

29283

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK NOKTALI LINEER SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNDE SPLINE FONKSİYONU

DOKTORA TEZİ
MÜH. NAZAN ATALAY ÇAĞLAR

İSTANBUL 1993

YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

SUMMARY

BÖLÜM : 1. GİRİŞ	1
1.1 Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümlerinin Önemi .	1
1.2 Adi Diferansiyel Denklemlerde Sınır Değer Problemleri.	2
1.2.1 Tanım	2
1.3 Çok Noktalı Sınır Değer Problemleri İçin Geliştirilen Sayısal Çözüm Yöntemleri	3
BÖLÜM : 2. SONLU FARK YÖNTEMİ	5
BÖLÜM : 3. SPLINE YÖNTEMİ	10
3.1 Doğal Spline Fonksiyonları	10
3.2 B-Spline Fonksiyonları	15
3.3 Spline Fonksiyonları Kullanılarak Çok Noktalı Lineer Sınır Değer Problemlerinin Çözümleri.....	20
3.3.1 Sınır Koşullarını Sıfırlama Yöntemi.....	21
3.3.2 Dördüncü Derece Spline Fonksiyonları	22
3.3.3 Beşinci Derece Spline Fonksiyonları	32
BÖLÜM : 4. ÇOK NOKTALI LİNEER SINIR DEĞER PROBLEMLERİNE SPLINE YÖNTEMİ UYGULAMALARI VE SONUÇLARIN SONLU FARK YÖNTEMİYLE KARŞILAŞTIRILMASI	38
BÖLÜM : 5. SONUÇ VE TARTIŞMA	48



ÖZET

Yapılan çalışmada çok noktalı lineer sınır değer problemlerinin, spline fonksiyonları kullanılarak çözümleri incelenmiş ve sonuçlar sonlu fark yöntemiyle karşılaştırılmıştır.

Birinci bölümde, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri kısaca anlatılmış, adi diferansiyel denklemlerde sınır değer problemleri tanımlanmış ve çok noktalı sınır değer problemleri için geliştirilen sayısal çözüm yöntemleri verilmiştir.

İkinci bölümde, çok noktalı sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan sonlu fark yöntemi anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, spline yöntemi ile çok noktalı lineer sınır değer probleminin çözümleri sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, çok noktalı lineer sınır değer problemi, dördüncü ve beşinci derece spline fonksiyonları kullanılarak çözülmüştür. Ayrıca sonuçlar sonlu fark yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde, spline yöntemi ile çok noktalı sınır değer problemlerinin çözümlerinin iyi bir yaklaşıklıkla bulunacağı görülmüştür.



SUMMARY

In this study, multipoint boundary value problems have been solved by the spline functions and the results have been compared with the result obtained by the finite difference method.

In the first section, the numerical solutions of differential equations have been presented.

In the second section, the boundary value problems have been defined.

In the third section, the numerical solution method improved for the multipoint boundary value problems have been described.

In the fourth section, the finite difference method that has been used for the solution of multipoint boundary value problems have been given.

In the fifth section, the solutions of multipoint boundary value problems by spline functions have been presented.

In the sixth and seventh sections, linear multipoint boundary value problems have been solved by the fourth and fifth order spline functions, and the results have been compared with the results obtained by the finite difference method.



1. GİRİŞ

1.1 Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümlerinin Önemi

Fizik yasalarının yada fiziksel problemlerin pek çoğu diferansiyel denklemlerle ifade edildiğinden, diferansiyel denklemler temel bilimlerde ve mühendislik uygulamalarında önemli bir yer tutar. Ayrıca diferansiyel denklemler, başta fizik olmak üzere diğer fen bilimlerini ilgilendirdiği gibi işletme, ekonomi, ekonometri gibi sosyal bilim alanlarında da karşımıza çıkmaktadır. Bu alanlarda karşımıza çıkan denklemlerin çözümü için bilgisayarların kullanılması kaçınılmaz olmaktadır.

Birçok hallerde diferansiyel denklemlerin analitik olarak çözümü bulunmakta, bunlarda pratikte yararlı olmamaktadır. Bu gibi hallerde yada $y' = f(x,y)$ diferansiyel denkleminin türev denklemlerinin sürekli bir fonksiyon halinde değilde ayrık noktalardaki değerler olarak verilmesi halinde problemi nümerik metodlarla çözmek daha uygun olmaktadır. Bir diferansiyel denkleme herhangi bir yaklaşık çözüm yolunu uygulayabilmek için verilen koşullara uygun çözümünün var ve tek olduğunun bilinmesi gerekir. Çözümün varlığı ve tekliği " Varlık ve Teklik " teoremi ile ispatlanır. Teoremin ifadesi :

a, b ve c sabitler olmak üzere $f(x,y)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$ ile tanımlanmış D bölgesinin bütün noktalarında tanımlı ve sürekli olan bir $y' = f(x,y)$, $y(a) = c$ diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Eğer D bölgesindeki noktalar için

$$| f(x,y) - f(x,y^*) | \leq L | y - y^* |$$

eşitsizliğini sağlayacak bir L sabiti varsa , verilen denklemin yalnız bir çözümü vardır. Burada $y(x)$, D bölgesinde bütün (x,y) ikilileri için sürekli ve türevi alınabilen bir fonksiyondur. Yukarıda verilen eşitsizlik Lipschitz koşulu olarak adlandırılır. L ' de Lipschitz sabitidir.

Genel olarak

$$y^{(n)} = f (x, y, y', \dots , y^{(n-1)})$$

şeklinde ifade edilebilen n . mertebeden bir diferansiyel denklemin özel çözümü için n tane sınır koşulu gereklidir. Koşulların hepsi sadece bir noktada verilmiş ise, böyle bir probleme başlangıç değer problemi denir. Eğer sınır koşullarının bir kısmı bir noktada ve diğerleri başka noktalarda verilmiş ise, bu tür probleme de sınır değer problemi denir. Sınır değer veya başlangıç değer problemlerinde verilmeyen noktalarda fonksiyonun alacağı değerleri bulmak esastır.

1.2 Adi Diferansiyel Denklemlerde Sınır Değer Problemleri

1.2.1. Tanım

Sınır değer problemlerine çeşitli mühendislik problemlerinde rastlanmaktadır.

Genel olarak

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots , y^{(n-1)}) \quad (1.2.1)$$

Şeklinde ifade edilebilen n . mertebeden bir adi diferansiyel

denklemin bir özel çözümü için n tane koşul gereklidir.

(1.2.1) ifadesinde $n = 2$ ise diferansiyel denklem,

$$y'' = f (x, y, y') \quad , \quad x \in [a , b]$$

$$y (a) = \alpha$$

$$y (b) = \beta$$

genel şekliyle gösterilen iki noktalı sınır değer problemi olarak adlandırılır. $n > 2$ ise diferansiyel denkleme " Çok noktalı sınır değer problemi " adı verilir.

1.3 Çok Noktalı Sınır Değer Problemleri İçin Geliştirilen Sayısal Çözüm Yöntemleri

Sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümünü bulmak için genel olarak kullanılan yöntem, sınır değer problemini bir başlangıç değer problemine dönüştürmek yada doğrudan doğruya herhangi mertebeden türevleri sonlu fark formülleri ile ifade ederek çözüme gitmektir. Ancak sınır değer probleminin başlangıç değer problemine dönüştürülmesi diferansiyel denklemin mertebesi büyüdükçe güçleşir.

Çok noktalı sınır değer problemlerinde genellikle sonlu fark yöntemi uygulanır. Yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerde yöntemin uygulaması güçleşir.

Uygulamada kullanılan bir başka yöntem de " INVARIANT IMBEDDING " yöntemidir. Yöntemde bir dizi ara dönüşümler kullanılarak başlangıç değer problemi elde edilir.

Son yıllarda bir çok yazar tarafından " COLLOCATION " metodu kullanılmıştır. Sınır değer problemi ile ilgili çözümler Ascher,

Bader, De Boor, Christiansen, Pruess, Russell, Shampine tarafından yapılmıştır. yapılan çalışmada "COLLOCATION" ile birlikte B-Spline fonksiyonları kullanılarak çözümler araştırılmıştır.



2. SONLU FARK YÖNTEMİ

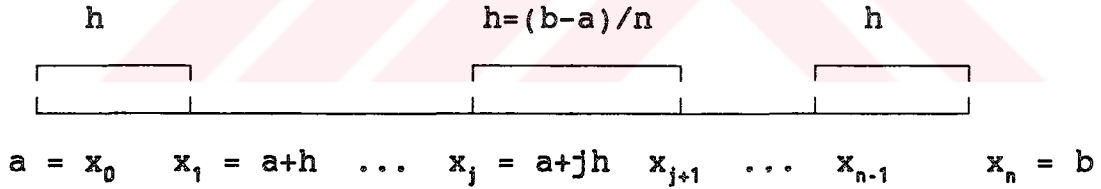
İki veya daha yüksek mertebeli sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan bir yöntemdir. Diferansiyel denklemin mertebesi yükseldikçe sonlu fark denklemlerinin yazılmasındaki güçlükler bu yöntemin bir dezavantajı olarak söylenebilir.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{ve}$$

$$y(x_k) = \alpha_1, \quad y'(x_k) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_k) = \alpha_n$$

koşulları ile verilen sınır değer probleminin herhangi $[a, b]$ aralığında

$a, a+h, \dots, a+jh, \dots, a+(n-1)h = b$ tüm noktalarda merkezi fark formülleri yazılır.



Şekil 2.1

¹ Merkezi fark formüllerini yazarsak;

¹ Melvin J. Maron, Numerical Analysis : A Practical Approach,
P : 285 - 290

$$y'(x_j) = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} \quad (2.2)$$

$$y''(x_j) = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2}, \quad j = 1(1)(n-1)$$

$$y'''(x_j) = \frac{y_{j+3} - 3y_{j+2} + 3y_{j+1} - y_j}{h^3}$$

[a , b] aralığındaki noktalarda fonksiyon değerleri,

$$y_0 = y(a) = \alpha$$

$$y_n = y(b) = \beta$$

$y_1, \dots, y_{n-1}$ için $y_j = y(x_j)$, $j = 1(1)(n-1)$ olmak üzere $n-1$ bilinmeyenli, $n-1$ denklem elde edilir. Bu sistem, diferansiyel denklem lineer ise lineer denklem sistemi, aksi halde lineer olmayan denklem sistemidir. Fark formüllerinin yazılması sonucu oluşan sistem lineer ise GAUSS-SEIDEL itarasyonu, aksi halde NEWTON metodu kullanılarak çözülürse verilen sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri bulunmuş olur.

ÖRNEK 2.1.

$$y''' + 2y'' - 3y' = 1,$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1/2) = 0 \quad (2.3)$$

$$y(1) = -1$$



Üçüncü mertebeden lineer diferansiyel denklemin çözümünü sonlu fark yöntemiyle bulalım.

Denklem 2.3 de türev değerleri yerine 2.2 de verilen fark formüllerini yazarsak;

$$\frac{1}{h^3} [y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i] + \frac{2}{h^2} [y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] - \frac{3}{2h} [y_{i+1} - y_{i-1}] = 1$$

elde edilir. Denklem h^3 e göre düzenlenirse,

$$2y_{i+3} - 6y_{i+2} + 6y_{i+1} - 2y_i + 2hy_{i+1} - 4hy_i + 2hy_{i-1} - 3h^2y_{i+1} + 3h^2y_{i-1} = 2h^3$$

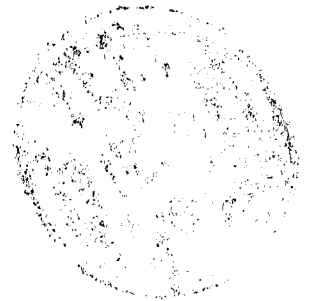
$$2y_{i+3} - 6y_{i+2} + y_{i+1} (-3h^2 + 2h + 6) + y_i (-4h - 2) + y_{i-1} (3h^2 + 2h) = 2h^3 \quad (2.4)$$

elde edilir.

$i = 1(1)(n-1)$ için denklem 2.4 kullanılarak fonksiyon değerleri

$$y_i = \frac{1}{-4h - 2} [-2y_{i+3} + 6y_{i+2} - y_{i+1} (-3h^2 + 2h + 6) - y_{i-1} (3h^2 + 2h) + 2h^3] \quad (2.5)$$

formülünden hesaplanır.



Sınır koşulları için Gauss - Seidel itarasyonu ile yaklaşımda kullanılan ve " Liebmann Process " olarak adlandırılan bir yöntem kullanılır. Bu yöntemde

$$y (a) = \alpha$$

$$y (b) = \beta \quad \text{ için }$$

$$y_i = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b - a} (x_i - a) \quad , \quad i = 0(1)n \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır.

$0 \leq x < 1/2$ için sınır değerleri 2.6 da yerine yazılırsa,

$$y_i = 1 + \frac{(0 - 1)}{\frac{1}{2}} + (x_i - 0)$$

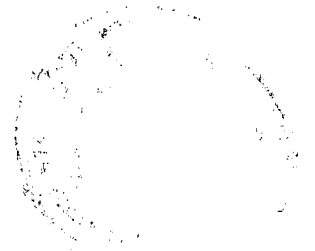
$$y_i = 1 - \frac{1}{2}x_i \quad (2.7)$$

elde edilir.

$1/2 \leq x \leq 1$ için sınır değerleri 2.6 da yerine yazılırsa,

$$y_i = 0 + \frac{(-1 - 0)}{1 - \frac{1}{2}} (x_i - \frac{1}{2})$$

$$y_i = -2 (x_i - \frac{1}{2}) \quad (2.8)$$



elde edilir. 2.5, 2.7, 2.8 kullanılarak sistem çözümünden elde edilen değerler aşağıda tablo 2.9 da verilmiştir.

Gerçek çözüm : $y = 1.212087701 - 0.700105738e^x + 0.488018036e^{-3x} - (1/3)x$

x_i	y_i	Y_i	Hata
0.0	1.00000000	1.00000000	0.0000
0.1	0.80000000	0.76655050	0.0334
0.2	0.60000000	0.55814000	0.0418
0.3	0.40000000	0.36545720	0.0345
0.4	0.20000000	0.18130760	0.0186
0.5	0.00000000	0.00003339	0.0000
0.6	-0.20000010	-0.182919930	0.0170
0.7	-0.40000010	-0.37132470	0.0286
0.8	-0.60000000	-0.56842100	0.0315
0.9	-0.80000010	-0.77709710	0.0229
1.	-1.00000000	-1.00003300	0.0000

Tablo 2.9 y_i : Sonlu fark yöntemiyle çözüm
 Y_i : Gerçek çözüm

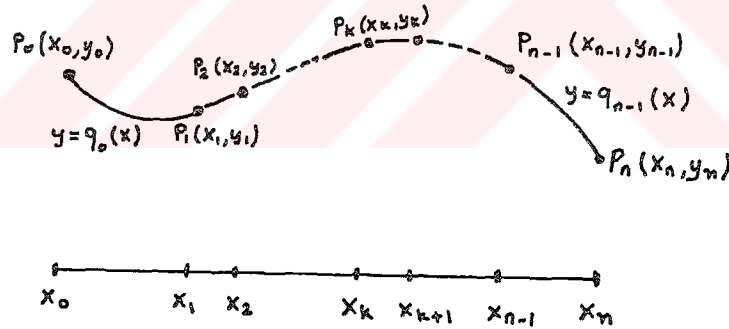
3. SPLINE YÖNTEMİ

Spline fonksiyonları, parçasal interpolasyon işlemlerinde kullanılan fonksiyonlardır. Fonksiyon polinomlardan meydana geldiğinden türev ve integral işlemlerinde kolaylık sağlayabilir.

Polinom uzayında baz seçilerek polinomların lineer kombinasyonu oluşturulabilir. Diferansiyel denklem çözümlerinde kolaylık sağlayacak spline fonksiyonları Doğal ve B-Spline olmak üzere değişik şekillerde karşımıza çıkar.

3.1. Doğal Spline Fonksiyonları

Nümerik analizde yaygın bir biçimde kullanılan fonksiyon türüdür. Fonksiyonlar üçüncü derece polinomlardan meydana gelir. Şekil 3.1.1 de görüldüğü gibi düğüm noktaları ve düğüm noktalarındaki fonksiyonun ölçülen değerleri verildiğinde enterpolasyon fonksiyonlarının elde edilmesinde kullanılır.



Şekil 3.1.1

Her iki düğüm noktası arasında üçüncü dereceden bir polinom belirlenir. ($q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$)

q_k , $k = 0(1)(n-1)$ fonksiyonları parçasal kübik fonksiyonlardır.

$q_k(x)$ fonksiyonları ;

$s(x) = q_k(x)$, $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0(1)(n-1)$ için

$p_0, p_1, \dots, p_n$ interpolate noktalarında aşağıdaki şartları

sağlamalıdır.

$$S0 : q_k(x_k) = y_k \quad \text{ve} \quad q_k(x_{k+1}) = y_{k+1} \quad , \quad k = 0(1)(n-1)$$

$$S1 : q_{k-1}(x_k) = q_k(x_k) \quad (= s'(x_k)) \quad , \quad k = 1(1)(n-1)$$

$$S2 : q_{k-1}(x_k) = q_k(x_k) \quad (= s''(x_k)) \quad , \quad k = 1(1)(n-1)$$

3.1.1. $q_0(x), q_1(x), \dots, q_{n-1}(x)$ Noktalarının Bulunması

$s(x)$ fonksiyonunun $[x_0, x_n]$ aralığında $s''(x)$ türevleri lineer olsun. Herhangi bir $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında interpolate noktaları $(x_k, s''(x_k))$, $(x_{k+1}, s''(x_{k+1}))$ olmak üzere S2 şartından,

$$q''_k(x) = s''(x_k) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right) + s''(x_{k+1}) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) \quad ,$$

$$k = 0(1)(n-1) \quad (3.1.2)$$

yazılabilir. Eğer x_k, x_{k+1} e artan ise $h_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0(1)(n-1)$ yazılır. Ve x_k noktası için s türev fonksiyonunun ikinci türevi

$$\sigma_k = s''(x_k) \quad , \quad k = 0(1)n \quad \text{dir.}$$

(3.1.2) yi tekrar yazarsak;

$$q''_k(x) = \frac{\sigma_k}{h_k} (x_{k+1} - x) + \frac{\sigma_{k+1}}{h_k} (x - x_k) ,$$

$$k = 0(1)(n-1) \quad (3.1.3)$$

Burada h_k ve σ_k sabittir. σ_k ların belirlenmesi gerekir. (3.1.3) denklemini x' e göre iki kez integre edersek;

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{h_k} \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6} + \frac{\sigma_{k+1}}{h_k} \frac{(x - x_k)^3}{6} + \mu_k(x) \quad (3.1.4a)$$

bulunur.

$$\mu_k(x) = C_k + D_k x \quad \text{dir.}$$

(3.1.4) de görülen $\mu_k(x)$ değişik bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mu_k(x) = A_k (x - x_k) + B_k (x_{k+1} - x) \quad (3.1.4b)$$

(A_k , B_k sabitlerdir.)

S0 şartı kullanılarak (3.1.4) bağıntıları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_k = \frac{\sigma_k}{6} h_k^2 + B_k h_k , \quad y_{k+1} = \frac{\sigma_{k+1}}{6} h_k^2 + A_k h_k \quad (3.1.5)$$

(3.1.6) denleminde $\sigma_0, \sigma_1 \dots, \sigma_n$ şeklinde ($n + 1$) bilinmeyen vardır. Noktaların yazılmasıyla ($n - 1$) denklem elde edilir.
(3.1.6) nın birinci türevini alalım.

$$\begin{aligned}
q_k(x) &= \frac{\sigma_k}{6} \left[\frac{(x_{k+1} - x)^3}{h_k} - h_k(x_{k+1} - x) \right] + \\
&\frac{\sigma_{k+1}}{6} \left[\frac{(x - x_k)^3}{h_k} - h_k(x - x_k) \right] + \\
&y_k \left[\frac{x_{k+1} - x}{h_k} \right] + y_{k+1} \left[\frac{x - x_k}{h_k} \right] , \\
k &= 0(1)(n-1) \quad (3.1.6)
\end{aligned}$$

$$q'_k(x_k) = \frac{\sigma_k}{6} [-2h_k] + \frac{\sigma_{k+1}}{6} [-h_k] + \Delta y_k \quad (3.1.7a)$$

$$q'_k(x_{k+1}) = \frac{\sigma_k}{6} [h_k] + \frac{\sigma_{k+1}}{6} [2h_k] + \Delta y_k \quad (3.1.7b)$$

S1 şartından (3.1.7a) ve (3.1.7b) eşitlenirse aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
h_{k-1}\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\sigma_k + h_k\sigma_{k+1} &= 6[\Delta y_k - \Delta y_{k-1}] , \\
k &= 1(1)(n-1) \quad (3.1.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{k-1} + 4\sigma_k + \sigma_{k+1} &= \frac{6}{h} [\Delta y_k - \Delta y_{k-1}] , \\
k &= 1(1)(n-1) \quad (3.1.9)
\end{aligned}$$

(3.1.9) dan (n - 1) denklem elde edilmiştir. Bilinmeyen sayısı (n + 1) olduğundan sisteme, aşağıdaki sınır koşullarından biri tercih edilerek iki denklem daha eklenir ve sistem çözülür.

Bölüm 3.3 de anlatılan çok noktalı lineer sınır değer probleminin çözümünde (I) koşulu kullanılmıştır.

Sınır koşulları :

I -

$$\sigma_0 = s'' (x_0)$$

$$\sigma_n = s'' (x_n)$$

II -

$$\sigma_0 = \sigma_1$$

$$\sigma_n = \sigma_{n-1}$$

III - $s'' (x)$ lineer kabul edilerek,

$$\sigma_0 = \frac{1}{h_1} [(h_0 + h_1) \sigma_1 - h_0 \sigma_2]$$

$$\sigma_n = \frac{1}{h_{n-1}} [-h_{n-1} \sigma_{n-2} + (h_{n-2} + h_{n-1}) \sigma_{n-1}]$$

yazılır.

IV - $s'(x_0)$ ve $s'(x_n)$ kullanılarak,

$$\sigma_0 = \frac{3}{h_1} [\Delta y_0 - s'(x_0)] - \frac{1}{2} \sigma_1$$

$$\sigma_n = \frac{3}{h_{n-1}} [s'(x_n) - \Delta y_{n-1}] - \frac{1}{2} \sigma_{n-1}$$

yazılır.

3.2. B - Spline Fonksiyonları

Diferansiyel denklem çözümlerinde kullanılan parçasal spline fonksiyonlarından biride B - spline fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar $(x - t_+)^{k-1}$ fonksiyonlarını içeren $P_{k,t}$ uzayında bunların bölünmüş farkları ile tanımlanır.

$$B_{i,k,t}(x) = (t_{i+k} - t_i) [t_i, \dots, t_{i+k}] (t - x)_+^{k-1} \quad x \in R$$

Genel olarak $B_{i,k,t}$ notasyonu yerine B_i kullanılır. t , yaklaşık olarak verilen fonksiyonun düğüm noktalarıdır.

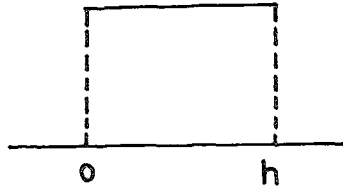
² B - spline fonksiyonları için bölünmüş farklar kullanılarak çıkarılan ardışık tekrar bağıntısı,

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x)$$

Ardışık tekrar bağıntısı kullanılarak tanımlanan B - spline fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$k = 1$ için :

$$B_{i,1}(x) = 1, \quad 0 \leq x < h$$



Şekil 3.2.1 $B_{i,1}$ Spline

² Çağlar Hikmet, Spline Interpolasyon ve Optimal Hata Tayini, Doktora Tezi, P : 10 - 24

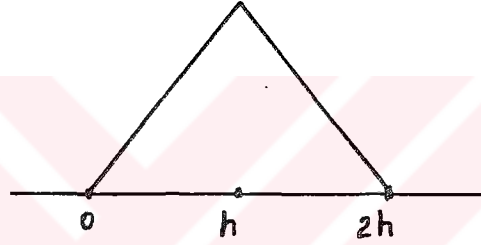


k = 2 için :

$$B_{0,2} = 1/h \begin{cases} x & 0 \leq x < h \\ 2h - x & h \leq x < 2h \end{cases}$$

$$B_{i,2} = B_{0,2} (x - (i - 1) h) , \quad i = 2 (1) \dots$$

şeklinde hesaplanır

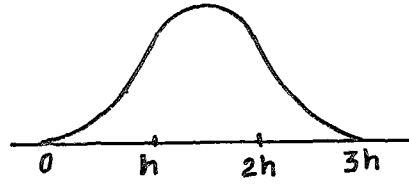


Şekil 3.2.2 $B_{1,2}$ Spline

k = 3 için :

$$B_{0,3} = 1/2h^2 \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < h \\ -2x^2 + 6xh - 3h^2 & h \leq x < 2h \\ x^2 - 6xh + 9h^2 & 2h \leq x < 3h \end{cases}$$

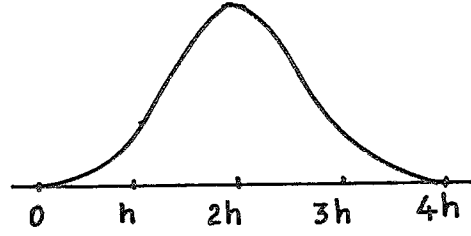
$$B_{i,3} = B_{0,3} (x - (i - 1) h) , \quad i = 2 (1) \dots$$

Şekil 3.2.3 $B_{i,3}$ Spline

$k = 4$ için :

$$B_{i,4} = B_{0,4} (x - (i-1)h) \quad , \quad i = 2 (1) \dots$$

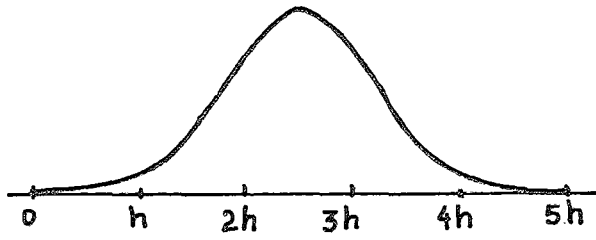
$$B_{0,4} = \frac{1}{6h^3} \left[\begin{array}{ll} x^3 & 0 \leq x < h \\ -3x^3 + 12hx^2 - 12h^2x + 4h^3 & h \leq x < 2h \\ 3x^3 - 24hx^2 + 60h^2x - 44h^3 & 2h \leq x < 3h \\ -x^3 + 12hx^2 - 48h^2x + 64h^3 & 3h \leq x < 4h \end{array} \right]$$

Şekil 3.2.4 $B_{i,4}$ Spline

$k = 5$ için :

$$B_{0,5} = \frac{1}{24h^4} \begin{cases} x^4 & 0 \leq x < h \\ -x^4 + 20hx^3 - 30h^2x^2 + 20h^3x - 5h^4 & h \leq x < 2h \\ 6x^4 - 60hx^3 + 210h^2x^2 - 300h^3x + 155h^4 & 2h \leq x < 3h \\ -4x^4 + 60hx^3 - 330h^2x^2 + 780h^3x - 655h^4 & 3h \leq x < 4h \\ x^4 - 20hx^3 + 150h^2x^2 - 500h^3x + 625h^4 & 4h \leq x < 5h \end{cases}$$

$$B_{i,5} = B_{0,5} (x - (i-1)h) \quad , \quad i = 2 (1) \dots$$

Şekil 3.2.5 $B_{1,5}$ Spline

$k = 6$ için :

$$\begin{array}{ll}
 x^5 & 0 \leq x < h \\
 -5x^5 + 30hx^4 - 60h^2x^3 + 60h^3x^2 - 30h^4x + 6h^5 & h \leq x < 2h \\
 10x^5 - 120hx^4 + 540h^2x^3 - 1140h^3x^2 + 1170h^4x - 474h^5 & 2h \leq x < 3h \\
 -10x^5 + 180hx^4 - 1260h^2x^3 - 5340h^3x^2 + 12270h^4x - 10974h^5 & 3h \leq x < 4h \\
 5x^5 - 120hx^4 + 1140h^2x^3 - 5340h^3x^2 + 12270h^4x - 10974h^5 & 4h \leq x < 5h \\
 -x^5 + 30hx^4 - 360h^2x^3 + 2160h^3x^2 - 6480h^4x + 7776h^5 & 5h \leq x < 6h
 \end{array}$$

$B_{0,6} = 1/120h^5$

$$B_{i,6} = B_{0,6} (x - (i-1)h) \quad , \quad i = 2 (1) \dots$$

3.3. Spline Fonksiyonları Kullanılarak Çok Noktalı Lineer Sınır Değer Problemlerinin Çözümleri

Özellikle iki noktalı sınır değer problemlerinin çözümlerinde "COLLOCATION" yöntemi etkin bir biçimde kullanılır. Yapılan çalışmada spline fonksiyonları ile birlikte yöntem çok noktalı problemlerin çözümleri için kullanılmıştır.

Genel olarak üçüncü mertebeden sınır değer problemini ele alalım.

$$p(x)v'''(x) + p'(x)v''(x) + p''(x)v'(x) + q(x)v(x) = f(x) \quad (3.3.1)$$

Sınır koşulları : $v(\alpha) = a$

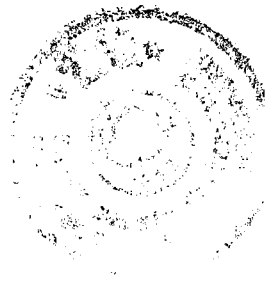
$$v(\beta) = b \quad (\alpha < \beta < \tau)$$

$$v(\tau) = c$$

Fonksiyon uzayında baz teşkil eden ϕ_j spline fonksiyonlarının lineer kombinasyonundan oluşan $v(x)$ fonksiyonunu 3.3.1 denkleminin çözümü olarak alalım.

$$v(x) = \sum_{j=1}^n C_j \phi_j(x) \quad (3.3.2)$$

C_j ler bilinmeyen sabitlerdir. C_j sabitleri sınır koşulları ile birlikte $v(x)$ fonksiyonu diferansiyel eşitliği sağlayacak şekilde seçilmelidir. Çok noktalı problemler üç veya daha yüksek mertebeden türevlere sahip oldukları için ϕ_j fonksiyonları enaz dördüncü derece veya daha fazla spline derecesine sahip fonksiyonlar olarak seçilmelidir.



3.3.1 denkleminde verilen sınır koşullarında, a , b , c lerden herhangi biri veya hepsi sıfırdan farklı ise sınır koşullarının sıfır yapılması gerekir. Bu amaçla aşağıda anlatılan yöntem kullanılmıştır.

3.3.1. Sınır Koşullarını Sıfırlama Yöntemi

Bir diferansiyel denklem,

$$L[y] = -y''(x) + w(x)y(x)$$

$$L[y] = F(x), \quad y(0) = a, \quad y(1) = b$$

formunda verilsin. Burada $L = \frac{d^2}{dx^2}$ dir.

$$u(x) = (b - a)x + a \quad \text{olarak seçilerek,}$$

$$v(x) = y(x) - u(x) \quad \text{yazılır.}$$

$$L[v] = F(x) - L[u] \quad \text{işlemi sonucunda,}$$

$$v(0) = v(1) = 0 \quad \text{olduğu görülür. Buradan denklemin çözümü}$$

$$y(x) = v(x) + u(x) \quad (3.3.1.1)$$

olarak bulunur.

yapılan çalışmada iki noktalı sınır değer problemleri için kullanılan bu yöntem, $u(x)$ fonksiyonu doğal spline fonksiyonları olarak seçilerek çok noktalı sınır değer problemlerine uygulanmıştır.

(3.3.1) Denkleminin çözümünü dördüncü ve beşinci derece spline fonksiyonları kullanarak çıkaralım.

3.3.2. Dördüncü Derece Spline Fonksiyonları

Bölüm 3.2 de verilen $\phi_j = B_{i,5}$ spline fonksiyonunun türevlerini hesaplayalım.

$$B'_{i,5} = \begin{cases} 4x^3 & 0 \leq x < h \\ -16x^3 + 60x^2 - 60x + 20 & h \leq x < 2h \\ 24x^3 - 180x^2 + 420x - 300 & 2h \leq x < 3h \\ -16x^3 + 180x^2 - 660x + 780 & 3h \leq x < 4h \\ 4x^3 - 60x^2 + 300x - 500 & 4h \leq x < 5h \end{cases}$$

$B_{i,5}'' =$

$$12x^2 \quad 0 \leq x < h$$

$$-48x^2 + 120x - 60 \quad h \leq x < 2h$$

$$72x^2 - 360x + 420 \quad 2h \leq x < 3h$$

$$-48x^2 + 360x - 660 \quad 3h \leq x < 4h$$

$$12x^2 - 120x + 300 \quad 4h \leq x < 5h$$

 $B_{i,5}''' =$

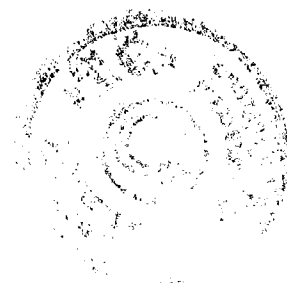
$$24x \quad 0 \leq x < h$$

$$-96x + 120 \quad h \leq x < 2h$$

$$144x - 360 \quad 2h \leq x < 3h$$

$$-96x + 360 \quad 3h \leq x < 4h$$

$$24x - 120 \quad 4h \leq x < 5h$$



	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	x_{i+3}	x_{i+4}	x_{i+5}
$B_{i,5}$	0	1	11	11	1	0
$B'_{i,5}$	0	4	12	-12	-4	0
$B''_{i,5}$	0	12	-12	-12	12	0
$B'''_{i,5}$	0	24	-72	72	-24	0

Tablo 3.3.2.1 $B_{i,5}$ fonksiyonunun düğüm noktalarındaki türev değerleri

$$\phi_j = B_{i,5} \quad , \quad v = \sum_{j=1}^n C_j B_{j,5}$$

Değerlerini denklem 3.3.1 de yerine yazarsak;

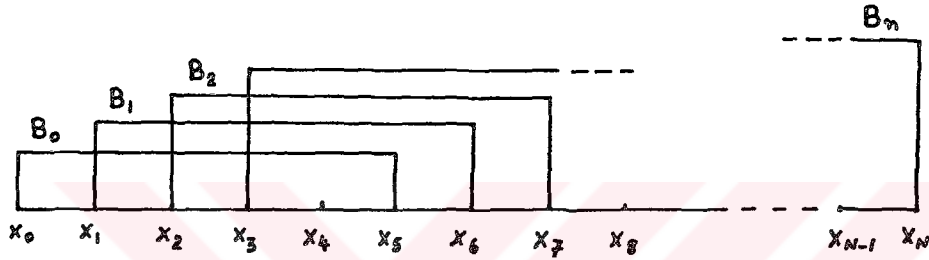
$$p(x) (C_0 B_0''' + C_1 B_1''' + \dots + C_n B_n''') + p'(x) (C_0 B_0'' + C_1 B_1'' + \dots + C_n B_n'') + \\ p''(x) (C_0 B_0' + C_1 B_1' + \dots + C_n B_n') + q(x) (C_0 B_0 + \dots + C_n B_n) = f(x)$$

Buradan denklem düzenlenirse;

$$C_0 [p(x) B_0''' + p'(x) B_0'' + p''(x) B_0' + q(x) B_0] + \\ C_1 [p(x) B_1''' + p'(x) B_1'' + p''(x) B_1' + q(x) B_1] + \dots + \\ C_n [p(x) B_n''' + p'(x) B_n'' + p''(x) B_n' + q(x) B_n] = f(x) \quad (3.3.2.2)$$

elde edilir.

$(x_i)_{i=0}^N$ düğümlerinde spline fonksiyonlarının aldığı değerler 3.3.1.2 denkleminde yerine yazılırsa $n + 1$ bilinmeyenli bir denklem sistemi elde edilir. Burada $n = N - 5$ dir.



Şekil 3.3.2.3

Örnek olarak

$$y''' = 1, \quad y(0) = 0$$

$$y(1/2) = 1 \quad (3.3.2.4)$$

$$y(1) = 0$$

üçüncü mertebeden lineer diferansiyel denklemi alalım. Denklem için $N = 13$ nokta kullanarak sistemi oluşturalım. (3.3.2.2) denkleminde,

$$C_0 B_0''' + C_1 B_1''' + C_2 B_2''' + \dots + C_8 B_8''' = f(x) \quad \text{olur.}$$

$$\begin{bmatrix} 72 & -72 & 24 \\ 24 & 72 & -72 & 24 \\ -24 & 72 & -72 & 24 \\ -24 & 72 & -72 & 24 \\ -24 & 72 & -72 & 24 \\ -24 & 72 & -72 & 24 \\ -24 & 72 & -72 & 24 \\ -24 & 72 & -72 & 24 \\ -24 & 72 & -72 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \\ f(x_6) \\ f(x_7) \\ f(x_8) \\ f(x_9) \\ f(x_{10}) \\ f(x_{11}) \end{bmatrix}$$

(3.3.2.6)



$$y(0) = 0, \quad y(1/2) = 1, \quad y(1) = 0$$

Sınır koşulları için sıfırlama yöntemini uygulayalım.

$$v(x) = y(x) - u(x)$$

$$L[v] = F(x) - L[u] \quad \text{idi,} \quad L = \frac{d^3}{dx^3} \quad \text{alınır.}$$

$F(x) = 1$ olduğuna göre,

$$\frac{d^3v}{dx^3} = 1 - \frac{d^3u}{dx^3} \quad (3.3.2.7) \quad \text{dir.}$$

$u(x)$ fonksiyonu yerine bölüm 3.1 de (3.1.6) denklemiyle verilen $q_k(x)$ spline fonksiyonunu alalım. (3.1.9) denklemini tekrar yazarsak,

$$\sigma_{k-1} + 4\sigma_k + \sigma_{k+1} = \frac{6}{h} [\Delta y_k - \Delta y_{k-1}] \quad , \quad k = 1(1)n-1$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{h} \quad , \quad \Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$\Delta y_1 = \frac{-1}{0.5} = -2 \quad , \quad \Delta y_0 = \frac{1}{0.5} = 2 \quad \text{bulunur.}$$

Buradan

$$\sigma_0 + 4\sigma_1 + \sigma_2 = -48 \quad \text{olur.}$$

Sınır koşullarını $\sigma_0 = s'' (x_0)$

$\sigma_2 = s'' (x_2)$ olarak seçelim.

$$y'' = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \quad \text{den} \quad y'' = \frac{-2}{(0.5)^2} = -8 \quad \text{bulunur.}$$

Buradan

$$s'' (x_0) = s'' (x_2) = -8 \quad \text{olur ve}$$

$$-8 + 4\sigma_1 - 8 = -48$$

$$\sigma_1 = -8 \quad \text{elde edilir. Bu durumda}$$

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = -8 \quad \text{olur.}$$

$0 \leq x \leq 1/2$ aralığı için işlem yapılırsa,

$$Q_0(x) = \frac{\sigma_0}{6} \left[\frac{(x_1 - x)^3}{h_0} - h_0(x_1 - x_0) \right] +$$

$$\frac{\sigma_1}{6} \left[\frac{(x - x_0)^3}{h_0} - h_0(x - x_0) \right] +$$

$$y_0 \left[\frac{x_1 - x}{h_0} \right] + y_1 \left[\frac{x - x_0}{h_0} \right]$$

denkleminde değerleri yerine yazalım.

$$q_0(x) = -\frac{8}{6} \left[\frac{(1/2 - x)^3}{0.5} - 0.5 \left(\frac{1}{2} - x \right) + \frac{x^3}{0.5} - 0.5x \right] + 1 \frac{x}{0.5}$$

$$q_0(x) = -\frac{4}{3} \left[2 \left(\frac{1}{2} - x \right)^3 + 2x^3 - 0.25 \right] + 2x \quad \text{bulunur.}$$

$u_1(x) = q_0(x)$ alınır. d^3u_1/dx^3 değerini bulmak için

$q_0(x)$ in ard arda üç kez türevini alalım.

$$q_0'(x) = -\frac{4}{3} \left[-6 \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 + 6x^2 \right] + 2$$

$$q_0''(x) = -\frac{4}{3} \left[12 \left(\frac{1}{2} - x \right) + 12x \right]$$

$$q_0'''(x) = -\frac{4}{3} \left[-12 + 12 \right] = 0$$

bulunur.

Buradan $\frac{d^3u_1}{dx^3} = 0$ dır.

$1/2 \leq x \leq 1$ aralığı için benzer işlemler yapılır. Buna göre;

$$q_1(x) = -\frac{4}{3} \left[\frac{(x_2 - x)^3}{h} - h(x_2 - x) + \frac{(x - x_1)^3}{h} - h(x - x_1) \right] + y_1 \left[\frac{x_2 - x}{h} \right]$$

denkleminde değerler yerine yazılırsa,

$$q_1 = -\frac{4}{3} [2(1-x)^3 + 2(x - \frac{1}{2})^3 - 0.25] - 2(x-1)$$

elde edilir. $u_2(x) = q_1(x)$ alınır ve $\frac{d^3 u_2}{dx^3} = 0$

olduğu görülür.

Denklem (3.3.2.7) de $\frac{d^3 v}{dx^3} = 1$ olur.

Denklem (3.3.2.6) da gösterilen matrisiyel formda $f(x_i) = 1$, $i = 3(1)11$ alınarak sistem çözülür. Çözüm değerleri,

$$y(x) = v(x) + u_1(x), \quad 0 \leq x < 1/2$$

$$y(x) = v(x) + u_2(x), \quad 1/2 \leq x < 1$$

alınarak bulunur. $N = 50$ alınarak bulunan değerler tablo 3.3.2.8 de verilmiştir. (3.3.2.4) denkleminin gerçek çözümü :

$$y = (1/6) x^3 - (51/12) x^2 + (49/12) x \quad \text{dir.}$$

x_i	y_i	Y_i	Hata
0.0	0.00000000	0.00000000	0.000
0.1	0.36011374	0.36599999	0.005
0.2	0.64020525	0.64800000	0.007
0.3	0.84024355	0.84699994	0.006
0.4	0.96024031	0.96400004	0.003
0.5	1.00020720	1.00000011	0.000
0.6	0.96015588	0.955999997	0.004
0.7	0.84009796	0.83299994	0.007
0.8	0.64004523	0.63200020	0.008
0.9	0.36000924	0.35400032	0.006
1.	0.00000129	0.00000095	0.000

Tablo 3.3.2.8 y_i : $B_{1,5}$ Spline çözümü
 Y_i : Gerçek çözüm

3.3.3. Beşinci Derece Spline Fonksiyonları

Bölüm 3.2 de verilen $\phi_j = B_{1,5}$ spline fonksiyonunun türevlerini hesaplayalım.

$$B_{1,6}^I = \left[\begin{array}{ll} 5x^4 & 0 \leq x < h \\ -25x^4 + 120x^3 - 180x^2 + 120x - 30 & h \leq x < 2h \\ 50x^4 - 480x^3 + 1620x^2 - 2280x + 1170 & 2h \leq x < 3h \\ -50x^4 + 720x^3 - 3780x^2 + 8520x - 6930 & 3h \leq x < 4h \\ 25x^4 - 480x^3 + 3420x^2 - 10680x + 12270 & 4h \leq x < 5h \\ -5x^4 + 120x^3 - 1080x^2 + 4320x - 6480 & 5h \leq x < 6h \end{array} \right.$$

$$B_{1,6}^{II} = \left[\begin{array}{ll} 20x^3 & 0 \leq x < h \\ -100x^3 + 360x^2 - 360x + 120 & h \leq x < 2h \\ 200x^3 - 1440x^2 + 3240x - 2280 & 2h \leq x < 3h \\ -200x^3 + 2160x^2 - 7560x + 8520 & 3h \leq x < 4h \\ 100x^3 - 1440x^2 + 6840x - 10680 & 4h \leq x < 5h \\ -20x^3 + 360x^2 - 2160x + 4320 & 5h \leq x < 6h \end{array} \right.$$

$$B_{i,6}''' = \begin{cases} 60x^2 & 0 \leq x < h \\ -300x^2 + 720x - 360 & h \leq x < 2h \\ 600x^2 - 2880x + 3240 & 2h \leq x < 3h \\ -600x^2 + 4320x - 7560 & 3h \leq x < 4h \\ 300x^2 - 2880x + 6840 & 4h \leq x < 5h \\ -60x^2 + 720x - 2160 & 5h \leq x < 6h \end{cases}$$

$B_{i,6}$ fonksiyonunun düğüm noktalarındaki türev değerleri tablo 3.3.3.1 de verilmiştir.

	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	x_{i+3}	x_{i+4}	x_{i+5}	x_{i+6}
$B_{i,6}$	0	1	26	66	26	1	0
$B_{i,6}'$	0	5	50	0	-50	-5	0
$B_{i,6}''$	0	20	40	-120	40	20	0
$B_{i,6}'''$	0	60	-120	0	120	-60	0
$B_{i,6}^{IV}$	0	120	-480	720	-480	120	0

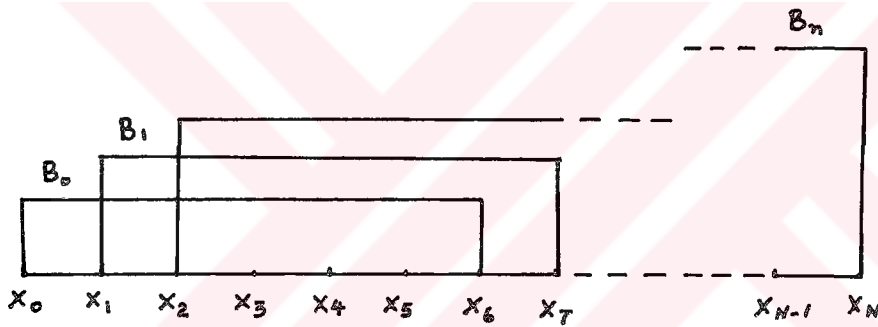
Tablo 3.3.3.1



$$\phi_j = B_{j,6} \quad , \quad v = \sum_{j=1}^n C_j B_{j,6}$$

Değerleri denklem (3.3.1) de yerine yazılır ve denklem düzenlenirse, dördüncü derece spline için oluşturduğumuz (3.3.2.2) denklemi elde edilir.

$\{x_i\}_{i=0}^N$ düğümlerinde spline fonksiyonlarının aldığı değerler tablo 3.3.3.1 kullanılarak (3.3.2.2) de yerine yazılırsa, $n + 1$ bilinmeyenli denklem sisitemi elde edilir. Burada $n = N - 6$ dir.

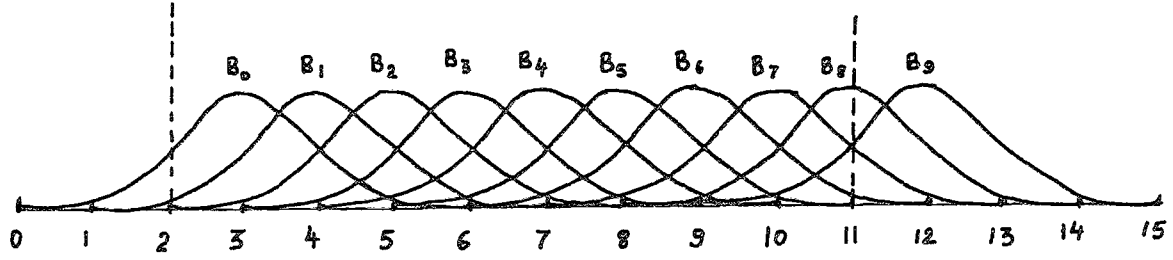


Şekil 3.3.3.2

Bölüm 3.3.2 de verdiğimiz örneği alalım. $N = 15$ nokta kullanarak denklem sistemini oluşturalım. $n = 9$ olduğuna göre;

$$C_0 B_0''' + C_1 B_1''' + C_2 B_2''' + \dots + C_9 B_9''' = f(x)$$

yazılır. $\{x_i\}_{i=2}^{11}$ düğümlerinde fonksiyonun türevlerinin aldığı değerler tablo 3.3.3.1 kullanılarak yazılırsa, (3.3.3.4) de matrisiyel formda gösterilen denklem sistemi elde edilir.



Şekil 3.3.3.3

$$\begin{bmatrix}
 -120 & 60 & & & & & & & & & & & \\
 0 & -120 & 60 & & & & & & & & & & \\
 120 & 0 & -120 & 60 & & & & & & & & & \\
 -60 & 120 & 0 & -120 & 60 & & & & & & & & \\
 & -60 & 120 & 0 & -120 & 60 & & & & & & & \\
 & & -60 & 120 & 0 & -120 & 60 & & & & & & \\
 & & & -60 & 120 & 0 & -120 & 60 & & & & & \\
 & & & & -60 & 120 & 0 & -120 & 60 & & & & \\
 & & & & & -60 & 120 & 0 & -120 & 60 & & & \\
 & & & & & & -60 & 120 & 0 & -120 & 60 & & \\
 & & & & & & & -60 & 120 & 0 & -120 & 60 & \\
 & & & & & & & & -60 & 120 & 0 & -120 & 60
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 C_0 \\
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 C_4 \\
 C_5 \\
 C_6 \\
 C_7 \\
 C_8 \\
 C_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f(x_2) \\
 f(x_3) \\
 f(x_4) \\
 f(x_5) \\
 f(x_6) \\
 f(x_7) \\
 f(x_8) \\
 f(x_9) \\
 f(x_{10}) \\
 f(x_{11})
 \end{bmatrix}$$

(3.3.3.4)

Bölüm 3.3.2 de sınır koşulları için yapılan işlem sonucunda $f(x_1)=1$ bulunmuştu. (3.3.3.4) de gösterilen matrisiyel formda $f(x_1) = 1$ alınarak sistem çözülür. $N = 50$ için bulunan çözüm değerleri tablo 3.3.3.5 de verilmiştir. Burada,

$$y (x) = v (x) + u_1 (x) \quad , \quad 0 \leq x < 1/2$$

$$y (x) = v (x) + u_2 (x) \quad , \quad 1/2 \leq x < 1$$

olarak alınmıştır.

x_1	y_1	Y_1	Hata
0.0	0.00000000	0.00000000	0.000
0.1	0.35999970	0.36599999	0.006
0.2	0.63999861	0.64800000	0.008
0.3	0.83999710	0.84699994	0.007
0.4	0.95999549	0.96400004	0.004
0.5	0.99999411	1.00000011	0.000
0.6	0.95999331	0.955999997	0.003
0.7	0.83999336	0.83299994	0.006
0.8	0.63999470	0.63200020	0.007
0.9	0.36000013	0.35400032	0.005
1.	0.00000011	0.00000095	0.000

Tablo 3.3.3.5

y_1 : $B_{1,6}$ Spline çözümü

Y_1 : Gerçek çözüm

4. ÇOK NOKTALI LİNEER SINIR DEĞER PROBLEMLERİNE SPLINE YÖNTEMİ UYGULAMALARI VE SONUÇLARIN SONLU FARK YÖNTEMİYLE KARŞILAŞTIRILMASI

Bölüm 3.3 de sunulan yöntem kullanılarak aşağıdaki diferansiyel denklemi verilen sınır koşulları altında çözelim.

$$y''' + 2y'' - 3y' = 1 \quad ,$$

sınır koşulları

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(1/2) &= 0 \\ y(1) &= -1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

İşlemlerde kolaylık sağlamak amacıyla $N = 13$ nokta kullanarak dördüncü derece spline fonksiyonları ile sistemi oluşturalım.

$$y(x) = \sum_{j=0}^n C_j B_j \quad , \quad n = N - 5$$

Değerlerini denklem (4.1) de yerine yazar ve C_j katsayılarına göre düzenlersek;

$$\begin{aligned} (B_0''' + 2B_0'' - 3B_0')C_0 + (B_1''' + 2B_1'' - 3B_1')C_1 + \dots + \\ (B_8''' + 2B_8'' - 3B_8')C_8 = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\{x_i\}_{i=3}^{11}$ düğümlerindeki spline fonksiyonlarının türev değerleri tablo 3.3.2.1 ve şekil 3.3.2.5 kullanılarak bulunup yerine yazılırsa, aşağıda matrisiyel formda verilen denklem sistemi elde edilir.



$$\begin{bmatrix} 84 & -132 & 36 \\ 12 & 84 & -132 & 36 \\ 12 & 84 & -132 & 36 \\ 12 & 84 & -132 & 36 \\ 12 & 84 & -132 & 36 \\ 12 & 84 & -132 & 36 \\ 12 & 84 & -132 & 36 \\ 12 & 84 & -132 & 36 \\ 12 & 84 & -132 & 36 \\ 12 & 84 & -132 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \\ f(x_6) \\ f(x_7) \\ f(x_8) \\ f(x_9) \\ f(x_{10}) \\ f(x_{11}) \end{bmatrix}$$

(4.2)

Sınır koşullarını bölüm 3.3.1 ve 3.3.2 de verilen yönteme göre sıfırlayalım.

$$v(x) = y(x) - u(x) \quad , \quad L[v] = F[x] - L[u] \quad \text{den}$$

$$v''' + 2v'' - 3v' = 1 - [u''' + 2u'' - 3u'] \quad (4.3) \quad \text{yazılır.}$$

u''' , u'' , u' türev değerlerini hesaplayalım.

$$\Delta y_1 = \frac{-1 - 0}{0.5} = -2 \quad , \quad \Delta y_0 = \frac{0 - 1}{0.5} = -2$$

$$\sigma_0 + 4\sigma_1 + \sigma_2 = (6 / 0.5) [-2 + 2]$$

$$\sigma_0 + 4\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \quad \text{olur.}$$

$$y'' = (-1 - 2*0 + 1) / h^2 \quad \text{den} \quad y'' = 0 \quad \text{bulunur.}$$

$$\sigma_0 = s''(x_0)$$

$$\sigma_2 = s''(x_2) \quad \text{yaklaşım değerlerinden,}$$

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad \text{olduğu görülür.}$$

$$0 \leq x < 1/2 \quad \text{aralığı için}$$

$$q_0 = y_0 \left(\frac{x_1 - x}{h} \right) + y_1 \left(\frac{x - x_0}{h} \right) \quad \text{dan}$$

$$q_0 = (1 / 0.5) (1 / 2 - x)$$

$$q_0 = 2 (0.5 - x) \quad \text{bulunur.} \quad u_1(x) = q_0 \quad \text{olarak alınır.}$$

$$u_1' (x) = -2, \quad u_1'' (x) = 0, \quad u_1''' (x) = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Değerler denklem (4.3) de yerine yazılırsa,

$$v''' + 2v'' - 3v' = 1 - [-3(-2)]$$

$$v''' + 2v'' - 3v' = -5 \quad \text{bulunur.}$$

$1/2 \leq x < 1$ aralığı için benzer işlemler yapılırsa,

$$q_1 = y_1 \left(\frac{x_2 - x}{h} \right) + y_2 \left(\frac{x - x_1}{h} \right) \quad \text{den}$$

$$q_1 = -2 (x - 0.5) \quad \text{elde edilir. } u_2 (x) = q_1 \quad \text{olarak alınır.}$$

$$u_2' (x) = -2, \quad u_2'' (x) = 0, \quad u_2''' (x) = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Bu durumda (4.2) matrisiyel formunda $f (x_i) = -5, i = 3 (1) 8$ alınarak sistem çözülür. (4.1) denkleminin çözümü;

$$y (x) = v (x) + u_1 (x), \quad 0 \leq x < 1/2$$

$$y (x) = v (x) + u_2 (x), \quad 1/2 \leq x < 1$$

alınarak bulunur.

(4.1) denklemi analitik olarak çözülürse,

$$Y = 1.212087701 - 0.700105738e^x + 0.488018036e^{-3x} - (1/3) x$$

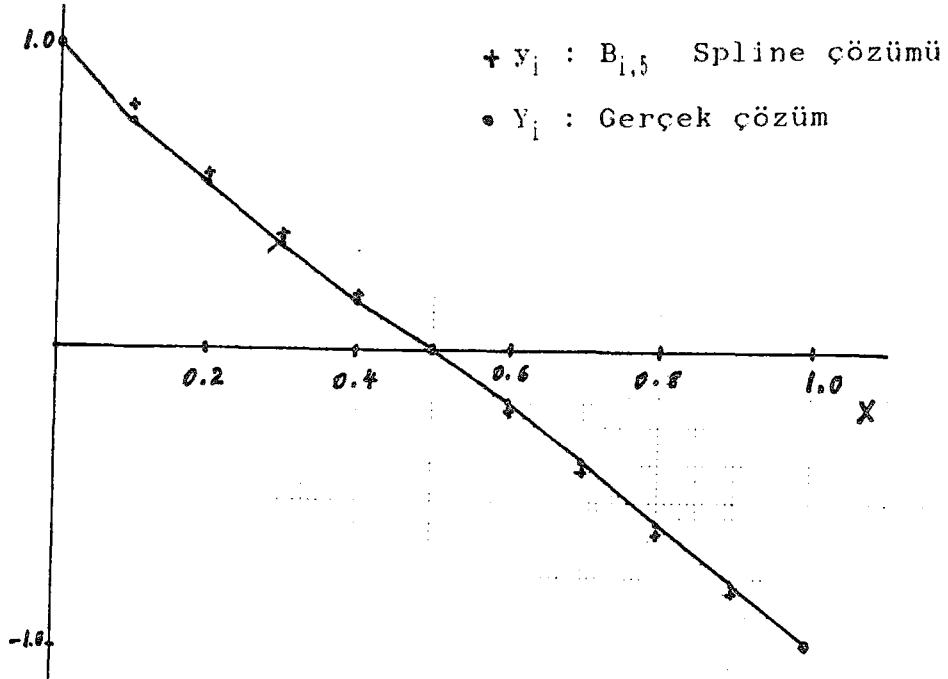
elde edilir.

N = 50 nokta için oluşan sistemin çözüm değerleri tablo 4.4 de verilmiştir. Bölüm 2 de sonlu fark yöntemiyle bulunan değerlerin tablo 4.4 deki değerlerle karşılaştırılması tablo 4.6 da verilmiştir.

x_i	y_i	Y_i	Hata
0.0	1.00000000	0.99999999	0.0000
0.1	0.79999339	0.76655047	0.0334
0.2	0.59999417	0.55813994	0.0418
0.3	0.39999496	0.36545718	0.0345
0.4	0.19999575	0.18130760	0.0186
0.5	-0.00000351	-0.000033389	0.0003
0.6	-0.20000266	-0.182919230	0.0170
0.7	-0.40000193	-0.37132449	0.0286
0.8	-0.60000108	-0.56842088	0.0315
0.9	-0.80000035	-0.77709685	0.0229
1.	-0.99999941	-1.00003251	0.0000

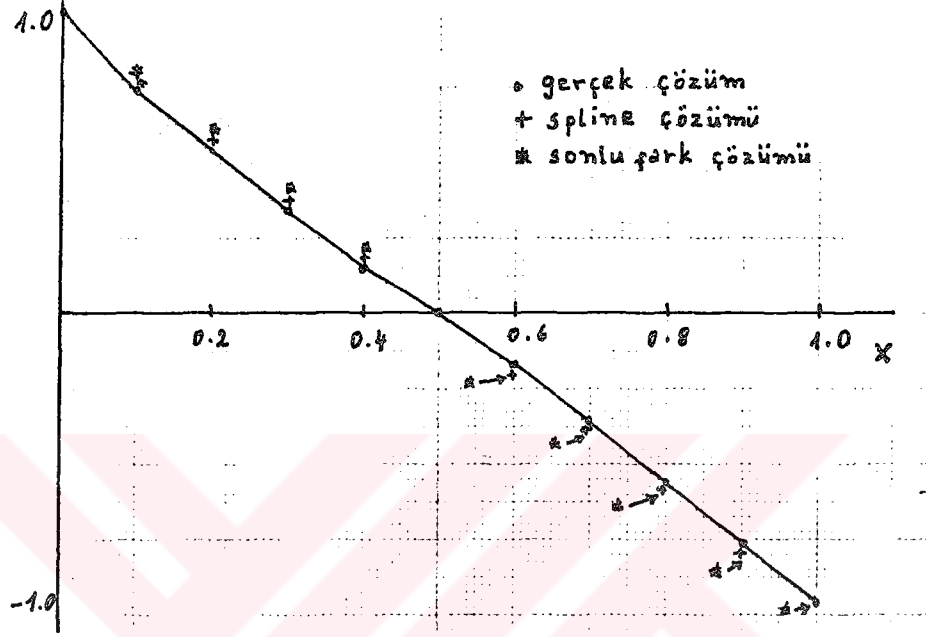
Tablo 4.4



Şekil 4.5 $B_{i,5}$ spline ve gerçek çözüm grafiği

x_i	$B_{i,5}$ Spline çözümü	Sonlu fark yöntemiyle çözüm
0.0	1.00000000	1.00000000
0.1	0.79999339	0.80000000
0.2	0.59999417	0.60000000
0.3	0.39999496	0.40000000
0.4	0.19999575	0.20000000
0.5	-0.00000351	0.00000000
0.6	-0.20000266	-0.20000010
0.7	-0.40000193	-0.40000010
0.8	-0.60000108	-0.60000000
0.9	-0.80000035	-0.80000010
1.	-0.99999941	-1.00000000

Tablo 4.6

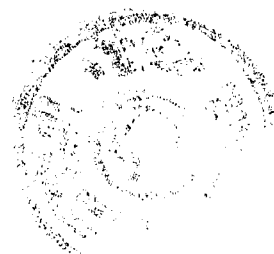


Şekil 4.7 Spline çözümü ve sonlu fark yöntemiyle çözümün grafik olarak gösterilmesi

(4.1) denklemini beşinci derece spline fonksiyonları ile çözelim. $N = 15$ nokta alınarak, tablo 3.3.3.1 ve şekil 3.3.3.3 kullanılarak oluşturulan denklem sistemi matrisyel formda aşağıda verilmistir.

$$\begin{bmatrix} -190 & 85 \\ -240 & -190 & 85 \\ 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -190 & 85 \\ -240 & -190 & 85 \\ 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \\ -5 & 350 & -240 & -190 & 85 \end{bmatrix}$$

(4.8)



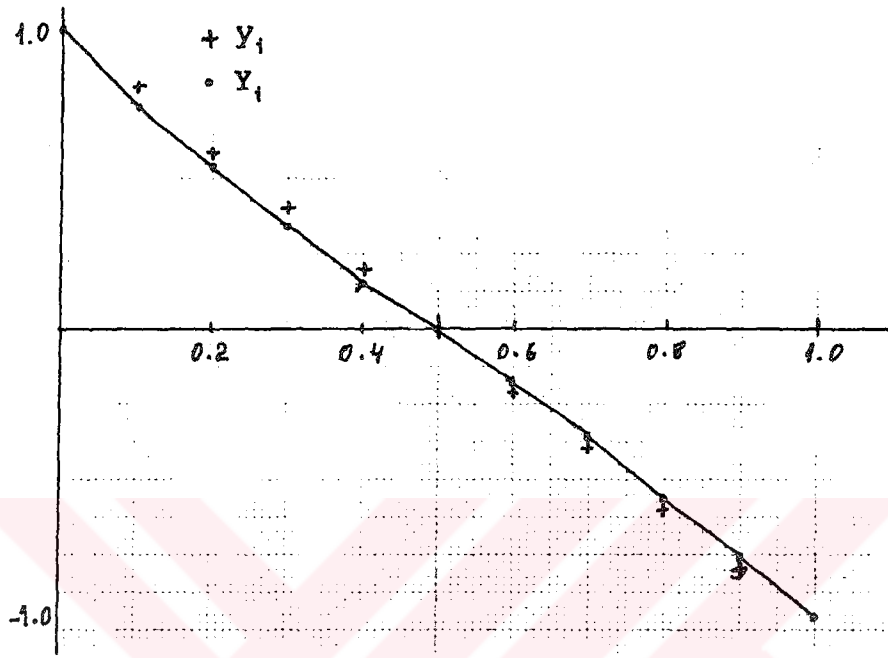
$N = 50$ nokta için oluşturulan sistem kullanılarak, (4.1) denkleminin çözüm değerleri tablo 4.9 da verilmiştir.

x_i	Y_i	Y_i	Hata
0.0	1.00000000	0.99999999	0.0000
0.1	0.80000002	0.76655047	0.0334
0.2	0.60000006	0.55813994	0.0418
0.3	0.40000005	0.36545718	0.0345
0.4	0.20000041	0.18130760	0.0186
0.5	-0.00000208	-0.000033389	0.0000
0.6	-0.19998323	-0.182919230	0.0170
0.7	-0.40012413	-0.37132449	0.0287
0.8	-0.59891043	-0.56842088	0.0304
0.9	-0.79999995	-0.77709685	0.0229
1.	-0.99674974	-1.00003251	0.0032

Tablo 4.9

Y_i : $B_{1,6}$ Spline çözümü

Y_i : Gerçek çözüm



Şekil 4.10 $B_{1,6}$ Spline ve gerçek çözüm grafiği

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

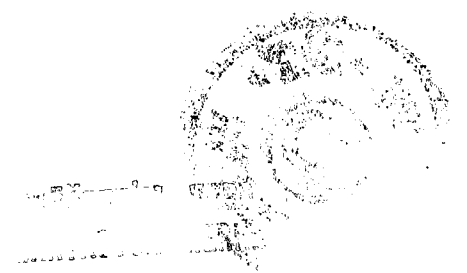
Çok noktalı sınır değer problemlerinin çözümlerinde yaygın olarak kullanılan yöntemler, sonlu fark ve invariant-imbedding yöntemleridir. Önceki bölümlerde spline fonksiyonları yardımıyla çok noktalı lineer sınır değer problemlerinin çözümleri araştırılmış, sonuçlar sonlu fark yöntemiyle karşılaştırılmıştır.

Spline fonksiyonları kullanılarak elde edilen çözüm değerlerinin, sonlu fark yöntemiyle elde edilen değerlerden daha iyi olduğu görülmektedir.

Spline fonksiyonlarının polinomlardan meydana gelmesi sayısal çözümlerin elde edilmesinde kolaylıklar sağlamaktadır. Buna karşın invariant-imbedding yöntemiyle sonucun elde edilmesinde uzun teorik işlemler gerekmektedir. Spline fonksiyonları ile elde ettiğimiz sonuçlar invariant-imbedding yöntemine göre daha basit ve kısa sürede bulunmuştur. (4)

Çözümlerde nokta sayısı ve spline derecesine bağlı olarak hatada da önemli bir artış ve azalış görülmemiştir. Ayrıca herhangi bir salınıma rastlanmamıştır. Buda spline fonksiyonlarının, derece ve düğüm sayısına bağlı kalmadan çok noktalı sınır değer problemlerinin çözümünde uygun bir yöntem olacağını göstermektedir.

Sınırlarda $y(\alpha) = a$, $y(\beta) = b$, $y(\tau) = c$, ($\alpha < \beta < \tau$) koşulları ile verilen problemlerin çözümlerinde direkt olarak spline'ların uygulanamayacağı anlaşılmıştır. Sınırlar için uygun bir dönüşüm yapılarak, spline fonksiyonları uygulanır hale getirilmiştir.



KAYNAKLAR

1. John Gregory And Marvin Zeman, Spline Matrices And Their Applications To Some Higher Order Methods For Boundary Value Problems, Siam J.Numer Anal.Vol.25.No:2.Appl.1988
2. Gregor Mullenheim, Solving Two-Point Boundary Value Problems With Spline Functions, Ima Journal of Numerical Analysis (1992) 503-518
3. C. De Boor, A Practical Guide To Splines, Springer Verlag, New York, 1978
4. Dale W. Alspaugh, Application of Invariant Imbedding To Linear Multipoint Boundary Value Problems With General Boundary Value Conditions, Applied Mathematics And Computation 5:213-232 (1979)
5. M.J. Maron, Numerical Analysis, Macmillan Publ.Co., New York, 1982
6. Lee W. Johnson, R. Dean Riess, Numerical Analysis, 1982
7. E.N. Houstis. E.A. Vavalis and J.R. Rice, Convergence of $O(h^4)$ Cubic Spline Collocation Methods for Elliptic Partial Differential Equations, Siam J. Numer Anal. Vol.25. No.1 February 1988
8. A.K. Aziz, Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, 1978
9. Jim Douglas Jr. and Todd Dupont, Galerkin Approximations for Two-Point Boundary Problems Using Continuous, Piecewise Polynomial Spaces, Numer.Math. 22, 99-109 (1974)

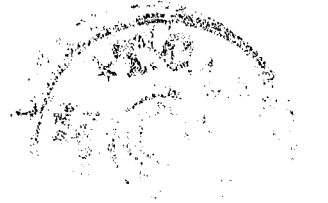
10. P.Hallet, J.P.Hennart and E.H.Mund, A Galarkin Method With Modified Piecewise Polynomials for Solving a Second-Order Boundary Value Problem, Numer.Math. 27, 11-20 (1976)
11. Takeo Ojika, Structure Analyses For Large Scale Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems, Journal of Mathematical Analysis And Applications 92. 139-162 (1983)
12. Hunter H. Meyer, Continuous Orthonormalization For Multipoint Problems For Linear Ordinary Differantial Equations, Siam J. Numer.Anal.Vol.24 No.6. December 1987
13. Ramesh C.Gupta And Ravi P. Agarwal, A New Shooting Method For Multi-Point Discrete Boundary Value Problems, Journal of Mathematical Analysis And Applications 112,210-220 (1985)
14. G. Micula And Haydar Akça, Approximate Solutions of The Second Order Differantial Equations With Deviating Argument By Spline Functions, Mathematica, N.1,1988,PP.37-46
15. P. Deuflhard, H.-J.Pesch, P.Rentrop, A Modified Continuation Method For The Numerical Solution of Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems By Shooting Techniques, Numer.Math. 26, 327-343 (1976)
16. G.W.Reddien, Vanderbilt University, Nashville, Tennessec, Projection Methods And Singular Two-Point Boundary Value Problems, Numer,Math. 21, 193-205 (1973)
17. Çağlar Hikmet, Spline Interpolasyon ve Optimal Hata Tayini, Doktora Tezi, 1990
18. John Castl, Robert Kalaba, Imbedding Methods in Applied Mathematics, 1973

19. Melvin R.Scoth, Invariant Imbedding And Applications to Ordinary Differantial Equations An Introdaction, 1973
20. M.M. Chawla, M.K.Jain and R. Subramanian, On The Numerical Integration of A Singular Two-Point Boundary Value Problem, Intern.J. Computer Math.Vol.31. pp. 187-194 (1990)
21. Gunter H.Meyer, The Method of Lines And Invariant Imbedding For Elliptic And Parabolic Free Boundary Problems, Siam J.Numer.Anal Vol.18. No.1 February 1981
22. H.Nasr, Fatma A.Mahmoud and A.A.Salama, Modified Ocl Scheme For Two-Point Boundary Value Problems, Inter.J.Computer Math.Vol.35 pp. 195-205
23. John Crank, Free And Moving Boundary Value Problems, New York, 1984
24. Hebert B.Keller, Numerical Methods For Two-Point Boundary Value Problems, 1968
25. Balkanay Erol, İki Noktalı Sınır Değer Problemlerinin Sayısal Çözümleri İçin Invariant Imbedding Yöntemi ve Quasi Linearization Tekniği ile Invariant Imbedding Yönteminin Birleştirilmesi, Doçentlik Tezi, 1979
26. Yönet İ.Cengiz, Adi Diferansiyel Denklemlerdeki Sınır Değer Problemlerinin Sonlu Farklar Yöntemi İle Sayısal Çözümleri, Doçentlik Tezi, 1979

TEŐEKKÖR

Çalışmalarımı yürüten ve destekleyen, değerli bilgilerinden yararlandığım, çalışma azmi ile bana ışık tutan sayın hocam Prof.Dr. Behiç ÇAĞAL' a teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarımı destekleyen sayın hocam Prof.Dr. Erol BALKANAY' a , değerli bilgilerinden yararlandığım ve büyük bir özveri ile çalışmalarına katkıda bulunan Yrd.Dç.Dr. Hikmet ÇAĞLAR 'a , Araştırma görevlisi arkadaşım Işım GENÇ' e teşekkür ederim.



ÖZGEÇMİŞ

Doğduğu yer, yılı : Mut - İçel , 1965

İlk öğrenim : Mut Cumhuriyet İlkokulu

Orta öğrenim : Mut Ortaokulu , İstanbul Kandilli Kız Lisesi

Yüksek öğrenim : Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Matematik Mühendisliği, Y.Ü. Fen Bilimleri
Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurumlar : 14-07-1987 de Yıldız Üniversitesi Fen-
Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı
Matematik Anabilim dalına araştırma görevlisi
olarak atanmıştır. Halen aynı görevini
sürdürmektedir.