] \\ d(R^*) &= n - d(\bar{\tau}) - d(\bar{V}^*) + d(\bar{\tau} \cap \bar{V}^*) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Lemmadaki varsayımlara göre;

$$p[T(s)] = p \Rightarrow s_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

ve dual sistemlerde $\bar{R}^* = \bar{V}^* \cap \bar{\tau} = \{0\}$ olacaktır.

Not: Çıkış sayısı büyükse $R^* = 0$ dir.

(4.1.6) bu özellikler düşünülerek yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} d(R^*) &= n - d(\bar{\tau}) - d(\bar{V}^*) \\ &= n - \left\{ n - \sum_{i=1}^{n-1} i q_i \right\} - \left[n - \sum_{i=1}^{n-1} i (q_i' + s_i') \right] \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} i q_i + \sum_{i=1}^{n-1} i (q_i' + s_i') \end{aligned}$$

q_i 'lerin tanımından $q_i = q_i'$ olduğundan

$$d(R^*) = \sum_{i=1}^{n-1} i s_i' \quad \text{elde edilir.}$$

Lemma 4.1.2. $T(s)$, yönetilebilen, gözlenebilen bir sisteme ait $p \times m$, $p \leq m$, proper ve tam ranklı transfer matris ise

$$d(\tau) = \sum_{i=1}^{n-1} i (q_i' + s_i') \quad (4.1.7)$$

Tanıt :

T(s) üzerindeki kısıtlanmalardan şu özellikleri çıkarabiliriz: Dual sistem için çıkış sayısı giriş sayısı olması nedeniyle $\bar{R}^* = 0$ ve

$$\bar{R}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{V}^* \cap \bar{\tau} = 0 \quad \text{Buradan}$$

$$d(\bar{V}^* \cap \bar{\tau}) = n - d(\bar{V}^* \cup \bar{\tau})$$

$$0 = n - d(V^* + \tau)$$

$$\Rightarrow d(V^* + \tau) = n$$

$p \leq m$ kısıtlaması $s_i = 0$, $i \in \underline{n-1}$ gerektirir. O halde

$$d(V^* + \tau) = d(V^*) + d(\tau) - d(V^* \cap \tau)$$

$$d(\tau) = n - d(V^*) + d(V^* \cap \tau)$$

(4.1.8)

$$d(\tau) = n - d(V^*) + d(R^*)$$

(3.3.11) ve (4.1.2) denklemleri (4.1.8)'de yerine konursa

$$d(\tau) = n - \left[n - \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i) \right] + \sum_{i=1}^{n-1} i s_i' = \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i')$$

elde edilir.

4.2. ASAL SİSTEMLERİN TANITIMI İÇİN GEREK VE YETER KOŞULUN SAPTANMASI

Bölüm (2.5)'te "Asal" sistemlerin tanımı yapılarak yönetilebilen bir $\phi = (C, A, B)$ sisteminin asal olabilmesi için gerek ve yeter koşullar gösterildi. Çalışmanın bu kısmında, verilen bir sistemin Asal olup olmadığı (G Y A) da elde edilen q_i , $i \in \underline{n-1}$ sayılarına bağlı olarak belirlenecektir.

Teorem (4.2.1)

Verilen bir $\phi = (C, A, B)$ sisteminin Asal olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

$$\sum_{i=1}^{n-1} i q_i = n$$

dir.

Tanıt Gerek koşul;

Eğer sistem Asal ise Tanım (2.5.3) ten $V^* = \{0\}$ dir. V^* 'in sıfır olması $R^* = \{0\}$ ı gerektirir. Lemma (4.1.1) den

$$R^* = \{0\} \Rightarrow s_i' = 0 \quad i \in \underline{n-1}$$

ve Sonuç (3.3.1) den

$$V^* = \{0\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i) = n \quad (4.2.1)$$

Tanım (2.5.3)'te üçüncü koşula göre

$$\tau_n = B + A B + \dots + A^{n-1} B = \langle A | B \rangle$$

dir. $\phi = (C, A, B)$ sistemi Asal olduğundan yönetilebilen bir sistem olup $d(\langle A | B \rangle) = n$ dir. Buradan $d(\tau) = n$ değeri çıkar.

$$\tau = (\bar{V}^*)^\perp \text{ ve } d(\tau) = n \Rightarrow (\bar{V}^*) = (\tau)^\perp, d(\bar{V}^*) = 0$$

O halde

$$\bar{V}^* = \{0\} \quad \text{ve} \quad \bar{R}^* = \{0\} \quad (4.2.2)$$

elde edilir. $d(\bar{R}^*) = \sum_{i=1}^{n-1} i s_i$ ve $s_i, i \in \underline{n-1}$ ($p = m$ için) değerleri bilindiğine göre (4.2.1) denklemi

$$\sum_{i=1}^{n-1} i q_i = n \quad (4.2.3)$$

olacaktır.

Yeter Koşul

Tersine (4. .3) denkleminin sağlandığını kabul ederek $\phi = (C, A, B)$ sisteminin asal olduğunu tanıtlayalım.

$$\sum_{i=1}^{n-1} iq_i = n \Rightarrow V^* = \{0\} \quad \text{ve} \quad R^* = \{0\}$$

(G Y A)'na göre $q_i = q_i'$ dir. $\sum_{i=1}^{n-1} iq_i' = n$ yazılırsa

$$\bar{V}^* = \{0\} \quad \text{ve} \quad \bar{R}^* = \{0\} \quad (4.2.4)$$

bulunur. (4.2.3) ve (4.2.4) koşullarına göre $d(U) = d(Y)$ dir. Bu ise Asal sistemler için verilen gerek ve yeter koşulların ilkidir. İkinci koşul $V^* = 0$ idi. İspatın tamamlanabilmesi için

$$\tau_i = B + A B + \dots + A^{i-1} B \quad (4.2.5)$$

denkleminin doğruluğu gösterilmelidir. τ_i dizisinin (1.4.27) denklemiyle verilen tanımının

$$\tau_1 = B \quad \tau_i = \tau_{i-1} + A(\text{Ker} C \cap \tau_{i-1}) \quad (4.2.6)$$

olduğu hatırlanırsa (4.2.5) denkleminin ispatlanabilmesi için aşağıdaki tanıma yapalım.

$$\phi_i \triangleq B + A B + \dots + A^{i-1} B \quad (4.2.7)$$

Bu tanıma göre;

$$\phi_i = \phi_{i-1} + A\phi_{i-1} \quad (4.2.8)$$

dir. Bu iki denklemden $\phi_1 = \tau_1$ eşitliği açıktır. $\phi_i = \tau_i$ eşitliğini çelişki ile elde edelim. Bunun için $\phi_i \neq \tau_i$, $i \leq n$ kabul edip çelişkiye gidelim. Eğer $\tau_2 \neq \phi_2$ ise (4.2.6) ve (4.2.7) denklemlerine göre $d(\tau_2) < d(\phi_2)$ olacaktır. Aynı nedenlerle

$$\phi_3 \neq \tau_3 \Rightarrow d(\tau_3) < d(\phi_3) \quad \text{ve}$$

$$d(\tau_i) < d(\phi_i) \quad , \quad i \in \underline{n} \quad (4.2.9)$$

dir. Fakat $i = n$ için

$$d(\tau_n) = d(\tau) = n - d(V^*) = n - \left[n - \sum_{i=1}^{n-1} iq_i' \right] = n \quad (4.2.10)$$

ve $d(\tau_n) = d(\phi_n)$ dir. Bu sonuca göre (4.3.9) denklemini çelişkiye neden yolağmaktadır. O halde $d(\tau_i) = d(\phi_i)$, $i \in \underline{n}$ ve

$$\tau_i = \phi_i = B + A B + \dots + A^{n-1} B \quad (4.2.11)$$

eşitliği doğrudur.

4.3. İLETİM (TRANSMISSION) SIFIRLARININ SAYISI

II. bölümde iletim sıfırlarının sayısı; V^*/R^* bölüm uzayının boyutuna eşit olarak tanımlanmıştı. O halde

$$d(V^*/R^*) = d(V^*) - d(R^*)$$

ve (3.3.11), (4.1.2) denklemlerinden iletim sıfırlarının sayısı hesaplanabilir.

Sonuç 4.3.1

$p \times m$ transfer matrisi $p[T(s)] = p$ koşulunu sağlayan n . mertebeden yönetilebilen sistemlerin transmissiyon sıfırlarının sayısı

$$d(V^*/R^*) = n - \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i')$$

dir.

Sonuç 4.3.2

$p \times m$, transfer matrisi $p > m = p[T(s)]$ koşulunu sağlayan n . mertebeden yönetilebilen sistemlerde $s_i \neq 0$ $i \in \underline{n-1}$ ve $R^* = 0$ olduğundan sistemin iletim sıfırlarının sayısı

$$d(V^*/R_i^*) = d(V^*) = n - \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i)$$

denklemlerle gösterilir.

4.4. ÖRNEK PROBLEMLER

1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sistemine ait transfer matris

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{s+1}{s^2} \\ \frac{s^2+s+1}{s^2} & \frac{1}{s} \\ \frac{s+1}{s^2} & -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

verilmiş olsun. Bu transfer matrisine ait Genelleştirilmiş İnteraktördeki ∂_T değerini bulup, V^* ve diğer alt uzayların boyutlarını hesaplayarak aynı incelemeyi dual sistemlerde tekrarlayalım.

Transfer matrisin $s = \infty$ da Laurent açılımından $D, CB, \dots, CA^{n-1}B$ matrisleri elde edilir ve (G.Y.A) uygulanırsa ∂_T bulunur.

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2}$$

$$D_0 = D, \quad L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \rho[D] &= 1 \Rightarrow q_0 = 1 \\ \rho[L_0] &= 4 \Rightarrow s_0 = p - \rho(L_0) = 4 - 4 \\ s_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \rho[D_1] &= 3 \\ \rho[L_1] &= 7 \end{aligned}$$

$$q_1 = \rho[D_1] - 2q_0 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow q_1 = 1$$

$$s_1 = 2p - 2s_0 - \rho[L_1] = 2 \cdot 4 - 0 - 7 = 1 \Rightarrow s_1 = 1$$

$\sum_{i=0}^1 (q_i + s_i) = 3$ değeri sistem çıkışına eşit olmadığı için algoritmanın uygulanmasına devam edilir.

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho[D_2] = 5$
 $\rho[L_2] = 9$

$$q_2 = \rho[D_2] - \sum_{j=0}^1 (3-j)q_j = 5 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = 0$$

$$s_2 = 3p - \rho[L_2] - \sum_{j=0}^1 (3-j)s_j = 3 \cdot 4 - 9 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_2 = 1$$

$\sum_{i=0}^2 (q_i + s_i) = q_0 + s_0 + q_1 + s_1 + q_2 + s_2 = 4$ değeri sistem çıkışına eşittir.

$$\partial_T = \sum_{i=1}^3 i(q_i + s_i) = 4$$

$$d(V^*) = n - \partial_T = 4$$

$p > m$ durumunda $R^* = 0$ ve $d(R^*) = 0$ dir.

Dual sistemde m çıkış p giriş olduğundan $s'_i = 0$ dir. Dual GYA dan bulunan q'_i değerleri q_i , $i \in \underline{k}$ değerlerine eşittir. O halde

$$q'_0 = 1 \quad q'_1 = 1 \quad \text{ve} \quad \bar{s}_T = 1$$

$$d(\bar{V}^*) = n - \bar{\sigma}_T = 11$$

Verilen transfer matrisi tam ranklı olduğundan $\bar{R}^*$ ve τ alt uzaylarının boyutu (4.1.2) ve (4.1.7) den hesaplanabilir.

$$d(\bar{R}^*) = \bar{\sigma}_T - \sigma_T = \sum_{i=1}^k i s_i = 3$$

$$d(\tau) = \sum_{i=1}^k i(q_i + s_i) = 1$$

2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

sistemine ait transfer matrisi

$$T(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{s^2} & \frac{s-1}{s^2} & \frac{s-1}{s^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{3s^3+1}{s^4} & \frac{2}{s^3} & -\frac{2}{s^3} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

verilmiş olsun. Tam ranklı olmayan bu transfer matris üzerine GYA'nı uygulayarak sonuçları irdeleyelim.

$$T(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^4}$$

$$D = 0 \quad L_o = [D:CB:CAB:CA^2B:CA^3B]$$

$$\rho(L_o) = \rho[CB:CAB:CA^2B:CA^3B]$$

$$= \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho[D] = 0 \quad \Rightarrow \quad q_o = 0$$

$$\rho[L_o] = 4 \quad s_o = p - \rho(L_o) = 4 - 4 \quad \Rightarrow \quad s_o = 0$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & CB \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \rho(D_1) = \rho(CB) = \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho[L_1] = \rho \begin{bmatrix} 0 & CB & CAB & CA^2B & CA^3B \\ CB & CAB & CA^2B & CA^3B & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho[D_1] = 2 \Rightarrow q_1 = \rho[D_1] - 2q_0 = 2 \quad q_1 = 2$$

$$\rho[L_1] = 7 \Rightarrow s_1 = 2p - 2s_0 - \rho(L_1) = 8 - 0 - 7 = 1 \quad s_1 = 1$$

$$\sum_{i=0}^1 (q_i + s_i) = 3 \neq p \quad \text{Algoritma tekrarlanır.}$$

$$\rho[D_2] = \rho \begin{bmatrix} 0 & CB \\ CB & CAB \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho[D_2] = 5 \quad q_2 = \rho[D_2] - \sum_{j=0}^1 (3-j)q_j = \rho[D_2] - 3q_0 - 2q_1 = 5 - 0 - 4 = 1$$

$$q_2 = 1$$

$$\sum_{i=0}^2 (q_i + s_i) = (2+1)+1 = 4 = p \quad \text{Algoritma tamamlanır.}$$

$$\beta_T = \sum_{i=1}^2 i(q_i + s_i) = (q_1 + s_1) + 2(q_2 + s_2) = 3 + 2(1+0) = 5$$

$$d(V^*) = n - \beta_T = 12 - 5 = 7$$

Dual sistemde $q'_0 = 0$, $q'_1 = 2$ $q'_2 = 1$ ve transfer matrisin rankı üç olduğundan $s_0 = 1$ dir.

$$\sum_{i=0}^2 (q'_i + s_i) = (q'_0 + s_0) + (q'_1 + s_1) + (q'_2 + s_2) = 1 + 2 + s_1 + 1 + s_2 = 4 ,$$

$$s_1 = s_2 = 0 \text{ dir.}$$

$$\bar{\partial}_T = \sum_{i=1}^k i(q'_i + s_i) = 4$$

Verilen sistem gözlenemediği için dual sistem yönetilemez. $\bar{V}^*$ 'ın hesaplanabilmesi için yönetilen kısmın mertebesi ile $\bar{\partial}_T$ 'nin farkının alınması gerekmektedir.

EK 1

F , $m \times n$ durum geribesleme matrisi olsun. $m(n+i+1) \times m(n+i+1)$, boyutlu $\Lambda_{n+i}(F)$ sabit matrisler aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$$\Lambda_{n+i}(F) \triangleq \begin{bmatrix} I & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n+i} \\ 0 & I & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n+i-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \alpha_1 \\ 0 & & & & I \end{bmatrix} \quad (E 1.1)$$

Burada

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\triangleq \hat{\alpha}_1 \\ \alpha_2 &\triangleq \alpha_1 \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (E 1.2)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \alpha_i &\triangleq \alpha_{i-1} \hat{\alpha}_1 + \alpha_{i-2} \hat{\alpha}_2 + \dots + \alpha_1 \hat{\alpha}_{i-1} + \hat{\alpha}_i \\ \hat{\alpha}_i &\triangleq F A^{i-1} B \end{aligned} \quad (E 1.3)$$

dır.

Lemma E1.1

$$L_{i,F} = L_i \Lambda_{n+i}(F) \quad (E 1.4)$$

Tanıt: Durum geribeslemesi altında;

$$D_F = D$$

$$(C+DF)B = CB + D\hat{\alpha}_1$$

$$\begin{aligned} (C+DF)(A+BF)B &= CAB + (C+DF)FB + D(FAB) \\ &= CAB + (C+DF)\hat{\alpha}_1 + D\hat{\alpha}_2 \end{aligned}$$

$\vdots$
 $\vdots$
 $\vdots$

$$(C+DF)(A+BF)^{i-1}B = CA^{i-1}B + (C+DF)(A+BF)^{i-2}B(FB) + \dots + D^{i-1}B \\ = CA^{i-1}B + (C+DF)(A+BF)^{i-1}B\alpha_1 + \dots + D\alpha_i$$

(E 1.2) ve (E 1.3) denklemleri birleştirildiğinde

$$(C+DF)(A+BF)^{i-1}B = CA^{i-1}B + CA^{i-2}B\alpha_1 + CA^{i-3}B\alpha_2 + \dots + D\alpha_i \quad (E 1.5)$$

elde edilir. (E 1.5) denklemine göre

$$L_{i,F} = L_i \wedge_{n+i}(F)$$

olduğu açıktır.

Lemma E1.2. Öyle bir F durum geribeslemesi vardır ki

$$[Im(D_{i,F})] \cap [Im(Q\ell)_F] = \{0\} \quad (E 1.6)$$

dır. Burada Q ve ℓ sistemin gözlenebilirlik ve yönetilebilirlik matrisleridir.

Tanıt: U; $m \times m$ sabit matrisi D_{n-2} 'de doğrusal bağımlı satırları sıfırlayacak şekilde alınsın. UD_{n-2} çarpımını aşağıdaki şekilde gösterelim:

$$UD_{n-2} = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} D_0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} D_0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_0 F \\ C_1 B \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} D_0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_0 A^{n-2} B \\ C_1 A^{n-2} B \\ C_{n-1} A^{n-2} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{bmatrix} D_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_0 A^{n-2} B \\ C_1 A^{n-2} B \\ C_{n-1} A^{n-2} B \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (E 1.7)$$

Burada $D_0, C_0 B, \dots, C_i A^{i-1} B$ sırasıyla $q_0 \times m, q_1 \times m, \dots, q_i \times m$ boyutlu tam ranklı matrislerdir.

$r \stackrel{\Delta}{=} \rho[T(s)]$ olmak üzere $m \times r$ boyutlu G matrisi;

$$\begin{bmatrix} D_0 \\ C_1 B \\ \vdots \\ C_{n-1} A^{n-2} B \\ 0 \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (E 1.8)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Eğer,

$$F \stackrel{\Delta}{=} \hat{G} F \quad (E 1.9)$$

alınır ve $\hat{F}$;

$$\hat{F} = - \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 A \\ C_2 A^2 \\ \vdots \\ C_{n-1} A^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (E 1.10)$$

şeklinde seçilirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$C_0 + D_0 F = 0$$

$$C_i A^i + C_i A^{i-1} B F = 0, \quad i \in \underline{n-1} \quad (E 1.11)$$

(E 1.4) denklemine göre

$$\begin{bmatrix}
 0 & & \begin{bmatrix} D_0 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\
 0 & & \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 B \end{bmatrix} & X & X \\
 0 & \begin{bmatrix} D_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 B \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\
 0 & & & 0 & 0 \\
 0 & & & X & X \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \begin{bmatrix} D_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{n-1} A^{n-2} B \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (E 1.12)$$

yapısındadır. (E1.12)'den

$$\text{Im} \left[U D_{n-2, F} \right] \cap \text{Im} \left[U(Q\ell)_F \right] = \{0\} \quad (E 1.13)$$

bağıntısının varlığı açıkça görülmektedir ve U tam ranklı sabit matris olduğu için

$$\text{Im}(D_{n-2, F}) \cap \text{Im}(Q\ell)_F = \{0\} \quad (E 1.14)$$

çıkacaktır.

EK 2

D ≠ 0 olan Sistemlerde Geometrik Kavramlar

D ≠ 0 için tanımlanan ve (2.1.5), (2.1.6) denklemleri ile verilen en büyük sıfır çıkışlı alt uzay algoritması göz-önüne alınsın. Bir $F \in F(V)$ için V^* şöyle ifade edilebilir.

$$A_F \triangleq A + BF, \quad C_F \triangleq C + DF \quad (E 2.1)$$

$$V^* = \text{Ker } C_F \cap A_F^{-1} (V^* + \delta) \quad (E 2.2)$$

τ alt uzayı için V_2 sabit bir matris olmak üzere

$$\text{Im } V_2 \triangleq V^* \cap \tau \quad (E 2.3)$$

tanımı yapılsın. Bu durumda $\text{Im } W_2 \subset V^*$ için

$$A_F V_2 = W_2 \quad (E 2.4)$$

dir. τ 'nin (2.1.7) ve (2.1.8) denklemleri ile verilen tanımına göre; $\text{Im } \bar{T}_2 \subset \tau$ için

$$A_F V_2 + B \hat{U}_2 = \bar{T}_2 \text{ ve } \begin{bmatrix} C_F, D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (E 2.5)$$

yazılabilir. $C_2 V_2 = 0$ olduğundan

$$\text{Im } \hat{U}_2 \subset \text{Ker } D \quad (E 2.6)$$

ve (E 2.5) denkleminde

$$A_F (\tau \cap V^*) \subset \tau \cap V^* \quad (E 2.7)$$

dir. $\hat{B} = B \text{Ker } D$ ve (E 2.7)'ye göre R^* şöyle tanımlanabilir:

$$R_0 = 0 \quad R_i = (A_F R_{i-1} \cap \hat{B}) \cap V^* \quad (E 2.8)$$

$\tau \stackrel{\Delta}{=} \tau \oplus \tau \cap V^*$ alınsın.

τ 'nın tanımından öyle bir $\bar{U}$ sabit matrisi vardır ki $\text{Im } \hat{T} = \tau$ için;

$$\text{Im } (A_F \hat{T} + B\bar{U}) \subset \tau \quad (\text{E 2.9})$$

dir. Öyle bir F_1 geri beslemesi seçilsin ki

$$F_1|_{V^*} = 0, \quad F_1|_{\tau} = \text{Im } \bar{U} \quad (\text{E 2.10})$$

olsun. Bu durumda;

$$A_{F_1} V^* \subset V^*, \quad A_{F_1} (V^* \cap \tau) \subset V^* \cap \tau$$

ve

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_i = A_{F_1} (\tau_{i-1} \cap \text{Ker } C_{F_1}) + \hat{B} \quad (\text{E 2.11})$$

dir.

Lemma E 2.1 $R^* = \tau \cap V^*$ (E 2.12)

İspat: $i = 1$ için $R_1 = \tau_1 \cap V^*$ dir.

$i = i$ için $R_i = \tau_i \cap V^*$ doğru olsun.

$i = i+1$ için

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= (A_F R_i + \hat{B}) \cap V^* \\ &= (A_{F_1} (\tau_i \cap V^*) + \hat{B}) \cap V^* \\ &= [A_{F_1} (\text{Ker } C_{F_1} \cap A_{F_1}^{-1} (V^* + \hat{B})) \cap \tau_i + \hat{B}] \cap V^* \\ &= [A_{F_1} (\text{Ker } C_{F_1} \cap \tau_i) + (V^* + \hat{B}) + \hat{B}] \cap V^* \\ &= [A_{F_1} (\text{Ker } C_{F_1} \cap \tau_i) + \hat{B}] \cap (V^* + \hat{B}) \cap V^* \\ &= \tau_{i+1} \cap V^* \end{aligned}$$

S O N U Ç L A R

Bu çalışmada, doğrusal zamanla değişmeyen n . mertebeden yönetilebilen dinamik sistemlerde "En Büyük Sıfır Çıkışlı Alt Uzay" V^* ; "En Büyük Sıfır Çıkışlı Yönetilebilirlik Alt Uzay" R^* ve τ Alt Uzayının boyutları incelenmiştir.

Yönetilebilen sistemlerde gözlenebilirlik koşulu olsa bile geri beslemesinin uygun bir seçimiyle sistem mertebesinin düşürülebileceği ve buna koşut olarak gözlenemeyen alt uzayın boyutunun büyüyeceği gözönüne alınmış ve V^* 'ın boyutunu bulmak içinsistem mertebesindeki en büyük düşüşü sağlayan durum geri beslemesinin eldesine çalışılmıştır. Bu amaçla "İnteraktör" kavramı ve Yapısal Giriş-Çıkış Algoritması" kullanılmıştır.

Çözümlerin en genel bir sınıfı kapsamaları için transfer matrisi üzerindeki tam ranklılık koşulu ve Yapısal Giriş-Çıkış Algoritması uygulanan sistemlerin, giriş-çıkış boyutları üzerindeki bütün kısıtlamalar kaldırılmıştır.

İnteraktör kavramı bütün transfer matrislerini kapsayacak şekilde genelleştirilerek $\chi(T(s))$ ile gösterilen "Genelleştirilmiş İnteraktör" tanımı yapılmıştır. Genelleştirilmiş İnteraktörün bir başka yararı da elemanlarının özel bir yapıda (alt üçgen matris...vs) olmasının istenmemesidir. Bu

nedenle, $\lim_{s \rightarrow \infty} \chi(s)T(s) = K_X$, $\rho(K_X) \subset [T(s)]$ koşullarını sağlayan tekil olmayan $\chi(s)$ matrisinin gerektiğinde hesaplanması kolaylaşmıştır.

Bu çalışmada Genelleştirilmiş İnteraktör'deki elemanların determinantlarının derecesi, ∂_T ile ilgilenildiği için Yapısal Giriş-Çıkış Algoritması düzenlenmiş, orijinalinden farklı bir algoritma geliştirilmiştir. Tezde (G Y A) adı verilen bu algoritma ile daha önce elde edilmeyen s_i , $i \in \underline{n-1}$ tamsayıları bulunmuştur.

Genelleştirilmiş İnteraktör sınıfındaki elemanların determinantlarının derecesi ∂_T (G YA) da bulunan tamsayılar kullanılarak geliştirilen

$$\partial_T = \sum_{i=1}^{n-1} i(q_i + s_i)$$

formülüyle hesaplanabilmektedir.

Gözlenebilirlik alt uzayı büyüterek $\text{Ker}(C+DF)$ içindeki en büyük alt uzay V^* 'a eşit olmasını sağlayan durum geribesleme matrisi, $p \geq k = \rho[T(s)]$ durumunu da içerecek biçimde

$$C + K_X F = 0$$

denklemleriyle saptanmıştır. Burada C ve K_X , $\chi(s) \in \underline{\chi}(T(s))$ için $\chi(s)T(s)$ nin minimal gerçekleştirilmesinde bulunan matrislerdir. Bu yapıda bir F 'in sisteme uygulanmasıyla sistem mertebesinin ∂_T 'ye eşit olduğu gösterilmiştir. V^* 'ın boyutu olarak

$$\dim V^* = n - \partial_T$$

her transfer matris ve her boyuttan giriş-çıkışa sahip sistemler için elde edilmiştir.

V^* 'ın boyutunu bulmak için tezde izlenen yöntem her

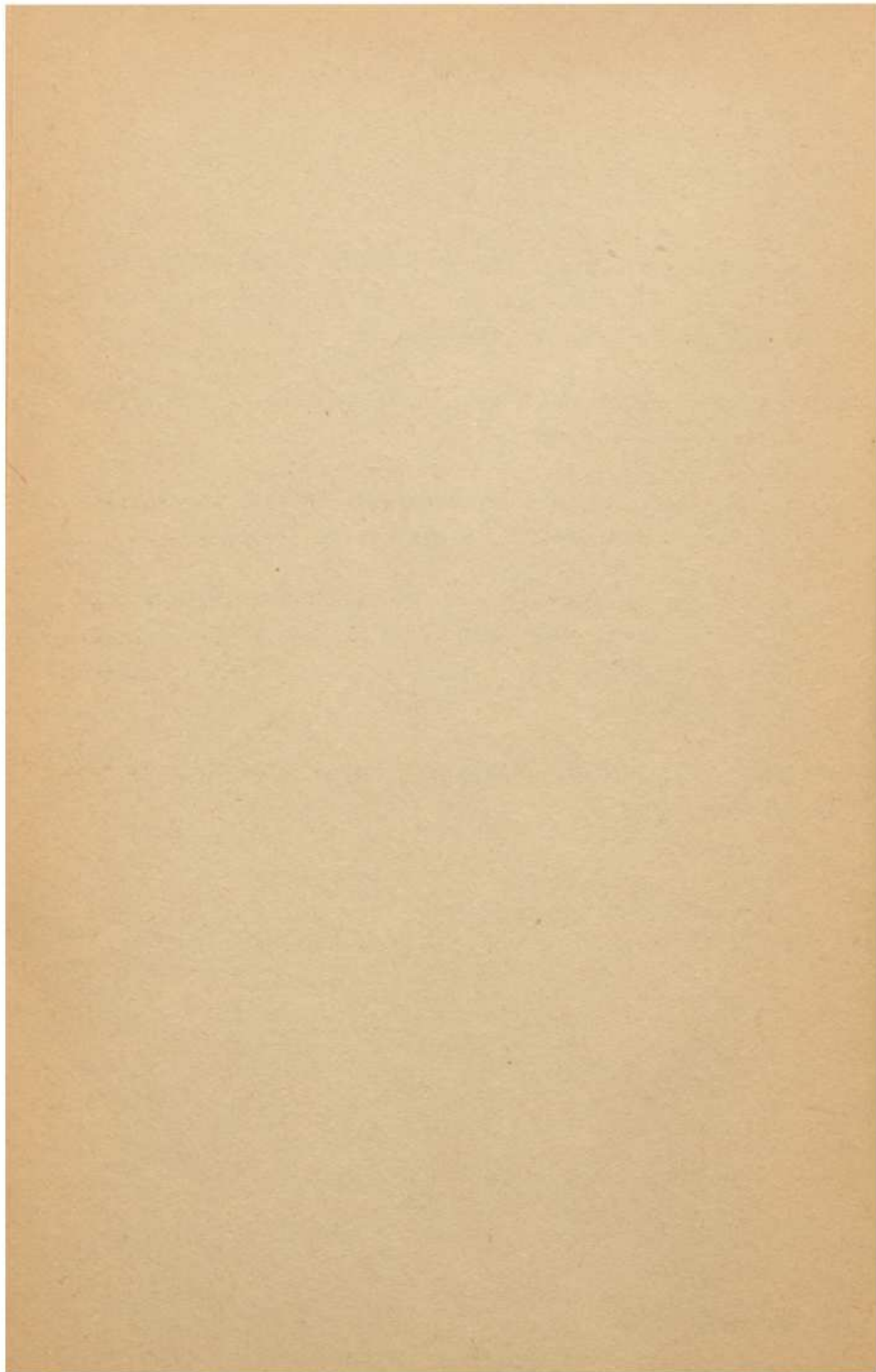
KAYNAKLAR

- (1) B.D.O. Anderson, "Output-Nulling Invariant and Controllability Subspace", in Proc. IFAC 6th Triennial World Cong. 1975, Preprints Part IB, paper 43.6.
- (2) B.D.O. Anderson, "A Note on Transmission Zeros of a Transfer Function Matrix" IEEE Tran. on Aut.Cont. AUGUST 1976, pp.589-590.
- (3) P.J.Antsaklis, "Maximal Order Reduction and Supremal (A, B) - Invariant and Controllability Subspace", IEEE Tran. on Aut.Cont., AC-24, Feb. 1980. pp.44
- (4) G.Basille and G.Morro, "Controlled and Conditioned Invariant Subspaces in Linear System Theory", Jota Vol.3, No: 5, pp.306-315, 1969.
- (5) C.Desoer, "Notes for a Second Course on Linear Systems", New York, Van Nostrand, 1970.
- (6) E.J.Davison and S.H.Wang, "Properties and Calculation of Transmission Zeros of Linear Multivariable Systems", Automatica, Vol.10, pp.643-658, 1974.

- (7) E.J.Davison and S.H.Wang, "An algorithm for the calculation of transmission zeros of the system (C, A, B, D) using high gain output feedback. IEEE Trans.Aut. Control AC-23, 738, 1978.
- (8) G.David Forney Jr., "Minimal Basis of Rational Vector Spaces with Applications to Multivariable Linear Systems", SIAM J.CONTROL, Vol.:13, No: 3, May 1975.
- (9) F.R.Gantmacher, "Theory of Matrices I and II" New York: Chelsea, 1959.
- (10) S.Hoose, "On the time domain Characterization of the Numerator Polynomials of the Smith Mc Millan Form", IEEE Tran. Aut. Cont. 1975, pp.799.
- (11) Heymann, "The Prime Structure of Linear Dynamical Systems", SIAM INT.J. of CONT: pp.460, 1972.
- (12) Fossard, "Multivariable System Control", 1977, North - Holland Elsevier.
- (13) F.L.Lewis, "Riccati Equation Computation of Supremal (F,G) -Invariant and Reachability Subspaces", IEEE Trans. Aut.Cont., pp.725-728, June 1981.
- (14) F.L.Lewis, "Generalized Output Nulling Subspaces: Riccati Equation Computation and Applications", IEEE Aut.Cont. December, 1981.
- (15) B.P.Molinari, "A Strong Controllability and Observability in Linear Multivariable Control", IEEE Trans.Aut.Contr. pp.761-764, October 1976.

- (16) B.P.Molinari, "Extended Controllability and Observability for Linear Systems", IEEE Trans. Aut. Contr. pp: 136-137, February 1976.
- (17) B.P.Molinari, "Structural Invariants of Linear Multi-variable Systems", Int.J.Control, 28, 493, 1978.
- (18) A.S.Morse, "Structural Invariants of Linear Multivariable Systems", SIAM, J. CONTROL, Vol.11, No: 3, August 1973, pp: 446-465.
- (19) L.M.Silverman and A.J.Payne, "Input-Output Structure of Linear Systems with Application to the Decoupling Problem", SIAM J.CONTROL, Vol.9, No: 2, May 1971, pp: 199-233.
- (20) L.M. Silverman, "Inversion of Multivariable Linear Systems" IEEE Trans.Aut.Cont. Vol. AC-14, pp: 270-276, 1969.
- (21) P.M.Van Dooren, "On the Determination of the Smith-Mc Millan Form of a Rational Matrix from Its Laurent Expansion", IEEE Tran. on Circuits and Systems, Vol. AS-26, No: 3, March 1979.
- (22) P.M.Van Dooren, "The Generalized. Eigenstructure Problem in Linear Systems Theory", IEEE Tran.Aut.Cont., Vol: AC - 26, No: 1, pp: 111-129, February 1981.
- (23) A.Emami-Naeini and P.Van Dooren, "Computation of Zeros of Linear Multivariable Systems" Automatica, Vol: 18, No: 4, pp: 415-430, 1982.

- (24) H.N.Rosenbrock, "State Space and Multivariable Theory"
New York: Wiley 1970.
- (25) W.A.Wolovich and P.L.Falb, "Invariants and Canonical Forms
Under Dynamic Compensation", SIAM J.CONTROL, Vol: 14, No:
6, November 1976, pp: 996-1008.
- (26) W.A.Wolovich, "Linear Multivariable Systems", New York,
Springer-Verlag, 1974.
- (27) W.M.Wonham, "Linear Multivariable Control. A Geometric
Approach", New York, Springer-Verlag, 1974.
- (28) Mc Farlane, A.G.J. and N.Karcanias, Poles and Zeros of
Linear Multivariable Systems, a Survey of the Algebraic,
Geometric and Complex. Variable Theory", Int.J.Control,
24, 33 (1976).
- (29) M.Athans, P.L.Falb, "Optimal Control", McGraw-Hill Book
Company, 1966.



ÖZGEÇMİŞ

Ulviye Başer 19.2.1955'de Burdur'da doğdu. İlk Orta ve Lise öğrenimini aynı ilde tamamladı. 1972 yılında Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdi ve 1976 yılında mezun oldu. Ocak 1978'de Kocaeli Mühendislik Mimarlık Akademisi'ne asistan olarak atandı. Mart 1980'de Kocaeli Mimarlık Akademisi ve TÜBİTAK Marmara Bilimsel ve Endüstriyel Araştırma Enstitüsü'nün ortaklaşa hazırladıkları protokol gereğince doktora çalışmalarına başladı. Ulviye Başer halen Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.

