

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİELEKTRİK KAPLAMALAR İÇİN GENEL EMPEDANS SINIR KOŞULLARI
VE TAHRİBATSIZ MUAYENEDE UYGULANMASI**

BİROL ASLANYÜREK

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. HÜLYA ŞAHİNTÜRK**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DİELEKTRİK KAPLAMALAR İÇİN GENEL EMPEDANS SINIR KOŞULLARI
VE TAHRİBATSIZ MUAYENEDE UYGULANMASI**

Birol ASLANYÜREK tarafından hazırlanan tez çalışması 24.01.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Hülya ŞAHİNTÜRK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Housseem HADDAR
Ecole Polytechnique, Paris

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Hülya ŞAHİNTÜRK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof.Dr. İbrahim AKDUMAN
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. İbrahim EMİROĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof.Dr. Ali YAPAR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Bu alışma, TÜBİTAK'ın Yurt İçi - Yurt Dışı Bütünleştirilmiş Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Lisansüstü öğrenimim boyunca akademik anlamda beni sürekli destekleyen ve doğru tercihler yapmamda katkıları olan danışman hocam Doç. Dr. Hülya ŞAHİNTÜRK'e, tez hazırlama süreci boyunca benimle paylaştığı bilgi ve deneyimleri için çok teşekkür ederim.

Fransa'da kaldığım dokuz ay boyunca, bu çalışmaya olan değerli akademik katkılarından dolayı eş danışmanın Prof. Dr. Houssem HADDAR'a teşekkürü borç bilirim. Ayrıca, tezi hazırlarken ciddi anlamda yararlandığım önerileri ve bana verdikleri destek için tez izleme komitesinde bulunan Prof. Dr. İbrahim AKDUMAN ve Prof. Dr. Mustafa SİVRİ'ye teşekkür ederim.

Bütünleştirilmiş Doktora Burs Programı kapsamında bana gerek yurt içinde gerekse de yurt dışında maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Bunun dışında, sürekli bilgi alışverişinde bulunduğum ve bilimsel tartışmalar yaptığım çalışma arkadaşlarımda da bu tezde kuşkusuz emeklerinin olduğunu belirtmek istiyorum.

Son olarak, başta eğitimim için hiç bir fedakarlıktan kaçınmayan annem ve babam olmak üzere tüm aileme ve bu çalışma boyunca özverili bir şekilde bana sürekli destek olan sevgili eşim Sultan ASLANYÜREK'e tüm kalbimle teşekkürlerimi sunarım.

Ocak, 2013

Biröl ASLANYÜREK

İÇİNDEKİLER

Sayfa	
SİMGE LİSTESİ.....	viii
KISALTMA LİSTESİ.....	x
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ	xv
ÖZET	xvi
ABSTRACT.....	xviii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Orjinal Katkı.....	5
BÖLÜM 2	
İNCE DİELEKTRİK KAPLAMALAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ EMPEDANS SINIR KOŞULLARI..	7
2.1 Problemin Tanıtılması ve Matematiksel Modelinin Oluşturulması	7
2.2 Genelleştirilmiş Empedans Sınır Koşullarının Türetilmesi	11
2.2.1 Problemin Parametrik Olarak İfade Edilmesi	12
2.2.1.1 Parametrik Koordinatlar	12
2.2.1.2 Eğrisel Koordinatlarda Diferansiyel Operatörler.....	13
2.2.1.3 Γ ^δ Eğrisinin Parametrik Olarak İfade Edilmesi	14
2.2.2 Asimptotik Açılımlar	15
2.2.3 Dirichlet Durumunda Genelleştirilmiş Empedans Sınır Koşullarının Türetilmesi	18
2.2.3.1 Dirichlet Operatörleri	19
2.2.4 Neumann Durumunda Genelleştirilmiş Empedans Sınır Koşullarının Türetilmesi	20
2.2.4.1 Neumann Operatörleri.....	22

BÖLÜM 3

GENELLEŞTİRİLMİŞ EMPEDANS SINIR KOŞULLARININ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE TEST EDİLMESİ..... 24

- 3.1 Gerçek Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Çözümü 25
- 3.2 Dirichlet Durumunda Yaklaşık Modele İlişkin Varyasyonel Formül..... 28
 - 3.2.1 Birinci Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi.. 29
 - 3.2.2 İkinci Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi.... 29
 - 3.2.3 Üçüncü Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi 30
 - 3.2.4 Kaplamanın İç Yüzeyinde Köşe Tekillikleri Bulunması Halinde Varyasyonel Formüllerin Düzenlenmesi 31
- 3.3 Neumann Durumunda Yaklaşık Modele İlişkin Varyasyonel Formül..... 32
 - 3.3.1 Birinci Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi.. 33
 - 3.3.2 İkinci Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi.... 33
 - 3.3.3 Üçüncü Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi 34
 - 3.3.4 Kaplamanın İç Yüzeyinde Köşe Tekillikleri Bulunması Halinde Varyasyonel Formüllerin Düzenlenmesi 37
- 3.4 Sayısal Sonuçlar..... 43

BÖLÜM 4

GENELLEŞTİRİLMİŞ EMPEDANS SINIR KOŞULLARI ARACILIĞIYLA BİR DİELEKTRİK KAPLAMANIN KALINLIK DEĞİŞİMİNİN BELİRLENMESİ 80

- 4.1 Ters Problemin Tanıtılması ve Çözümü 80
 - 4.1.1 Empedans Yüzeyi Üzerinde Toplam Alan ve Türevlerinin Bulunması81
 - 4.1.2 Kalınlık Değişiminin Bulunması..... 84
 - 4.1.2.1 Dirichlet Durumunda GIBC'lerin Cebirsel Denklem Sistemlerine Dönüştürülmesi..... 84
 - 4.1.2.2 Neumann Durumunda GIBC'lerin Cebirsel Denklem Sistemlerine Dönüştürülmesi..... 88
 - 4.1.2.3 Newton-Raphson Yöntemi ile Non-Linear Denklem Sistemlerinin Çözümü91
- 4.2 Sayısal Sonuçlar..... 94

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER 108

KAYNAKLAR..... 111

EK-A

EĞRİLERİN PARAMETRELEŞTİRİLMESİ..... 115

EK-B

GIBC'LERİN TÜRETİLME SÜRECİNDE KARŞILAŞILAN BAZI MATEMATİKSEL İFADELERİN AYRINTILI ELE ALINIŞI 118

B-1 Dirichlet Durumunda GIBC'lerin Türetilme Aşamasında Karşılaşılan SDP'lerin Çözümleri	118
B-2 Dirichlet Operatörlerinin Açık İfadelerinin Elde Edilişi	121
B-3 Neumann Durumunda GIBC'lerin Türetilme Aşamasında Karşılaşılan SDP'lerin Çözümleri.....	123
B-4 Neumann Operatörlerinin Açık İfadelerinin Elde Edilişi.....	127
EK-C	
DAİRESEL BİR PEC VEYA PMC ÜZERİNDEKİ DAİRESEL YÜZEYE SAHİP DİELEKTRİK KAPLAMA İÇİN DÜZ PROBLEMİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ	134
ÖZGEÇMİŞ	138

SİMGE LİSTESİ

A_{ij}	Rijitlik matrisi
c	Kaplamanın dış yüzeyinin eğriliği
$d(\cdot, \cdot)$	Uzaklık fonksiyonu
D^δ	Dirichlet empedans operatörü
$\vec{E}^i$	Gelen elektrik alan vektörü
$\vec{E}$	Toplam elektrik alan vektörü
f	Kaplamanın kalınlık değişimini gösteren fonksiyon
k_0	Boş uzayın dalga sayısı
k_1	Dielektrik kaplamanın dalga sayısı
$\vec{n}$	Kaplamanın dış yüzeyi üzerinde içe doğru yönelmiş birim vektör
$\vec{n}^\delta$	PEC (ya da PMC) silindiri yüzeyi üzerinde içe doğru yönelmiş birim vektör
N^δ	Neumann empedans operatörü
R	Yaklaşık Sommerfeld radyasyon koşulunun tanımlandığı çemberin yarıçapı
s	Eğrisel apsis
u^i	Gelen alan
u^δ	Yaklaşık toplam alan
u_s^δ	Kaplanmış cisimden saçılan yaklaşık saçılan alan
u_Ω^δ	Gerçek toplam alan
u_+^δ	Kaplama bölgesindeki gerçek toplam alan
u_-^δ	Boş uzaydaki gerçek toplam alan
$u_{s,-}^\delta$	Kaplanmış cisimden saçılan gerçek alan
x_Γ	Kaplama yüzeyinin parametrik fonksiyonu
Γ	Dielektrik kaplamanın dış yüzeyi
Γ^R	Yaklaşık Sommerfeld radyasyon koşulunun tanımlandığı çember
Γ^δ	PEC (ya da PMC) silindirin yüzeyi
T	Aydınlatma sayısı
δ	Kaplamanın kalınlık fonksiyonu
δ_0	Kaplamanın ortalama kalınlığı
Δ	Laplasyen operatörü
ε_0	Boş uzayın dielektrik katsayısı
ε_1	Dielektrik kaplamanın dielektrik katsayısı

θ	Gelen dalğanın geliş açısı
μ_0	Boş uzayın magnetik geçirgenlik katsayısı
ξ	Ölçeklendirilmiş normal koordinat
σ_1	Dielektrik kaplamanın iletkenliği
$\vec{\tau}$	Kaplamanın dış yüzeyine teğet birim vektör
$\vec{\tau}^\delta$	PEC (ya da PMC) silindir yüzeyindeki teğet vektör
v	Normal koordinat
ϕ_k	k. köşe üzerindeki şekil fonksiyonu
Ω_-	Boş uzayı temsil eden bölge
Ω^δ	PEC (ya da PMC) silindiri temsil eden bölge
Ω_+^δ	Dielektrik kaplamayı temsil eden bölge
Ω_-^R	SEY için boş uzayın sınırlandırılmış hesap bölgesi
ω	Açısal frekans
∇	Gradyent operatörü
$\cup$	Birleşim operatörü

KISALTMA LİSTESİ

CDS	Cebirsel Denklem Sistemi
DDS	Diferansiyel Denklem Sistemi
GIBC	Generalized Impedance Boundary Condition (Genelleştirilmiş Empedans Sınır Koşulu)
IBC	Impedance Boundary Condition (Empedans Sınır Koşulu)
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
LDS	Lineer Denklem Sistemi
MDP	Morozov's Discrepancy Principle (Morozov'un Fark İlkesi)
NDS	Non-Lineer Denklem Sistemi
PEC	Perfect Electric Conductor (Mükemmel Elektrik İletken)
PMC	Perfect Magnetic Conductor (Mükemmel Manyetik İletken)
SDP	Sınır Değer problemi
SEY	Sonlu Elemanlar Yöntemi
SLP	Single Layer Potential (Tek-tabaka Potansiyeli)
TSVD	Truncated Singular Value Decomposition (Kesilmiş Tekil Değer Ayrışması)

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2. 1	PEC veya PMC bir silindir üzerine yerleştirilmiş değişken kalınlıklı ince kaplamanın geometrisi	8
Şekil 2. 2	Gerçek modelin yaklaşık modele indirgenmesi	11
Şekil 2. 3	Regüler bir eğrinin üzerindeki geometrik tanımlar.....	12
Şekil 2. 4	Problemin geometrisinin eğrisel koordinatlarla ifade edilmesi.....	14
Şekil 3. 1	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m ⁻¹) olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı kaplama için SEY ve analitik yöntemden üretilen toplam alanın 1 m yarıçaplı Γ^C çemberi üzerindeki genlik ve fazları.....	45
Şekil 3. 2	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m ⁻¹) olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı kaplama için SEY ve analitik yöntemden üretilen toplam alanın 1 m yarıçaplı Γ^C çemberi üzerindeki genlik ve fazları.....	45
Şekil 3. 3	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m ⁻¹) olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	47
Şekil 3. 4	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m ⁻¹) olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.015\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği.	48
Şekil 3. 5	Neumann dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m ⁻¹) olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	49
Şekil 3. 6	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m ⁻¹) olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.015\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği.	50
Şekil 3. 7	Değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/10$) ve $5\lambda/12$ yarıçaplı dairesel kaplama.....	50
Şekil 3. 8	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m ⁻¹) olan dairesel kesitli ve değişken kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.015\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği.	51
Şekil 3. 9	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m ⁻¹) olan dairesel kesitli ve değişken kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.015\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği.	51

Şekil 3. 10	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m ⁻¹) olan dairesel kesitli ve değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/10$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	53
Şekil 3. 11	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m ⁻¹) olan dairesel kesitli ve değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/10$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	54
Şekil 3. 12	Değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$) elips kaplama.....	55
Şekil 3. 13	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ (S.m ⁻¹) olan elips kesitli ve değişken kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.017\lambda, 0.22\lambda]$ aralığındaki grafiği.	56
Şekil 3. 14	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ (S.m ⁻¹) olan elips kesitli ve değişken kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.017\lambda, 0.22\lambda]$ aralığındaki grafiği .	56
Şekil 3. 15	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ (S.m ⁻¹) olan elips kesitli ve değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	58
Şekil 3. 16	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ (S.m ⁻¹) olan elips kesitli ve değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	59
Şekil 3. 17	Değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$), iç bükey ve dış bükey yüzeye sahip kaplama.....	60
Şekil 3. 18	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S.m ⁻¹) olan karmaşık bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.01\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği.....	60
Şekil 3. 19	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S.m ⁻¹) olan karmaşık bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.01\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği.....	61
Şekil 3. 20	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S.m ⁻¹) olan, kompleks bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12 \cong 0.17$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	63
Şekil 3. 21	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S.m ⁻¹) olan, kompleks bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12 \cong 0.17$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	64
Şekil 3. 22	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S.m ⁻¹) olan, kompleks bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/8 \cong 0.25$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	67

Şekil 3. 23	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S.m ⁻¹) olan, kompleks bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/8 \cong 0.25$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	68
Şekil 3. 24	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S.m ⁻¹) olan, karmaşık bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = 3\lambda/4 = 0.25$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	70
Şekil 3. 25	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S.m ⁻¹) olan, karmaşık bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = 3\lambda/4 = 0.25$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları.....	71
Şekil 3. 26	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ olan kompleks bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için kaplama iletkenliğinin [0.1, 1.0] aralığındaki değişimine göre göreceli hatanın grafiği	72
Şekil 3. 27	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ olan kompleks bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için kaplama iletkenliğinin [0.1, 1.0] aralığındaki değişimine göre göreceli hatanın grafiği	73
Şekil 3. 28	Dirichlet durumunda, iletkenlik $\sigma_1 = 0.001$ (S.m ⁻¹) olan kompleks bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için kaplamanın dielektrik katsayısının [1.25, 5.0] aralığındaki değişimine göre göreceli hatanın grafiği	74
Şekil 3. 29	Neumann durumunda, iletkenlik $\sigma_1 = 0.001$ (S.m ⁻¹) olan kompleks bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için kaplamanın dielektrik katsayısının [1.25, 5.0] aralığındaki değişimine göre göreceli hatanın grafiği	74
Şekil 3. 30	Kaplamasının iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan cisim.....	75
Şekil 3. 31	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ (S.m ⁻¹) olan ve iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların [0.01 λ , 0.15 λ] aralığındaki grafiği.....	75
Şekil 3. 32	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ (S.m ⁻¹) olan ve iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların [0.01 λ , 0.15 λ] aralığındaki grafiği.....	76
Şekil 3. 33	Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ (S.m ⁻¹) olan ve iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan $\delta_0 = \lambda/12 = 5$ cm kalınlığındaki kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları	78
Şekil 3. 34	Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ (S.m ⁻¹) olan ve iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan $\delta_0 = \lambda/12 = 5$ cm kalınlığındaki kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları	79
Şekil 4. 1	Ψ yoğunluk fonksiyonunu Γ yerine hayali Γ^F yüzeyinde tanımlama.....	82
Şekil 4. 2	Sabit kalınlıklı dairesel kaplama için A operatörünün σ_n tekil değerleri ve MDP'ye göre kesim parametresinin belirlenmesi.....	95
Şekil 4. 3	Dirichlet durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplama için SLP ve SEY ile hesaplanan Γ üzerindeki toplam alan ile türevlerinin genlik ve fazları.....	95

Şekil 4. 4	Neumann durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplama için SLP ve SEY ile hesaplanan Γ üzerindeki toplam alan ile türevlerinin genlik ve fazları..	96
Şekil 4. 5	Kalınlıklık değişimi (4.46) ile ve dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ile verilen kaplama için A operatörünün σ_n tekil değerleri ve MDP'ye göre kesim parametresinin belirlenmesi	97
Şekil 4. 6	Dirichlet durumunda, kalınlıklık değişimi (4.46) ile ve dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ile verilen kaplama için SLP ve SEY ile hesaplanan Γ üzerindeki toplam alan ile türevlerinin genlik ve fazları.....	97
Şekil 4. 7	Neumann durumunda, kalınlıklık değişimi (4.46) ile ve dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ile verilen kaplama için SLP ve SEY ile hesaplanan Γ üzerindeki toplam alan ile türevlerinin genlik ve fazları.....	98
Şekil 4. 8	Dirichlet durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplamanın bir düzlemsel dalga ile aydınlatılması sonucu PEC yüzeyinin görüntülenmesi	99
Şekil 4. 9	Dirichlet durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplamanın iki düzlemsel dalga ile ayrı ayrı aydınlatılması sonucu PEC yüzeyinin görüntülenmesi	99
Şekil 4. 10	Neumann durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplamanın bir düzlemsel dalga ile aydınlatılması sonucu PMC yüzeyinin görüntülenmesi.....	100
Şekil 4. 11	Neumann durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplamanın iki düzlemsel dalga ile ayrı ayrı aydınlatılması sonucu PMC yüzeyinin görüntülenmesi .	100
Şekil 4. 12	Üzerinde değişken kalınlıklı dairesel kaplama olan PEC yüzeyinin görüntülenmesi.....	101
Şekil 4. 13	Üzerinde değişken kalınlıklı dairesel kaplama olan PMC yüzeyinin görüntülenmesi.....	101
Şekil 4. 14	Üzerinde değişken kalınlıklı elips kesitli kaplama olan PEC yüzeyinin görüntülenmesi.....	102
Şekil 4. 15	Üzerinde değişken kalınlıklı elips kesitli kaplama olan PMC yüzeyinin görüntülenmesi.....	103
Şekil 4. 16	Dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ve kalınlık değişimi (4.46) ile verilen bir kaplama için PEC yüzeyinin görüntülenmesi	104
Şekil 4. 17	Dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ve kalınlık değişimi (4.46) ile verilen bir kaplama için PMC yüzeyinin görüntülenmesi.....	104
Şekil 4. 18	Dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ve kalınlık değişimi ($\delta_0 = 0.1\lambda$) (4.46) ile verilen bir kaplama için PEC yüzeyinin görüntülenmesi	105
Şekil 4. 19	Dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ve kalınlık değişimi ($\delta_0 = 0.1\lambda$) (4.46) ile verilen bir kaplama için PMC yüzeyinin görüntülenmesi	105
Şekil 4. 20	İç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan dairesel bir kaplama için PEC yüzeyinin görüntülenmesi	106
Şekil 4. 21	İç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan dairesel bir kaplama için PMC yüzeyinin görüntülenmesi	107
Şekil A. 1	Eğrisel apsis.....	115
Şekil A. 2	Sırasıyla bağımsız bölge, basit bağımlı bölge ve iki bağımlı bölge.....	116
Şekil A. 3	Regüler bir eğrinin üzerindeki geometrik tanımlar	116

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3. 1	$\delta_0 = \lambda/12$ kalınlıklı dairesel kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve görelî hatası 46
Çizelge 3. 2	Ortalama kalınlığı $\delta_0 = \lambda/10$ olan değişken kalınlıklı dairesel kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve görelî hatası 52
Çizelge 3. 3	Ortalama kalınlığı $\delta_0 = \lambda/12$ olan değişken kalınlıklı elips kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve görelî hatası 57
Çizelge 3. 4	Ortalama kalınlığı $\delta_0 = \lambda/12 \cong 0.17\text{cm}$ olan, değişken kalınlıklı, iç bükey ve dış bükey bir yüzeye sahip kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve görelî hatası 61
Çizelge 3. 5	Ortalama kalınlığı $\delta_0 = \lambda/8 \cong 0.25\text{ cm}$ olan, değişken kalınlıklı, iç bükey ve dış bükey bir yüzeye sahip kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve görelî hatası 65
Çizelge 3. 6	Ortalama kalınlığı $\delta_0 = 3\lambda/4 = 0.25\text{ cm}$ olan, değişken kalınlıklı, iç bükey ve dış bükey bir yüzeye sahip kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve görelî hatası 65
Çizelge 3. 7	İç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan $\delta_0 = \lambda/12 = 5\text{ cm}$ kalınlığındaki kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve görelî hatası 76

DİELEKTRİK KAPLAMALAR İÇİN GENEL EMPEDANS SINIR KOŞULLARI VE TAHRİBATSIZ MUAYENEDE UYGULANMASI

Birol ASLANYÜREK

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hülya ŞAHİNTÜRK

Eş Danışman: Prof. Dr. Housseem HADDAR

Bu tezin amacı, mükemmel elektrik ya da magnetik iletken bir cismin üzerine yerleştirilmiş değişken kalınlıklı ince dielektrik kaplamaları modelleyen Genelleştirilmiş Empedans Sınır Koşulları (GIBC) türetmektir. Bu kaplanmış cisimler için elektromagnetik saçılma problemi hem TM hem de TE polarizasyonlarında iki boyutlu olarak ele alınarak, kaplama kalınlığına göre üçüncü mertebeye kadar GIBC ifadeleri elde edilmiştir. Kaplamanın malzeme özellikleriyle birlikte eğrilik, kalınlık gibi geometrik özelliklerini de taşıyan bu ifadeleri türetmek için "ölçeklendirilmiş asimptotik açılımlar" denilen bir yaklaşım buradaki probleme uyarlanmıştır.

Tezin ikinci aşamasında, GIBC ifadelerinin geçerliliğini göstermek için ilgili düz saçılma problemi, uygun varyasyonel formüller yazılarak sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmüştür. Ayrıca, kaplamanın iç yüzeyi üzerinde köşe tekillikleri bulunması durumuna özel bir önem verilmiş ve bu durum için varyasyonel formüller yeniden düzenlenmiştir. Simülasyon sonuçları göstermektedir ki; üçüncü mertebe yaklaşıklık kullanıldığında, sadece regüler yüzeylere sahip kaplamalar için değil aynı zamanda iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan kaplamalar için geliştirilen sonlu elemanlar yöntemi, kalınlığı gelen dalganın dalga boyunun onda birinden küçük olan kaplamalar için, hem Dirichlet hem de Neumann durumlarında iyi sonuçlar üretmektedir.

Tezin son aşamasında ise, şekli bilinmeyen mükemmel elektrik (magnetik) iletken bir cisim üzerindeki ince dielektrik kaplamanın kalınlık değışiminin belirlenmesine dair ters saçılma problemi ele alınmıştır. GIBC ifadelerinin içinden kalınlık fonksiyonunu çekmek için öncelikle yine GIBC ifadelerinde yer alan toplam alan ve toplam alanın normal ve teğetsel türevlerini hesaplamak gerekir. Tek-katmanlı potensiyel gösterimi aracılığıyla ölçülmüş data kaplama yüzeyine kadar analitik devam ettirilerek, GIBC ifadelerinde geçen bu alanlar elde edilmiştir. Sonrasında ise kaplama kalınlığı için karşılaşılan non-linear diferansiyel denklem sistemleri, kalınlık fonksiyonu bir üssel seriye açılarak, Newton-Raphson yöntemiyle iteratif olarak çözülmüştür. Sunulan bu yaklaşımın doğruluk ve geçerliliği çeşitli sayısal örneklerle gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Saçılma problemleri, genelleştirilmiş empedans sınır koşulları, ince kaplamalar, Newton-Raphson yöntemi, elektromagnetik dalgalar

**GENERALIZED IMPEDANCE BOUNDARY CONDITIONS FOR DIELECTRIC
COATINGS AND ITS APPLICATION IN NON-DESTRUCTIVE TESTING**

Biröl ASLANYÜREK

Department of Mathematical Engineering

Ph.D. Thesis

Advisor: Doç. Dr. Hülya ŞAHİNTÜRK

Co-Advisor: Prof. Dr. Housseem HADDAR

The aim of this thesis is to derive the Generalized Impedance Boundary Conditions (GIBC) that model thin dielectric coatings with variable width located on a perfect electric or magnetic conducting object. By being treated the 2-D electromagnetic scattering problem for both TM and TE polarizations related to these coated objects, the expressions of the GIBCs are obtained up to the third order with respect to the coating width. In order to derive these expressions including material and geometrical (such as curvature and thickness) properties of the coating, so-called scaled asymptotic expansions are adapted to the problem dealt here.

In the second stage of the thesis, in order to show the validation of the GIBC expressions, the direct scattering problem is solved through the finite element method by arranging suitable variational formulas. Additionally, particular attention is given to the cases where the inner boundary has corner singularities and the variational formulas are rearranged. The numerical simulations illustrate that the method developed for the coatings having not only smooth boundaries but also inner boundaries with corner singularities is very effective for the coatings having thicknesses less than one tenth of the wavelength of incident wave when the third order approximation is used, for both Dirichlet and Neumann type object cases.

In the last stage of the thesis, we deal an inverse scattering problem whose aim is to determine the thickness variation of a dielectric thin coating located on a perfect electric (magnetic) conducting structure of unknown shape. In order to determine the thickness function in the expression of the GIBCs, it is first required to calculate total field and its normal and tangential derivatives appearing in the GIBCs. These required fields appearing in the GIBCs are obtained by the analytical continuation of the measured data to the coating surface through the single layer potential representation. Then, the resulting system of non-linear differential equations for the unknown coating thickness is solved iteratively via the Newton-Raphson method by expanding the thickness function in a series of exponentials. The validation and accuracy of the approach presented here are illustrated through several numerical examples.

Keywords: Scattering problems, generalized impedance boundary conditions, thin coatings, Newton-Raphson method, electromagnetic waves

1.1 Literatür Özeti

Genelde bir sınır değer probleminin çözümünde karşılaşılan 3 tip sınır koşulu vardır:

1. Dirichlet sınır koşulu
2. Neumann sınır koşulu
3. Robin sınır koşulu

Dirichlet sınır koşulunda çözümü aranan fonksiyonun, Neumann sınır koşulunda ise bu fonksiyonun normal türevinin değeri sınır üzerinde belirtilmiştir. Dirichlet sınır koşulu ve Neumann sınır koşulunun ağırlıklandırılmış kombinasyonu ise Robin sınır koşulu olarak bilinir. Robin sınır koşulları, elektromagnetik problemlerle ilgili uygulamalarda "empedans sınır koşulları" (IBC- Impedance Boundary Condition) olarak adlandırılır.

IBC'ler elektromagnetik saçılma problemlerinin içerdiği karmaşık matematiksel ve sayısal ifadelerin basitleştirilmesinde kullanılır. Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse; belli bir bölgenin sınırlarında tanımlanmış olan IBC'ler, bu bölgenin geometrik ve fiziksel özelliklerini içinde taşıması nedeniyle, söz konusu bölgenin içindeki elektromagnetik alan dağılımının bilgisine gerek duyulmadan, elektromagnetik saçılma problemlerinin daha basit bir şekilde çözülmesini sağlar.

IBC'ler elektromagnetik saçılma problemlerinde sıkça kullanılıp, çeşitli araştırmalara konu olmuştur [1]-[8]. Yer yüzeyi, ince dielektrik kaplamalar, çok-katmanlı dielektrik yapılar gibi uygulama alanları için etkin IBC'ler geliştirilmiştir [9]-[11]. Bir saçıcı için IBC'nin belirlenmesi elektromagnetik teoride önemli bir problem sınıfını teşkil eder. Bu

bağlamda, literatürde özel tür geometri ve yüzeyler için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir [12]-[15].

IBC'ler saçılma problemlerini ciddi anlamda basitleştirmelerine rağmen doğrulukları sınırlıdır ve bir çok durumda bir saçıcıyı daha iyi simüle etmek için alternatif sınır koşullarına ihtiyaç duyulur. Bunu yapmanın yollarından biri; sınır koşullarına fazladan elektromagnetik alan bileşenleri ve bunların türevlerini dahil etmektir. Bir saçıcının özelliklerini sınır üstünde daha iyi simüle etmek amacıyla, IBC'lere yüksek mertebeden türevler ekleyerek oluşturulan yeni koşullar, "genelleştirilmiş empedans sınır koşulları" (GIBC- Generalized Impedance Boundary Conditions) olarak adlandırılır [16].

GIBC'ler de literatürde bir çok araştırmaya konu olmuştur [17-20]. Ayrıca mükemmel ve mükemmel olmayan iletken cisimler [21-25], yüksek yutucu özelliğe sahip cisimler [26,27], bir yüzey üzerindeki noktasal kusurlar ve noktasal iletkenler [28], rezonatörler [29,30], çok katmanlı tabakalar ve kaplamalar [31,32], yeryüzü [33] gibi bir çok özel geometrinin modellenmesinde kullanılmışlardır.

GIBC'lerin en fazla kullanıldığı yerlerden birisi de ince dielektrik kaplamalar veya iletken ince tabakalardan saçılma problemidir [34-40]. Bu problemlerde, GIBC ifadeleri gelen dalgaya bağımlı değildir ve kaplanmış cisimlerin sınırında tanımlanırlar. m GIBC'in mertebesini ve δ kaplamanın kalınlığını göstermek üzere; söz konusu GIBC ifadeleri kullanılarak oluşturulan yaklaşık modeller, gerçek modele $O(\delta^{m+1})$ mertebesinde bir hata ile yakınsar. Gerçek modelin basitleştirilmiş bir hali olan bu yaklaşık modelleri kullanarak, ince kaplamanın hassas bir şekilde ayrıklaştırılmasına gerek kalmadan, sadece dış ortamın ayrıklaştırılmasıyla problemi formüle etmek mümkündür. Bu nedenle çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasına dayanan yöntemlerde söz konusu GIBC'lerin kullanımı önemli bir kolaylık sağlamaktadır. Ayrıca diğer tür sayısal yöntemlerde de kaplamanın iç kısmının geometrisi ile uğraşmaya gerek kalmaz.

Yukarıda sözü edilen çalışmalarda, sadece sabit kalınlıklı ince dielektrik kaplamalar için GIBC ifadeleri türetilmiş ve incelenmiştir. Değişken kalınlıklı dielektrik kaplamalar için bu tarz GIBC ifadeleri türetmek, lokalize olmuş kaplamalar, dalgalı kaplamalar vb. durumlar için daha geniş uygulama alanları sunar. Ayrıca, sabit kalınlıklı kaplamalara göre değişken kalınlıklı kaplamalar için GIBC koşulları türetmek çok daha karmaşık

olduğundan ve daha çetrefilli matematiksel ayrıntılarla uğraşmayı gerektirdiğinden, bu GIBC ifadelerinin türetilmesi ve irdelenmesi önemli ve gerekli bir çalışma olacaktır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezdeki başlıca amaç; mükemmel elektrik iletken (PEC-Perfect Electric Conductor) ya da mükemmel magnetik iletken (PMC-Perfect Magnetic Conductor) bir cisim üzerine yerleştirilmiş değişken kalınlıklı, ince dielektrik kaplamalar için uygun GIBC ifadelerini türetmektir. Böylece; söz konusu kaplamalar için elektromagnetik saçılma problemini çözmek yerine, kaplamanın dış sınırı üstünde tanımlanmış ve kaplamanın geometrik ve fiziksel özelliklerini içeren GIBC ifadelerini kullanarak, daha basit bir problemi çözmek mümkün olacaktır.

Analizde basitlik sağlaması açısından sonsuz uzun bir PEC (PMC) silindirin üzerine kaplanmış kayıplı dielektrik kaplamanın her zaman silindirin eksenine paralel olan bir zaman-harmonik düzlemsel dalga ile aydınlatıldığı varsayılmıştır. Böylece, problem iki boyutlu skaler bir probleme indirgenerek, hem TM(Transverse Electric) hem de TE (Transverse Magnetic) polarizasyonları için çözülmüştür.

Burada türetilen GIBC'ler elektromagnetik alan ve bu alanın normal ve yüksek mertebeden teğetsel türevlerini içermesine rağmen, GIBC'lerin mertebeleri kaplamanın kalınlığı δ 'nın üstel derecesine göre belirlenmektedir. GIBC ifadelerini türetmek için "ölçeklendirilmiş asimptotik açılımlar" [26,40] denilen bir yaklaşım probleme uyarlanmıştır. Bu yaklaşıma göre; alan ve türevleri kaplamanın ortalama kalınlık bilgisini de içeren sonsuz bir seriye açılarak farklı mertebeler için GIBC koşulları türetilir. Bu tezde, her iki polarizasyon (Dirichlet ve Neumann durumları) için, üçüncü mertebeye kadar söz konusu açılımların yarı-analitik ifadeleri elde edilerek GIBC'ler çıkarılmıştır.

Burada şu hususu vurgulamak gerekir ki; GIBC ifadelerinin türetimi, her ne kadar sabit kalınlıklı kaplamalara göre ciddi oranda farklıysa da, GIBC kullanılarak yaratılan yaklaşık modelin hata tahmini aynıdır (örneğin [35] de olduğu gibi). Bu çalışmada söz konusu hata tahminine göre, yaklaşık modelin yakınsaklığı çeşitli simülasyonlar aracılığıyla doğrulanmıştır. Geometrik ve fiziksel özellikleri bilinen kaplanmış cisimlerin

elektromagnetik dalgaların yayılımına etkileri incelenerek, -bu türden problemlere “düz saçılma” problemi denir-, bu doğrulama gerçekleştirilmiştir. Sözü edilen düz saçılma problemini çözmek için iyi bilinen herhangi bir sayısal teknik kullanılabilir. Burada, Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) seçilmiştir ve bu yöntemin probleme uyarlanması ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır. Ayrıca, kaplama kalınlığı δ 'nın regüler olmadığı (kaplamanın dış yüzeyinin regüler olduğu ama iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunduğu) durumlar özel olarak ele alınmış ve bu tür geometriler sayısal uygulamalara uyarlanmıştır. SEY kullanılarak üretilen tüm simülasyon sonuçları göstermektedir ki; kaplamanın ortalama kalınlığı gelen alanın dalga boyununun onda birini aşmadığı sürece yaklaşık model gerçek modele yakınsamaktadır.

Tezin son kısmında; GIBC'ler aracılığıyla oluşturulan yaklaşık modelin ince dielektrik kaplamalara ilişkin tahribatsız muayene (non-destruction testing) uygulamalarında kullanılması amaçlanmaktadır. Daha açık bir biçimde ifade etmek gerekir ise; geometrisi bilinmeyen bir PEC ya da PMC üzerine yerleştirilmiş ince dielektrik kaplamanın kalınlık değişiminin belirlenmesi hedeflenmektedir. Bu problem, aynı zamanda üzerindeki kaplamanın dış yüzeyinin bilindiği bir geometri için PEC'in (PMC'nin) yüzeyini görüntüleme anlamına da gelen bir ters problemdir.

Matematiksel fizikteki düz problemler için Hadamard [41] de aşağıdaki üç postülatın gerekliliğine işaret eder:

1. Çözüm mevcut olmalıdır.
2. Çözüm tek olmalıdır.
3. Çözüm dataya sürekli bir şekilde bağlı olmalıdır.

Bu postülatları sağlayan problemlere “iyi kurulmuş” (well-posed) problemler denir. Yukarıda sözü geçen kaplama kalınlığının belirlenmesinin de içinde olduğu ters problemler ise yukarıdaki postülatları sağlamadıkları için kötü kurulmuş (ill-posed) problemlerdir. Bu nedenle; bu problem doğası gereği, düz saçılma problemlerine göre yeni zorluklarla uğraşmayı gerektirir ve farklı bir yaklaşım kullanılarak çözülmelidir.

GIBC ifadelerinin içinden δ kalınlık fonksiyonunu çekmek için, öncelikle dielektrik kaplamanın dış yüzeyi üzerinde tanımlı GIBC ifadelerindeki toplam alan ile toplam

alanın normal ve teğetsel türevlerinin elde edilmesi gerekir. Bu alanlar; sabit frekanslı bir gelen düzlemsel dalga için, kaplanmış cisimden saçılan alanın ölçümünden hesaplanır. Öncelikle saçılan alan, kaplamanın dış yüzeyine göre orjine biraz daha yakın sanal bir yüzey üzerinde [42] tanımlanan Tek-Tabaka Yaklaşımıyla (SLP-Single Layer Potential) [43] temsil edilir, sonra da Kesilmiş Tekil Değer Ayırışması (TSVD-Truncated Singular Value Decomposition) regülarizasyonu kullanılarak karşılaşılan kötü-kurulmuş birinci türden integral denklem çözülüp, SLP'nin yoğunluk fonksiyonu hesaplanır. Böylece hesaplanan yoğunluk fonksiyonlarıyla herhangi bir tekillik sıkıntısı ile karşılaşmadan kaplamanın dış yüzeyi üzerindeki toplam alan ve toplam alanın kısmi türevleri elde edilir. Bu alanlar GIBC ifadelerinde yerlerine koyulduğunda, δ kalınlık fonksiyonun bulunması problemi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümüne indirgenir. δ kalınlık fonksiyonu üstel fonksiyonların bir serisi şeklinde aranarak, sözü edilen diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü, birinci mertebe GIBC için bir lineer denklem sisteminin çözümüne, ikinci ve üçüncü mertebe GIBC için ise non-lineer denklem sistemlerinin çözümüne indirgenir. Lineer denklem sistemi en küçük kareler yöntemiyle [44], non-lineer denklem sistemleri ise çok iyi bilinen Newton-Raphson yöntemiyle sayısal olarak çözülmüştür.

Ters probleme dair sunulan bu yaklaşım çeşitli cisimler için test edilerek, ortalama kaplama kalınlığı gelen alanın dalga boyununun onda birini aşmadığı sürece arzu edilen sonuçlar üretilmiştir.

Bu tez; giriş bölümü ile birlikte beş ana bölüm, kaynaklar ve çeşitli ek bölümlerden oluşmaktadır. İkinci bölümde, değişken kalınlıklı dielektrik kaplamalardan saçılma problemi tanıtılıp ilgili GIBC koşulları türetilmiştir. Üçüncü bölümde, GIBC koşulları SEY ile sayısal olarak test edilmiştir. Bir sonraki bölümde, GIBC koşulları kullanılarak kaplamanın kalınlığının belirlenmesine dair bir yaklaşım sunulmuştur. Son bölüm ise, bu tez kapsamında yapılan çalışmalarla ilgili sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

1.3 Orjinal Katkı

Literatür özetinde anlatıldığı gibi; özel geometriler için çeşitli GIBC ifadelerinin konu edildiği bir çok çalışma vardır. Bu çalışmalar içinde en fazla ilgi görenlerden biri, "ince dielektrik kaplamalar için GIBC'ler olmasına rağmen, bu kaplamaların sabit kalınlıklı

olduğu varsayılmıştır. Oysa ki; belli bölgelerde lokalize olmuş kaplamalar, dalgalı veya pürüzlü yüzeylere sahip kaplamalar vb. bir çok durumda değişken kalınlıklı kaplamalar için geçerli olan GIBC'lere ihtiyaç duyulur. Bu nedenle bu çalışmada değişken kalınlıklı ince dielektrik kaplamalar için yeni GIBC ifadeleri türetilmiştir. Söz konusu GIBC'lerin türetilmesi, sabit kalınlıklı kaplamalar için türetilenlere göre çok daha karmaşık matematiksel ayrıntılarla uğraşmayı gerektirdiğinden ayrı bir önemi hak etmektedir.

Türetilen yeni GIBC ifadelerinin ilgili düz saçılma probleminde kullanılması ve bu problemin SEY ile çözülmesi için uygun varyasyonel formüller çıkartılmıştır. Ayrıca GIBC'ler uygun formda yeniden düzenlenerek, iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan kaplamalar için geçerli olacak hale getirilmiştir.

Son olarak; GIBC ifadelerinin tahribatsız muayenede kullanılabilmesi için uygun seri açılımları ve bilinen bir çok yöntem aracılığıyla ilgili ters saçılma problemi Cebirsel Denklem Sistemlerinin (CDS) çözümüne indirgenmiştir. Böylece, problem Newton-Raphson gibi çok iyi bilinen yöntemlerden biriyle çözülebilecek hale getirilmiştir.

İNCE DİELEKTRİK KAPLAMALAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ EMPEDANS SINIR KOŞULLARI

Bu bölümde, PEC veya PMC bir cisim üzerine kaplanmış, değişken kalınlıklı ince dielektrik kaplamalar için GIBC'lerin nasıl elde edildiği anlatılmaktadır. Bunun için; aşağıda öncelikle, ince dielektrik kaplamalardan elektromagnetik dalgaların saçılması probleminin matematiksel modeli ve GIBC'lerin bu model üzerinde nasıl tanımlandığı gösterilmektedir. Sonrasında ise, bazı asimptotik açılımlar kullanarak GIBC'lerin açık ifadelerinin türetilmesi, Diferansiyel Geometri'nin bazı ilgili kavramlarıyla birlikte verilmektedir.

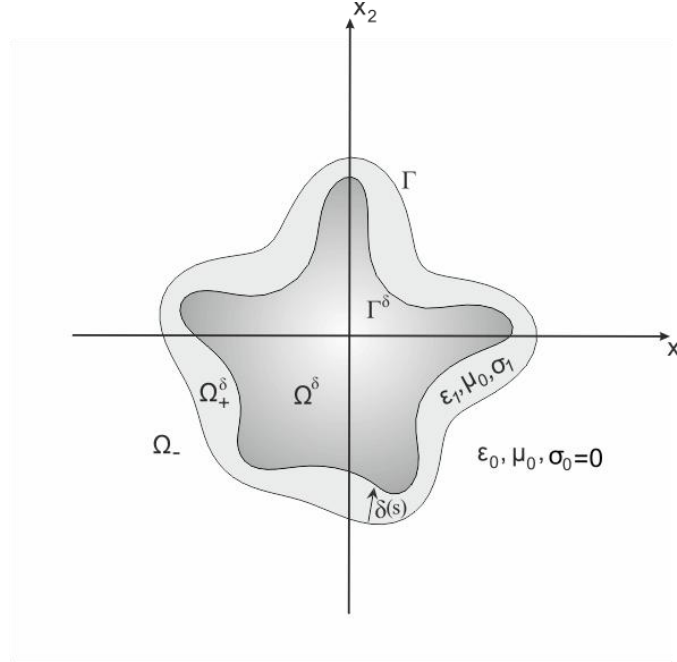
2.1 Problemin Tanıtılması ve Matematiksel Modelinin Oluşturulması

Şekil 2.1'de verilen geometriyi ele alalım. Burada; Ω^δ ile gösterilen PEC veya PMC bir silindir; dielektrik katsayısı ε_1 , iletkenliği σ_1 olan ve Ω_+^δ ile gösterilen homojen, kayıplı, manyetik olmayan dielektrik bir malzemeye kaplanmıştır¹. Dielektrik kaplamanın kalınlığı, -açık tanımı sonraki bölümde verilecek olan-, δ fonksiyonuyla temsil edilmektedir. Kaplanmış cismin kalınlık değişiminin Ω^δ silindirin doğrultusuna paralel olan eksen boyunca sabit olduğu ve aynı zamanda; dielektrik katsayısı ε_0 , magnetik geçirgenlik katsayısı μ_0 olan² ve Ω_- ile gösterilen boş uzaya Ox_3 eksenine paralel

¹ Magnetik olmayan cisimlerin magnetik geçirgenlik katsayısı boş uzayın magnetik geçirgenlik katsayısı (μ_0) ile aynıdır.

² Boş uzayın iletkenliği sıfırdır.

olacak şekilde yerleştirildiği varsayılmıştır. Γ^δ , Ω^δ bölgesinin (iletkenin); Γ ise Ω_- bölgesinin (boş uzayın) sınırını simgelemektedir.



Şekil 2. 1 PEC veya PMC bir silindir üzerine yerleştirilmiş değişken kalınlıklı ince kaplamanın geometrisi

Kaplanmış silindir, elektrik alan vektörü her zaman Ox_3 eksenine paralel olan ve

$$\vec{E}^i = (0, 0, u^i(x_1, x_2)) \quad (2.1)$$

şeklinde verilen zamanla değişimi sinüsoidal (zaman-harmonik) bir elektromagnetik dalga ile aydınlatılsın. Bu durumda toplam alan vektörü $\vec{E}$ de

$$\vec{E} = (0, 0, u_\Omega^\delta(x_1, x_2)) \quad (2.2)$$

şeklinde Ox_3 eksenine paralel olur ve ele alınan problem, u_Ω^δ alanı için $\mathbb{R}^2$ 'de skaler bir hale indirgenmiş olur. Bu tezin aşağıda ele alınan bazı kısımlarında, yapılacak olan matematiksel analiz gereği; u_Ω^δ toplam alanı, Ω_+^δ ve Ω_- bölgelerinde sırasıyla u_+^δ ve u_-^δ ile temsil edilmişlerdir.

$\vec{n}$, Γ sınırı üzerinde tanımlı Ω_+^δ bölgesinin içine doğru yönelmiş birim normal vektör alanı olmak üzere, yukarıda sözü edilen tasvir ve kabuller kapsamında şekillenen elektromagnetik olgu için; u_+^δ ve u_-^δ toplam alanları

$$u_-^\delta|_r = u_+^\delta|_r \quad (2.3)$$

ve

$$\frac{\partial u_-^\delta}{\partial n}|_r = \frac{\partial u_+^\delta}{\partial n}|_r \quad (2.4)$$

süreklilik koşulları altında

$$\Delta u_-^\delta + k_0^2 u_-^\delta = 0 \text{ } (\Omega_- \text{ bölgesinde}) \quad (2.5)$$

ve

$$\Delta u_+^\delta + k_1^2 u_+^\delta = 0 \text{ } (\Omega_+^\delta \text{ bölgesinde}) \quad (2.6)$$

indirgenmiş dalga denklemlerini¹ sağlar. ω açısal frekansı göstermek üzere, $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ kaplamanın içindeki, $k_1 = \sqrt{\omega^2\varepsilon_1\mu_0 + i\omega\sigma_1\mu_0}$ ise kaplamanın dışındaki dalga sayısıdır.

(2.3) ve (2.4)'de verilen süreklilik koşulları yanında, söz konusu saçılma problemi Γ^δ sınırı üzerinde; Ω^δ silindiri PEC olduğu durumlarda Dirichlet sınır koşuluna

$$u_+^\delta|_{\Gamma^\delta} = 0, \quad (2.7)$$

PMC olduğu durumlarda ise Neumann sınır koşuluna

$$\frac{\partial u_+^\delta}{\partial n^\delta}|_{\Gamma^\delta} = 0 \quad (2.8)$$

sahiptir. $\vec{n}^\delta$, Γ^δ sınırı üzerinde tanımlı, Ω_+^δ bölgesinin dışına doğru yönelmiş birim normal vektör alanıdır.

Çok iyi bilindiği gibi, kaplanmış cisim gelen dalga ile etkileşime girerek boş uzaydaki toplam alana bir katkıda bulunur. Bir başka ifadeyle, Ω_- bölgesindeki toplam alan

¹ İndirgenmiş dalga denklemi, Helmholtz denklemi olarak da bilinir.

$$u_-^\delta = u^i + u_{s,-}^\delta \quad (2.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, saçılan alan olarak adlandırılan $u_{s,-}^\delta$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_{s,-}^\delta}{\partial r} - ik_0 u_{s,-}^\delta \right) = 0, \quad r = |x|, \quad x = (x_1, x_2) \quad (2.10)$$

Sommerfeld radyasyon koşulunu sağlar [45].

Böylece, yukarıda ele alınan elektromagnetik olguyu temsil eden ve Γ üzerinde tanımlı (2.3), (2.4) süreklilik koşulları, Γ^δ üzerinde tanımlı (2.7) Dirichlet sınır koşulu ya da (2.8) Neumann sınır koşulu ve (2.10) radyasyon koşulu altında (2.5)-(2.6) indirgenmiş dalga denklemlerinden oluşan matematiksel model kurulmuş oldu. Gerek ilgili düz saçılma problemlerinde gerekse de ters saçılma problemlerinde bu model kullanılabilir. Bu tezin amacı; görece olarak karmaşık olan bu modelin yerine, kaplamanın dış sınırı Γ üzerinde tanımlı GIBC ifadelerini türeterek oluşturulan daha az karmaşık bir modelin ilgili saçılma problemlerinde kullanılabilmesini sağlamaktır. Bu nedenle; sonraki bölümde, PEC için

$$u^\delta + D^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde, PMC için ise

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial n} + N^\delta u^\delta \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (2.12)$$

şeklinde GIBC'ler oluşturacak ve

$$D^\delta, N^\delta : C^\infty(\Gamma) \rightarrow C^\infty(\Gamma) \quad (2.13)$$

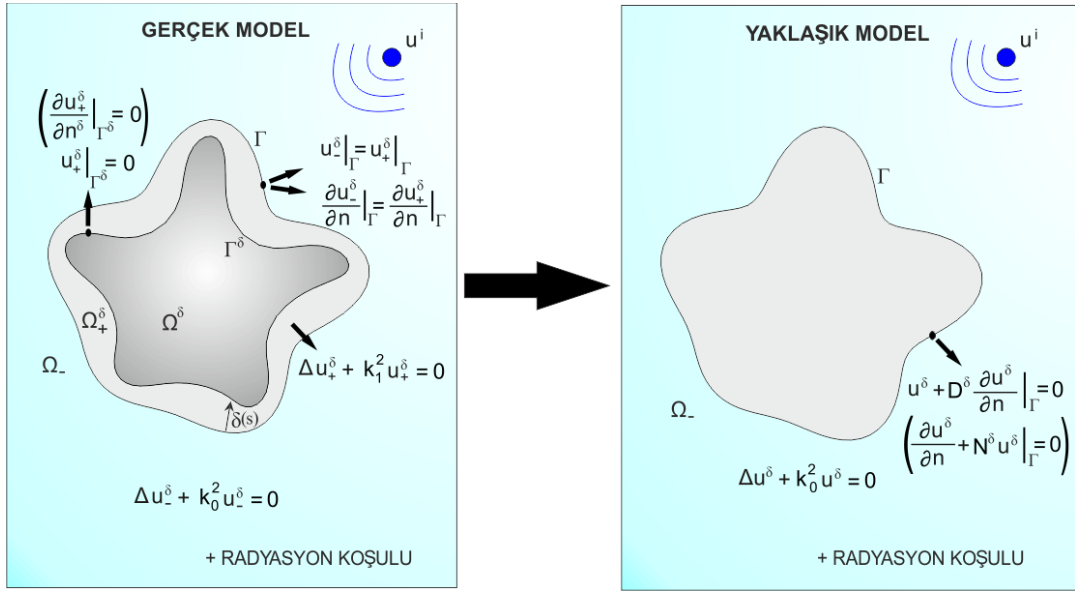
olacak şekilde D^δ Dirichlet empedans operatörü ve N^δ Neumann empedans operatörü aranacaktır. Bu empedans operatörleri bazı asimptotik açılımlar yardımıyla elde edileceğinden dolayı, (2.11) ve (2.12) GIBC ifadeleri yaklaşık bir $u^\delta \cong u_-^\delta$ toplam alanı için tanımlanmıştır. Bu operatörler bulunduğu takdirde, yukarıdaki model; (2.11) ya da (2.12) ile verilen GIBC'ler ve

$$u^\delta = u^i + u_s^\delta \quad (2.14)$$

olmak üzere, u_s^δ saçılan alanı için Sommerfeld radyasyon koşulu altında

$$\Delta u^\delta + k_0^2 u^\delta = 0 \quad (\Omega_- \text{ bölgesinde}) \quad (2.15)$$

indirgenmiş dalga denkleminde meydana gelen basitleşmiş bir modele indirgenmiş olur (Şekil 2.2). Bu tezde, söz konusu indirgenmiş model "yaklaşık model" olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 2. 2 Gerçek modelin yaklaşık modele indirgenmesi

İnce dielektrik kaplamalar için ele alınan problemlerde, genelde GIBC'in mertebesi δ kalınlığına göre belirlenir. Buna göre; yeterince küçük δ kalınlıkları için

$$\|u_-^\delta - u^\delta\|_{\Omega_-} \leq a \delta^{m+1} \quad (2.16)$$

sağlanırsa, GIBC'lerin m'inci mertebeden olduğu söylenir (sabit kalınlıklı kaplamaların incelendiği bir örnek için [35]'e bakılabilir). Burada a , δ 'dan bağımsız bir sabittir. m.mertebeden empedans operatörleri $D^{\delta,m}$ ve $N^{\delta,m}$ ile gösterilecektir.

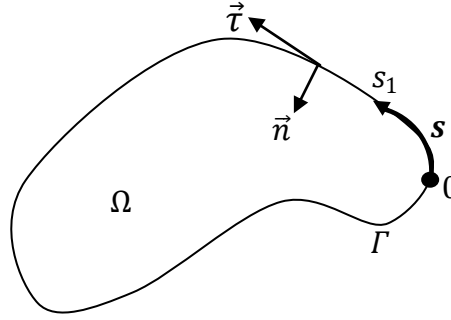
2.2 Genelleştirilmiş Empedans Sınır Koşullarının Türetilmesi

Bu bölümde, GIBC ifadeleri bazı asimptotik açılımlar kullanılarak elde edilecektir. Bu asimptotik açılımların amaca uygun şekilde kullanılabilmesi için, yukarıda verilen

modelde ele alınan eğri ve bölgelerin parametrik koordinatlarla ifade edilmesi ve bu yeni koordinatlarda gerekli geometrik kavram ve diferansiyel operatörlerin doğru şekilde tanımlanması gerekmektedir. Bu nedenle, asimptotik açılımlar yardımıyla GIBC'leri elde etmeden önce, Diferansiyel Geometri'nin bazı gerekli kavramları ele alınacaktır. Metin bütünlüğünü korumak ve asıl konudan sapmamak için, bu geometrik tanımlar ve diferansiyel işlemler fazla ayrıntıya girilmeden verilmektedir. Söz konusu tanım ve işlemlerin daha ayrıntılı açıklamaları için EK-A'ya bakılabilir. Benzer bir amaçla, GIBC'lerin türetilme aşamasında kolay ama uzun süren bazı matematiksel işlemlerin ayrıntıları EK-B'de verilmiştir.

2.2.1 Problemin Parametrik Olarak İfade Edilmesi

2.2.1.1 Parametrik Koordinatlar



Şekil 2. 3 Regüler bir eğrinin üzerindeki geometrik tanımlar

Γ regüler bir eğri (en azından C^2 'de) ve Ω basit bağımlı bir bölge olsun. L Γ 'nın uzunluğu olmak üzere, Γ sınırı

$$x_\Gamma(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, L[, \quad |dx_\Gamma(s)/ds| = 1 \quad (2.17)$$

olacak şekilde eğrisel apsis s ile parametrik olarak ifade edilebilir. Bu parametrik ifade biçimi saatin tersi yönünde tanımlansın. $\vec{n}(s)$, $x_\Gamma(s)$ üzerinde tanımlı Ω bölgesinin içine doğru yönelmiş birim normal vektörü;

$$\vec{\tau}(s) = \frac{dx_\Gamma(s)}{ds} \quad (2.18)$$

ise, $x_\Gamma(s)$ üzerinde tanımlı Γ 'ya teğet olan birim vektörü göstermektedir (Şekil 2.3). Γ sınırının eğriliği ise,

$$c(s) = \vec{\tau}(s) \cdot \frac{d\vec{n}(s)}{ds} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$v_0 = \inf_{0 \leq s \leq L} \frac{1}{|c(s)|}$ ¹ ve $\Omega_0 = \{x \text{ öyle ki; } d(x, \Gamma) < v_0\}$ olsun. Bu takdirde;

$$x = x_\Gamma(s) + v \vec{n}(s) \quad (2.20)$$

olacak şekilde her $x \in \Omega_0$ 'a, sadece bir tane $(s, v) \in [0, L[\times]-v_0, v_0[$ çifti karşılık gelir. Dikkat edilirse; x_Γ , x 'in Γ eğrisi üzerindeki dik izdüşümünden başka bir şey değildir. Aşağıda ele alınan işlemlerde, (s, v) çifti $x \in \Omega_0$ 'ın parametrik (ya da eğrisel) koordinatları olarak ifade edilecektir.

2.2.1.2 Eğrisel Koordinatlarda Diferansiyel Operatörler

u , Ω_0 üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. x ve (s, v) (2.20)'yi sağlamak üzere, $\tilde{u}: [0, L[\times]-v_0, v_0[$ fonksiyonu

$$\tilde{u}(s, v) = u(x) \quad (2.21)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, u 'nın gradyant ve laplasyeni sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\nabla u = \frac{1}{(1+vc)} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \vec{\tau} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \vec{n}, \quad (2.22)$$

$$\Delta u = \frac{1}{(1+vc)} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(1+vc)} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{u} + \frac{1}{(1+vc)} \frac{\partial}{\partial v} (1+vc) \frac{\partial}{\partial v} \tilde{u}. \quad (2.23)$$

¹Eğriliğin tersi eğriliğin yarıçapını verir.

2.2.1.3 Γ^δ Eğrisinin Parametrik Olarak İfade Edilmesi

Ω bölgesinin, basit bağımlı bir bölge olan Ω^δ bölgesini kapsadığı varsayalım. $s \in [0, L[$ için, kalınlık fonksiyonu

$$\delta(s) = d(x_\Gamma(s), \Gamma^\delta) \quad (2.24)$$

olarak tanımlanmaktadır. Γ^δ eğrisinin, global ve injektif (birebir) özelliklere sahip olacak şekilde, $s \in [0, L[$ ile

$$x_\Gamma^\delta(s) = x_\Gamma(s) + \delta(s)\vec{n}(s) \quad (2.25)$$

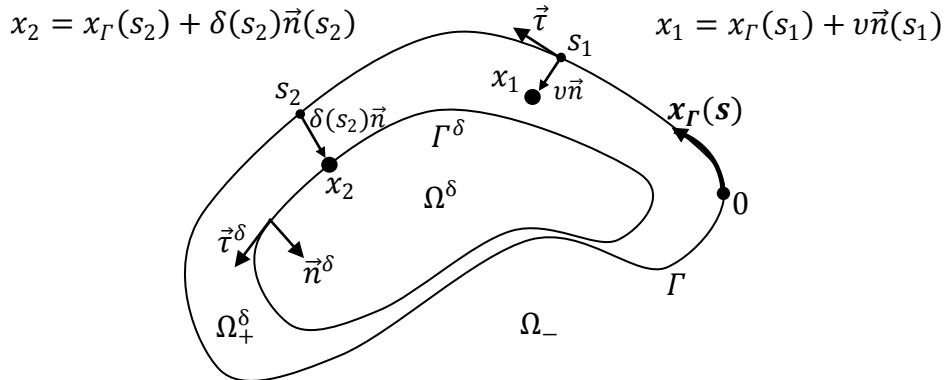
biçiminde parametrik olarak ifade edilebilmesi için, δ fonksiyonunun yeterince regüler ve yeterince küçük olduğu ($\delta(s) < v_0$) varsayılmaktadır. δ fonksiyonunun ne kadar regüler olması gerektiği genelleştirilmiş empedans sınır koşullarının mertebesine göre belirlenir. $x_\Gamma^\delta(s)$ üzerinde Γ^δ eğrisine teğet olan

$$\vec{\tau}^\delta = dx_\Gamma^\delta(s)/ds = (1 + \delta c)\vec{\tau} + \delta' \vec{n} \quad (2.26)$$

vektörü dikkate alınarak, $x_\Gamma^\delta(s)$ üzerinde Ω^δ bölgesinin içine doğru yönelmiş Γ^δ eğrisine dik olan normal birim vektör

$$\vec{n}^\delta = \frac{1}{|\vec{\tau}^\delta|} ((1 + \delta c)\vec{n} - \delta' \vec{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta c)^2 + |\delta'|^2}} ((1 + \delta c)\vec{n} - \delta' \vec{\tau}) \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 2. 4 Problemin geometrisinin eğrisel koordinatlarla ifade edilmesi

2.2.2 Asimptotik Açılımlar

Şimdi; kaplamanın δ kalınlığı sıfıra giderken çözümün asimptotik davranışı ele alınacaktır. $f(s)$, küçük bir parametre olan δ_0 'dan bağımsız bir fonksiyon olmak üzere; kaplama kalınlığı

$$\delta(s) = \delta_0 f(s) \quad (2.28)$$

şeklinde ifade edilsin. Burada, δ_0 eğrisel apsis s 'den bağımsızdır ve kaplamanın ortalama kalınlığını ayarlayan sabit bir parametre olarak düşünülebilir. $f(s)$ ise kaplama kalınlığının değişimini belirler. Bu durumda çözümün davranışı, $\delta_0 \rightarrow 0$ için incelenecektir.

Haddar ve Joly tarafından [40] da sabit kalınlıklı kaplamalar için yapılan çalışmadan esinlenerek, burada, dış ortamdaki toplam alanın

$$u_-^\delta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j u_-^j(x) \quad (\Omega_- \text{ 'de}) \quad (2.29)$$

şeklinde bir polinom serisine açıldığı kabul edilmektedir. u_-^j fonksiyonları δ_0 'a bağlı değildir. Normal koordinat

$$\xi = \frac{v}{\delta_0} \quad (2.30)$$

şeklinde ölçeklendirilerek, benzer bir yaklaşımla iç ortamdaki toplam alanın

$$u_+^\delta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j u_+^j(s, \xi) = \tilde{u}_+^\delta(s, \xi) \quad (\Omega_+^\delta \text{ 'da}) \quad (2.31)$$

polinom serisine açıldığı kabul edilir. $(s, \xi) \rightarrow u_+^j(s, \xi)$ δ_0 'a bağlı değildir ve $\mathcal{F}: \{(s, \xi) \in [0, L[\times]0, v_0[\text{ ve } \xi \leq f(s)\}$ üzerinde tanımlıdır.

(2.23)'de açık ifadesi verilen Δu ve ayrıca (2.30) değişken dönüşümüyle birlikte (2.31) serisi dikkate alınırsa, (2.6) indirgenmiş dalga denkleminin eşdeğeri, $\mathcal{F}$ 'de

$$\frac{1}{(1 + \delta_0 \xi c)} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(1 + \delta_0 \xi c)} \frac{\partial \tilde{u}_+^\delta}{\partial s} + \frac{1}{\delta_0^2} \frac{1}{(1 + \delta_0 \xi c)} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \delta_0 \xi c) \frac{\partial \tilde{u}_+^\delta}{\partial \xi} + k_1^2 \tilde{u}_+^\delta = 0 \quad (2.32)$$

olarak bulunur. Söz konusu yaklaşım, Γ sınırı üzerinde tanımlanmış süreklilik koşullarını ise

$$u_-^\delta(x_\Gamma(s)) = \tilde{u}_+^\delta(s, 0) \quad (2.33)$$

ve

$$\frac{\partial u_-^\delta}{\partial n}(x_\Gamma(s)) = \frac{1}{\delta_0} \frac{\partial \tilde{u}_+^\delta}{\partial \xi}(s, 0) \quad (2.34)$$

şekline dönüştürür.

Şimdi, (2.32) eşitliğinin ilgili yerleri (2.31) polinom serisine açılarak, elde edilen sonuç ifadesi δ_0 'ların üstel olarak arttığı bir polinom serisi şeklinde ifade edilecektir. Dikkat edilirse; (2.31) polinomuyla birlikte (2.32) eşitliği de δ_0 parametresini içermektedir, fakat (2.32)'de δ_0 üstel olarak düzenlenmemiştir. Elde edilmek istenen sonuç ifadesinin δ_0 'ın polinomu olarak gösterilmesi için, öncelikle (2.32) eşitliğinin her iki tarafı $(1 + \delta_0 \xi c)$ ile çarpılıp, aşağıdaki şekilde düzenlenir¹:

$$\begin{aligned} & \frac{-\delta_0 \xi c'}{(1 + \delta_0 \xi c)^2} \frac{\partial \tilde{u}_+^\delta}{\partial s} + \frac{1}{(1 + \delta_0 \xi c)} \frac{\partial^2 \tilde{u}_+^\delta}{\partial s^2} + \frac{c}{\delta_0} \frac{\partial \tilde{u}_+^\delta}{\partial \xi} + \frac{(1 + \delta_0 \xi c)}{\delta_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_+^\delta}{\partial \xi^2} \\ & + (1 + \delta_0 \xi c) k_1^2 \tilde{u}_+^\delta = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Bu sefer de, (2.35)'in her iki tarafı $(1 + \delta_0 \xi c)^2$ ile çarpılıp, gerekli düzenlemelerle

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{u}_+^\delta + \frac{1}{\delta_0} \left[3\xi c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \tilde{u}_+^\delta + \left[3\xi^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right] \tilde{u}_+^\delta \\ & + \delta_0 \left[\xi^3 c^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 c^3 \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi c \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \xi c' \frac{\partial}{\partial s} + 3\xi k_1^2 c \right] \tilde{u}_+^\delta \\ & + \delta_0^2 3\xi^2 k_1^2 c^2 \tilde{u}_+^\delta + \delta_0^3 \xi^3 k_1^2 c^3 \tilde{u}_+^\delta = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

¹ $c' = \frac{\partial c}{\partial s}$ olarak sembolize edilmiştir. Benzer şekilde $\delta' = \frac{\partial \delta}{\partial s}$ olarak gösterilecektir.

şeklinde δ_0 'ın polinomu olarak yazılır. (2.31) polinom serisi (2.36)'da ilgili yerlere koyulduğunda, negatif j 'ler için $u_+^j = 0$ kabulüyle, elde edilen yeni δ_0 sonsuz polinom serisinin her katsayısı

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_+^j + \left[3\xi c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi} \right] u_+^{j-1} + \left[3\xi^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right] u_+^{j-2} \\ + \left[\xi^3 c^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 c^3 \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi c \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \xi c' \frac{\partial}{\partial s} + 3\xi k_1^2 c \right] u_+^{j-3} \\ + 3\xi^2 k_1^2 c^2 u_+^{j-4} + \xi^3 k_1^2 c^3 u_+^{j-5} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde; (2.29) ve (2.31) polinom serileri (2.33) ve (2.34) süreklilik koşullarında yerlerine koyulursa, tüm $s \in [0, L[$ noktaları için

$$u_-^j(x_\Gamma(s)) = u_+^j(s, 0), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial n} u_-^{j-1}(x_\Gamma(s)) = \frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j(s, 0), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

yazılabilir.

(2.29) ve (2.31) serileri incelendiğinde açıkça görülmektedir ki; $\delta_0 \ll 1$ değerleri için serinin ilerleyen terimleri hızla sıfıra gitmektedir. Hatta, $\delta_0 \rightarrow 0$ için $u_-^\delta(x) = u_-^0(x)$ ve $u_+^\delta(x) = u_+^0(x)$ olur. Benzer şekilde, (2.37) katsayılarına sahip sonsuz polinom serisiyle tanımlanan indirgenmiş dalga denkleminde $\delta_0 \ll 1$ 'in büyüyen kuvvetleri kendi terimlerini sıfıra götürür. Bu durumda, m sabit bir sayı olmak üzere, yeterince küçük δ_0 değerleri için bu serilerin ilk m terimini almak yakınsaklık açısından yeterlidir. Burada sözü edilen m .terim Dirichlet ve Neumann empedans operatörlerinin mertebesini belirler. Aşağıda sırasıyla Dirichlet ve Neumann durumunda üçüncü mertebeye kadar empedans operatörlerinin türetilmesi anlatılmaktadır.

2.2.3 Dirichlet Durumunda Genelleştirilmiş Empedans Sınır Koşullarının Türetilmesi

Dirichlet durumu için (2.31) polinom serisi, Γ^δ sınırı üzerinde tanımlı (2.7) sınır koşulunda yerine koyularak ve yukarıda verilen yaklaşım tekrarlanarak

$$u_+^j(s, f(s)) = 0, \quad 0 \leq s < L, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

elde edilir. Şimdilik

$$\varphi_j(s) = \frac{\partial}{\partial n} u_-^j(x_\Gamma(s)), \quad 0 \leq s < L, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.41)$$

fonksiyonunun bilindiği varsayalım. Bu takdirde, (2.39) sınır koşulu

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j(s, 0) = \varphi_{j-1}(s), \quad 0 \leq s < L, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

olarak yazılabilir.

Böylece, (2.37), (2.40) ve (2.42)'den oluşan Sınır Değer Problemleri (SDP'ler) $j = 0, 1, 2, \dots$ için adım adım çözülebilir. j arttıkça, bu SDP'deki ifadeler gittikçe karmaşıkmaktadır. Bu tezde üçüncü mertebeye kadar GIBC'lerin bulunması amaçlandığından dolayı, SDP'ler sadece $j = 0, 1, 2$ ve 3 için çözülmüştür. Uzun hesaplamalar sonucu, $u_+^j(s, \xi)$, $j = 0, 1, 2, 3$, fonksiyonları

$$u_+^0(s, \xi) = 0, \quad (2.43)$$

$$u_+^1(s, \xi) = (\xi - f)\varphi_0, \quad (2.44)$$

$$u_+^2(s, \xi) = (\xi - f)\varphi_1 - \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)c\varphi_0, \quad (2.45)$$

$$u_+^3(s, \xi) = (\xi - f)\varphi_2 - \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)c\varphi_1 + \frac{1}{3}(\xi^3 - f^3)c^2\varphi_0 - \frac{1}{6}(\xi^3 - f^3)\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2\right)\varphi_0 + \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2\right)f\varphi_0 \quad (2.46)$$

olarak bulunmuştur. Hatırlatmak gerekir ki; f, c, φ_j fonksiyonları s eğrisel apsisine bağlıdır. Bu çözümlerin ayrıntıları EK B-1'de verilmiştir. Ayrıca, u_+^j fonksiyonlarının söz konusu denklem sistemlerini sağladıkları gösterilerek de, uzun işlemlerin doğruluğu kanıtlanabilir.

2.2.3.1 Dirichlet Operatörleri

(2.29) polinom serisinin m.terimden sonrasının atıldığını düşünerek,

$$u_-^{\delta,m}(x_\Gamma(s)) = \sum_{j=0}^m \delta_0^j u_-^j(x_\Gamma(s)) \quad (2.47)$$

yazılsın. Bu durumda (2.11)'de verilen Dirichlet durumundaki GIBC, m.mertebe için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$u_-^{\delta,m}(x_\Gamma(s)) = -D^{\delta,m} \left(\frac{\partial u_-^{\delta,m}}{\partial n}(x_\Gamma(s)) \right), \quad m \geq 0 \quad (2.48)$$

(2.47)'de verilen $u_-^{\delta,m}$ fonksiyonu, (2.48)'de yerine koyulursa,

$$\sum_{j=0}^m \delta_0^j u_-^j(x_\Gamma(s)) = -D^{\delta,m} \left(\sum_{j=0}^m \delta_0^j \frac{\partial u_-^j}{\partial n}(x_\Gamma(s)) \right) \quad (2.49)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı için Γ eğrisi üzerinde tanımlı (2.38) koşulu, sağ tarafı için ise (2.41) eşitliği göz önüne alınırsa, eşitlik

$$\sum_{j=0}^m \delta_0^j u_+^j(s, 0) = -D^{\delta,m} \left(\sum_{j=0}^m \delta_0^j \varphi_j(s) \right) \quad (2.50)$$

halini alır. (2.43)-(2.46) eşitliklerinde verilen u_+^j fonksiyonları aracılığıyla,

$$D^{\delta,0} = 0, \quad (2.51)$$

$$D^{\delta,1} = \delta(s), \quad (2.52)$$

$$D^{\delta,2} = \delta(s) \left(1 - \frac{1}{2} \delta(s) c(s) \right), \quad (2.53)$$

$$D^{\delta,3} = \delta(s) \left(1 - \frac{1}{2} \delta(s) c(s) + \frac{1}{3} \delta^2(s) c^2(s) \right) - \frac{1}{6} \delta^3(s) \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) + \frac{1}{2} \delta^2(s) \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) \delta(s) \quad (2.54)$$

şeklinde açık ifadeleri verilen $D^{\delta,m}$ operatörleri $O(\delta_0^{m+1})$ mertebesinde hatayla¹ (2.50) GIBC ifadesini sağlar. Bu operatörlerin yukarıda verilen açık ifadelerinin elde edilmesi EK B-2'de ayrıntılı bir şekilde gösterilmektedir. Buradaki problem $D^{\delta,0}$ operatörü için, sınırı Γ olan bir PEC cisimden saçılma probleminden başka bir şey değildir.

Açıktır görülmektedir ki; birinci ve ikinci mertebeden operatörler dielektrik kaplamanın sadece geometrik bilgilerini taşıırken, üçüncü mertebeden operatör kaplamanın geometrik özelliklerinin yanında malzeme özelliklerine dair bilgiyi de taşımaktadır.

2.2.4 Neumann Durumunda Genelleştirilmiş Empedans Sınır Koşullarının Türetilmesi

Neumann durumunda GIBC ifadelerinin türetilme işlemi yukarıda ayrıntıları verilen Dirichlet problemininkiyle benzerdir, fakat PMC yüzeyi üzerindeki sınır koşulu δ 'ya bağlı olduğu için çok daha karmaşıktır. Daha açık ifade etmek gerekirse; (2.22)'de verilen gradyant operatörü kullanılarak, Γ^δ üzerindeki Neumann sınır koşulu

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}_+^\delta}{\partial \vec{n}^\delta} \right|_{\xi=f(s)} = \nabla \tilde{u}_+^\delta \cdot \vec{n}^\delta \Big|_{\xi=f(s)} = \left(\frac{1}{(1 + \xi \delta_0 c)} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \vec{\tau} + \frac{1}{\delta_0} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \vec{n} \right) \cdot \vec{n}^\delta \Big|_{\xi=f(s)} = 0 \quad (2.55)$$

şeklinde yazılabilir. (2.27)'de verilen $\vec{n}^\delta$ burada yerine koyulup, sonra da her iki taraf $(1 + \delta c)$ ile çarpılarak ifade düzenlenirse Neumann sınır koşulu

¹ $O(\delta_0^{m+1})$ mertebesindeki hata (2.29) polinom serisinin m.terimden itibaren kesilmesi sonucu oluşan hata ile aynı mertebededir.

$$(1 + \delta c)^2 \frac{\partial \tilde{u}_+^\delta}{\partial \xi}(s, f(s)) = \delta_0 \delta' \frac{\partial \tilde{u}_+^\delta}{\partial s}(s, f(s)), \quad 0 \leq s < L \quad (2.56)$$

halini alır. $\delta(s) = \delta_0 f(s)$ olduğu dikkate alınarak, gerekli düzenlemelerle (2.56)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_+^\delta(s, f(s)) &= -\delta_0 2fc \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_+^\delta(s, f(s)) + \delta_0^2 \left[f' \frac{\partial}{\partial s} - f^2 c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \tilde{u}_+^\delta(s, f(s)), \\ 0 \leq s < L \end{aligned} \quad (2.57)$$

şeklinde δ_0 'ın polinomu olarak ifade edilebilir. (2.31) polinom serisi (2.57)'de ilgili yerlere koyulduğunda, negatif j 'ler için $u_+^j = 0$ kabulüyle, elde edilen yeni δ_0 sonsuz polinom serisinin her katsayısı

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j(s, f(s)) &= -2fc \frac{\partial}{\partial \xi} u_+^{j-1}(s, f(s)) + \left[f' \frac{\partial}{\partial s} - f^2 c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] u_+^{j-2}(s, f(s)), \\ j &= 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq s < L \end{aligned} \quad (2.58)$$

olarak yazılabilir. Dirichlet durumunda ilgili süreklilik koşulundan elde edilen (2.41) fonksiyonun yerine, Γ üzerindeki diğer süreklilik koşulundan elde edilen

$$\psi_j(s) = u_-^j(x_\Gamma(s)), \quad 0 \leq s < L, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.59)$$

fonksiyonunun şimdilik bilindiği varsayalım. Böylece, (2.37) ve (2.58)'den oluşan SDP

$$u_+^j(s, 0) = \psi_j(s), \quad 0 \leq s < L, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.60)$$

sınır koşuluyla tamamlanmış olur. Bu SDP'ler $j = 0, 1, 2, \dots$ için adım adım çözülebilir.

GIBC'leri üçüncü mertebeye kadar türetmek için, $\frac{\partial u_+^j}{\partial \xi}$ ifadelerinin $j = 4$ 'e kadar bilinmesi yeterlidir. SDP'lerin kolay ama oldukça uzun çözümleri sonucu,

$$\mathcal{A}_0 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2,$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\partial}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + c \left(2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right),$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\partial}{\partial s} f \frac{\partial}{\partial s} + f k_1^2$$

olmak üzere, $u_+^j(s, \xi)$ fonksiyonları $(s, \xi) \in F$ için,

$$\frac{\partial u_+^0}{\partial \xi} = \frac{\partial u_+^1}{\partial \xi} = 0, \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial u_+^2}{\partial \xi} = (f - \xi)\mathcal{A}_0\psi_0 + f'\frac{\partial}{\partial s}\psi_0, \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+^3}{\partial \xi} = & (f - \xi)\mathcal{A}_0\psi_1 + f'\frac{\partial}{\partial s}\psi_1 - 2ff'c\frac{\partial}{\partial s}\psi_0 + (f - \xi)c\mathcal{A}_2\psi_0 \\ & + \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)\mathcal{A}_1\psi_0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+^4}{\partial \xi} = & (f - \xi)\mathcal{A}_0\psi_2 + f'\frac{\partial}{\partial s}\psi_2 - 2ff'c\frac{\partial}{\partial s}\psi_1 + (f - \xi)c\mathcal{A}_2\psi_1 \\ & + \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)\mathcal{A}_1\psi_1 \\ & + ff'\left(\frac{\partial}{\partial s}f'\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s}\mathcal{A}_0 + \frac{1}{2}f\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{A}_0 + 3fc^2\frac{\partial}{\partial s}\right)\psi_0 \\ & + \frac{1}{3}(\xi^3 - f^3)\left(-\frac{7}{2}c\mathcal{A}_1 + \left(5c^2 + \frac{1}{2}\mathcal{A}_0\right)\mathcal{A}_0 - 3c^2k_1^2\right)\psi_0 \\ & + \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)\left((2c^2 - \mathcal{A}_0)\mathcal{A}_2\right)\psi_0 \\ & + (\xi - f)fc\left(2f'c\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}f\mathcal{A}_1 - c\mathcal{A}_2\right)\psi_0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

olarak bulunmuştur. Bu çözümlerin ayrıntıları EK B-3'de verilmiştir.

2.2.4.1 Neumann Operatörleri

Dirichlet operatörlerinin türetilmesi sırasında kullanılan (2.47) ifadesi göz önüne alınarak, (2.12)'de verilen Neumann durumundaki GIBC m. mertebe için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{\partial u_-^{\delta,m}}{\partial n}(x_\Gamma(s)) = -N^{\delta,m}\left(u_-^{\delta,m}(x_\Gamma(s))\right), \quad m \geq 0 \quad (2.65)$$

(2.47)'de verilen $u_-^{\delta,m}$ fonksiyonu, (2.65)'de yerine koyulursa,

$$\sum_{j=0}^m \delta_0^j \frac{\partial u_-^j}{\partial n}(x_\Gamma(s)) = -N^{\delta,m} \left(\sum_{j=0}^m \delta_0^j u_-^j(x_\Gamma(s)) \right) \quad (2.66)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı için Γ eğrisi üzerinde tanımlı (2.39) koşulu, sağ tarafı için ise (2.59) eşitliği göz önüne alınırsa, eşitlik

$$\sum_{j=0}^m \delta_0^j \frac{\partial u_+^{j+1}}{\partial \xi}(s, 0) = -N^{\delta,m} \left(\sum_{j=0}^m \delta_0^j \psi_j(s) \right) \quad (2.67)$$

halini alır. (2.61)-(2.64) eşitlikleriyle verilen $\frac{\partial u_+^j}{\partial \xi}$ fonksiyonları aracılığıyla,

$$N^{\delta,0} = 0, \quad (2.68)$$

$$N^{\delta,1} = -\frac{\partial}{\partial s} \delta(s) \frac{\partial}{\partial s} - \delta(s) k_1^2, \quad (2.69)$$

$$N^{\delta,2} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\delta(s) - \frac{1}{2} \delta^2(s) c(s) \right) \frac{\partial}{\partial s} - \left(\delta(s) + \frac{1}{2} \delta^2(s) c(s) \right) k_1^2, \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} N^{\delta,3} = & -\frac{\partial}{\partial s} \left(\delta(s) - \frac{1}{2} \delta^2(s) c(s) + \frac{1}{3} \delta^3(s) c^2(s) + \frac{2}{3} \delta^3(s) k_1^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \delta^2(s) \delta''(s) \right) \frac{\partial}{\partial s} \\ & - \left(\delta(s) + \frac{1}{2} \delta^2(s) c(s) + \frac{1}{3} \delta^3(s) k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2(s) \delta''(s) \right. \\ & \left. + \delta(s) (\delta'(s))^2 \right) k_1^2 - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta^3(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (2.71)$$

şeklinde açık ifadeleri verilen $N^{\delta,m}$ operatörleri $O(\delta_0^{m+1})$ mertebesinde hatayla (2.67)'de verilen GIBC'leri sağlar. Bu operatörlerin yukarıda verilen açık ifadelerinin elde edilmesi EK B-4'de ayrıntılı bir şekilde gösterilmektedir. Burada söz edilen Neumann problemi $N^{\delta,0}$ operatörü için sınırı Γ olan bir PMC cisimden saçılma problemine denktir. Görüldüğü gibi, kaplamanın geometrik ve malzeme bilgilerini taşıyan diğer operatörlerin mertebeleri büyüdükçe taşıdıkları bilgilerle birlikte karmaşıklıkları da artmaktadır.

GENELLEŞTİRİLMİŞ EMPEDANS SINIR KOŞULLARININ SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE TEST EDİLMESİ

Bir önceki bölümde, bir PEC ya da PMC üzerine yerleştirilmiş değişken kalınlıklı ince dielektrik kaplamaların dış yüzeyi üzerinde tanımlanmış GIBC ifadeleri kaplama kalınlığına göre üçüncü mertebeye kadar türetilmişti. Burada ise, belli bir yaklaşıkla üçüncü mertebeye¹ kadar tanımlanmış söz konusu GIBC'lerin doğruluğu ve geçerliliği sayısal olarak sınanmaktadır. Bu sınama işlemi, kaplanmış cismin bir elektromagnetik dalga ile aydınlatılması sonucu oluşan saçılma probleminde, dış ortamda tanımlı bir çember üzerinde oluşan toplam alanların, gerçek model ve (GIBC'lerin tanımlı olduğu) yaklaşık model için SEY ile sayısal olarak karşılaştırılmasıyla gerçekleştirilecektir. Bununla birlikte; kaplamanın iç yüzeyinin üzerinde bulunan köşe tekillikleri (corner singularity) nedeniyle regüler olmadığı durumlar özel olarak incelenecektir.

Aşağıda öncelikle, hem Dirichlet hem de Neumann durumları için gerçek problemin varyasyonel formüllere dönüştürülmesi ve bu formüllerin Galarkin Metodu [46] aracılığıyla bir Lineer Denklem Sistemine (LDS) indirgenmesi anlatılmaktadır. Sonrasında ise, sırasıyla Dirichlet ve Neumann durumları için yaklaşık modele ilişkin zayıf (weak) formda varyasyonel formüller SEY ile çözülebilecek şekilde elde edilmektedir. Burada, kaplamanın iç yüzeyinde köşe tekillikleri olması durumu ayrıca irdelenmiştir. Son olarak, gerçek ve yaklaşık modelden SEY ile üretilen sayısal

¹ Sıfırıncı mertebe için yaklaşık saçılma problemi Dirichlet durumunda yüzeyi Γ olan PEC'ten, Neumann durumunda ise yüzeyi yine Γ olan PMC'ten saçılma probleminden başka bir şey değildir. Bu nedenle, sıfırıncı mertebe GIBC dielektrik kaplama için düz ve ters saçılma problemlerinde irdelenmemiştir.

sonuçların karşılaştırmaları ve hata mertebesinin (2.16) koşuluna göre irdelenmesi verilmektedir.

3.1 Gerçek Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Çözümü

2.Bölümde tanımlanan gerçek model ve Şekil 2.1 göz önüne alınsın. İlk olarak, SEY’de sayısal hesaplar sonlu bir bölge üzerinde uygulandığından dolayı, sonsuz Ω_- bölgesi bir sınır koşulu aracılığıyla sınırlandırılmalıdır. GIBC’lerin probleme etkisi bu çalışmada asıl ilgilenilen husus olduğu için, bu sonsuz bölgenin basit bir yolla sınırlandırılması tercih edilmiştir. Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse; yeteri kadar büyük R yarıçaplı bir Γ^R çemberinin üzerinde tanımlanmış

$$\left. \frac{\partial u_{s,-}^\delta}{\partial \bar{n}} - ik_0 u_{s,-}^\delta \right|_{\Gamma^R} = 0 \quad (3.1)$$

sınır koşulu, (2.10) Sommerfeld radyasyon koşulununun bir yaklaşıklığı olarak alınmıştır. Burada $\bar{n}$, Γ^R çemberi üzerinde dışa doğru yönelmiş birim normal vektördür.

Ω_-^R , Γ^R çemberi ve Γ yüzeyi tarafından sınırlanmış bölge olsun. $\bar{v}$ bir test fonksiyonu olmak üzere, (2.5) ve (2.6) indirgenmiş dalga denklemleri $\bar{v}$ ile çarpılıp, sonuç Ω_-^R ve Ω_+^δ üzerinde integre edilirse,

$$\int_{\Omega_-^R} \Delta u_-^\delta \bar{v} dx + k_0^2 \int_{\Omega_-^R} u_-^\delta \bar{v} dx + \int_{\Omega_+^\delta} \Delta u_+^\delta \bar{v} dx + k_1^2 \int_{\Omega_+^\delta} u_+^\delta \bar{v} dx = 0 \quad (3.2)$$

elde edilir. Bu varyasyonel ifade

$$\int_{\Omega_-^R} \Delta u_-^\delta \bar{v} dx + \int_{\Omega_-^R} \nabla u_-^\delta \cdot \nabla \bar{v} dx = \oint_{\Gamma^R} \frac{\partial u_-^\delta}{\partial \bar{n}} \bar{v} ds + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u_-^\delta}{\partial n} \bar{v} ds \quad (3.3)$$

$$\int_{\Omega_+^\delta} \Delta u_+^\delta \bar{v} dx + \int_{\Omega_+^\delta} \nabla u_+^\delta \cdot \nabla \bar{v} dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u_+^\delta}{\partial n} \bar{v} ds + \oint_{\Gamma^\delta} \frac{\partial u_+^\delta}{\partial n^\delta} \bar{v} ds \quad (3.4)$$

Green formüllerinin [47] yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma^R} \frac{\partial u_-^\delta}{\partial \bar{n}} \bar{v} ds + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u_-^\delta}{\partial n} \bar{v} ds - \int_{\Omega_-^R} \nabla u_-^\delta \cdot \nabla \bar{v} dx + k_0^2 \int_{\Omega_-^R} u_-^\delta \bar{v} dx u_-^\delta \\
& + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u_+^\delta}{\partial n} \bar{v} ds + \oint_{\Gamma^\delta} \frac{\partial u_+^\delta}{\partial n^\delta} \bar{v} ds - \int_{\Omega_+^\delta} \nabla u_+^\delta \cdot \nabla \bar{v} dx \\
& + k_1^2 \int_{\Omega_+^\delta} u_+^\delta \bar{v} dx = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

haline dönüştürülebilir. (2.3) süreklilik koşulu dikkate alındığında, Γ üzerinde tanımlı integrallerin toplamı sıfır olur. Ayrıca Dirichlet durumu için Sonlu Elemanlar Yönteminde $u_+^\delta(s, f(s)) = \bar{v}(s, f(s)) = 0$ kabul edildiği ya da Neumann durumu için $\frac{\partial u_+^\delta}{\partial n^\delta}(s, f(s)) = 0$ olduğu için, Γ^δ üzerinde tanımlı integral de sıfır olur. Son olarak (3.1) yaklaşık radyasyon koşulu $u_-^\delta = u^i + u_{s,-}^\delta$ ile birlikte düşünüldüğünde, (3.5) varyasyonel formülü

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_-^R} \nabla u_-^\delta \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega_+^\delta} \nabla u_+^\delta \cdot \nabla \bar{v} dx - k_0^2 \int_{\Omega_-^R} u_-^\delta \bar{v} dx - k_1^2 \int_{\Omega_+^\delta} u_+^\delta \bar{v} dx \\
& - \oint_{\Gamma^R} ik_0 u_-^\delta \bar{v} ds - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - ik_0 u^i \right) \bar{v} ds = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

haline gelir. Bu varyasyonel formül Neumann durumunda doğrudan, Dirichlet durumunda ise $u_+^\delta(s, f(s)) = 0$ koşulu dikkate alınarak Galerkin metoduyla aşağıdaki şekilde çözülür.

Ω_-^R ve Ω_+^δ bölgeleri sonlu elemanlara bölünmüş olsun ve bilinmeyen fonksiyonlar (u_-^δ, u_+^δ)

$$\sum_{k=0}^{K-1} u_k \phi_k(x) \tag{3.7}$$

şeklinde bir seri olarak ve test fonksiyonları ($\bar{v}$)

$$\bar{v}(x) = \phi_k(x), \quad k = 0, \dots, K-1 \tag{3.8}$$

olarak ifade edilsin. Burada K sonlu elemanlara bölünmüş hesaplama bölgesindeki

toplam köşe sayısı, u_k 'lar ise bilinmeyen katsayılardır. Lagrange şekil fonksiyonları olarak adlandırılan ϕ_k 'lar k . köşede 1, diğer tüm köşelerde ise 0 değerini alır. (3.7) serisi ve (3.8)'deki her ϕ_k ayrı ayrı (3.6) varyasyonel formülünde yerlerine koyulursa,

$$A_{ij} = \sum_{j=0}^{K-1} \int_{\Omega_{\mathbb{R}} \cup \Omega_{+}^{\delta}} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx - \sum_{j=0}^{K-1} k_0^2 \int_{\Omega_{\mathbb{R}}} \phi_j \phi_i \, dx - \sum_{j=0}^{K-1} k_1^2 \int_{\Omega_{+}^{\delta}} \phi_j \phi_i \, dx \\ + \sum_{j=0}^{K-1} \oint_{\Gamma^R} i k_0 \phi_j \phi_i \, ds, \quad i = 0, \dots, K-1 \quad (3.9)$$

ve

$$F_i = \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - i k_0 u^i \right) \phi_i \, ds, \quad i = 0, \dots, K-1 \quad (3.10)$$

olmak üzere, toplam alanı bulma problemi

$$\sum_{j=0}^{K-1} A_{ij} u_j - F_i = 0, \quad i = 0, \dots, K-1 \quad (3.11)$$

şeklinde bir LDS'nin çözümüne indirgenir. Dirichlet probleminde, bu LDS çözülmeden önce, Γ^{δ} sınırı üzerindeki köşelerde toplam alan sıfır olacak şekilde seyrek ve simetrik bir matris¹ olan A_{ij} güncellenir. ϕ_k şekil fonksiyonlarının seçimi, hesap bölgesinin sonlu elemanlara bölünmesi ve bunun gibi ayrıntılar için [48]'e bakılabilir.

(3.2) varyasyonel formülü Galerkin metodu kullanılarak çözülmeye çalışılabilirdi. Fakat bu durumda, A_{ij} rijitlik matrisi simetrikliğini kaybederdi. Ayrıca, bu varyasyonel formüle uygun sürekli türevlenebilir sonlu eleman fonksiyonları tanımlamak gerekirdi. (3.6) probleminin çözümleri, ikinci mertebeden türev ifadeleri içeren (3.2) probleminin çözümlerine göre daha az sürekliliğe sahip olma imkanını taşır. Bu nedenle (3.6) probleminin çözümleri zayıf çözüm (weak solution), (3.2) probleminin çözümleri ise güçlü çözüm (strong solution) olarak adlandırılır [46].

¹ Bu matris rijitlik (stiffness) matrisi olarak bilinir.

Galerkin metodu ile burada gösterildiği gibi kolayca bir LDS'ye dönüştürülebilecek yaklaşık modele ait zayıf formda varyasyonel formüllerin ayrıntılı bir şekilde çıkarılması, sırasıyla Dirichlet ve Neumann durumları için aşağıda verilmektedir.

3.2 Dirichlet Durumunda Yaklaşık Modele İlişkin Varyasyonel Formül

Dirichlet durumunda yaklaşık modele ilişkin varyasyonel formüller, bir önceki bölümde anlatılan yaklaşıma benzer bir şekilde çıkarılacaktır. Bu sefer u_s^δ yaklaşık saçılan alanının, Γ^R çemberi üzerinde (3.1) yaklaşık radyasyon koşulunu sağladığı kabul edilmektedir. Ayrıca, yaklaşık modelin geometrisi gereği; sadece Ω_-^R bölgesinin sonlu elemanlara bölünmesi yeterlidir. Kolayca görüleceği gibi, (3.2) varyasyonel formülü yaklaşık model için

$$\int_{\Omega_-^R} \Delta u^\delta \bar{v} dx + k_0^2 \int_{\Omega_-^R} u^\delta \bar{v} dx u_-^\delta = 0 \quad (3.12)$$

olur. u^δ toplam alanı için (3.3) Green formülü kullanıldığında, bu varyasyonel ifade

$$\oint_{\Gamma^R} \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{n}} \bar{v} ds + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \bar{v} ds - \int_{\Omega_-^R} \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} dx + k_0^2 \int_{\Omega_-^R} u^\delta \bar{v} dx u_-^\delta = 0 \quad (3.13)$$

haline dönüşür. Son olarak, yaklaşık radyasyon koşulu $u^\delta = u^i + u_s^\delta$ ile birlikte düşünüldüğünde, (3.13) varyasyonel formülü

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_-^R} \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} dx - k_0^2 \int_{\Omega_-^R} u^\delta \bar{v} dx - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \bar{v} ds - \oint_{\Gamma^R} ik_0 u^\delta \bar{v} ds \\ - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - ik_0 u^i \right) \bar{v} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklini alır. Şimdi, (2.11)'de verilen Γ üzerinde tanımlı GIBC ifadesi, (3.14)'de Γ üzerinde tanımlı integral aracılığıyla varyasyonel probleme dahil edilecektir. Aşağıda üçüncü mertebeye kadar GIBC ifadelerinin söz konusu varyasyonel probleme nasıl dahil edildiği anlatılmaktadır.

3.2.1 Birinci Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi

(2.52)'de açık ifadesi verilen $D^{\delta,1}$ operatörü, (2.11) ile tanımlanan GIBC'de yerine koyulup, elde edilen sonuç düzenlenirse,

$$\left. \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \right|_\Gamma = -\frac{1}{\delta} u^\delta \Big|_\Gamma \quad (3.15)$$

yazılabilir. Bu eşitlik de (3.14)'de yerine koyulursa, Dirichlet durumunda birinci mertebe GIBC'in tanımlandığı yaklaşık modele ilişkin varyasyonel formül

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^R} \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k_0^2 \int_{\Omega^R} u^\delta \bar{v} \, dx + \oint_\Gamma \frac{1}{\delta} u^\delta \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} ik_0 u^\delta \bar{v} \, ds \\ - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - ik_0 u^i \right) \bar{v} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde çıkarılmış olur.

3.2.2 İkinci Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi

Yukarıda verilen yol izlenerek ikinci mertebe GIBC'in tanımlandığı yaklaşık modele ilişkin varyasyonel formül oluşturulur. Yani; (2.53)'de açık ifadesi verilen $D^{\delta,2}$ operatörü, (2.11) ile tanımlanan GIBC'de yerine koyularak elde edilen

$$\left. \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \right|_\Gamma = -\frac{1}{\delta \left(1 - \frac{1}{2} \delta c\right)} u^\delta \Big|_\Gamma \quad (3.17)$$

(3.14)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^R} \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k_0^2 \int_{\Omega^R} u^\delta \bar{v} \, dx + \oint_\Gamma \frac{1}{\delta \left(1 - \frac{1}{2} \delta c\right)} u^\delta \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} ik_0 u^\delta \bar{v} \, ds \\ - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - ik_0 u^i \right) \bar{v} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

varyasyonel formülü çıkarılmış olur.

3.2.3 Üçüncü Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi

(2.54)'de açık ifadesi verilen $D^{\delta,3}$ 'ün teğetsel türev operatörlerini içermesi nedeniyle, birinci ve ikinci mertebe GIBC'lerin varyasyonel probleme dahil edilmesinde izlenen yol burada uygulanamaz. Bu sebeple, öncelikle

$$\psi^\delta(s) = \frac{\partial u^\delta}{\partial n}(s, 0) \quad (3.19)$$

alınarak, probleme Γ üzerinde tanımlı yeni bir bilinmeyen fonksiyon eklenir. Bu yeni bilinmeyen fonksiyon (3.14)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^R} \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k_0^2 \int_{\Omega^R} u^\delta \bar{v} \, dx - \oint_{\Gamma} \psi^\delta \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} ik_0 u^\delta \bar{v} \, ds \\ - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - ik_0 u^i \right) \bar{v} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

varyasyonel formülü elde edilir. u^δ fonksiyonu için yazılan (3.7) serisi, ψ^δ fonksiyonu için

$$\psi^\delta = \sum_{k=0}^{K^\Gamma-1} \psi_k \phi_k(s), \quad K^\Gamma < K \quad (3.21)$$

olarak yazılabilir. Ω^R bölgesinin sonlu elemanlara bölünmesiyle oluşan K tane köşenin, Γ üzerinde bulunan K^Γ tane köşesi için, K^Γ tane bilinmeyen ψ_k katsayısı vardır. Yeni test fonksiyonları

$$\bar{v}_2(x) = \phi_k(x), \quad k = 0, \dots, K^\Gamma - 1, \quad (3.22)$$

olarak seçilsin. Bu durumda, (2.54)'de açık ifadesi verilen $D^{\delta,3}$, (2.11) ile tanımlanan GIBC'de yerine koyulup, sonra da $\bar{v}_2$ test fonksiyonuyla çarpılıp Γ üzerinde integre edilirse,

$$\oint_{\Gamma} u^\delta \bar{v}_2 \, ds + \oint_{\Gamma} \alpha^\delta \psi^\delta \bar{v}_2 \, ds + \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \bar{v}_2 \, ds + \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial^2 \psi^\delta}{\partial s^2} \bar{v}_2 \, ds = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir. Burada,

$$\alpha^\delta = \delta \left(1 - \frac{1}{2} \delta c + \frac{1}{3} \delta^2 c^2 \right) + \frac{1}{3} \delta^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \delta''.$$
 (3.24)

(3.23) varyasyonel formülünü zayıf hale getirmek için, ψ^δ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevlerini yok etmek gerekir. Bu; kısmi integrasyon kuralıyla elde edilen

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial^2 \psi^\delta}{\partial s^2} \bar{v}_2 ds &= \frac{1}{3} \delta^3 \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \bar{v}_2 \Big|_0^L - \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} (\delta^3 \bar{v}_2) \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} ds \\ &= - \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \bar{v}_2 ds - \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial s} ds \end{aligned}$$
 (3.25)

ifadesi¹, (3.23)'de göz önüne alınarak,

$$\oint_{\Gamma} u^\delta \bar{v}_2 ds + \oint_{\Gamma} \alpha^\delta \psi^\delta \bar{v}_2 ds - \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial s} ds = 0$$
 (3.26)

şeklinde sağlanabilir.

(3.20) ve (3.26) ile verilen varyasyonel problem, Galerkin metodu aracılığıyla $(K + K^{\Gamma})$ bilinmeyenli $(K + K^{\Gamma})$ denklemden oluşan bir LDS'ye dönüştürülerek kolayca çözülebilir.

3.2.4 Kaplamanın İç Yüzeyinde Köşe Tekillikleri Bulunması Halinde Varyasyonel Formüllerin Düzenlenmesi

Yukarıda üçüncü mertebeye kadar çıkarılan varyasyonel formüller incelendiği takdirde; birinci ve ikinci mertebe için elde edilen varyasyonel ifadeler δ fonksiyonun türevlerini içermezken, üçüncü mertebe için elde edilen ifadelerin bu fonksiyonun ikinci mertebeden türevini içerdiği görülür. Bu durum, ilk iki mertebenin aksine, kaplamanın iç yüzeyi Γ^δ 'nin üzerinde köşe tekillikleri bulunması halinde üçüncü mertebe için çıkarılan (3.26) varyasyonel formülünün geçerli olmadığı anlamına gelir. δ fonksiyonun yüksek mertebeden türevleri en azından birinci mertebe türeve indirgenebilirse, δ' 'nin

¹ (3.25)'deki fonksiyonların 0 ve L üzerindeki değerleri eşit olduğu için integral operatörünün altında bulunmayan ifade 0 olur.

sürekli olmadığı noktalarda integral alt parçalara bölünerek bu sorun aşılabılır. Buna göre;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta'' \psi^\delta \bar{v}_2 ds &= -\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} (\delta^2 \psi^\delta \bar{v}_2) \delta' ds \\ &= -\oint_{\Gamma} \delta (\delta')^2 \psi^\delta \bar{v}_2 ds - \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \bar{v}_2 ds - \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \psi^\delta \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial s} ds \end{aligned} \quad (3.27)$$

kısmi integrasyonu dikkate alınırsa,

$$\alpha^\delta = \delta \left(1 - \frac{1}{2} \delta c + \frac{1}{3} \delta^2 c^2 \right) + \frac{1}{3} \delta^3 k_1^2 - \delta (\delta')^2 \quad (3.28)$$

ve $\bigcup_{n=1}^N \Gamma_n = \Gamma$ olmak üzere, (3.26) varyasyonel formülü

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} u^\delta \bar{v}_2 ds + \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \alpha^\delta \psi^\delta \bar{v}_2 ds - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \delta^2 \delta' \frac{\partial}{\partial s} (\psi^\delta \bar{v}_2) ds \\ - \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial s} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

haline getirilebilir. N , δ' 'nin sürekli olmadığı noktaların sayısıdır.

Böylece, kaplamanın iç yüzeyi üzerinde köşe tekillikleri bulunması halinde, (3.20) ve (3.29) varyasyonel formül çifti birlikte çözülerek toplam alanın istenilen sayısal değerleri üretilebilir.

3.3 Neumann Durumunda Yaklaşık Modele İlişkin Varyasyonel Formül

Dirichlet durumunda yaklaşık modele ilişkin elde edilen (3.14) varyasyonel formülü, Neumann durumu için de geçerlidir. Fakat, bu sefer (2.11) ile verilen Dirichlet durumunda GIBC yerine (2.12) ile verilen Neumann durumunda GIBC, (3.14)'deki Γ üzerinde tanımlı integral aracılığıyla varyasyonel probleme dahil edilecektir. Aşağıda Neumann durumunda üçüncü mertebeye kadar GIBC ifadelerinin varyasyonel probleme nasıl dahil edildiği anlatılmaktadır.

3.3.1 Birinci Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi

Neumann durumunda tanımlanan (2.12) GIBC ifadesi, (2.69)'da verilen $N^{\delta,1}$ operatörü için (3.14)'de yerine koyulursa, güçlü formda olan

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} \nabla u^{\delta} \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k_0^2 \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} u^{\delta} \bar{v} \, dx - \oint_{\Gamma} \delta' \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma} \delta \frac{\partial^2 u^{\delta}}{\partial s^2} \bar{v} \, ds \\ - \oint_{\Gamma} \delta k_1^2 u^{\delta} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} ik_0 u^{\delta} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - ik_0 u^i \right) \bar{v} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

varyasyonel formülü elde edilir. Önce

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \delta \frac{\partial^2 u^{\delta}}{\partial s^2} \bar{v} \, ds &= - \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} (\delta \bar{v}) \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \, ds \\ &= - \oint_{\Gamma} \delta' \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma} \delta \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \, ds \end{aligned} \quad (3.31)$$

kısmi integrasyonu ile u^{δ} fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi yok edilip, sonra da (3.30)'da yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} \nabla u^{\delta} \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k_0^2 \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} u^{\delta} \bar{v} \, dx + \oint_{\Gamma} \delta \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \, ds - \oint_{\Gamma} \delta k_1^2 u^{\delta} \bar{v} \, ds \\ - \oint_{\Gamma^R} ik_0 u^{\delta} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - ik_0 u^i \right) \bar{v} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

şeklinde istenilen zayıf varyasyonel formül çıkarılmış olur.

3.3.2 İkinci Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi

Birinci mertebeden GIBC için önceki bölümde izlenen yol tekrarlanarak zayıf varyasyonel formül elde edilebilir. Buna göre; öncelikle ikinci mertebe GIBC (3.14)'de yerine koyulurak aşağıdaki şekilde düzenlenir:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} \nabla u^{\delta} \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k_0^2 \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} u^{\delta} \bar{v} \, dx - \oint_{\Gamma} \left(\delta' - \delta' \delta c - \frac{1}{2} \delta^2 c' \right) \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v} \, ds \\
& - \oint_{\Gamma} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c \right) \frac{\partial^2 u^{\delta}}{\partial s^2} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma} \left(\delta + \frac{1}{2} \delta^2 c \right) k_1^2 u^{\delta} \bar{v} \, ds \\
& - \oint_{\Gamma^R} i k_0 u^{\delta} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - i k_0 u^i \right) \bar{v} \, ds = 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Güçlü formda varyasyonel bir formül olan (3.33)

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c \right) \frac{\partial^2 u^{\delta}}{\partial s^2} \bar{v} \, ds = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c \right) \bar{v} \right) \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \, ds \\
& = - \oint_{\Gamma} \left(\delta' - \delta' \delta c - \frac{1}{2} \delta^2 c' \right) \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c \right) \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \, ds
\end{aligned} \tag{3.34}$$

kısmi integrasyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} \nabla u^{\delta} \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k_0^2 \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} u^{\delta} \bar{v} \, dx + \oint_{\Gamma} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c \right) \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \, ds \\
& - \oint_{\Gamma} \left(\delta + \frac{1}{2} \delta^2 c \right) k_1^2 u^{\delta} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} i k_0 u^{\delta} \bar{v} \, ds \\
& - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - i k_0 u^i \right) \bar{v} \, ds = 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

şeklinde zayıf forma dönüştürülebilir.

3.3.3 Üçüncü Mertebeden GIBC'in Varyasyonel Probleme Dahil Edilmesi

Dirichlet durumunda olduğu gibi, Neumann durumunda da, yüksek merteden türev operatörleri nedeniyle üçüncü mertebe GIBC için basit kısmi integrasyonlarla zayıf varyasyonel formüller elde edilemez. Bu sebeple, burada da probleme yeni bir fonksiyon dahil edilerek Dirichlet durumundakine benzer bir yol izlenecektir.

Dirichlet durumunda (3.19) ile probleme dahil edilen ψ^{δ} fonksiyonu, burada

$$\psi^\delta(s) = \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2}(s, 0) \quad (3.36)$$

şeklinde seçilmiş olsun. Bu durumda,

$$\Phi_1^\delta(s) = \delta(s) - \frac{1}{2}\delta^2(s)c(s) + \frac{1}{3}\delta^3(s)c^2(s) + \frac{2}{3}\delta^3(s)k_1^2 + \frac{1}{2}\delta^2(s)\delta''(s), \quad (3.37)$$

$$\Phi_2^\delta(s) = \delta(s) + \frac{1}{2}\delta^2(s)c(s) + \frac{1}{3}\delta^3(s)k_1^2 + \frac{1}{2}\delta^2(s)\delta''(s) + \delta(s)(\delta'(s))^2 \quad (3.38)$$

olmak üzere, (2.71)'de açık ifadesi verilen $N^{\delta,3}$ operatörünün u^δ 'ya etki etmesi

$$N^{\delta,3}u^\delta = -\frac{\partial}{\partial s}\Phi_1^\delta\frac{\partial}{\partial s}u^\delta - \Phi_2^\delta k_1^2 u^\delta - \frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\delta^3\psi^\delta \quad (3.39)$$

şeklinde kapalı bir formda gösterilebilir. Bu ifade (3.14)'de yerine koyulup düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k_0^2 \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} u^\delta \bar{v} \, dx - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_1^\delta}{\partial s} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma} \Phi_1^\delta \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} \bar{v} \, ds \\ - k_1^2 \oint_{\Gamma} \Phi_2^\delta u^\delta \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma} (2\delta(\delta')^2 + \delta^2 \delta'') \psi^\delta \bar{v} \, ds \\ - 2 \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \bar{v} \, ds - \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial^2 \psi^\delta}{\partial s^2} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} ik_0 u^\delta \bar{v} \, ds \\ - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - ik_0 u^i \right) \bar{v} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

şeklinde güçlü formda bir varyasyonel formül elde edilir. u^δ ve ψ^δ fonksiyonlarının ikinci mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \Phi_1^\delta \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} \bar{v} \, ds &= - \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} (\Phi_1^\delta \bar{v}) \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \, ds \\ &= - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_1^\delta}{\partial s} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma} \Phi_1^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \, ds \end{aligned} \quad (3.41)$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial^2 \psi^\delta}{\partial s^2} \bar{v} ds &= -\frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} (\delta^3 \bar{v}) \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} ds \\
&= -\oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \bar{v} ds - \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} ds
\end{aligned} \tag{3.42}$$

kısmi integrasyonları aracılığıyla yok edilebilir. Böylece (3.40),

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^R} \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} dx - k_0^2 \int_{\Omega^R} u^\delta \bar{v} dx + \oint_{\Gamma} \Phi_1^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} ds - k_1^2 \oint_{\Gamma} \Phi_2^\delta u^\delta \bar{v} ds \\
&- \oint_{\Gamma} (2\delta(\delta')^2 + \delta^2 \delta'') \psi^\delta \bar{v} ds - \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \bar{v} ds + \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} ds \\
&- \oint_{\Gamma^R} ik_0 u^\delta \bar{v} ds - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - ik_0 u^i \right) \bar{v} ds = 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

şeklinde zayıf formda bir varyasyonel formüle dönüşmüş olur.

(3.36)'nın her iki tarafı $\bar{v}_2$ test fonksiyonu ile çarpılıp Γ üzerinde integre edilirse, ikinci varyasyonel formül

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} \bar{v}_2 ds = \oint_{\Gamma} \psi^\delta \bar{v}_2 ds \tag{3.44}$$

şeklinde elde edilir. Güçlü formda olan bu varyasyonel formül de

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} \bar{v}_2 ds = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial s} ds \tag{3.45}$$

kısmi integrasyonu kullanılarak,

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial s} ds + \oint_{\Gamma} \psi^\delta \bar{v}_2 ds = 0 \tag{3.46}$$

şeklinde zayıf bir forma dönüştürülebilir. ψ^δ fonksiyonu (3.21) serisine açılırsa, $\bar{v}_2$ ise (3.22) şekil fonksiyonları olarak seçilirse, bu durumda (3.43) ve (3.46) varyasyonel formüllerinin çözümü $(K + K^\Gamma)$ bilinmeyenli $(K + K^\Gamma)$ denklemden oluşan bir LDS'nin çözümüne indirgenir.

3.3.4 Kaplamanın İç Yüzeyinde Köşe Tekillikleri Bulunması Halinde Varyasyonel Formüllerin Düzenlenmesi

Dirichlet durumunda olduğu gibi, Neumann durumunda da birinci ve ikinci mertebe GIBC için elde edilen varyasyonel formülleri δ fonksiyonun türevlerini içermemektedir. Yani, kaplamanın iç yüzeyi Γ^δ 'nin üzerinde köşe tekillikleri bulunması halinde, ilk iki mertebe için çıkarılan bu varyasyonel formüller Neumann durumunda da geçerliliğini korur. Üçüncü mertebe GIBC için çıkarılan (3.43) varyasyonel formülüne gelince, bu da Dirichlet durumunda çıkarılan (3.26) varyasyonel formülü gibi δ 'nın ikinci mertebeden türevlerini içermektedir. Fakat burada, δ''' 'nü içeren terimlerin türev mertebesi kısmi integrasyonla indirgenmeye çalışılırsa, bu sefer $\bar{v}_2$ test fonksiyonunun ikinci mertebe türevlerinin bulunduğu bir terim (3.43) varyasyonel formülüne eklenip, onun zayıf formda kalmasını engeller. Bir başka deyişle, söz konusu problem bu haliyle standart Lagrange sonlu elemanları kullanılarak ayrıklaştırılmaz. Çeşitli yaklaşımlarla bu zorluğun üstesinden gelinebilir. Bu tezde, zayıf formda varyasyonel formüller elde etmek için bu yaklaşımların ikisi ele alınacaktır. Bu yaklaşımların ilkinde, yeni bilinmeyen bir fonksiyon probleme dahil edilerek, yukarıda elde edilen (3.43) ve (3.46) varyasyonel formüllerine üçüncü bir varyasyonel formül daha eklenecektir. İkinci yaklaşımda ise, $O(\delta_0^4)$ hata mertebesi gözetilerek, $N^{\delta,3}$ operatörünün yeni bir formu türetilcek ve bu yeni operatör kullanılarak, ilgili problem, iki varyasyonel formülün çözümünü bulmaya indirgenecektir.

Birinci Yaklaşım: Γ^δ 'nin üzerinde köşe tekillikleri bulunması halinde, (3.43) varyasyonel formülünde sıkıntı yaratan kısım dikkate alınarak,

$$\varphi^\delta(s) = \frac{1}{2} \delta^2 \delta'' \frac{\partial u^\delta}{\partial s}(s, 0) \quad (3.47)$$

şeklinde yeni bir bilinmeyen fonksiyon tanımlansın. Bu durumda, (3.47) ifadesi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k_1^2 \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta'' u^\delta \bar{v} ds &= -\frac{1}{2} k_1^2 \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} (\delta^2 u^\delta \bar{v}) \delta' ds \\ &= -k_1^2 \oint_{\Gamma} \delta (\delta')^2 u^\delta \bar{v} ds - \frac{1}{2} k_1^2 \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial}{\partial s} (u^\delta \bar{v}) ds \end{aligned} \quad (3.48)$$

ve

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} \delta^2 \delta'' \psi^\delta \bar{v} ds &= - \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} (\delta^2 \psi^\delta \bar{v}) \delta' ds \\
&= -2 \oint_{\Gamma} \delta (\delta')^2 \psi^\delta \bar{v} ds - \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial}{\partial s} (\psi^\delta \bar{v}) ds
\end{aligned} \tag{3.49}$$

kısmi integrasyonlarıyla birlikte gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^{\mathbb{R}}} \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} dx - k_0^2 \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} u^\delta \bar{v} dx - k_1^2 \oint_{\Gamma} \tilde{\Phi}_2^\delta u^\delta \bar{v} ds \\
&\quad + \frac{1}{2} k_1^2 \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \delta^2 \delta' \frac{\partial}{\partial s} (u^\delta \bar{v}) ds + \oint_{\Gamma} \tilde{\Phi}_1^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} ds \\
&\quad + \oint_{\Gamma} \varphi^\delta \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} ds + \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \delta^2 \delta' \psi^\delta \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} ds \\
&\quad + \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} ds - \oint_{\Gamma^R} i k_0 u^\delta \bar{v} ds \\
&\quad - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - i k_0 u^i \right) \bar{v} ds = 0
\end{aligned} \tag{3.50}$$

şeklinde istenilen zayıf forma dönüştürülür. Burada,

$$\tilde{\Phi}_1^\delta(s) = \delta(s) - \frac{1}{2} \delta^2(s) c(s) + \frac{1}{3} \delta^3(s) c^2(s) + \frac{2}{3} \delta^3(s) k_1^2, \tag{3.51}$$

$$\tilde{\Phi}_2^\delta(s) = \delta(s) + \frac{1}{2} \delta^2(s) c(s) + \frac{1}{3} \delta^3(s) k_1^2. \tag{3.52}$$

(3.46) varyasyonel formülü, δ kalınlık fonksiyonunu içermediği için köşe tekilliklerinden etkilenmez ve ikinci varyasyonel formül olarak kullanılmaya devam edilebilir. Üçüncü varyasyonel formüle gelince; o da, (3.47)'nin her iki tarafı $\bar{v}_3$ test fonksiyonu ile çarpılıp Γ üzerinde integre edilerek,

$$\oint_{\Gamma} \varphi^{\delta} \bar{v}_3 ds = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta'' \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v}_3 ds \quad (3.53)$$

şeklinde probleme dahil edilir. Son olarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta'' \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v}_3 ds &= -\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left(\delta^2 \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v}_3 \right) \delta' ds \\ &= -\oint_{\Gamma} \delta (\delta')^2 \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v}_3 ds - \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial s} ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial^2 u^{\delta}}{\partial s^2} \bar{v}_3 ds \\ &= -\oint_{\Gamma} \delta (\delta')^2 \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v}_3 ds - \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial s} ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \delta^2 \delta' \psi^{\delta} \bar{v}_3 ds \end{aligned} \quad (3.54)$$

kısmi integrasyonu ile δ 'nin ikinci mertebeden türevi yok edilerek (3.53) varyasyonel formülü

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \varphi^{\delta} \bar{v}_3 ds + \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \delta (\delta')^2 \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v}_3 ds + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \delta^2 \delta' \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial s} ds \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \delta^2 \delta' \psi^{\delta} \bar{v}_3 ds = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

şeklinde istenilen yapıya getirilir.

φ^{δ} fonksiyonu, katsayıları farklı olmak üzere (3.21) serisine açılırsa ve $\bar{v}_3$ ise (3.22) şekil fonksiyonları olarak seçilirse, böylece (3.46), (3.50) ve (3.55) varyasyonel formüllerinin çözümü $(K + 2K^{\Gamma})$ bilinmeyenli $(K + 2K^{\Gamma})$ denklemden oluşan bir LDS'nin çözümüne indirgenir.

İkinci Yaklaşım: Bu yaklaşımda, ilk olarak $O(\delta_0^4)$ hata mertebesi gözetilerek, $N^{\delta,3}$ operatörünün (2.71)'de verilen açık ifadesinin bir kısmı Maclaurin serisine açılacaktır.

Sonra da yenilenmiş operatör için varyasyonel formüller çıkarılacaktır. Buna göre; ilk önce (2.71)'de verilen $N^{\delta,3}$ operatörü aşağıdaki şekilde düzenlensin:

$$N^{\delta,3} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 c^2 + \frac{2}{3} \delta^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \delta'' - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial s} \delta^3 \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial s} - \left(\delta + \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 + \frac{1}{2} \delta^2 \delta'' + \delta (\delta')^2 \right) k_1^2 \quad (3.56)$$

Sonra da, (3.56)'nın birinci kısmındaki türev operatörleri arasındaki ifadeler

$$\begin{aligned} & \delta - \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 c^2 + \frac{2}{3} \delta^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \delta'' - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial s} \delta^3 \frac{\partial}{\partial s} \\ &= \frac{2}{3} \delta - \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 c^2 + \frac{2}{3} \delta^3 k_1^2 + \frac{1}{3} \delta \left(1 + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial s} \delta^3 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{3}{2} \delta \delta'' \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

şeklinde düzenlensin ve en sağdaki ifade

$$1 + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial s} \delta^3 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{3}{2} \delta \delta'' = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial s} \delta^3 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{3}{2} \delta \delta''} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1 + x^\delta} \right)^{-1} \quad (3.58)$$

biçiminde sembolik olarak gösterilsin. Böylece,

$$\frac{1}{1 + x^\delta} = 1 - x^\delta + O(\delta_0^4) \quad (3.59)$$

Maclaurin serisi (3.57)'de yerine koyularak, (3.56)'da verilen $N^{\delta,3}$ operatörü aşağıdaki şekilde yeniden türetilir:

$$\begin{aligned} \tilde{N}^{\delta,3} = & -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{2}{3} \delta - \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 c^2 + \frac{2}{3} \delta^3 k_1^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \delta \left(1 - \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial s} \delta^3 \frac{\partial}{\partial s} - \frac{3}{2} \delta \delta'' \right)^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial s} \\ & - \left(\delta + \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} k_1^2 \delta^3 + \frac{1}{2} \delta^2 \delta'' + \delta (\delta')^2 \right) k_1^2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Yeniden türetilmiş olan bu operatör incelendiğinde, hem u^δ 'nin ikinci mertebenin üstündeki türevlerinin hem de varyasyonel formülün zayıf formda kalmasını engelleyen

δ 'nın ikinci mertebeden türevini içeren ifadenin,

$$\psi^\delta = \left(1 - \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial s} \delta^3 \frac{\partial}{\partial s} - \frac{3}{2} \delta \delta''\right)^{-1} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \quad (3.61)$$

şeklinde tek bir bilinmeyen yardımcı fonksiyonda toplanabileceği görülür. Bu durumda,

$$\check{\Phi}_1^\delta(s) = \frac{2}{3} \delta(s) - \frac{1}{2} \delta^2(s) c(s) + \frac{1}{3} \delta^3(s) c^2(s) + \frac{2}{3} \delta^3(s) k_1^2, \quad (3.62)$$

$$\check{\Phi}_2^\delta(s) = \delta(s) + \frac{1}{2} \delta^2(s) c(s) + \frac{1}{3} \delta^3(s) k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2(s) \delta''(s) + \delta(s) (\delta'(s))^2 \quad (3.63)$$

olmak üzere, (3.14) varyasyonel formülü $\tilde{N}^{\delta,3}$ operatörü ve ψ^δ fonksiyonu için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k_0^2 \int_{\Omega^{\mathbb{R}}} u^\delta \bar{v} \, dx - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \check{\Phi}_1^\delta}{\partial s} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma} \check{\Phi}_1^\delta \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} \bar{v} \, ds \\ - k_1^2 \oint_{\Gamma} \check{\Phi}_2^\delta u^\delta \bar{v} \, ds - \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta' \psi^\delta \bar{v} \, ds - \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} \delta \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \bar{v} \, ds \\ - \oint_{\Gamma^R} i k_0 u^\delta \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - i k_0 u^i \right) \bar{v} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Bu varyasyonel formülde ikinci mertebeden türev içeren ifadeler, (3.41) ve (3.48) kısmi integrasyonları aracılığıyla yok edilirse,

$$\check{\Phi}_1^\delta(s) = \frac{2}{3} \delta(s) - \frac{1}{2} \delta^2(s) c(s) + \frac{1}{3} \delta^3(s) c^2(s) + \frac{2}{3} \delta^3(s) k_1^2, \quad (3.65)$$

$$\check{\Phi}_2^\delta(s) = \delta(s) + \frac{1}{2} \delta^2(s) c(s) + \frac{1}{3} \delta^3(s) k_1^2 \quad (3.66)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^R} \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k_0^2 \int_{\Omega^R} u^\delta \bar{v} \, dx + \oint_{\Gamma} \Phi_1^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \, ds - k_1^2 \oint_{\Gamma} \Phi_2^\delta u^\delta \bar{v} \, ds \\
& + \frac{1}{2} k_1^2 \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \delta^2 \delta' \frac{\partial}{\partial s} (u^\delta \bar{v}) \, ds - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \frac{\partial}{\partial s} (\delta \psi^\delta) \bar{v} \, ds \\
& - \oint_{\Gamma^R} i k_0 u^\delta \bar{v} \, ds - \oint_{\Gamma^R} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{n}} - i k_0 u^i \right) \bar{v} \, ds = 0
\end{aligned} \tag{3.67}$$

zayıf varyasyonel formülü çıkarılmış olur. İkinci varyasyonel formül ise, (3.61) önce

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial s} - \left(1 - \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial s} \delta^3 \frac{\partial}{\partial s} - \frac{3}{2} \delta \delta'' \right) \psi^\delta = 0 \tag{3.68}$$

şeklinde düzenlenip, sonra da bu eşitliğin her iki tarafı $\bar{v}_2$ test fonksiyonu ile çarpılıp Γ üzerinde integre edilmesiyle

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \bar{v}_2 \, ds - \oint_{\Gamma} \left(1 - \frac{3}{2} \delta \delta'' \right) \psi^\delta \bar{v}_2 \, ds + 3 \oint_{\Gamma} \delta \delta' \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \bar{v}_2 \, ds \\
& + \oint_{\Gamma} \delta^2 \frac{\partial^2 \psi^\delta}{\partial s^2} \bar{v}_2 \, ds = 0
\end{aligned} \tag{3.69}$$

şeklinde çıkarılır. Son olarak; bu varyasyonel formül

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} \delta^2 \frac{\partial^2 \psi^\delta}{\partial s^2} \bar{v}_2 \, ds &= - \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} (\delta^2 \bar{v}_2) \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \, ds \\
&= -2 \oint_{\Gamma} \delta \delta' \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \bar{v}_2 \, ds - \oint_{\Gamma} \delta^2 \frac{\partial \psi^\delta}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial s} \, ds
\end{aligned} \tag{3.70}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \oint_{\Gamma} \delta \delta'' \psi^\delta \bar{v}_2 \, ds &= - \frac{3}{2} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} (\delta \psi^\delta \bar{v}_2) \delta' \, ds \\
&= - \frac{3}{2} \oint_{\Gamma} (\delta')^2 \psi^\delta \bar{v}_2 \, ds - \frac{3}{2} \oint_{\Gamma} \delta \delta' \frac{\partial}{\partial s} (\psi^\delta \bar{v}_2) \, ds
\end{aligned} \tag{3.71}$$

kısmi integrasyonları aracılığıyla,

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma} \frac{\partial u^{\delta}}{\partial s} \bar{v}_2 ds - \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \left(1 + \frac{3}{2}(\delta')^2\right) \psi^{\delta} \bar{v}_2 ds - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \delta \delta' \frac{\partial \psi^{\delta}}{\partial s} \bar{v}_2 ds \\
& - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \delta \delta' \psi^{\delta} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial s} ds - \oint_{\Gamma} \delta^2 \frac{\partial \psi^{\delta}}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial s} ds = 0
\end{aligned} \tag{3.72}$$

şeklinde arzu edilen zayıf forma dönüştürülür. Böylece, Neumann durumunda kaplamanın iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunsan bile geçerliliğini koruyacak (3.67) ve (3.72) varyasyonel formül çifti elde edilmiş oldu.

3.4 Sayısal Sonuçlar

Yukarıda; hem Dirichlet hem de Neumann durumları için, gerçek ve yaklaşık modellerle ifade edilmiş saçılma problemlerinin SEY ile nasıl çözüleceği ayrıntılı olarak ele alınmıştı. Bu bölümde ise, SEY'e dayalı bu çözüm tekniği ile üretilen sayısal sonuçların karşılaştırmaları verilmektedir. Böylece, üçüncü mertebeye kadar tanımlanmış GIBC'lerin doğruluğu ve geçerliliği sayısal olarak sınanmaktadır. Bu sınama işlemi, gerek gerçek ve yaklaşık modeller için dış ortamda tanımlı bir Γ^C çemberi üzerinde 100 noktada elde edilen toplam alanların genlik ve fazlarının karşılaştırılmasıyla, gerekse de bu alanlar arasındaki farkın (2.16) koşuluna göre irdelenmesi ile gerçekleştirilmektedir.

Aşağıda verilen simülasyon sonuçlarında, yaklaşık modelin hatası

$$E_s = \int_{\Gamma^C} |u_-^{\delta} - u^{\delta}| ds \tag{3.73}$$

mutlak hata fonksiyonu ve

$$E_r = \frac{\int_{\Gamma^C} |u_-^{\delta} - u^{\delta}| ds}{\int_{\Gamma^C} |u_-^{\delta}| ds} \tag{3.74}$$

görelî hata fonksiyonu ile hesaplanmaktadır. E_s hata fonksiyonu (2.16)'daki hata olarak alınıp, sonra da bu koşulun her iki tarafının logaritması alınırsa

$$\log(E_s) \cong \log(a) + (m+1) \log(\delta_0), \quad a \text{ sabit} \tag{3.75}$$

yazılabilir. (3.75), eğimi $(m + 1)$ olan bir doğru denklemdir. Bu durumda, m.mertebe GIBC kullanılarak tanımlanmış yaklaşık problemde δ_0 'ın değişimine göre oluşan hatanın değişimi (3.75) doğrusunda göz önüne alınırsa, bu doğrunun eğiminin $(m + 1)$ olması beklenir.

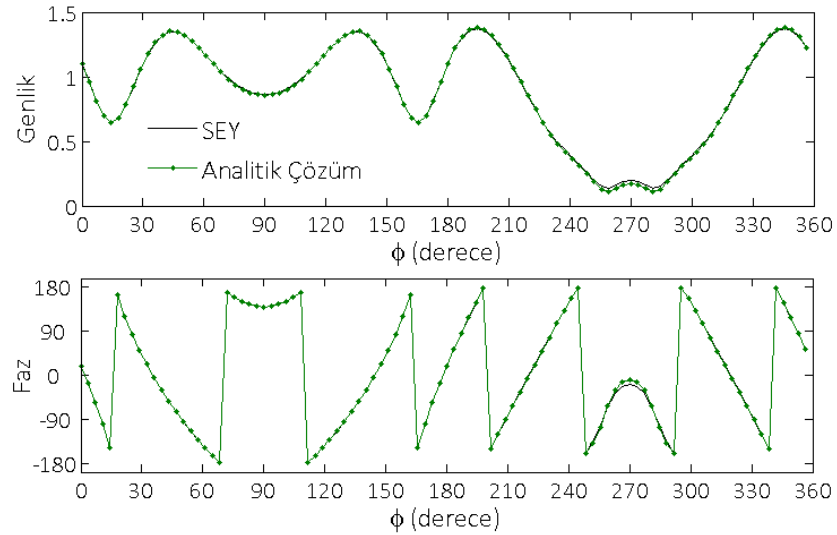
Bu çalışmada, SEY ile elde edilen tüm sayısal sonuçlar “FreeFem++” [49] adlı bir yazılım kullanılarak üretilmiştir. Freefem++'da hesaplama bölgesi, Delaunay-Voronoi algoritması [50] ile üçgen şeklinde sonlu elemanlara bölünmektedir. Tüm uygulamalar için bu sonlu elemanlar üzerinde sürekli parçalı lineer şekil fonksiyonları [48] seçilmiştir. Ayrıca, $d = (\cos \theta, \sin \theta)$ gelen dalga'nın yayılım yönü olmak üzere, aşağıdaki örnekler için, (3.1)'de verilen (kaplanmış cismi aydınlatan) gelen alanın

$$u^i(x) = e^{-ik_0 x \cdot d} \quad (3.76)$$

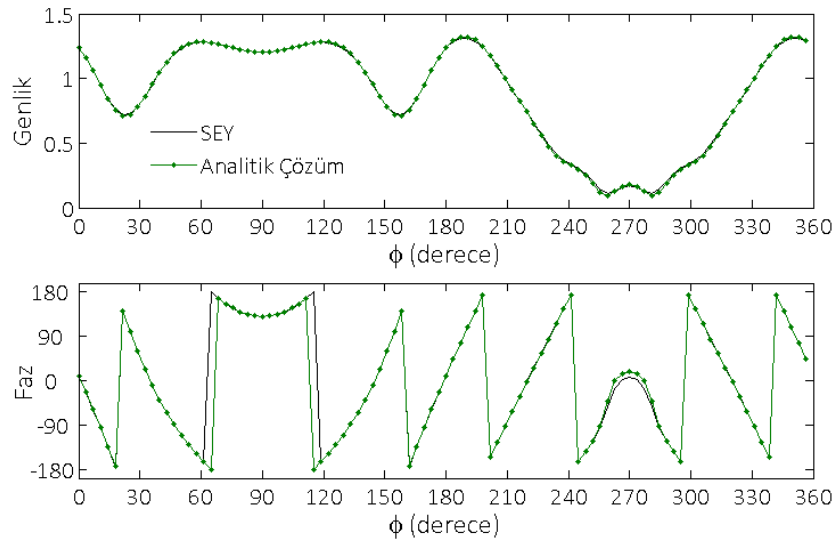
şeklinde zaman-harmonik bir düzlemsel dalga olduğu varsayılmıştır. Burada; θ , x_1 eksenini ile d arasında saatin tersi yönünde tanımlı açıdır.

Freefem++ kullanılarak SEY ile üretilen sayısal sonuçların yeteri kadar doğru olduğunu göstermek amacıyla, ilk önce, analitik olarak kolayca çözülebilen bir geometri için problem ele alınmıştır. Kaplamanın iç yüzeyi Γ^δ ve dış yüzeyi Γ^δ dairesel olarak seçildiği takdirde, problem dairesel bir simetriye sahip olacaktır. Bu durumda, $u_{s,-}^\delta$ ile u_+^δ alanlarının Fourier serisine açılmasıyla problemi analitik olarak çözmek mümkündür [51]. Bu problemin analitik çözümü Dirichlet ve Neumann durumları için EK-C'de verilmektedir. Buna göre; ilk örnekte 0.45 m yarıçapa sahip dairesel kesitli bir PEC üzerine 0.5 m yarıçapa sahip, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenlik katsayısı $\sigma_1 = 0.1 \text{ (S.m}^{-1}\text{)}$ olan dairesel kesitli bir dielektrik malzeme yerleştirildiği varsayılmıştır. Bu kaplanmış cisim, çalışma frekansı 500 MHz olan gelen dalga ile $\theta = \pi/2$ açısıyla aydınlatılıp, toplam alan 1 m yarıçaplı Γ^C çemberi üzerinde hesaplanmıştır. SEY'le ve Fourier serisinde alttan-üstten 20 terim alınarak analitik yöntemle hesaplanan toplam alanların genlik ve fazlarının karşılaştırmaları Şekil 3.1'de verilmektedir. SEY'de hesaplama bölgesi 1.7 m yarıçapa sahip Γ^R çemberi ile sınırlandırılmıştır. Ayrıca, λ (bu örnek için $\lambda = 0.6 \text{ m}$) boş uzayın dalga boyu olmak üzere, üçgenlere bölünmüş hesaplama bölgesinde ortalama hücre boyutu yaklaşık

olarak 0.01λ seçilmiştir. Toplam alanın Şekil 3.1’de gösterilen genlik ve fazlarının birbirine yeterince yakın olması, SEY’in yukarıda verilen parametreler için yeterli doğrulukta sonuç ürettiğini gösterir. Bundan sonraki tüm uygulamalarda ortalama hücre boyutu kabaca 0.01λ alınmıştır.



Şekil 3. 1 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ ($S \cdot m^{-1}$) olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı kaplama için SEY ve analitik yöntemden üretilen toplam alanın 1 m yarıçaplı Γ^C çemberi üzerindeki genlik ve fazları



Şekil 3. 2 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ ($S \cdot m^{-1}$) olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı kaplama için SEY ve analitik yöntemden üretilen toplam alanın 1 m yarıçaplı Γ^C çemberi üzerindeki genlik ve fazları

Yukarıda verilen uygulama, tüm parametreler aynı kalmak şartıyla Neumann durumu için sayısal olarak hesaplandığında, SEY ve analitik yöntemle üretilen toplam alanların

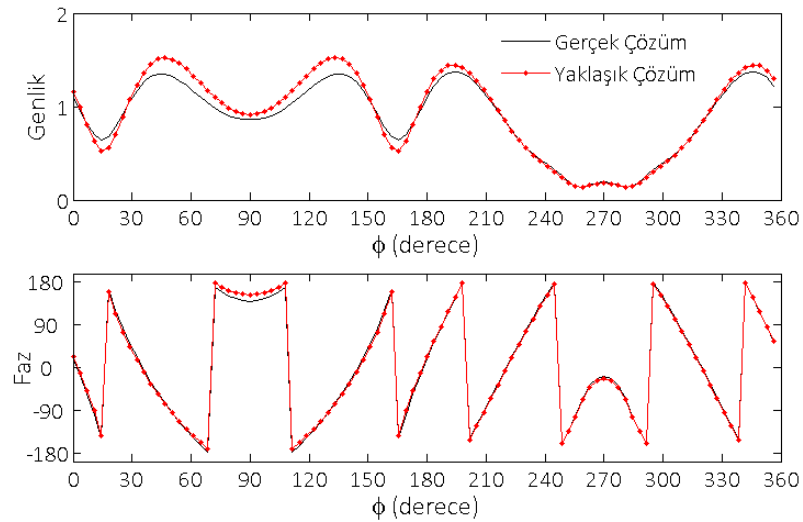
genlik ve faz karşılaştırmaları ise Şekil 3.2’de gösterilmektedir.

İnce kaplamalar için SEY ile yeterli hassaslıkta sonuçlar üretildikten sonra, şimdi gerçek çözüm ve üçüncü mertebeye kadar yaklaşık çözümler karşılaştırılacaktır. Yukarıda Dirichlet durumunda ele alınan örnek, SEY ile yaklaşık model için sayısal olarak hesaplandığında üçüncü mertebeye kadar olan mutlak hata ve göreceli hata Çizelge 3.1’de verilmiştir.

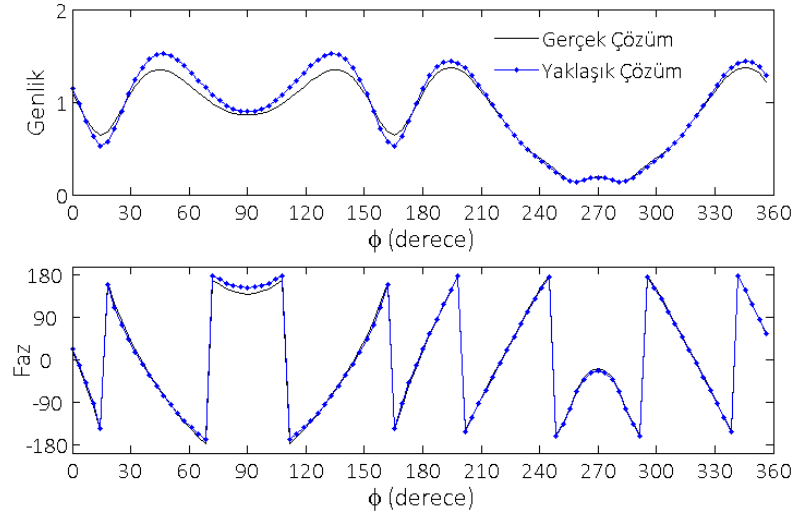
Çizelge 3. 1 $\delta_0 = \lambda/12$ kalınlıklı dairesel kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve göreceli hatası

	Dirichlet Durumunda		Neumann Durumunda	
	E_s	E_r	E_s	E_r
1.mertebe	$6.63 \cdot 10^{-1}$	$7.51 \cdot 10^{-3}$	$3.96 \cdot 10^{-1}$	$4.49 \cdot 10^{-3}$
2.mertebe	$6.48 \cdot 10^{-1}$	$7.33 \cdot 10^{-3}$	$4.05 \cdot 10^{-1}$	$4.59 \cdot 10^{-3}$
3.mertebe	$2.93 \cdot 10^{-1}$	$3.32 \cdot 10^{-3}$	$1.53 \cdot 10^{-1}$	$1.74 \cdot 10^{-3}$

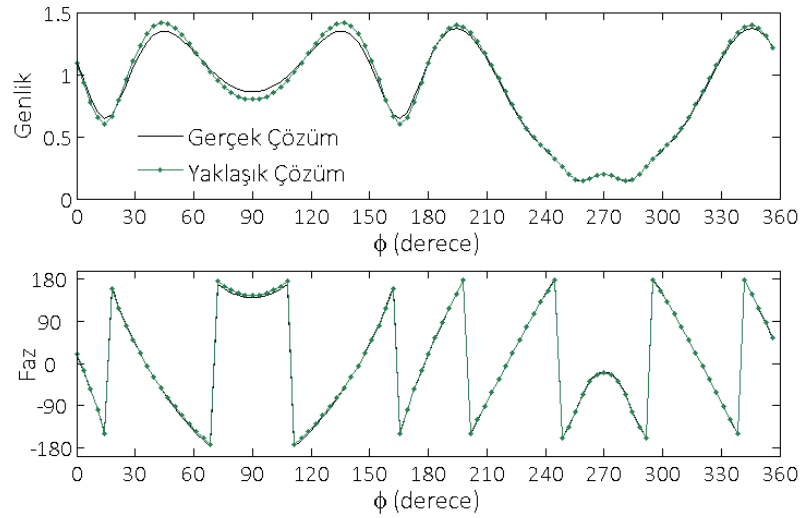
Gerçek ve yaklaşık alanların genlik ve fazlarının karşılaştırması ise Şekil 3.3’de gösterilmektedir.



(a) 1.mertebe GIBC için



(b) 2.mertebe GIBC için



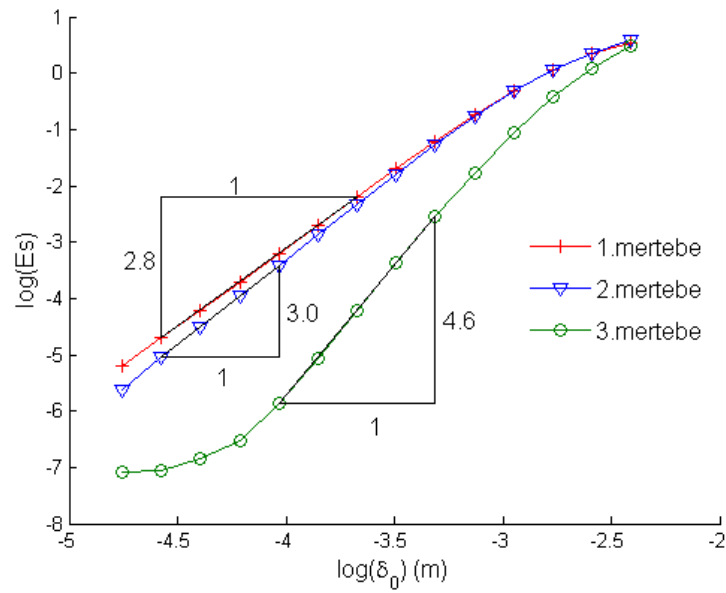
(c) 3.mertebe GIBC için

Şekil 3. 3 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ ($S \cdot m^{-1}$) olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları

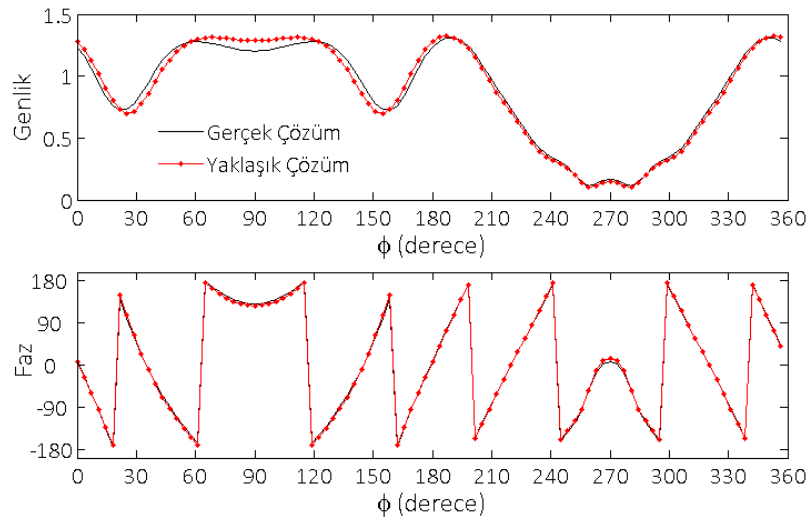
Bu örnek için, (3.75)'de denklemi verilen doğruların eğimleri yaklaşık $m_1 = 2.8$, $m_2 = 3.0$ ve $m_3 = 4.6$ 'dır. Şekil 3.4'de açıkça görüldüğü gibi; üçüncü mertebeden GIBC ile üretilen sonuçlar, gerçek çözüme, ilk iki mertebeden GIBC'e ile üretilenlerden daha çok yakınsamaktadır.

Tüm parametreler aynı kalmak koşuluyla, problem Neumann durumunda çözüldüğünde, üçüncü mertebeye kadar olan mutlak ve göreceli hatalar Çizelge 3.1'de

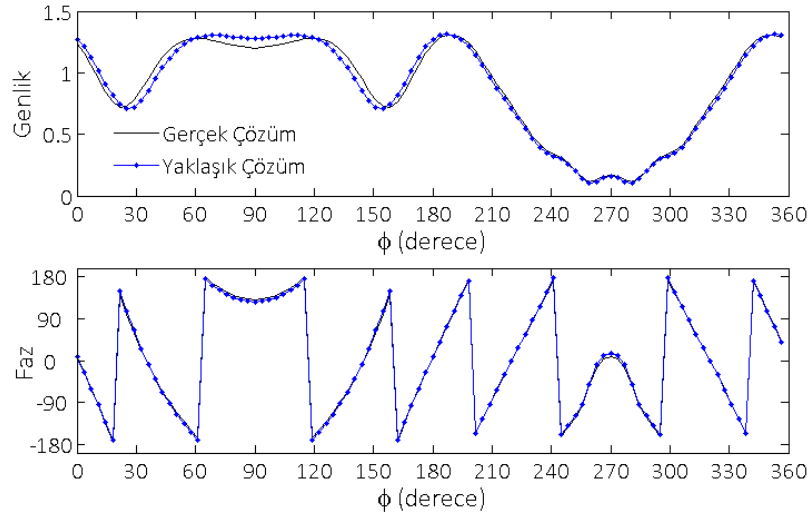
verilmişti. Bu hataların hesaplandığı gerçek ve yaklaşık alanların karşılaştırması ise Şekil 3.5’de verilmiştir.



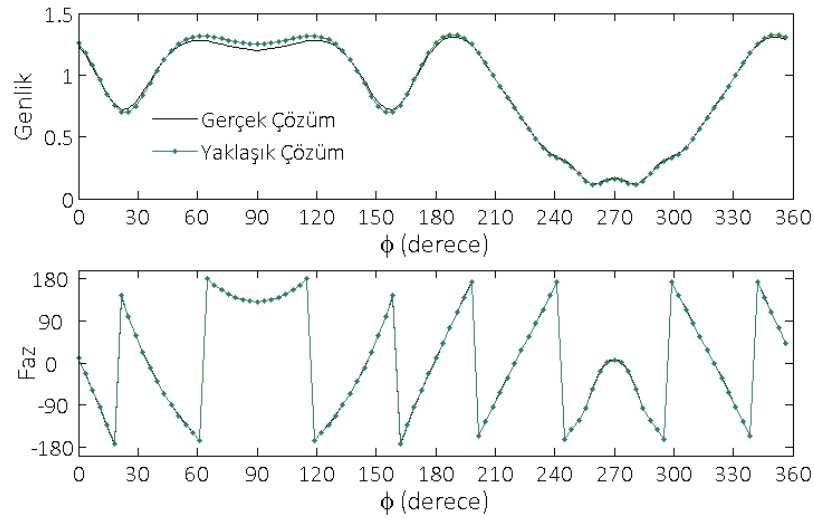
Şekil 3. 4 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1 \text{ (S.m}^{-1}\text{)}$ olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı kaplama için (3.75)’de denklemi verilen doğruların $[0.015\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği



(a) 1.mertebe GIBC için



(b) 2.mertebe GIBC için



(c) 3.mertebe GIBC için

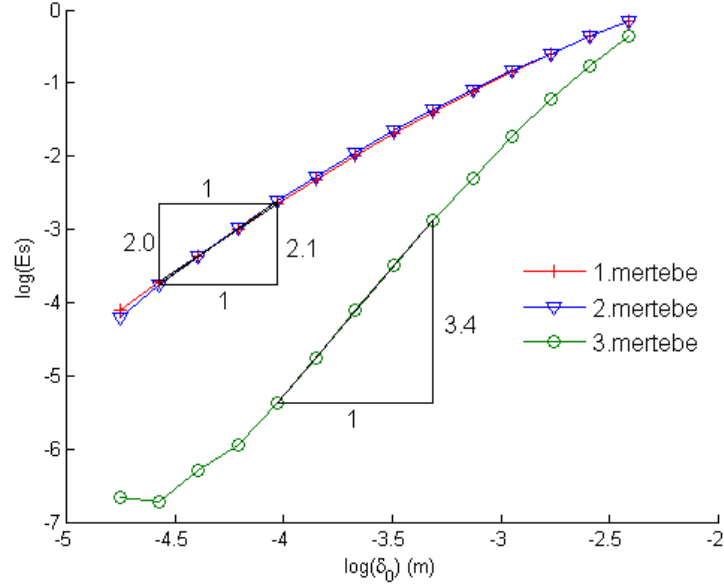
Şekil 3. 5 Neumann dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m⁻¹) olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları

Söz konusu örnek için, $m_1 = 2.0$, $m_2 = 2.1$ ve $m_3 = 3.4$ eğimlerine sahip olan ve (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.015\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği aşağıda gösterilmektedir. Burada da, birinci ve ikinci mertebe GIBC ile elde edilen sonuçlar birbirine çok yakinken, üçüncü mertebe GIBC ile elde edilenler ince kalınlıklı kaplamalar için açık şekilde gerçek çözüme daha yakındır.

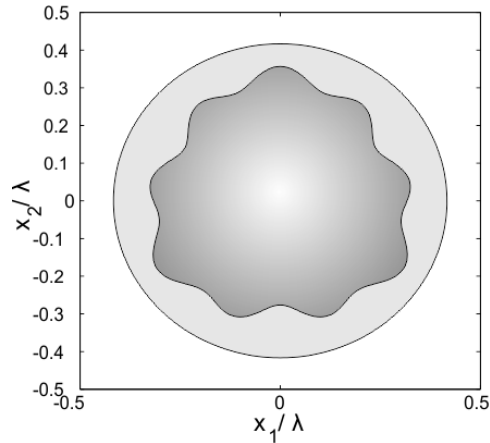
İkinci örnekte; yarıçapı yarıya indirilerek, kaplamasının kalınlığı

$$\delta(t) = \delta_0(1 - 0.4 \sin(3t) \cos(6t)), \quad t \in [0, 2\pi), \quad (3.1)$$

fonksiyonuna göre değişen dairesel bir cisim ele alınmıştır (Şekil 3.7). Değişken kalınlıklı bu kaplama için Γ^R çemberinin yarıçapı 1.5 m alınıp, diğer parametreler aynı tutulmuştur.



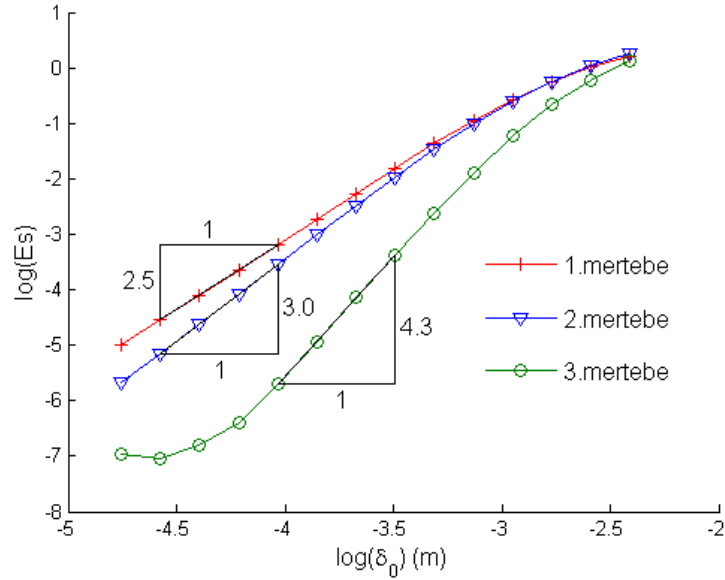
Şekil 3. 6 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1 \text{ (S. m}^{-1}\text{)}$ olan dairesel kesitli ve sabit kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemleri verilen doğruların $[0.015\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği



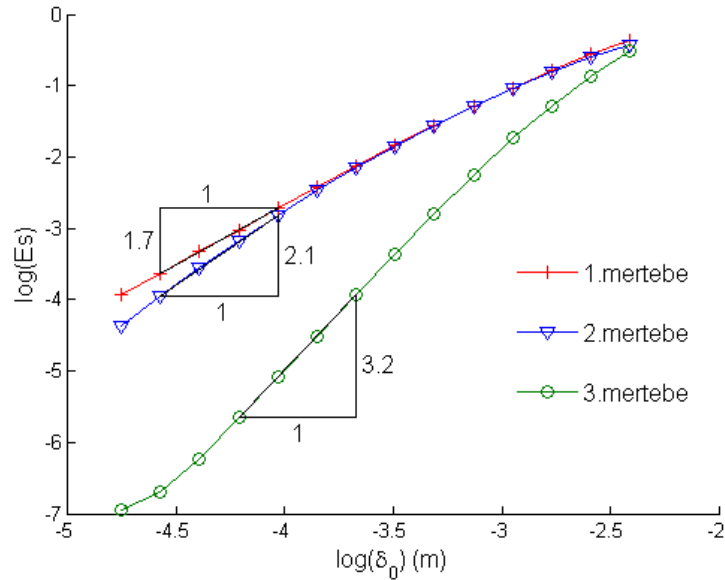
Şekil 3. 7 Değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/10$) ve $5\lambda/12$ yarıçaplı dairesel kaplama

Dirichlet durumu için (3.75) doğru denkleminin, SEY ile üretilen sayısal sonuçlara göre oluşturulan grafikleri Şekil 3.8'de gösterilmiştir. Bu doğruların üçüncü mertebeye kadar eğimleri yaklaşık $m_1 = 2.5$, $m_2 = 3.0$ ve $m_3 = 4.3$ 'dir. Neumann durumunda ise bu

eğimler kabaca $m_1 = 1.7$, $m_2 = 2.1$ ve $m_3 = 3.2$ olup, (3.75) doğru grafikleri ise Şekil 3.9'da verilmiştir. Bu örnek için, her ne kadar Neumann durumunda eğimler beklenenin biraz altındaysa da, GIBC'in mertebesi arttıkça sonuçların gerçek değerlere yakınsadığı ve (3.75) doğrularının eğimlerinin arttığı görülmektedir.



Şekil 3. 8 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ ($S.m^{-1}$) olan dairesel kesitli ve değişken kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.015\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği

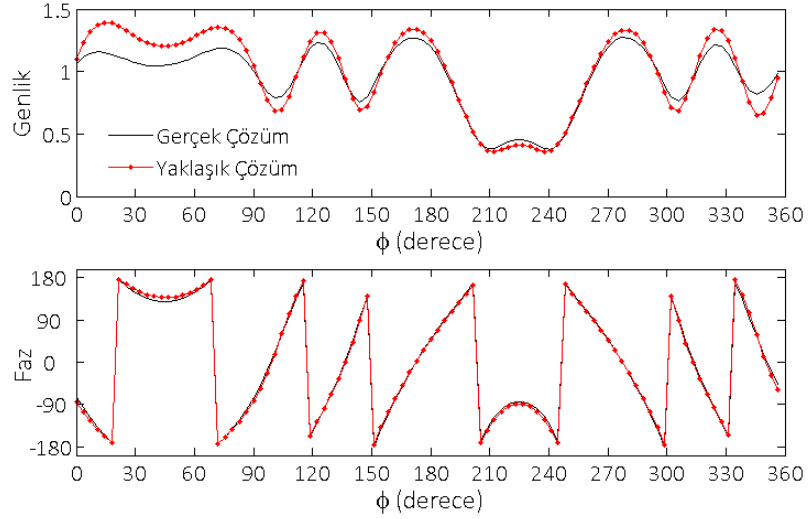


Şekil 3. 9 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ ($S.m^{-1}$) olan dairesel kesitli ve değişken kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.015\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği

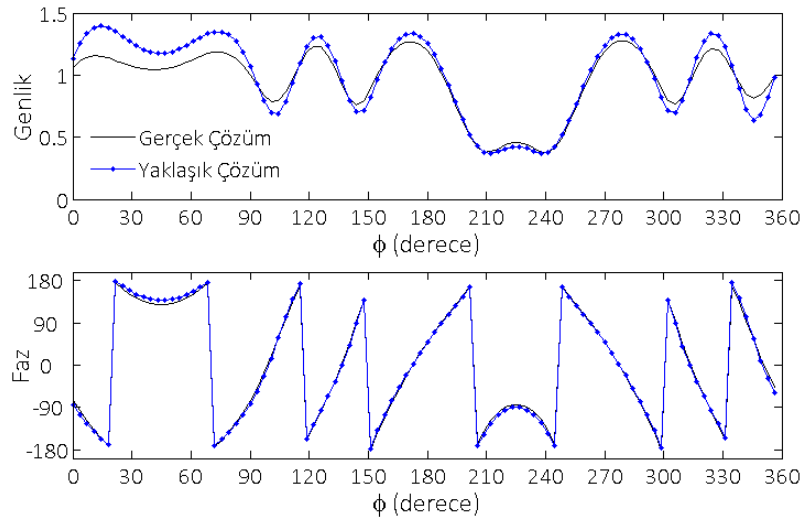
Çizelge 3. 2 Ortalama kalınlığı $\delta_0 = \lambda/10$ olan değişken kalınlıklı dairesel kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve göreceli hatası

	Dirichlet Durumunda		Neumann Durumunda	
	E_s	E_r	E_s	E_r
1.mertebe	$7.24 \cdot 10^{-1}$	$7.61 \cdot 10^{-3}$	$4.28 \cdot 10^{-1}$	$4.54 \cdot 10^{-3}$
2.mertebe	$7.19 \cdot 10^{-1}$	$7.55 \cdot 10^{-3}$	$4.22 \cdot 10^{-1}$	$4.48 \cdot 10^{-3}$
3.mertebe	$4.61 \cdot 10^{-1}$	$4.85 \cdot 10^{-3}$	$2.25 \cdot 10^{-1}$	$2.65 \cdot 10^{-3}$

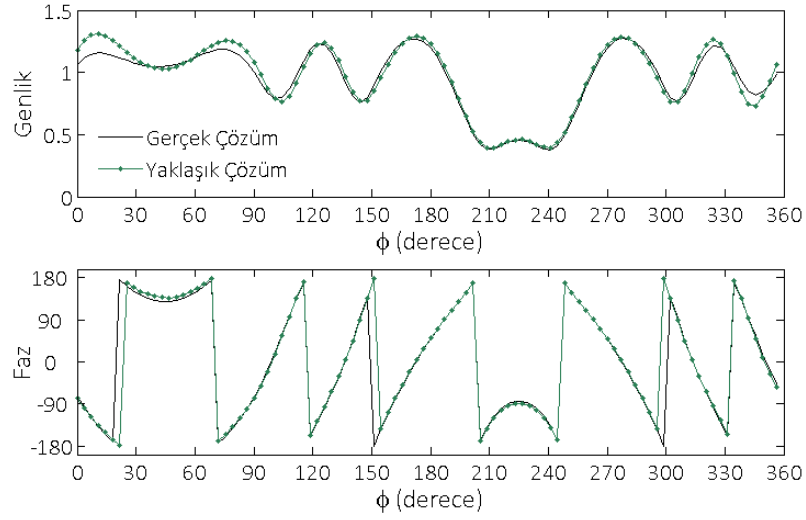
Değişken kalınlıklı dairesel kesitli kaplama için ele alınan uygulamada $\delta_0 = 0.6\text{m} = \lambda/10$ olarak seçildiğinde, Dirichlet ve Neumann durumlarında üçüncü mertebeye kadar olan mutlak ve göreceli hatalar Çizelge 3.2'de verilmiştir.



(a) 1.mertebe GIBC için



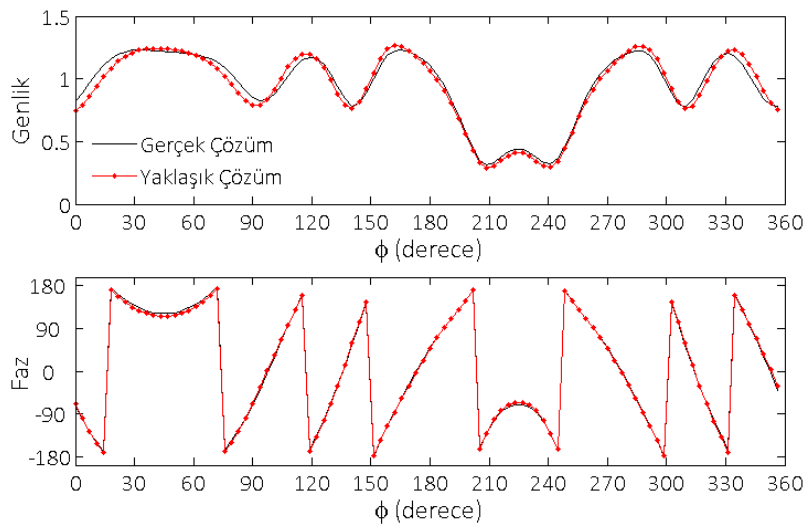
(b) 2.mertebe GIBC için



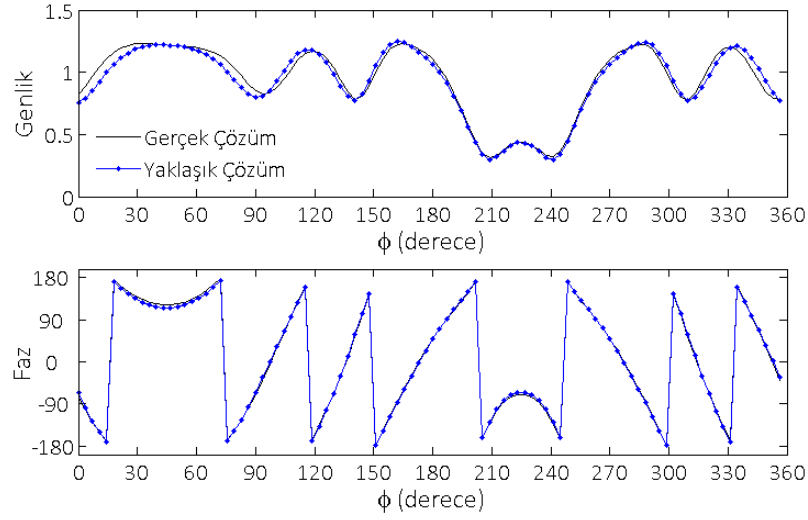
(c) 3.mertebe GIBC için

Şekil 3. 10 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1 \text{ (S.m}^{-1}\text{)}$ olan dairesel kesitli ve değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/10$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları

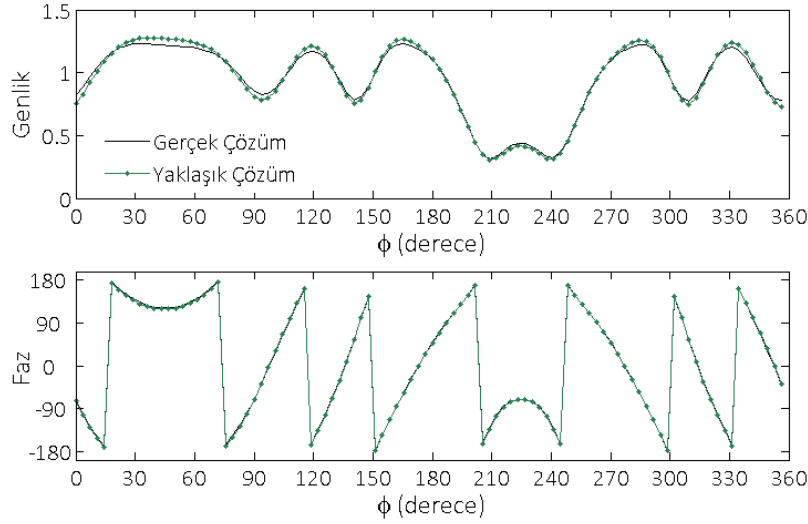
Şekil 3.10 ve Şekil 3.11’de ise Dirichlet ve Nuemann durumları için gerçek alan ile yaklaşık alanların genlik ve faz karşılaştırmaları gösterilmektedir. Görüldüğü gibi; iki durumda da, GIBC’in mertebesi büyüdükçe yaklaşık çözümler gerçek çözüme daha iyi yakınsamaktadır. Ayrıca, kaplamanın kalınlığı, iletkenin büyüklüğüne göre yaklaşık iki kat artmasına rağmen, sayısal sonuçlar göstermektedir ki; GIBC ifadeleri geçerliliğini korumuştur. Bunun nedeni, dielektrik kaplamanın kalınlığı δ_0 ’ın cisme göre değil, gelen alanın dalga boyuna göre büyük olmaması gerektiridir.



(a) 1.mertebe GIBC için



(b) 2.mertebe GIBC için



(c) 3.mertebe GIBC için

Şekil 3.11 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1 \text{ (S.m}^{-1}\text{)}$ olan dairesel kesitli ve değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/10$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları

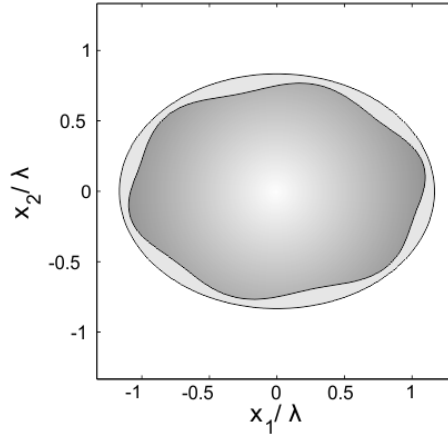
Şu ana kadar ele alınan uygulamalarda kaplamanın dış yüzeyi Γ 'nin eğriliği sabitti. Sıradaki uygulamada ise

$$X_\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{7\lambda}{6} \cos t \\ \frac{5\lambda}{6} \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi), \quad (3.2)$$

parametrik denklemiyle ifade edilen ve eğriliği sabit olmayan bir yüzey seçilmiştir. Bu yüzey üzerinde tanımlı kalınlık fonksiyonu

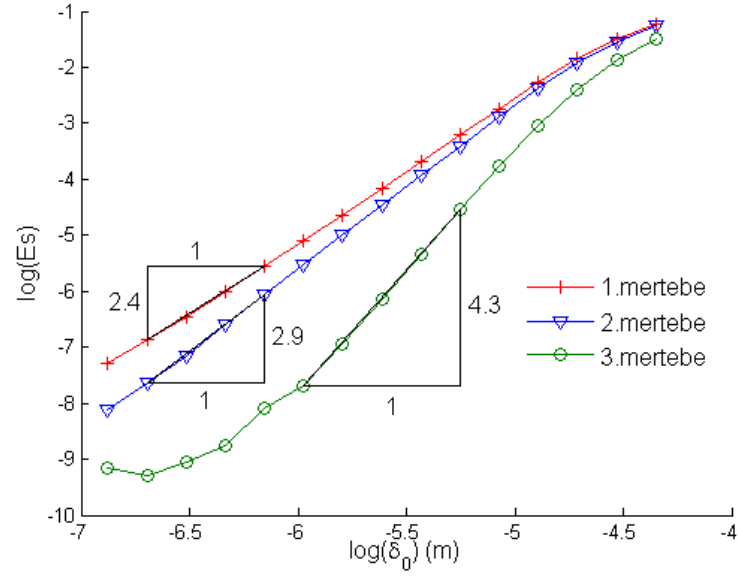
$$\delta(t) = \delta_0(1 - 0.4 \sin(6t)), \quad t \in [0, 2\pi), \quad (3.3)$$

şeklinde alınırsa, kaplanmış cismin geometrisi şekil 3.12'deki gibi olur.

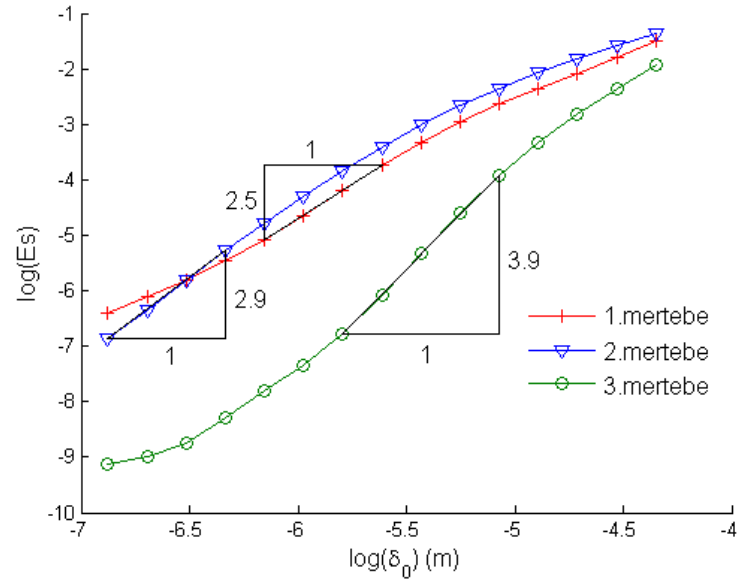


Şekil 3.12 Değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$) elips kaplama

Üzerindeki kaplamanın dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$) olan söz konusu kaplanmış cisim, $\theta = 0$ açısıyla 5 GHz frekansa sahip bir düzlemsel dalga ile aydınlatılmış olsun. Bu durumda boş uzaydaki dalga boyu $\lambda = 6$ cm olur. Hesaplama bölgesinin sınırı Γ^R 'nin yarıçapı 15 cm seçilerek, hem Dirichlet hem de Neumann durumları için 10 cm yarıçaplı bir Γ^C çemberi üzerindeki toplam alan değerleri SEY ile üretilmiştir. Bu sayısal değerlere göre oluşan (3.75) doğrularının $[0.017\lambda, 0.22\lambda]$ aralığındaki grafiği Dirichlet durumu için Şekil 3.13'de, Neumann durumu için ise Şekil 3.14'de verilmiştir. Dirichlet durumunda bu doğruların eğimleri yaklaşık olarak; birinci mertebe için $m_1 = 2.4$, ikinci mertebe için $m_2 = 2.9$ ve üçüncü mertebe için ise $m_3 = 4.3$ 'tür. Neumann durumunda ise Şekil 3.14'de görüldüğü gibi; çok küçük δ_0 değerlerinde ikinci mertebe için elde edilen eğim ($m_2 = 2.9$), birinci mertebe için elde edilen eğimden ($m_1 = 2.5$) daha büyüktür. δ_0 değerleri çok az büyüdüğünde ikinci mertebenin mutlak hatası birinci mertebeyi geçmekte ve eğimi birinci mertebeninkine yaklaşmaktadır. Üçüncü mertebe için ise eğim $m_3 = 3.9$ olup, bu mertebede ilk iki mertebeye göre yine çok daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 3. 13 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ ($S \cdot m^{-1}$) olan elips kesitli ve değişken kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.017\lambda, 0.22\lambda]$ aralığındaki grafiği

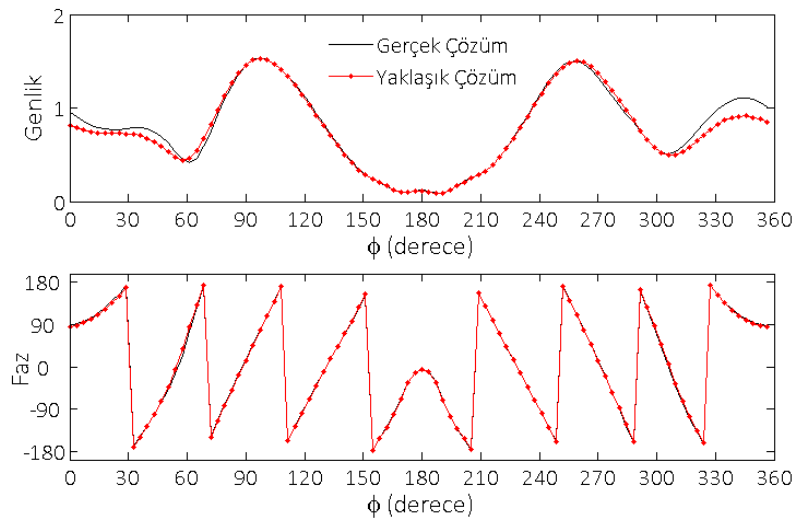


Şekil 3. 14 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ ($S \cdot m^{-1}$) olan elips kesitli ve değişken kalınlıklı kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.017\lambda, 0.22\lambda]$ aralığındaki grafiği

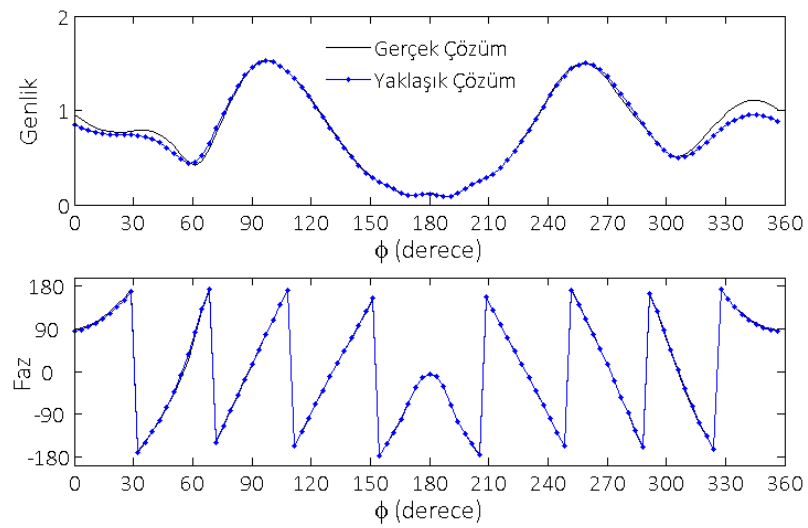
$\delta_0 = 0.5 \text{ cm} = \lambda/12$ olarak seçildiğinde, üçüncü mertebeye kadar hesaplanan mutlak ve göreceli hatalar Çizelge 3.3'de verilmiştir. Şekil 3.15 ve Şekil 3.16'da ise Dirichlet ve Neumann durumları için gerçek alan ile yaklaşık alanların karşılaştırmaları gösterilmektedir.

Çizelge 3. 3 Ortalama kalınlığı $\delta_0 = \lambda/12$ olan değişken kalınlıklı elips kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve göreceli hatası

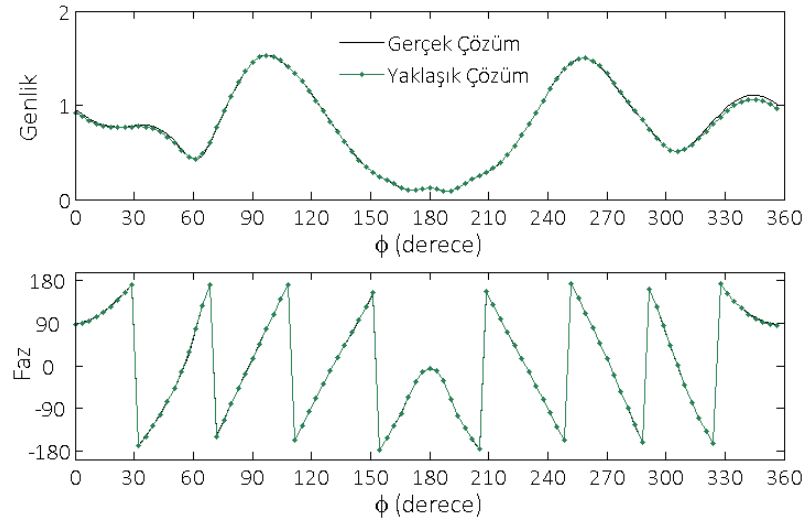
	Dirichlet Durumunda		Neumann Durumunda	
	E_s	E_r	E_s	E_r
1.mertebe	$0.36 \cdot 10^{-1}$	$0.45 \cdot 10^{-3}$	$0.48 \cdot 10^{-1}$	$0.48 \cdot 10^{-3}$
2.mertebe	$0.29 \cdot 10^{-1}$	$0.37 \cdot 10^{-3}$	$0.64 \cdot 10^{-1}$	$0.65 \cdot 10^{-3}$
3.mertebe	$0.09 \cdot 10^{-1}$	$0.11 \cdot 10^{-3}$	$0.08 \cdot 10^{-1}$	$0.09 \cdot 10^{-3}$



(a) 1.mertebe GIBC için

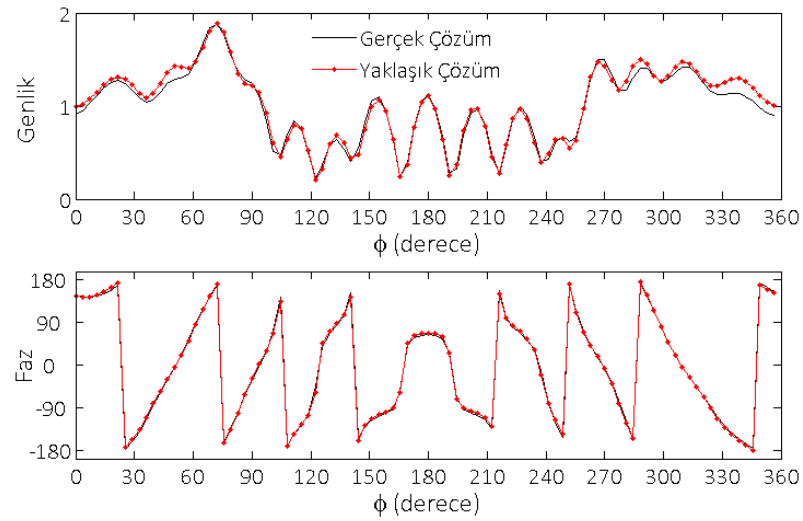


(b) 2.mertebe GIBC için

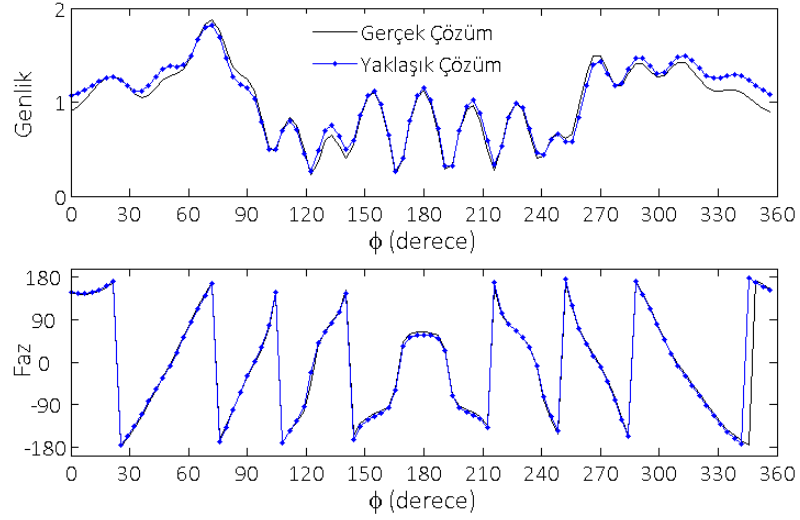


(c) 3.mertebe GIBC için

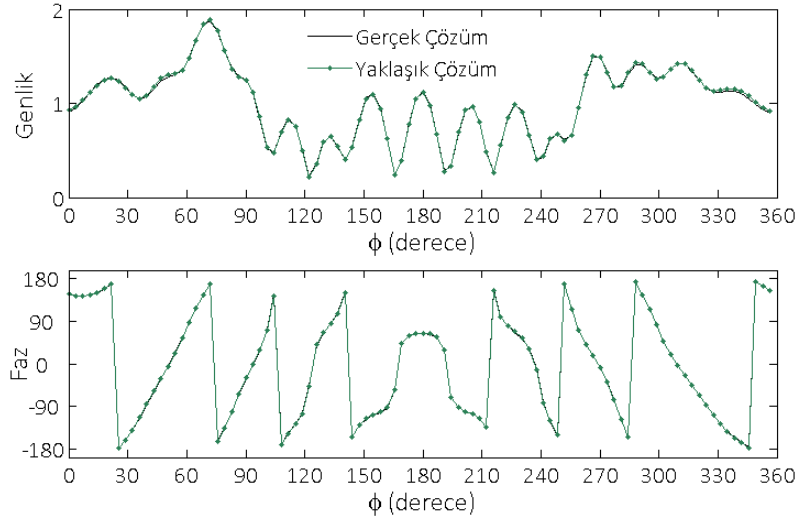
Şekil 3. 15 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ ($S.m^{-1}$) olan elips kesitli ve değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları



(a) 1.mertebe GIBC için



(b) 2.mertebe GIBC için



(c) 3.mertebe GIBC için

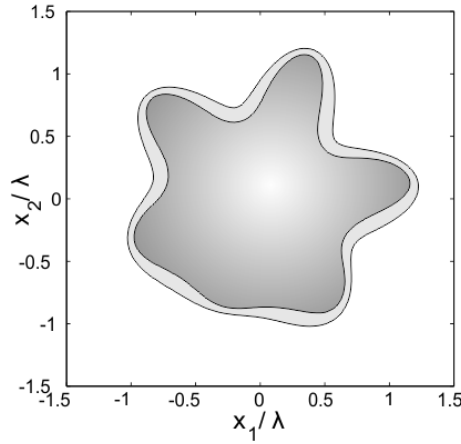
Şekil 3. 16 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01 \text{ (S.m}^{-1}\text{)}$ olan elips kesitli ve değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları

Sıradaki uygulamada, dielektrik kaplamanın kalınlığı (3.79) fonksiyonuyla ve dış yüzeyi Γ' 'nin

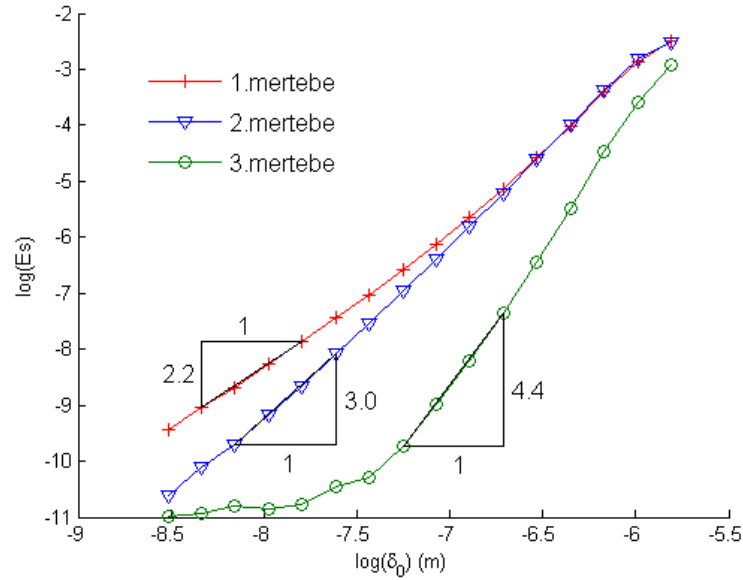
$$X_{\Gamma} = \begin{pmatrix} \left(\lambda + \frac{\lambda}{10} \sin(6t) + \frac{3\lambda}{20} \cos(5t) + \frac{\lambda}{20} \cos(6t) \right) \cos t \\ \left(\lambda + \frac{\lambda}{10} \sin(6t) + \frac{3\lambda}{20} \cos(5t) + \frac{\lambda}{20} \cos(6t) \right) \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi), \quad (3.4)$$

parametrik denklemiyle ifade edildiği, iç bükey ve dış bükey eğri parçalarından oluşan

bir yüzeye sahip çok daha karmaşık bir geometri ele alınmıştır (Şekil 3.17).



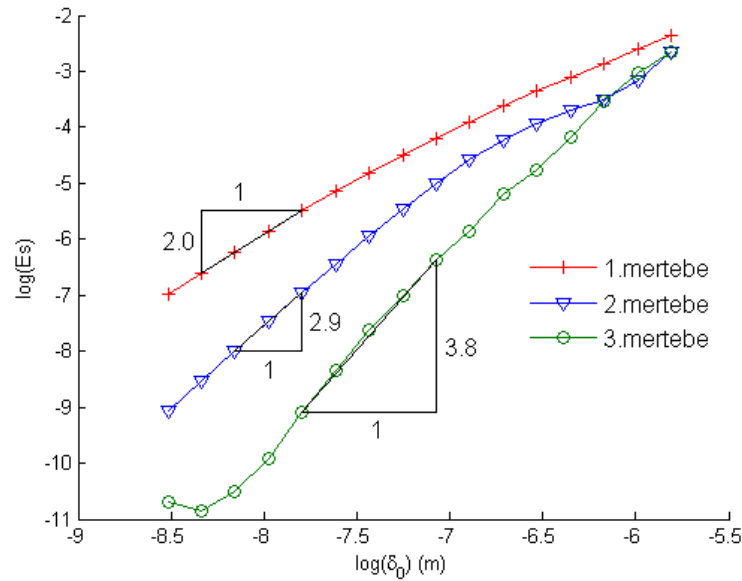
Şekil 3.17 Değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12$), iç bükey ve dış bükey yüzeye sahip kaplama



Şekil 3. 18 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S.m^{-1}) olan karmaşık bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için (3.75)'de denklemleri verilen doğruların $[0.01\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği

Dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S.m^{-1}) olan bir kaplamaya sahip söz konusu cisim 15 GHz frekanslı bir dalgayla $\theta = \pi/4$ açısıyla aydınlatılıp, 3 cm yarıçaplı bir Γ^C çemberi üzerindeki toplam alan SEY ile hesaplanmıştır. Bu örnek için boş uzaydaki dalga boyu $\lambda = 2$ cm olmak üzere, Γ^R 'nin yarıçapı 6 cm = 3λ seçilmiştir. Γ^C çemberi üzerinde SEY ile üretilen toplam alanlar için; (3.75) doğrularının eğimleri yaklaşık olarak, Dirichlet durumunda $m_1 = 2.2$, $m_2 = 3.0$, $m_3 = 4.4$, Nuemann durumunda ise $m_1 = 2.0$, $m_2 = 2.9$, $m_3 = 3.8$ olarak hesaplanmıştır. Eğimlerinin

beklenen değerleri verdiği bu doğruların $[0.01\lambda, 0.15\lambda]$ aralığında grafikleri Şekil 3.18 ve Şekil 3.19'da gösterilmektedir.



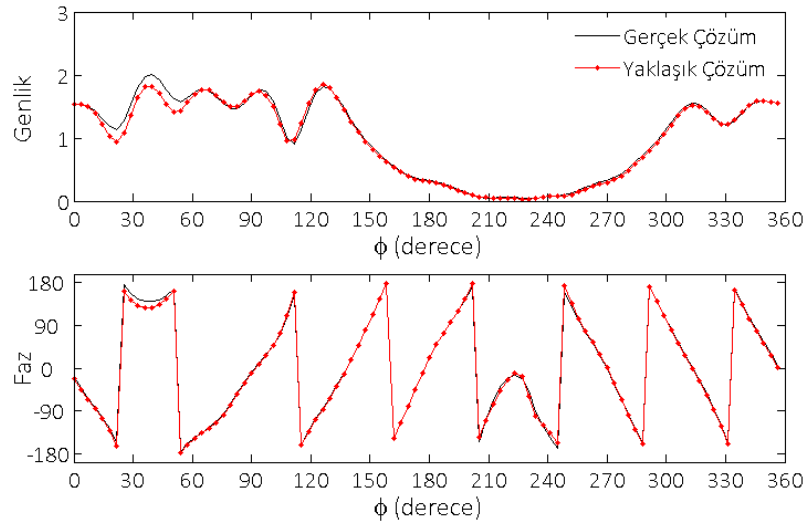
Şekil 3. 19 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S. m⁻¹) olan karmaşık bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.01\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği

Çizelge 3. 4 Ortalama kalınlığı $\delta_0 = \lambda/12 \cong 0.17$ cm olan, değişken kalınlıklı, iç bükey ve dış bükey bir yüzeye sahip kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve göreceli hatası

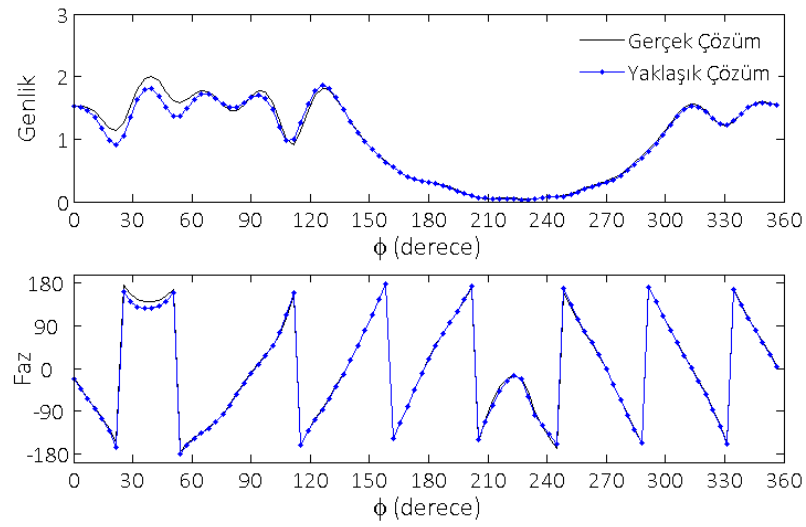
	Dirichlet Durumunda		Neumann Durumunda	
	E_s	E_r	E_s	E_r
1.mertebe	$0.16 \cdot 10^{-1}$	$0.16 \cdot 10^{-3}$	$0.42 \cdot 10^{-1}$	$0.47 \cdot 10^{-3}$
2.mertebe	$0.16 \cdot 10^{-1}$	$0.16 \cdot 10^{-3}$	$0.23 \cdot 10^{-1}$	$0.27 \cdot 10^{-3}$
3.mertebe	$0.03 \cdot 10^{-1}$	$0.03 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-1}$	$0.17 \cdot 10^{-3}$

Kaplamanın ortalama kalınlığı $\delta_0 = \lambda/12 \cong 0.17$ cm olarak seçildiğinde, gerçek ve yaklaşık modeller için SEY ile üretilen toplam alanlardan elde edilen mutlak ve göreceli hatalar yukarıdaki çizelgede verilmiştir. Ayrıca bu alanların genlik ve faz karşılaştırmaları ise Dirichlet durumu için Şekil 3.20, Neumann durumu için Şekil 3.21'de gösterilmiştir. Net bir şekilde görüldüğü gibi, özellikle üçüncü mertebe GIBC için elde edilen yaklaşık sonuçlar arzu edilen doğruluktadır. Bu örnek için Dirichlet durumunda ikinci ve üçüncü mertebelere ait sonuçlar birbirine yakınken, Neumann

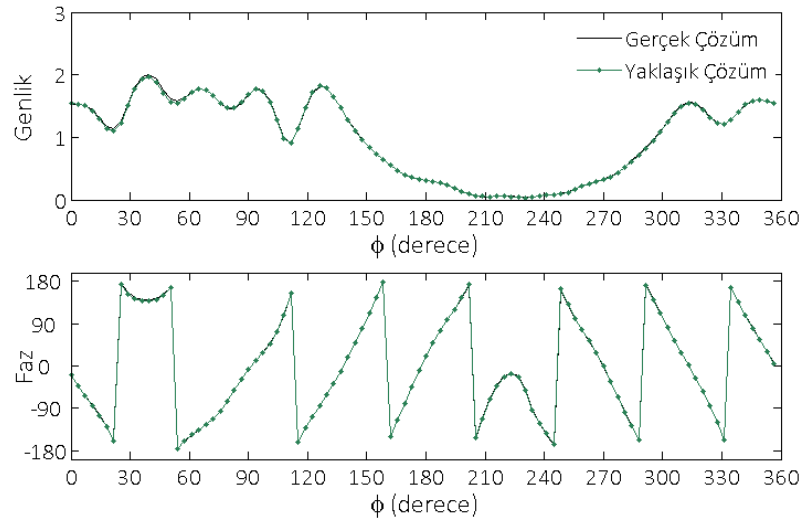
durumunda ikinci mertebeye ait sonuçlar birinci mertebenin sonuçlarına göre net bir şekilde daha iyidir.



(a) 1.mertebe GIBC için

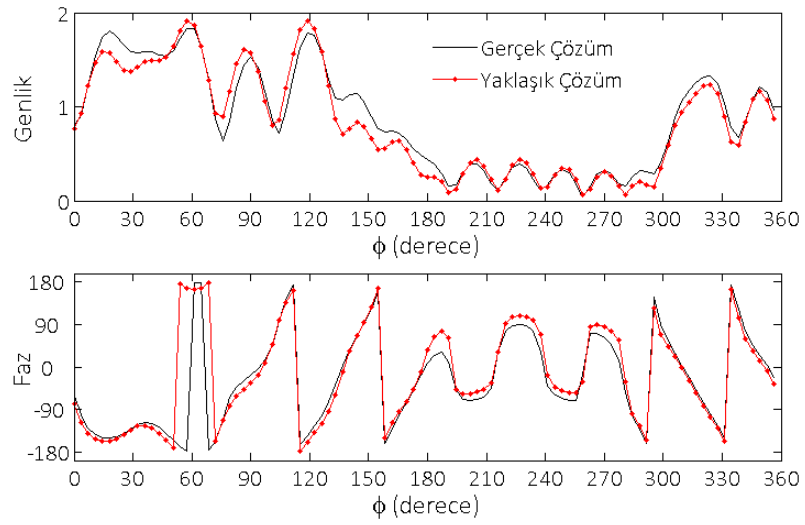


(b) 2.mertebe GIBC için

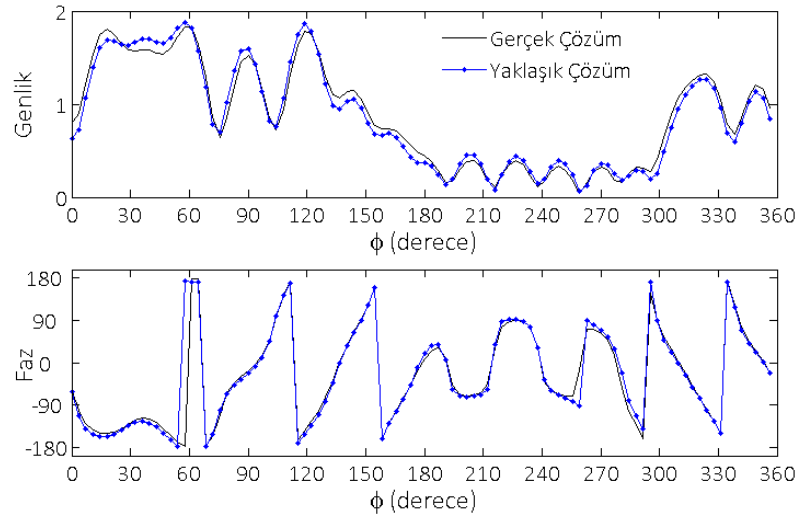


(c) 3.mertebe GIBC için

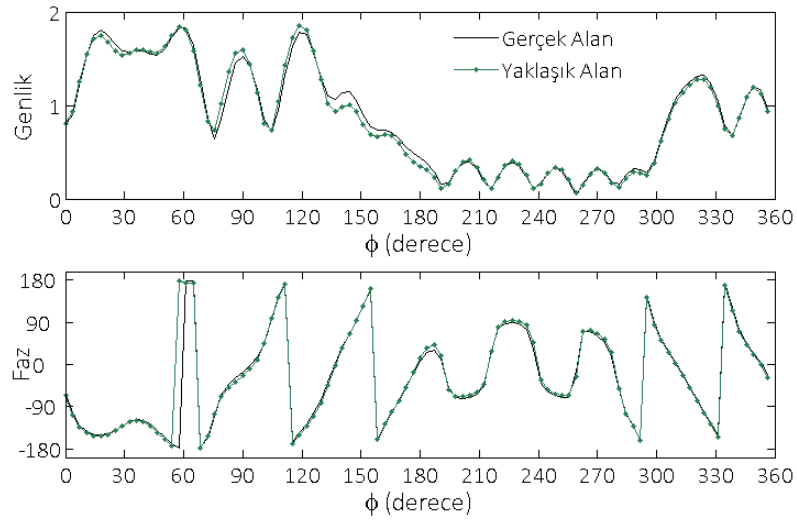
Şekil 3. 20 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$) olan, kompleks bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12 \cong 0.17 \text{ cm}$) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları



(a) 1.mertebe GIBC için



(b) 2.mertebe GIBC için



(c) 3.mertebe GIBC için

Şekil 3. 21 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\epsilon_1 = 2.5\epsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ ($S \cdot m^{-1}$) olan, kompleks bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/12 \cong 0.17$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları

Şu ana kadar incelenen örneklerde, kaplamanın ortalama kalınlığı δ_0 , dalga boyu λ 'nın onda birinin üstüne çıktığında üretilen toplam alanların karşılaştırılması verilmemişti. Şimdi ele alıncak örnek de ise, kaplamanın kalınlığı artırıldığında yaklaşık model için üretilen toplam alanların gerçek alandan ne kadar uzaklaştığı gösterilecektir. Bu amaçla; $\delta_0 = \lambda/8 \cong 0.25$ cm alınarak son örnek tekrar SEY ile çözüldüğünde, oluşan hatalar Çizelge 3.5'de, toplam alanların genlik ve fazları ise Şekil 3.22'de ve Şekil 3.23'de verilmiştir. Şekil 3.22 ve Şekil 3.23'de görüldüğü gibi; yaklaşık modelden elde

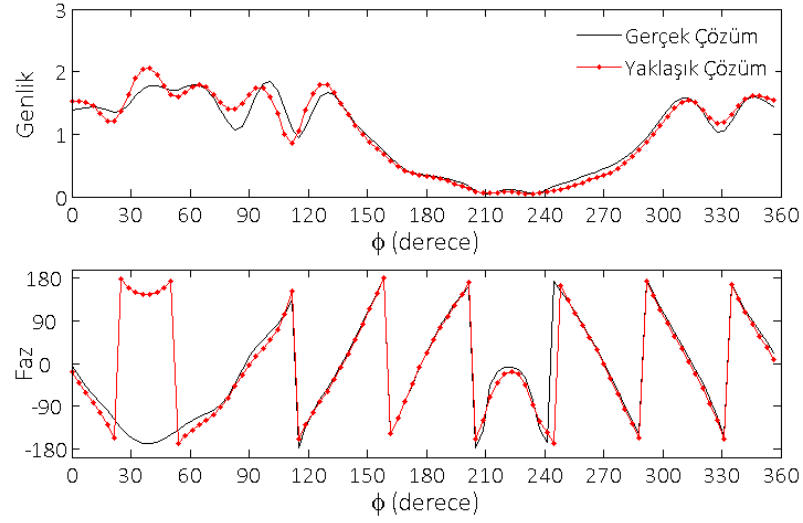
edilen alanlar Dirichlet durumunda kısmen, Neumann durumunda ise ciddi oranda gerçek değerlerden uzaklaşmıştır. Eğer gelen alanın frekansı 9 GHz'e düşürülerek, dalga boyu yaklaşık $\lambda \cong 3.33$ cm'ye çıkarıldığı takdirde; kaplamanın kalınlığı λ cinsinden tekrar azalacaktır. Buna göre, kaplamanın elektromagnetik parametrelerinin değişmediğini varsayıp frekans 9 GHz'e düşürülerek, toplam alanlar yeniden üretildiğinde, gerek Çizelge 3.6'da gerekse de Şekil 3.24 ve Şekil 3.25'de görüldüğü gibi yaklaşık alanların hatası düşmüştür. Her ne kadar uygun frekans seçimiyle, kaplamanın geometrik detayları korunarak, kaplamanın kalınlığının λ cinsinden bir yere kadar düşürülebilmesi mümkünse de, Şekil 3.25'de görüldüğü gibi birinci mertebeden GIBC için yaklaşık modelden elde edilen sonuçlar yeterli olmayıp, ikinci ve özellikle üçüncü mertebeye kadar çıkmak gerekebilir.

Çizelge 3. 5 Ortalama kalınlığı $\delta_0 = \lambda/8 \cong 0.25$ cm olan, değişken kalınlıklı, iç bükey ve dış bükey bir yüzeye sahip kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve göreceli hatası

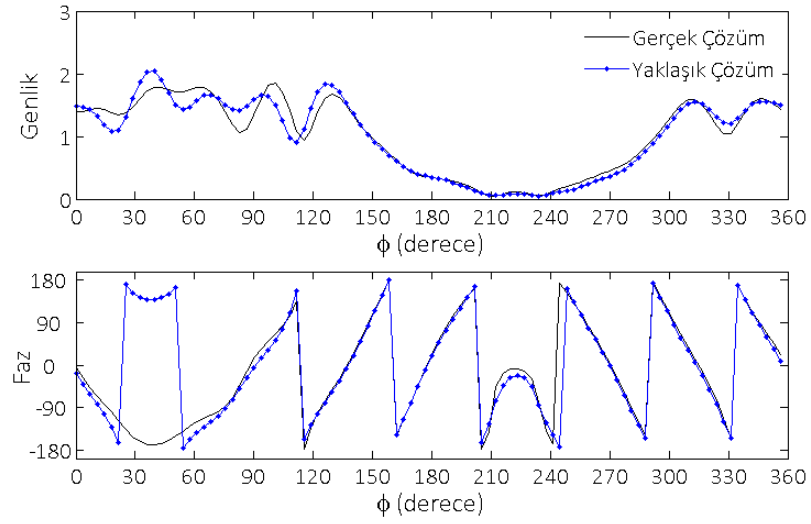
	Dirichlet Durumunda		Neumann Durumunda	
	E_s	E_r	E_s	E_r
1.mertebe	$0.57 \cdot 10^{-1}$	$0.57 \cdot 10^{-3}$	$0.73 \cdot 10^{-1}$	$0.84 \cdot 10^{-3}$
2.mertebe	$0.60 \cdot 10^{-1}$	$0.60 \cdot 10^{-3}$	$0.42 \cdot 10^{-1}$	$0.48 \cdot 10^{-3}$
3.mertebe	$0.27 \cdot 10^{-1}$	$0.26 \cdot 10^{-3}$	$0.48 \cdot 10^{-1}$	$0.55 \cdot 10^{-3}$

Çizelge 3. 6 Ortalama kalınlığı $\delta_0 = 3\lambda/40 = 0.25$ cm olan, değişken kalınlıklı, iç bükey ve dış bükey bir yüzeye sahip kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve göreceli hatası

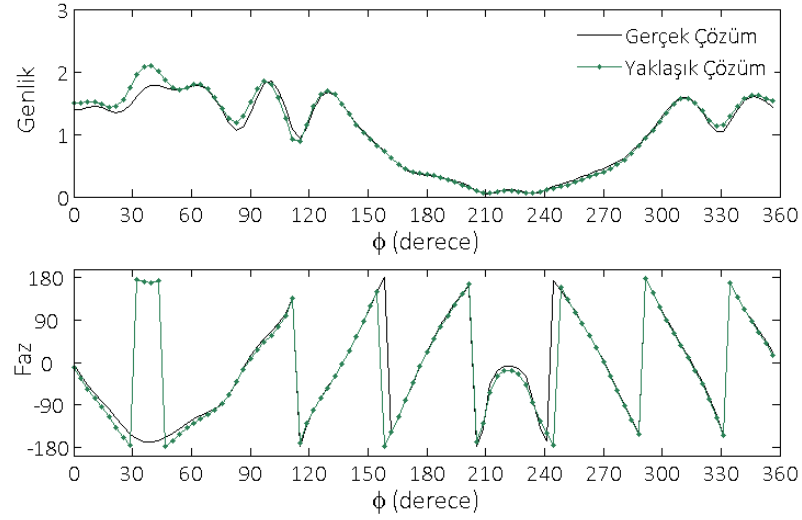
	Dirichlet Durumunda		Neumann Durumunda	
	E_s	E_r	E_s	E_r
1.mertebe	$0.13 \cdot 10^{-1}$	$0.14 \cdot 10^{-3}$	$0.44 \cdot 10^{-1}$	$0.48 \cdot 10^{-3}$
2.mertebe	$0.11 \cdot 10^{-1}$	$0.12 \cdot 10^{-3}$	$0.19 \cdot 10^{-1}$	$0.20 \cdot 10^{-3}$
3.mertebe	$0.02 \cdot 10^{-1}$	$0.02 \cdot 10^{-3}$	$0.18 \cdot 10^{-1}$	$0.19 \cdot 10^{-3}$



(a) 1.mertebe GIBC için

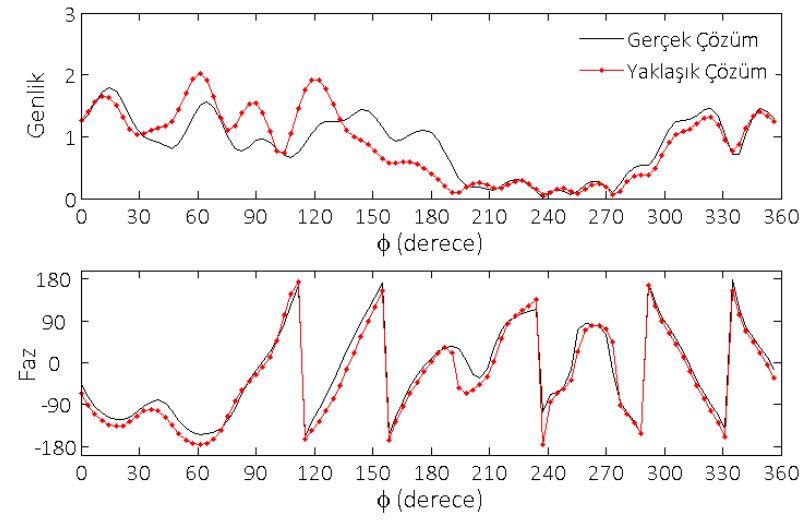


(b) 2.mertebe GIBC için

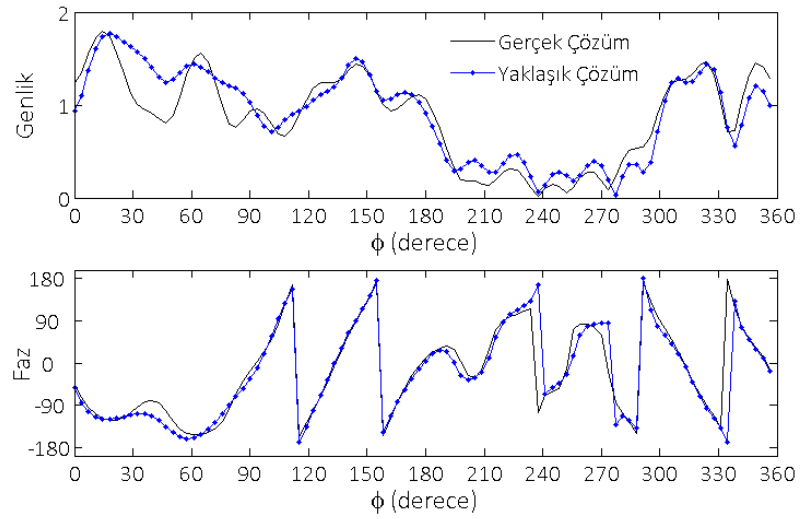


(c) 3.mertebe GIBC için

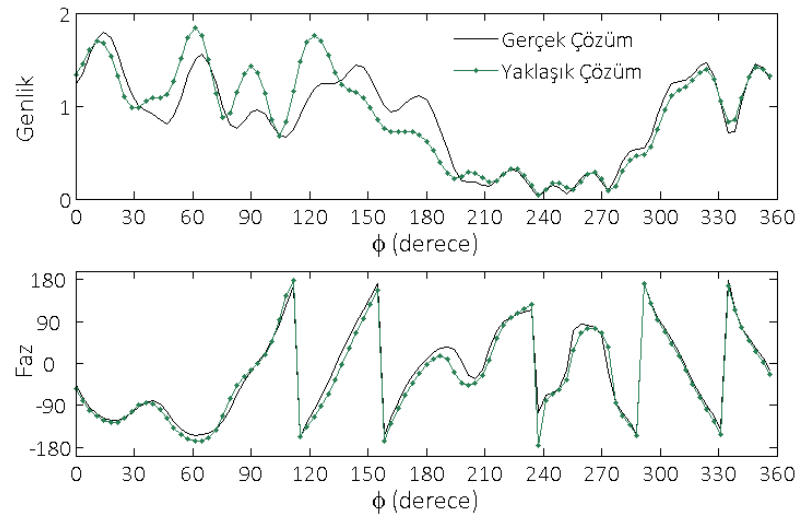
Şekil 3. 22 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\epsilon_1 = 2.5\epsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S. m⁻¹) olan, kompleks bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/8 \cong 0.25$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modellerden üretilen toplam alanın genlik ve fazları



(a) 1.mertebe GIBC için

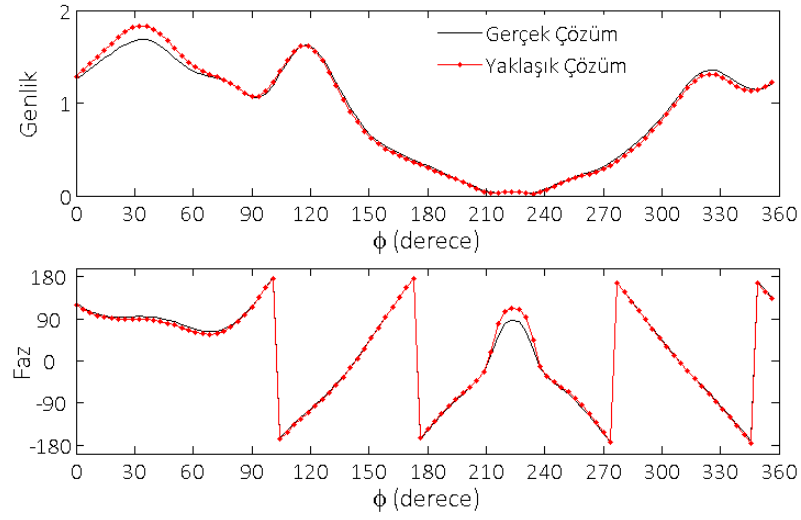


(b) 2.mertebe GIBC için

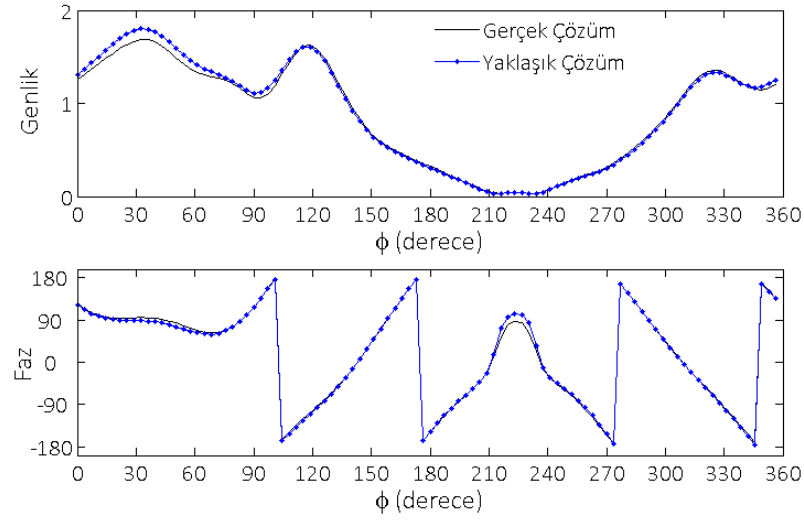


(c) 3.mertebe GIBC için

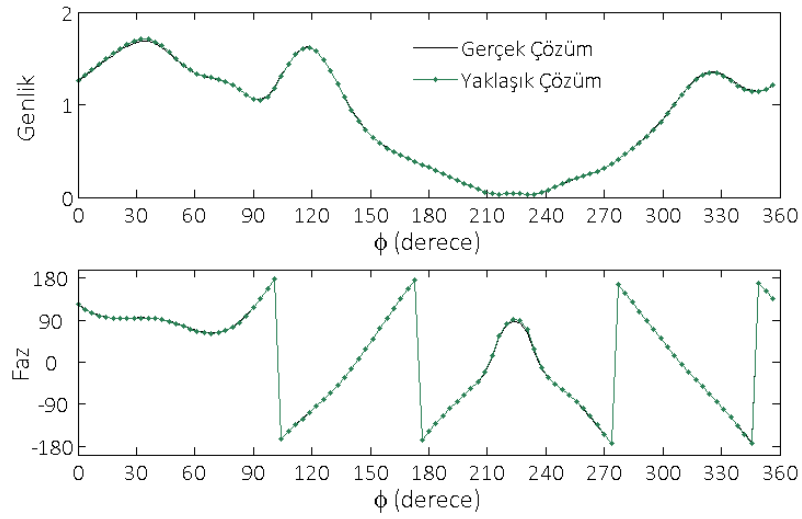
Şekil 3. 23 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ ($S \cdot m^{-1}$) olan, kompleks bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = \lambda/8 \cong 0.25$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları



(a) 1.mertebe GIBC için

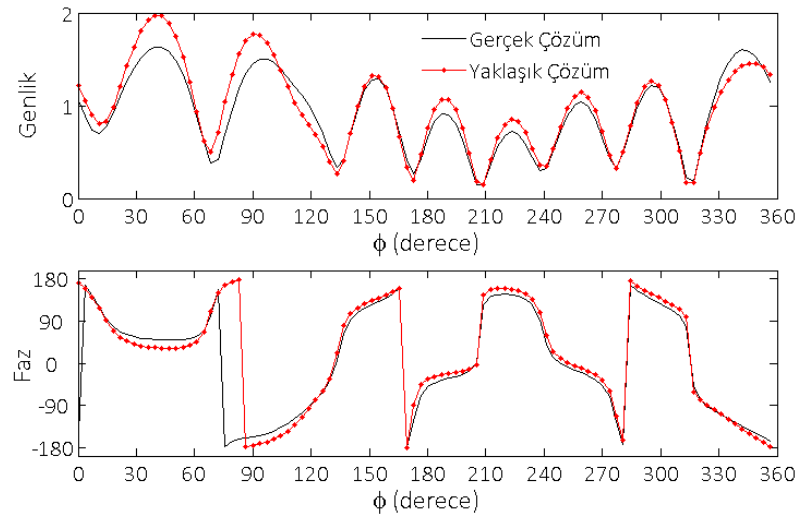


(b) 2.mertebe GIBC için

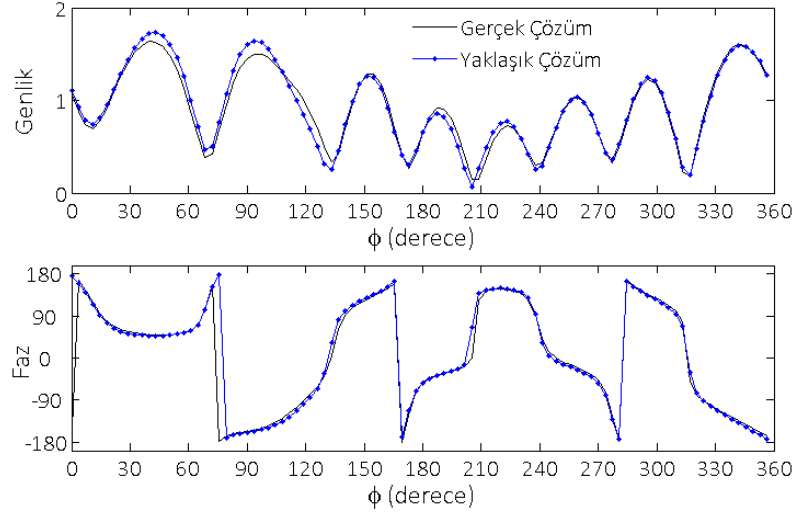


(c) 3.mertebe GIBC için

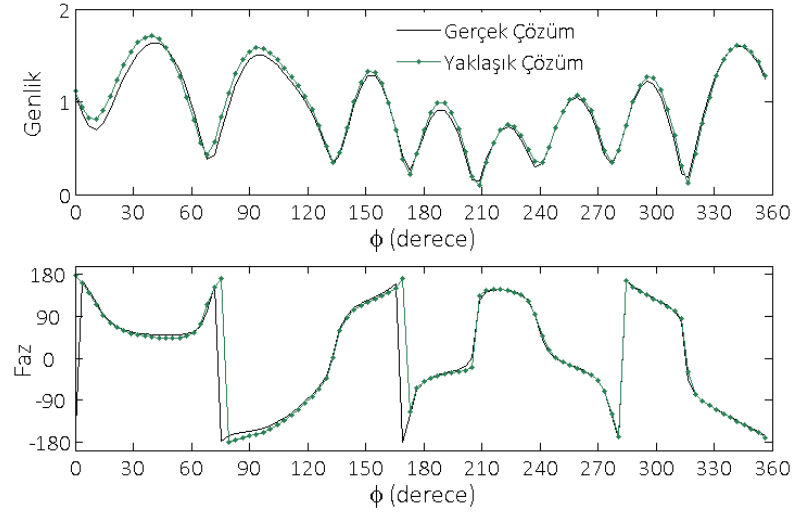
Şekil 3. 24 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ ($S \cdot m^{-1}$) olan, karmaşık bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = 3\lambda/40 = 0.25$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları



(a) 1.mertebe GIBC için



(b) 2.mertebe GIBC için

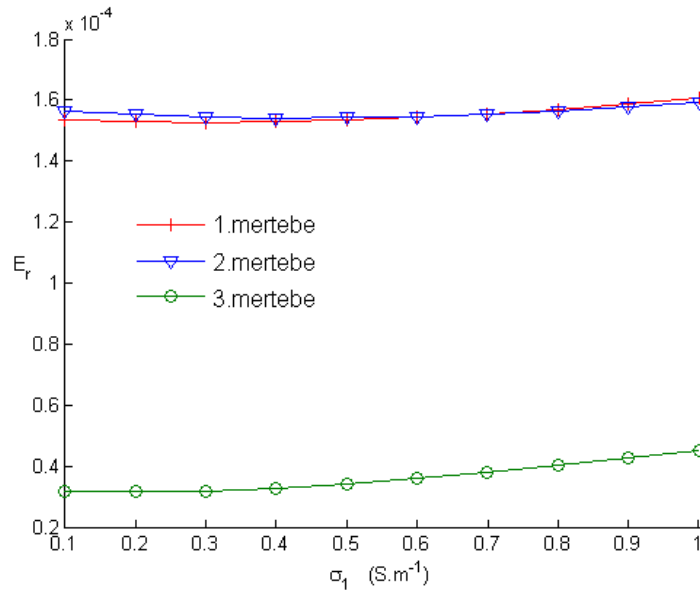


(c) 3.mertebe GIBC için

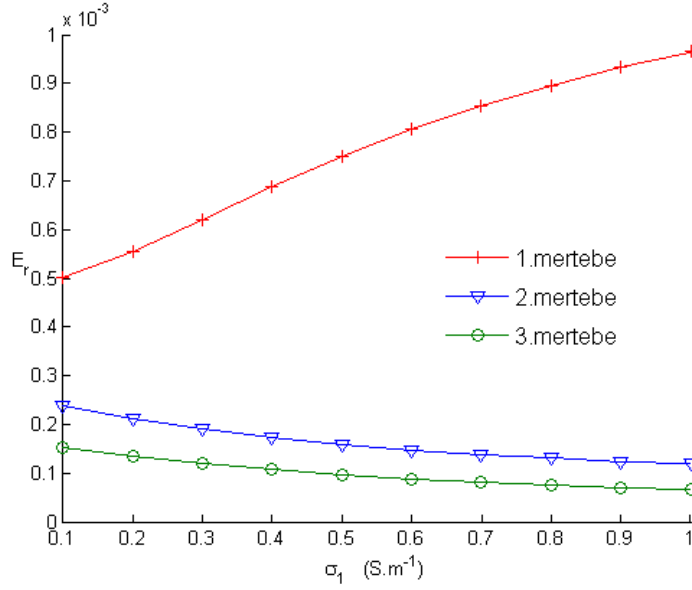
Şekil 3. 25 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ ($S \cdot m^{-1}$) olan, karmaşık bir yüzeye sahip değişken kalınlıklı ($\delta_0 = 3\lambda/4 = 0.25$ cm) kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları

Dielektrik kaplamanın ortalama kalınlığı δ_0 'ın sıfıra gittiği düşünülüp GIBC ifadelerinin türetildiği göz önünde bulundurularak, kaplama kalınlığı δ 'nın değişimine göre yaklaşık modelin doğruluk ve geçerliliği çeşitli geometri ve durumlar için sınandı. Sıradaki örnek ise; δ_0 sabit tutularak, kaplamanın dielektrik katsayısı ε_1 ve iletkenliği σ_1 'in değişimine göre yaklaşık modelin davranışının gözlemlenmesi amacıyla ele alınmıştır. Bunun için, Şekil 3.17'de verilen cismin kaplamasının ortalama kalınlığı $\delta_0 = \lambda/12 \cong 0.17$ cm seçilip, 15 GHz frekanslı bir dalga ile aydınlatıldığı örnek üzerinde, ε_1 ve σ_1 'in

değişimlerine göre oluşan mutlak hata incelenecektir. Öncelikle $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ sabit tutularak, σ_1 'in değişimi $[0, 1]$ ($S.m^{-1}$) aralığında alındığında oluşan mutlak hatanın grafiği Dirichlet durumu için Şekil 3.26, Neumann durumu için ise Şekil 3.27'de gösterilmektedir. Şekil 3.26'da açıkça görüldüğü gibi; Dirichlet durumunda kaplamanın iletkenliğinin değişimi δ_0 'ın değişimine göre mutlak hatayı neredeyse etkilememektedir. Her üç mertebe için de mutlak hatanın Çizelge 3.4'de verilen değerlerden dikkate değer ölçüde saptığı görülmemektedir. Nuemann durumunda ise, Şekil 3.27'de görüldüğü gibi; iletkenliğin artması, birinci mertebe için hatanın artmasına, ikinci ve üçüncü mertebe için ise hatanın düşmesine neden olmuştur. Bu durum için, birinci mertebeden üçüncü mertebeye giderken ince kaplamalar için halen daha iyi sonuçlar elde edileceği söylenebilir.



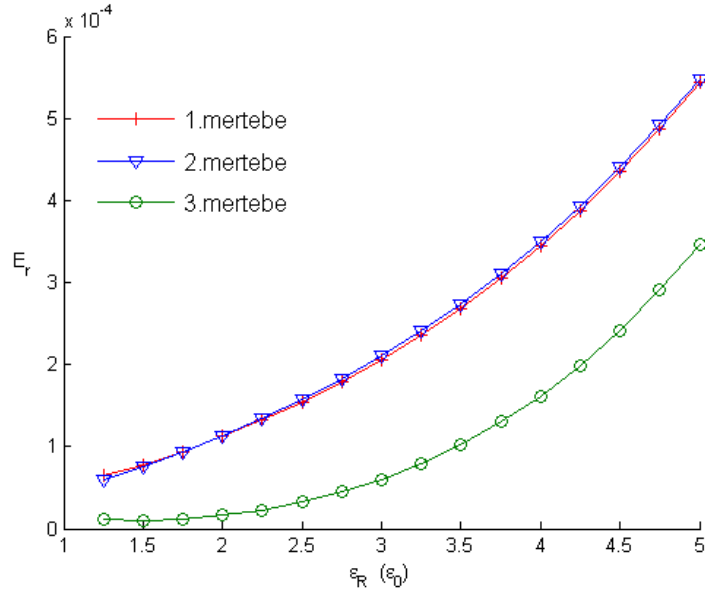
Şekil 3. 26 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ olan kompleks bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için kaplama iletkenliğinin $[0.1, 1.0]$ aralığındaki değişimine göre göreceli hatanın grafiği



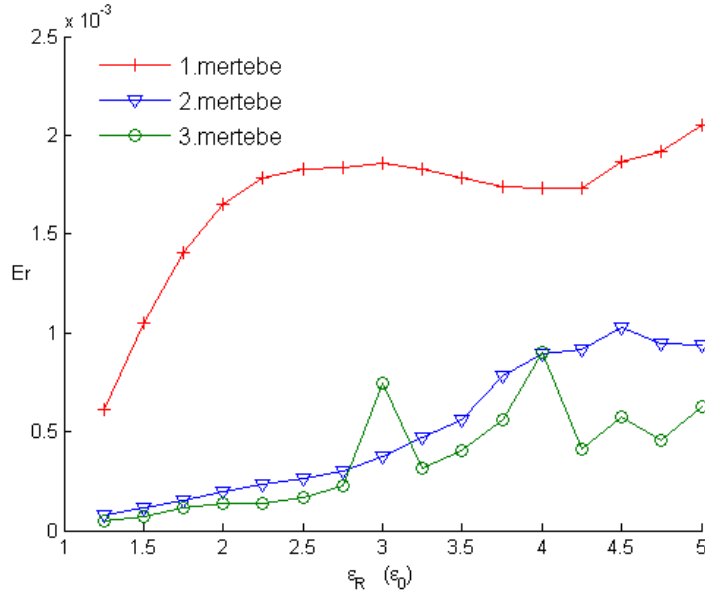
Şekil 3. 27 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ olan kompleks bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için kaplama iletkenliğinin [0.1, 1.0] aralığındaki değişimine göre göreceli hatanın grafiği

Kaplama iletkenliğinin değişiminin incelenmesinden sonra, şimdi $\sigma_1 = 0.001$ (S.m⁻¹) sabit tutularak, ε_1 'in değişiminin yaklaşık model üzerindeki etkisi ele alınacaktır. ε_1 'in $[1.25\varepsilon_0, 5\varepsilon_0]$ aralığında değişimiyle oluşan mutlak hata fonksiyonun grafiği Dirichlet durumu için Şekil 3.28, Neumann durumu için ise Şekil 3.29'da gösterilmiştir. Dirichlet durumunda ε_1 arttıkça, her üç mertebe için mutlak hata artmasına rağmen, 10^{-4} mertebesinde kalmaya devam etmiştir. Bu durumda kaplamanın dielektrik katsayısı $2.5\varepsilon_0$ 'ın üstüne çıktığında, yaklaşık modelin yeterli doğrulukta sonuçlar üretmesi için kaplama kalınlığının $\lambda/10$ 'un çok da altına inmesi gerekmez. Neumann durumu için ise, Şekil 3.29 incelendiği takdirde; ε_1 arttıkça hata eğrileri düzensiz bir şekilde olsa da artmaya devam etmektedir. İkinci ve üçüncü mertebe için hata 10^{-4} mertebesinde kalmasına rağmen, birinci mertebe için hata 10^{-4} mertebesinin üzerine çıkmıştır. Buna rağmen Şekil 3.21'e bakıldığında, $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ iken, birinci mertebe için gerçek alana yeterli yakınlıkta sonuçlar elde edildiği görülür. Buna göre ε_1 'in $2.5\varepsilon_0$ 'daki değeri Şekil 3.29'da göz önüne alınırsa, yüksek değerli dielektrik katsayıları için ikinci ve üçüncü mertebeden GIBC ifadelerinin $\lambda/10$ 'a kadar olan kalınlıklarda arzu edilen yaklaşıklıkta sonuçlar üretmeye devam edeceği anlaşılmaktadır. Birinci mertebeye gelince; $2.5\varepsilon_0$ 'dan sonra hata çok fazla artmaya devam etmediğinden dolayı yeterli doğrulukta

sonuçlar elde etmek için kaplama kalınlığının $\lambda/10$ 'un çok da altına inmesine gerek olmadığı anlaşılmaktadır.



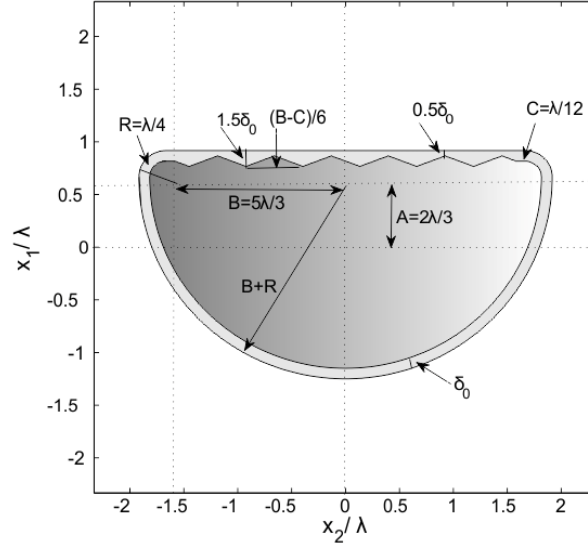
Şekil 3. 28 Dirichlet durumunda, iletkenlik $\sigma_1 = 0.001$ (S. m⁻¹) olan kompleks bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için kaplamanın dielektrik katsayısının [1.25, 5.0] aralığındaki değişimine göre göreceli hatanın grafiği



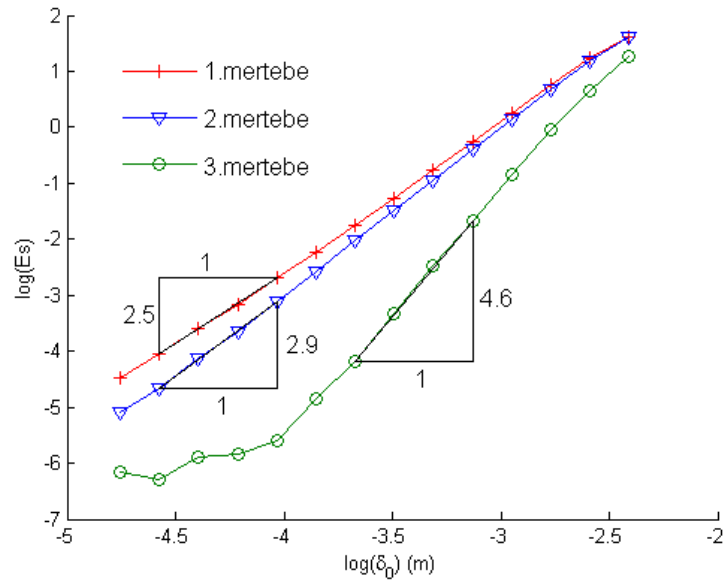
Şekil 3. 29 Neumann durumunda, iletkenliği $\sigma_1 = 0.001$ (S. m⁻¹) olan kompleks bir yüzeye ve değişken kalınlığa sahip kaplama için kaplamanın dielektrik katsayısının [1.25, 5.0] aralığındaki değişimine göre göreceli hatanın grafiği

Bu bölümdeki son örnek, kaplamanın iç yüzeyi Γ^δ üzerinde köşe tekillikleri bulunması halinde GIBC ifadelerinin doğruluğunun sınanmasına ayrılmıştır. Bunun için, geometrisi Şekil 3.30'da verilen cisim ele alınmıştır. Dielektrik katsayısı $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$ ve iletkenliği

$\sigma_1 = 0.01 \text{ (S. m}^{-1}\text{)}$ olan bu cisim 500 MHz frekansa sahip bir dalga ile $\theta = \pi/2$ açısıyla aydınlatılıp, toplam alan 2 m yarıçaplı Γ^C çemberi üzerinde gerçek ve yaklaşık modeller için SEY ile hesaplanmıştır. SEY’de hesaplama bölgesi 2.5 m yarıçaplı Γ^R çemberi ile sınırlandırılmıştır.



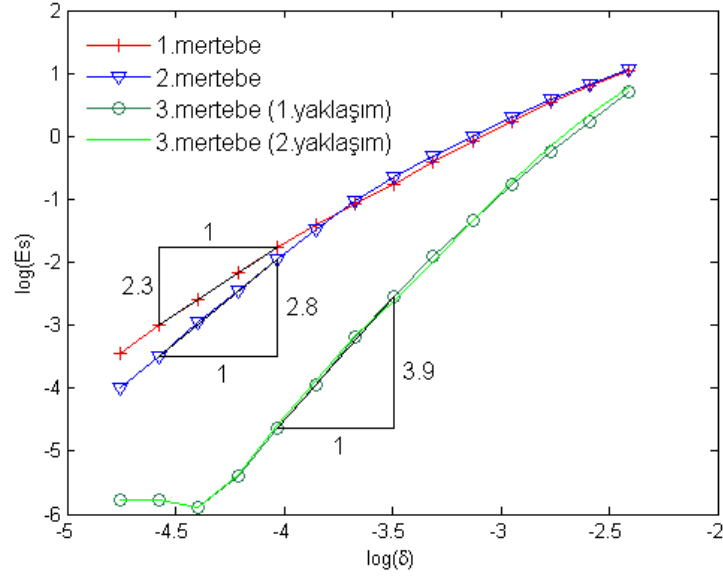
Şekil 3.30 Kaplamanasının iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan cisim



Şekil 3. 31 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01 \text{ (S. m}^{-1}\text{)}$ olan ve iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan kaplama için (3.75)’de denklemleri verilen doğruların $[0.01\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği

Γ^C çemberi üzerinde SEY ile üretilen toplam alanlar için; grafikleri Şekil 3.31 ve Şekil 3.32’de gösterilen (3.75) doğrularının eğimleri, Dirichlet durumunda yaklaşık $m_1 = 2.5$,

$m_2 = 2.9, m_3 = 4.6$, Neumann durumunda ise yaklaşık $m_1 = 2.3, m_2 = 2.8, m_3 = 3.9$ olarak hesaplanmıştır.

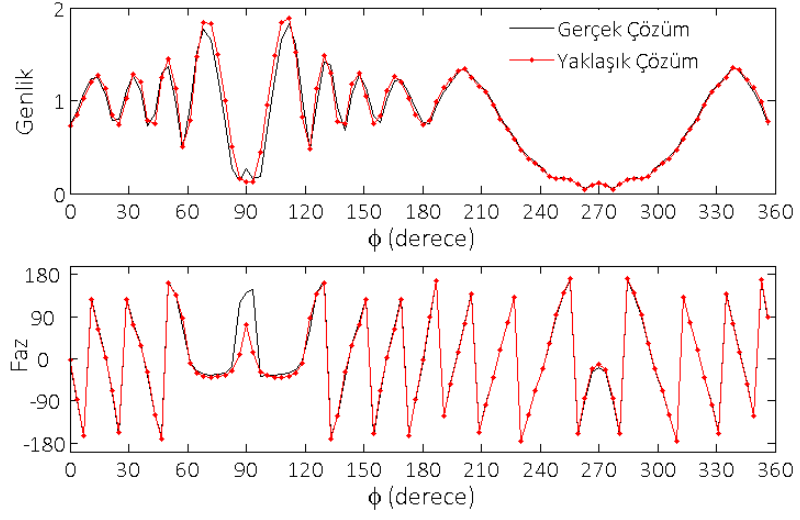


Şekil 3. 32 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ ($S. m^{-1}$) olan ve iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan kaplama için (3.75)'de denklemi verilen doğruların $[0.01\lambda, 0.15\lambda]$ aralığındaki grafiği

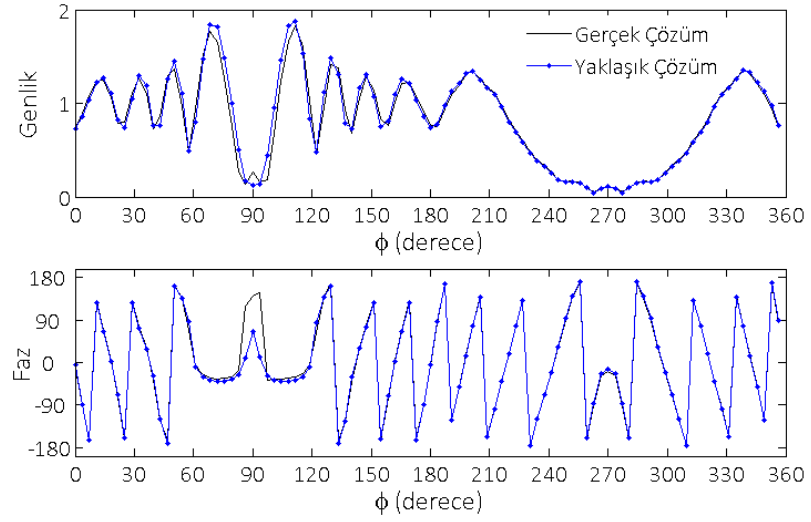
$\delta_0 = \lambda/12 = 5$ cm olarak alındığında, gerçek ve yaklaşık modeller için SEY ile üretilen toplam alanlardan elde edilen mutlak ve göreceli hatalar Çizelge 3.7'de verilmiştir. Bu alanların genlik ve faz karşılaştırmaları ise Dirichlet durumu için Şekil 3.33, Neumann durumu için Şekil 3.34'de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi; Γ^δ yüzeyinin regüler olmadığı geometrilere sahip kaplamalar için de yaklaşık modelle istenilen yaklaşıklıkta sonuçlar üretilebilmektedir.

Çizelge 3. 7 İç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan $\delta_0 = \lambda/12 = 5$ cm kalınlığındaki kaplama için yaklaşık çözümün mutlak ve göreceli hatası

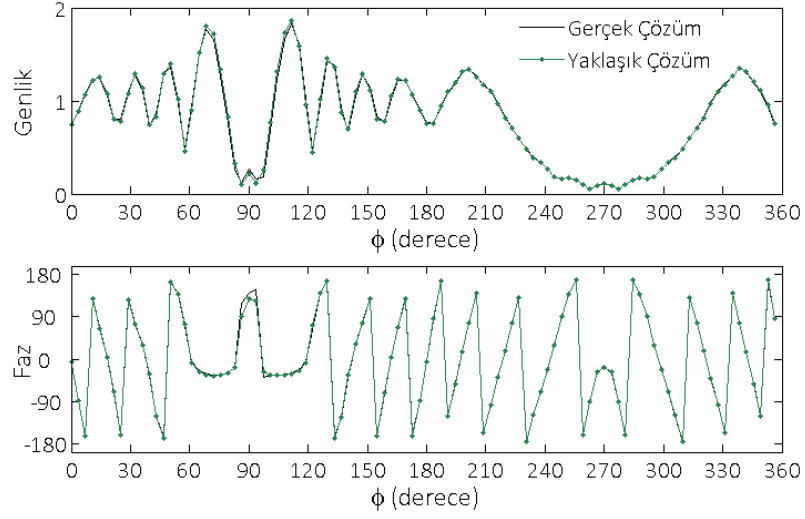
	Dirichlet Durumunda		Neumann Durumunda	
	E_s	E_r	E_s	E_r
1.mertebe	$11.28 \cdot 10^{-1}$	$13.67 \cdot 10^{-3}$	$11.66 \cdot 10^{-1}$	$13.28 \cdot 10^{-3}$
2.mertebe	$10.12 \cdot 10^{-1}$	$12.25 \cdot 10^{-3}$	$12.57 \cdot 10^{-1}$	$14.32 \cdot 10^{-3}$
3.mertebe	$3.49 \cdot 10^{-1}$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	$4.40 \cdot 10^{-1}$	$4.60 \cdot 10^{-3}$



(a) 1.mertebe GIBC için

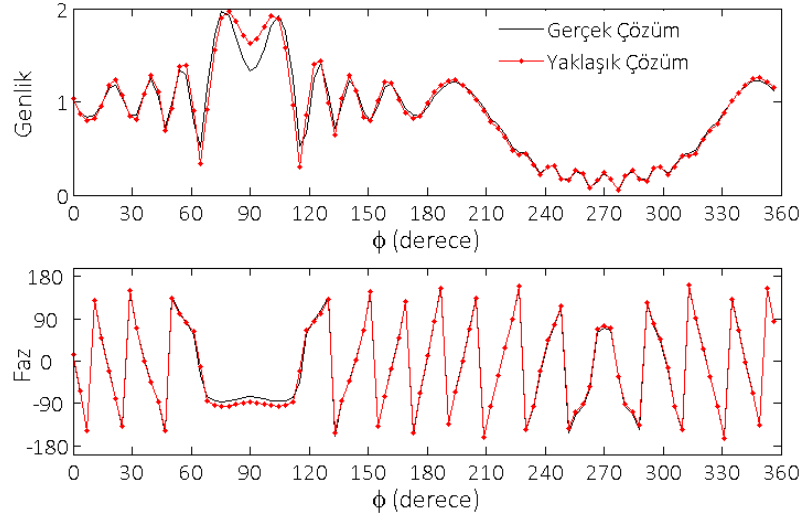


(b) 2.mertebe GIBC için

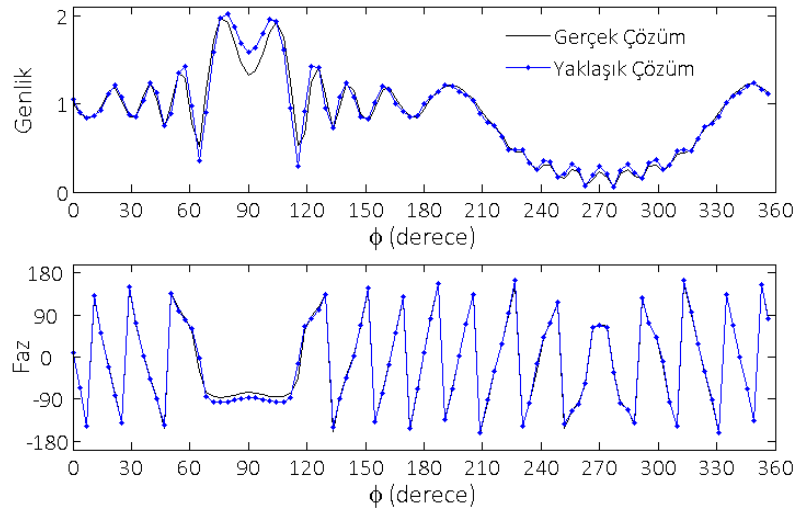


(c) 3.mertebe GIBC için

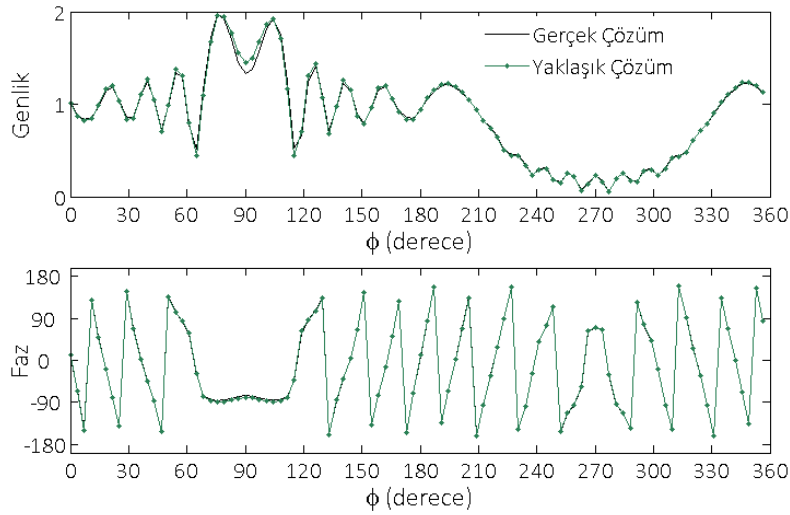
Şekil 3. 33 Dirichlet durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ ($S.m^{-1}$) olan ve iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan $\delta_0 = \lambda/12 = 5$ cm kalınlığındaki kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları



(a) 1.mertebe GIBC için



(b) 2.mertebe GIBC için



(c) 3.mertebe GIBC için

Şekil 3. 34 Neumann durumunda, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ ($S.m^{-1}$) olan ve iç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan $\delta_0 = \lambda/12 = 5$ cm kalınlığındaki kaplama için gerçek ve yaklaşık modelden üretilen toplam alanın genlik ve fazları

Yukarıda verilen örnekler göz önüne alındığında, kaplamanın ortalama kalınlığı $\lambda/10$ ya da daha küçük olduğunda arzu edilen sonuçlar büyük bir oranda üretilmiştir. Bazen birinci ve ikinci mertebe için üretilen sonuçlar birbirine yakinken, üçüncü mertebe için üretilen sonuçlar gerçeğe çok daha yakındır. Ayrıca (3.75) doğruları çok küçük δ_0 değerleri dışında büyük oranda istenilen şekilde çizilmiştir. Çok küçük δ_0 değerlerinde doğru eğimlerinin bozulmasının sebebi; gerçek ve yaklaşık model arasındaki hatanın çok düşmesi nedeniyle, SEY'deki ayrıklaştırma hatasının bu hataya baskın gelmesidir.

**GENELLEŞTİRİLMİŞ EMPEDANS SINIR KOŞULLARI ARACILIĞIYLA BİR
DİELEKTRİK KAPLAMANIN KALINLIK DEĞİŞİMİNİN BELİRLENMESİ**

Bu kısımda; 2.Bölümde GIBC'ler aracılığıyla tanıtılan yaklaşık modeli kullanarak, yüzeyi bilinmeyen bir PEC (PMC) üzerine yerleştirilmiş ince dielektrik kaplamanın kalınlık değişiminin belirlenmesi amaçlanmaktadır. Aynı zamanda üzerindeki kaplamanın dış yüzeyi Γ' 'nin bilindiği bir geometri için PEC'in (PMC'nin) yüzeyi Γ^δ 'yi bulma anlamına da gelen bu ters problem, doğası gereği, düz saçılma problemine göre yeni zorluklarla uğraşmayı gerektirir ve bu problem farklı bir yaklaşım kullanılarak çözülmelidir. Söz konusu ters problem tanıtıldıktan sonra, GIBC ifadelerinin içinden δ kalınlık fonksiyonunun çekilmesini sağlayan böyle bir yaklaşım aşağıda sunulmaktadır. Son olarak da, bu yaklaşım ile üretilen sayısal sonuçlar ve ilgili yorumlar verilmektedir.

4.1 Ters Problemin Tanıtılması ve Çözümü

Şekil 2.1'de geometrisi verilen ve 2.Bölümde anlatılan özelliklere sahip kaplanmış bir cismin, (2.1)'de verilen zamanla değişimi sinüsoidal bir elektromagnetik dalga ile aydınlatılıp, cisimden saçılan $u_{s,-}^\delta$ alanının Γ^C çemberi üzerinde ölçüldüğü varsayılın. Bu durum için, kaplamanın dış yüzeyi Γ' 'nin ve kaplamanın malzeme özelliklerinin bilindiği varsayımıyla, ölçülen $u_{s,-}^\delta$ saçılan alanından kaplamanın kalınlık değişiminin belirlenmesi ya da başka bir deyişle Γ^δ yüzeyinin bulunması amaçlanmaktadır. Bu problemi çözmek için Dirichlet durumunda (2.11) GIBC ifadesi, Neumann durumunda ise (2.12) GIBC ifadesi kullanılacaktır. (2.11) GIBC ifadesindeki $D^{\delta,m}, m = 1, 2, 3$ operatörleri (2.52-2.54)'de, (2.12) GIBC ifadesindeki $N^{\delta,m}, m = 1, 2, 3$ operatörleri ise

(2.69-2.71)'de verilmiştir. GIBC ifadelerinin içinden δ kalınlık fonksiyonunu çekmek için, öncelikle Γ üzerinde tanımlı GIBC ifadelerindeki toplam alan ile toplam alanın normal ve teğetsel türevlerinin elde edilmesi gerekir. Bu nedenle, aşağıda ilk olarak Γ üzerindeki toplam alan ve türevlerinin SLP [43] yaklaşımıyla elde edilmesi, sonra da elde edilen alan ve türevlerinin yerine koyulup, GIBC içindeki δ kalınlık fonksiyonunun nasıl bir yöntemle çekildiği anlatılmaktadır.

4.1.1 Empedans Yüzeyi Üzerinde Toplam Alan ve Türevlerinin Bulunması

Kaplamanın dış yüzeyi Γ üzerindeki toplam alanı ve toplam alanın eğrisel apsis s ile birim normal vector $\vec{n}'$ 'ye göre kısmi türevlerini bulmak için Γ^C ölçüm çemberi üzerindeki $u_{s,-}^\delta$ saçılan alanı, A operatörü

$$A\psi = \int_{\Gamma} G(x; y)\Psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma^C, y \in \Gamma, \quad (4.1)$$

olmak üzere,

$$A\Psi = u_{s,-}^\delta(x), \quad x \in \Gamma^C \quad (4.2)$$

şeklinde tek-tabaka yaklaşımı (SLP) [43] ile temsil edilebilir. Burada; Ψ , Γ üzerinde tanımlı bilinmeyen yoğunluk (density) fonksiyonunu, G ise boş uzayın Green fonksiyonunu göstermektedir. $H_0^{(1)}$ 0.mertebeden birinci çeşit Hankel fonksiyonu olmak üzere, boş uzayın Green fonksiyonu

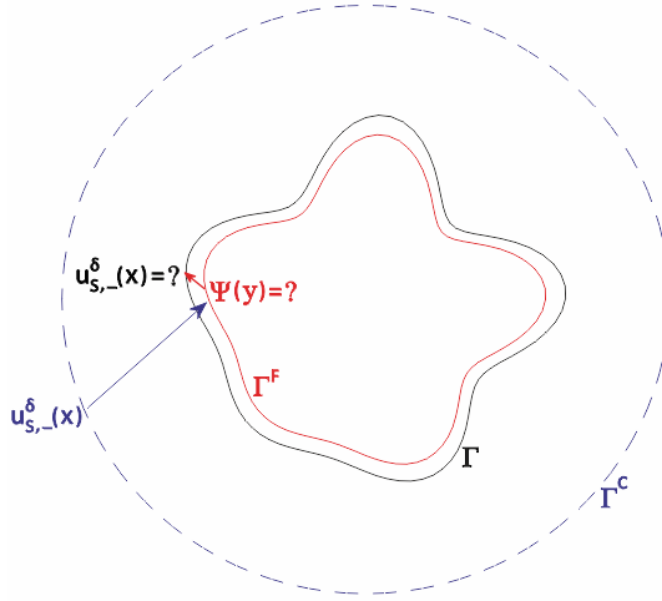
$$G(x; y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0|x - y|) \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır. Açıkça görüldüğü gibi; öncelikle Γ^C üzerinde ölçülmüş saçılan alan için (4.2) çözümlerle yoğunluk fonksiyonu Ψ 'yi bulup, sonra da Ψ 'yi yine $x \in \Gamma$ için (4.2)'de yerine koyarak Γ üzerindeki saçılan alanı bulmak mümkündür. Fakat bu sefer de Green fonksiyonu nedeniyle $x = y$ 'de (4.1) tekil noktalara sahip olur ve bu durumda (4.2)'yi kullanarak Γ üzerindeki saçılan alanı hesaplamak sıkıntılı hale gelir. Bu sıkıntıyı aşmak için Nyström yöntemi [43] kullanılabilir. Fakat bu tezde, tekilliklerden kurtulmak için Nyström yöntemi yerine çok daha pratik bir yaklaşım uygulanmıştır. Bu yaklaşıma göre;

önce, Ψ yoğunluk fonksiyonu Γ yerine orjine biraz daha yakın hayali bir Γ^F (Şekil 4.1) yüzeyi üzerinde tanımlanıp, (4.1)'de açık ifadesi verilen A operatörü

$$A\Psi = \int_{\Gamma^F} G(x; y)\Psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma^C, y \in \Gamma^F \quad (4.4)$$

şeklinde güncellenir ve ardından (4.2) kullanılarak Γ^F yüzeyi üzerinde Ψ hesaplanır [42]. Son olarak $x \in \Gamma$ için (4.2) aracılığıyla herhangi bir tekillikle karşılaşmadan Γ üzerindeki saçılan alan bulunur.



Şekil 4. 1 Ψ yoğunluk fonksiyonunu Γ yerine hayali Γ^F yüzeyinde tanımlama

Burada şunu da söylemek gerekir ki; A operatörü analitik bir çekirdeğe sahip olduğu için birinci çeşit bir integral denklem olan (4.2) kötü-kurulmuştur. Bu nedenle, (4.2)'den Ψ fonksiyonunu çekmek için regülerizasyon yöntemlerine başvurmak gerekir. Bu çalışmada söz konusu probleme, bu yöntemlerden biri olan TSVD [43] uygulanmıştır.

σ_n A operatörünün tekil değerleri, ψ_n ve v_n ise bu tekil değerlere karşılık gelen tekil vektörler olmak üzere; $\{(\sigma_n, \psi_n, v_n), n \in \mathbb{N}\}$ sistemi, lineer A operatörü için tekil sistem olarak adlandırılır. Buna göre; L^2 uzayı üzerindeki iç çarpım $\langle, \rangle$ ile gösterilmek üzere, (4.2)'nin regülerize edilmiş çözümü TSVD inversiyon formülü [43] ile

$$\Psi = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n} \langle u_{s,-}^{\delta}, v_n \rangle \psi_n \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, N ölçüm gürültüsüne göre belirlenen kesim parametresidir. Doğru çözümü bulmak için önem teşkil eden bu parametrenin seçiminde kullanılabilecek kriterlerden biri Morozov'un Fark İlkesidir (MDP-Morozov's Discrepancy Principle) [52]. Bu ilkeye göre; u_g^δ saçılan alana eklenmiş gürültü ve Ψ_N herhangi bir N parametresi için hesaplanan yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, kesim parametresi

$$\|A\Psi_n - u_{s,-}^\delta\| < \|u_g^\delta\| \quad (4.6)$$

koşulunu sağlayan en büyük tam sayı olarak seçilir.

Ψ yoğunluk fonksiyonu (4.5) formülü ile bir kez bulunduğu takdirde; Γ üzerindeki toplam alan

$$u^\delta(x) = u^i(x) + \int_{\Gamma^F} G(x;y)\Psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma, y \in \Gamma^F, \quad (4.7)$$

toplam alanın teğetsel türevi

$$\frac{\partial u^\delta(x)}{\partial s} = \frac{\partial u^i(x)}{\partial s} + \int_{\Gamma^F} \frac{\partial G(x;y)}{\partial s} \Psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma, y \in \Gamma^F \quad (4.8)$$

ve toplam alanın normal türevi

$$\frac{\partial u^\delta(x)}{\partial n} = \frac{\partial u^i(x)}{\partial n} + \int_{\Gamma^F} \frac{\partial G(x;y)}{\partial n} \Psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma, y \in \Gamma^F \quad (4.9)$$

kolayca hesaplanabilir.

Son olarak şunu da belirtmek gerekir ki; açık ifadeleri (2.52-2.54)'de verilen D^δ Dirichlet operatörleri ile (2.69-2.71)'de verilen N^δ Neumann operatörleri daha yüksek mertebelerden türevler içermesine rağmen, aşağıda çözümü verilen ters saçılma probleminde GIBC'ler sadece toplam alanın birinci mertebeden türevini içerecek şekilde yeniden düzenlendiğinden dolayı, (4.7-4.9) eşitlikleri çözüm için yeterli olacaktır.

4.1.2 Kalınlık Değişiminin Bulunması

Γ üzerindeki toplam alan ve toplam alanın kısmi türevlerini bulduktan sonra; şimdi Dirichlet durumu için (2.11) GIBC ifadesi, Neumann durumu için ise (2.12) GIBC ifadesinden $\delta(s)$ kalınlık fonksiyonunu belirleyecek bir yaklaşım sunulacaktır. Bu yaklaşıma göre; öncelikle GIBC ifadeleri, birinci mertebe için cebirsel LDS'ye dönüştürülürken, ikinci ve üçüncü mertebe için cebirsel Non-Lineer Denklem Sistemlerine (NDS'ye) dönüştürülmektedir. Bu dönüşümden sonra, LDS'ler en küçük kareler anlamında, NDS'ler ise Newton-Raphson yöntemi kullanılarak çözülmektedir. Aşağıda ilk olarak, Dirichlet ve Neumann durumları için GIBC'lerin diferansiyel denklem sistemlerinden (DDS) Cebirsel Denklem Sistemlerine (CDS) dönüştürülmesi, akabinde de bu CDS'lerin çözülmesi verilmektedir.

4.1.2.1 Dirichlet Durumunda GIBC'lerin Cebirsel Denklem Sistemlerine Dönüştürülmesi

(2.52-2.54)'de açık ifadeleri verilen D^δ operatörleri (2.11) GIBC ifadesinde yerine koyulup, sonra da elde edilen eşitliğin her iki tarafı

$$v_m = e^{-i\frac{2\pi s}{|\Gamma|}m}, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad (4.10)$$

ile çarpılıp Γ üzerinde integre edilirse, birinci mertebe için

$$\int_{\Gamma} u^\delta v_m ds = - \int_{\Gamma} \delta \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad (4.11)$$

ikinci mertebe için

$$\int_{\Gamma} u^\delta v_m ds = - \int_{\Gamma} \delta \left(1 - \frac{1}{2} \delta c\right) \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad (4.12)$$

üçüncü mertebe için ise

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} u^{\delta} v_m ds &= - \int_{\Gamma} \delta \left(1 - \frac{1}{2} \delta c + \frac{1}{3} \delta^2 c^2 \right) \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} v_m ds \\
&\quad + \frac{1}{6} \int_{\Gamma} \delta^3 \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} \right) v_m ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \delta^2 \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) \delta \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} \right) v_m ds, \\
m &= 0, \pm 1, \dots, \pm M,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

yazılabilir. Açıkça görüldüğü gibi; (4.13), toplam alan u^{δ} 'nın eğrisel apsis s 'e göre yüksek mertebeden türevlerini içermektedir. Bu yüksek mertebeden türevlerin hesabındaki nümerik sıkıntılarla uğraşmak yerine, onları sadece birinci mertebeden türevlerin bulunduğu terimler halinde yazmak daha uygun olur. Bu, aşağıda gösterildiği gibi yüksek mertebeden türev içeren integrallerin ardışık kısmi integrasyonu ile gerçekleştirilebilir.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \int_{\Gamma} \delta^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} \right) v_m ds &= - \frac{1}{6} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial s} (\delta^3 v_m) ds \\
&= \frac{1}{6} \int_{\Gamma} \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\delta^3 v_m) ds
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \delta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} \right) v_m ds &= - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial s} \delta \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial s} (\delta^2 v_m) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \delta \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\delta^2 v_m) ds
\end{aligned} \tag{4.15}$$

kısmi integrasyonları (4.13)'de yerine yazılıp, sonuç ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} u^{\delta} v_m ds &= - \int_{\Gamma} \delta \left(1 - \frac{1}{2} \delta c + \frac{1}{3} \delta^2 c^2 + \frac{1}{3} \delta^2 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} \right) \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} v_m ds \\
&\quad - \int_{\Gamma} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial s} \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} \frac{\partial v_m}{\partial s} ds - \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} \frac{\partial^2 v_m}{\partial s^2} ds, \\
m &= 0, \pm 1, \dots, \pm M,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. Böylece; (4.11), (4.12) ve (4.16) ile tekrar formüle edilen ters saçılma problemi, bilinmeyen δ fonksiyonu için integral-diferansiyel denklem sistemlerine dönüşmüştür. Dikkat edilirse; (4.16), u^{δ} 'nin yüksek mertebeden türevlerini içermemektedir, fakat bu sefer de δ ve v_m 'nin yüksek mertebeden türevlerini içeren terimler ortaya çıkmıştır. (4.10)'da açık ifadesi verilen v_m 'nin yüksek mertebeden türevlerinin analitik olarak kolayca bulunabileceği açıktır. Kalınlık değişimini temsil eden δ fonksiyonu ise, s 'e göre her mertebeden türevi analitik olarak kolayca elde edilebilecek

$$\delta(s) = \sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k(s) \tag{4.17}$$

serisi ile aranabilir. Burada; α_k 'lar bilinmeyen katsayılar, ϕ_k fonksiyonları ise

$$\phi_k(s) = e^{-i \frac{2\pi s}{|\Gamma|} k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm K, \tag{4.18}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (4.17) serisi; (4.11), (4.12) ve (4.16)'da yerlerine koyularak, birinci, ikinci ve üçüncü mertebeler için sırasıyla aşağıdaki CDS'ler yazılabilir:

$$\sum_{k=-K}^K \alpha_k \int_{\Gamma} \phi_k \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} v_m ds = - \int_{\Gamma} u^{\delta} v_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-K}^K \alpha_k \int_{\Gamma} \phi_k \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} v_m ds - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^2 c \frac{\partial u^{\delta}}{\partial n} v_m ds \\
&= - \int_{\Gamma} u^{\delta} v_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-K}^K \alpha_k \int_{\Gamma} \phi_k \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^2 c \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds \\
& - \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^3 (c^2 + k_1^2) \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^2 \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial s^2} \right) \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds \\
& + \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^2 \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \frac{\partial \phi_k}{\partial s} \right) \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \frac{\partial v_m}{\partial s} ds \\
& + \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^3 \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \frac{\partial^2 v_m}{\partial s^2} ds \\
& = - \int_{\Gamma} u^\delta v_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Kaplanmış cisim tek bir kaynakla aydınlatılmışsa, bu CDS'ler $(2M + 1) \times (2K + 1)$ boyutludur. Eğer cisim birden fazla kaynakla ayrı ayrı aydınlatılmışsa, T kaynak sayısı olmak üzere, CDS'ler $(2M + 1)T \times (2K + 1)$ boyutlu hale gelir. 1.mertebe GIBC için türetilmiş olan (4.19) lineer olduğu için, bu sistemin çözümü en küçük kareler anlamında [44] kolayca bulunabilir. (4.20) ve (4.21) ise α_k katsayıları için cebirsel NDS'ler olup, non-lineer çözüm yöntemleri kullanılarak çözülebilir.

Son olarak şunu belirtmek gerekir ki; $D^{\delta,1} = \delta$ oldukça basit bir operatör olması nedeniyle, birinci mertebe için herhangi bir seri açılımına gerek duymadan, doğrudan (2.11) GIBC ifadesi kullanılarak Γ üzerinde her bir noktadaki kalınlık en küçük kareler yöntemiyle kolayca hesaplanabilirdi. Fakat bu çalışmada; gerek ikinci ve üçüncü mertebe için türetilen NDS'lerin sayısal çözümlerini hesaplarken (4.19) ile verilen LDS'nin çözümlerini uygun başlangıç değerleri olarak seçebilmek için, gerekse de tüm mertebeler için geçerli bir çözüm yolu vermek adına, δ fonksiyonunun seri açılımına dayanan yukarıdaki yaklaşım kullanılmıştır.

4.1.2.2 Neumann Durumunda GIBC'lerin Cebirsel Denklem Sistemlerine Dönüştürülmesi

Neumann durumunda GIBC ifadelerini CDS'ye dönüştürmek için Dirichlet durumunda kullanılan yaklaşım burada tekrarlanacaktır. Buna göre; (2.69-2.71)'de açık ifadeleri verilen N^δ operatörleri (2.12) GIBC ifadesinde yerine koyulup, sonra da elde edilen eşitliğin her iki tarafı v_m ile çarpılıp Γ üzerinde integre edilirse, birinci mertebe GIBC için

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial s} \delta \frac{\partial}{\partial s} u^\delta + \delta k_1^2 u^\delta \right) v_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad (4.22)$$

ikinci mertebe GIBC için

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c \right) \frac{\partial}{\partial s} u^\delta + \left(\delta + \frac{1}{2} \delta^2 c \right) k_1^2 u^\delta \right) v_m ds, \quad (4.23)$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,$$

üçüncü mertebe için ise

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 c^2 + \frac{2}{3} \delta^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} u^\delta \right) v_m ds \\ &+ \int_{\Gamma} \left(\delta + \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} + \delta \left(\frac{\partial \delta}{\partial s} \right)^2 \right) k_1^2 u^\delta v_m ds \\ &+ \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta^3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} u^\delta \right) v_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. Dirichlet durumunda sadece üçüncü mertebe GIBC için türetilmiş olan (4.13), u^δ 'nin yüksek mertebeden türevlerini içerirken, burada her üç mertebe GIBC için üretilmiş olan (4.22-4.24) eşitliklerinin tümü bu yüksek mertebeden türevleri içermektedir. Bu durumda her bir eşitlik için, u^δ 'nin yüksek mertebeden türevleri yok

olana kadar ardışık kısmi integrasyonlar uygulanıp, sadece birinci mertebeden türevlerin bulunduğu ifadeler türetilir. Buna göre; birinci mertebe için

$$\int_{\Gamma} \delta \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} v_m ds = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} (\delta v_m) ds, \quad (4.25)$$

ikinci mertebe için

$$\int_{\Gamma} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c \right) \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} v_m ds = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c \right) v_m \right) ds, \quad (4.26)$$

üçüncü mertebe için

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 c^2 + \frac{2}{3} \delta^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} \right) \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} v_m ds \\ = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 c^2 + \frac{2}{3} \delta^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} \right) v_m \right) ds, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta^3 \right) \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} v_m ds = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta^3 \right) v_m \right) ds, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial s} \delta^3 \right) \frac{\partial^3 u^\delta}{\partial s^3} v_m ds = - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta^3 \right) v_m \right) ds \\ = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta^3 \right) v_m \right) ds, \end{aligned} \quad (4.29)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \delta^3 \frac{\partial^4 u^\delta}{\partial s^4} v_m ds = - \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 u^\delta}{\partial s^3} \frac{\partial}{\partial s} (\delta^3 v_m) ds = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial s^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\delta^3 v_m) ds \\ = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial^3}{\partial s^3} (\delta^3 v_m) ds, \end{aligned} \quad (4.30)$$

kullanılarak,

$$P_m(s) = k_1^2 u^\delta v_m - \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} \quad (4.31)$$

olmak üzere, (4.22)

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds = \int_{\Gamma} \delta P_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad (4.32)$$

halinde, (4.23)

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds = \int_{\Gamma} \delta P_m ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \delta^2 c \left(k_1^2 u^\delta v_m + \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} \right) ds, \quad (4.33)$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,$$

halinde, (4.24) ise

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds \\ &= \int_{\Gamma} \delta P_m ds + \frac{1}{2} \delta^2 c \int_{\Gamma} \left(k_1^2 u^\delta v_m + \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} \right) ds \\ &+ \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \delta^3 \left(k_1^4 u^\delta v_m - c^2 \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} - 2k_1^2 \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} - \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial^3 v_m}{\partial s^3} \right) ds \quad (4.34) \\ &- \int_{\Gamma} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial s} \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial^2 v_m}{\partial s^2} ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \delta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} P_m ds \\ &+ \int_{\Gamma} \delta \left(\frac{\partial \delta}{\partial s} \right)^2 k_1^2 u^\delta v_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \end{aligned}$$

halinde yazılabilir. Son olarak; δ 'nın (4.17)'de verilen serisi, (4.32-4.34) ile verilen integral-diferansiyel denklem sistemlerinde yerlerine koyulursa, sırasıyla

$$\sum_{k=-K}^K \alpha_k \int_{\Gamma} \phi_k P_m ds = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-K}^K \alpha_k \int_{\Gamma} \phi_k P_m ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^2 c \left(k_1^2 u^\delta v_m + \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} \right) ds \\
& = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-K}^K \alpha_k \int_{\Gamma} \phi_k P_m ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^2 c \left(k_1^2 u^\delta v_m + \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} \right) ds \\
& + \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^3 \left(k_1^4 u^\delta v_m - c^2 \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} - 2k_1^2 \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} - \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial^3 v_m}{\partial s^3} \right) ds \\
& - \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^2 \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \frac{\partial \phi_k}{\partial s} \right) \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \frac{\partial^2 v_m}{\partial s^2} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^2 \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial s^2} \right) P_m ds \\
& + \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right) \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \frac{\partial \phi_k}{\partial s} \right)^2 k_1^2 u^\delta v_m ds = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds, \\
& m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

ile verilen CDS'ler oluşur. Dirichlet durumunda olduğu gibi; birinci mertebe GIBC ifadesinden türetilen (4.35) lineer olduğu için en küçük kareler anlamında, ikinci ve üçüncü mertebe GIBC ifadelerinden türetilen (4.36) ile (4.37) ise NDS olduğu için non-lineer çözüm yöntemleri kullanılarak çözülebilir. Bu non-lineer çözüm yöntemlerinden biri aşağıda anlatılmaktadır.

4.1.2.3 Newton-Raphson Yöntemi ile Non-Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

GIBC'lerde bulunan δ kalınlık fonksiyonun belirlenmesi için (4.17) ile verilen serideki α_k katsayılarının bulunması gerekir. α_k katsayıları birinci mertebe için Dirichlet ve Neumann durumlarında sırasıyla (4.19) ve (4.35) LDS'lerinin en küçük kareler anlamında çözülmesiyle kolayca bulunabilir. İkinci ve üçüncü mertebe için bu

katsayıların bulunması ise; Dirichlet durumunda (4.20) ile (4.21) NDS'lerinin ve Neumann durumunda (4.36) ile (4.37) NDS'lerinin çözümüne indirgenmişti. Bu bölümde, söz konusu NDS'lerin Newton-Raphson tipinde iteratif bir yöntem ile nasıl çözüleceği anlatılmaktadır.

Çözümü aranan NDS'lerden her biri, α_k katsayıları için sürekli türevlenebilir $F: \mathbb{C}^{2K+1} \rightarrow \mathbb{C}^{2M+1}$ fonksiyonuyla temsil edilsin. Bu takdirde;

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{-K} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

olmak üzere, Newton anlamında iteratif çözüm

$$J_F(\alpha^{(t)})(\alpha^{(t+1)} - \alpha^{(t)}) = -F(\alpha^{(t)}) \quad (4.39)$$

kullanılarak bulunur. Burada; (t) iterasyonu gösterirken, J_F Jakobiyeen matrisi ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$J_F = \frac{\partial(F^{(-M)}, \dots, F^{(m)}, \dots, F^{(M)})}{\partial(\alpha_{-K}, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_K)} \quad (4.40)$$

Bu matrisin elemanları; Dirichlet durumunda ikinci merteye için türetilen NDS'de

$$\frac{\partial F^{(m)}}{\partial \alpha_k} = \int_{\Gamma} \phi_k \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds - \int_{\Gamma} \delta \phi_k c \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds \quad (4.41)$$

ve üçüncü merteye için türetilen NDS'de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{(m)}}{\partial \alpha_k} = & \int_{\Gamma} \phi_k \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds - \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=-K}^K \alpha_k \phi_k \right)^2 c \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds \\
& - \int_{\Gamma} \delta^2 \phi_k (c^2 + k_1^2) \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(2\delta \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} \phi_k + \delta^2 \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial s^2} \right) \frac{\partial u^\delta}{\partial n} v_m ds \\
& + \int_{\Gamma} \left(2\delta \frac{\partial \delta}{\partial s} \phi_k + \delta^2 \frac{\partial \phi_k}{\partial s} \right) \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \frac{\partial v_m}{\partial s} ds \\
& + \int_{\Gamma} \delta^2 \phi_k \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \frac{\partial^2 v_m}{\partial s^2} ds
\end{aligned} \tag{4.42}$$

iken, Neumann durumunda ikinci mertebe için türetilen NDS'de

$$\frac{\partial F^{(m)}}{\partial \alpha_k} = \int_{\Gamma} \phi_k P_m ds + \int_{\Gamma} \delta \phi_k c \left(k_1^2 u^\delta v_m + \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} \right) ds \tag{4.43}$$

ve üçüncü mertebe için türetilen NDS'de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{(m)}}{\partial \alpha_k} = & \int_{\Gamma} \phi_k P_m ds + \int_{\Gamma} \delta \phi_k c \left(k_1^2 u^\delta v_m + \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} \right) ds \\
& + \int_{\Gamma} \delta^2 \phi_k \left(k_1^4 u^\delta v_m - c^2 \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} - 2k_1^2 \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial v_m}{\partial s} - \frac{\partial u^\delta}{\partial s} \frac{\partial^3 v_m}{\partial s^3} \right) ds \\
& - \int_{\Gamma} \left(2\delta \frac{\partial \delta}{\partial s} \phi_k + \delta^2 \frac{\partial \phi_k}{\partial s} \right) \frac{\partial u^\delta}{\partial n} \frac{\partial^2 v_m}{\partial s^2} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(2\delta \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} \phi_k + \delta^2 \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial s^2} \right) P_m ds \\
& + \int_{\Gamma} \left(\left(\frac{\partial \delta}{\partial s} \right)^2 \phi_k + 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial s} \frac{\partial \phi_k}{\partial s} \right) k_1^2 u^\delta v_m ds
\end{aligned} \tag{4.44}$$

olur. P_m fonksiyonun açık ifadesi (4.31)'de verilmiştir. Eğer J_F kare matris ise, (4.39) J_F Jakobiyen matrisinin tersi alınarak çözülebilir. Aksi takdirde, (4.39)'un çözümleri en küçük kareler anlamında bulunabilir.

Son olarak şunu da belirtmek gerekir ki; $\alpha^{(0)}$ başlangıç değerinin seçimi Newton algoritmasının yakınsaması için kritik bir önem teşkil eder. Neyse ki; birinci mertebeden GIBC'ler için türetilen LDS'lerin çözümünün başlangıç değeri olarak kabul edilmesi büyük olasılıkla yeterli olacaktır.

4.2 Sayısal Sonuçlar

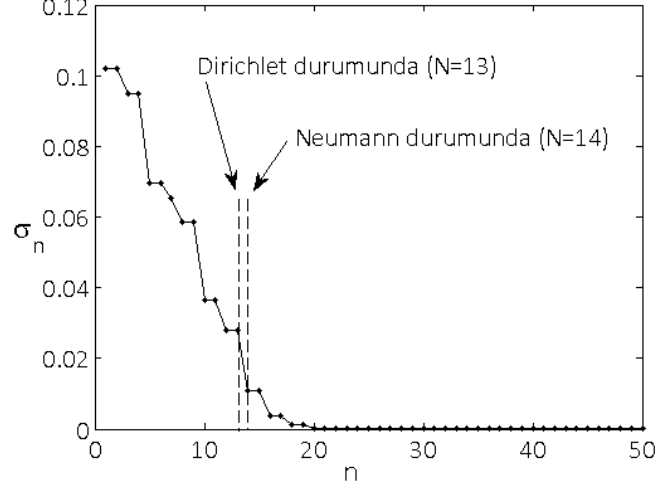
Bu bölümde, kaplamanın kalınlıklığı δ 'nın belirlenmesi ya da başka bir ifadeyle PEC (PMC) yüzeyi Γ^δ 'nin görüntülenmesi amacıyla yukarıda söz edilen yaklaşımın doğruluğu ve uygulanabilirliği çeşitli sayısal uygulamalarla gösterilmektedir.

Γ^C çemberi üzerinde ölçülmüş $u_{s,-}^\delta$ saçılan alanı, gerçek modele ait ilgili düz saçılma probleminin SEY ile 100 noktada hesaplanmasıyla sentetik olarak ele edilmiştir. r , 0 ile 1 aralığında bulunan rastgele bir sayı olmak üzere; her bir saçılan alan değerine $n_r |u_{s,-}^\delta| e^{2i\pi r}$ şeklinde %10'luk ($n_r=0.10$) rastgele bir gürültü eklenmiştir.

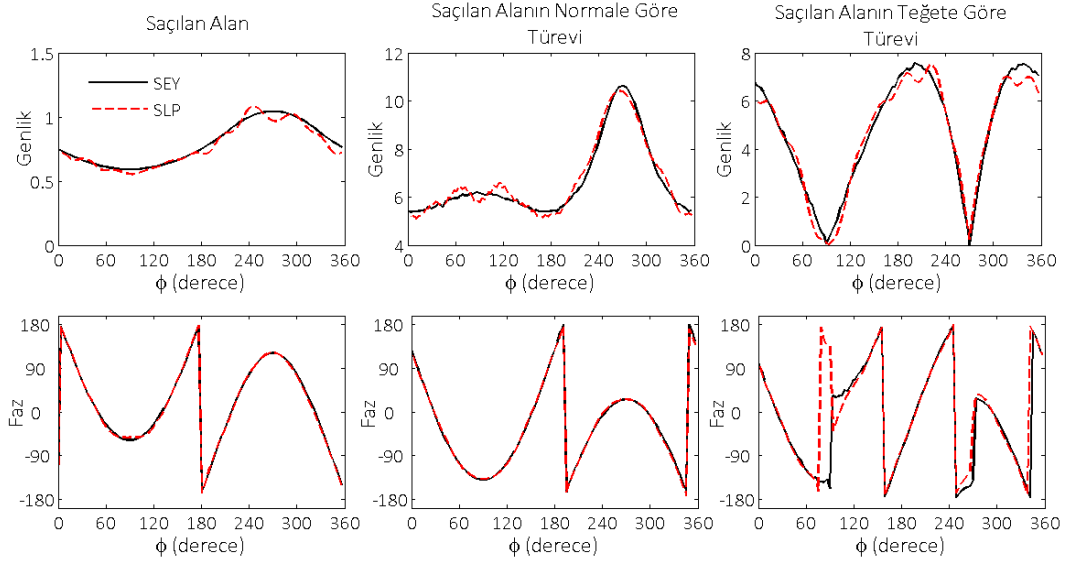
SLP uygulanırken, burada verilen tüm örnekler için, denklemi $0.9x_F$ olan Γ^F yüzeyi üzerinde tanımlı Ψ yoğunluk fonksiyonu 50 noktada bulunup, sonra da Γ yüzeyi üzerindeki toplam alan u^δ ile toplam alanın normal ve teğetsel türevleri $\frac{\partial u^\delta}{\partial s}$ ve $\frac{\partial u^\delta}{\partial n}$ 100 noktada hesaplanmıştır. Son olarak ise, v_m 'nin (4.10) ile verilen ifadesindeki M parametresi ile δ 'nın (4.17) ile verilen serisindeki K parametresi 8 seçilerek; Dirichlet durumunda (4.19-4.21) denklem sistemleri, Neumann durumunda ise (4.35-4.37) denklem sistemleri çözülmüştür. Bu süreçteki tüm integraller Trapez kuralı kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Sayısal örneklerle geçmeden son olarak şunu söylemek gerekir ki; burada ele alınan problem için Newton-Raphson yöntemi genelde ilk 20 iterasyon içinde bir değere yakınsamaktadır.

İlk iki örnekte, (4.5) TSVD inversiyon formülündeki N kesim parametresi dikkate alınarak SLP yönteminin doğruluğu incelenmiştir. Buna göre; ilk uygulamada 45 cm yarıçaplı bir dairesel PEC'in (PMC'nin) üzerine yerleştirilmiş dielektrik katsayısı $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.1$ (S.m⁻¹) olan 5 cm sabit kalınlıklı dielektrik kaplama, $\theta = \pi/2$ açısıyla 500 MHz frekansa sahip bir düzlemsel dalga ile aydınlatılmıştır. Bu durumda, (4.2)'de açık ifadesi verilen A operatörünün hesaplanan tekil değerleri σ_n 'ler Şekil 4.2'deki gibi çıkmaktadır. Çok küçük değerlere sahip σ_n 'ler (4.5) TSVD inversiyon

formülünden çıkarıldığında, kötü-kurulmuş olan (4.2) problemi regülerize olur. 1 m yarıçaplı Γ^C çemberi üzerinde ölçülen saçılan alan için MDP'ye göre Dirichlet durumunda kesim parametresi $N=13$, Neumann durumunda ise $N=14$ çıkmaktadır.



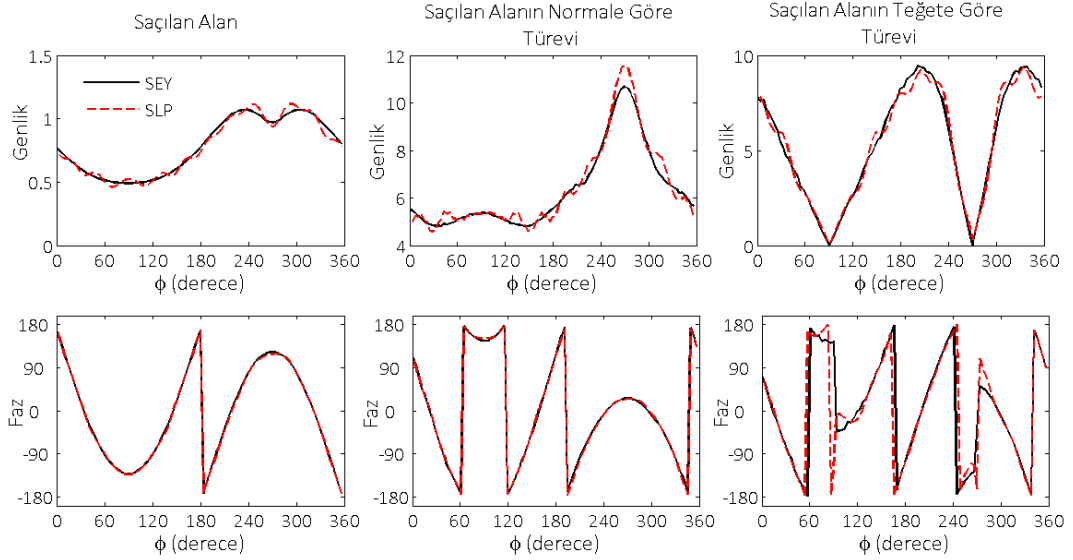
Şekil 4. 2 Sabit kalınlıklı dairesel kaplama için A operatörünün σ_n tekil değerleri ve MDP'ye göre kesim parametresinin belirlenmesi



Şekil 4. 3 Dirichlet durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplama için SLP ve SEY ile hesaplanan Γ üzerindeki toplam alan ile türevlerinin genlik ve fazları

MDP'ye göre kesim parametreleri belirlendikten sonra, (4.5) aracılığıyla hesaplanan Ψ yoğunluk fonksiyonları (4.7-4.9)'da yerlerine koyularak Γ yüzeyi üzerinde toplam alan ve toplam alanın normal ve teğetsel türevleri hesaplanmıştır. SLP ile hesaplanan bu alanların, SEY ile hesaplanan gerçek alanlarla karşılaştırması Dirichlet durumu için Şekil

4.3'de, Neumann durumu için Şekil 4.4'de verilmiştir. Görüldüğü gibi; %10'luk bir gürültüye rağmen SLP kullanılarak hesaplanan alanlar gerçek alana yakındır.



Şekil 4. 4 Neumann durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplama için SLP ve SEY ile hesaplanan Γ üzerindeki toplam alan ile türevlerinin genlik ve fazları

ikinci örnekte ise, dış yüzeyi Γ' 'nin parametrik denklemi

$$X_{\Gamma} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{25} \sin(6t) + \frac{\lambda}{20} \cos(5t) + \frac{3}{100} \cos(6t) \right) \cos t \\ \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{25} \sin(6t) + \frac{\lambda}{20} \cos(5t) + \frac{3}{100} \cos(6t) \right) \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi), \quad (4.45)$$

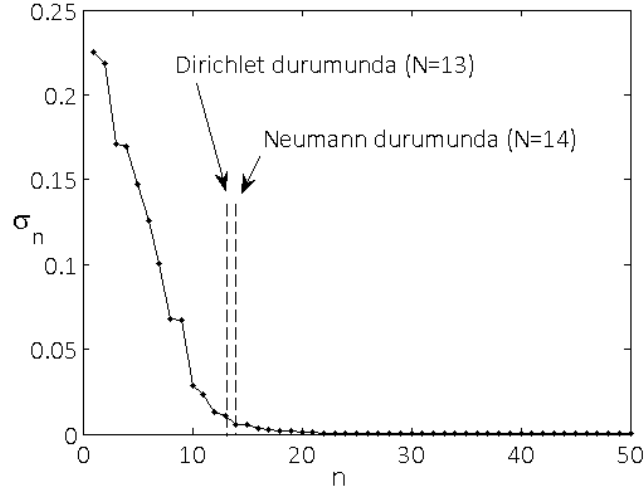
ve kalınlığı

$$\delta(t) = 0.08\lambda(1 - 0.4 \sin(6t)), \quad t \in [0, 2\pi), \quad (4.46)$$

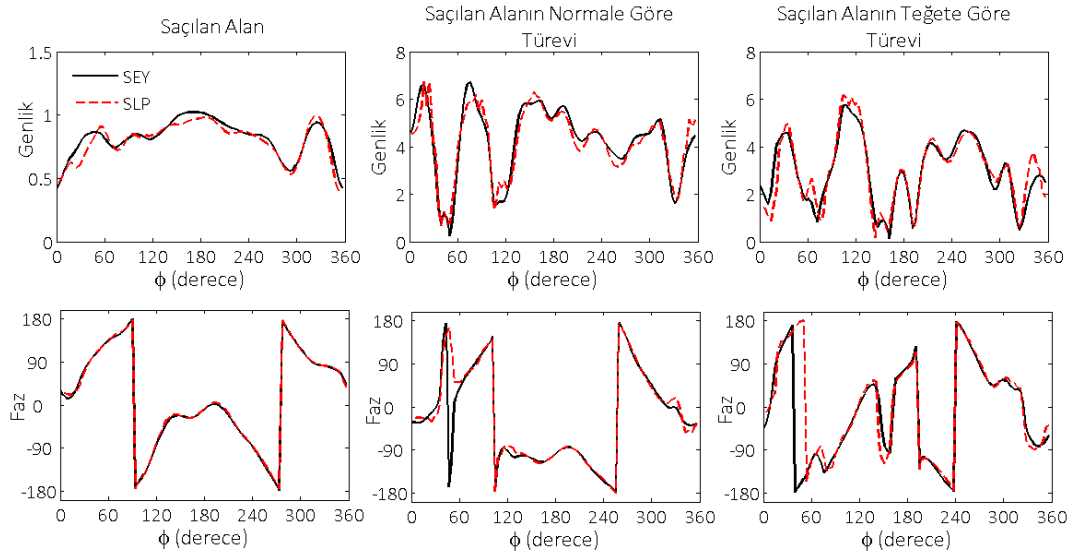
olan daha karmaşık bir kaplama göz önüne alınmıştır. Dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.05 \text{ (S.m}^{-1}\text{)}$ olan bu kaplama 300 MHz frekansa sahip bir elektromagnetik dalga ile $\theta = 0$ açısıyla aydınlatılıp, saçılan alan yarıçapı $0.7\lambda=70 \text{ cm}$ olan bir Γ^C çemberi üzerinde ölçülmüştür. Söz konusu örnek için A operatörünün hesaplanan tekil değerleri Şekil 4.5'de gösterilmiştir.

MDP'ye göre, TSVD inversiyon formülü Dirichlet durumunda $N=13$ 'de, Neumann durumunda ise $N=14$ 'de kesilerek, Γ üzerinde hesaplanan toplam alan ve türevlerinin genlik ve fazları Şekil 4.6 ve Şekil 4.7'de gösterilmiştir. Açıkça görüldüğü gibi; SLP'yle

hesaplanan alanlar ile SEY'le hesaplanan gerçek alanlar arasındaki fark gürültü mertebesinde fazla değildir.



Şekil 4. 5 Kalınlık değişimi (4.46) ile ve dış yüzeyin parametrik denklemi (4.45) ile verilen kaplama için A operatörünün σ_n tekil değerleri ve MDP'ye göre kesim parametresinin belirlenmesi



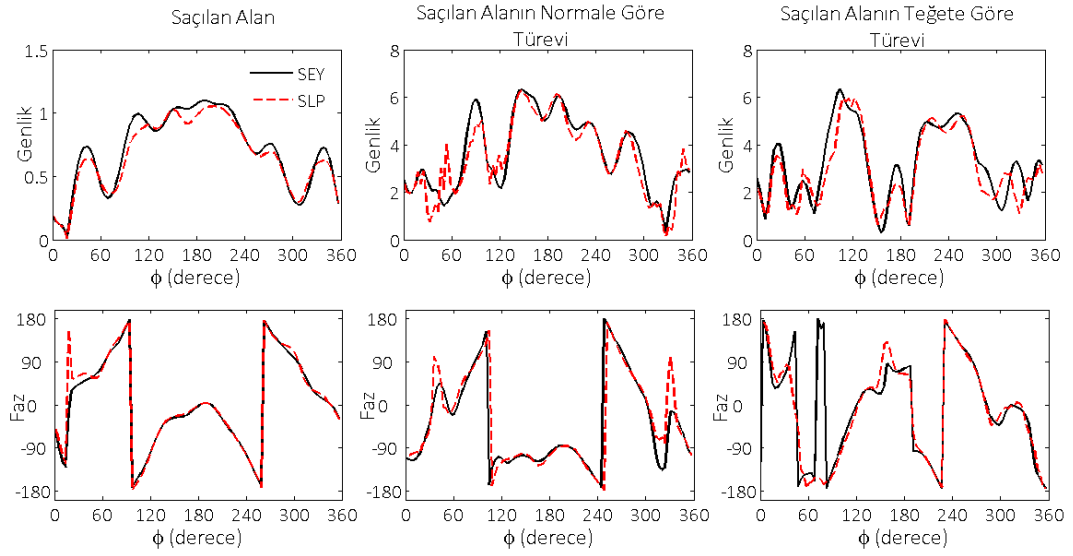
Şekil 4. 6 Dirichlet durumunda, kalınlık değişimi (4.46) ile ve dış yüzeyin parametrik denklemi (4.45) ile verilen kaplama için SLP ve SEY ile hesaplanan Γ üzerindeki toplam alan ile türevlerinin genlik ve fazları

SLP yaklaşımını kullanarak Γ üzerindeki toplam alan ve toplam alanın eğrisel apsis s ile birim normal vector $\vec{n}'$ 'ye göre kısmi türevlerinin yeterli doğrulukta hesaplandığını gösterdikten sonra, sıradaki örnekler, Dirichlet durumunda (4.19-4.21) denklem sistemlerini, Neumann durumunda ise (4.35-4.37) denklem sistemlerini çözerek hesaplanan δ kalınlığının doğruluğunun sınanmasına ayrılmıştır. Bu örneklerde, δ

fonksiyonu Γ üzerinde 100 farklı noktada hesaplanmıştır. Her bir noktadaki hesaplanan kalınlık δ_n , gerçek kalınlık ise $\overline{\delta_n}$ olmak üzere; burada anlatılan yaklaşıma göre üretilen δ kalınlığının hatası

$$E_r = \frac{1}{100} \sum_{n=1}^{100} \frac{|\overline{\delta_n} - \delta_n|}{|\overline{\delta_n}|} \quad (4.1)$$

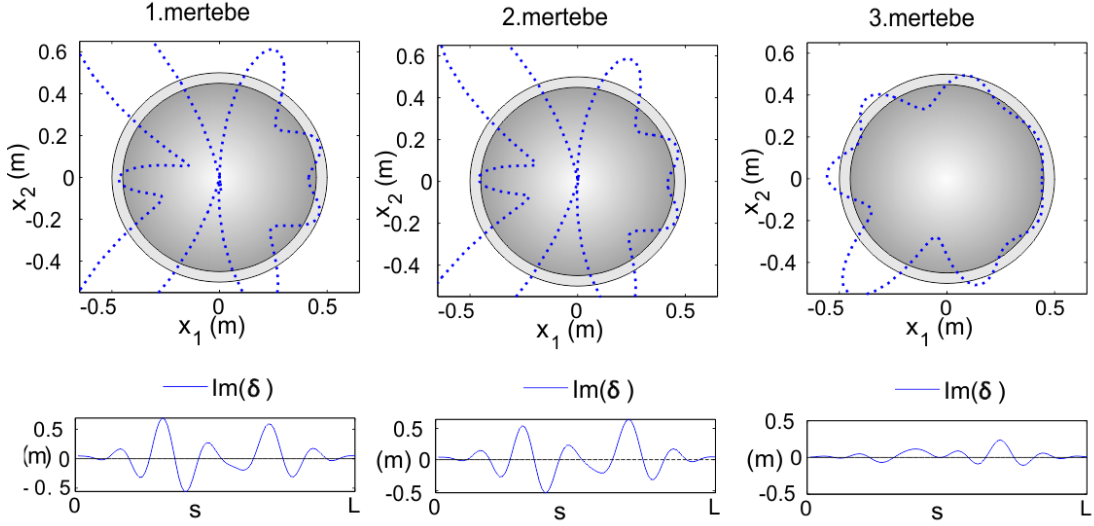
mutlak hata fonksiyonuyla hesaplanmıştır.



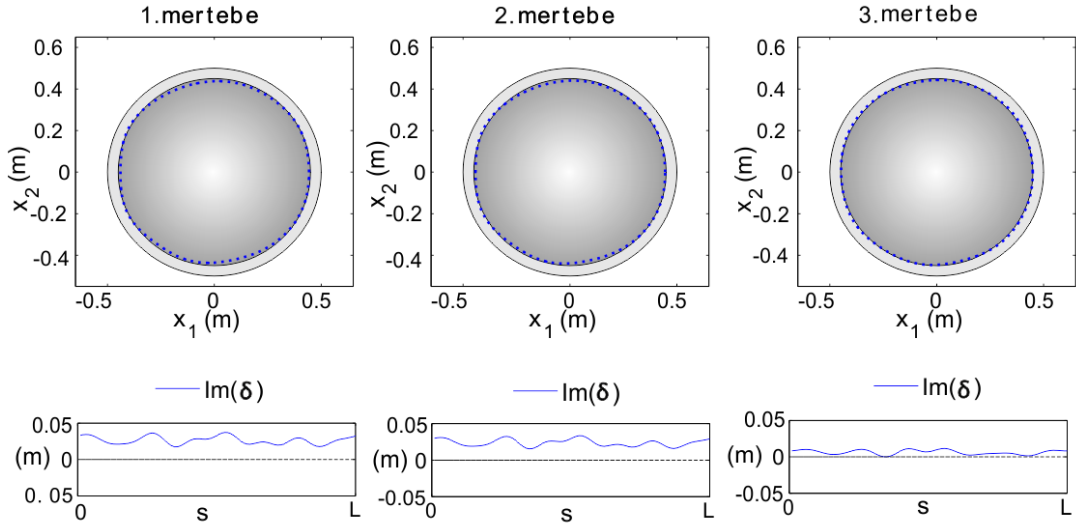
Şekil 4. 7 Neumann durumunda, kalınlık değişimi (4.46) ile ve dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ile verilen kaplama için SLP ve SEY ile hesaplanan Γ üzerindeki toplam alan ile türevlerinin genlik ve fazları

δ kalınlığının bulunmasına ya da başka bir ifadeyle PEC (PMC) yüzeyi Γ^δ 'nin görüntülenmesine dair ilk örnek için, aydınlatma açısı $\theta = 0$ alınıp, diğer tüm parametreleri aynı tutularak bu bölümdeki ilk uygulama seçilmiştir. Dairesel kesitli ve 5 cm sabit kalınlıklı bir kaplamaya sahip olan bu cisim için MDP'ye göre belirlenmiş kesim parametreleri Dirichlet durumunda $N=13$, Neumann durumunda ise $N=15$ alınarak ters saçılma problemi çözülmüştür. Cisim tek bir açıyla aydınlatıldığında, δ kalınlığının hatası Dirichlet durumunda birinci, ikinci ve üçüncü mertebe için sırasıyla $E_r = 5.89$, $E_r = 5.65$ ve $E_r = 1.64$ olup, bu kalınlıklara göre çizilen Γ^δ yüzeyleri Şekil 4.8'de gösterilmektedir. Açıkça görüldüğü gibi her ne kadar mertebe büyüdükçe, hata azalsa da görüntüleme başarısız olmuştur. Bunun üzerine, cisim iki düzlemsel dalgayla $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ açılarıyla aydınlatılmıştır. Her bir aydınlatma için üretilen sentetik veriler

kullanıldığında, MDP'ye göre belirlenmiş kesim parametreleri iki aydınlatma için de $N=13$ alınarak ters problem tekrar çözülmüştür. Bunun sonucunda, δ kalınlığının hatası her üç mertebe için sırasıyla $E_r = 0.56$, $E_r = 0.49$ ve $E_r = 0.15$ değerlerine düşmüştür. Şekil 4.9'da görüldüğü gibi, iki aydınlatma durumunda her üç mertebe için de Γ^δ yüzeyleri başarıyla görüntülenmiştir. Ayrıca δ değerlerinin sanal kısmı beklenildiği şekilde sifıra yaklaşmıştır.



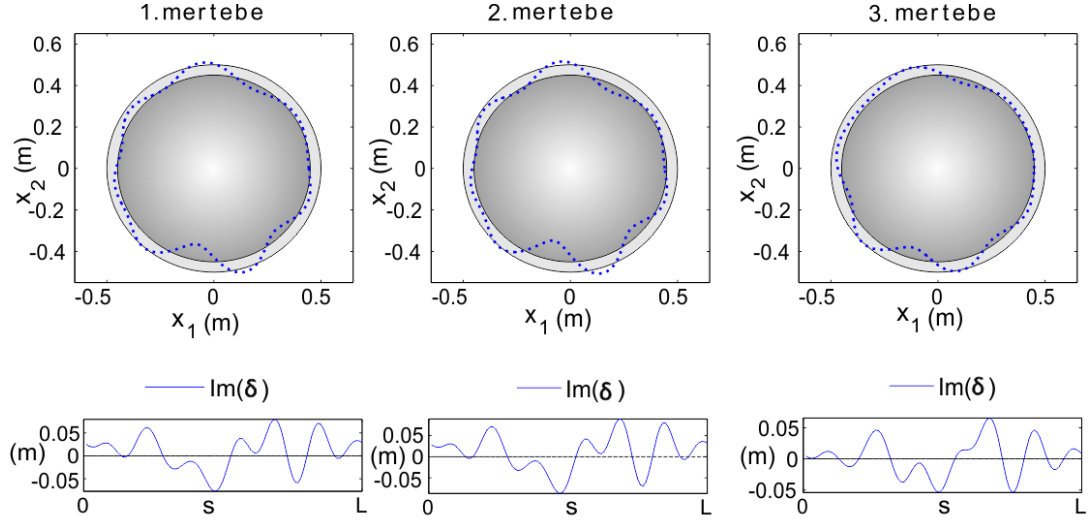
Şekil 4. 8 Dirichlet durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplamanın bir düzlemsel dalga ile aydınlatılması sonucu PEC yüzeyinin görüntülenmesi



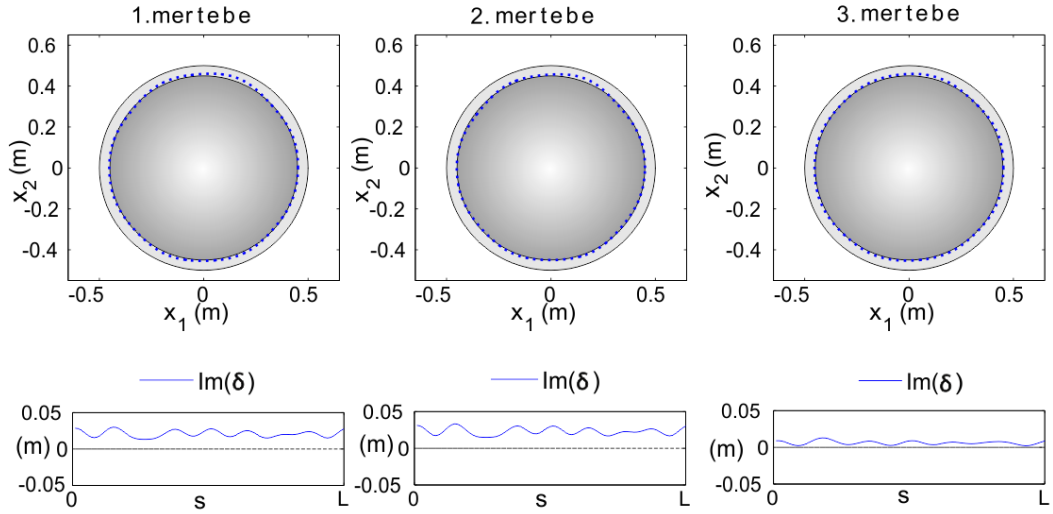
Şekil 4. 9 Dirichlet durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplamanın iki düzlemsel dalga ile ayrı ayrı aydınlatılması sonucu PEC yüzeyinin görüntülenmesi

Aynı problem, Neumann durumunda tek aydınlatma için çözüldüğünde, δ kalınlığının hatası üç mertebe için sırasıyla $E_r = 0.88$, $E_r = 0.99$ ve $E_r = 0.66$ olup, görüntülenene

Γ^δ yüzeyleri Şekil 4.10'da verilmektedir. İki aydınlatma için ise, kesim parametreleri MDP'ye göre 15 seçilerek problem tekrar çözüldüğünde hatalar $E_r = 0.44$, $E_r = 0.47$ ve $E_r = 0.16$ değerlerine düşmektedir. Son hesaplanan δ kalınlıklarına göre çizilen Γ^δ yüzeyleri Şekil 4.11'de gösterilmektedir.



Şekil 4. 10 Neumann durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplamanın bir düzlemsel dalga ile aydınlatılması sonucu PMC yüzeyinin görüntülenmesi

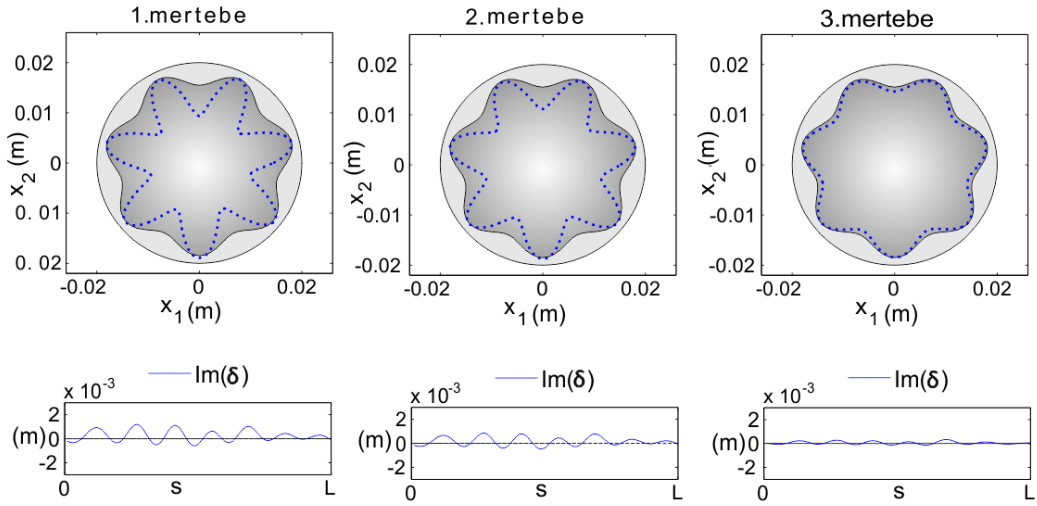


Şekil 4. 11 Neumann durumunda, sabit kalınlıklı dairesel kaplamanın iki düzlemsel dalga ile ayrı ayrı aydınlatılması sonucu PMC yüzeyinin görüntülenmesi

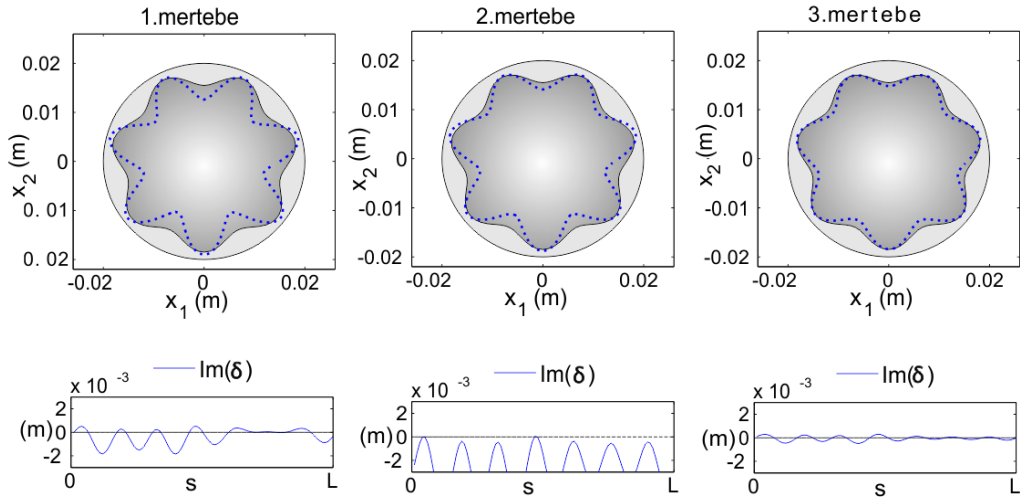
Bir sonraki uygulamada, kalınlığı

$$\delta(t) = 0.1\lambda(1 - 0.5 \sin(7t)), \quad t \in [0, 2\pi), \quad (4.2)$$

fonksiyonuna göre değişen, dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 3.5\varepsilon_0$ ve iletkenlik katsayısı $\sigma_1 = 0.05 \text{ (S.m}^{-1}\text{)}$ olan, 2 cm yarıçaplı dairesel bir kaplama ele alınmıştır. Bu cisim $\theta = t\pi/3, t = 0,1, \dots, 5$, geliş açılara sahip 10 GHz frekanslı 6 düzlemsel dalga tarafından aydınlatılıp, her birine karşılık gelen saçılan alan 4 cm yarıçaplı Γ^C çemberi üzerinde üretilmiştir.



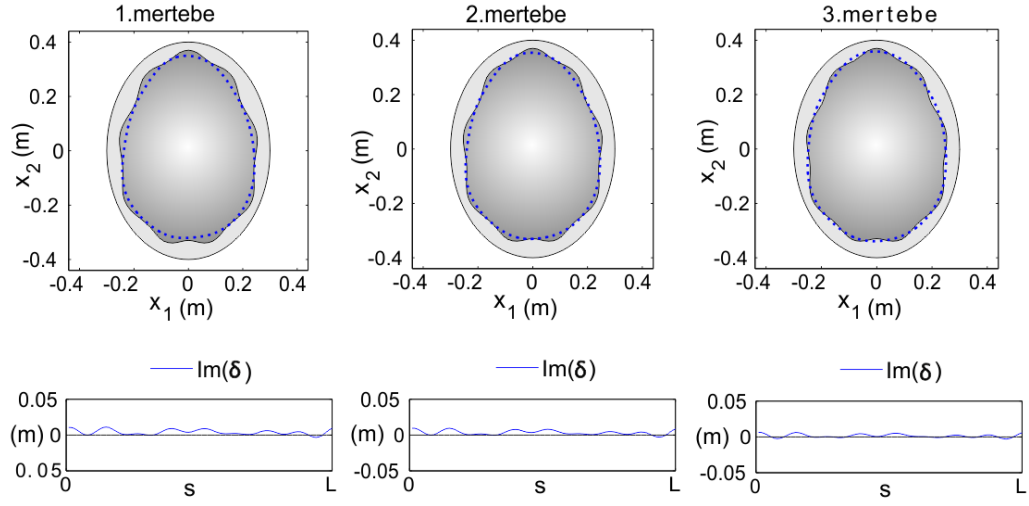
Şekil 4. 12 Üzerinde değişken kalınlıklı dairesel kaplama olan PEC yüzeyinin görüntülenmesi



Şekil 4. 13 Üzerinde değişken kalınlıklı dairesel kaplama olan PMC yüzeyinin görüntülenmesi

Dirichlet durumunda her bir aydınlatma için TSVD inversiyon formülü Morozov kriterine göre $N = 13$ 'de kesilerek, ters problem çözülmüştür. Her üç mertebe için de hesaplanan δ kalınlıklarına göre çizilen Γ^δ yüzeyleri Şekil 4.12'de gösterilmektedir.

Hesaplanan δ kalınlıklarının hatası sırasıyla $E_r = 0.82$, $E_r = 0.60$ ve $E_r = 0.19$ 'dur. Neumann durumunda ise, her bir aydınlatma için Morozov kriterine göre TSVD inversiyon formülünün kesim parametresi sırasıyla $N=13, 13, 15, 15, 13$ ve 13 seçilerek problem çözülmüştür. Sırasıyla $E_r = 0.51$, $E_r = 0.85$ ve $E_r = 0.20$ hatalarıyla hesaplanan δ kalınlıklarına göre görüntülenen Γ^δ yüzeyleri Şekil 4.13'de verilmiştir. Hem Dirichlet hem de Neumann durumlarında açıkça görülmektedir ki; arzu edilen doğrulukta sonuçlar sadece üçüncü mertebe GIBC koşulları ile üretilebilmiştir.



Şekil 4. 14 Üzerinde değişken kalınlıklı elips kesitli kaplama olan PEC yüzeyinin görüntülenmesi

Sıradaki örnek için, kalınlığı

$$\delta(t) = \frac{\lambda}{12} (1 - 0.4 \sin(3t) \cos(6t)), \quad t \in [0, 2\pi), \quad (4.3)$$

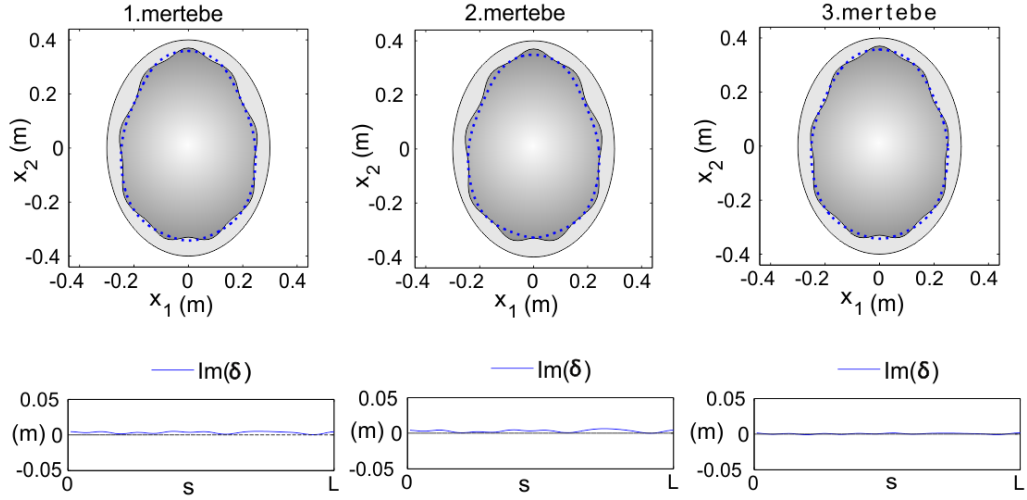
fonksiyonuna göre, dış yüzeyi ise

$$X_\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} \cos t \\ \frac{2\lambda}{3} \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi), \quad (4.4)$$

parametrik denklemlerle değişen bir kaplama ele alınmıştır. Dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$) olan ve değişken bir eğrilığe sahip olan elips kesitli bu kaplamanın 500 MHz frekanslı 6 düzlemsel dalga ile $\theta = t\pi/3, t = 0, 1, \dots, 5$, açılarıyla aydınlatıldığı varsayalım. Her bir gelen dalgaya karşılık 1 m yarıçaplı Γ^C çemberi

üzerindeki sentetik veriler SEY kullanılarak üretilmiştir. Sentetik olarak üretilen bu saçılan alanlar için TSVD inversiyon formülü Morozov kriterine göre sırasıyla $N=9, 10, 10, 11, 10$ ve 9 'da kesilerek ters problem çözülmüştür. Sırasıyla $E_r = 0.29$, $E_r = 0.21$ ve $E_r = 0.15$ hatalarıyla hesaplanan δ kalınlıklarına göre görüntülenen Γ^δ yüzeyleri Şekil 4.14'de verilmiştir.

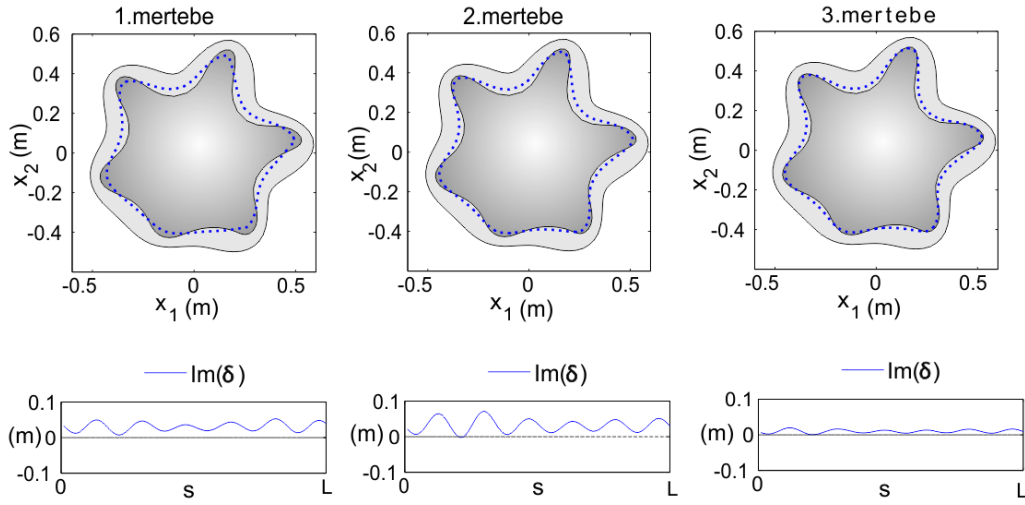
Neumann durumunda ise, TSVD inversiyon formülünün kesim parametresi Morozov kriterine göre tüm aydınlatmalar için $N=11$ seçilerek ters problem çözüldüğünde, hesaplanan δ kalınlıklarının hatası $E_r = 0.17$, $E_r = 0.25$ ve $E_r = 0.14$ çıkmıştır. Şekil 4.15'de görüldüğü gibi; hesaplanan yaklaşık δ kalınlıklarına göre çizilen PMC yüzeyi, özellikle üçüncü mertebe için arzu edilen sonucu vermiştir. Ayrıca δ 'nın sanal kısmı beklenildiği gibi sıfıra yakınsamıştır.



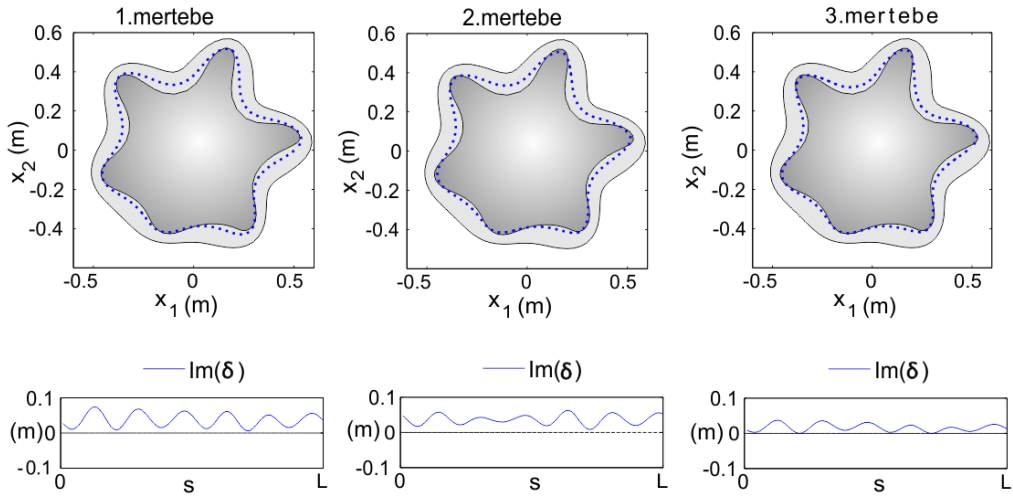
Şekil 4. 15 Üzerinde değişken kalınlıklı elips kesitli kaplama olan PMC yüzeyinin görüntülenmesi

Bu bölümdeki ikinci örnekte, dış yüzeyi Γ 'nın parametrik denklemi (4.45) ile, kalınlık değişimi ise (4.48) ile verilen çok daha karmaşık bir geometriye sahip bir kaplama için SLP yaklaşımıyla Γ üzerindeki toplam alan ve türevlerinin genlik ve fazları verilmişti. Bu uygulamada ise $\delta_0 = 0.08\lambda$ dışında tüm parametreler aynı tutularak, bu cisim $\theta = t\pi/3, t = 0, 1, \dots, 5$, geliş açlarına sahip 300 MHz frekanslı 6 düzlemsel dalga tarafından aydınlatılıp, her bir aydınlatma için saçılan alan yarıçapı yine $0.7\lambda=70$ cm olan bir Γ^C çemberi üzerinde üretilmiştir. Sentetik olarak üretilen bu saçılan alanlar için TSVD inversiyon formülü Morozov kriterine göre Dirichlet durumunda $N=11, 13, 12$,

10, 11, 11'de, Neumann durumunda ise $N=12, 13, 12, 12, 13, 13$ 'de kesilerek ters problem çözülmüştür. Dirichlet durumunda birinci, ikinci ve üçüncü mertebe GIBC kullanılarak elde edilen sonuçlara göre, hata sırasıyla $E_r = 0.50$, $E_r = 0.43$ ve $E_r = 0.18$ çıkmaktadır. Neumann durumunda ise bu hatalar $E_r = 0.48$, $E_r = 0.50$ ve $E_r = 0.24$ olmaktadır. Şekil 4.16 ve Şekil 4.17'de görüldüğü gibi; özellikle üçüncü mertebe için, çok daha kompleks bir geometriye sahip söz konusu kaplanmış cismin Γ^δ yüzeyi başarıyla görüntülenmiştir.

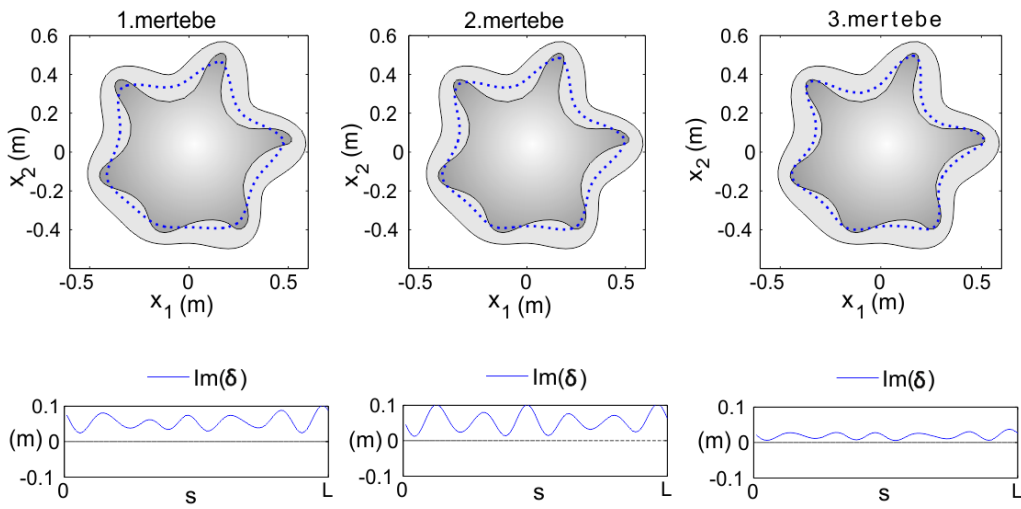


Şekil 4. 16 Dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ve kalınlık değişimi (4.46) ile verilen bir kaplama için PEC yüzeyinin görüntülenmesi

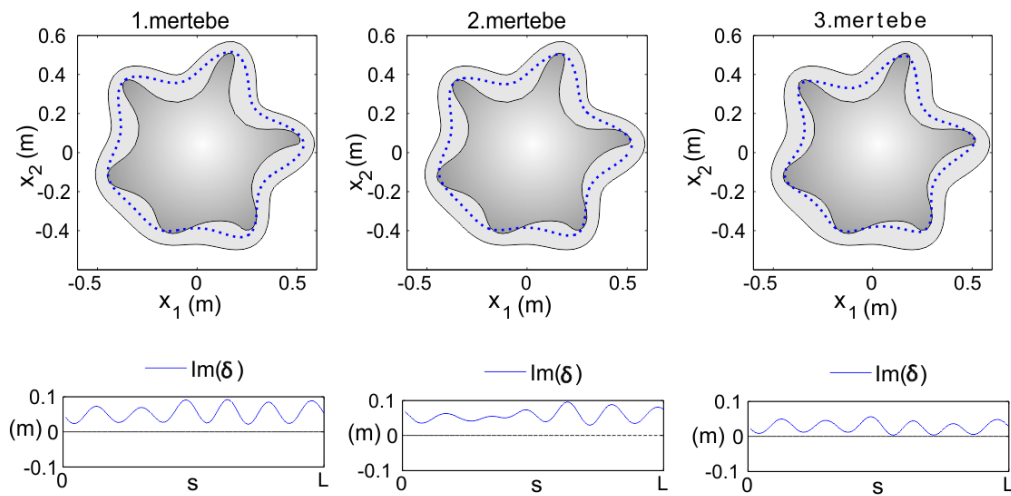


Şekil 4. 17 Dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ve kalınlık değişimi (4.46) ile verilen bir kaplama için PMC yüzeyinin görüntülenmesi

Ters problem açısından δ kalınlığının sınırını belirlemek amacıyla, son incelenen örnek $\delta_0 = 0.1\lambda = 10$ cm'ye çıkarılarak tekrar ele alınmıştır. Morozov kriterlerine göre Dirichlet durumunda kesme parametresi $N=13, 9, 11, 13, 11, 10$; Neumann durumunda ise kesme parametresi $N=11, 10, 11, 12, 13, 11$ seçilerek problem çözüldüğünde, Γ^δ yüzeyi Şekil 4.18 ve Şekil 4.19'da verildiği gibi görüntülenmiştir. Açıkça görüldüğü gibi; görüntüleme sonuçları, ilk iki mertebe için ciddi anlamda kötüleşirken, üçüncü mertebe için biraz bozulmasına rağmen başarılı sayılabilir. δ 'nın hataları Dirichlet durumu için $E_r = 0.67, E_r = 0.59$ ve $E_r = 0.25$ 'e, Neumann durumu için ise $E_r = 0.67, E_r = 0.71$ ve $E_r = 0.35$ 'e yükselmiştir.

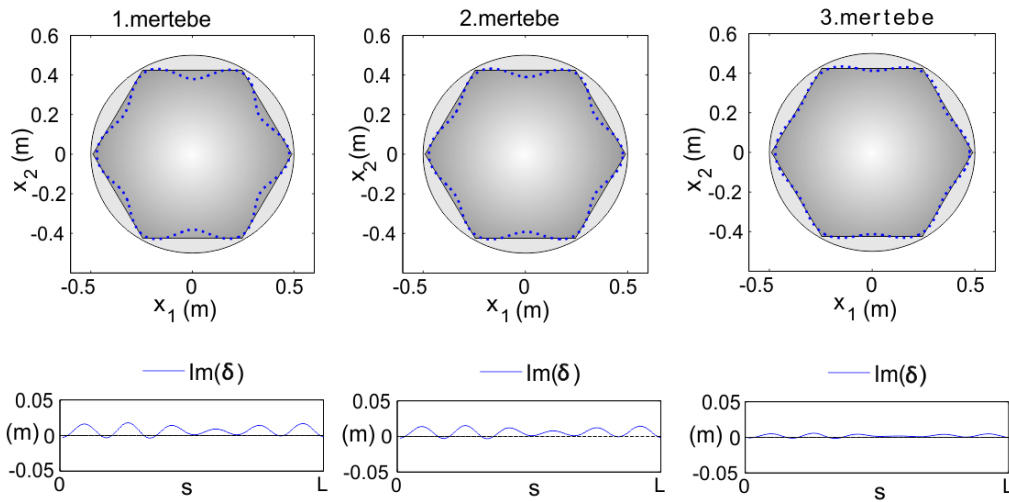


Şekil 4. 18 Dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ve kalınlık değişimi ($\delta_0 = 0.1\lambda$) (4.46) ile verilen bir kaplama için PEC yüzeyinin görüntülenmesi



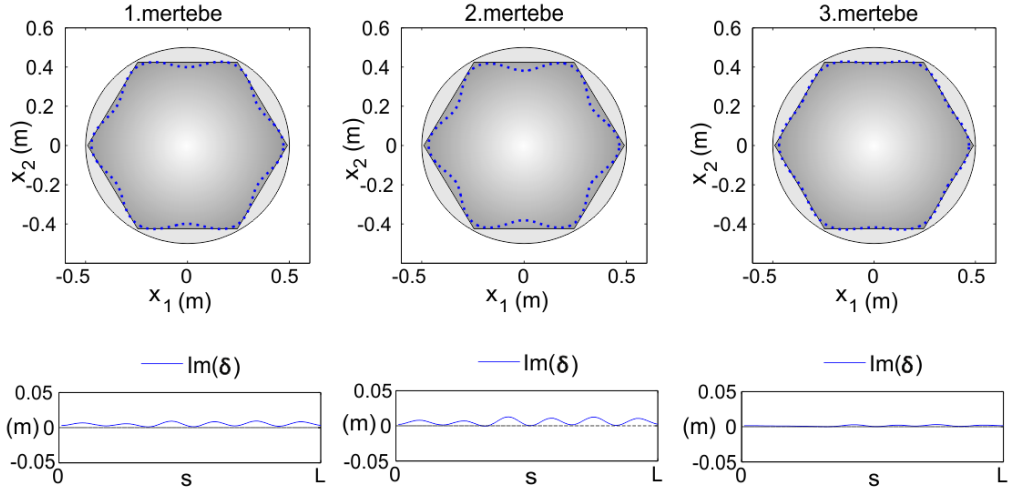
Şekil 4. 19 Dış yüzeyinin parametrik denklemi (4.45) ve kalınlık değişimi ($\delta_0 = 0.1\lambda$) (4.46) ile verilen bir kaplama için PMC yüzeyinin görüntülenmesi

Bu tezde ters problemin çözümüne dair sunulan yaklaşımda, δ kalınlık fonksiyonu (4.17)'de verilen sürekli türevlenebilir fonksiyonların bir serisi olarak aranmaktadır. Bu nedenle şimdiye kadar ele alınan tüm örneklerde, Γ^δ yüzeyi regüler olarak seçilmişti. Son ele alınacak uygulamada ise, kaplamanın iç yüzeyi Γ^δ üzerinde belli sayıda köşe tekillikleri bulunması halinde yaklaşımın geçerliliği sınanacaktır. Buna göre; dielektrik katsayısı $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ ve iletkenliği $\sigma_1 = 0.01$ (S.m⁻¹) olan 50 cm yarıçaplı dielektrik bir dairesel kaplamanın içine bir eşkenar altıgen PEC (PMC) yerleştirilmiştir. Bu altıgenin köşeleri Γ yüzeyine 1 cm uzakta olup, kenarlarının uzaklığı ise 1 cm'den yaklaşık 7.6 cm'ye kadar değişmektedir. Bu cisim 300 MHz frekanslı 6 düzlemsel dalga tarafından ayrı ayrı aydınlatılıp, saçılan alanlar SEY kullanılarak 1 m yarıçaplı Γ^C çemberi üzerinde sentetik olarak üretilmiştir. Morozov kriterlerine göre, Dirichlet durumunda kesme parametresi her bir aydınlatma için sırasıyla $N=13, 9, 11, 13, 11, 10$; Neumann durumunda ise $N=11, 10, 11, 12, 13, 11$ seçilerek ters saçılma problemi çözülmüştür. Dirichlet durumu için Şekil 4.20, Neumann durumu için ise Şekil 4.21'de görüldüğü gibi; burada verilen yaklaşım kaplamanın iç yüzeyinde köşe tekillikleri olması durumunda da geçerliliğini sürdürmektedir. δ 'nın hataları Dirichlet durumu için $E_r = 0.31$, $E_r = 0.26$ ve $E_r = 0.16$, Neumann durumu için ise $E_r = 0.25$, $E_r = 0.43$ ve $E_r = 0.17$ 'dir.



Şekil 4. 20 İç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan dairesel bir kaplama için PEC yüzeyinin görüntülenmesi

Son olarak şunu söylemek gerekir ki; iç yüzeyi üzerinde çok sık köşe tekillikleri bulunan kaplamalar (örneğin Şekil 3.30'daki cisim) için ters saçılma problemine dair burada sunulan yaklaşım, söz konusu köşeleri yakalamakta başarısız olmaktadır.



Şekil 4. 21 İç yüzeyinde köşe tekillikleri bulunan dairesel bir kaplama için PMC yüzeyinin görüntülenmesi

SONUÇ VE ÖNERİLER

Mükemmel elektrik ya da magnetik iletken bir cismin üzerine yerleştirilmiş değişken kalınlıklı ince dielektrik kaplamalar için kaplama kalınlığına göre üçüncü mertebeye kadar GIBC türetilmiştir. Böylece, kaplamanın geometrik ve malzeme özelliklerinin bilgisini taşıyan bu GIBC ifadeleri aracılığıyla, kaplama bölgesindeki toplam alan ve geometrik yapıyla uğraşmadan sadece kaplamanın dış kısmını dikkate alarak, gerçek modelin basitleştirilmiş bir hali olan yaklaşık model oluşturulmuştur ve saçılma problemlerini bu model üzerinde daha kolay bir şekilde çözmek mümkün hale gelmiştir.

GIBC ifadelerinin doğruluk ve geçerliliğini sayısal olarak göstermek amacıyla, gerek gerçek model için gerekse de Dirichlet ve Neumann durumlarında üçüncü mertebeye kadar yaklaşık model için uygun varyasyonel formüller çıkartılarak, düz saçılma problemi SEY ile çözülmüştür. Çeşitli geometrik ve fiziksel özellikteki kaplamalarla, farklı çalışma frekanslarında yapılan simülasyon sonuçları göstermiştir ki; kalınlığı gelen dalganın dalga boyunun (λ 'nın) onda birinden küçük olan kaplamalar için, özellikle üçüncü mertebe GIBC kullanıldığında yöntem tatmin edici sonuçlar üretmiştir. Bazı durumlarda birinci ve ikinci mertebe GIBC ile elde edilen sonuçlar birbirine yaklaşıırken, üçüncü mertebe için elde edilen sonuçlar açık şekilde gerçeğe çok daha yakındır. Ayrıca kaplamanın ortalama kalınlığı düştükçe, her üç mertebe için de yaklaşık modelin hatasının beklenildiği gibi hızla sıfıra gittiği görülmüştür. Kaplamanın kalınlığı sabit tutularak dielektrik katsayısı ve iletkenliğinin değişimi gözlemlendiğinde ise, her ne kadar hata oranında değişim olsa da, yine de kaplama kalınlığı $\lambda/10$ 'dan küçük olduğunda GIBC ifadelerinin yeterli doğrulukta sonuçlar üretmeye devam ettiği söylenebilir.

Benzer şekilde; kaplamanın iç yüzeyinin regüler olmayıp, üzerinde köşe tekillikleri bulunması durumunda da, yapılan simülasyonlarda yaklaşık modelin tatmin edici sonuçları üretmeye devam ettiği görülmüştür.

Burada anlatılan yaklaşımla daha yüksek mertebeden GIBC ifadelerini türeterek gerçeğe çok daha yakın bir yaklaşık model oluşturmak mümkün görünse de, Dirichlet ve özellikle Neumann operatörü aşırı karmaşık bir yapıda olacağından ve yapılan simülasyonlara göre üçüncü mertebe GIBC ile oluşturulan modelin yeterli olduğu görüldüğünden dolayı bu yola başvurulmamıştır.

Tezde son olarak, şekli bilinmeyen mükemmel elektrik (magnetik) iletken bir cisim üzerindeki ince dielektrik kaplamanın kalınlık değişiminin belirlenmesine dair ters saçılma problemi ele alınmıştır. GIBC ifadelerinin içinden kalınlık fonksiyonunu çekmek için öncelikle kaplamanın dış yüzeyi üzerindeki toplam alan ve toplam alanın normal ve teğetsel türevleri SLP yaklaşımıyla hesaplanmıştır. Empedans yüzeyi kaplamanın dış yüzeyinin onda biri kadar küçültüldüğünde, TSVD regülarizasyonu kullanılarak SLP yaklaşımıyla hesaplanan toplam alan ile normal ve teğetsel türevlerinin yeterli doğrulukta olduğu görülmüştür. Hesaplanan toplam alan ve türevleri GIBC ifadelerinde yerlerine koyulup, bazı düzenlemeler yapılarak kalınlık fonksiyonu bir üssel seri olarak aranmıştır. Bu üssel serinin bilinmeyen katsayıları birinci mertebe için en küçük kareler yöntemiyle, ikinci ve üçüncü mertebeler için ise Newton-Raphson yöntemiyle çözümlenerek kaplama kalınlığını gösteren δ fonksiyonu hesaplanmıştır. Sunulan bu yaklaşımla üretilen sayısal sonuçlar göstermiştir ki; ölçülen dataya %10 gürültü eklenmesine rağmen, kaplamanın ortalama kalınlığı $\lambda/10$ 'un üstünde olmadığı müddetçe kaplamanın kalınlık değişimi başarıyla tespit edilmektedir. Sayısal sonuçlara göre belirtilen bu genel tespitle birlikte aşağıda sıralanan hususları da dikkate almak gerekir:

1. Beklenildiği gibi; üçüncü mertebe GIBC ifadeleri kullanılarak üretilen sonuçlar, birinci ve ikinci mertebe GIBC için üretilen sonuçlara göre çok daha iyidir. Hatta bazı uygulamalarda sadece üçüncü mertebe GIBC aracılığıyla oluşturulan yaklaşık model tatmin edici sonuçlar vermektedir.

2. Sabit kalınlıklı dairesel kaplamalar için iki aydınlatma yeterliyken, daha karmaşık geometriye sahip cisimler için aydınlatma sayısını beş ya da altıya kadar çıkarmak gerekir.
3. δ fonksiyonu üssel fonksiyonların bir serisi olarak aranmasına rağmen iç yüzeyinde belli sayıda köşe tekillikleri bulunan kaplamalar (örneğin Şekil 4.20 ve 4.21) için sunulan yaklaşım doğru sonuçlar üretmiştir. Fakat köşe tekillikleri iç yüzey üzerinde sık bir şekilde (örneğin Şekil 3.30) bulunduğu takdirde, burada sunulan yaklaşım köşeleri görüntüleyememiştir.
4. Ters problemin çözümünde sunulan bu yaklaşım seçimi önemli olan bazı parametreler içermektedir. Bunlardan biri TSVD inversiyon formülünün ölçüm gürültüsüne göre belirlenen kesim parametresidir. Bu parametre Morozov'un Fark İlkesine göre belirlenmiştir. Diğer önemli parametreler ise, SLP yaklaşımında geçen Ψ yoğunluk fonksiyonunun hesaplanacağı nokta sayısı, v_m 'in (4.10) ile verilen ifadesindeki M parametresi ve δ 'nın üstel serisindeki terim sayısıdır. Bu parametrelerin bazı seçimleri her ne kadar yaklaşımın yanlış sonuçlar üretmesine neden olsa da, bu parametreler farklı uygulamalar için çok değişken değildir ve bunların çok hassas bir şekilde seçilmesi gerekmez. Örneğin bu tezde verilen tüm uygulamalarda, yoğunluk fonksiyonunun hesaplanacağı nokta sayısı 50, M parametresi ile δ 'nın üstel serisindeki K parametresi ise 8 seçilmiştir.

Son olarak şunu belirtmek gerekir ki; burada anlatılan çalışma her ne kadar iki boyutta ele alınmış olsa da, benzer yaklaşımlarla üç boyutlu hale getirilmesi mümkündür.

KAYNAKLAR

- [1] Senior, T.B.A., (1962). "A note on impedance boundary conditions", Can. J. Phys.,40:663-665.
- [2] Hoppe, D.J. ve Rahmat-Samii, Y., (1995). Impedance Boundary Conditions in Electromagnetics, Taylor&Francis, New York.
- [3] Senior, T.B.A. ve Volakis, J.L., (1995). Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics, Inst. Elect. Eng.,London.
- [4] Wang, D.S., (1987). "Limits and validity of the boundary condition on penetrable surfaces", IEEE Trans. Antennas Propag.,35(4):453-457.
- [5] Shumbert, D.J. ve Senior, T.B.A., (2000). "Impedance boundary conditions in ultrasonics", IEEE Trans. Antennas Propag.,48(10):1653-1659.
- [6] Yapar, A., Şahintürk H. ve Akduman, İ., (2002). "Electromagnetic Scattering by An Imhomogeneous Impedance Cylinder", AEÜ International Journal of Electronics and Communications, 56(3):200-204.
- [7] Thiel, D. ve Mittra, R., (1997). "Surface impedance modelling using the finite-difference time-domain method", IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.,35(5):1350-1356.
- [8] He, L., Kindermann, S. ve Sini, M., (2009). "Reconstruction of shapes and impedance functions using few far-field measurements", J. Comput. Phys., 228(3):717-730.
- [9] Yelkenci, T., (2010). "Imaging of Rough Surfaces Having Impedance Boundary Condition by the Use of Newton Iterative Algorithm", ", IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.,7(1):190-194.
- [10] Yuferev, S., Proekt, L. ve Ida, N., (2001). "Surface impedance boundary conditions near corners and edges:Rigorous consideration", IEEE Trans. Magn.,37(5):3466-2468.
- [11] Poirier, J.R., Bendali, A. ve Borderies, P., (2006). "Impedance boundary conditions for the scattering of time-harmonic waves by rapidly varying surfaces", IEEE Trans. Antennas Propag.,54(3):995-1005.

- [12] Sitepue, M. ve Thiel, D., (1991). "Surface impedance anomaly resulting from a subsurface, infinitely long conductive wire", IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.,29(2):314-320.
- [13] Holloway, J.L. ve Kuester, E.F., (2000). "Impedance-type boundary conditions for a periodic interface between a dielectric and a highly conducting medium", IEEE Trans. Antennas Propag.,48(10):1660-1672.
- [14] Pao, H.Y., Zhu, Z. ve Dvarok, S.L., (2004). "Exact, closed-form representation for the time-domain surface impedances of a homogeneous, lossy half-space", IEEE Trans. Antennas Propag.,52(10):2659-2665.
- [15] Liu, J.J., Nakamura, G. ve Sini, M., (2007). "Reconstruction of the shape and surface impedance from acoustic scattering data for an arbitrary cylinder", SIAM J. Appl. Math., 67(4):1124-1146.
- [16] Thomas, B.A. ve Volakis J.L., (1991). "Generalized impedance boundary conditions in Scattering", Proceedings of the IEEE, 79(10):1413-1420.
- [17] Rojas, R.G., (1998). "Generalized impedance boundary conditions for EM scattering problems", Electron Lett.,24(10):1093-1094.
- [18] Rojas, R.G. ve Al-hekail, Z., (1989). "Generalized impedance/resistive boundary conditions for EM scattering problems", Radio Sci.,24(1):1-12.
- [19] Ammari, H. ve Nedelec, J.C., (1999). "Generalized impedance boundary conditions for the maxwell equations as singular perturbations problems", Comm. Partial Differential Equations, 24(5-6):24-38.
- [20] Bourgeois, L., Chaulet, N. ve Haddar, H., (2011). "Stable reconstruction of generalized impedance boundary conditions", Inverse Problems, 27(9):19-38.
- [21] Bourgeois, L., Chaulet, N. ve Haddar, H., (2011). "On simultaneous identification of a scatterer and its generalized impedance boundary condition", INRIA, Res, RR-7645.
- [22] Ozdemir, O., Akduman, I., Yapar, A. ve Crocco, L., (2007). "Higher order inhomogeneous impedance boundary conditions for perfectly conducting objects", IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.,45(5):1291-1297.
- [23] Qian, Z.G., Chew, W.C. ve Suaya, R., (2007). "Generalized impedance boundary condition for conductor modeling in surface integral equation", IEEE Trans. Microwave Theory Tech.,55(10):2354-2364.
- [24] Qian, Z.G., Tong, M.S. ve Chew, W.C., (2009). "Conductive medium modeling with an augmented GIBC formulation", PIER, 99: 261-272.
- [25] Ganesh, M. ve Graham, I.G., (2004). "A high-order algorithm for obstacle scattering in three dimensions surfaces", J. Comput. Phys., 198(1):211-242.
- [26] Haddar, H., Joly, P. ve Nguyen, H.M., (2005). "Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles: the scalar case", Math. Models Methods Appl. Sci., 15(8):1273-1300.

- [27] Haddar, H., Joly, P. ve Nguyen, H.M., (2008). "Generalized impedance boundary conditions for scattering problems from strongly absorbing obstacles: the case of Maxwell's equations", *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(10):1787-1827.
- [28] Ljalinov, M., (1995). "Generalized impedance boundary conditions and model of a point conductor", *Radio Sci.*, 30(6):1777-1786.
- [29] Kong, M.J. ve Beker, B., (1998). "Computation of resonant frequencies of cylindrical ferrite resonators using GIBCs", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 46(3):1503-1507.
- [30] Yousefi, M., Chaudhuri, S.K. ve Safavi-Naeini, S., (1994). "GIBC formulation for the resonant frequencies and field distribution of a substrate-mounted dielectric resonator", *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, 42(1):38-46.
- [31] Cicchetti, R., (1996). "A class of exact and higher-order surface boundary conditions for layered structures", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 44(2):249-259.
- [32] Marceaux, O. ve Stupfel, B., (2000). "Higher order impedance boundary conditions for multilayer coated 3-D objects", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 46(3):429-436.
- [33] Thiel, D., (1990). "Surface impedance changes in the vicinity of an abrupt lateral boundary at the earth's surface", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 28(4):500-502.
- [34] Duruflé, M., Haddar, H. ve Joly, P., (2006). "Higher Order Generalized Impedance Boundary Conditions in Electromagnetic Scattering Problems", *C.R. Physique*, 7(5):533-542.
- [35] Bendali, A. ve Lemrabet, K., (1996). "The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation", *SIAM J. Appl. Math.*, 56(6):1664-1693.
- [36] Senior, T.B.A., Volakis, J.L. ve Legault, S.R., (1997). "Higher order impedance and absorbing boundary conditions", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 45(1):107-114.
- [37] Bendali, A. ve Lemrabet, K., (2008). "Asymptotic analysis of the scattering of a time-harmonic electromagnetic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric shell", *Asymptot. Anal.*, 57(3-4):199-227.
- [38] Schmidt, K. ve Tordeux, S., (2010). "Asymptotic modelling of conductive thin sheets", *Z. Angew. Math. Phys.*, 61:603-626.
- [39] Caloz, G., Costabel, M. ve Dauge, M., (2006). "Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer", *J. Comput. Appl. Math.*, 50(1-2):121-173.
- [40] Haddar, H. ve Joly, P., (2002). "Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and nonlinear coatings", *J. Comput. Appl. Math.*, 143 (2):201-236.

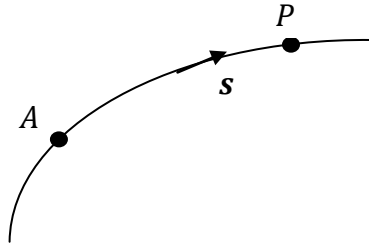
- [41] Hadamard, J., (1923). Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale University Press, New Haven.
- [42] Çayören, M, Akduman, I. Yapar, A. ve Crocco L., (2007). "A new algorithm for the shape reconstruction of perfectly conducting objects", Inverse Problems, 23(3):1087-1100.
- [43] Colton, D. ve Kress, R., (1999). Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Second Edition, Springer, Berlin.
- [44] Rao, C.R., (1973). Linear Statistical Inference and Its Applications, Second Edition, Wiley, New York.
- [45] Ishimaru, A., (1991). Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering, Prentice Hall, New Jersey.
- [46] Flaherty, J.E., Finite Element Analysis Course Notes Lecture 1, <http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/pdf/fea1.pdf>, 26 Kasım 2012.
- [47] Polyanin, A.D. ve Manzhirov, A.V., (2006). Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, First Edition, Chapman & Hall/CRC, London-New York.
- [48] Hecht, F., FreeFem++ Third Edition-Version 3.20, www.freefem.org/ff++, 23 Kasım 2012.
- [49] FreeFem++ , <http://www.freefem.org/ff++/>, 11 Aralık 2012.
- [50] George, P.L., (1996). Automatic triangulation, Wiley & Sons, New York.
- [51] Aslanyürek, B., (2007). Elektromagnetik Dalgaların İletken Bir Cisim Üzerindeki Değişken Kalınlıklı Tabakadan Saçılması, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [52] Kaipio, J. ve Somersalo, E., (2004). Statistical and Computational Inverse Problems, First Edition, Springer, New York.
- [53] İdemen, M., (1999). Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, Birinci Basım, Literatür Yayınları, İstanbul.
- [54] Şenatalar, M., (1978). Diferansiyel Geometri, İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, İstanbul.

EĞRİLERİN PARAMETRELEŞTİRİLMESİ

Tanım A.1 $\alpha \leq t \leq \beta$ olmak üzere $x = x(t)$, $y = y(t)$ fonksiyonları için; $x'(t)$ ve $y'(t)$ fonksiyonları bir $[\alpha, \beta]$ aralığındaki bir t_0 değeri için mevcut sürekli ve $x'(t)$, $y'(t)$ türevlerinin ikisi birden sıfır olmasın. Bu koşulları sağlayan noktaya "adi nokta", böyle noktalardan oluşmuş eğriye "regüler (düzgün) eğri" denir [53].

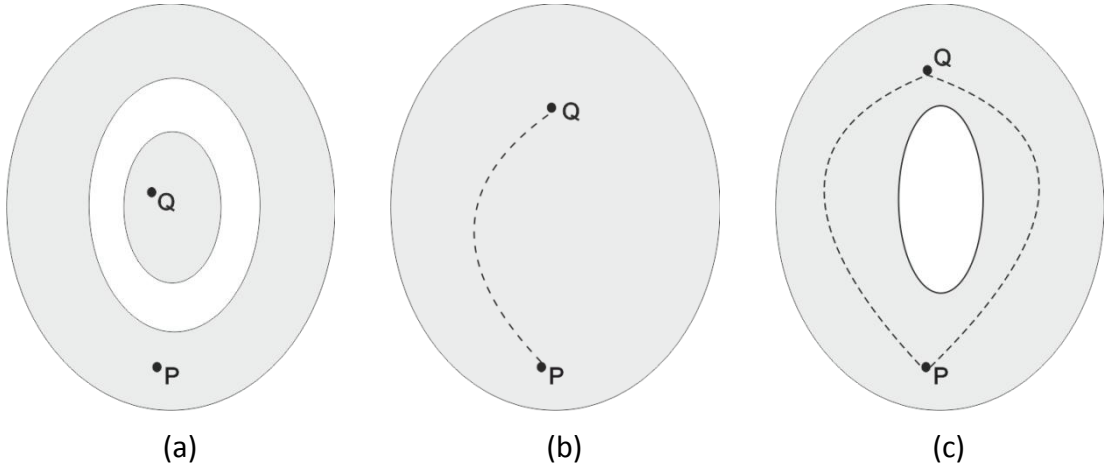
Tanım A.2 Adi nokta olmayan noktalara "tekil (singüler) nokta" denir.

Tanım A.3 : $x(t)$, $y(t)$ fonksiyonları tek değerli ve regüler olsun. Buna ait eğri C ile gösterilsin. C üzerindeki yaylar için bir A başlangıç noktası olsun (Şekil A.1). Keyfi bir pozitif yön seçerek, $\widehat{AP}$ yayının s ile gösterilen cebirsel ölçüsüne "eğrisel apsis" denir [53].



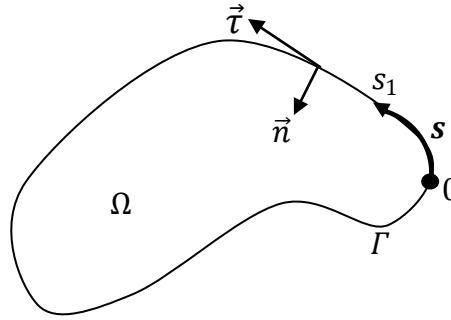
Şekil A. 1 Eğrisel apsis

Tanım A.4 Bir B bölgesinin içindeki her P noktasını her $Q \in B$ noktasına, bölgenin dışına taşmayan bir çizgiyle birleştirme olanağı varsa, B 'ye bağımlı bölge denir. Bağımlı bir bölge içindeki P noktasını Q noktasına birleştiren bütün çizgiler, sürekli kaydırmalarla, bölgenin dışına taşmadan üst üste getirilebiliyorsa ve bu özellik her (P, Q) çifti için varsa, söz konusu bölgeye basit bağımlı bölge denir [54].



Şekil A. 2 Sırasıyla bağımsız bölge, basit bağımlı bölge ve iki bağımlı bölge

Γ regüler bir eğri ve Ω basit bağımlı bir bölge olsun. Ayrıca $x_\Gamma = (x(t), y(t))$ Şekil A.3'de verilen eğrinin saatin tersi yönde parametrik ifadesi olsun.



Şekil A. 3 Regüler bir eğrinin üzerindeki geometrik tanımlar

Bu durumda, eğrisel apsis s

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt, t \in [0, 2\pi[,$$

ile, içeri doğru birim normal vektör

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

ile ve teğet vektörü

$$\vec{\tau}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

ile tanımlanır. Buna göre eğrilik ise

$$c(t) = \frac{x''(t)y'(t) + y''(t)x'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

olur.

GIBC'LERİN TÜRETİLME SÜRECİNDE KARŞILAŞILAN BAZI MATEMATİKSEL İFADELERİN AYRINTILI ELE ALINIŞI

Bölüm 2.2 ve alt başlıklarında gerek Dirichlet gerek de Neumann durumunda üçüncü mertebeye kadar GIBC ifadelerinin türetilme süreci adım adım anlatılmıştır. Bu süreç esnasında karşılaşılan kolay ama uzun süren bazı matematiksel işlemlerin ayrıntıları aşağıda verilmektedir.

B-1 Dirichlet Durumunda GIBC'lerin Türetilme Aşamasında Karşılaşılan SDP'lerin Çözümleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_+^j + \left[3\xi c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi} \right] u_+^{j-1} + \left[3\xi^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right] u_+^{j-2} \\ + \left[\xi^3 c^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 c^3 \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi c \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \xi c' \frac{\partial}{\partial s} + 3\xi k_1^2 c \right] u_+^{j-3} \\ + 3\xi^2 k_1^2 c^2 u_+^{j-4} + \xi^3 k_1^2 c^3 u_+^{j-5} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (B.1)$$

$$u_+^j(s, f(s)) = 0, \quad 0 \leq s < L, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (B.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j(s, 0) = \varphi_{j-1}(s), \quad 0 \leq s < L, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (B.3)$$

eşitliklerinden oluşan SDP'lerin çözümleri "Dirichlet Durumunda Genelleştirilmiş Empedans Sınır Koşullarının Türetilmesi" adlı 2.2.3.Bölümde, $j = 0, 1, 2$ ve 3 için ayrıntıya girilmeden verilmişti. Aşağıda ise SDP'lerin j 'ye bağlı bir çözüm kuralı çıkartılıp, ardından da üçüncü mertebeye kadar problemlerin çözümleri ayrıntılarıyla teker teker ele alınmıştır.

(B.1) sembolik olarak

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_+^j(s, \xi) = G_1^{(j)}(s, \xi)$$

şeklinde yazılsın. Bu durumda her iki taraf ξ 'ye göre integre edilirse,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j(s, \xi) = \int G_1^{(j)}(s, \xi) d\xi + C_1^{(j)}(s) = I_1(s, \xi) + C_1^{(j)}(s) \quad (B.4)$$

olur. (B3)dikkate alınır,

$$C_1^{(j)}(s) = \varphi_{j-1}(s) - I_1(s, 0)$$

elde edilir ve (B.4)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j(s, \xi) = \int_0^\xi G_1^{(j)}(s, \xi) d\xi + \varphi_{j-1}(s) = G_2^{(j)}(s, \xi) \quad (B.5)$$

halini alır. Bu sefer de (B.5)'in her iki tarafı ξ 'ye göre integre edilip,

$$u_+^j(s, \xi) = \int G_2^{(j)}(s, \xi) d\xi + C_2^{(j)}(s) = I_2(s, \xi) + C_2^{(j)}(s), \quad (B.6)$$

ardından da (B.2) göz önüne alınır,

$$C_2^{(j)}(s) = -I_2(s, f(s))$$

olur. Son olarak $C_2^{(j)}$, (B.6)'da yerine koyulursa,

$$u_+^j = \int_f^\xi G_2^{(j)}(s, \xi) d\xi \quad (B.7)$$

elde edilir. Hesaplama için çıkartılan bu genel kurala göre elde edilmiş $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_+^j$, $\frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j$ ve

u_+^j fonksiyonları $j = 0, 1, 2$ ve 3 için aşağıda verilmiştir.

0.mertebe:

$$\frac{\partial^2 u_+^0}{\partial \xi^2}(s, \xi) = 0$$

$$\frac{\partial u_+^0}{\partial \xi}(s, \xi) = 0$$

$$u_+^0(s, \xi) = 0$$

1.mertebe:

$$\frac{\partial^2 u_+^1}{\partial \xi^2}(s, \xi) = -\left(3\xi c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_+^0 = 0$$

$$\frac{\partial u_+^1}{\partial \xi}(s, \xi) = \varphi_0$$

$$u_+^1(s, \xi) = (\xi - f)\varphi_0$$

2.mertebe:

$$\frac{\partial^2 u_+^2}{\partial \xi^2}(s, \xi) = -\left(3\xi c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_+^1 = -c\varphi_0$$

$$\frac{\partial u_+^2}{\partial \xi}(s, \xi) = -c\varphi_0\xi + \varphi_1$$

$$u_+^2(s, \xi) = (\xi - f)\varphi_1 - \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)c\varphi_0$$

3.mertebe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_+^3}{\partial \xi^2}(s, \xi) &= -\left(3\xi c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_+^2 - \left(3\xi^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2\right) u_+^1 \\ &\quad - \left(\xi^3 c^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 c^3 \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi c \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \xi c' \frac{\partial}{\partial s} + 3\xi k_1^2 c\right) u_+^0 \\ &= -\left(3\xi c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \left((\xi - f)\varphi_1 - \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)c\varphi_0\right) \\ &\quad - \left(3\xi^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2\right) ((\xi - f)\varphi_0) \\ &= -(-3\xi c^2 \varphi_0 + c(\varphi_1 - \xi c \varphi_0)) - \left(2\xi c^2 \varphi_0 + \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2\right) (\xi - f)\varphi_0\right) \\ &= -c\varphi_1 + 2\xi c^2 \varphi_0 - \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2\right) (\xi - f)\varphi_0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_+^3}{\partial \xi}(s, \xi) = \varphi_2 + -c\varphi_1\xi + \xi^2 c^2 \varphi_0 - \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) \left(\frac{1}{2} \xi^2 - f\xi \right) \varphi_0$$

$$u_+^3(s, \xi) = (\xi - f)\varphi_2 - \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)c\varphi_1 + \frac{1}{3}(\xi^3 - f^3)c^2\varphi_0 \\ - \frac{1}{6}(\xi^3 - f^3) \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) \varphi_0 + \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) f\varphi_0$$

B-2 Dirichlet Operatörlerinin Açık İfadelerinin Elde Edilişi

$$\sum_{j=0}^m \delta_0^j u_+^j(s, 0) = -D^{\delta, m} \left(\sum_{j=0}^m \delta_0^j \varphi_j(s) \right) \quad (B.8)$$

eşitliğini sağlayacak $D^{\delta, m}$ operatörlerinin açık ifadeleri, $m = 0, 1, 2, 3$ için "Dirichlet Operatörleri" adlı 2.2.3.1.Bölümde verilmişti. Burada ise, bu açık ifadelerin nasıl elde edildiği gösterilecektir.

(2.43)-(2.46) eşitliklerinde açık ifadeleri verilen u_+^j fonksiyonları (B.8)'de yerine koyularak, $D^{\delta, m}$ operatörleri $m = 0, 1, 2, 3$ için şu şekilde bulunmuştur:

0.mertebe:

$$u_+^0(s, 0) = -D^{\delta, 0}(\varphi_0)$$

$$0 = -D^{\delta, 0}(\varphi_0)$$

$$\Rightarrow D^{\delta, 0} = 0$$

1.mertebe:

$$u_+^0(s, 0) + \delta_0 u_+^1(s, 0) = -D^{\delta, 1}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1)$$

$$-\delta_0 f \varphi_0 = -D^{\delta, 1}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1)$$

φ_0 içeren terimlerin eşit olması için $D^{\delta, 1} = \delta_0 f = \delta$ olması gerektiği açıktır. Bu durumda

$$-D^{\delta, 1}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1) = -\delta_0 f \varphi_0 - \delta_0^2 f \varphi_1 \\ = -\delta_0 f \varphi_0 + O(\delta_0^2).$$

Görüldüğü gibi $D^{\delta,1}$ operatörü $O(\delta_0^2)$ mertebesinde hatayla (B.8)'i sağlar.

2.mertebe:

$$u_+^0(s, 0) + \delta_0 u_+^1(s, 0) + \delta_0^2 u_+^2(s, 0) = -D^{\delta,2}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1 + \delta_0^2 \varphi_2)$$

$$-\delta_0 f \varphi_0 + \delta_0^2 \left(-f \varphi_1 + \frac{1}{2} f^2 c \varphi_0 \right) = -D^{\delta,2}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1 + \delta_0^2 \varphi_2)$$

$$-\delta_0 f \left(1 - \frac{1}{2} \delta_0 f c \right) \varphi_0 - \delta_0^2 f \varphi_1 = -D^{\delta,2}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1 + \delta_0^2 \varphi_2)$$

φ_0 içeren terimlerin eşit olması için $D^{\delta,2} = \delta(s) \left(1 - \frac{1}{2} \delta c \right)$ olması gerektiği açıktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} & -D^{\delta,2}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1 + \delta_0^2 \varphi_2) \\ &= -\delta_0 f \left(1 - \frac{1}{2} \delta_0 f c \right) \varphi_0 - \delta_0^2 f \left(1 - \frac{1}{2} \delta_0 f c \right) \varphi_1 - \delta_0^3 f \left(1 - \frac{1}{2} \delta_0 f c \right) \varphi_2 \\ &= -\delta_0 f \left(1 - \frac{1}{2} \delta_0 f c \right) \varphi_0 - \delta_0^2 f \varphi_1 + O(\delta_0^3). \end{aligned}$$

$D^{\delta,2}$ operatörü $O(\delta_0^3)$ mertebesinde hatayla (B.8)'i sağlar.

3.mertebe:

$$u_+^0(s, 0) + \delta_0 u_+^1(s, 0) + \delta_0^2 u_+^2(s, 0) + \delta_0^3 u_+^3(s, 0) = -D^{\delta,3}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1 + \delta_0^2 \varphi_2 + \delta_0^3 \varphi_3)$$

$$\begin{aligned} & -\delta_0 f \varphi_0 + \delta_0^2 \left(-f \varphi_1 + \frac{1}{2} f^2 c \varphi_0 \right) \\ &+ \delta_0^3 \left(-f \varphi_2 + \frac{1}{2} f^2 c \varphi_1 - \frac{1}{3} f^3 c^2 \varphi_0 + \frac{1}{6} f^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) \varphi_0 \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) f \varphi_0 \right) = -D^{\delta,3}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1 + \delta_0^2 \varphi_2 + \delta_0^3 \varphi_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[-\delta_0 f + \delta_0^2 \frac{1}{2} f^2 c + \delta_0^3 \left(-\frac{1}{3} f^3 c^2 + \frac{1}{6} f^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) - \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) f \right) \right] \varphi_0 \\ &+ \left[-\delta_0^2 f + \delta_0^3 \frac{1}{2} f^2 c \right] \varphi_1 - \delta_0^3 f \varphi_2 = -D^{\delta,3}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1 + \delta_0^2 \varphi_2 + \delta_0^3 \varphi_3) \end{aligned}$$

φ_0 içeren terimlerin eşit olması için

$$D^{\delta,3} = \delta \left(1 - \frac{1}{2} \delta c + \frac{1}{3} \delta^2 c^2 \right) - \frac{1}{6} \delta^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) + \frac{1}{2} \delta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) \delta$$

olması gerektiği görülmektedir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& -D^{\delta,3}(\varphi_0 + \delta_0 \varphi_1 + \delta_0^2 \varphi_2 + \delta_0^3 \varphi_3) \\
&= \left[-\delta_0 f + \delta_0^2 \frac{1}{2} f^2 c + \delta_0^3 \left(-\frac{1}{3} f^3 c^2 + \frac{1}{6} f^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) - \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) f \right) \right] \varphi_0 \\
&\quad + \delta_0 \left[-\delta_0 f + \delta_0^2 \frac{1}{2} f^2 c \right. \\
&\quad \left. + \delta_0^3 \left(-\frac{1}{3} f^3 c^2 + \frac{1}{6} f^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) - \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) f \right) \right] \varphi_1 \\
&\quad + \delta_0^2 \left[-\delta_0 f + \delta_0^2 \frac{1}{2} f^2 c \right. \\
&\quad \left. + \delta_0^3 \left(-\frac{1}{3} f^3 c^2 + \frac{1}{6} f^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) - \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) f \right) \right] \varphi_2 \\
&\quad + \delta_0^3 \left[-\delta_0 f + \delta_0^2 \frac{1}{2} f^2 c \right. \\
&\quad \left. + \delta_0^3 \left(-\frac{1}{3} f^3 c^2 + \frac{1}{6} f^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) - \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) f \right) \right] \varphi_3 \\
&= \left[-\delta_0 f + \delta_0^2 \frac{1}{2} f^2 c + \delta_0^3 \left(-\frac{1}{3} f^3 c^2 + \frac{1}{6} f^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) - \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) f \right) \right] \varphi_0 \\
&\quad + \delta_0 \left[-\delta_0 f + \delta_0^2 \frac{1}{2} f^2 c \right] \varphi_1 + \delta_0^2 [-\delta_0 f] \varphi_2 + O(\delta_0^4) \\
&= \left[-\delta_0 f + \delta_0^2 \frac{1}{2} f^2 c + \delta_0^3 \left(-\frac{1}{3} f^3 c^2 + \frac{1}{6} f^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) - \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) f \right) \right] \varphi_0 + \\
&\quad \left[-\delta_0^2 f + \delta_0^3 \frac{1}{2} f^2 c \right] \varphi_1 - \delta_0^3 f \varphi_2 + O(\delta_0^4).
\end{aligned}$$

$D^{\delta,3}$ operatörünü mertebesinde hatayla $O(\delta_0^4)$ (B.8)'i sağlar.

B-3 Neumann Durumunda GIBC'lerin Türetilme Aşamasında Karşılaşılan SDP'lerin Çözümleri

"Neumann Durumunda Genelleştirilmiş Empedans Sınır Koşullarının Türetilmesi" adlı

2.2.4.Bölümde de belirtildiği gibi; GIBC'leri üçüncü mertebeye kadar türetmek için $\frac{\partial u_+^j}{\partial \xi}$

fonksiyonlarının $j = 4$ 'e kadar bilinmesi yeterlidir. Bu fonksiyonların elde edilmesi için

(2.37), (2.58) ve (2.60)'dan oluşan SDP'lerin çözülmesi gerekmektedir. 2.2.4.Bölümde,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_+^j + \left[3\xi c \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi} \right] u_+^{j-1} + \left[3\xi^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right] u_+^{j-2} \\
& + \left[\xi^3 c^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 c^3 \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi c \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \xi c' \frac{\partial}{\partial s} + 3\xi k_1^2 c \right] u_+^{j-3} \\
& + 3\xi^2 k_1^2 c^2 u_+^{j-4} + \xi^3 k_1^2 c^3 u_+^{j-5} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j(s, f(s)) &= -2fc \frac{\partial}{\partial \xi} u_+^{j-1}(s, f(s)) + \left[\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} - f^2 c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] u_+^{j-2}(s, f(s)), \\
j &= 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$u_+^j(s, 0) = \psi_j(s), \quad j = 0, 1, 2, \dots \tag{B.11}$$

eşitliklerinden oluşan SDP'lerin çözümleri $j = 0, 1, 2$ ve 3 için ayrıntıya girilmeden verilmişti. Aşağıda ise SDP'lerin j 'ye bağlı bir çözüm kuralı çıkartılıp, ardından da üçüncü mertebeye kadar problemlerin çözümleri ayrıntılarıyla teker teker ele alınmıştır.

(B.9) ve (B.10) sembolik olarak, sırasıyla

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_+^j(s, \xi) = G_1^{(j)}(s, \xi) \tag{B.12}$$

ve

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_+^j(s, f(s)) = T_1^{(j)}(s) \tag{B.13}$$

şeklinde yazılsın. (B. 12)'nin her iki tarafı ξ 'ye göre integre edilirse,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j(s, \xi) = \int G_1^{(j)}(s, \xi) d\xi + C_1^{(j)}(s) = I_1(s, \xi) + C_1^{(j)}(s) \tag{B.14}$$

olur. (B.13) dikkate alınır,

$$C_1^{(j)}(s) = T_1^{(j)}(s) - I_1(s, f(s))$$

bulunur ve (B.14)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j(s, \xi) = \int_f^\xi G_1^{(j)}(s, \xi) d\xi + T_1^{(j)}(s) = G_2^{(j)}(s, \xi) \quad (\text{B.15})$$

halini alır. Bu sefer de (B.15)'in her iki tarafı ξ 'ye göre integre edilip,

$$u_+^j(s, \xi) = \int G_2^{(j)}(s, \xi) d\xi + C_2^{(j)}(s) = I_2(s, \xi) + C_2^{(j)}(s), \quad (\text{B.16})$$

ardından da (B.11) göz önüne alınırsa,

$$C_2^{(j)}(s) = \psi_j(s) - I_2(s, 0)$$

olur. Son olarak $C_2^{(j)}$, (B.16)'da yerine koyulursa,

$$u_+^j(s, \xi) = \int_0^\xi G_2^{(j)}(s, \xi) d\xi + \psi_j(s) \quad (\text{B.17})$$

elde edilir.

$$\mathcal{A}_0 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2,$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\partial}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + c \left(2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right),$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\partial}{\partial s} f \frac{\partial}{\partial s} + f k_1^2$$

olmak üzere, hesaplama için çıkartılan bu genel kurala göre $j = 0, 1, 2, 3$ ve 4 için

$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_+^j$, $\frac{\partial}{\partial \xi} u_+^j$ fonksiyonları; $j = 0, 1$ ve 2 için ise u_+^j fonksiyonları aşağıda elde edilmiştir.

0.mertebe:

$$\frac{\partial^2 u_+^0}{\partial \xi^2}(s, \xi) = 0$$

$$\frac{\partial u_+^0}{\partial \xi}(s, \xi) = 0$$

$$u_+^0(s, \xi) = \psi_0(s)$$

1.mertebe:

$$\frac{\partial^2 u_+^1}{\partial \xi^2}(s, \xi) = 0$$

$$\frac{\partial u_+^1}{\partial \xi}(s, \xi) = 0$$

$$u_+^1(s, \xi) = \psi_1(s)$$

2.mertebe:

$$\frac{\partial^2 u_+^2}{\partial \xi^2}(s, \xi) = -\mathcal{A}_0 \psi_0$$

$$\frac{\partial u_+^2}{\partial \xi}(s, \xi) = (f - \xi) \mathcal{A}_0 \psi_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \psi_0$$

$$u_+^2(s, \xi) = \xi \left(f - \frac{1}{2} \xi \right) \mathcal{A}_0 \psi_0 + \xi \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \psi_0 + \psi_2(s)$$

3.mertebe:

$$\frac{\partial^2 u_+^3}{\partial \xi^2}(s, \xi) = -\mathcal{A}_0 \psi_1 - c \mathcal{A}_2 \psi_0 + \xi \mathcal{A}_1 \psi_0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+^3}{\partial \xi}(s, \xi) &= (f - \xi) \mathcal{A}_0 \psi_1 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \psi_1 - 2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} \psi_0 + (f - \xi) c \mathcal{A}_2 \psi_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\xi^2 - f^2) \mathcal{A}_1 \psi_0 \end{aligned}$$

4.mertebe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_+^4}{\partial \xi^2}(s, \xi) &= -\mathcal{A}_0 \psi_2 - c \mathcal{A}_2 \psi_1 + \xi \mathcal{A}_1 \psi_1 \\ &\quad + \xi^2 \left(-\frac{7}{2} c \mathcal{A}_1 + \left(5c^2 + \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \right) \mathcal{A}_0 - 3c^2 k_1^2 \right) \psi_0 \\ &\quad + \xi \left((2c^2 - \mathcal{A}_0) \mathcal{A}_2 \right) \psi_0 + f c \left(2 \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} f \mathcal{A}_1 - c \mathcal{A}_2 \right) \psi_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_+^4}{\partial \xi}(s, \xi) = & (f - \xi)\mathcal{A}_0\psi_2 + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\psi_2 - 2f\frac{\partial f}{\partial s}c\frac{\partial}{\partial s}\psi_1 + (f - \xi)c\mathcal{A}_2\psi_1 \\
& + \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)\mathcal{A}_1\psi_1 \\
& + f\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s}\mathcal{A}_0 + \frac{1}{2}f\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{A}_0 + 3fc^2\frac{\partial}{\partial s}\right)\psi_0 \\
& + \frac{1}{3}(\xi^3 - f^3)\left(-\frac{7}{2}c\mathcal{A}_1 + \left(5c^2 + \frac{1}{2}\mathcal{A}_0\right)\mathcal{A}_0 - 3c^2k_1^2\right)\psi_0 \\
& + \frac{1}{2}(\xi^2 - f^2)((2c^2 - \mathcal{A}_0)\mathcal{A}_2)\psi_0 \\
& + (\xi - f)fc\left(2\frac{\partial f}{\partial s}c\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}f\mathcal{A}_1 - c\mathcal{A}_2\right)\psi_0
\end{aligned}$$

Neumann operatörlerinin türetilmesinde u_+^3 ve u_+^4 fonksiyonlarının sadece ξ 'ye göre kısmi türevlerinin bilinmesi yeterlidir.

B-4 Neumann Operatörlerinin Açık İfadelerinin Elde Edilmesi

$$\sum_{j=0}^m \delta_0^j \frac{\partial u_+^{j+1}}{\partial \xi}(s, 0) = -N^{\delta, m} \left(\sum_{j=0}^m \delta_0^j \psi_j(s) \right) \quad (\text{B.18})$$

eşitliğini sağlayacak $N^{\delta, m}$ operatörlerinin açık ifadeleri, $m = 0, 1, 2, 3$ "Neumann Operatörleri" adlı 2.2.4.1.Bölümde verilmişti. Burada ise, bu açık ifadelerin nasıl elde edildiği gösterilecektir.

(2.61)-(2.64) eşitliklerinde açık ifadeleri verilen $\frac{\partial u_+^j}{\partial \xi}$ fonksiyonları (B.18)'de yerine koyularak, $N^{\delta, m}$ operatörleri $m = 0, 1, 2, 3$ için şu şekilde bulunmuştur:

0.mertebe:

$$\frac{\partial u_+^1}{\partial \xi}(s, 0) = -N^{\delta, 0}(\psi_0)$$

$$0 = -N^{\delta, 0}(\psi_0)$$

$$\Rightarrow N^{\delta, 0} = 0$$

1.mertebe:

$$\frac{\partial u_+^1}{\partial \xi}(s, 0) + \delta_0 \frac{\partial u_+^2}{\partial \xi}(s, 0) = -N^{\delta, 1}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1)$$

$$\delta_0 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_0 = -N^{\delta,1}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1)$$

ψ_0 içeren terimlerin eşit olması için

$$N^{\delta,1} = -\frac{\partial}{\partial s} \delta \frac{\partial}{\partial s} - \delta k_1^2$$

olması gerektiği açıktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} -N^{\delta,1}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1) &= -\left(-\frac{\partial}{\partial s} \delta_0 f \frac{\partial}{\partial s} - \delta_0 f k_1^2 \right) \psi_0 - \delta_0 \left(-\frac{\partial}{\partial s} \delta_0 f \frac{\partial}{\partial s} - \delta_0 f k_1^2 \right) \psi_1 \\ &= \delta_0 \left(\frac{\partial}{\partial s} f \frac{\partial}{\partial s} + f k_1^2 \right) \psi_0 + O(\delta_0^2) \\ &= \delta_0 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_0 + O(\delta_0^2). \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $N^{\delta,1}$ operatörü $O(\delta_0^2)$ mertebesinde hatayla (B.18)'i sağlar.

2.mertebe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+^1}{\partial \xi}(s, 0) + \delta_0 \frac{\partial u_+^2}{\partial \xi}(s, 0) + \delta_0^2 \frac{\partial u_+^3}{\partial \xi}(s, 0) &= -N^{\delta,2}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2) \\ \delta_0 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_0 + \delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 \psi_1 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \psi_1 - 2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} \psi_0 + f c \mathcal{A}_2 \psi_0 - \frac{1}{2} f^2 \mathcal{A}_1 \psi_0 \right) \\ &= -N^{\delta,2}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2) \\ \left[\delta_0 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \delta_0^2 \left(-2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + f c \mathcal{A}_2 - \frac{1}{2} f^2 \mathcal{A}_1 \right) \right] \psi_0 + \delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_1 \\ &= -N^{\delta,2}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2) \\ \left[\delta_0 \left(f \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \right. \\ &\quad + \delta_0^2 \left(-2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + f c \left(\frac{\partial}{\partial s} f \frac{\partial}{\partial s} + f k_1^2 \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\partial}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + c \left(2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_1^2 \right) \right) \right) \right] \psi_0 + \delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_1 \\ &= -N^{\delta,2}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\delta_0 \left(f \frac{\partial^2}{\partial s^2} + f k_1^2 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \right. \\
& \quad + \delta_0^2 \left(-2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + f c \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + f^2 c \frac{\partial}{\partial s} + f^2 c k_1^2 - \frac{1}{2} f^2 \frac{\partial c}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{2} f^2 c \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right. \\
& \quad \left. \left. - f^2 c \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{2} f^2 c k_1^2 \right) \right] \psi_0 + \delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_1 \\
& = -N^{\delta,2}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\delta_0 \left(\frac{\partial}{\partial s} f \frac{\partial}{\partial s} + f k_1^2 \right) + \delta_0^2 \left(-f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{2} f^2 \frac{\partial c}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{2} f^2 c \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{2} f^2 c k_1^2 \right) \right] \psi_0 \\
& \quad + \delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_1 = -N^{\delta,2}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\delta_0 \left(\frac{\partial}{\partial s} f \frac{\partial}{\partial s} + f k_1^2 \right) + \delta_0^2 \left(-\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{2} f^2 c \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} f^2 c k_1^2 \right) \right] \psi_0 + \delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_1 \\
& = -N^{\delta,2}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\delta_0 f - \frac{1}{2} \delta_0^2 f^2 c \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\delta_0 f + \frac{1}{2} \delta_0^2 f^2 c \right) k_1^2 \right] \psi_0 + \delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_1 \\
& = -N^{\delta,2}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2)
\end{aligned}$$

ψ_0 içeren terimlerin eşit olması için

$$N^{\delta,2} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c \right) \frac{\partial}{\partial s} - \left(\delta + \frac{1}{2} \delta^2 c \right) k_1^2$$

olması gerektiği görülür. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& -N^{\delta,2}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2) \\
& = \delta_0 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(f - \frac{1}{2} \delta_0 f^2 c \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(f + \frac{1}{2} \delta_0 f^2 c \right) k_1^2 \right] \varphi_0 \\
& \quad + \delta_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(f - \frac{1}{2} \delta_0 f^2 c \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(f + \frac{1}{2} \delta_0 f^2 c \right) k_1^2 \right] \varphi_1 \\
& \quad + \delta_0^3 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(f - \frac{1}{2} \delta_0 f^2 c \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(f + \frac{1}{2} \delta_0 f^2 c \right) k_1^2 \right] \varphi_2 \\
& = \left[\delta_0 \left(\frac{\partial}{\partial s} f \frac{\partial}{\partial s} + f k_1^2 \right) + \delta_0^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} f^2 c \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} f^2 c k_1^2 \right) \right] \varphi_0 \\
& \quad + \left[\delta_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial s} f \frac{\partial}{\partial s} + f k_1^2 \right) \right] \varphi_1 + O(\delta_0^3)
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\delta_0 f - \frac{1}{2} \delta_0^2 f^2 c \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\delta_0 f + \frac{1}{2} \delta_0^2 f^2 c \right) k_1^2 \right] \varphi_0 \\ + \delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \varphi_1 + O(\delta_0^3)$$

olur. $N^{\delta,2}$ operatörü $O(\delta_0^3)$ mertebesinde hatayla (B18)'i sağlar.

3.mertebe:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_+^1}{\partial \xi}(s, 0) + \delta_0 \frac{\partial u_+^2}{\partial \xi}(s, 0) + \delta_0^2 \frac{\partial u_+^3}{\partial \xi}(s, 0) + \delta_0^3 \frac{\partial u_+^4}{\partial \xi}(s, 0) \\ &= -N^{\delta,3}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2 + \delta_0^3 \psi_3) \\ & \delta_0 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_0 + \delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 \psi_1 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \psi_1 - 2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} \psi_0 + f c \mathcal{A}_2 \psi_0 - \frac{1}{2} f^2 \mathcal{A}_1 \psi_0 \right) \\ &+ \delta_0^3 \left[f \mathcal{A}_0 \psi_2 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \psi_2 - 2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} \psi_1 + f c \mathcal{A}_2 \psi_1 - \frac{1}{2} f^2 \mathcal{A}_1 \psi_1 \right. \\ &+ f \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} \mathcal{A}_0 + \frac{1}{2} f \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{A}_0 + 3f c^2 \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi_0 \\ &- \frac{1}{3} f^3 \left(-\frac{7}{2} c \mathcal{A}_1 + \left(5c^2 + \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \right) \mathcal{A}_0 - 3c^2 k_1^2 \right) \psi_0 \\ &- \frac{1}{2} f^2 \left((2c^2 - \mathcal{A}_0) \mathcal{A}_2 \right) \psi_0 - f^2 c \left(2 \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} f \mathcal{A}_1 - c \mathcal{A}_2 \right) \psi_0 \left. \right] \\ &= -N^{\delta,3}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2 + \delta_0^3 \psi_3) \\ & \left[\delta_0 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \delta_0^2 \left(-2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + f c \mathcal{A}_2 - \frac{1}{2} f^2 \mathcal{A}_1 \right) \right. \\ &+ \delta_0^3 \left(f \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} \mathcal{A}_0 + \frac{1}{2} f \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{A}_0 + 3f c^2 \frac{\partial}{\partial s} \right) \right. \\ &- \frac{1}{3} f^3 \left(-\frac{7}{2} c \mathcal{A}_1 + \left(5c^2 + \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \right) \mathcal{A}_0 - 3c^2 k_1^2 \right) - \frac{1}{2} f^2 \left((2c^2 - \mathcal{A}_0) \mathcal{A}_2 \right) \\ &- f^2 c \left(2 \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} f \mathcal{A}_1 - c \mathcal{A}_2 \right) \left. \right] \psi_0 \\ &+ \left[\delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \delta_0^3 \left(-2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + f c \mathcal{A}_2 - \frac{1}{2} f^2 \mathcal{A}_1 \right) \right] \psi_1 \\ &+ \left[\delta_0^3 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \right] \psi_2 = -N^{\delta,3}(\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2 + \delta_0^3 \psi_3) \end{aligned}$$

Bu eşitlikte $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$ yerlerine koyulup, eşitlik titiz bir şekilde düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\delta_0 f - \frac{1}{2} (\delta_0 f)^2 c + \frac{1}{3} (\delta_0 f)^3 c^2 + \frac{2}{3} (\delta_0 f)^3 k_1^2 + \frac{1}{2} (\delta_0 f)^2 \delta_0 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
& \quad + \left(\delta_0 f + \frac{1}{2} (\delta_0 f)^2 c + \frac{1}{3} (\delta_0 f)^3 k_1^2 + \frac{1}{2} (\delta_0 f)^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} + \delta_0^3 f \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 \right) k_1^2 \\
& \quad + \left. \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\delta_0 f)^3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right] \psi_0 \\
& \quad + \left[\delta_0^2 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \delta_0^3 \left(-2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + f c \mathcal{A}_2 - \frac{1}{2} f^2 \mathcal{A}_1 \right) \right] \psi_1 \\
& \quad + \left[\delta_0^3 \left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) \right] \psi_2 = -N^{\delta,3} (\psi_0 + \delta_0 \psi_1 + \delta_0^2 \psi_2 + \delta_0^3 \psi_3)
\end{aligned}$$

elde edilir. ψ_0 içeren terimlerin eşit olması için $N^{\delta,3}$ operatörü

$$\begin{aligned}
N^{\delta,3} = & -\frac{\partial}{\partial s} \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 c^2 + \frac{2}{3} \delta^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} \\
& - \left(\delta + \frac{1}{2} \delta^2 c + \frac{1}{3} \delta^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} + \delta \left(\frac{\partial \delta}{\partial s} \right)^2 \right) k_1^2 - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta^3 \frac{\partial^2}{\partial s^2}
\end{aligned}$$

olarak seçilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& -N^{\delta,3}(\psi_0 + \delta_0\psi_1 + \delta_0^2\psi_2 + \delta_0^3\psi_3) \\
& = \delta_0 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(f - \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c + \frac{1}{3}\delta_0^2 f^3 c^2 + \frac{2}{3}\delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
& \quad + \left(f + \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c + \frac{1}{3}\delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \delta_0^2 f \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 \right) k_1^2 \\
& \quad \left. + \frac{1}{3}\delta_0^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} f^3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right] \varphi_0 \\
& \quad + \delta_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(f - \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c + \frac{1}{3}\delta_0^2 f^3 c^2 + \frac{2}{3}\delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
& \quad + \left(f + \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c + \frac{1}{3}\delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \delta_0^2 f \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 \right) k_1^2 \\
& \quad \left. + \frac{1}{3}\delta_0^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} f^3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right] \varphi_1 \\
& \quad + \delta_0^3 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(f - \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c + \frac{1}{3}\delta_0^2 f^3 c^2 + \frac{2}{3}\delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
& \quad + \left(f + \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c + \frac{1}{3}\delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \delta_0^2 f \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 \right) k_1^2 \\
& \quad \left. + \frac{1}{3}\delta_0^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} f^3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right] \varphi_2 \\
& \quad + \delta_0^4 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(f - \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c + \frac{1}{3}\delta_0^2 f^3 c^2 + \frac{2}{3}\delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
& \quad + \left(f + \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c + \frac{1}{3}\delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \delta_0^2 f \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 \right) k_1^2 \\
& \quad \left. + \frac{1}{3}\delta_0^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} f^3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right] \varphi_3 \\
& = \delta_0 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(f - \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c + \frac{1}{3}\delta_0^2 f^3 c^2 + \frac{2}{3}\delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
& \quad + \left(f + \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c + \frac{1}{3}\delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \delta_0^2 f \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 \right) k_1^2 \\
& \quad \left. + \frac{1}{3}\delta_0^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} f^3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right] \varphi_0 \\
& \quad + \delta_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(f - \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(f + \frac{1}{2}\delta_0 f^2 c \right) k_1^2 \right] \varphi_1 \\
& \quad + \delta_0^3 \left[\frac{\partial}{\partial s} f \frac{\partial}{\partial s} + f k_1^2 \right] \varphi_2 + O(\delta_0^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_0 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(f - \frac{1}{2} \delta_0 f^2 c + \frac{1}{3} \delta_0^2 f^3 c^2 + \frac{2}{3} \delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
&\quad + \left(f + \frac{1}{2} \delta_0 f^2 c + \frac{1}{3} \delta_0^2 f^3 k_1^2 + \frac{1}{2} \delta_0^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \delta_0^2 f \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 \right) k_1^2 \\
&\quad + \left. \frac{1}{3} \delta_0^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} f^3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right] \varphi_0 \\
&\quad + \delta_0^2 \left[\left(f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \delta_0 \left(-2f \frac{\partial f}{\partial s} c \frac{\partial}{\partial s} + f c \mathcal{A}_2 - \frac{1}{2} f^2 \mathcal{A}_1 \right) \right] \varphi_1 \\
&\quad + \delta_0^3 \left[f \mathcal{A}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right] \varphi_2 + O(\delta_0^4)
\end{aligned}$$

olur. $N^{\delta,3}$ operatörü $O(\delta_0^4)$ mertebesinde hatayla (B.18)'i sağlar.

DAİRESEL BİR PEC VEYA PMC ÜZERİNDEKİ DAİRESEL YÜZEYE SAHİP DİELEKTRİK KAPLAMA İÇİN DÜZ PROBLEMİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

2.Bölümde verilen; Γ üzerinde tanımlı (2.3), (2.4) süreklilik koşulları, Γ^δ üzerinde tanımlı (2.7) Dirichlet sınır koşulu ya da (2.8) Neumann sınır koşulu ve (2.10) radyasyon koşulu altında (2.5)-(2.6) indirgenmiş dalga denklemlerinden oluşan gerçek matematiksel model göz önüne alınsın. Herhangi bir nokta (ρ, ϕ) 2 boyutlu kutupsal koordinatlarıyla gösterilmek üzere, Γ yüzeyinin $\rho = c$ (sabit) ve Γ^δ yüzeyinin ise $\rho = a$ (sabit) şeklinde bir gösterilimi varsa, yani bu yüzeyler dairesel ise, u_-^δ ve u_+^δ toplam alanlarının bulunması problemi (düz problem) aşağıda gösterildiği gibi analitik olarak çözülebilir. Problemin dairesel bir simetriye sahip olması nedeniyle toplam alanlar, dolayısıyla $u_{s,-}^\delta$ saçılan alanı 2π periyotludur. Böylece $u_{s,-}^\delta$ ve u_+^δ alanları aşağıdaki gibi bir Fourier serisine açılabilirler:

$$u_{s,-}^\delta(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n(\rho) e^{in\phi}, \quad \phi \in (0, 2\pi), \quad (C.1)$$

$$u_+^\delta(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M_n(\rho) e^{in\phi}, \quad \phi \in (0, 2\pi). \quad (C.2)$$

Burada K_n ve M_n Fourier katsayılarıdır. Bu Fourier açılımları (2.5) ve (2.6) indirgenmiş dalga denklemlerinde yerine yazılırsa, kolayca gösterilebileceği gibi K_n ve M_n katsayıları aşağıdaki Bessel diferansiyel denklemlerinin çözümünden ibarettir:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 K_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial K_n}{\partial \rho} + (k_0^2 \rho^2 - n^2) K_n = 0, \quad \rho > c, \quad (C.3)$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 M_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_n}{\partial \rho} + (k_1^2 \rho^2 - n^2) M K_n = 0, \quad \rho \in (a, c) \quad (C.4)$$

Çok iyi bilindiği gibi bu Bessel diferansiyel denklemlerinin çözümleri

$$K_n(\rho) = A_n J_n(k_0 \rho) + B_n H_n^{(1)}(k_0 \rho), \quad \rho > c, \quad (C.5)$$

$$M_n(\rho) = C_n J_n(k_1 \rho) + D_n H_n^{(1)}(k_1 \rho), \quad \rho \in (a, c), \quad (C.6)$$

dir. Burada, A_n, B_n, C_n, D_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ belirlenecek olan sabitlerken, J_n ile birinci türden Bessel fonksiyonu, $H_n^{(1)}$ ile de n . mertebeden birinci çeşit Hankel fonksiyonu gösterilmektedir. K_n ve M_n 'nin (C.5) ve (C.6) ile verilen ifadelerini (C.1) ve (C.2)'de yerine koyarak

$$u_{s,-}^\delta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{A_n J_n(k_0 \rho) + B_n H_n^{(1)}(k_0 \rho)\} e^{in\phi}, \quad \rho > c, \quad (C.7)$$

$$u_+^\delta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{C_n J_n(k_1 \rho) + D_n H_n^{(1)}(k_1 \rho)\} e^{in\phi}, \quad \rho \in (a, c), \quad (C.8)$$

elde edilir. (2.10) radyasyon koşulunun sağlanması için $A_n = 0$ olması gerektiği kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan, (C.8) serisi Γ^δ üzerinde geçerli (2.7) koşulunda (Dirichlet durumu için) ya da (2.8) koşulunda (Neumann durumu için) yerine koyularak

$$T_n = \begin{cases} \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(1)}(k_1 a)}, & \text{Dirichlet durumunda,} \\ \frac{\frac{\partial J_n(k_1 a)}{\partial \rho}}{\frac{\partial H_n^{(1)}(k_1 a)}{\partial \rho}}, & \text{Neumann durumunda,} \end{cases} \quad (C.9)$$

olmak üzere,

$$D_n = -T_n C_n \quad (C.10)$$

şeklinde C_n ile D_n arasındaki bir bağıntı bulunabilir. (3.76)'da verilen gelen dalga için

$$u^i(\rho, \phi) = e^{-ik_0\rho \cos(\phi-\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_0\rho) e^{in\phi} e^{-in(\theta+\frac{\pi}{2})} \quad (C.11)$$

şeklinde yazılabilen seri ifadesi kullanılarak, (2.3) ve (2.4) süreklilik koşullarından

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_0c) e^{in\phi} e^{-in(\theta+\frac{\pi}{2})} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n H_n^{(1)}(k_0c) e^{in\phi} \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{C_n J_n(k_1c) + D_n H_n^{(1)}(k_1c)\} e^{in\phi} \end{aligned} \quad (C.12)$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial J_n(k_0c)}{\partial \rho} e^{in\phi} e^{-in(\theta+\frac{\pi}{2})} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{\partial H_n^{(1)}(k_0c)}{\partial \rho} e^{in\phi} \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ C_n \frac{\partial J_n(k_1c)}{\partial \rho} + D_n \frac{\partial H_n^{(1)}(k_1c)}{\partial \rho} \right\} e^{in\phi} \end{aligned} \quad (C.13)$$

yazılabilir. Son olarak; (C.12) ve (C.13) denklemlerinin her iki tarafı $e^{-im\phi}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ile çarpılıp, $(0, 2\pi)$ aralığında $e^{-im\phi}$ fonksiyonlarının ortagonallik özelliği kullanılarak gösterilebilir ki,

$$\psi_1 = \frac{\partial J_n(k_1c)}{\partial \rho} - T_n \frac{\partial H_n^{(1)}(k_1c)}{\partial \rho} \quad (C.14)$$

$$\psi_2 = \frac{\partial J_n(k_0c)}{\partial \rho} e^{-in(\theta+\frac{\pi}{2})} \quad (C.15)$$

$$\psi_3 = J_n(k_1c) - T_n H_n^{(1)}(k_1c) \quad (C.16)$$

$$\psi_4 = J_n(k_0c) e^{-in(\theta+\frac{\pi}{2})} \quad (C.17)$$

olmak üzere,

$$B_n = \frac{\psi_2\psi_3 - \psi_1\psi_4}{H_n^{(1)}(k_0c)\psi_1 - \frac{\partial H_n^{(1)}(k_0c)}{\partial \rho} \psi_3} \quad (C.18)$$

$$C_n = \frac{1}{\psi_3} \left(\psi_4 + \frac{\psi_2\psi_3 - \psi_1\psi_4}{H_n^{(1)}(k_0c)\psi_1 - \frac{\partial H_n^{(1)}(k_0c)}{\partial \rho}\psi_3} H_n^{(1)}(k_0c) \right) \quad (C.19)$$

$$D_n = \frac{-T_n}{\psi_3} \left(\psi_4 + \frac{\psi_2\psi_3 - \psi_1\psi_4}{H_n^{(1)}(k_0c)\psi_1 - \frac{\partial H_n^{(1)}(k_0c)}{\partial \rho}\psi_3} H_n^{(1)}(k_0c) \right) \quad (C.20)$$

dir. (C.9)'da açık ifadesi verilen T_n Dirichlet ya da Neumann durumları için göz önüne alınıp, sonra da A_n, B_n, C_n, D_n katsayıları (C.7) ve (C.8)'da yerlerine koyulurak saçılan ve toplam alan hesaplanır.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Birol ASLANYÜREK
Doğum Tarihi ve Yeri : 07/01/1982 - Kiğı/Bingöl
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : baslan@yildiz.edu.tr, birolaslanyurek@yahoo.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Müh.	Yıldız Teknik Üniversitesi	2007
Lisans	Matematik Müh.	Yıldız Teknik Üniversitesi	2005
Lise		Vefa Anadolu Lisesi	2000

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2005-...	YTÜ, Matematik Mühendisliği	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. **Aslanyurek, B.**, Haddar ve H., Sahinturk, H., (2011). "Generalized impedance boundary conditions for thin dielectric coatings with variable thickness", Wave Motion, 48-7:681-700.

Bildiri

1. Gürbüz, T., **Aslanyürek, B.**, Akduman, I., Yapar, A. ve Şahintürk, H., (2011). "A Contrast Source Imaging Approach for Microwave Breast Cancer Detection", 13th International Symposium on Microwave and Optical Technology, 20-23 Haziran 2011,Prak.

2. Akduman, I., Gürbüz, T., **Aslanyürek, B.**, Güren, O., Yapar, A., Tükenmez, L. ve Şahintürk, H., (2010). "A Novel Two Step Procedure for Microwave Breast Cancer Imaging", 6th International Workshop on Biological Effects of Electromagnetic Fields, 10-14 Ekim 2010,Bodrum.

3. **Aslanyürek, B.**, Çayören, M. ve Şahintürk, H., (2007). "A Hybrid Method for the Scattering of Electromagnetic Waves from Coatings of Variable Thickness", Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS), 27-30 Ağustos 2007,Prak.

4. Ozdemir, Ö., Altuncu, Y. ve **Aslanyürek, B.**, (2007). Surface Impedance Modelling of Perfectly Conducting Rough Surface", Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS), 26-30 Mart 2007,Pekin.

5. Çayören, M. ve **Aslanyürek, B.**, (2007). "A New Approach for the Scattering of Electromagnetic Waves from Dielectric Bodies of Arbitrary Shape ", Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS), 26-30 Mart 2007,Pekin.

Proje

1. "Electromagnetic Imaging of Material and Geometrical Properties of Objects Buried Under a Rough Interface", TÜBİTAK, 2008-2010.
2. "A new microwave Tomographic Approach for the Detection and Imaging of Breast Cancer", TÜBİTAK, 2010-2012.