

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FENBİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

84932

**SONSUZ BÖLGEDE VERİLMİŞ İKİNCİ MERTEBEDEN
ELİPTİK TİPTEKİ DİFERANSİEL
OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİNİN SAYISININ
ASİMTOTİK İFADESİ**

Hamit AVCI

**F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Tez Savunma Tarihi : 6 Ocak 1999

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV (Y.T.Ü.)

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yusuf AVCI (İ.Ü.)

: Prof. Dr. Mahir HASANOV (İ.T.Ü.)

[Handwritten signatures and initials]

İSTANBUL, 1999

84932

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince yardımlarından dolayı Sayın Prof.Dr. Ehliman Adıgüzelov'a ve tezin yazılmasını üstlenen çalışma arkadaşlarım Yrd.Doç.Dr. Ayşe Kara Hacıbekiroğlu, Dr. Erdal Gül ve Arş.Gör. Serpil Şengül'e teşekkür ederim.

Hamit AVCI

Ekim 1998

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
1.0. GİRİŞ	1
2.0. ÖN BİLGİLER	4
3.0. İKİNCİ MERTEBEDEN BİR DİFERANSİEL OPERATÖRÜN NEGATİF ÖZDEĞERLERİNİN SAYISININ ASİMTOTİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ	
3.1. Özdeğerlerin sayısı için bazı eşitsizlikler	9
3.2. Özdeğerler için asimtotik davranış formülü	24
3.3. Örnek	33
4.0. KISMİ TÜREVLİ ELİPTİK TİPTE OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİEL OPERATÖRÜN SPEKTRUMUNUN İNCELENMESİ VE ÖZDEĞERLERİNİN SAYISI İÇİN ASİMTOTİK FORMÜL	
4.1. Problemin ortaya konulması	34
4.2. $K_m(x, y, t)$ operatör fonksiyonları için bazı eşitsizlikler	41

4.3. Green fonksiyonu için asimtotik formül	49
4.4. Özdeğerlerin sayısının asimtotik davranışı	51
4.5. Örnek	54

SONUÇ	55
------------------------	-----------

KAYNAKLAR	56
----------------------------	-----------

ÖZGEÇMİŞ



ÖZET

”Sonsuz bölgede verilmiş ikinci mertebeden eliptik tipteki diferansiel operatörlerin özdeğerlerinin sayısının asimtotik ifadesi ” adlı bu tez iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde $L_2[0, \infty)$ dan $L_2[0, \infty)$ a

$$l(y) = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) - q(x)y$$

diferansiel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan L operatörünün ϵ pozitif bir sayı olmak üzere $-\epsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin $N(\epsilon)$ sayısı için $\epsilon \rightarrow 0$ iken asimptotik formüller elde ettik.

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere , $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayında tanımlı değerleri H a ait olan kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} ||f(x)||_H^2 dx < \infty, \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H : \mathbb{R}^n)$ ile gösterelim.

H_1 uzayının herhangi iki f ve g elemanlarının iç çarpımını

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x), g(x))_H dx$$

formülü ile tanımlarsak, H_1 ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur.

İkinci bölümde ise, H_1 den H_1 e

$$l(u) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x}) + Q(x)u$$

diferansiel ifadesi ile oluşturulan kendine eş L operatörünün spektrumu incelenmiş ve özdeğerlerin sayısı için asimtotik formül bulunmuştur.

ABSTRACT

This thesis with the title "Asymptotic expression of the number of eigenvalues of differential operators of second order in elliptic type given in infinite region" consists of two chapters

In the first chapter, we obtained the asymptotic formulas of operators L forming with differential expression

$$l(y) = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) - q(x)y$$

from $L_2[0, \infty)$ into $L_2[0, \infty)$ and the boundary condition $y(0) = 0$ when $\epsilon \rightarrow 0$ for number $N(\epsilon)$ of eigenvalues less than $-\epsilon$, where ϵ is a positive real number.

We denote by $H_1 = L_2(H : \mathbb{R}^n)$ the set of all functions f satisfying condition

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_H^2 dx < \infty, \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

and strongly measurable belonging to H defined on Euclidean space $\mathbb{R}^n$) and with the values in H , where H is a separable Hilbert space. If we define the inner product of arbitrary two elements f and g of the space H_1 with the formula

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x), g(x))_H dx$$

then H_1 becomes a separable Hilbert space.

In chapter 2, the spectrum of self adjoint operator L from H_1 to H_1 forming with differential expression

$$l(u) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + Q(x)u$$

has been studied and the asymptotic formula for the number of eigenvalues has been found.

1.0 GİRİŞ

Bu çalışmada ikinci mertebeden eliptik tipteki tekil diferansiel operatörlerin özdeğerlerinin sayısının asimtotik davranışı incelenmiştir. Söz konusu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde $L_2[0, \infty) \rightarrow L_2[0, \infty)$ a ikinci mertebeden bir diferansiel operatörün negatif özdeğerlerinin sayısı için asimtotik formüller bulunmuştur. İkinci bölümde ise , "kısmi türevli eliptik tipte kendine eş sınırsız operatör katsayılı bir diferansiel operatörün spektrumu ve özdeğerlerinin sayısının asimtotik davranışı" incelenmiştir.

Aşağıda bölümlerin temel ayrıntılarını vereceğiz:

3.0 İkinci mertebeden bir diferansiel operatörün negatif özdeğerlerinin sayısının asimtotik davranışının incelenmesi başlığı altında $L_2[0, \infty)$ dan $L_2[0, \infty)$ a

$$l(y) = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) - q(x)y$$

diferansiel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan L operatörünün ϵ pozitif bir sayı olmak üzere , $-\epsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin $N(\epsilon)$ sayısı için $\epsilon \rightarrow 0$ da asimtotik formüller elde edilmiştir. $l(y)$ ifadesinde yer alan $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları pozitif fonksiyonlardır ve ayrıca $q(x)$ in monoton azalan olduğu varsayılıyor.

g, q nun ters fonksiyonu ve $\epsilon < q(0)$ olmak üzere $L_2[0, g(\epsilon)]$ dan $L_2[0, g(\epsilon)]$ a $l(y)$ ifadesi ve sırasıyla

$$y(0) = y(g(\epsilon)) = 0$$

$$y'(0) = y'(g(\epsilon)) = 0$$

sınır koşullarıyla oluşturulan operatörler L' ve L'' bu operatörlerin $-\epsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin sayısı da $N'(\epsilon)$ ve $N''(\epsilon)$ olsun. Teorem 3.1.3 de p ve q fonksiyonları belirli koşulları sağladıkları taktirde

$$N'(\epsilon) \leq N(\epsilon) \leq N''(\epsilon)$$

olduğu ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.5 , 3.1.6 ve 3.1.7 de $N'(\epsilon)$ ve $N''(\epsilon)$ fonksiyonlarını R. Courant'ın varyasyon prensipleri yardımıyla sırasıyla alttan ve üstten sınırlandırıyoruz. $N'(\epsilon)$ ve $N''(\epsilon)$ için elde edilen eşitsizliklerden yararlanarak Teorem 3.2.1 ve 3.2.4 de $N(\epsilon)$ için asimtotik formüller bulunmuştur.

Çeşitli diferansiel operatörlerin negatif özdeğerlerinin asimtotik davranışları Skacck, B.Y, 1963, Adıgüzelov, E.E, 1980 ve Maksudov, F.G, Bairamoğlu, M. Adıgüzelov, E.E, 1993 çalışmalarında incelenmiştir.

"4.0 Kısmi türevli eliptik tipte operatör katsayılı bir diferansiel operatörün spektrumunun incelenmesi ve özdeğerlerinin sayısı için asimtotik formül" başlığı altında ise aşağıdaki esaslar yer almaktadır:

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere R^n Öklit uzayında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_H^2 dx < \infty, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H; R^n)$ ile gösterelim. H_1 in herhangi iki f ve g elemanlarının iç çarpımını

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x), g(x))_H dx$$

formülü ile tanımlarsak , H_1 uzayı ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur

H_1 den H_1 e

$$l(u) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + Q(x)u$$

diferansiel ifadesi ile oluşturulan kendine eş L operatörünün spektrumu incelenmiş ve özdeğerlerinin sayısı için asimtotik formül bulunmuştur. $l(u)$ ifadesinde yer alan reel değerli $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$,

$(i,j,k=1,\dots,n)$ türevlerine sahiptir ve

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad , \quad (\nu, \mu > 0)$$

koşulunu sağlıyor. Herbir $x \in \mathbb{R}^n$ için $D(Q(x)) \subset H$ olmak üzere

$Q(x) : D(Q(x))$ den H a kendine eş operatördür. $\cap_{x \in \mathbb{R}^n} D(Q(x))$ kümesi H da yoğundur.

$Q(x) \geq I$ ve $Q^{-1}(x) \in \sigma_\infty(H)$ dır.

Bu bölümde $Q(x)$ operatör fonksiyonunun başka koşulları sağladığı varsayılarak L operatörünün saf ayrık (discrete) spektruma sahip olduğu ispatlanmış ve λ bir pozitif sayı olmak üzere λ dan küçük olan özdeğerlerin $N(\lambda)$ sayısı için $\lambda \rightarrow \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2}+1)} \sum_i \int_{\alpha_i(x)} \Phi(x) (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{n}{2}} dx$$

asimtotik formülü bulunmuştur. Bu formülde yer alan $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq \dots \leq \alpha_m(x) \leq \dots$ fonksiyonları $Q(x)$ operatörünün özdeğerleridir. Ayrıca

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j} d\xi \quad , \quad (\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$$

ve $\Gamma(\frac{n}{2} + 1) = \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}} e^{-t} dt$ dır. Saf ayrık spektruma sahip olan operatör katsayılı diferansiel operatörlerin özdeğerlerinin sayısının asimtotik davranışı, Kostyuchenko, A.G., Levitan, B.M., 1967, Bayramoğlu, M., 1971, Maksudov, F.G., Hüseyinov, V.G., 1978, Aslanov, G.İ., 1994 ve birçok başka çalışmalarda incelenmiştir.

2.0 ÖN BİLGİLER

$f(x)$ ve $\{f_k(x)\}_1^\infty \mathbb{R}^n$ Öklit uzayında tanımlı, değerleri bir B Banach uzayına ait olan herhangi fonksiyonlar olsun.

2.1. Tanım $\mathbb{R}^n$ uzayında tanımlı ve değer kümesi sayılabilir bir küme olan bir f fonksiyonu her bir değerini ölçülebilir bir küme üzerinde alırsa, bu f fonksiyonuna sayılabilir değerli fonksiyon denir.

2.2. Tanım Her $F \in B^*$ (B^* , B üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyoneller kümesi olup, dual uzaydır) için $F[f(x)]$ skaler fonksiyonu Lebesgue anlamında ölçülebilir ise, $f(x)$ fonksiyonu zayıf ölçülebilirdir denir.

2.3. Tanım $\mathbb{R}^n$ uzayında hhhhy (hemen hemen her yerde) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k(x) - f(x)\|_B = 0$ olacak şekilde sayılabilir değerli fonksiyonların bir $\{f_k(x)\}_1^\infty$ dizisi varsa, $f(x)$ fonksiyonu kuvvetli ölçülebilirdir denir.

2.4. Teorem (Hille, E., Phillips, R.S., 1957) Değerleri ayrılabilir bir B Banach uzayına ait olan fonksiyonlar için kuvvetli ve zayıf ölçülebilirlik denktir. H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_H^2 dx < \infty, \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H; \mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. H_1 uzayının herhangi f ve g elemanlarının iç çarpımı

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x), g(x))_H dx$$

formülü ile tanımlanırsa, H_1 kümesi ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur (Kirillov, A.A., 1976).

2.5. Örnekler 1) $H = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ olsun. Bu durumda $H_1 = L_2(H; \mathbb{R}^n)$ uzayı, $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayı olur. 2) $H = \mathbb{R}^m$ olsun. Bu taktirde $H_1 = L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\sum_{i=1}^m x_i^2(t)] dt < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ elemanlarından (vektör fonksiyonları) oluşan bir kümedir. Bu uzayın x ve $y = y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$ elemanlarının iç çarpımı

$$(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} [\sum_{i=1}^m x_i(t)y_i(t)] dt$$

şeklinde tanımlanır. 3) $H = L_2[a, b]$ olsun. Bu durumda $H_1 = L_2(H; \mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\int_a^b |u(t, s)|^2 ds) dt < \infty$$

olacak şekilde $x(t) = u(t, s)$ fonksiyonlar kümesidir.

2.6. Tanım: $f(x) \in H_1 = L_2(H; \mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - f(x_0)\|_H = 0$$

ise, f fonksiyonu x_0 noktasında kuvvetli süreklidir denir.

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i} - u \right\|_H = 0$$

ise, $u \in H$ elemanına f fonksiyonunun $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasında x_i değişkenine göre kuvvetli kısmi türevi denir ve $f'_{x_i}(x)$ yada $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ şeklinde gösterilir. Bundan sonra kuvvetli sürekli ve kuvvetli türev yerine sırasıyla sadece sürekli ve türev terimlerini kullanacağız.

H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \rightarrow H$ kendine eş bir operatör olsun ($D(A) \subset H$). $\forall x \in D(A)$, $x \neq 0$ için $(Ax, x) > 0$ ($(Ax, x) < 0$) ise A ya pozitif (negatif) operatördür denir ve $A > 0$ ($A < 0$) şeklinde yazılır. $\forall x \in D(A)$ için $(Ax, x) \geq 0$ ($(Ax, x) \leq 0$) ise A ya negatif olmayan (pozitif olmayan) bir operatördür denir ve $A \geq 0$ ($A \leq 0$) şeklinde gösterilir.

A ve B kendine eş herhangi iki operatör olsun.

$D(A) \subset D(B)$ ve $A - B : D(A) \rightarrow H$ operatörü pozitif (negatif olmayan) bir operatör ise, A ya B den büyüktür (küçük değildir) denir ve $A > B$ ($A \geq B$) olarak yazılır. $A : H \rightarrow H$ tam sürekli bir operatör ise, $A \in \sigma_\infty(H)$ şeklinde yazacağız.

Kendine eş bir A operatörünün spektrumu sadece herbirinin katlılığı sonlu olan

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ özdeğerlerinden ibaret ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$$

ise , A operatörü saf ayrık spektruma sahiptir denir.

2.7. Tanım A negatif olmayan kendine eş bir operatör ve B de kendine eş bir operatör olsun. $B^2 = A$ ise , B ye A nın karekökü denir.

2.8. Teorem (Lysternik, L.A. and Sobolev, V.I., 1955) Negatif olmayan kendine eş bir A operatörünün bir tek negatif olmayan kendine eş B karekökü vardır ve eğer C , $AC = CA$ olacak şekilde herhangi bir lineer operatör ise , $BC = CB$ dir.

A operatörünün pozitif karekökü $A^{1/2}$ şeklinde yazılır.

$A \in \sigma_\infty(H)$ sıfırdan farklı bir operatör olsun. Bu durumda A^*A kendine eş pozitif bir operatördür ve $|A^*A|^{1/2} \in \sigma_\infty(H)$ dır (Cohberg, İ.C. , and Krein, M.G., 1969). Bu operatörün sıfırdan farklı özdeğerleri $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k \geq \dots$ olsun. Burada herbir özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. $(A^*A)^{1/2}$ pozitif operatör olduğundan , $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$ sayıları pozitif sayılardır. Bu sayılara A operatörünün s sayıları denir. A nın s sayıları bazan $s_k(A), (k = 1, 2, \dots)$ şeklinde de yazılabilir. Eğer A normal operatör yani $A^*A = AA^*$ ise, o zaman $s_k(A) = |\lambda_k(A)|, (k = 1, 2, \dots)$ dır (Cohberg, İ.C. and Krein, M.G. ,1969). Burada $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq \dots, A$ operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleridir. A operatörünün s sayılarının sayısını $\nu(A)$ ile göstereceğiz. $\nu(A)$ sonlu ya da sonsuz olabilir. s sayıları

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^p(A) < \infty, \quad (p \geq 1)$$

koşulunu sağlayan tüm $A \in \sigma_\infty(H)$ operatörleri kümesinin "O" operatörle birleşimini σ_p yada $\sigma_p(H)$ simgesiyle göstereceğiz. Burada σ_p ($p \geq 1$) bir Banach uzayıdır (Cohberg,İ.C. , and Krein,M.G. ,1969). Bu uzayın her $A \neq 0$ operatörünün normu

$$\|A\|_p = [\sum_{k=1}^{\nu(A)} s_k^p(A)]^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır ve $\|O\|_p = 0$ kabul edilir. Bazan $\|A\|_p$ yerine $\|A\|_{\sigma_p(H)}$ da yazılabilir.

2.9. Tanım (Cohberg, İ.C. and Krein, M.G., 1969) σ_1 uzayına ait olan başka bir deyişle s sayıları için

$$\sum_{k=1}^{\nu(A)} s_k(A) < \infty$$

özellikliğini sağlayan $A \in \sigma_\infty(A)$ operatörüne çekirdek operatörü denir. $A \in \sigma_p(H)$ ve $B \in L(H, H)$ ise ,

$$\|BA\|_p \leq \|B\| \|A\|_p$$

$$\|AB\|_p \leq \|B\| \|A\|_p$$

dır. Ayrıca $p_1 < p_2$ ise , $\sigma_{p_1} \subset \sigma_{p_2}$ dır.

2.10. Tanım $A: H \rightarrow H$ bir sınırlı lineer operatör ve $\{e_k\}_1^\infty \subset H$ bir ortonormal taban olsun. $\sum_{k=1}^\infty (Ae_k, e_k)$ serisi yakınsak ise , bu serinin toplamına A operatörünün $\{e_k\}_1^\infty$ ortonormal tabanında matris izi denir.

2.11. Teorem (Cohberg, İ.C. and Krein, M.G., 1969) A bir çekirdek operatörü ise , her $\{e_k\}_1^\infty \subset H$ ortonormal tabanı için $\sum_{k=1}^\infty (Ae_k, e_k)$ serisi yakınsaktır ve bu serinin toplamı $\{e_k\}_1^\infty$ tabanının seçimine bağlı değildir.

Bu teoremden görüldüğü gibi çekirdek operatörünün her ortonormal

$\{e_k\}_1^\infty \subset H$ tabanında matris izi vardır ve bu iz $\{e_k\}_1^\infty$ tabanının seçimine bağlı değildir. Çekirdek operatörünün matris izi trA simgesi ile gösterilecektir:

$$trA = \sum_{k=1}^\infty (Ae_k, e_k).$$

A ve B herhangi iki çekirdek operatörü ve α ve β herhangi iki sayı ise ,

$$tr(\alpha A + \beta B) = \alpha trA + \beta trB \text{ ve } trA^* = \overline{trA} \text{ dır.}$$

2.12. Teorem (Cohberg, İ.C. and Krein, M.G., 1969) $A \in \sigma_\infty(H)$, $B \in L(H, H)$ ve $AB, BA \in \sigma_1$ ise, $tr(AB) = tr(BA)$ dır.

2.13. Teorem (Cohberg, İ.C. and Krein, M.G., 1969) Çekirdek operatörünün matris izi için

$$\text{tr} A = \sum_{k=1}^{\nu(A)} \lambda_k(A)$$

dır. Burada her λ_k özdeğeri kendi katlılık sayısı kadar toplanmıştır. Eğer

$$A \in \sigma_p, (1 \leq p < \infty) \text{ ve } \{e_i\}_1^w, (1 \leq w \leq \infty)$$

bir ortonormal topluluk ise,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(Ae_i, e_i)|^p \leq (\|A\|_p)^{1/p}$$

dır. Bu eşitsizlikten özel olarak A çekirdek operatörü için $|\text{tr} A| \leq \|A\|_1$ elde edilir.



3.0. İKİNCİ MERTEBEDEN BİR DİFERANSİEL OPERATÖRÜN NEGATİF ÖZDEĞERLERİNİN SAYISININ ASİMTOTİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

3.1. Özdeğerlerin sayısı için bazı eşitsizlikler

$L_2[0, \infty)$ uzayında

$$l(y) = -\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy(x)}{dx}] - q(x)y(x) \quad (3.1.1)$$

diferansiel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan L operatörünü gözönüne alalım. (3.1.1) ifadesinde bulunan $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağladıklarını varsayalım:

- 1⁰) $p(x)$ fonksiyonunu $[0, \infty)$ aralığında sürekli türevelidir.
- 2⁰) $c_1 \leq p(x) \leq c_2$ olacak şekilde pozitif c_1 ve c_2 sabitleri vardır.
- 3⁰) $p(x)$ fonksiyonu monoton azalmayan ve $q(x)$ fonksiyonu monoton azalandır.
- 4⁰) $q(x)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve pozitif değerlidir.
- 5⁰) $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$ dir.

(Naimark, 1968) de L operatörünün alttan sınırlı ve spektrumunun negatif kısmının ayrık olduğu ispatlanmıştır. $N(\epsilon)$ ile L operatörünün $-\epsilon$ ($\epsilon > 0$) dan küçük olan öz değerlerini gösterelim. Bu çalışmada amacımız $\epsilon \rightarrow 0$ da $N(\epsilon)$ nun asimtotik davranışını incelemektir. $L_2[a, \infty)$ uzayında ($a \geq 0$ bir sayıdır).

$l_0(y) = -\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy(x)}{dx}]$ diferansiel ifadesi ve $y'(a) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan L_0 operatörünü de gözönüne alalım.

3.1.1. Teorem : $p(x)$ fonksiyonunu $[0, \infty)$ aralığında monoton azalmayan ve (2⁰) koşulunu sağlıyorsa, her bir $y(x) \in D(L_0)$ için

$$\begin{aligned} (L_0 y, y) &= -\int_0^\infty [p(x)y'(x)]' \overline{y(x)} dx \\ &= \int_0^\infty p(x)|y'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

dır.

İspat. Her bir $y(x) \in D(L_0)$ için

$$\int_a^b [p(x)y'(x)]' \overline{y(x)} dx = p(x)y'(x)\overline{y(x)}|_a^b - \int_a^b p(x)|y'(x)|^2 dx \quad (a < b)$$

ya da

$$\int_a^b [p(x)y'(x)]' \overline{y(x)} dx = p(b)y'(b)\overline{y(b)} - \int_a^b p(x)|y'(x)|^2 dx \quad (a > 0) \quad (3.1.2)$$

Bu eşitliğin sol tarafındaki ifadenin $b \rightarrow \infty$ için sonlu limiti var ve

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b [p(x)y'(x)]' \overline{y(x)} dx = -(L_0 y, y) \quad (3.1.3)$$

olup, bu nedenle (3.1.2) nin sağ tarafındaki ifadenin de $b \rightarrow \infty$ için sonlu limiti olmalıdır. Önce

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b p(x)|y'(x)|^2 dx = \int_a^\infty p(x)|y'(x)|^2 dx < \infty$$

olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. Yani

$$\int_a^\infty p(x)|y'(x)|^2 dx = \infty$$

olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$\lim_{b \rightarrow \infty} p(b)y'(b)\overline{y(b)} = \infty$$

olacaktır. $c_1 \leq p(x) \leq c_2$ ($c_1, c_2 > 0$) olduğundan, buradan

$$\lim_{b \rightarrow \infty} y'(b)\overline{y(b)} = \infty$$

bulunur. Bu durumda

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \overline{y'(b)}y(b) = \infty$$

olacaktır. Bu son iki eşitlikten

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (|y(b)|^2)' = \infty$$

elde edilir. Burada görüldüğü gibi $|y(x)|^2$ fonksiyonu bir $[d, \infty)$ (d pozitif bir sabittir) aralığında monoton artandır. Bu ise $y(x) \in L_2[a, \infty)$ olması koşuluna aykırıdır ve dolayısıyla

$$\int_a^\infty p(x)|y'(x)|^2 dx < \infty \quad (3.1.4)$$

olmalıdır. (3.1.2)-(3.1.4) bağıntılarından

$$\lim_{b \rightarrow \infty} p(b)y'(b)\overline{y(b)} = \lim_{b \rightarrow \infty} p(b)\overline{y'(b)}y(b)$$

limitlerinin ve dolayısıyla $\lim_{a \rightarrow \infty} p(a)(|y(a)|^2)'$ limitinin sonlu olduğu sonucu çıkar. Hipotez gereği $p(x)$ fonksiyonu monoton azalmayan olduğundan ve $c_1 \leq p(x) \leq c_2$ ($c_1, c_2 > 0$) koşulunu sağladığından $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$ limiti vardır ve sıfırdan büyüktür. Bu nedenle $\lim_{b \rightarrow \infty} (|y(b)|^2)'$ sonludur. Bu limit pozitif bir sayı değildir. Çünkü pozitif olsaydı yukarıda belirtildiği gibi $y(x)$, $L_2[0, \infty)$ uzayının elemanı olamazdı. Bu nedenle

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (|y(x)|^2)' \leq 0$$

olmalıdır. Bu limitin "0" ra eşit olduğunu gösterelim. Yine aksini varsayalım. Yani $\lim_{x \rightarrow \infty} (|y(x)|^2)'$ limitinin negatif bir sayı olduğunu kabul edelim. O takdirde $|y(x)|^2$ fonksiyonu x in büyük değerleri için monoton azalandır ve $y(x) \in L_2[0, \infty)$ olduğundan $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ olmalıdır. Öte yandan yukarıda gösterildiği gibi $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x)\overline{y(x)}$ sonludur. Buradan da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x)\overline{y(x)} = 0 \quad (3.1.5)$$

sonucu çıkar. Çünkü $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x)\overline{y(x)} \neq 0$ olsaydı o zaman $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = \infty$ olurdu. Oysa bu durum $p(x) \geq c_1 > 0$ olduğundan (3.1.4) e aykırıdır. (3.1.2), (3.1.3) ve (3.1.5) den

$$(L_0 y, y) = \int_a^\infty p(x)|y'(x)|^2 dx$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

(3.1.1) deki $q(x)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında monoton azalan ve sürekli olduğundan, $q(x)$ in ters fonksiyonu vardır. $q(x)$ in ters fonksiyonu $g(x)$ olsun. ϵ, g fonksiyonunun tanım kümesine ait olan ve $\epsilon < q(0)$ koşulunu sağlayan herhangi bir sayı olsun.

Aşağıdaki operatörleri gözönüne alalım:

1. $L_2[g(\epsilon), \infty)$ uzayında (3.1.1) diferansiel ifadesi ve $y'(g(\epsilon)) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan operatör L^1 olsun.

2. $L_2[0, g(\epsilon)]$ uzayında (3.1.1) diferansiel ifadesi ve sırasıyla

$$y(0) = y(g(\epsilon)) = 0$$

$$y'(0) = y'(g(\epsilon)) = 0$$

sınır koşullarıyla oluşturulan operatörler L' ve L'' olsun.

3. $L_2[x_{i-1}, x_i]$ uzayında (3.1.1) diferansiel ifadesi ve sırasıyla

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0$$

$$y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = 0$$

sınır koşullarıyla oluşturulan operatörler L'_i ve L''_i olsun.

3.1.2. Teorem: (2^0) ve (3^0) koşulları sağlandığı takdirde keyfi $y \in D(L^1)$ için

$$(L^1 y, y) \geq -\epsilon(y, y)$$

dir.

İspat. $y(x) \in D(L^1)$ için

$$\begin{aligned} (L^1 y, y) &= \int_{g(\epsilon)}^{\infty} [-(p(x)y'(x))' - q(x)y(x)] \overline{y(x)} dx \\ &= - \int_{g(\epsilon)}^{\infty} (p(x)y'(x))' \overline{y(x)} dx - \int_{g(\epsilon)}^{\infty} q(x)|y(x)|^2 dx \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

dir. Teorem 3.1.1. den

$$\int_{g(\epsilon)}^{\infty} (p(x)y'(x))' \overline{y(x)} dx = - \int_{g(\epsilon)}^{\infty} p(x)|y'(x)|^2 dx$$

elde edilir. O halde (3.1.6) ifadesi

$$(L^1 y, y) = \int_{g(\epsilon)}^{\infty} p(x)|y'(x)|^2 dx - \int_{g(\epsilon)}^{\infty} q(x)|y(x)|^2 dx$$

şeklini alır. $p(x)$ fonksiyonunun değerleri pozitif olduğundan

$$(L^1 y, y) \geq - \int_{g(\epsilon)}^{\infty} q(x)|y(x)|^2 dx \quad (3.1.7)$$

elde edilir. Öte yandan $q(x)$ fonksiyonu hipotez gereği monoton azaldığından

$[g(\epsilon), \infty)$ aralığında

$$q(x) \leq q(g(\epsilon)) = \epsilon$$

elde edilir. Bu son ifade (3.1.7) eşitsizliğinde gözönüne alınırsa

$$(L^1 y, y) \geq -\epsilon \int_{g(\epsilon)}^{\infty} |y(x)|^2 dx$$

ya da

$$(L^1 y, y) \geq -\epsilon(y, y)$$

sonucu çıkar. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$N(\epsilon)$, $N'(\epsilon)$ ve $N''(\epsilon)$ sırasıyla L , L' ve L'' operatörlerinin $-\epsilon$ dan ($\epsilon > 0$) küçük özdeğerlerinin sayısı olsun.

3.1.3 Teorem : Eğer $q(x)$ ve $p(x)$ fonksiyonları (1^0) , (2^0) , (3^0) ve (5^0) koşullarını sağlıyorsa o zaman

$$N'(\epsilon) \leq N(\epsilon) \leq N''(\epsilon)$$

dır.

İspat. Aşağıdaki operatörleri gözönüne alalım :

$$L_\epsilon = L + \epsilon I, \quad L'_\epsilon = L' + \epsilon I, \quad L''_\epsilon = L'' + \epsilon I$$

Burada I birim operatördür. L_ϵ operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısı $N(\epsilon)$ a eşittir. Gerçekten

$$\lambda_1^0 \leq \lambda_2^0 \leq \dots \leq \lambda_{N(\epsilon)}^0 \leq \lambda_{N(\epsilon)+1}^0 \leq \lambda_{N(\epsilon)+2}^0 \leq \dots$$

L operatörünün negatif özdeğerleri olsun. O zaman

$$\lambda_1^0 \leq \lambda_2^0 \leq \dots \leq \lambda_{N(\epsilon)}^0 < -\epsilon \quad \text{ve} \quad \lambda_{N(\epsilon)+1}^0 \geq -\epsilon \quad (3.1.8)$$

olur. L_ϵ operatörünün özdeğerleri $\lambda_i = \lambda_i^0 + \epsilon$ ($i = 1, 2, \dots$) olduğundan, (3.1.8) den

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N(\epsilon)} < 0, \quad \lambda_{N(\epsilon)+1} \geq 0$$

bulunur. Buradan da görüldüğü gibi L_ϵ operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısı $N(\epsilon)$ a eşittir. Benzer şekilde L'_ϵ operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısı $N'(\epsilon)$ a ve L''_ϵ operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısı $N''(\epsilon)$ a eşittir. L_ϵ operatörünün $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N(\epsilon)}$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları sırasıyla $u_1(x), u_2(x), \dots, u_{N(\epsilon)}(x)$ olsun. L'_ϵ ve L''_ϵ operatörlerinin negatif özdeğerleri sırasıyla

$$\lambda'_1 \leq \lambda'_2 \leq \dots \leq \lambda'_{N'(\epsilon)}$$

ve

$$\lambda''_1 \leq \lambda''_2 \leq \dots \leq \lambda''_{N''(\epsilon)}$$

bunlara karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları da sırasıyla

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{N'(\epsilon)}(x) \text{ ve } \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{N''(\epsilon)}(x)$$

olsun. Önce $N(\epsilon) \geq N'(\epsilon)$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım Yani $N(\epsilon) \leq N'(\epsilon)$ olduğunu kabul edelim. O takdirde

$$(u_i, \varphi(x)) = \int_0^{g(\epsilon)} u_i(x) \varphi(x) dx = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N(\epsilon))$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N'(\epsilon)} C_i \varphi'_i(x)$$

lineer kombinezonu vardır. $\varphi(x)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} (L'_\epsilon \varphi, \varphi) &= [L'_\epsilon (\sum_{i=1}^{N'(\epsilon)} C_i \varphi'_i(x)), \sum_{i=1}^{N'(\epsilon)} C_i \varphi'_i(x)] \\ &= (\sum_{i=1}^{N'(\epsilon)} C_i \lambda'_i \varphi'_i(x), \sum_{i=1}^{N'(\epsilon)} C_i \varphi'_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{N'(\epsilon)} \lambda'_i C_i^2 = \alpha < 0 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

dır. (Glazman, I.M., 1965) dekine benzer şekilde aşağıdaki özelliklere sahip olan $\tilde{\varphi}(x)$ fonksiyonunun varolduğu gösterilebilir.

- 1) $\tilde{\varphi}(x)$ fonksiyonunu $[0, g(\epsilon)]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli türevelidir.
- 2) Bir $[a, b] \subset (0, g(\epsilon))$ aralığının dışında $\tilde{\varphi}(x)$ fonksiyonu sıfıra eşittir.
- 3) $|(L'_\epsilon \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) - (L'_\epsilon \varphi, \varphi)| < -\frac{\alpha}{2}$
- 4) $(u_i, \tilde{\varphi}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N(\epsilon)$

Bilindiği gibi

$$\inf_{y \in D(L), \|y\|=1} (L_\epsilon y, y) = \lambda_{N(\epsilon)+1} \geq 0$$

$(y, u_i) = 0, i = 1, 2, \dots, N(\epsilon)$ dır. Bu nedenle

$$(L'_\epsilon(\frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}), \frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}) = (L_\epsilon(\frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}), \frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}) \geq \lambda_{N(\epsilon)+1} \geq 0$$

ya da

$$(L'_\epsilon \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \geq 0$$

bulunur. Buradan da

$$(L'_\epsilon \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) - (L'_\epsilon \varphi, \varphi) = (L'_\epsilon \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) - \alpha \geq -\alpha$$

elde edilir. Öte yandan yukarıda

$$|(L'_\epsilon \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) - (L'_\epsilon \varphi, \varphi)| < -\frac{\alpha}{2}$$

idi. Bu son eşitsizlikler birbiri ile çelişiyor ve dolayısıyla

$$N(\epsilon) \geq N'(\epsilon)$$

olmalıdır. Bu kez de $N(\epsilon) \leq N''(\epsilon)$ olduğunu gösterelim. Yine aksini varsayalım.

Yani

$$N(\epsilon) > N''(\epsilon)$$

olduğunu kabul edelim. O takdirde

$$(\psi_i, u) = \int_0^{g(\epsilon)} \psi_i(x) u(x) dx = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N''(\epsilon))$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} d_i u_i(x)$$

lineer kombinezonu vardır. $u(x)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} (L_\epsilon u, u) &= (L_\epsilon(\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} d_i u_i(x)), \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} d_i u_i(x)) \\ &= (\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} d_i \lambda_i u_i(x), \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} d_i u_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} |d_i|^2 \lambda_i < 0 \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$(L_\epsilon u, u) = \int_0^{g(\epsilon)} (L_\epsilon u(x)) \overline{u(x)} dx + \int_{g(\epsilon)}^\infty (L_\epsilon u(x)) \overline{u(x)} dx < 0 \quad (3.1.10)$$

elde edilir.

Aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\int_{g(\epsilon)}^\infty (L_\epsilon u(x)) \overline{u(x)} dx \geq 0 \quad (3.1.11)$$

Yine aksini kabul edelim. Yani

$$\int_{g(\epsilon)}^\infty (L_\epsilon u(x)) \overline{u(x)} dx < 0$$

olsun. O takdirde

$$\inf_{y \in D(L(\epsilon)), \|y\|=1} \int_{g(\epsilon)}^\infty (L_\epsilon y(x)) \overline{y(x)} dx < 0$$

olacaktır. Öte yandan

$$\begin{aligned} \inf_{y \in D(L(\epsilon)), \|y\|=1} \int_{g(\epsilon)}^\infty (L_\epsilon y(x)) \overline{y(x)} dx \\ = \inf_{y \in D(L(\epsilon)), y'(g(\epsilon))=0, \|y\|=1} \int_{g(\epsilon)}^\infty (L_\epsilon y(x)) \overline{y(x)} dx \end{aligned}$$

formülü geçerlidir. Yukarıdaki son eşitsizlikten ve buradan

$$\inf_{y \in D(L^1), \|y\|=1} ((L^1 + \epsilon 1)y, y) < 0$$

ya da

$$\inf_{y \in D(L^1), \|y\|=1} (L^1 y, y) < -\epsilon$$

bulunur. Bu sonuç teorem 3.1.2 ye aykırıdır. Dolayısıyla (3.1.11) eşitsizliği geçerlidir. (3.1.10) ve (3.1.11) eşitsizliklerinden

$$\int_0^{g(\epsilon)} (L_\epsilon u(x)) \overline{u(x)} dx < 0 \quad ((u, \psi_i) = 0, i = 1, 2, \dots, N(\epsilon))$$

bulunur. Buradan da

$$\inf_{y \in D(L(\epsilon)), \|y\|=1, y \perp \psi_i} \int_0^{g(\epsilon)} (L_\epsilon y(x)) \overline{y(x)} dx < 0$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten

$$\inf_{y \in D(L(\epsilon)), \|y\|=1, y \perp \psi_i, y'(0)=y'(g(\epsilon))=0} \int_0^{g(\epsilon)} ((L + \epsilon I)y(x)) \overline{y(x)} dx < 0$$

bulunur. Buradan da

$$\inf_{y \in D(L''(\epsilon)), \|y\|=1, y \perp \psi_i, (i=1, \dots, N''(\epsilon))} (L''_\epsilon y, y) < 0$$

elde edilir. Öte yandan

$$\inf_{y \in D(L''(\epsilon)), \|y\|=1, y \perp \psi_i, (i=1, \dots, N''(\epsilon))} (L''_\epsilon y, y) = \lambda''_{N''(\epsilon)+1} \geq 0$$

olur. Varılan bu çelişkiden dolayı

$$N(\epsilon) > N''(\epsilon)$$

eşitsizliği geçerli olmaz. Yani

$$N(\epsilon) \leq N''(\epsilon)$$

olmalıdır. Böylece teorem ispatlanmış olur. $[0, g(\epsilon)]$ aralığının uzunlukları

$$\delta = \frac{g(\epsilon)}{[g^\kappa(\epsilon)]+1} \quad (3.1.12)$$

olan parçalara bölelim. Burada ϵ , $g^\kappa(\epsilon) \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir pozitif sayıdır ve κ , $(0, 1)$ aralığına ait olan bir sabit sayıdır. $[g^\kappa(\epsilon)]$ ifadesiyle $g^\kappa(\epsilon)$ sayısının tam kısmı gösterilmiştir. $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = g(\epsilon)$, $[0, g(\epsilon)]$ aralığının bölüntü noktaları olsun. n'_i ve n''_i ile sırasıyla L'_i ve L''_i operatörlerinin $-\epsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin sayısını gösterelim.

Aşağıdaki operatörleri gözönüne alalım.

4. $L_2[x_{i-1}, x_i]$ uzayında $-p(x_i)y''(x) - q(x_i)y(x)$ diferansiel ifadesi ve $y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0$ sınır koşullarıyla oluşturulan $L_i^{(1)}$ operatörü,

5. $L_2[x_{i-1}, x_i]$ uzayında $-p(x_{i-1})y''(x) - q(x_{i-1})y(x)$ ifadesi ve

$$y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = 0$$

sınır koşullarıyla oluşturulan $L_i^{(2)}$ operatörü.

3.1.4 Teorem $(1^0), (3^0)$ ve (4^0) koşulları sağlanırsa, $L'_i < L_i^{(1)}$ ve $L''_i > L_i^{(2)}$ dir.

İspat. $p(x)$ fonksiyonu monoton azalmayan ve $q(x)$ fonksiyonu monoton azalan olduğundan, $x \in [x_{i-1}, x_i]$ için $p(x) \leq p(x_i)$ ve $q(x) \geq q(x_i)$ olur. Bu eşitsizlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} (L'_i y, y) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-(p(x)y'(x))' - q(x)y(x)]\overline{y(x)}dx \\ &= -\int_{x_{i-1}}^{x_i} (p(x)y'(x))'\overline{y(x)}dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)|y(x)|^2dx \\ &= -(p(x)y'(x))'\overline{y(x)}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)|y'(x)|^2dx \\ &\quad - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)|y(x)|^2dx \\ &< \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x_i)|y'(x)|^2dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x_i)|y(x)|^2dx \\ &= p(x_i)[y'(x)\overline{y(x)}]_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} y''(x)\overline{y(x)}dx \\ &\quad - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x_i)|y(x)|^2dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-p(x_i)y''(x) - q(x_i)y(x)]\overline{y(x)}dx, \quad (y \neq 0) \end{aligned}$$

yada

$$(L'_i y, y) < (L_i^{(1)} y, y), \quad (y \neq 0)$$

bulunur. Bu eşitsizlik

$$L'_i < L_i^{(1)}$$

olduğunu gösterir. $L''_i > L_i^{(2)}$ olduğu da benzer şekilde gösterilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.1.5 Teorem (3^0) ve (4^0) koşulları sağlandığı takdirde

$$N'(\epsilon) > \frac{1}{\pi} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - 2g^\kappa(\epsilon)$$

dir.

İspat. $L_i^{(1)}$ operatörünün özdeğerleri

$$p(x_i) \left(\frac{m\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - q(x_i) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

şeklinde dir.

$$p(x_i) \left(\frac{m\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - q(x_i) < -\epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, M-1)$$

eşitsizliğinden $L_i^{(1)}$ operatörünün $-\epsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin sayısı için

$$n_i^{(1)} \geq \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_i)-\epsilon}{p(x_i)}} - 1 \quad (3.1.13)$$

elde edilir. $\frac{1}{p(x)}$ monoton artmayan ve $q(x)$ monoton azalan fonksiyonlar olduklarından $x \in [x_i, x_{i+1}]$ için $p^{-1}(x_i)(q(x_i) - \epsilon) \geq p^{-1}(x)(q(x) - \epsilon)$ dir. Dolayısıyla

$$\delta \sqrt{\frac{q(x_i)-\epsilon}{p(x_i)}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{q(x_i)-\epsilon}{p(x_i)}} dx > \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx$$

dır. (3.1.13) göz önüne alınırsa,

$$n_i^{(1)} > \frac{1}{\pi} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - 1 \quad (3.1.14)$$

elde edilir. Teorem 3.1.4 e göre $L'_i < L_i^{(1)}$ olup, bu durumda bilindiği gibi (Smirnov, V.I., 1964)

$$n'_i \geq n_i^{(1)}$$

dir. Buradan ve (3.1.14) eşitsizliğinden

$$n'_i > \frac{1}{\pi} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - 1 \quad (i = 1, 2, \dots, M-1) \quad (3.1.15)$$

elde edilir. R. Courant'ın Varyasyon Prensipleri (Courant, R. and Hilbert, D., 1970) yardımıyla

$$N'(\epsilon) \geq \sum_{i=1}^M n'_i$$

bulunur. (3.1.15) eşitsizliği kullanılarak buradan

$$\begin{aligned}
 N'(\epsilon) &> \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - (M-1) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_M} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - M + 1 \\
 &> \frac{1}{\pi} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - M
 \end{aligned}$$

bulunur. $p(x)$ fonksiyonu (3^0) koşulunu sağladığından ve $M = [g^\kappa(\epsilon)] + 1$ olduğundan, bu son bağıntıdan

$$N'(\epsilon) > \frac{1}{\pi} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - 2g^\kappa(\epsilon) \quad (3.1.16)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.1.6. Teorem (3^0) ve (4^0) koşulları sağlandığı takdirde

$$N''(\epsilon) \leq n_1'' + \frac{1}{\pi} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + \frac{g(\epsilon)}{\delta}$$

dır.

İspat. $L_i^{(2)}$ operatörlerinin özdeğerleri

$$p(x_{i-1}) \left(\frac{m\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - q(x_{i-1}) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

şeklindeir. Buradan bu operatörün $-\epsilon$ dan küçük özdeğerlerinin sayısı için

$$n_i^{(2)} < \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\epsilon}{p(x_{i-1})}} + 1 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3.1.17)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu görülebilir. $p^{-1}(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları monoton azalan olduklarından $x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]$ için

$$p^{-1}(x_{i-1})(q(x_{i-1}) - \epsilon) \leq p^{-1}(x)(q(x) - \epsilon)$$

olup, bu nedenle

$$\delta \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\epsilon}{p(x_{i-1})}} = \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\epsilon}{p(x_{i-1})}} dx \leq \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx$$

dır. (3.1.17) eşitsizliğinden ve buradan

$$n_i^{(2)} < \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + 1 \quad (3.1.18)$$

bulunur. Teorem 3.1.4 e göre $L_i'' \geq L_i^{(2)}$ olup, bu durumda bilindiği gibi (Smirnov, V.I., 1964)

$$n_i'' \leq n_i^{(2)} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3.1.19)$$

dir. (3.1.18) ve (3.1.19) dan

$$n_i'' < \frac{1}{\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + 1 \quad (i = 2, 3, \dots) \quad (3.1.20)$$

elde edilir.

R. Courant'ın Varyasyon Prensiplerine (Courant, R. and Hilbert, D., 1970) göre

$$N''(\epsilon) \leq \sum_{i=1}^M n_i''$$

olup, (3.1.20) eşitsizlikleri yardımıyla

$$N''(\epsilon) \leq n_1'' + \frac{1}{\pi} \sum_{i=2}^M \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + M - 1$$

dir. $M = \frac{g(\epsilon)}{\delta}$ olduğundan, buradan

$$N''(\epsilon) \leq n_1'' + \frac{1}{\pi} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + \frac{g(\epsilon)}{\delta} \quad (3.1.21)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

(3.1.21) de n_1'' , $L_2[0, \delta]$ uzayında (3.1.1) diferansiel ifadesi ve $y'(0) = y'(\delta) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan L_1'' operatörünün $-\epsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin sayısıdır. n_1'' yü daha kesin sınırlandırmak için $[0, \delta]$ aralığını uzunlukları

$$\delta_1 = \frac{\delta_0}{[\delta_0 g^{2\kappa-1}(\epsilon)+1]} \quad (\delta_0 = \delta)$$

olan parçalara bölelim. (3.1.21) eşitsizliği L_1'' operatörüne uygulanırsa,

$$n_1'' \leq n_{11}'' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta_0} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + \frac{\delta_0}{\delta_1} \quad (3.1.22)$$

bulunur. Burada n_{11}'' , $L_2[0, \delta_1]$ uzayında (3.1.1) diferansiel ifadesi ve $y'(0) = y'(\delta_1) = 0$ sınır koşulları ile oluşturulan operatörün $-\epsilon$ dan küçük olan

özdeğerlerinin sayısıdır.

Burada (3.1.22) eşitsizliği,

$$\delta_{-1} = g(\epsilon)$$

ve

$$\delta_m = \frac{\delta_{m-1}}{[\delta_{m-1} g^{(m+1)\kappa-1}(\epsilon)] + 1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1.23)$$

olmak üzere $L_2[0, \delta_m]$ uzayında (3.1.1) diferansiel ifadesi ve

$y'(0) = y'(\delta_m) = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) sınır koşuluyla oluşturulan operatörlerin $-\epsilon$ dan küçük olan öz değerlerinin $n''_{1,m}$ ($n''_{1,0} = n''_1$) sayısına uygulanırsa

$$n''_{1,m} \leq n''_{1,m+1} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta_m} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + \frac{\delta_m}{\delta_{m+1}} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1.24)$$

elde edilir. $\frac{\delta_{m-1}}{\delta_m}$ ($m = 1, 2, \dots$) ifadelerini sınırlandıralım. (3.1.23) formülü yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{m-1}}{\delta_m} &= [\delta_{m-1} g^{(m+1)\kappa-1}(\epsilon)] + 1 \leq \delta_{m-1} g^{(m+1)\kappa-1}(\epsilon) + 2 \\ &= \frac{\delta_{m-2}}{[\delta_{m-2} g^{m\kappa-1}(\epsilon)] + 1 g^{(m+1)\kappa-1}(\epsilon) + 2} \\ &\leq \frac{\delta_{m-2} g^{(m+1)\kappa-1}(\epsilon)}{\delta_{m-2} g^{m\kappa-1}(\epsilon)} + 2 \\ &= g^\kappa(\epsilon) + 2, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ϵ nun $g^\kappa(\epsilon) > 2$ eşitsizliğini sağlayan değerleri için

$$\frac{\delta_{m-1}}{\delta_m} < 2g^\kappa(\epsilon)$$

bulunur. (3.1.24) den ve bu son eşitsizlikten

$$n''_{1,m} \leq n''_{1,m+1} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta_m} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + 2g^\kappa(\epsilon) \quad (3.1.25)$$

olup, $i=1$ için (3.1.17) de δ yerine δ_{m+1} yazıp (3.1.19) ifadesi göz önüne alınırsa

$$n''_{1,m+1} < \frac{\delta_{m+1}}{\pi} \sqrt{\frac{q(0)-\epsilon}{p(0)}} + 1 \quad (3.1.26)$$

bulunur. (3.1.23) den görüldüğü gibi $m_0 \geq \frac{1}{\kappa} - 2$ olduğunda $\delta_{m_0+1} \leq 1$ olur.

(3.1.26) ve buradan

$$n''_{1,m_0+1} \leq c_2 \quad (3.1.27)$$

bulunur. Burada c_2 bir pozitif sabittir. (3.1.21) ve (3.1.25) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} N''(\epsilon) &\leq n''_{1,m_0} + \frac{1}{\pi} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{m_0} \int_0^{\delta_m} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx \\ &\quad + (m_0 + 1)g^\kappa(\epsilon) + \delta^{-1}g(\epsilon) \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

elde edilir. Öte yandan

$$\delta^{-1}g(\epsilon) = [g^\kappa(\epsilon)] + 1 \leq 2g^\kappa(\epsilon)$$

olup, (3.1.27), (3.1.28) eşitsizliklerinden ve bu son bağıntıdan

$$N''(\epsilon) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + c_3 \int_0^\delta \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + c_3 g^\kappa(\epsilon) \quad (3.1.29)$$

bulunur. Burada c_3 κ ya bağlı bir pozitif sabittir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk:

3.1.7 Teorem $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $(3^0), (4^0)$ koşullarını sağlıyorsa (3.1.29) eşitsizliği geçerlidir.

3.2. Özdeğerler için asimtotik davranış formülü

Bu kısımda 1. kısımda elde edilen sonuçlar yardımıyla L operatörünün özdeğerlerinin sayısı için asimtotik formüller bulacağız.

$\ln_j x$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) ile aşağıdaki fonksiyonları gösterelim:

$$\ln_0 x = x, \quad \ln_j x = \ln(\ln_{j-1} x), \quad (j \geq 1).$$

$q(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki iki koşuldan birini sağladığını varsayalım:

a) Her bir $\eta > 0$ sayısı için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x)x^{K_0 - \eta} = \lim_{x \rightarrow \infty} (q(x)x^{K_0 + \eta})^{-1} = 0.$$

Burada K_0 , $(0, 2)$ aralığında sabit bir sayıdır.

b) Öyle bir $\xi > 0$ sayısı ve n doğal sayısı vardır ki $q(x) - (\ln_n x)^{-\xi}$ fonksiyonu bir $[a, \infty)$, ($a > 0$) aralığında negatif değerli değildir ve monoton artmayandır.

3.2.1 Teorem $q(x)$ ve $p(x)$ fonksiyonlarının $(1^0) - (4^0)$ koşullarını sağladığını varsayalım. Eğer ek olarak $q(x)$ fonksiyonu için (a) koşulu sağlanırsa, o zaman $\epsilon \rightarrow +0$ da

$$N(\epsilon) = \frac{1+O(\epsilon^{t_0})}{\pi} \int_{q(x) \geq \epsilon} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx$$

asimtotik formülü geçerlidir.

İspat. Teorem 3.1.3 ve teorem 3.1.7 den

$$N(\epsilon) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + c_3 \int_0^\delta \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + c_3 g^\kappa(\epsilon) \quad (3.2.1)$$

dır. Teoremi ispatlamak için bu eşitsizliğin sağ tarafındaki her bir terimi ayrıca sınırlandırmak gerekir. Hipotez gereği $q(x)$ fonksiyonu monoton azalandır. Dolayısıyla $[0, g(2\epsilon)]$ aralığında

$$q(x) > q(g(2\epsilon)) = 2\epsilon$$

dır. Bu nedenle

$$\int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx > \int_0^{g(2\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx > \sqrt{\epsilon} \int_0^{g(2\epsilon)} \sqrt{p^{-1}(x)} dx$$

dır. $p(x)$ fonksiyonu (2^0) koşulunu sağladığından

$$\int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx > \sqrt{\epsilon c_2^{-1}} g(2\epsilon) \quad (3.2.2)$$

bulunur. $q(x)$ fonksiyonu (a) koşulunu sağladığından $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$ dır Bu nedenle

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} g(\epsilon) = \infty$$

ve her bir $\eta > 0$ sayısı için sağlanan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x)x^{K_0+\eta} = \infty$$

eşitliğinden ϵ nun küçük pozitif değerleri için $q(g(2\epsilon))g^{K_0+\eta}(2\epsilon) > 2$ yada

$$g(2\epsilon) > \epsilon^{-\frac{1}{K_0+\eta}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifade (3.2.2) de gözönüne alınırsa,

$$\int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx > c_4 \epsilon^{\frac{K_0+\eta-2}{2(K_0+\eta)}} \quad (3.2.3)$$

bulunur. (3.2.1) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan 2. integrali sınırlandıralım. $q(x)$ fonksiyonu (a) koşulunu sağladığından

$$q(x) \leq c_5 x^{\eta-K_0}, \quad (\eta < K_0) \quad (3.2.4)$$

olacak şekilde bir c_5 pozitif sabiti vardır. Öte yandan $p(x) \geq c_1$ ($c_1 > 0$) olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx &\leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \int_0^\delta \sqrt{q(x)} dx \leq \frac{c_5}{\sqrt{c_1}} \int_0^\delta \sqrt{x^{\eta-K_0}} dx \\ &\leq c_6 \delta^{\frac{1}{2}(2-K_0+\eta)} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

olup, $\delta = g(\epsilon)([g^\kappa(\epsilon)] + 1)^{-1}$ eşitliğinden

$$\delta \leq g^{1-\kappa}(\epsilon) \quad (3.2.6)$$

bulunur. (3.2.4) de x in yerine $g(\epsilon)$ yazılırsa,

$$q(g(\epsilon)) \leq c_5 g^{\eta-K_0}(\epsilon), \quad (\eta < K_0)$$

yada

$$g(\epsilon) \leq c_5 \epsilon^{-\frac{1}{K_0-\eta}} \quad (3.2.7)$$

bulunur. (3.2.5)-(3.2.7) bağıntılarından

$$\int_0^\delta \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx \leq c_6 \epsilon^{-\frac{(1-\kappa)(2-K_0+\eta)}{2(K_0-\eta)}}, \quad (c_6 > 0) \quad (3.2.8)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2.7) yardımıyla

$$g^\kappa(\epsilon) \leq c_7 \epsilon^{-\frac{\kappa}{K_0-\eta}} \quad (3.2.9)$$

bulunur. (3.2.3), (3.2.8), (3.2.9) eşitsizliklerinden

$$\frac{\int_0^\delta \sqrt{p^{-1}(x)(q(x)-\epsilon)} dx}{\int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{p^{-1}(x)(q(x)-\epsilon)} dx} \leq c_8 \epsilon^{-\frac{(1-\kappa)(2-K_0+\eta)}{2(K_0-\eta)} + \frac{2-K_0+\eta}{2(K_0+\eta)}}, \quad (3.2.10)$$

$$\frac{g^\kappa(\epsilon)}{\int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{p^{-1}(x)(q(x)-\epsilon)} dx} \leq c_8 \epsilon^{-\frac{\kappa}{K_0-\eta} + \frac{2-K_0-\eta}{2(K_0+\eta)}} \quad (3.2.11)$$

bulunur. Her bir $t > 0$ için öyle bir $w = w(t) > 0$ sayısı vardır ki $0 < \eta < w$ olduğunda

$$-\frac{(1-\kappa)(2-K_0+\eta)}{2(K_0-\eta)} + \frac{2-K_0-\eta}{2(K_0+\eta)} \geq \frac{\kappa(2-K_0)}{2K_0} - t,$$

$$-\frac{\kappa}{K_0-\eta} + \frac{2-K_0-\eta}{2(K_0+\eta)} \geq \frac{2-K_0-2\kappa}{2K_0} - t$$

eşitsizlikleri sağlanır. Şimdiye kadar κ , $(0, 1)$ aralığında bir sayı idi. Burada

$$\kappa = \frac{2-K_0}{4-K_0}, \quad t = t_0 = \frac{(2-K_0)^2}{4K_0(4-K_0)}$$

alalım. Buna göre yukarıdaki son eşitsizlikler

$$-\frac{(1-\kappa)(2-K_0+\eta)}{2(K_0-\eta)} + \frac{2-K_0-\eta}{2(K_0+\eta)} \geq \frac{(2-K_0)^2}{4K_0(4-K_0)} = t_0,$$

$$-\frac{\kappa}{K_0-\eta} + \frac{2-K_0-\eta}{2(K_0+\eta)} \geq \frac{(2-K_0)^2}{4K_0(4-K_0)} = t_0$$

şeklini alır. (3.2.10), (3.2.11) eşitsizliklerinden ve bu son bağıntılardan $\epsilon \in (0, 1)$

için

$$\frac{\int_0^\delta \sqrt{p^{-1}(x)(q(x)-\epsilon)} dx}{\int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{p^{-1}(x)(q(x)-\epsilon)} dx} \leq c_8 \epsilon^{t_0}, \quad (3.2.12)$$

$$\frac{g^\kappa(\epsilon)}{\int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{p^{-1}(x)(q(x)-\epsilon)} dx} \leq c_8 \epsilon^{t_0} \quad (3.2.13)$$

bulunur. (3.2.1) den ve bu son iki eşitsizlikten

$$\frac{N(\epsilon)}{\frac{1}{\pi} \int_{q(x) \geq \epsilon} \sqrt{p^{-1}(x)(q(x)-\epsilon)} dx} \leq 1 + c_9 \epsilon^{t_0} \quad (3.2.14)$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem (3.1.3) ve teorem (3.1.5) yardımıyla

$$N(\epsilon) > \frac{1}{\pi} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - 2g^\kappa(\epsilon)$$

elde edilir.

(3.2.12) ve (3.2.13) den ve buradan

$$\frac{N(\epsilon)}{\frac{1}{\pi} \int_{q(x) \geq \epsilon} \sqrt{p^{-1}(x)(q(x)-\epsilon)} dx} > 1 - c_{10} \epsilon^{t_0} \quad (3.2.15)$$

bulunur. (3.2.14) ve (3.2.15) den aşağıdaki asimtotik formül elde edilir:

$$N(\epsilon) = \frac{1+O(\epsilon^{t_0})}{\pi} \int_{q(x) \geq \epsilon} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx.$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.2.2 Teorem x in büyük değerleri için

$$\ln_n\left(\frac{x}{\ln x}\right) < \ln_n x - \ln^{1-n} x, \quad (n \geq 0) \quad (3.2.16)$$

dir.

İspat. $n = 0, 1$ değerleri için (3.2.16) eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir. $n \geq 2$ değerleri için (3.2.16) eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım yöntemi ile ispatlayacağız.

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} \ln_2\left(\frac{x}{\ln x}\right) &= \ln\left(\ln \frac{x}{\ln x}\right) = \ln(\ln x - \ln(\ln x)) \\ &= \ln((\ln x)\left(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x}\right)) = \ln_2 x + \ln x \left(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x}\right) \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln_2 x}{\ln x} = 0$ olduğundan $\lim_{x \rightarrow \infty}$ da $\ln(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x}) \sim -\frac{\ln_2 x}{\ln x}$ olur. Buradan x in büyük değerleri için

$$\ln(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x}) < -\frac{\ln_2 x}{2\ln x}$$

bulunur. (3.2.17) gözönüne alınırsa

$$\ln_2(\frac{x}{\ln x}) < \ln_2 x - \frac{\ln_2 x}{2\ln x} < \ln_2 x - \ln^{-1} x$$

yada

$$\ln_2(\frac{x}{\ln x}) < \ln_2 x - \ln^{-1} x$$

elde edilir. Böylece $n = 2$ için (3.2.16) eşitsizliğinin sağlandığını göstermiş olduk. Bu kez de $n = m$ ($m \geq 2$) için (3.2.16) nın sağlandığını varsayalım. Yani x in büyük değerleri için

$$\ln_m(\frac{x}{\ln x}) < \ln_m x - \ln^{1-m} x \quad (3.2.18)$$

olsun. Bu durumda (3.2.16) nın $n = m + 1$ için de sağlandığını göstermek gerek. x in büyük değerleri için (3.2.18) eşitsizliği sağlandığından

$$\begin{aligned} \ln_{m+1}(\frac{x}{\ln x}) &= \ln(\ln_m(\frac{x}{\ln x})) < \ln(\ln_m x - \ln^{1-m} x) \\ &= \ln((\ln_m x)(1 - \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x)) = \ln_{m+1} x + \ln(1 - \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

olur. Yukarıdakine benzer şekilde x in büyük değerleri için

$$\ln(1 - \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x) < -\frac{1}{2} \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir. Bu eşitsizlik (3.2.19) da gözönüne alınırsa,

$$\ln_{m+1}(\frac{x}{\ln x}) < \ln_{m+1} x - \frac{1}{2} \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x \quad (3.2.20)$$

bulunur. x in büyük değerleri için

$$\frac{\ln x}{2\ln_m x} > 1, \quad (m \geq 2)$$

olduğundan, (3.2.20) den

$$ln_{m+1}\left(\frac{x}{lnx}\right) < ln_{m+1}x - ln^{-m}x$$

bulunur.

3.2.3 Teorem $q(x)$ fonksiyonu (5^0) ve b) koşullarını sağladığı taktirde ϵ nun küçük pozitif değerleri için

$$q\left(\frac{g(\epsilon)}{ln g(\epsilon)}\right) - \epsilon > (ln g(\epsilon))^{-(\xi+1)(n+1)}$$

dir.

İspat. k bir doğal sayı ($k \geq 1$) olmak üzere Teorem 3.2.2 yardımıyla x in büyük değerleri için

$$ln_n^k\left(\frac{x}{lnx}\right) < (ln_n x - ln^{1-n}x)^k \leq ln_n^k x - (lnx)^{k(1-n)}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} ln_n^{-k}\left(\frac{x}{lnx}\right) - ln_n^{-k}x &> \frac{1}{ln_n^k - (lnx)^{k(1-n)}} - ln_n^{-k}x \\ &= \frac{1}{ln_n^k x (lnx)^{k(n-1)} (ln_n^k x - ln^{k(1-n)}x)} \\ &> \frac{1}{ln_n^k x ln^{k(n-1)}x ln_n^k x} > (lnx)^{-k(n+1)} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

elde edilir. Hipotez gereği $q(x) - ln_n^{-\xi}x$ ($\xi > 0$) fonksiyonu bir $[a, \infty)$ ($a > 0$) aralığında monoton artmayandır. Bu durumda her bir $k_1 > \xi$ sayısı için $q(x) - ln_n^{-k_1}x$ fonksiyonunun bir $[b, \infty)$ ($b > 0$) aralığında monoton azalan fonksiyon olduğunu gösterelim. Bunun için $q(x) - ln_n^{-k_1}x$ fonksiyonunu $u(x) = q(x) - ln_n^{-\xi}x$ ve $v = ln_n^{-\xi}x - ln_n^{-k_1}x$ olmak üzere

$$q(x) - ln_n^{-k_1}x = u(x) + v(x) \quad (3.2.22)$$

şeklinde gösterelim. $v(x)$ fonksiyonu bir $[b, \infty)$ ($b > 0$) aralığında monoton azalandır. Gerçekten

$$\begin{aligned} v'(x) &= (ln_n^{-\xi}x - ln_n^{-k_1}x)' \\ &= -\xi ln_n^{-\xi-1}x (ln_n x)' + k_1 ln_n^{-k_1-1}x (ln_n x)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (ln_n x)' \left[\frac{k_1}{ln_n^{k_1+1} x} - \frac{\xi}{ln_n^{\xi+1} x} \right] \\
&= (ln_n x)' \frac{k_1}{ln_n^{k_1+1} x} \left[1 - \frac{\xi}{k_1 \cdot ln_n^{\xi-k_1} x} \right] \\
&= (ln_n x)' \frac{k_1}{ln_n^{k_1+1} x} \left[1 - \frac{\xi ln_n^{k_1-\xi} x}{k_1} \right]
\end{aligned}$$

olup, buradan görüldüğü gibi bir $[b, \infty)$ ($b > a$) aralığında $ln_n x$ fonksiyonu tanımlıdır. $(ln_n x)' > 0$ ve $k_1 > \xi$ olduğundan $v'(x) < 0$ dır. Böylece $v(x)$ fonksiyonunun $[b, \infty)$ aralığında monoton azalan olduğu ispatlanmış olur. Öte yandan $u(x)$ fonksiyonu $[b, \infty)$ aralığında monoton artmayan olduğundan, (3.2.22) den $q(x) - ln_n^{-k_1} x$ fonksiyonunun bir $[b, \infty)$ aralığında monoton azalan olduğu sonucu çıkar. (3.2.21) de $k = [\xi] + 1$ alalım Yukarıdaki açıklamalardan $q(x) - ln_n^{-k} x$ fonksiyonunun bir $[b, \infty)$ ($b \geq a$) aralığında monoton azalan olduğu bulunur. Bu nedenle x in büyük değerleri için

$$q\left(\frac{x}{ln x}\right) - (ln_n\left(\frac{x}{ln x}\right))^{-k} > q(x) - ln_n^{-k} x$$

şeklini alır. (3.2.21) den ve bu son eşitsizlikten

$$q\left(\frac{x}{ln x}\right) - q(x) > (ln_n\left(\frac{x}{ln x}\right))^{-k} - ln_n^{-k} x > (ln x)^{-k(n+1)} \quad (3.2.23)$$

elde edilir. Hipotez gereği $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$ olduğundan

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} g(\epsilon) = \infty$$

dur. Bu nedenle (3.2.23) de ϵ küçük pozitif sayı olmak üzere $x = g(\epsilon)$ alınabilir:

$$q\left(\frac{g(\epsilon)}{ln g(\epsilon)}\right) - q(g(\epsilon)) > (ln g(\epsilon))^{-k(n+1)}.$$

$k = [\xi] + 1 \leq \xi + 1$ olduğundan,

$$q\left(\frac{g(\epsilon)}{ln g(\epsilon)}\right) - \epsilon > (ln g(\epsilon))^{-(\xi+1)(n+1)}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$e_0^x = x$, $e_i^x = e^{e^{x-1}}$ ($i = 1, 2, \dots$) olsun.

3.2.4 Teorem $(1^0) - (5^0)$ ve b) koşulları sağlandığı takdirde $\epsilon \rightarrow +0$ da

$$N(\epsilon) = \frac{1+O((e_n^{\epsilon-\beta})^{-1})}{\pi} \int_{q(x) \geq \epsilon} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx$$

asimtotik formülü sağlanır. Bu formülde β pozitif bir sabittir.

İspat. Teorem 3.1.3 ve 3.1.6 dan

$$N(\epsilon) \leq n_1'' + \pi^{-1} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + \frac{g(\epsilon)}{\delta} \quad (3.2.24)$$

eşitsizliği bulunur. (3.1.18) ve (3.1.19) gözönüne alınarak n_1'' aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir:

$$n_1'' < \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(0)-\epsilon}{p(0)}} + 1. \quad (3.2.25)$$

Öte yandan

$$\delta = \frac{g(\epsilon)}{[g^\kappa(\epsilon)]+1} < g^{1-\kappa}(\epsilon),$$

$$\frac{g(\epsilon)}{\delta} < 2g^\kappa(\epsilon)$$

dır. $\kappa = 1/2$ olmak üzere (3.2.24), (3.2.25) ve bu son eşitsizliklerden ϵ nun küçük pozitif değerleri için

$$N(\epsilon) < \pi^{-1} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx + \text{sabit } g^{1/2}(\epsilon) \quad (3.2.26)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikdeki integrali üstten sınırlandıralım.

$$f(\epsilon) = g(\epsilon) \ln^{-1} g(\epsilon)$$

olsun. (2^0) ve (3^0) koşullarının sağlandıkları gözönüne alınırsa, ϵ nun küçük pozitif değerleri için

$$\begin{aligned} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx &\geq \int_{\frac{1}{2}f(\epsilon)}^{f(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx \\ &\geq c_2^{-1} \int_{\frac{1}{2}f(\epsilon)}^{f(\epsilon)} \sqrt{q(x)-\epsilon} dx \geq \frac{f(\epsilon)}{2c_2} \sqrt{q(f(\epsilon))-\epsilon} \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 3.2.3 den dolayı

$$\int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx \geq \frac{g(\epsilon)}{2c_2 \ln g(\epsilon)} (\ln g(\epsilon))^{\frac{-1}{2}(\xi+1)(n+1)} > g^{3/4}(\epsilon) \quad (3.2.27)$$

bulunur. (3.2.26) dan ve bu son bağıntıdan

$$\frac{N(\epsilon)}{\pi^{-1} \int_{q(x) \geq \epsilon} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx} < 1 + g^{-\frac{1}{\beta}}(\epsilon) \quad (3.2.28)$$

elde edilir. $q(x)$ fonksiyonu b) koşulunu sağladığından

$$\epsilon = q(g(\epsilon)) \geq (\ln_n g(\epsilon))^{-\xi}$$

dir. Buradan

$$g(\epsilon) \geq e_n^{(\epsilon)^{-\frac{1}{\xi}}} \quad (3.2.29)$$

bulunur. (3.2.28) ve buradan

$$\frac{N(\epsilon)}{\pi^{-1} \int_{q(x) \geq \epsilon} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx} < 1 + (e_n^{(\epsilon)^{-\beta}})^{-1} \quad (\beta > 0) \quad (3.2.30)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3 ve 3.1.7 den dolayı

$$N(\epsilon) > \pi^{-1} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - \text{sabit } \delta - 2g^\kappa(\epsilon)$$

dir. $\kappa = 1/2$ olmak üzere bu eşitsizlikten ve yukarıda gösterdiğimiz $\delta < g^{1-\kappa}(\epsilon)$ eşitsizliğinden

$$N(\epsilon) > \pi^{-1} \int_0^{g(\epsilon)} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx - \text{sabit } g^{1/2}(\epsilon)$$

bulunur. Buradan (3.2.27) ve (3.2.29) eşitsizlikleri gözönüne alınarak

$$\frac{N(\epsilon)}{\pi^{-1} \int_{q(x) \geq \epsilon} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx} > 1 - (e_n^{(\epsilon)^{-\beta}})^{-1} \quad (\beta > 0)$$

elde edilir. elde edilir. (3.2.30) dan ve bu son eşitsizlikten $\epsilon \rightarrow +0$ da

$$N(\epsilon) = \frac{1+O((e_n^{(\epsilon)^{-\beta}})^{-1})}{\pi} \int_{q(x) \geq \epsilon} \sqrt{\frac{q(x)-\epsilon}{p(x)}} dx$$

asimtotik formülü bulunur. $p(x) \equiv 1$ olduğunda bu problem B. Y. Skaçek tarafından çözülmüştür (Skaçek,B.Y.,1963).

3.3. Örnek

$(1^0) - (4^0)$ ile a) koşullarını ve $(1^0) - (5^0)$ ile b) koşullarını sağlayan $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarına örnekler göstereceğiz.

a ve b , $a > \frac{1}{b} > 0$ eşitsizliklerini sağlayan sabitler olmak üzere

$$p(x) = \frac{ax^2 + ab - 1}{x^2 + b}$$

fonksiyonunun $(1^0) - (3^0)$ koşullarını sağladığı kolayca gösterilebilir. Benzer şekilde $d > 0$ bir sabit olmak üzere

$$q(x) = \frac{1}{d + x^{3/2}}$$

fonksiyonunun da $(3^0) - (4^0)$ ve a) koşullarını sağladığı yine kolayca gösterilebilir.

$$q(x) = \frac{1}{\ln(2+x)}$$

fonksiyonu ise , $(3^0) - (4^0)$ ve b) koşullarını sağlar.

4.0. KISMİ TÜREVLİ ELİPTİK TİPTE OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİEL OPERATÖRÜN SPEKTRUMUNUN İNCELENMESİ VE ÖZDEĞERLERİNİN SAYISI İÇİN ASİMTOTİK FORMÜL

4.1 Problemin ortaya konulması

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $H_1 = L_2(H; \mathbb{R}^n)$ uzayında

$$l(u) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + Q(x)u, \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n) \quad (4.1.1)$$

diferansiel ifadesini ele alalım. Bu ifadede yer alan $a_{ij}(x)$ ($i, j = 1, \dots, n$) ve $Q(x)$ katsayılarının aşağıdaki koşulları sağladıklarını varsayacağız:

1) Reel değerli $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$ ($i, j, k = 1, \dots, n$) türevlerine sahiptir.

2) $\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ olacak şekilde ν ve μ pozitif sayıları vardır.

3) Her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $D(Q(x)) \subset H$ olmak üzere $Q(x) : D(Q(x)) \rightarrow H$ kendine eş operatördür. $D = \cap_{x \in \mathbb{R}^n} D(Q(x))$ kümesi H da yoğundur. $Q(x) \geq I$ ve $Q^{-1}(x) \in \sigma_\infty(H)$.

4) $|x - \xi| \leq 1$ için $\| [Q(x) - Q(\xi)] Q^{-a}(x) \| \leq B|x - \xi|$ olacak şekilde $0 < a < \frac{3}{2}$ ve $B > 0$ sabitleri vardır.

5) Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $Q^{-l}(x) \in \sigma_1(H)$ ve $\int_{\mathbb{R}^n} \|Q^{-l}(x)\|_1 dx < \infty$ koşullarını sağlayan bir $l > 0$ sabiti vardır.

6) Her $c > 0$, $t > 0$ ve $|x - \xi| \leq 1$ için

$$\|e^{-ctQ(\xi)}\|_1 \leq \|e^{-f(c)tQ(x)}\|_1$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif değerli bir f fonksiyonu vardır.

7) Her $M > 0$ sayısı için

$$\int_{\mathbb{R}^n} t r e^{-MtQ(x)} dx = O(1) \int_{\mathbb{R}^n} t r e^{-tQ(x)} dx$$

dır.

8) $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq \dots \leq \alpha_m(x) \leq \dots$, $Q(x)$ operatörünün özdeğerleri olsun. $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots$ fonksiyonlarının ölçülebilir fonksiyonlar olduklarını kabul edelim.

$$\rho(\lambda) = \sum_i \int_{\alpha_i(x) < \lambda} \phi(x)(\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{n}{2}} dx,$$

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j} d\xi, \quad (\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n))$$

olsun. λ nın büyük pozitif değerleri için

$$\lambda \rho'(\lambda) \leq a_0 \rho(\lambda)$$

olacak şekilde bir $a_0 > 0$ sabitinin varlığını kabul edelim.

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$, $\mathbb{R}^n$ uzayında tanımlı ikinci mertebeden sürekli türevlere ve kompakt desteğe sahip olan skaler fonksiyonlar ve $\{f_k\}_{k=1}^m \subset D$ olmak üzere H_1 uzayının $\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) f_k$ şeklinde olan elemanlarının kümesini D' ile gösterelim. Bilindiği gibi $\overline{D'} = H_1$ dir.

$$L'u = l(u) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + Q(x)u, \quad u \in D'$$

şeklinde tanımlanan L' lineer operatörü H_1 uzayında bir simetrik ve pozitif operatördür. L' operatörünün kapanışı olan L operatörünün kendine eş olduğunu varsayalım.

Bu bölümde L nin saf ayrık spektruma sahip olduğu ispatlanacak ve λ pozitif sayı olmak üzere λ dan küçük olan özdeğerlerin $N(\lambda)$ sayısı için asimtotik formül bulunacaktır.

$$L_0(\eta, \frac{\partial}{\partial x}) = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\eta) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$L_1(x, \frac{\partial}{\partial x}) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

olsun. Problemi çözmek için önce aşağıdaki Cauchy probleminin Green fonksiyonunu inceleyeceğiz :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu = -[L_0(x, \frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x, \frac{\partial}{\partial x})]u \quad (4.1.2)$$

$$u(x, 0) = \psi(x); \quad u = u(x, t), \quad \psi(x) \in L_2(H, \mathbb{R}^n)$$

Bu problemin $G(x, y, t)$ Green fonksiyonunu "parametrik" yöntemle

$$G(x, y, t) = G_1(x - y, y, t)e^{-tQ(y)} + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x - \xi, \xi, t - \tau)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\varphi(\xi, y, \tau)d\xi \quad (4.1.3)$$

şeklinde arayacağız. Burada

$$G_1(x - y, y, t) = R(x - y)G_0(x - y, y, t), \quad (4.1.4)$$

$$R(x) \text{ ise } , R(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

şeklinde ikinci mertebeden sürekli türevleri olan bir fonksiyondur. $G_0(x - y, y, t)$ ile

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -LG = -[L_0(x, \frac{\partial}{\partial x}) + L_1(x, \frac{\partial}{\partial x})]G \quad (4.1.7)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. O halde $\varphi(x, y, t)$ için

$$\varphi(x, y, t) = K(x, y, t) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi, t - \tau)\varphi(\xi, y, \tau)d\xi \quad (4.1.8)$$

integral denklemi elde edilir. Burada

$$K(x, y, t) = -e^{-tQ(y)}[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x, \frac{\partial}{\partial x})]G_1(x - y, y, t) + [Q(y) - Q(x)]e^{-tQ(y)}G_1(x - y, y, t) - e^{-tQ(y)}L_1(x, \frac{\partial}{\partial x})G_1(x - y, y, t) \quad (4.1.9)$$

dir. (4.1.8) integral denklemini çözmek için $K(x, y, t)$ operatör fonksiyonunu sınırlandırmak gerekir. Bu bölümde $c, c_1, c_2, \dots, c', c'', vb.$ ile göstereceğimiz pozitif sabitler aynı olmayabilirler. Burada (Eydelman, S.D., 1969) de ispatlanmış olan

$$\|D_x^{(K)}G_0(x - y, y, t)\| \leq c_1 t^{-\frac{n+K}{2}} \exp(-c \frac{|x-y|^2}{t}), \quad (K = 0, 1, 2) \quad (4.1.10)$$

eşitsizliğini kullanacak ve her zaman $t \in (0, 1)$ olduğunu kabul edeceğiz.

4.1.1 Yardımcı Teorem : $G_1(x - y, y, t)$ operatör fonksiyonu için

$$\|[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x, \frac{\partial}{\partial x})]G_1(x - y, y, t)\| \leq \text{sabit} \cdot t^{-\frac{n+2}{2}} \cdot \exp(-c \frac{|x-y|^2}{t}) \quad (4.1.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (4.1.4) ve (4.1.5) den görüldüğü gibi $|x - y| \leq \frac{1}{2}$ olduğunda

$$G_1(x - y, y, t) = G_0(x - y, y, t) \quad (4.1.12)$$

dır. $a_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 1) koşulunu sağladığından

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq A|x - y|$$

olacak şekilde bir $A > 0$ sabiti vardır. (4.1.10), (4.1.12) bağıntılarından ve bu son eşitsizlikten $|x - y| \leq \frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned} ||[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x, \frac{\partial}{\partial x})]G_1(x - y, y, t)|| &= ||[L_0(x, \frac{\partial}{\partial x}) - L_0(y, \frac{\partial}{\partial x})].G_0(x - y, y, t)|| \\ &= ||\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) - a_{ij}(y)) \frac{\partial^2 G_0(x-y, y, t)}{\partial x_i \partial x_j}|| \\ &\leq c_1 t^{-\frac{n+2}{2}} \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}] \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \\ &\leq c_2 t^{-\frac{n+2}{2}} |x - y| \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}] \\ &= c_2 t^{-\frac{n+1}{2}} [\frac{|x-y|^2}{t}]^{\frac{1}{2}} \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}] \\ &\leq c_3 t^{-\frac{n+1}{2}} \exp[-\frac{c}{2} \frac{|x-y|^2}{t}] \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

bulunur. Burada

$$y^a e^{-cy^\beta} \leq \text{sabit} \quad (y > 0) \quad (4.1.14)$$

eşitsizliği kullanılmıştır. Bu eşitsizliğin her sabit a, c ve β pozitif sayıları için sağlandığı açıktır. (4.1.4), (4.1.5) ve (4.1.6) dan $|x - y| > 1$ için

$$[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x, \frac{\partial}{\partial x})]G_1(x - y, y, t) = 0 \quad (4.1.15)$$

elde edilir. İspatın tamamlanması için (4.1.11) eşitsizliğinin $\frac{1}{2} < |x - y| \leq 1$ için de sağlandığını göstermek gerekir. $R(x)$ ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olduğundan, (4.1.4) ve (4.1.10) dan

$$||L_0(x, \frac{\partial}{\partial x})G_1(x - y, y, t)|| \leq c_1 t^{-\frac{n+2}{2}} \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}]$$

bulunur. Öte yandan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}G_1(x-y, y, t) &= R(x-y)\frac{\partial}{\partial t}G_0(x-y, y, t) \\ &= -R(x-y)L_0(y, \frac{\partial}{\partial x})G_0(x-y, y, t)\end{aligned}$$

olduğuna göre (4.1.10) eşitsizliğini bir daha kullanırsak,

$$||\frac{\partial}{\partial t}G_1(x-y, y, t)|| \leq c_2 t^{-\frac{n+2}{2}} \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}]$$

bulunur. Böylece $|x-y| > \frac{1}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned}||[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x, \frac{\partial}{\partial x})]G_1(x-y, y, t)|| &\leq c_3 t^{-\frac{n+2}{2}} \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}] \\ &= c_3 t^{-\frac{n+2}{2}} \exp[-\frac{c}{2} \frac{|x-y|^2}{t}] \exp[-\frac{c}{2} \frac{|x-y|^2}{t}] \\ &\leq c_3 t^{-\frac{n+2}{2}} \exp(-\frac{c}{8t}) \exp[-\frac{c}{2} \frac{|x-y|^2}{t}]\end{aligned}$$

dır. (4.1.14) den dolayı

$$||[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x, \frac{\partial}{\partial x})]G_1(x-y, y, t)|| \leq c_4 \exp[-\frac{c}{2} \frac{|x-y|^2}{t}]$$

bulunur. (4.1.13), (4.1.15) den ve bu son eşitsizlikten

$$||[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x, \frac{\partial}{\partial x})]G_1(x-y, y, t)|| \leq c_5 t^{-\frac{n+2}{2}} \exp[-\frac{c}{2} \frac{|x-y|^2}{t}]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Her $t > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için $e^{-tQ(x)} \in \sigma_1(H)$ olduğunu varsayalım. O takdirde yukarıdaki yardımcı teoremden dolayı

$$\begin{aligned}||e^{-tQ(y)}[\frac{\partial}{\partial t} + L_0(x, \frac{\partial}{\partial x})]G_1(x-y, y, t)||_1 \\ \leq c_1 t^{-\frac{n+2}{2}} ||e^{-tQ(y)}||_1 \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}]\end{aligned} \quad (4.1.16)$$

bulunur.

4.1.2 Yardımcı Teorem : $Q(x)$ operatör fonksiyonu 4) koşulunu sağlıyor ve her $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ için $e^{-tQ(x)} \in \sigma_1(H)$ ise

$$\begin{aligned}|| (Q(y) - Q(x))e^{-tQ(y)}G_1(x-y, y, t) ||_1 \\ \leq \text{sabit} \cdot t^{-\frac{n-1}{2}-a} ||\exp(-\frac{t}{2}Q(y))||_1 \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}]\end{aligned}$$

dır.

İspat. (4.1.4), (4.1.5) ve (4.1.10) bağıntılarından dolayı

$$\begin{aligned} ||(Q(y) - Q(x))e^{-tQ(y)}G_1(x - y, y, t)||_1 &= ||(Q(y) - Q(x))e^{-\frac{t}{2}Q(y)} \\ &\quad e^{-\frac{t}{2}Q(y)}G_1(x - y, y, t)||_1 \\ &\leq c_2 ||(Q(y) - Q(x))e^{-\frac{t}{2}Q(y)}|| ||e^{-\frac{t}{2}Q(y)}||_1 t^{-\frac{n}{2}} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

elde edilir. $Q(x)$ 4) koşulunu sağladığından,

$$\begin{aligned} ||(Q(y) - Q(x))e^{-\frac{t}{2}Q(y)}|| &= ||(Q(y) - Q(x))Q^{-a}(y)Q^a(y)e^{-\frac{t}{2}Q(y)}|| \\ &\leq ||(Q(y) - Q(x))Q^{-a}(y)|| ||Q^a(y)e^{-\frac{t}{2}Q(y)}|| \\ &\leq B|x - y|t^{-a} ||t^a Q^a(y)e^{-\frac{t}{2}Q(y)}|| \end{aligned}$$

bulunur. $t^a Q^a(y)e^{-\frac{t}{2}Q(y)}$ operatörünün özdeğerleri

$$\{t^\alpha \alpha_i^a(y)e^{-\frac{t}{2}\alpha_i(y)}\}_{i=1}^\infty$$

şeklinde ve

$$[t\alpha_i(y)]^a e^{-\frac{t}{2}\alpha_i(y)} \leq \text{sabit}$$

olduğundan,

$$||t^a Q^a(y)e^{-\frac{t}{2}Q(y)}|| \leq \text{sabit}$$

dır. Buna göre

$$|| (Q(y) - Q(x))e^{-\frac{t}{2}Q(y)} || \leq \text{sabit} \cdot t^{-a} |x - y|$$

olup, (4.1.17) den ve bu son eşitsizlikten

$$\begin{aligned} ||(Q(y) - Q(x))e^{-tQ(y)}G_1(x - y, y, t)||_1 &\leq \text{sabit} |x - y| t^{-\frac{n}{2}-a} ||e^{-\frac{t}{2}Q(y)}||_1 e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \\ &= \text{sabit} \cdot t^{-\frac{n-1}{2}-a} \left(\frac{|x-y|^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}} ||e^{-\frac{t}{2}Q(y)}||_1 e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{t}} e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{t}} \end{aligned}$$

bulunur. (4.1.14) den dolayı

$$|| (Q(y) - Q(x))e^{-tQ(y)}G_1(x - y, y, t)||_1 \leq \text{sabit} \cdot t^{-\frac{n-1}{2}-a} ||e^{-\frac{t}{2}Q(y)}||_1 \cdot \exp\left[-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{t}\right]$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

$R(x)$ in ikinci mertebeden türevleri sürekli olduğundan, (4.1.4) ve (4.1.10) dan

$$\| e^{-tQ(y)} L_1(x, \frac{\partial}{\partial x}) G_1(x-y, y, t) \|_1 \leq \text{sabit} \cdot t^{-\frac{n+1}{2}} \| e^{-tQ(y)} \|_1 \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}] \quad (4.1.18)$$

bulunur. (4.1.9), (4.1.16) ve (4.1.18) den ve yardımcı teorem (4.1.2) den

$$\| K(x, y, t) \|_1 \leq \text{sabit} \cdot t^{-b} \| \exp(-ctQ(y)) \|_1 \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}] \quad (4.1.19)$$

elde edilir. Burada $b = \max\{\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2} + a\}$ dir. Eğer $|x-y| \geq t^{\frac{1-\epsilon}{2}}$ ($0 < \epsilon < 1$) ise,

$$\begin{aligned} t^{-b} e^{-ct^{-1}|x-y|^2} &= t^{-b} e^{-\frac{\epsilon}{2}t^{-1}|x-y|^2} e^{-\frac{\epsilon}{2}t^{-1}|x-y|^2} \\ &\leq \text{sabit} \cdot t^{-b} e^{-\frac{\epsilon}{2}t^{-\epsilon}} e^{-\frac{\epsilon}{2} \frac{|x-y|^2}{t}} \leq \text{sabit} \cdot e^{-\frac{\epsilon}{2} \frac{|x-y|^2}{t}} \end{aligned}$$

dır. Buna göre

$$\| K(x, y, t) \|_1 \leq \text{sabit} \| e^{-ctQ(y)} \|_1 e^{-\frac{\epsilon}{2} \frac{|x-y|^2}{t}}, \quad |x-y| > t^{\frac{1-\epsilon}{2}} \quad (4.1.20)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\| K(x, y, t) \| \leq \text{sabit} \cdot t^{-b} e^{-c \frac{|x-y|^2}{t}} \quad (4.1.21)$$

elde edilir. (4.1.8) integral denklemini ardışık yaklaşım yöntemiyle çözeceğiz. İlk adım olarak $K_1(x, y, t) = K(x, y, t)$ kabul edelim. O taktirde

$$K_m(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi, t-\tau) K_{m-1}(\xi, y, \tau) d\xi, \quad (m = 2, 3, \dots)$$

olur. Burada $t \geq \delta > 0$ için $\sum_{m=1}^{\infty} K_m(x, y, t)$ serisinin x ve y değişkenlerine göre düzgün yakınsak seri olduğu ispatlanacaktır.

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x, y, t)$$

operatör fonksiyonu (4.1.8) denkleminin çözümüdür. $\sum_{m=1}^{\infty} K_m(x, y, t)$ serisinin yakınsaklığını ispatlamak için $K_2(x, y, t), K_3(x, y, t), \dots$ operatör fonksiyonlarının sınırlandırılması gerekir.

4.2 $K_m(x, y, t)$ operatör fonksiyonları için bazı eşitsizlikler

$K_m(x, y, t)$ ($m = 2, 3, \dots$) operatör fonksiyonlarını sınırlandırmak için (4.1) de elde edilen sonuçları ve (Glazman, I.M., 1965) de ispatlanmış olan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-c \frac{(\xi - z)^2}{t - \tau} - c \frac{(z - \eta)^2}{\tau}\right] [(t - \tau)\tau]^{\frac{1}{2}} dz$$

$$\leq c(\epsilon) t^{\frac{1}{2}} \exp\left[-(c - \epsilon) \frac{(\xi - \eta)^2}{t}\right], \quad (4.2.1)$$

$$\frac{(\xi - z)^2}{t - \tau} + \frac{(z - \eta)^2}{\tau} \geq \frac{(\xi - \eta)^2}{t} \quad (4.2.2)$$

eşitsizliklerini kullanacağız.

4.2.1 Yardımcı Teorem : $Q(x)$ operatör fonksiyonu 4) ve 6) koşullarını sağlıyorsa

$$\| K_2(x, y, t) \|_1 \leq \text{sabit} \cdot t^{\frac{n+2}{2} - 2b} \| \exp(-c_1 t Q(y)) \|_1 \cdot \exp\left[-(c - \epsilon) \frac{|x - y|^2}{t}\right] \quad (4.2.3)$$

dir. Burada c sabiti (4.1.19) ve (4.1.21) de bulunan sabitlerin aynısıdır.

İspat. $K_2(x, y, t)$ yi

$$\begin{aligned} K_2(x, y, t) &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi, t - \tau) K(\xi, y, \tau) d\xi \\ &= \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi, t - \tau) K(\xi, y, \tau) d\xi \\ &\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi, t - \tau) K(\xi, y, \tau) d\xi = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

şeklinde gösterelim. (4.1.19) ve (4.1.21) eşitsizlikleri ve $Q(x)$ in 6) koşulunu sağla-

dığı gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\| I_1 \|_1 &= \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} K(x, \xi, t-\tau) K(\xi, y, \tau) d\xi \right\|_1 \\
&\leq \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} \| K(x, \xi, t-\tau) \|_1 \| K(\xi, y, \tau) \| d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} [\tau(t-\tau)]^{-b} \exp\left[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}\right] \| e^{-c(t-\tau)Q(\xi)} \|_1 d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \int_0^{\frac{t}{2}} [\tau(t-\tau)]^{\frac{n}{2}-b} \| e^{-c_1 t Q(y)} \|_1 d\tau. \\
&\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}\right] [\tau(t-\tau)]^{-\frac{n}{2}} d\xi
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

dir. (4.2.1) den yararlanarak bu ifadede yer alan son integrali sınırlandıralım :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}\right] [\tau(t-\tau)]^{-\frac{n}{2}} d\xi \\
&= \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-c \frac{(x_i - \xi_i)^2}{t-\tau} - c \frac{(\xi_i - y_i)^2}{\tau}\right] [\tau(t-\tau)]^{-\frac{1}{2}} d\xi \\
&\leq c_1(\epsilon) \prod_{i=1}^n t^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-(c-\epsilon) \frac{(x_i - y_i)^2}{t}\right] \\
&= c_1(\epsilon) t^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-(c-\epsilon) \frac{|x-y|^2}{t}\right]
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

(4.2.5) ve (4.2.6) bağıntılarından ve

$$\int_0^t \tau^\alpha (t-\tau)^\beta d\tau = t^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1) \quad (\alpha > -1, \beta > -1) \tag{4.2.7}$$

formülünden

$$\| I_1 \|_1 \leq \text{sabit.} \| e^{-c_1 t Q(y)} \|_1 t^{\frac{n+2}{2}-2b} \exp\left[-(c-\epsilon) \frac{|x-y|^2}{t}\right] \tag{4.2.8}$$

bulunur. (4.1.19), (4.1.21) ve (4.2.6) dan yararlanarak I_2 integrali için

$$\begin{aligned}
\| I_2 \|_1 &= \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi, t - \tau) K(\xi, y, \tau) d\xi \right\|_1 \\
&\leq \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \| K(x, \xi, t - \tau) \| \| K(\xi, y, \tau) \|_1 d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \int_{\frac{t}{2}}^t [\tau(t - \tau)]^{-b} d\tau. \\
&\int_{\mathbb{R}^n} \| e^{-c\tau Q(y)} \|_1 \exp\left[-c \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau} - c \frac{|\xi - y|^2}{\tau}\right] d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \| e^{-\frac{c}{2}tQ(y)} \|_1 \int_0^t [\tau(t - \tau)]^{\frac{n}{2}-b} d\tau. \\
&\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-c \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau} - c \frac{|\xi - y|^2}{\tau}\right] [\tau(t - \tau)]^{\frac{n}{2}-b} d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \| e^{-\frac{c}{2}tQ(y)} \|_1 t^{\frac{n+2}{2}-2b} \exp\left[-(c - \epsilon) \frac{|x - y|^2}{t}\right]
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

elde edilir. (4.2.4), (4.2.8) ve (4.2.9) dan

$$\| K(x, y, t) \| \leq \text{sabit.} t^{\frac{n+2}{2}-2b} \| e^{-c_2 t Q(y)} \|_1 \exp\left[-(c - \epsilon) \frac{|x - y|^2}{t}\right]$$

bulunur.

Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $Q^{-l}(x) \in \sigma_1(H)$ olduğunu kabul edip, $|x - y| > 1$ için $K_2(x, y, t)$ operatör fonksiyonunu sınırlandıralım. Yardımcı teorem 4.2.1 ve

$$t^{\frac{n+2}{2}-2b} \exp\left[-\frac{\epsilon}{2} \frac{|x - y|^2}{t}\right] \leq \text{sabit}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\| K_2(x, y, t) \|_1 \leq \text{sabit} \| e^{-c_2 t Q(y)} \|_1 \exp\left[-(c - \frac{3\epsilon}{2}) \frac{|x - y|^2}{t}\right] \tag{4.2.10}$$

bulunur. $|x - y| > 1$ için

$$\exp\left[-\frac{\epsilon}{2} \frac{|x - y|^2}{t}\right] \leq e^{-\frac{\epsilon}{2} t^{-1}} \leq \text{sabit.} t^l$$

dir. Öte yandan

$$\begin{aligned}
\| e^{-c_1 t Q(y)} \|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-c_1 t \alpha_i(y)} = \sum_{i=1}^{\infty} t^{-l} \alpha_i^{-l}(y) [t^l \alpha_i^l(y) e^{-c_1 t \alpha_i(y)}] \\
&\leq \text{sabit.} t^{-l} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{-l}(y)
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

olup, bu son bağıntılardan

$$\| e^{-c_1 t Q(y)} \|_1 \exp\left[-\frac{\epsilon}{2} \frac{|x-y|^2}{t}\right] \leq \text{sabit} \| Q^{-l}(y) \|_1 \quad (4.2.12)$$

elde edilir. (4.2.10) ve (4.2.12) den

$$\| K_2(x, y, t) \|_1 \leq \text{sabit} \| Q^{-l}(y) \|_1 \exp\left[-(c-2\epsilon) \frac{|x-y|^2}{t}\right], \quad (|x-y| > 1) \quad (4.2.13)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\| K_2(x, y, t) \|_1 \leq \begin{cases} \text{sabit} \cdot \exp\left[-(c-2\epsilon) \frac{|x-y|^2}{t}\right] \\ \text{sabit} \cdot t^{\frac{n+2}{2}-2b} \exp\left[-(c-\epsilon) \frac{|x-y|^2}{t}\right] \end{cases}, \quad (|x-y| > 1) \text{ ise} \quad (4.2.14)$$

eşitsizlikleri ispatlanabilir.

Bu kez de $K_3(x, y, t)$ yi sınırlandıralım. Bunun için önce bu operatör fonksiyonunu aşağıdaki şekilde iki integralin toplamı olarak gösterelim.

$$\begin{aligned} K_3(x, y, t) &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, y, \tau) d\xi \\ &= \int_0^t d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} K(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, y, \tau) d\xi + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{|\xi-y| > 1} K(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, y, \tau) d\xi = I_{21} + I_{22} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Buradaki I_{21} integralini de yine iki integralin toplamı şeklinde gösterelim:

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_0^t d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} K(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, y, \tau) d\xi \\ &= \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} K(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, y, \tau) d\xi \\ &+ \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} K(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, y, \tau) d\xi \\ &= I_{21}^{(1)} + I_{21}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

(4.1.19), (4.2.6), (4.2.7) ve (4.2.14) bağıntılarını kullanıp $Q(x)$ in 6) koşulunu sağ-

ladığı dikkate alınır, (4.2.16) da yer alan $I_{21}^{(1)}$ için aşağıdakiler yazılabilir :

$$\begin{aligned}
\|I_{21}^{(1)}\|_1 &= \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} K(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, y, \tau) d\xi \right\|_1 \\
&\leq \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} \|K(x, \xi, t-\tau)\|_1 \|K_2(\xi, y, \tau)\| d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} (t-\tau)^{-b} \tau^{\frac{n+2}{2}-2b} \|e^{-c(t-\tau)Q(\xi)}\|_1 \cdot \\
&\quad \exp\left[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}\right] d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \|e^{-c_1 t Q(y)}\|_1 \int_0^t (t-\tau)^{\frac{n}{2}-b} \tau^{n+1-2b} d\tau \cdot \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}\right] [\tau(t-\tau)]^{-\frac{n}{2}} d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \|e^{-c_1 t Q(y)}\|_1 t^{n+2-3b} \exp\left[-(c-2\epsilon) \frac{|x-y|^2}{t}\right].
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

(4.1.21), (4.2.6), (4.2.7) bağıntıları ve yardımcı teorem 4.2.1 den yararlanarak $\|I_{21}^{(2)}\|_1$ i sınırlandıralım :

$$\begin{aligned}
\|I_{21}^{(2)}\|_1 &= \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} K(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, y, \tau) d\xi \right\|_1 \\
&\leq \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} \|K(x, \xi, t-\tau)\| \|K_2(\xi, y, \tau)\|_1 d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{|\xi-y| \leq 1} (t-\tau)^{-b} \tau^{\frac{n+2}{2}-2b} \cdot \\
&\quad \|e^{-c_1 \tau Q(y)}\|_1 \exp\left[-(c-\epsilon) \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - (c-\epsilon) \frac{|\xi-y|^2}{\tau}\right] d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \|e^{-c_2 t Q(y)}\|_1 \int_0^t (t-\tau)^{\frac{n}{2}-b} \tau^{n+1-2b} d\tau \cdot \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-(c-\epsilon) \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - (c-\epsilon) \frac{|\xi-y|^2}{\tau}\right] [\tau(t-\tau)]^{-\frac{n}{2}} d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \|e^{-c_2 t Q(y)}\|_1 t^{n+2-3b} \exp\left[-(c-2\epsilon) \frac{|x-y|^2}{t}\right].
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

(4.2.16), (4.2.17) ve (4.2.18) den

$$\|I_{21}\|_1 \leq \text{sabit.} \|e^{-c_3 t Q(y)}\|_1 t^{n+2-3b} \exp\left[-(c-2\epsilon) \frac{|x-y|^2}{t}\right] \tag{4.2.19}$$

bulunur. (4.1.21), (4.2.6), (4.2.7) ve (4.2.13) den $\|I_{22}\|_1$ için

$$\begin{aligned}
\|I_{22}\|_1 &= \left\| \int_0^t d\tau \int_{|\xi-y|>1} K(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, y, \tau) d\xi \right\|_1 \\
&\leq \int_0^t d\tau \int_{|\xi-y|>1} \|K(x, \xi, t-\tau)\| \|K_2(\xi, y, \tau)\|_1 d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \|Q^{-l}(y)\|_1 \int_0^t (t-\tau)^{-b} d\tau \\
&\quad \int_{|\xi-y|>1} \exp\left[-(c-2\epsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - (c-2\epsilon)\frac{|\xi-y|^2}{\tau}\right] d\xi \tag{4.2.20} \\
&\leq \text{sabit.} \|Q^{-l}(y)\|_1 \int_0^t (t-\tau)^{\frac{n}{2}-b} \tau^{\frac{n}{2}} d\tau \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-(c-2\epsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - (c-2\epsilon)\frac{|\xi-y|^2}{\tau}\right] [\tau(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}] d\xi \\
&\leq \text{sabit.} t^{\frac{n+2}{2}-b} \|Q^{-l}(y)\|_1 \exp\left[-(c-3\epsilon)\frac{|x-y|^2}{t}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.15), (4.2.19) ve (4.2.20) den

$$\begin{aligned}
\|K_3(x, y, t)\|_1 &\leq \text{sabit.} \exp\left[-(c-3\epsilon)\frac{|x-y|^2}{t}\right] \{t^{\frac{n+2}{2}-b} \|Q^{-l}(y)\|_1 + \\
&\quad + t^{n+2-3b} \|e^{-c_3 t Q(y)}\|_1\}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.2.11) den dolayı bu eşitsizlikten $|x-y| > 1$ için

$$\|K_3(x, y, t)\|_1 \leq \text{sabit.} \|Q^{-l}(y)\|_1 \exp\left[-(c-4\epsilon)\frac{|x-y|^2}{t}\right]$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\|K_3(x, y, t)\| \leq \text{sabit.} t^{n+2-3b} \exp\left[-(c-3\epsilon)\frac{|x-y|^2}{t}\right]$$

$$\|K_3(x, y, t)\| \leq \text{sabit.} \exp\left[-(c-4\epsilon)\frac{|x-y|^2}{t}\right], \quad (|x-y| > 1)$$

bulunur.

Bu son dört eşitsizlik $K_4(x, y, t)$ nin sınırlandırılmasında kullanılır.

$$K_4(x, y, t), K_5(x, y, t), \dots$$

operatör fonksiyonları sınırlandırılırken (4.2.6) eşitsizliği t değişkeninin kuvveti l den küçük olmayan bir sayı olana kadar kullanılacaktır ve sonuçta bir m_0 doğal

sayısı için

$$\begin{aligned} \|K_{m_0}(x, y, t)\|_1 &\leq \text{sabit} \cdot t^l \exp\left\{-\left[(c - 2(m_0 - \frac{3}{2}))\frac{|x-y|^2}{t}\right]\right\} \{\|Q^{-l}(y)\|_1 + \\ &+ \exp[-c_5 t Q(y)]\} \end{aligned}$$

olacaktır. (4.2.12) ve bu son eşitsizlikten

$$\|K_{m_0}(x, y, t)\|_1 \leq \text{sabit} \cdot \|Q^{-l}(y)\|_1 \exp\left\{-[(c - 2(m_0 - 1)\epsilon)\frac{|x-y|^2}{t}]\right\} \quad (4.2.21)$$

bulunur. Burada $c > 2(m_0 - 1)\epsilon$ olduğunu kabul ediyoruz.

$$K_{m_0+1}(x, y, t), K_{m_0+2}(x, y, t), \dots$$

operatör fonksiyonları ise, (4.2.2) eşitsizliği kullanılarak sınırlandırılacaktır.

$K_{m_0+1}(x, y, t)$ yi sınırlandıralım:

$$\begin{aligned} \|K_{m_0+1}(x, y, t)\|_1 &= \left\| \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi, t - \tau) K_{m_0}(\xi, y, \tau) d\xi \right\|_1 \\ &\leq \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \|K(x, \xi, t - \tau)\| \|K_{m_0}(\xi, y, \tau)\|_1 d\xi \\ &= \int_0^t d\tau \int_{|x-\xi| < (t-\tau)^\beta} \|K(x, \xi, t - \tau)\| \|K_{m_0}(\xi, y, \tau)\|_1 d\xi \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{|x-\xi| \geq (t-\tau)^\beta} \|K(x, \xi, t - \tau)\| \|K_{m_0}(\xi, y, \tau)\|_1 d\xi \\ &= I'_1 + I'_2, \quad \beta = \frac{2b}{n}. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

(4.1.21), (4.2.2) ve (4.2.21) eşitsizliklerinden yararlanarak I'_1 ve I'_2 integrallerini sınırlandıralım:

$$\begin{aligned} I'_1 &= \int_0^t d\tau \int_{|x-\xi| < (t-\tau)^\beta} \|K(x, \xi, t - \tau)\| \|K_{m_0}(\xi, y, \tau)\|_1 d\xi \\ &\leq \text{sabit} \cdot \int_0^t (t - \tau)^{-b} d\tau \int_{|x-\xi| < (t-\tau)^\beta} \|Q^{-l}(y)\|_1 \cdot \\ &\exp\left[-c \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau} - c \frac{|\xi - y|^2}{\tau}\right] d\xi \\ &\leq \text{sabit} \cdot \|Q^{-l}(y)\|_1 \exp\left[-c \frac{|x - y|^2}{t}\right] \int_0^t (t - \tau)^{-b} (t - \tau)^n d\tau \\ &\leq \text{sabit} \cdot \|Q^{-l}(y)\|_1 \exp\left[-c \frac{|x - y|^2}{t}\right] t^{b+1} \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

$$\begin{aligned}
I'_2 &= \int_0^t d\tau \int_{|x-\xi| \geq (t-\tau)^\beta} \|K(x, \xi, t-\tau)\| \|K_m(\xi, y, \tau)\|_1 d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \int_0^t d\tau \int_{(t-\tau)^\beta \leq |x-\xi| \leq 1} \|Q^{-l}(y)\|_1 \exp\left[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}\right] d\xi \\
&\leq \text{sabit.} t \|Q^{-l}(y)\|_1 \exp\left[-c \frac{|x-y|^2}{t}\right].
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

(4.2.22), (4.2.23) ve (4.2.24) den

$$\|K_{m_0+1}(x, y, t)\|_1 \leq \text{sabit.} \|Q^{-l}(y)\|_1 \exp\left[-c \frac{|x-y|^2}{t}\right] t \tag{4.2.25}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilirse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

olmak üzere

$$\|K_{m_0+n}(x, y, t)\|_1 \leq t^{\beta_n} a_n \|Q^{-l}(y)\|_1 \exp\left[-c \frac{|x-y|^2}{t}\right], \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{4.2.26}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Görüldüğü gibi

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x, y, t)$$

serisi $\sigma_1(H)$ uzayındaki norma göre yakınsak seridir. (4.1.19), (4.2.25), (4.2.26)

eşitsizliklerinden ve yardımcı teorem 4.2.1 den

$$\|\varphi(x, y, t)\|_1 \leq \text{sabit.} \exp\left[-c \frac{|x-y|^2}{t}\right] \{ \|Q^{-l}(y)\|_1 + t^{-b} \exp(-ct) \|Q^{-l}(y)\|_1 \} \tag{4.2.27}$$

bulunur. Bu eşitsizlikten daha önce yapıldığı gibi $|x-y| > 1$ için

$$\|\varphi(x, y, t)\|_1 \leq \text{sabit.} \|Q^{-l}(y)\|_1 \exp\left[-c' \frac{|x-y|^2}{t}\right] \tag{4.2.28}$$

elde edilir. Aşağıdaki eşitsizlikler de kolayca ispatlanabilir :

$$\|\varphi(x, y, t)\| \leq \text{sabit.} t^{-b} \exp\left[-c \frac{|x-y|^2}{t}\right], \tag{4.2.29}$$

$$\|\varphi(x, y, t)\| \leq \text{sabit.} \exp\left[-c \frac{|x-y|^2}{t}\right], \quad (|x-y| > 1). \tag{4.2.30}$$

4.3 Green fonksiyonu için asimtotik formül

Bu kısımda $G(x, y, t)$ fonksiyonu için asimtotik formül bulunacaktır.

4.3.1 Teorem : (4.1.1) diferansiel ifadesinin katsayıları 1) -6) koşullarını sağlıyorsa, $t \rightarrow +0$ da

$$G(x, y, t) = G_1(x - y, y, t)e^{-tQ(y)} + t^{1-b} \exp[-c \frac{|x-y|^2}{t}].$$

$$\{ \|Q^{-l}(y)\|_1 + \| \exp(-ctQ(y)) \|_1 \} O(1)$$

dır. Burada $O(1)$, $\sigma_1(H)$ normu x, y ve t değişkenlerine göre düzgün sınırlı olan bir operatör fonksiyondur ve $b = \max\{\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2} + a\}$ dır.

İspat.

(4.1.3), (4.1.4), (4.1.5) ve (4.1.10) dan yararlanarak

$$\begin{aligned} & \|G(x, y, t) - e^{tQ(y)} G_1(x - y, y, t)\|_1 \\ & \leq A \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \exp[-c \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}] \| \exp[-(t - \tau)Q(\xi)] \varphi(\xi, y, \tau) \|_1 d\xi \\ & = A \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \int_{|y - \xi| \leq 1} \exp[-c \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}] \| \exp[-(t - \tau)Q(\xi)] \varphi(\xi, y, \tau) \|_1 d\xi \\ & + A \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \int_{|y - \xi| > 1} \exp[-c \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}] \| \exp[-(t - \tau)Q(\xi)] \varphi(\xi, y, \tau) \|_1 d\xi \\ & = B_1 + B_2 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

elde edilir. (4.2.27) ve (4.2.29) eşitsizliklerini kullanarak B_1 integralini sınırlandırılalım.

$$\begin{aligned} B_1 & = A \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \int_{|y - \xi| \leq 1} \exp[-c \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}] \\ & \| \exp[-(t - \tau)Q(\xi)] \varphi(\xi, y, \tau) \|_1 d\xi \\ & \leq \text{sabit.} \int_0^{\frac{t}{2}} (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} \tau^{-b} d\tau \int_{|y - \xi| \leq 1} \exp[-c \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}] \| \exp[-(t - \tau)Q(\xi)] \|_1 \\ & \exp[-c \frac{|\xi - y|^2}{\tau}] d\xi + \text{sabit} \int_{\frac{t}{2}}^t (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \int_{|y - \xi| \leq 1} \exp[-c \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}] \\ & \exp[-(t - \tau)\alpha_1(\xi)] \exp[-c \frac{|\xi - y|^2}{\tau}] \{ \tau^{-b} \| \exp[-c\tau Q(y)] \|_1 + \|Q^{-l}(y)\|_1 \} d\xi \\ & = B_1^{(1)} + B_1^{(2)}. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

$Q(x)$ in 6) koşulunu sağladığı gözönüne alınıp ve (4.2.6), (4.2.7) bağıntılarından

yararlanarak $B_1^{(1)}$ için

$$\begin{aligned}
B_1^{(1)} &= \text{sabit.} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \tau^{-b} d\tau \int_{|y-\xi| \leq 1} \exp[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}] \\
&\quad || \exp[-(t-\tau)Q(\xi)] ||_1 \exp[-c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}] d\xi \\
&\leq \text{sabit.} || \exp[-c_1 t Q(y)] ||_1 \int_0^{\frac{t}{2}} \tau^{\frac{n}{2}-b} d\tau \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}] [\tau(t-\tau)]^{-\frac{n}{2}} d\xi \\
&\leq \text{sabit.} t^{1-b} || \exp[-c_1 t Q(y)] ||_1 \exp[-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}]
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

bulunur. Benzer şekilde $B_1^{(2)}$ yi sınırlandıralım:

$$\begin{aligned}
B_1^{(2)} &= \text{sabit.} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \int_{|y-\xi| \leq 1} \exp[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}] \exp[-(t-\tau)\alpha_1(\xi)] \\
&\quad \exp[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}] \{ \tau^{-b} || \exp[-c\tau Q(y)] ||_1 + || Q^{-l}(y) ||_1 \} d\xi \\
&\leq \text{sabit.} \{ t^{-b} || \exp[-c_1 t Q(y)] ||_1 + || Q^{-l}(y) ||_1 \} \\
&\quad \int_0^t \tau^{\frac{n}{2}} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \exp[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}] [\tau(t-\tau)]^{-\frac{n}{2}} d\xi \\
&\leq \text{sabit.} t \{ t^{-b} || \exp[-c_1 t Q(y)] ||_1 + || Q^{-l}(y) ||_1 \} \exp[-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}].
\end{aligned}$$

(4.3.2), (4.3.3) den ve bu son bağıntıdan

$$\begin{aligned}
B_1 &\leq \text{sabit.} t \{ t^{-b} || \exp[-c_1 t Q(y)] ||_1 + || Q^{-l}(y) ||_1 \} \exp[-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}] \\
&\leq \text{sabit.} t^{1-b} \exp[-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}] \{ || \exp[-c_1 t Q(y)] ||_1 + || Q^{-l}(y) ||_1 \}
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

bulunur. (4.2.6) ve (4.2.28) eşitsizliklerinden yararlanarak bu kez de (4.3.1) de yer alan B_2 ifadesini sınırlandıralım.

$$\begin{aligned}
B_2 &= A \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \int_{|y-\xi| > 1} \exp[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}] || \exp[-(t-\tau)Q(\xi)] \varphi(\xi, y, \tau) ||_1 d\xi \\
&\leq A \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \int_{|y-\xi| > 1} || \exp[-(t-\tau)Q(\xi)] || \exp[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}] || \varphi(\xi, y, \tau) ||_1 d\xi \\
&\leq \text{sabit.} || Q^{-l}(y) ||_1 \int_0^t \tau^{\frac{n}{2}} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \exp[-c \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c \frac{|\xi-y|^2}{\tau}] [\tau(t-\tau)]^{-\frac{n}{2}} d\xi
\end{aligned}$$

$$\leq \text{sabit}.t \parallel Q^{-l}(y) \parallel_1 \exp[-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}]. \quad (4.3.5)$$

(4.3.1), (4.3.4) ve (4.3.5) den

$$\begin{aligned} & \|G(x, y, t) - e^{-tQ(y)} G_1(x - y, y, t)\|_1 \\ & \leq \text{sabit}.t^{1-b} \exp[-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}] \{ \| \exp[-c_1 t Q(y)] \|_1 + \| Q^{-l}(y) \|_1 \} \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= G_1(x - y, y, t) e^{-tQ(y)} + t^{1-b} \exp[-c_1 \frac{|x-y|^2}{t}] \cdot \\ & \{ \| \exp[-c_1 t Q(y)] \|_1 + \| Q^{-l}(y) \|_1 \} O(1) \end{aligned}$$

bulunur.

4.4 Özdeğerlerin sayısının asimtotik davranışı

Burada L operatörünün spektrumunun saf ayrık olduğu ispatlanacak ve λ dan küçük olan özdeğerlerin sayısı için asimtotik formül bulunacaktır.

4.4.1 Teorem : (4.1.1) diferansiel ifadesinin katsayıları 1) -7) koşullarını sağlıyorsa, L operatörünün spektrumu saf ayrıktır.

İspat. $G_0(x - y, y, t)$ operatör fonksiyonu

$$G_0(x - y, y, t) = \frac{I}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp[-t \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) s_i s_j + i(s, x - y)] ds$$

şeklindedir. Burada $I : H \rightarrow H$ birim operatördür. $s_i = t^{-\frac{1}{2}} \xi_i$ dönüştürmesi yapılırsa

$$G_0(x - y, y, t) = \frac{I}{(2\pi\sqrt{t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp[-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) \xi_i \xi_j + it^{-\frac{1}{2}}(\xi, x - y)] d\xi$$

şeklini alır. Buradan da

$$G_0(0, x, t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp[-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j] d\xi = \frac{\Phi(x)}{(2\pi\sqrt{t})^n} I \quad (4.4.1)$$

bulunur. (4.1.4), (4.4.1) formüllerinden ve teorem 4.3.1 den

$$\text{tr} G(x, x, t) = \frac{\Phi(x)}{(2\pi\sqrt{t})^n} \text{tr} e^{-tQ(x)} + O(1)t^{1-b} [\| e^{-ctQ(x)} \|_1 + \| Q^{-l}(x) \|_1] \quad (4.4.2)$$

formülü elde edilir. Varsayım gereği her $x \in \mathbb{R}^n$ için $Q(x) \geq I$ dir. Dolayısıyla

$$\| e^{-ctQ(x)} \|_1 = \text{tr} e^{-ctQ(x)}$$

dır. Öte yandan $Q(x)$ 5) -7) koşullarını sağladığından, (4.4.2) den dolayı

$$\int_{\mathbb{R}^n} \text{tr} G(x, x, t) dx = \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \text{tr} e^{-tQ(x)} dx + O(1)t^{1-b}.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \text{tr} e^{-tQ(x)} dx + O(1)t^{1-b} \quad (4.4.3)$$

bulunur. $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ ifadesi 2) koşulunu sağladığından

$$M_1 < \Phi(x) < M_2 \quad (4.4.4)$$

olacak şekilde M_1 ve M_2 pozitif sabitleri vardır. O taktirde (4.4.3) den

$$\int_{\mathbb{R}^n} \text{tr} G(x, x, t) dx < \infty \quad (4.4.5)$$

elde edilir. $u = e^{-tL}\psi(x)$ ve $u = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y, t)\psi(y)dy$ olduğundan, $G(x, y, t)$ pozitif sınırlı e^{-tL} operatörünün çekirdeğidir ($t > 0$). Her $t > 0$ için e^{-tL} operatörü çekirdek operatörüdür (Kirillov, A.A, 1976). e^{-tL} ve L operatörlerinin spektrumları için

$$s\{e^{-tL}\} = e^{-ts\{L\}}$$

dir. Her $t > 0$ için e^{-tL} nin tam sürekli operatör olmasından ve bu son formülden L nin spektrumunun saf ayrıklığı elde edilir.

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, L operatörünün özdeğerleri, $\lambda > 0$ herhangi bir sayı ve

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$$

olsun.

4.4.2 Teorem : (4.1.1) diferansiel ifadesinin katsayıları 1) -8) koşullarını sağlıyorsa, $\lambda \rightarrow \infty$ da

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n+2}{2})} \sum_i \int_{\alpha_i(x) < \lambda} \Phi(x) (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{n}{2}} dx$$

asimtotik formülü sağlanır.

İspat. Aşağıdaki eşitlik sağlanır :

$$\text{tr} e^{-tL} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dN(\lambda). \quad (4.4.6)$$

(4.4.3) ve (4.4.4) den $t \rightarrow +0$ iken

$$\int_{\mathbb{R}^n} \text{tr} G(x, x, t) dx = F(t) + o(1)F(t) \quad (4.4.7)$$

asimtotik formülü bulunur. Burada

$$F(t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \text{tr} e^{-tQ(x)} dx \quad (4.4.8)$$

dır. Öte yandan (Kirillov, A.A, 1976) da

$$\text{tr} e^{-tL} = \int_{\mathbb{R}^n} \text{tr} G(x, x, t) dx$$

dır. Bu formülden ve (4.4.6), (4.4.7) den

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dN(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \text{tr} G(x, x, t) dx = F(t) + o(1)F(t) \quad (4.4.9)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) [\sum_{i=1}^\infty e^{-t\alpha_i(x)}] dx \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^n} \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) e^{-t\alpha_i(x)} dx \end{aligned}$$

dır. Öte yandan (Kostyuchenko, A.G., 1968) de de

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) e^{-t\alpha_i(x)} dx = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\rho_i(\lambda)$$

gösterilmiştir. Burada

$$\rho_i(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n+2}{2})} \int_{\alpha_i(x) < \lambda} \Phi(x) (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{n}{2}} dx$$

dır. Son üç eşitlikten

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\rho(\lambda) \quad (4.4.10)$$

bulunur. Burada

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n+2}{2})} \sum_i \int_{\alpha_i(x) < \lambda} \Phi(x) (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{n}{2}} dx$$

dır. (4.4.9) ve (4.4.10) dan $t \rightarrow +0$ da

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dN(\lambda) \sim \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\rho(\lambda) \quad (4.4.11)$$

elde edilir. Varsayım gereği

$$\lambda \rho'(\lambda) < a_0 \rho(\lambda)$$

olduğundan, B. İ. Korenblyum teoremine göre (4.4.11) den $\lambda \rightarrow \infty$ da

$$N(\lambda) \sim \rho(\lambda)$$

ya da

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n+2}{2})} \sum_i \int_{\alpha_i(x) < \lambda} \Phi(x) (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{n}{2}} dx$$

bulunur.

4.5. Örnek

Burada 1) – 8) koşullarını sağlayan $a_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ skaler fonksiyonlarına ve $Q(x)$ operatör fonksiyonuna bir örnek vereceğiz.

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & , & i = j & \text{ise} \\ 0 & , & i \neq j & \text{ise} \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

olsun. Bu fonksiyonların 1) – 2) koşullarını sağladıkları açıktır.

$\{e_i\}_{i=1}^\infty$ ayrılabilir H Hilbert uzayının bir ortonormal tabanı ve

$$Q(x)f = \sum_{i=1}^\infty (f, e_i) i^4 (1 + |x|^{5/4}) e_i \quad , \quad (f \in D(Q(x)))$$

şeklinde tanımlı bir operatör fonksiyon olsun. Bu $Q(x)$ operatör fonksiyonunun

3) – 8) koşullarını sağladığı gösterilebilir.

SONUÇ

Bu çalışmanın birinci bölümünde $L_2[0, \infty)$ dan $L_2[0, \infty)$ a

$$l(y) = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) - q(x)y$$

diferansiel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan L operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısının asimtotik davranışı incelenmiştir. Burada $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının pozitif oldukları ve $p(x)$ azalmayan, $q(x)$ in ise azalan olduğu kabul edilmiştir.

İkinci bölümde ise, H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere

$L_2(H; \mathbb{R}^n)$ den yine $L_2(H; \mathbb{R}^n)$ ye

$$l(u) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + Q(x)u$$

diferansiel ifadesi ile oluşturulan kendine eş L operatörünün spektrumu incelenmiş ve özdeğerlerinin sayısı için asimtotik formül bulunmuştur. Burada reel değerli $a_{ij}(x), (i, j = 1, 2, \dots, n)$ fonksiyonları

$$a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$$

ve $\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, ($\nu, \mu > 0$) koşullarını sağlıyor ve $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$) fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlıdır. Her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $D(Q(x)) \subset H$ olmak üzere $Q(x)$, $D(Q(x))$ den H a kendine eş bir operatördür. Ayrıca $\cap_{x \in \mathbb{R}^n} D(Q(x))$ kümesi H da yoğundur ve $Q(x) \geq I$, $Q^{-1}(x) \in \sigma_\infty(H)$ dir. Birinci bölümdeki çalışmanın devamı olarak H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere $L_2(H; [0, \infty))$ dan $L_2(H; [0, \infty))$ a

$l(y) = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) - Q(x)y$ diferansiel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan kendine eş L operatörünün negatif özdeğerlerinin sayısının asimtotik davranışı incelenebilir. Burada $Q(x)$ her $x \in [0, \infty)$ için H dan H a tam sürekli bir operatördür.

İkinci bölümdeki çalışmanın devamı olarak da yüksek mertebeden kısmi türevli eliptik tipteki operatör katsayılı diferansiel operatörlerin spektrumu ve özdeğerlerinin sayısının asimtotik davranışı incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Adıgüzelov,E.E, (1980),** "Operatör katsayılı Sturm-Liouville operatör probleminin spektrumunun negatif kısmının asimtotik davranışı hakkında" İzv. An Az. SSR, Seriya fiz.-tekn. i mat. nauk, No:6, 1980, 8-12 (R) *
- Aslanov,G.İ.,(1994) ,** "Hilbert uzayında sınırsız operatör katsayılı diferansiel denklemler hakkında" DAN Rosii, 1994, V. 337, No:1 (R)
- Bayramoğlu,M.,(1971),** "Operatör katsayılı adi diferansiel denklemlerin özdeğerlerinin asimtotik davranışı", Fonksiyonel Analiz ve uygulamaları, Sbornik, Bakü: Bilim, 1971, 144-166, (R)
- Cohberg,İ.C.,and Krein,M.G.,(1969),** "İntroduction to the theory of linear non-selfadjoint operators", Translation of Mathematical Monographs volume 18, Amer. Math. Sos., Providence, R.I. 1969.
- Courant,R. and Hilbert,D.,(1970),** "Methods of Mathematical Physics" vol.1 New York, 1970.
- Eydelman,S.D.,(1969),** "Parabolic Systems", North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1969.
- Glazman,I.M., (1965),** "Direct methods qualitative spectral analysis of singular differantial operators." Jerusalem , 1965.
- Hille,E.,Philips,R.S., (1957) ,** "Functional Analysis and Semi-Groups." Collog.Publ.Math.Soc., 1957
- Kirillov,A.A., (1976) ,** Elementary theory of representations, Springer verlag, New York 1976.
- Kostyuchenko,A.G., (1968),** Kendine eş eliptik tipteki operatörlerin spektral fonksiyonunun asimtotik davranışı, V kn "Çetvyontaya matem. skola" , Kiev, 1968, 42-117

* :R, kaynağın Rusça olduğunu gösteriyor.

Kostyuchenko,A.G., and Levitan,B.M., (1967) "Asymptotic Behaviour of the Eigenvalue of the Sturm-Liouville operator problem" , Funct. Analysis Appl.1 ,1967,75-83

Korenblum,B.I.,(1953) , "Fonksiyonların oranı için genel Tauber teoremleri", DAN SSSR , 88 No:5 1953, 745-748 (R)

Lysternik ,L.A., and Sobolev ,V.I., (1955), "Elements of functional analysis," (English translation). New York Fredrick Ungar 1955

Maksudov,F.G., Bairamoglu,M., Adıgüzelov,E.E., (1993), "On asymptotics of spectrum and trace of high order differential operator with operator Couefficients." Doğa Turkish Journal of mathematics, vol. 17, number 2, 1993, 113-128

Maksudov,F.G., Hüseyinov,V.G., (1978), "Yarı eksende verilmiş operatör katsayılı Sturm-Liouville denkleminin özdeğerlerinin sayısının asimtotik davranışı ", Dokl. AN Az. SSR, 1978, No:5 (R)

Naimark,M.A., (1968), "Linear differential operators ", part I, II, London, 1968

Skaçek,B.Y., (1963), "Bir boyutlu diferansiel operatörlerin spektrumunun negatif kısmının asimtotu ", Pribl. metode reşeniya differens. uravneniy, Kiev, 1963, 96-109 (R).

Smırnov,V.I., (1964), A Course of Higher Mathematics, vol.5, New York Pergamon press 1964

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hamit AVCI
Doğum Tarihi : 21.03.1942
Doğum Yeri : Adıyaman
Orta Öğretim : 1956-1962 Adıyaman Lisesi
Lisans Öğretimi : 1963-1968 Ankara Üniversitesi,
Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
Askerlik Görevi : 1968-1970
Göreve Başlama : 1970 İ.D.M.M.A de Asistan.
Halen YTÜ, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümünde öğretim üyesi
olarak görevini sürdürmektedir.

YÜCE
DOKÜMANTASYON MERKEZİ