

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER DİFERANSİYEL OYUNLAR TEORİSİNİN BAZI
PROBLEMLERİ**

-139769-

139769

İbrahim DEMİR

**F.B.E Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 16.01.2003

Tez Danışmanı

Jüri Üyeleri

: Prof. Dr. Abbas AZİMOV (Y.T. Ü.)

: Prof. Dr. Mehmet CAN (İ.T.Ü.)

: Prof. Dr. Mehmet ORYAN (İ. Ü.)

: Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU (Y. T. Ü.)

: Prof. Dr. Akın TAŞDİZEN (Y.T. Ü.)

A. Zaim

m m

Ulu

omur

Harika

İSTANBUL, 2003

**İC KÜTÜPHANE KURULU
KODUMANTAYON MERKEZİ**

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	i
TEŞEKKÜR	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
1. GİRİŞ	1
2. LİNEER DİFERANSİYEL OYUNLARDA TAKİP PROBLEMİ	11
2.1. İntegral ve Geometrik Kısıtlamalı Lineer Diferansiyel Oyunlarda bir Yöntem....	11
2.2. Örnekler.....	18
2.3. Problemin algoritmasının kurulması.....	27
2.4. İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerle Verilen bir Sınıf Takip Problemin Çözümü	32
3. EKSİK BİLGİ ALTINDA TAKİP PROBLEMİ	54
3.1. Eksik bilgi altında İntegral ve Geometrik Kısıtlamalı Lineer Diferansiyel Oyunlarda bir Yöntem	54
3.2. Bir Örnek	59
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	66
*KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	69

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1: M terminal kümesinin gösterilmesi	12
Şekil 1.2 : $\hat{T}$ değerinin gösterilmesi	24
Şekil 2.1: Eksik bilgi altında M terminal kümesinin gösterilmesi.....	54
Şekil 2.2 : Pontryagin farkı.....	56



TEŞEKKÜR

Doktora tezimi yöneten ve çalışmalarımnda maddi ve manevi yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen; her zaman yakın ilgi ve desteğini gördüğüm; hocam Sayın Prof. Dr. Abbas Azimov'a, yardımlarını esirgemeyen Bölüm başkanım Prof. Dr. Aziz Bener'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Aynı zamanda her zaman benden manevi desteğini eksik etmeyen diğer hocalarıma ebeveynime, eşime ve oğluma teşekkürlerimi sunarım.



ÖZET

Diferansiyel oyunlar, optimal kontrol ve oyunlar teorisiyle ilişkisi olan ve mühendislik, ekonomi ve özellikle savaş problemlerini inceleyen bir uygulamalı matematik alanıdır.

Bu çalışmada uyguladığımız yöntemler, L. S. Pontryagin'in diferansiyel oyunlardaki yaklaşımına dayanmaktadır. Yeni problemler çözmek için onun yöntemlerini geliştirdik.

$$\dot{z} = Az - Bu + Cv$$

şeklinde olan diferansiyel denklemin $u(t)$ ve $v(t)$ kontroller olmak üzere

$$a-) u \in P, \quad v \in Q$$

$$b-) \int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \quad \int_0^\infty \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2$$

$$c-) \int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \quad v(t) \in Q$$

üç değişik kısıtlama tiplerine sahip olsunlar. “a şıkkı” nda verilen kısıtlamadaki P ve Q birer kompakt küme, “b şıkkı” nda verilen kısıtlamalar ise integral kısıtlamalı kontrollerdir. Buradaki integral kısıtlamalar enerji kısıtlamalarını ifade etmektedir.

Takip eden nesnenin amacı, $\Pi z = 0$ eşitliğini sağlamaktır. Burada Π matristir.

Yukarıdaki “a şıkkı” nı L. S. Pontryagin çözerek diferansiyel oyun teorisinin temellerini atmıştır (Pontryagin, 1966, 1967). “b şıkkı” M. S. Nikolski (Nikolski, 1969) , A. Ya. Azimov (Azimov, 1974) ve diğer bilim adamları tarafından çözülmüştür (Krasovsky, 1970, etc.). Bu tezde L. S. Pontryagin, M. S. Nikolski ve A. Ya. Azimov tarafından verilmiş yöntemler “c şıkkı” nda ifade edilen kısıtlar için geliştirilmiştir.

“c şıkkı” nda takip eden nesnenin enerjisine kısıtlama varken takip edilen nesnenin böyle bir kısıtlaması yoktur. Bu problemi zorlaştırmaktadır. Bu yüzden “c şıkkı” nında verilen karışık kısıtlamalı kontrolleri kullanarak lineer diferansiyel oyun probleminin çözümü ile ilgilendim.

Tezimiz iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci bölümde diferansiyel oyunun terminal kümesi bir lineer uzay olarak ele alındı ve bu lineer uzayda oyunun sonlanmasını mümkün kılan koşullar incelendi. İkinci bölümde ise terminal kümesi bir silindirik küme olarak ele alındı ve bu silindirik bölgede oyunun bitirilmesinin mümkün olduğu gösterildi.

İlk bölümde konu ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verildikten sonra ilgili teoremin ispatı yapıldı. İki örnek üzerinde konu biraz daha açıklandıktan sonra

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = u$$

$$\ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_2 y = v$$

ikinci merteben diferansiyel denklemleri ile verilen bir sınıf takip problemi çözümü incelendi.

İkinci bölümde ise eksik bilgi altında lineer diferansiyel oyun incelendi. Bununla ilgili gerekli tanımlar ve teoremler verildi ve teoremin ispatı yapıldı. Bu ispatı yapılan teoremlerle ilgili olarak bir örnek çözüldü.

ABSTRACT

Differential games are an applied mathematical field in relation with optimal control and game theories, and examining engineering, economics and war problems.

The method we applied in this work bases upon L. S. Pontryagin's approach in the differential game. We developed his approach to solve new problems.

Let $u(t)$ and $v(t)$ be feasible controls in the differential equation: $\dot{z} = Az - Bu + Cv$ and

a-) $u \in P, \quad v \in Q$

b-) $\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \quad \int_0^\infty \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2$

c-) $\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \quad v(t) \in Q$

be three different constraint types.

P and Q in the constraints in "choice a" are compact sets, constraints given in "choice b" are integral constrained controls. Integral constraints in this topic mean energy restriction.

The pursuer object is to make the equation as follows :

$$\Pi z = 0, \text{ where } \Pi \text{ is matrix}$$

L. S. Pontryagin established the differential game theory by solving the "choice a" above (Pontryagin, 1966, 1967). The choice b is solved by M.S. Nikolsky (1969), A.Ya. Azimov (1974) and some other scientists. The method given by L.S. Pontryagin, M.S. Nikolsky and A. Ya. Azimov are developed for the constraints in the "choice c".

In "article c" the pursuer has an energy constraint, but evader has not. So it makes the problem more difficult to solve. For this reason I studied the solution of linear differential game by using mixed constraint controls in the given "choice c".

This thesis consists of two chapters. In chapter one, the terminal set of differential game is taken as a linear space and in this space, the conditions are searched for terminating the game. In chapter two, the terminal set is taken as a cylindrical set and in this cylindrical region it is showed that it is possible to terminate the game. Also in the first chapter, the theory is proved after fundamental definitions and theories related to the subject are given. After explaining the subject with two examples, we examined the solution of a class of pursuit problems given by a couple of quadratic differential equations as follows:

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = u,$$

$$\ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_2 y = v.$$

In the second chapter, another kind of differential game, which is a pursuit problem under incomplete information, is studied. We gave necessary definitions, theorems and their proofs, and solved examples on it.

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematiğin önemli ve gelişmeye çok müsait alanlarından biri de diferansiyel oyunlardır. Diferansiyel oyunlar, optimal kontrol, oyunlar teorisi, kısmi ve adi diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz ve varyasyon teorisi ile ilişkili bir alandır.

Diferansiyel oyunların önemli parçası takip problemleridir. Diferansiyel oyunlar teorisi başlangıçta savaş modelleri için bir araç olarak gelişti. Gerçek hayatta ise pek çok çatışma problemi ile karşı karşıyayız. Bunlardan birisi ekonomik süreçlerdir. Bu işçi işveren ilişkilerinden, ekolojik dengelerin baskısından ve çatışan süreçlerden vs. etkilenmektedir (Lewin, 1994)

Diferansiyel oyunların asıl amacı diferansiyel denklemler ile verilen hareketlerin çatışması durumlarını öğrenmektir. Bu teoriyle Rusya'da Pontryagin (1966, 1967), Krasovsky (1970), Nikolski (1969), Çikrii (1997), Friedman (1971), Azimov (1974) ve diğer bilim adamları uğraşmıştır (Boltyanskii, 1978). Amerika ve Batıda ise R. Isaacs (1965), Hajek (1975), Lee ve Markus (1972), M. Bardi (1999) ve diğer bilim adamları uğraşarak bu alana önemli katkıda bulunmuşlardır (Lewin, 1994).

Amerika'daki ekolün başını çeken R. Isaacs (1965) daha çok uygulamalı diferansiyel oyunlarla uğraşmıştır ve geometrik yaklaşımlarla çözüm yöntemine önem vermiştir. İlgilendiği diferansiyel oyunların temel yapısında;

Yavaş hareket eden fakat manevra kabiliyeti yüksek olan bir savaş uçağını, daha hızlı hareket eden fakat manevra kabiliyeti diğerine göre daha az olan bir savaş uçağının takip etmesi problemi bulunmaktadır. Aracıyla adam öldürmeye çalışan şoför problemi de aynı mantığa dayanmaktadır (Lewin, 1994).

Rusya'daki ekolün ileri gelenleri ise teorik çalışmalarda bulunmuşlardır (Pontryagin, 1969, 1967, Nikolsky 1969 etc.). Bunlardan Pontryagin (1950, 1966) optimal kontrol ile ilgilenmiş ve bu tip problemlerin çözümü için maksimum prensibi teoremini ispat etmiştir. Daha sonraları diferansiyel oyunlar teorisi ile de uğraşmıştır.

Bu çalışmada uyguladığımız yöntemler Pontryagin'in diferansiyel oyunlardaki yaklaşımına dayanmaktadır. Yeni problemler çözmek için onun yöntemleri geliştirilmiştir.

Varsayalım ki takip eden x nesnesi ve takip edilen y nesnesi aşağıdaki denklemlerle verilsin:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

$$\dot{y} = g(y, v) \quad (1.2)$$

Burada u takip eden nesnenin kontrolü, v ise takip edilen nesnenin kontrolüdür. x ve y faz değişkenleri olduğuna göre $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ şeklinde yazılabilir. x_1 ve y_1 geometrik koordinatlarıdır. Takip süreci yani, oyun

$$x_1 = y_1 \quad (1.3)$$

olduğu zaman bitmektedir. $u(t)$ ve $v(t)$ kontrolleri keyfi olmayıp bir kısıtlamaya sahiptir. Bu kısıtlamalar, P ve Q kompakt kümeler olmak üzere

$$u \in P \text{ ve } v \in Q \quad (1.4)$$

biçiminde veya

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \int_0^\infty \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2 \quad (1.5)$$

tarzında integral kısıtlamalar olabilir. (1.4) veya (1.5) kısıtlamalarını sağlayan ölçülebilir kontrollere, mümkün kontrol (feasible control) denir.

Takip eden x nesnesinin amacı $x_1(t) = y_1(t)$ eşitliğini sonlu zamanda sağlamak, takip edilen y nesnesinin amacı ise $x_1(t) \neq y_1(t)$ eşitsizliğinin her zaman gerçekleştirmektir. Takip eden x nesnesi (1.1), (1.2) denklemlerini ve (1.4) veya (1.5) kısıtlamalarını bilmekte, ayrıca her t anında, takip ettiği y nesnesi hakkında geçmişten itibaren şu ana kadar belli bir bilgiye sahip olmaktadır. Ama şu andan itibaren geleceğe ait herhangi bir bilgiye sahip değildir. Bunun için bu tip problemlere oyun denilmektedir (Ahlatçioğlu ve Tiryaki, 1998). Buradaki oyundan kasıt, klasik oyunlar teorisi değildir. Diferansiyel oyunlar teorisidir. Burada iki bağımsız karar verici olduğu için optimal kontrol teorisinden de farklılık arz eder. Çünkü optimal kontrol teorisinde sadece tek karar verici vardır.

Klasik oyun teorisini sıralı yapısı gerçek hayat problemlerinin modellenmesinde bu tip problemler için yeteri kadar uygun değildir. Çünkü zaman sürekli akmakta, karar vericilerinde stratejileri de zamana göre değişmektedir. Bu nedenle diferansiyel oyun teorisini çift kontrol problemi olarak düşünülemez. Eğer, bir oyuncunun aktif diğerinin ise aktif olmadığını kabul edersek diferansiyel oyun modeli bir optimal kontrol modele indirgenebilir. Özetlemek gerekirse diferansiyel oyunlar teorisi özel durumlarda optimal kontrol teorisinin sonuçlarını da içerir.

$z = (x, y)$ ifadesi ile (1.1) ve (1.2) denklemleri

$$\dot{z} = F(z, u, v) \quad (1.6)$$

şeklinde yazılabilir ve (1.3) eşitliği ise z faz uzayında bir M alt uzayını gösterir. M alt uzayına terminal (sonlandırma) alt uzayı denir. Buna göre $z \in M$ olduğu zaman oyun bitmiş olur.

Pontryagin, Diferansiyel oyunları, biri takip eden nesne diğeri ise takip edilen nesne olmak üzere iki açıdan incelemiştir (Pontryagin, 1966).

Takip eden nesne açısından baktığımızda

Eğer (1.4) - (1.6) diferansiyel oyununda z_0 başlangıç noktası için öyle $T(z_0)$ sonlu zamanı varsa ki, her keyfi mümkün $v(\cdot)$ kontrolü için öyle mümkün $u(\cdot)$ kontrolü kurulabilirse (1.6) denkleminde bu $u(t)$ ve $v(t)$ kontrollerine uygun $z(t)$ yörüngesi M alt uzayına gelirse, (1.4) – (1.6) diferansiyel oyununda z_0 başlangıç noktasından $T(z_0)$ zamanında oyunun bitirmek mümkündür.

Yani takip eden nesne (1.6) denklemini, (1.4) veya (1.5) kısıtlarını bilir ve ayrıca her t anında $s \leq t$ için $z(s)$ ve $v(s)$ hakkında bilgi sahibidir.

Takip eden nesne açısından baktığımızda aşağıdaki problemler karşımıza çıkıyor:

- 1- Faz uzayının hangi z_0 başlangıç noktalarından oyun sonlu zamanda bitirebilir?
- 2- Oyunu sonlu zamanda bitirebilmesi için $u(\cdot)$ stratejisini nasıl kurmalıdır?
- 3- $T(z_0)$ sonlu zamanı ne olmalıdır?

Takip edilen nesne açısından baktığımızda

Farz edelim ki takip edilen nesne (1.6) denklemini (1.4) veya (1.5) kısıtlamasını ve her t anında $s \leq t$ için $z(s)$ ve $u(s)$ kontrolü hakkında bilgi sahibidir. Takip edilen nesne verilmiş z_0 başlangıç noktası ve her $u(t)$ kontrolü için öyle $v(t)$ kontrolü bulunmalıdır ki uygun $z(t)$ yörüngesi her $t \geq 0$ için M terminal kümesinin dışında kalsın. Yani her $t \geq 0$ için $z(t) \notin M$ olsun.

Bu tez de birinci problemi -yani takip eden nesne açısından oluşan problem- inceleyeceğiz. Birinci problemin çözümüne ait temel çözümleri ve yöntemleri Pontryagin (1966,1967)

vermiştir. Bu temel yöntemlerle hangi z_0 başlangıç noktasından oyunu bitirmenin mümkün olması, $T(z_0)$ anının hesaplanması ve $u(t)$ stratejisinin belirlenmesi sorularını çözmüştür.

Krasovski (1970) diferansiyel oyunlar teorisine başka bir yaklaşım yöntemi getirmiştir .

Bu tezimizde takip eden x nesnesinin $u(t)$ kontrolü integral kısıtlamalı, takip edilen nesnenin $v(t)$ kontrolü ise geometrik kısıtlamalıdır.

$$\int_0^{\infty} \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \quad v(t) \in Q \quad (1.7)$$

Pratik uygulamalarda integral kısıtlamalar enerji sınırlamalarını göstermektedir. (1.5)'deki gibi her iki kısıt integral kısıt olduğu zaman, her iki nesne de enerjisinin tükenip tükenmediğini kontrol etmek zorundadır. (1.7) kısıtlamalı uğraştığımız diferansiyel oyunda ise takip eden nesne, enerjisinin tükenip tükenmediğini kontrol etmekte takip edilen nesnenin ise böyle bir problemi bulunmamaktadır. Bu incelediğimiz problemi zorlaştırmaktadır.

Bu araştırmada

$$\dot{z} = Az - Bu + Cv \quad (1.8)$$

lineer diferansiyel oyunu (7) kısıtlamaları dahilinde incelendi ve (Azimov, 1974)'deki yöntemler bu diferansiyel oyun problemini incelemek için geliştirildi.

Tezimiz iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci bölümde diferansiyel oyunun terminal kümesi bir lineer uzay olarak ele alındı ve bu lineer uzayda oyunun sonlanmasını mümkün kılan koşullar incelendi. İkinci bölümde ise terminal kümesi bir silindirik küme olarak ele alındı ve bu silindirik bölgede oyunun bitirilmesinin mümkün olduğu gösterildi.

İlk bölümde konu ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verildikten sonra bu teoremlerin ispatı yapıldı. İki örnek üzerinde konu biraz daha açıklandıktan sonra

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = u \quad (1.9)$$

$$\ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_2 y = v \quad (1.10)$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemleri ile verilen bir sınıf takip probleminin çözümleri $k(r) = r$ özel hali için incelenmiştir.

İkinci bölümde ise eksik bilgi altında takip problemi incelendi. Terminal kümesi bir silindirik küme olarak ele alındı ve bu silindirik bölgede oyunun bitirilmesinin mümkün olduğu

gösterildi. Bununla ilgili gerekli tanımlar ve teorem verilmiş ve teoremin ispatı yapılmıştır. Bu teoremle ilgili olarak bir örnek çözülmüştür.

Şimdi birinci bölümde kullandığımız tanım ve teoremleri kısaca yazalım:

Tanım 1.1: (1.7)'deki kısıtlamalarını sağlayan kuadratik, integrallenebilen $u(t)$ ve $v(t)$ ölçülebilir kontrollerine, mümkün kontroller denir.

Tanım 1.2 : Takip eden nesne her geçerli zaman aralığında kontrolünü $u(t) = U(t, z(s), v(s); s \leq t)$ formunda kurmaktadır. $v(t) = V[t, z(s), u(s), s \leq t]$ ise takip edilen nesnenin stratejisidir (Chikrii, 1997).

Tanım 1.3 : Eğer $z_0 \notin M$ başlangıç noktaları için öyle bir $T(z_0) > 0$ zamanı mevcut ve her keyfi mümkün $v(\cdot)$ kontrolü için öyle mümkün $u(\cdot)$ kontrolü kurulabilirse, $\dot{z}(t) = Az(t) - Bu(t) + Cv(t)$ diferansiyel denkleminde bu $u(\cdot)$ ve $v(\cdot)$ kontrollerine uygun $z(t)$ yörüngesi M 'e gelir, yani $z(t_1) \in M$ olursa, oyunu z_0 noktasından $t_1 \leq T(z_0)$ sonlu zamanda bitirmek mümkündür denir.

Tanım 1.4 : $I(t)$ bir sayı olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$I^2(t) = \sup \left\{ \int_0^t \|F(r)v(k(t) - k(r))\dot{k}(r)\|^2 dr \mid v(r) \in Q, r \in [0, k(t)] \right\}$$

Tanım 1.5 : $G(t)$, konveks, L_2 uzayında kompakt altkümedir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$G(t) = \left\{ \int_0^t \Pi e^{(t-s)A} B w(s) ds \mid \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq (\tilde{\rho} - I(t))^2 \right\}$$

Tanım 1.6 : ρ , $u(t)$ stratejisinin üsten kısıtlamasıdır. $\tilde{\rho}$ ise, $u(t)$ stratejisinin T_0 zamanına kadar harcanan enerjiden kalan enerjidir.

(1.7) – (1.8) diferansiyel oyununda z_0 başlangıç noktasından çıkarak oyunu sonlu zamanda bitirmek için aşağıdaki varsayımlar kurulmuştur.

Varsayım 1.1: $k(0) = 0$, $\forall r \in [0, \infty)$ için $k(r) \geq r$ koşulunu sağlayan, $[0, \infty)$ da tanımlanan sürekli diferensiyellenebilen, monoton artan öyle bir gerçel $k(r)$ fonksiyonu vardır ki;

$$\Pi e^{k(r)A} C = \Pi e^{rA} B F(r)$$

faktörizasyonunu sağlayan r 'nin sürekli fonksiyonu olan $F(r):R^n \rightarrow R^p$ lineer operatörü mevcut olur.

Varsayım 1.2: Bir $\hat{T} > 0$ için $\forall t \in [0, \hat{T}]$ olmak üzere $\tilde{\rho} \geq I(t)$ olsun

Teorem 1.1: Varsayım 1 varsayım 2 in doğru olduğunu kabul edelim

$$\int_0^{T_0} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} B \tilde{u}(s) ds \in \Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 - G(t_1)$$

sağlayan öyle bir $t_1 \in [0, \hat{T}]$ vardır. Yani z_0 noktasından başlayarak oyunu $(0, T_0 + t_1]$ zaman aralığında bitmesi mümkündür.

Aşağıdaki problemin çözümünde Teorem 1.1'i uygularken Varsayım 1.1'deki $k(r) = r$ olduğunu gördük. Bunun için Teorem 1, $k(r) = r$ hali için aşağıdaki gibi olacaktır.

Varsayım 1.3 : $\forall r \geq 0$ için

$$\Pi e^{k(r)A} C = \Pi e^{rA} B F(r)$$

faktörizasyonunu sağlayan r nin sürekli fonksiyonu olan $F(r):R^n \rightarrow R^p$ lineer operatörü mevcut olur.

Tanım 1.7 : $I(t)$ bir sayı olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$I^2(t) = \sup \left\{ \int_0^t \|F(r)v(r)\|^2 dr \mid v(r) \in Q, \quad r \in [0, t] \right\}$$

Tanım 1.8 : $G(t)$, konveks, L_2 uzayında kompakt altkümedir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$G(t) = \left\{ \int_0^t \Pi e^{(t-s)A} B w(s) ds \mid \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq (\rho - I(t))^2 \right\}$$

Varsayım 1.4: Bir $\hat{T} > 0$ için $\forall t \in [0, \hat{T}]$ olmak üzere $\rho \geq I(t)$ olsun

Teorem 1.2: Varsayım 3 ve varsayım 4'ün doğru olduğunu kabul edelim

$$\Pi e^{t_1 A} z_0 \in G(t_1), \quad t_1 \leq \hat{T}$$

doğru olsun. O halde Oyunu, z_0 noktasından $(0, t_1]$ zaman diliminde bitirmek mümkündür.

$k(r) = r$ diğer teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.3: $\ddot{\xi} + a_1\dot{\xi} + a_2\xi = 0$ ve $\ddot{\eta} + b_1\dot{\eta} + b_2\eta = 0$ skaler diferansiyel denklemin karakteristik denklemlerinin kökleri $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2$, gerçel ve birbirinden farklı kökleri olsun. Buna göre

1. $\lambda_1 < \lambda_2$,
2. $\gamma_1 < \gamma_2 < \lambda_2 < 0$,
3. $\rho > \frac{\sigma\delta}{\sqrt{2(\lambda_2 - \gamma_2)}}$

koşulları sağlanıyorsa $\forall (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ başlangıç noktasından $x_0 \neq y_0$ için oyunu bitirmek mümkündür.

Teorem 1.4: $\ddot{\xi} + a_1\dot{\xi} + a_2\xi = 0$ skaler diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin kökü $\alpha_1 \pm i\beta_1$ olsun $\ddot{\eta} + b_1\dot{\eta} + b_2\eta = 0$ skaler diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin kökü $\alpha_2 \pm i\beta_2$ olsun. Buna göre

1. $\beta_2 = k\beta_1$, $k = 1, 2, 3, \dots$
2. $\alpha_2 < \alpha_1$
3. $\rho > \frac{\sigma^2}{\sqrt{2(\alpha_1 - \alpha_2)}}$
4. $\alpha_1 \leq 0$

koşulları sağlanıyorsa $\forall (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ başlangıç noktasından $x_0 \neq y_0$ için oyunu bitirmek mümkündür.

Teorem 1.5: $\ddot{\xi} + a_1\dot{\xi} + a_2\xi = 0$ ve $\ddot{\eta} + b_1\dot{\eta} + b_2\eta = 0$ skaler diferansiyel denklemlerinin karakteristik denklemlerinin kökleri sırasıyla λ, γ , gerçel iki kat kökleri olsun. Buna göre

1. $\gamma < \lambda < 0$,
2. $\rho > \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma)}}$

koşulları sağlanıyorsa $\forall (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ başlangıç noktasından $x_0 \neq y_0$ için oyunu bitirmek mümkündür.

Teorem 1.6: $\ddot{\xi} + a_1\dot{\xi} + a_2\xi = 0$ ve $\ddot{\eta} + b_1\dot{\eta} + b_2\eta = 0$ skaler diferansiyel denklemlerinin karakteristik denklemlerinin kökleri sırasıyla λ iki kat kökü ve $\alpha + i\beta$ karmaşık kökü olsun. Buna göre

1. $\alpha < \lambda < 0$,
2. $\rho > \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \alpha)}}$,

koşulları sağlamıyorsa $\forall (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ başlangıç noktasından $x_0 \neq y_0$ için oyunu bitirmek mümkündür.

Teorem 1.7: $\ddot{\xi} + a_1\dot{\xi} + a_2\xi = 0$ skaler diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin λ iki kat kökü olsun ve $\ddot{\eta} + b_1\dot{\eta} + b_2\eta = 0$ skaler diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin farklı γ_1 ve γ_2 gerçel kökü olsun. Buna göre

1. $\gamma_2 < \lambda < 0$,
2. $\gamma_1 < \gamma_2$,
3. $\rho > \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma_2)}}$

koşulları sağlamıyorsa $\forall (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ başlangıç noktasından $x_0 \neq y_0$ için oyunu bitirmek mümkündür.

İkinci bölümde terminal küme bir silindir küme olarak ele alındı ve bu silindir bölgede oyunun bitirilmesinin mümkün olduğu gösterildi.

Şimdi ikinci bölümde kullandığımız tanım ve teoremleri kısaca yazalım:

Tanım 1.9: $z_0 \notin M$ başlangıç noktası için öyle bir $T(z_0) > 0$ zamanı var ve her keyfi mümkün $v(\cdot)$ kontrolü için öyle mümkün $u(\cdot)$ kontrolü kurulabilirse, (1.8) diferansiyel denkleminin, $z(t)$ yörüngesi $t_1 \leq T(z_0)$ anında $z(t_1) \in M$ olursa, oyunu z_0 noktasından sonlu zamanda bitirmek mümkündür denir.

Burada takip eden oyuncusu her $t \in [t_0, T]$ için bildiği $\{v(s) | s \in [\tau(t_0), \tau(t)]\}$ dir. Burada T ve t_0 verilmiştir. her $t \geq t_0$ için $\tau(t)$ fonksiyonu verilmiş sürekli ve diferansiyellenebilen monoton artan ve $\tau(t_0) \geq 0$, $\tau(t) \leq t$ dir. $\tau(t)$ fonksiyonu ve t_0 zamanı, takip eden tarafından

bilinmektedir. Demek ki takip eden $[0, t_0]$ zaman aralığında $v(s)$ hakkında hiçbir şey bilmiyor t_0 anından sonra her t anında $v(s)$ hakkında $t - \tau(t)$ gecikmesi ile bilgi sahibi oluyor. $u^*(t), [0, t_0]$ zamanında takipçinin kontrolü olsun. Buna göre

$$\int_0^{t_0} \|u^*(t)\|^2 dt \leq \rho^2 \text{ olmalıdır.}$$

Tanım 1.10 : $l(t)$ bir sayı olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$l^2(t) = \sup_{\substack{v(s) \in Q \\ s \in [0, t]}} \int_{t_0}^t \|F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)\|^2 ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Tanım 1.11 : $H(t, t_0)$ ve $G(t)$ kümeleri kompakt kümelerdir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$H(t, t_0) = \left\{ \int_0^{\tau(t_0)} \Pi e^{(t-s)A} C v(s) ds + \int_{\tau(t)}^t \Pi e^{(t-s)A} C v(s) ds \mid v(s) \in Q, s \in [0, t] \right\}$$

$$G(t) = \left\{ \int_{t_0}^t \Pi e^{(t-s)A} B w(s) ds \mid \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq (\tilde{\rho} - l(t))^2 \right\}$$

Varsayım 1.5: Öyle sürekli operatör fonksiyonu $F(s): R^q \rightarrow R^p$ var ki

$$\Pi e^{(t_1 - \tau(s))A} C = \Pi e^{(t_1 - s)A} B F(s), \quad s \in [t_0, t_1],$$

dir.

Varsayım 1.6: Her $t: t_0 \leq t \leq t_1$ için $\tilde{\rho} \geq l(t)$ olsun,

Tanım 1.12 $P \subset R^n, Q \subset R^n$ kümeleri verilsin. Buna göre Pontryagin farkı $P \ast Q = \{x \in R^n \mid x + Q \subset P\}$ şeklindedir.

Varsayım 1.7:

$$M_0 \ast H(t, t_0) \neq \emptyset, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

dir.

Varsayım 1.8: Aşağıdaki koşul sağlansın:

$$\Pi e^{t_1 A} \left(z_0 - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u^*(s) ds \right) \in G(t_1) + (M_0 \oplus H(t_1, t_0))$$

Teorem 1.8: Varsayım 5 ile varsayım 8 sağlandığı takdirde $z_0 \notin M$ başlangıç noktasından başlayan oyun $t = t_1$ anında biter.

Teorem 1.9: Takip eden oyuncunun hareketi $\dot{x} + \alpha x = u$, takip edilen oyuncunun hareketi ise $\dot{y} + \beta y = v$ ile verilsin. $\varepsilon > 0$ bir sayı olarak verilmiştir. Buna göre

$$1) \frac{\beta}{2} < \alpha < \beta$$

$$2) \rho > \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{1}{2\alpha - \beta}}$$

$$3) \varepsilon \geq \frac{\sqrt{2}\sigma}{\beta}$$

koşulları sağlandığı takdirde her $z_0 = [z_{01}, z_{02}] : \|z_{01} - z_{02}\| > \varepsilon$ noktasından başlayan oyunun bitmesi mümkündür.

2. LİNEER DİFERANSİYEL OYUNLARDA TAKİP PROBLEMİ

2.2. İntegral Ve Geometrik Kısıtlamalı Lineer Diferansiyel Oyunlar

Diferansiyel oyunlar uygulamalı matematiğin önemli alanlarından biridir. Burada aşağıdaki lineer diferansiyel oyunları inceledik. $z \in R^n$ 'in hareketi

$$\dot{z} = Az - Bu + Cv \quad (2.1)$$

denklemleri ile verilmiştir. z faz vektörü sonlu boyutlu R^n Oclid uzayının elemanıdır. $u \in R^p$, $v \in Q \subset R^q$, Q -kompakt bir kümedir. A , $n \times n$ boyutlu verilmiş kare matris, B $p \times n$, C $q \times n$ boyutlu verilmiş matrislerdir. Farz edelim ki $M \neq R^n$, $M \subset R^n$ alt uzayı verilmiştir (Chikrii, 1997).

Takip eden nesne $u(t)$ kontrolü yardımı ile $z(t)$ yörüngesini $z_0 \notin M$ başlangıç noktasından sonlu zamanda M alt uzayına getirmek istemekte, $z(t) \in M$, takip edilen nesne ise $v(t)$ kontrolü kullanarak bu isteğe engel olmak istemektedir: $z(t) \notin M$, $\forall t \geq 0$ için. $u(t)$ ve $v(t)$ kontrolleri

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \quad v(t) \in Q \quad (2.2)$$

sırasıyla integral ve geometrik kısıtlamaları sağlamaktadır. Burada $\rho > 0$ bir parametre, $Q \subset R^q$ kompakt bir alt kümedir. $u(t) \in L_2[0, \infty)$ karesi integrallenebilen fonksiyonlar sınıfındandır. $v(t)$ kontrolü ise ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar sınıfındandır (Gok, 1997). Buradaki kısıtlamaları açıklayacak olursak Takip eden nesnenin $u(t)$ kontrolü enerji ifade etmekte olup sınırlı bir enerjiye sahiptir. Takip edilen nesnenin $v(t)$ kontrolünün ise integral kısıtlaması yoktur ve bir kompakt alan içinde hareket etmektedir. Bu ise problemin çözümünü zorlaştırmaktadır.

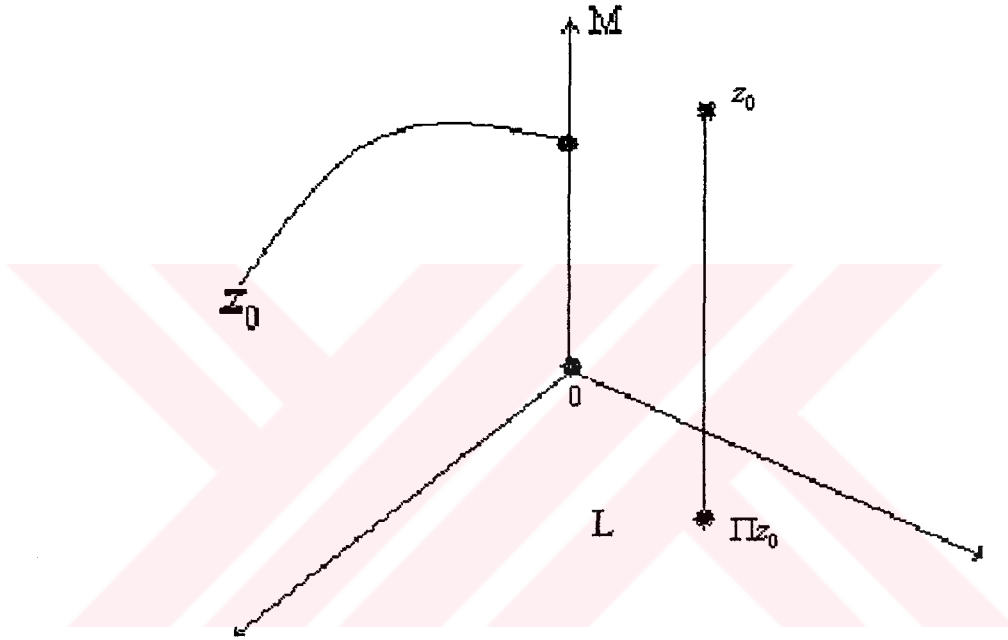
Tanım 2.1: (2.2)'deki kısıtlamalarını sağlayan $u(t)$ ve $v(t)$ ölçülebilir kontrollerine mümkün kontrol denir.

Tanım 2.2 : Takip eden nesne her geçerli zaman aralığında kontrolünü $u(t) = U(t, z(s), v(s); s \leq t)$ formunda kurmaktadır. $v(t) = V[t, z(s), u(s), s \leq t]$ ise takip edilen nesnenin stratejisidir (Pontryagin, 1967).

Bundan sonraki ifadelerde $u(t)$ stratejisini u , $v(t)$ stratejisini de v olarak kullanacağız.

Takip eden nesneye birinci oyuncu veya takip eden oyuncu, Aynı şekilde takip edilen nesneye ikinci oyuncu veya takip edilen oyuncu deyeceğiz ve kullanacağız.

Tanım 2.3 : Eğer $z_0 \notin M$ başlangıç noktaları için öyle bir $T(z_0) > 0$ zamanı mevcut ve her keyfi mümkün $v(\cdot)$ kontrolü için öyle mümkün $u(\cdot)$ kontrolü kurulabilirse, $\dot{z}(t) = Az(t) - Bu(t) + Cv(t)$ diferansiyel denkleminde bu $u(\cdot)$ ve $v(\cdot)$ kontrollerine uygun $z(t)$ yörüngesi M 'e gelir, yani $z(t_1) \in M$ olursa, oyunu z_0 noktasından $t_1 \leq T(z_0)$ sonlu zamanda bitirmek mümkündür denir. (Şekil 1.1)



Şekil 1.1: M terminal kümesinin gösterilmesi

Bu tanımla ilgili olarak aşağıdaki problemler incelenmiştir.

- 1) Hangi $z_0 \notin M$ başlangıç noktasından oyunun bitirilmesi mümkündür?
- 2) Oyunu bitiren $u(t)$ stratejisi nasıl kurulabilir?
- 3) $T(z_0) > 0$ zamanı mevcut mu?

Takip eden oyuncu $\forall t$ anında u kontrolü kurmak için $s \leq t$ olduğu zaman $z(s)$, $v(s)$ bilgisinden istifade etmektedir. Fakat takip eden oyuncu $s > t$ olduğu zaman $z(t)$, $v(t)$ hakkında herhangi bir bilgi sahibi değildir.

Bu problemi çözmek için Pontryagin (1966, 1967) de $u \in P$, $v \in Q$, P , Q kompakt kümeler oldukları zaman çözüm yöntemi vermiştir. Daha sonra Nikolsky (1969) ve Azimov (1974), Pontryagin düşüncelerinden istifade ederek

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \quad \int_0^\infty \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2$$

için yukarıda (2.1)'de verilen problemi çözmüşlerdir.

L , M alt uzayının R^n de ortogonal tamamlayıcı alt uzayı olsun. $\Pi: R^n \rightarrow L$ ise ortogonal izdüşüm operatörü olsun. O halde $t = t_1$ anında oyunun bitmiş olması $\Pi z(t_1) = 0$ denkleğinin sağlanması demektir.

Varsayım 2.1: $k(0) = 0$, $\forall r \in [0, \infty)$ için $k(r) \geq r$ koşulunu sağlayan, $[0, \infty)$ 'da tanımlanan sürekli diferensiyellenebilen, monoton artan öyle gerçel $k(r)$ fonksiyonu vardır ki

$$\Pi e^{k(r)A} C = \Pi e^{rA} B \cdot F(r) \quad (2.3)$$

faktörizasyonu sağlayan r 'nin sürekli fonksiyonu olan $F(r): R^n \rightarrow R^p$ lineer operatörü vardır.

$v(s) \in Q$, $s \in [0, k(t)]$ 'da mümkün kontrol olsun ve Q kompakt bir küme ve $F(r)$ sürekli fonksiyon olduğuna göre

$$\int_0^t \|F(r)v(k(t) - k(r))\dot{k}(r)\|^2 dr \leq N(t) \quad (2.4)$$

olacak şekilde öyle bir $N(t) > 0$ vardır.

$I^2(t)$ sayısını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$I^2(t) = \sup \left\{ \int_0^t \|F(r)v(k(t) - k(r))\dot{k}(r)\|^2 dr \mid v(r) \in Q, \quad r \in [0, k(t)] \right\} \quad (2.5)$$

Yukarıdaki (2.4) ve (2.5) ifadelerinden $I^2(t) \leq N(t)$ elde edilir

$k(t_1) = T_0 + t_1$ eşitliğini sağlayan $T_0 \geq 0$, $t_1 \geq 0$, sayılarını göz önüne alalım ve $\tilde{u}(s)$, $[0, T_0]$ 'da verilmiş ve (2.2)'deki integral kısıdını sağlayan bir mümkün kontrol olsun. Buna göre

$$\tilde{\rho}^2 = \rho^2 - \int_0^{T_0} \|\tilde{u}(s)\|^2 ds \quad (2.6)$$

dir

Varsayım 2.2: Bir $\hat{T} > 0$ için $\forall t \in [0, \hat{T}]$ olmak üzere $\tilde{\rho} \geq l(t)$ olsun

$$G(t) = \left\{ \int_0^t \Pi e^{(t-s)A} B w(s) ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq (\tilde{\rho} - l(t))^2 \right. \right\} \quad (2.7)$$

kümesini göz önüne alalım.

$G(t)$ nin konveks bir küme olduğu aşıkardır ve L_2 uzayında kürenin zayıf -kompakt olması hakkındaki teoremden çıkıyor ki $G(t)$, $\forall t \in [0, \hat{T}]$ için L alt uzayında kompakt altkümedir. Buna göre aşağıdaki teoremi ispat edelim.

Teorem 2.1: Varsayım 2.1 ve varsayım 2.2'in var olduğunu kabul edelim, ve

$$\int_0^{T_0} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} B \tilde{u}(s) ds \in \Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 - G(t_1) \quad (2.8)$$

ifadesini sağlayan bir $t_1 \in [0, \hat{T}]$ vardır. O halde oyun, z_0 noktasından başlayarak $(0, T_0 + t_1]$ zaman aralığında bitmesi mümkündür.

• **İspat:** (2.7) ve (2.8) deki ifadelerden $s \in [0, t_1]$ aralığında verilen öyle $\tilde{w}(s)$ vardır ki

$$\int_0^{t_1} \|\tilde{w}(s)\|^2 ds \leq (\tilde{\rho} - l(t_1))^2 \quad (2.9)$$

$$\int_0^{T_0} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} B \tilde{u}(s) ds = \Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 - \int_0^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B \tilde{w}(s) ds \quad (2.10)$$

yukarıdaki ifadeler sağlanır. $(0, T_0 + t_1]$ aralığında $u(s)$ kontrolünü aşağıdaki gibi kuralım.

$$u(s) = \begin{cases} \tilde{u}(s) & , s \in [0, T_0] \text{ ise} \\ F(t_1 + T_0 - s) v(k(t_1) - k(t_1 + T_0 - s)) \dot{k}(t_1 + T_0 - s) + w(s - T_0) & , s \in [T_0, T_0 + t_1] \text{ ise} \end{cases} \quad (2.11)$$

Bu kontrolün $(0, T_0 + t_1]$ 'da mümkün olduğunu gösterelim. Yani

$$\int_0^{T_0+t_1} \|u(s)\|^2 ds = \int_0^{T_0} \|u(s)\|^2 ds + \int_{T_0}^{T_0+t_1} \|u(s)\|^2 ds \quad (2.12)$$

dir. $s \in [0, T_0]$ için $u(s) = \tilde{u}(s)$, olduğuna göre ve (2.6)'deki ifadeyi dikkate alarak yukarıdaki ifadeyi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\int_0^{T_0+t_1} \|u(s)\|^2 ds = \int_0^{T_0} \|u(s)\|^2 ds + \int_{T_0}^{T_0+t_1} \|u(s)\|^2 ds = \rho^2 - \tilde{\rho}^2 + \int_{T_0}^{T_0+t_1} \|u(s)\|^2 ds \quad (2.13)$$

$u(s)$ fonksiyonunu $[T_0, T_0+t_1]$ zaman aralığında (2.11)'da verilmiş ifadesini dikkate alarak ve (2.12)'deki denklemin sağ tarafındaki son ifadenin karekökünü aldığımızda Chauchy - Minkowski eşitsizliğinden aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_{T_0}^{T_0+t_1} \|u(s)\|^2 ds} &\leq \sqrt{\int_{T_0}^{T_0+t_1} \|F(t_1+T_0-s)v(k(t_1)-k(t_1+T_0-s))\dot{k}(t_1+T_0-s)\|^2 ds} \\ &\quad + \sqrt{\int_{T_0}^{T_0+t_1} \|\tilde{w}(s-T_0)\|^2 ds} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki terimlere $s = \tau + T_0$, $\tau \in [0, t_1]$ dönüşüm yaptığınız zaman

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_{T_0}^{T_0+t_1} \|F(t_1+T_0-s)v(k(t_1)-k(t_1+T_0-s))\dot{k}(t_1+T_0-s)\|^2 ds} \\ = \sqrt{\int_0^{t_1} \|F(t_1-\tau)v(k(t_1)-k(t_1-\tau))\dot{k}(t_1-\tau)\|^2 d\tau} \end{aligned}$$

dır. Son denklemi ve (2.5)'deki denklemi dikkate aldığımız zaman

$$\sqrt{\int_{T_0}^{T_0+t_1} \|F(t_1+T_0-s)v(k(t_1)-k(t_1+T_0-s))\dot{k}(t_1+T_0-s)\|^2 ds} \leq l(t_1)$$

olur. $s = \tau + T_0$ dönüşümünden istifade ederek ve (2.9)'deki ifadeyi de kullanarak

$$\sqrt{\int_{T_0}^{T_0+t_1} \|\tilde{w}(s-T_0)\|^2 ds} = \sqrt{\int_0^{t_1} \|\tilde{w}(\tau)\|^2 d\tau} \leq (\tilde{\rho} - l(t_1))$$

elde edilir. Bulduğumuz bu değerleri, (2.5) ve (2.9)'deki ifadeleri dikkate alarak ve (2.14)'deki ifade de yerine yazarsak,

$$\sqrt{\int_{T_0}^{T_0+t_1} \|u(s)\|^2 ds} \leq l(t_1) + \tilde{\rho} - l(t_1) = \tilde{\rho}$$

sonucunu elde ederiz. (2.13) denkleminde yerine koyarsak,

$$\int_0^{T_0+t_1} \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2 - \tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 = \rho^2$$

sonucunu elde ederiz. Bu ise (2.11)'da kurulmuş olan $u(s)$ kontrolünün $(0, T_0 + t_1]$ aralığında mümkün olduğunu göstermiş olur. Varsayalım ki $(0, T_0 + t_1]$ aralığında rakip oyuncunun $v(s)$ mümkün kontrolü verilsin. Yani her $s \in [0, T_0 + t_1]$ aralığında $v(s) \in Q$ kontrolü ölçülebilir olsun. Bu aralıkta $u(s)$ kontrolünün de (2.11)'da kurulmuş olduğunu varsayalım. Bu iki fonksiyonu (2.1)'de yerine konulursa uygun $z(t)$ yörüngesinin L alt uzayındaki ortogonal izdüşümü olan $\Pi z(t_1)$ 'yı Cauchy formuna göre aşağıdaki gibi yazılır.

$$\Pi z(T_0 + t_1) = \Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 - \int_0^{T_0+t_1} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} B u(s) ds + \int_0^{T_0+t_1} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} v(s) ds \quad (2.15)$$

(2.15)'deki ifadenin sağ tarafındaki birinci integrali T_0 noktasında ikiye ayırarak iki farklı integral yazdığımızda, 0 ila T_0 arasındaki integrali için (2.11)'deki $u(s) = \tilde{u}(s)$ eşitliğini dikkate alıp yerine koyduğumuz zaman aşağıdaki gibi olur.

$$\int_0^{T_0+t_1} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} B u(s) ds = \int_0^{T_0} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} B \tilde{u}(s) ds + \int_{T_0}^{T_0+t_1} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} B u(s) ds \quad (2.16)$$

Burada $s = T_0 + \tau$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_{T_0}^{T_0+t_1} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} B u(s) ds = \int_0^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B u(T_0 + s) ds \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.15)'deki ikinci integral ise $s = k(t_1) - k(t_1 - \tau)$ dönüşümü uygularsak

$$\int_0^{T_0+t_1} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} v(s) ds = \int_0^{t_1} \Pi e^{k(t_1-s)A} v(k(t_1) - k(t_1 - s)) k'(t_1 - s) ds \quad (2.18)$$

elde edilir. Burada ve $k(t_1) = T_0 + t_1$ dönüşümü ile (2.16), (2.17) ve (2.18) ifadelerini dikkate alarak (2.15) nolu denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \Pi z(T_0 + t_1) &= \Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 - \int_0^{T_0} \Pi e^{(T_0+t_1-s)A} B \tilde{u}(s) ds - \int_0^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B u(T_0 + s) ds \\ &\quad + \int_0^{t_1} \Pi e^{k(t_1-s)A} v(k(t_1) - k(t_1 - s)) \dot{k}(t_1 - s) ds \end{aligned}$$

olur. (2.12) ve varsayım (2.1)'den yararlanarak yukarıdaki ifadeyi yeniden düzenlediğimizde ise

$$\begin{aligned} \Pi z(T_0 + t_1) &= \int_0^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B \tilde{w}(s) ds - \int_0^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B u(T_0 + s) ds \\ &\quad + \int_0^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B F(t_1 - s) v(k(t_1) - k(t_1 - s)) \dot{k}(t_1 - s) ds \\ &= \int_0^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B \tilde{w}(s) ds - \int_0^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B \left[u(T_0 + s) - F(t_1 - s) v(k(t_1) - k(t_1 - s)) \dot{k}(t_1 - s) \right] ds \end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki denkleme (2.11)'deki ifade ile kurulmuş olan $u(s)$ kontrolünün $[T_0, T_0 + t_1]$ zamanındaki karşılığını alıp yerine koyarsak;

$$\begin{aligned} &= \int_0^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B \tilde{w}(s) ds - \int_0^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B \tilde{w}(s) ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece ispatı göstermiş oluruz. Yani $\Pi z(T_0 + t_1)$, M terminal kümesine dahil olur. Sonuç olarak ikinci oyuncunun her mümkün $v(s)$ kontrolüne karşı takip eden birinci oyuncunun (2.11)'de öyle bir $u(s)$ kontrolü kurulur ki z_0 başlangıç noktası en geç $T_0 + t_1$ zamanında M alt uzayına gelir.

2.2 Örnekler :

Örnek 2.1 : Yukarıda ispatını yaptığımız teoremi bir örneğin çözümüne uygulayalım. Varsayalım ki takip eden oyuncunun hareketi

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = u \tag{2.19}$$

olsun. Takip edilen oyuncunun hareketi ise

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} = v \quad (2.20)$$

ile verilsin. $\alpha > 0, \beta > 0$ sürtünme katsayısı olup birer skaler sayı, $x, y, u, v \in R^k$ vektörler ve $k \geq 1$ ise bir tam sayıdır. $u(t)$, $v(t)$ kontrolleri ölçülebilir ve aşağıdaki koşulları sağlayan kontrol fonksiyonlarıdır.

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt \leq \rho^2, \quad \|v(t)\| \leq \sigma \quad (2.21)$$

ayrıca her biri sırasıyla integral ve geometrik kısıtlardır. Eğer t_1 anında

$$x(t_1) = y(t_1), \quad \dot{x}(t_1) = \dot{y}(t_1) \quad (2.22)$$

eşitlikleri var ise oyun biter. Her iki kısıtlama integral kısıtlama olduğu zaman $x(t_1) = y(t_1)$ halini Nikolsky (1969) tarafından, (2.22) hali ise Azimov (1974) tarafından çözülmüştür. Burada takip eden oyuncu (2.22)'deki eşitliklerin gerçekleşmesini istemekte ama takip edilen oyuncu ise bu durumun gerçekleşmesini engellemeye çalışmaktadır. Takip eden oyuncusu her $t \geq 0$ anında $x(s), \dot{x}(s), y(s), \dot{y}(s)$ vektörlerini ve $v(s)$ kontrolünü $s \leq t$ zamanında bilmektedir.

Başlangıç koşulları $(x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ ve $\alpha, \beta, \rho, \sigma$ parametreleri hangi koşulları sağlamalıdır ki t_1 zamanında oyun bu başlangıç noktasından bitsin yani (2.22)'deki ifade gerçekleşsin.

Bu problemi çözmek için baş taraftaki teoremi uygulayacağız. (2.19), (2.20) ve (2.21) ile verilen takip problemini diferansiyel oyun halinde yazmak gerekecektir. Bu durumda $x = z_1$, $\dot{x} = z_2$, $y = z_3$, $\dot{y} = z_4$ şeklinde yazalım, $z_1, z_2, z_3, z_4 \in R^k$ dır, yani birer vektördür. O halde (2.19) ve (2.20) denklemleri aşağıdaki

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\alpha z_2 + u \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -\beta z_4 + v \end{aligned} \quad (2.23)$$

gibi yazılır. (2.1)'deki A, B, C matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & -\beta E \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada 0 – (kxk) sıfır matrisi, E – (kxk) birim matrisi ifade etmektedir (Ayres, 1972). O halde (2.23) denklemini (2.1)'deki gibi yazabiliriz. (2.22)'deki denklemden

$$M = \{z \in R^{4k} | z_1 = z_3, z_2 = z_4\} \quad (2.24)$$

terminal kümesi elde edilir. $z(t_1) \in M$ olması demek (2.22)'deki sonucun gerçekleşmesi demektir. Yani $z(t_1) \in M \sim x(t_1) = y(t_1), \dot{x}(t_1) = \dot{y}(t_1)$ dir.

Şimdi (2.1), (2.21), (2.24) diferansiyel oyununu ele alalım ve takip eden oyuncu öyle bir strateji kurmalıdır ki takip edilen oyuncunun her kontrolü (2.1)'nin uygun $z(t_1)$ çözümü M kümesine ait olsun, yani $z(t_1) \in M$ olsun. Takip edilen oyuncunun maksadı da öyle $v(t)$ mümkün kontrolü kursun ki her $r \geq 0$ için $z(t) \notin M$ olsun. Yani oyun hiçbir zaman bitmesin. Bu problem için R^{4k} 'de M alt uzayına ortogonal olan alt uzay L olsun. $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in L$ olmak üzere

$$z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_1 + z_4 a_2 = 0 \quad \forall a_1, a_2 \in R^k$$

$$z_1 + z_3 = 0 \quad z_2 + z_4 = 0$$

$$L = \{z \in R^{4k} | z_1 = -z_3, z_2 = -z_4\} \quad (2.25)$$

$\Pi: R^{4k} \rightarrow R^{2k}$ ortogonal iz düşüm matrisini

$$\Pi = \begin{bmatrix} E & 0 & -E & 0 \\ 0 & E & 0 & -E \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

şeklinde yazalım.

$$\Pi z = \begin{bmatrix} E & 0 & -E & 0 \\ 0 & E & 0 & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - z_3 \\ z_2 - z_4 \end{bmatrix}$$

buradan görülür ki

$$\Pi z = 0$$

olursa $z_1 = z_3, z_2 = z_4$ dır. Bu ise $\Pi z \in M$ 'dir.

Varsayım 2.1'e göre her $r \geq 0$ için $k(r)$ fonksiyonu ve $F(r)$ matris fonksiyonu bulmalıyız ki

$$\Pi e^{k(r)A} C = \Pi e^{rA} B F(r) \quad (2.27)$$

olsun. Bunun için $\Pi e^{rA} B$, $\Pi e^{k(r)A} C$ matrislerini ve $F(r)$ operatörünü hesaplayalım. Önce $\Pi e^{rA} B$ matrisini hesaplayalım. e^{rA} taylor serisine açalım.

$$e^{rA} = \hat{E} + rA + \frac{r^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{r^i A^i}{i!} + \dots$$

Buradaki A nın kuvvet matrisleri ve $\hat{E}$ birim matrisi aşağıdaki gibidir.

$$A^i = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i-1} \alpha^{i-1} E & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^i \alpha^i E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{i-1} \beta^{i-1} E \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^i \beta^i E \end{bmatrix}$$

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \in R^{4k} \times R^{4k}$$

$$e^{rA} B = \hat{E}B + rAB + \frac{r^2}{2!} A^2 B + \dots + \frac{r^i}{i!} A^i B + \dots$$

$$\hat{E}B = B, AB = \begin{bmatrix} -E \\ \alpha E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, A^i B = \begin{bmatrix} (-1)^{i-1} \alpha^{i-1} E \\ (-1)^{i-1} \alpha^i E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots$$

$$\Pi e^{rA} B = \Pi B + r\Pi AB + \frac{r^2}{2!} \Pi A^2 B + \dots + \frac{r^i}{i!} \Pi A^i B + \dots$$

$$i=0 \text{ için } \Pi B = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \end{bmatrix}$$

$$\Pi A^i B = \begin{bmatrix} (-1)^{i-1} \alpha^{i-1} E \\ (-1)^{i+1} \alpha^i E \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3,\dots$$

dir.

$$\Pi e^{rA} B = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r^i}{i!} \begin{bmatrix} (-1)^{i-1} \alpha^{i-1} E \\ (-1)^{i+1} \alpha^i E \end{bmatrix}$$

matrisin satır değerlerini tek tek hesaplırsak

$$0 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-r\alpha)^i}{i!} E = \frac{1}{\alpha} (e^{-ar} - 1) E = \frac{(e^{-ar} - 1)}{\alpha} E = -\frac{(1 - e^{-ar})}{\alpha} E$$

$$-E - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-r\alpha)^i}{i!} E = -\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-r\alpha)^i}{i!}\right) E = -e^{ar} E$$

dir. Buna göre

$$\Pi e^{rA} B = \begin{bmatrix} -\frac{1 - e^{-ar}}{\alpha} E \\ -e^{-ar} E \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

dir. Aynı işlemlerle

$$\Pi e^{tA} C = \begin{bmatrix} -\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} E \\ -e^{-\beta t} E \end{bmatrix}$$

bulunacaktır. $t = k(r)$ yazarsak

$$\Pi e^{k(r)A} C = \begin{bmatrix} -\frac{1 - e^{-\beta k(r)}}{\beta} E \\ -e^{-\beta k(r)} E \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

elde edilir. Şimdi (2.27) denklemini sağlayan $k(r)$ ve $F(r)$ fonksiyonlarını bulmalıyız.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1 - e^{-\beta k(r)}}{\beta} E \\ -e^{-\beta k(r)} E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1 - e^{-ar}}{\alpha} E \\ -e^{-ar} E \end{bmatrix} F(r), \quad \forall r$$

$$\frac{1 - e^{-\beta k(r)}}{\beta} = \frac{1 - e^{-ar}}{\alpha} F(r), \quad \forall r > 0$$

$$e^{-\beta K(r)} = e^{-\alpha r} F(r), \forall r > 0$$

olur. Bu iki eşitlikten

$$\frac{1 - e^{-\beta k(r)}}{\beta} \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha r}} = \frac{e^{-\beta k(r)}}{e^{-\alpha r}}, \forall r > 0$$

$$(1 - e^{-\beta k(r)}) \alpha e^{-\alpha r} = \beta (1 - e^{-\alpha r}) e^{-\beta k(r)}$$

$$\alpha e^{-\alpha r} - e^{-\beta k(r)} \alpha e^{-\alpha r} = \beta (1 - e^{-\alpha r}) e^{-\beta k(r)}$$

$$\alpha e^{-\alpha r} = e^{-\beta k(r)} [\alpha e^{-\alpha r} + \beta (1 - e^{-\alpha r})]$$

$$e^{\beta k(r)} = \frac{[\alpha e^{-\alpha r} + \beta (1 - e^{-\alpha r})] e^{\alpha r}}{\alpha}$$

$$k(r) = \frac{1}{\beta} \ln \left[(e^{\alpha r} - 1) \frac{\beta}{\alpha} + 1 \right] \quad (2.30)$$

$$F(r) = \frac{e^{\alpha r}}{1 + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha r} - 1)} E \quad (2.31)$$

değerleri bulunur. $F(r) = k(r)E$ şeklinde olduğu (2.30) ve (2.31)'da aşıkarak görülmektedir.

i) $\alpha \geq \beta$ için problemi inceleyelim:

$k(r)$ fonksiyonu varsayım 2.1'deki

$$1) \quad k(0) = 0$$

$$2) \quad \text{Monoton artan, } \forall r > 0$$

$$3) \quad k(r) \geq r \text{ ve } \forall r > 0$$

koşulları sağladığını ispat etmek mümkündür. Şimdi bunları gösterelim

$$q(r) = k(r) - r \text{ olsun}$$

$q(0) = 0$ olduğu açıktır. Bu fonksiyonun türevini alalım

$$\dot{q}(r) = \dot{k}(r) - 1 = \frac{1}{\beta} \frac{\beta e^{ar}}{(e^{ar} - 1) \frac{\beta}{\alpha} + 1} - 1,$$

$$\dot{q}(r) = \frac{(1 - \frac{\beta}{\alpha})(e^{ar} - 1)}{(e^{ar} - 1) \frac{\beta}{\alpha} + 1} \geq 0, \quad \forall r \geq 0$$

$q(0) = 0$, $\dot{q}(r) \geq 0$ ise $q(r) \geq 0$, $r \geq 0$ olacaktır. Buradan $k(r) \geq r$ olduğu açıkça görülmektedir.

$$\dot{k}(r) = \frac{e^{ar}}{(e^{ar} - 1) \frac{\beta}{\alpha} + 1} \leq \frac{\alpha}{\beta}, \quad \forall r \geq 0 \quad (2.32)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} e^{ar} &= e^{ar} - 1 + 1 \\ &= \left[(e^{ar} - 1 + 1) \frac{\beta}{\alpha} \right] \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \left[(e^{ar} - 1) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \right] \end{aligned}$$

* burada $\left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \leq 1$ olduğu için $\frac{\beta}{\alpha}$ yerine daha büyük olan 1 değerini koyarsak

$$\frac{\alpha}{\beta} \left[(e^{ar} - 1) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \right] \leq \frac{\alpha}{\beta} \left[(e^{ar} - 1) \frac{\beta}{\alpha} + 1 \right]$$

olacaktır. Buradan

$$\Rightarrow e^{ar} \leq \frac{\alpha}{\beta} \left[(e^{ar} - 1) \frac{\beta}{\alpha} + 1 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{e^{ar}}{(e^{ar} - 1) \frac{\beta}{\alpha} + 1} \leq \frac{\alpha}{\beta}$$

elde ederiz. Bu ise (2.32) eşitsizliğini göstermiştir. (bkz. denklem (2.5)):

$$\begin{aligned}
I^2(t) &= \sup \left\{ \int_0^t \left\| F(r) v(k(t) - k(r)) \dot{k}(r) \right\|^2 dr \mid \|v(r)\| \leq \sigma, r \in [0, k(t)] \right\} \\
&= \sup \int_0^t \left\| (\dot{k}(r))^2 v(k(t) - k(r)) \right\|^2 dr
\end{aligned}$$

(2.30) denklemi ve (2.32) eşitsizliğindeki bulguları bu denklemde yerine koyarsak

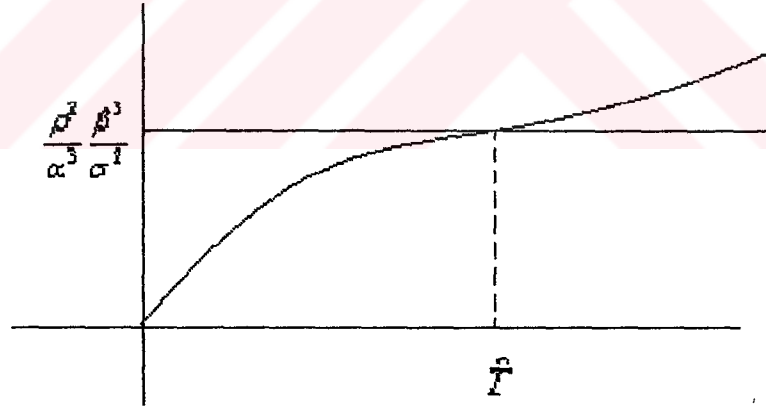
$$\int_0^t \left\| (\dot{k}(r))^2 v(k(t) - k(r)) \right\|^2 dr \leq \frac{\alpha^3}{\beta^3} \int_0^t \|v(k(t) - k(r))\|^2 \dot{k}(r) dr$$

olacaktır.

$$\int_0^t \|v(k(t) - k(r))\|^2 \dot{k}(r) dr = \int_0^{k(t)} \|v(r)\|^2 dr$$

son üç ifadeden son eşitliğin doğruluğunu $s = k(t) - k(r)$ dönüşümü ile göstermek kolaydır.

$$I^2(t) \leq \frac{\alpha^3}{\beta^3} \sigma^2 k(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.33)$$



Şekil 1.2 : $\hat{T}$ değerinin gösterilmesi

olduğu gösterilir. $k(0) = 0$ ve $k(t)$ monoton artan ve $t \rightarrow +\infty$ için $k(t) \rightarrow +\infty$ olduğuna göre

$k(t) = \frac{\rho^2}{\alpha^3} \frac{\beta^3}{\sigma^2}$ yi sağlayan bir $\hat{T} = (\rho, \sigma, \alpha, \beta)$ sayısı vardır. (bkz. Şekil 2) $t \in [0, T_0]$ aralığında

$\tilde{u}(s) \equiv 0$ olsun. O halde $\tilde{\rho} = \rho$ olur. (bkz. (2.6))

$$\hat{G}(t) = \left\{ \int_0^t \Pi e^{(t-s)A} B w(s) ds \mid \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \frac{\alpha \sqrt{\alpha}}{\beta \sqrt{\beta}} \sigma \sqrt{k(t)} \right)^2 \right\} \quad (2.34)$$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme varsayım 2.2’de (2.7) ile gösterilen

$$G(t) = \left\{ \int_0^t \Pi e^{(t-s)A} B w(s) ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq (\rho - l(t))^2 \right. \right\}$$

kümesinden daha küçüktür. (2.7)’de $\tilde{\rho}$ yerine ρ yazdık ve bu örnekte $G(t)$ kümesi yerine ondan daha küçük olan $\hat{G}(t)$ kümesini ele alacağız. Her $t \in [0, T_0]$ için

$$\hat{G}(t) \subset G(t) \quad (2.35)$$

olduğu (2.33)’de gözükmemektedir. çünkü $t \leq \hat{T}$ ise

$$k(t) \leq \frac{\rho^2 \beta^3}{\alpha^3 \sigma^2} \Rightarrow \rho^2 > \frac{\alpha^3}{\beta^3} \sigma^2 k(t) \quad \forall t < \hat{T}$$

ve $\rho - l(t) > \rho - \frac{\alpha \sqrt{\alpha}}{\beta \sqrt{\beta}} \sigma \sqrt{k(t)}$ ise (2.35) ifadesi doğrudur. Teorideki (2.8) koşulu $\tilde{u}(s) \equiv 0$

olduğuna göre teorideki 2.8 ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$\Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 \in G(t_1)$$

Bunun yerine $\hat{G}(t) \subset G(t)$ olduğundan

$$\Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 \in \hat{G}(t_1)$$

ye bakacağız. Yani $\Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 \in \hat{G}(t_1)$ denklemini sağlayan t_1 varsa $\Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 \in G(t_1)$ denklemi de doğru olacaktır. Çünkü $\hat{G}(t) \subset G(t)$ dir.

$$\Pi e^{k(t_1)A} z_0 \in \hat{G}(t_1), \quad t_1 \leq \hat{T} \quad (2.36)$$

sağlayan t_1 varsa $T_0 = k(t_1) - t_1$ alsak o halde teorem 2.1’e göre z_0 noktasından $T_0 + t_1$ anında oyun bitiyor. Bu örnekte

$$\Pi e^{k(t_1)A} z_0 = \begin{bmatrix} z_0^1 + \frac{1 - e^{-\alpha k(t_1)}}{\alpha} z_0^2 - z_0^3 - \frac{1 - e^{-\beta k(t_1)}}{\beta} z_0^4 \\ e^{-\alpha k(t_1)} z_0^2 - e^{-\beta k(t_1)} z_0^4 \end{bmatrix}$$

olduğu aşikardır. Buna göre $\Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 \in \hat{G}(t_1)$ denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} z_0^1 + \frac{1-e^{-\alpha k(t_1)}}{\alpha} z_0^2 - z_0^3 - \frac{1-e^{-\beta k(t_1)}}{\beta} z_0^4 \\ e^{-\alpha k(t_1)} z_0^2 - e^{-\beta k(t_1)} z_0^4 \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} \int_0^{t_1} \frac{1-e^{-\alpha(t_1-s)}}{\alpha} w(s) ds \\ \int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1-s)} w(s) ds \end{bmatrix} \middle| \int_0^{t_1} \|w(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}} \sigma \sqrt{k(t_1)} \right)^2 \right\}, t_1 \in [0, \hat{T}] \quad (2.37)$$

ii) $\alpha = \beta$ halinde ise

$$k(t) = t$$

$$F(r) = E$$

$k(r)$ fonksiyonu varsayım 2.1'deki koşulları sağladığı görülmektedir. (2.33)'den

$$l^2(t) \leq \sigma^2 t$$

kolayca elde edebiliriz. Bu örnekte

$$\Pi e^{k(t)A} z_0 = \begin{bmatrix} z_0^1 - z_0^3 - \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} (z_0^4 - z_0^2) \\ e^{-\alpha t} (z_0^2 - z_0^4) \end{bmatrix}$$

•olduğu aşıkardır. Buna göre (2.37) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} z_0^1 - z_0^3 - \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} (z_0^4 - z_0^2) \\ e^{-\alpha t} (z_0^2 - z_0^4) \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} \int_0^t \frac{1-e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} w(s) ds \\ \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} w(s) ds \end{bmatrix} \middle| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq (\rho - \sigma\sqrt{t})^2 \right\}, t_1 \in [0, \hat{T}]$$

Böylelikle teorem 2.1 incelediğimiz örnek için aşağıdaki gibi yazılabilir.

Sonuç: Verilen $(z_0^1, z_0^2, z_0^3, z_0^4)$ noktası için (2.37) denklemi doğru ise $(z_0^1, z_0^2, z_0^3, z_0^4)$ noktasından başlayan oyunu, $T_0 + t_1$ zamanda bitirmek mümkündür.

(2.37) denkleminde t_1 sabit olsun. ρ da yeteri kadar büyük olsa (2.37) daki denklem sağlanıyor. $\alpha \rightarrow \beta$, $z_0^1 \rightarrow z_0^3$, ve $z_0^2 \rightarrow z_0^4$ yaklaşırsa $\Pi e^{k(t_1)A} \rightarrow 0$ olacak ve (2.36) denklemini sağlanacaktır. Kısaca (2.37) denklemini başlangıç noktası $(z_0^1, z_0^2, z_0^3, z_0^4)$ ve $\alpha, \beta, \rho, \sigma$ parametreleri arasındaki ilişkiyi verir. Buda demek oluyor ki eğer (2.37) denklemini gerçekleşirse z_0 başlangıç noktasından $k(t_1) = T_0 + t_1$ sonlu zamanında oyunun bitmesi mümkündür.

1.2.1 Problemin çözüm algoritmasının kurulması

1. Adım : $\ddot{x} + \alpha \dot{x} = u$ ve $\ddot{y} + \beta \dot{y} = v$ yörünge denklemleri verilen takip problemini $x = z_1$, $\dot{x} = z_2$, $y = z_3$, $\dot{y} = z_4$ dönüşümleri ile $\dot{z} = Az - Bu + Cv$ diferansiyel denklem haline getirilmesi

2. Adım : $\dot{z} = Az - Bu + Cv$ denklemini oluşturan A , B , C katsayılar matrislerinin bulunması

3. Adım : $M = \{z \in R^{4k} | z_1 = z_3, z_2 = z_4\}$ terminal kümesi, $L = \{z \in R^{4k} | z_1 = -z_3, z_2 = -z_4\}$ ortogonal alt uzayı ve $\Pi = \begin{bmatrix} E & 0 & -E & 0 \\ 0 & E & 0 & -E \end{bmatrix}$ ortogonal izdüşüm matrisini oluşturulması

4. Adım : $\Pi e^{k(r)A} C = \Pi e^{rA} B F(r)$ eşitliğin doğruluğunun gösterilmesi için $\Pi e^{k(r)A} C$ ve $\Pi e^{rA} B$ matrislerinin hesaplanması, buna göre $k(r)$ fonksiyonun ve $F(r)$ operatörünün bulunması

5. Adım : Takip problemindeki α ve β parametrelerine göre $k(r)$ fonksiyonunun varsayım 2.1'i sağlayıp sağlamadığının kontrol edilmesi, sağlıyorsa problemin çözümüne devam edilmesi

6. Adım : $I^2(t)$ nin hesaplanması

7. Adım : Varsayım 2.2'nin doğruluğunun gösterilmesi

8. Adım : $\Pi e^{k(t_1)A} z_0 \in \hat{G}(t_1)$ 'nin gösterilmesi

Bu algoritma diğer örneklerin çözümü içinde de kullanılabilir.

Örnek 2.2: Varsayalım ki takip eden oyuncunun hareketi

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = u \quad (2.38)$$

olsun. Takip edilen oyuncunun hareketi ise

$$\ddot{y} = v \quad (2.39)$$

ile verilsin. $\alpha > 0$ sürtünme katsayısı ve bir skaler sayı, $x, y, u, v \in R^k$ vektörler ve $k \geq 1$ ise bir tam sayıdır. $u(t)$, $v(t)$ kontrolleri ölçülebilir ve (2.21)'deki koşulları sağlayan kontrol fonksiyonlarıdır. Eğer t_1 anında (2.22)'deki eşitlikler sağlandığında ise oyun biter. Burada takip eden oyuncu (2.22)'deki eşitliklerin gerçekleşmesini istemekte ama Takip edilen oyuncu ise bu durumun gerçekleşmesini engellemeye çalışmaktadır. Takip eden oyuncu her $t \geq 0$ anında $x(s)$, $\dot{x}(s)$, $y(s)$, $\dot{y}(s)$ ve $v(s)$ vektörlerini $s \leq t$ zamanda bilmektedir.

Başlangıç koşulları $(x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ ve α, ρ, σ parametreleri hangi koşulları sağlamalıdır ki t_1 zamanında oyun, bu başlangıç noktasından bitsin yani (2.22)'deki ifade gerçekleşsin.

Bu problemi çözmek için (2.38), (2.39) ve (2.21) ile verilen takip problemini diferansiyel oyun hainde yazmak gerekecektir. Bu durumda $x = z_1$, $\dot{x} = z_2$, $y = z_3$, $\dot{y} = z_4$ şeklinde yazalım. $z_1, z_2, z_3, z_4 \in R^k$ birer vektördür. O halde (2.38) ve (2.39) denklemleri aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\alpha z_2 + u \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v \end{aligned} \quad (2.40)$$

gibi yazılır. (2.1) deki A, B, C matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada 0 – (kxk) sıfır matris, E – (kxk) birim matrisi ifade etmektedir. O halde (2.40) denklemini (2.1)'deki gibidir. (2.22)'deki denklemden (2.24)'deki terminal kümesi elde edilir. $z(t_1) \in M$ ait olması demek (2.22)'deki sonucun gerçekleşmesi demektir. Yani $z(t_1) \in M \sim x(t_1) = y(t_1), \dot{x}(t_1) = \dot{y}(t_1)$ dir.

Şimdi (2.24), (2.1), (2.21) diferansiyel oyununu ele alalım ve takip eden oyuncu öyle bir strateji kurmalıdır ki takip edilen oyuncunun her kontrolü için (2.1)'nin uygun $z(t)$ çözümü

M kümesine ait olsun, yani $z(t_1) \in M$ olsun. Takip edilen oyuncunun maksadı da öyle $v(t)$ mümkün kontrolü kursun ki $z(t_1) \notin M$ her $r \geq 0$ için R^{4k} 'de M alt uzayına ortogonal olan alt uzay L olsun. L ortogonal alt uzayı (2.25) deki gibidir.

$\Pi: R^{4k} \rightarrow R^{2k}$ ortogonal izdüşüm matrisi (2.26) şeklidedir. $\Pi z = 0$ olursa $z_1 = z_3, z_2 = z_4$ dür. Bu ise $z \in M$ dir.

Varsayım 2.1 ve varsayım 2.2'ye göre her $r \geq 0$ için $k(r)$ fonksiyonu ve $F(r)$ matris fonksiyonu bulmalıyız. ki (2.27) gerçekleşsin. Buradaki $\Pi e^{rA} B$ matrisini örnek 2.1'deki gibi kolayca hesaplanabilir.

$$\Pi e^{rA} B = \begin{bmatrix} \frac{e^{-ar} - 1}{\alpha} E \\ -e^{-ar} E \end{bmatrix}$$

dir. Aynı şekilde $\Pi e^{tA} C$ matrisi örnek 2.1'deki gibi kolayca hesaplanabilir.

$$\Pi e^{tA} C = \begin{bmatrix} -tE \\ -E \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. $t = k(r)$ yazarsak

$$\Pi e^{k(r)A} C = \begin{bmatrix} -k(r)E \\ -E \end{bmatrix}$$

olur. Şimdi (2.27) denklemini sağlayan $k(r)$ ve $F(r)$ fonksiyonlarını bulmalıyız.

$$\begin{bmatrix} -k(r)E \\ -E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-ar} - 1}{\alpha} E \\ -e^{-ar} E \end{bmatrix} F(r), \forall r$$

$$-k(r)E = \frac{e^{-ar} - 1}{\alpha} F(r), \forall r > 0$$

$$-E = -e^{-ar} E F(r), \forall r > 0$$

denklem sisteminden

$$k(r) = -\frac{1 - e^{-ar}}{\alpha} e^{ar}, \forall r > 0$$

$$k(r) = \frac{e^{\alpha r} - 1}{\alpha} \quad (2.41)$$

$$F(r) = e^{\alpha r} E \quad (2.42)$$

olur. $F(r) = \dot{k}(r)E$ şeklinde olduğu (2.41) ve (2.42)'da aşıkarak görünmektedir.

i-) $\alpha \geq 0$ için problemi inceleyelim

$k(r)$ fonksiyonu varsayım 2.1'deki

$$1) \quad k(0) = 0$$

$$2) \quad \dot{k}(r) = e^{\alpha r} \geq 0 \text{ olduğu için Monoton artan, } \forall r > 0.$$

$$3) \quad k(r) \geq r \text{ ve } \forall r > 0$$

koşulları sağladığını ispat etmek mümkündür. Şimdi üçüncü şıkkın varlığını gösterelim

$$q(r) = k(r) - r \text{ olsun}$$

$$q(0) = 0$$

$$\dot{q}(r) = \dot{k}(r) - 1 = e^{\alpha r} - 1,$$

$$\dot{q}(r) = e^{\alpha r} - 1 \geq 0, \quad \forall r \geq 0$$

$q(0) = 0, \quad \dot{q}(r) \geq 0$ ise $q(r) \geq 0, \quad r \geq 0$ olacaktır. Buradan $k(r) \geq r$ olduğu açıkça görülmektedir. (bkz. denklem (2.5)) $I^2(t)$ 'nin yukarıdan sınırını bulalım.

$$I^2(t) = \sup \left\{ \int_0^t \left\| \hat{F}(r) v(k(t) - k(r)) \dot{k}(r) \right\|^2 dr \left\| v(r) \right\| \leq \sigma, r \in [0, k(t)] \right\}$$

$$= \sup \left\{ \int_0^t \left\| e^{\alpha r} v(k(t) - k(r)) e^{\alpha r} \right\|^2 dr \right\}$$

$$\int_0^t e^{4\alpha r} \left\| v(k(t) - k(r)) \right\|^2 dr \leq \sigma^2 \frac{1}{4\alpha} (e^{4\alpha t} - 1)$$

$$= \sigma^2 \frac{e^{4\alpha t} - 1}{4\alpha}$$

olacaktır. Buradan

$$\int_0^t \|v(k(t) - k(r))\|^2 \dot{k}(r) dr = \int_0^{k(t)} \|v(r)\|^2 dr$$

$$l^2(t) \leq \sigma^2 \frac{e^{4\alpha t} - 1}{4\alpha} \quad \forall t \geq 0.$$

Eğer $\rho^2 \geq \sigma^2 \frac{e^{4\alpha t} - 1}{4\alpha}$ olsa $\rho^2 \geq l^2(t)$ olacaktır ve bu durumda varsayım 2.1 gerçekleşecektir.

$$4\alpha \frac{\rho^2}{\sigma^2} + 1 = e^{4\alpha t}$$

$\hat{T} = \frac{\ln\left(\frac{\rho^2}{\sigma^2} 4\alpha + 1\right)}{4\alpha}$ zamanı vardır. Yani $\hat{T} = (\rho, \sigma, \alpha)$ sayısı vardır. $t \in [0, T_0]$ aralığında

$\tilde{u}(s) \equiv 0$ olsun. O halde $\tilde{\rho} = \rho$ olur. (bkz. (2.7))

$$\hat{G}(t) = \left\{ \int_0^t \Pi e^{(t-s)A} B w(s) ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \frac{\sigma \sqrt{e^{4\alpha t} - 1}}{2\sqrt{\alpha}} \right)^2 \right. \right\} \quad (2.43)$$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme Varsayım 2.2'de 2.7 ile gösterilen

$$G(t) = \left\{ \int_0^t \Pi e^{(t-s)A} B w(s) ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq (\rho - l(t))^2 \right. \right\}$$

kümesinden küçüktür. (2.7)'de $\tilde{\rho}$ yerine ρ yazacağız ve bu örnekte $G(t)$ kümesi yerine ondan daha küçük olan (2.43) kümesinden istifade edeceğiz. Teorideki 2.8 koşulu $\tilde{u}(s) \equiv 0$ olduğuna göre teorideki 2.8 ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 \in G(t_1).$$

Bunun yerine $\hat{G}(t) \subset G(t)$ olduğundan $\Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 \in \hat{G}(t_1)$ 'e bakacağız. Yani $\Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 \in \hat{G}(t_1)$ denklemini sağlayan t_1 varsa $\Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 \in G(t_1)$ denklemi de doğru olacaktır. Çünkü $\hat{G}(t) \subset G(t)$ dir. $\Pi e^{(T_0+t_1)A} z_0 \in G(t_1)$ 'yi sağlayan t_1 varsa, o zaman $T_0 = k(t_1) - t_1$ alsak o halde teorem 2.1'e göre z_0 noktasından $T_0 + t_1$ anında oyun bitiyor. Bu örnekte

$$\Pi e^{k(t_1)A} z_0 = \begin{bmatrix} z_0^1 + \frac{1-e^{-\alpha k(t_1)}}{\alpha} z_0^2 - z_0^3 - k(t_1) z_0^4 \\ e^{-\alpha k(t_1)} z_0^2 - z_0^4 \end{bmatrix}$$

dır. Buna göre (2.36) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} z_0^1 + \frac{1-e^{-\alpha k(t_1)}}{\alpha} z_0^2 - z_0^3 - k(t_1) z_0^4 \\ e^{-\alpha k(t_1)} z_0^2 - z_0^4 \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} \int_0^{t_1} \frac{1-e^{-\alpha(t_1-s)}}{\alpha} w(s) ds \\ \int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1-s)} w(s) ds \end{bmatrix} \left| \int_0^{t_1} \|w(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \frac{\sigma \sqrt{e^{4\alpha t} - 1}}{2\sqrt{\alpha}} \right)^2 \right\}, t_1 \in [0, \hat{T}] \quad (2.44)$$

Buna göre teorem 2.1 aşağıdaki gibi yazılabilir.

Sonuç : verilen $(z_0^1, z_0^2, z_0^3, z_0^4)$ noktası için (2.44) denklemi doğru ise $(z_0^1, z_0^2, z_0^3, z_0^4)$ noktasından başlayan oyunu, $T_0 + t_1$ zamanda bitirmek mümkündür.

2.3 İkinci mertebeden dereceden diferansiyel denklemlerle verilen bir sınıf takip probleminin çözümü:

Aşağıdaki problemin çözümünde Teorem 2.1'i uygularken Varsayım 2.1'deki $k(r)$ in $k(r) = r$ olduğunu gördük. Bunun için Teorem 2.1'i $k(r) = r$ hali için yeniden yazalım. Bu durumda varsayım 2.1 aşağıdaki gibi olacaktır.

Varsayım 2.4: $\forall r \geq 0$ için

$$\Pi e^{rA} C = \Pi e^{rA} B F(r) \quad (2.45)$$

faktörizasyonu sağlayan r 'nin sürekli fonksiyonu olan $F(r): R^n \rightarrow R^p$ lineer operatörü vardır.

$l^2(t)$ sayısını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$l^2(t) = \sup \left\{ \int_0^t \|F(r)v(r)\|^2 dr \mid v(r) \in Q, r \in [0, t] \right\} \quad (2.46)$$

$k(t_1) = T_0 + t_1$ eşitliğinde $T_0 = 0$ alırsak, $k(t_1) = t_1$ olur. Buna göre (2.6)'deki denklemde $\tilde{\rho} = \rho$ şeklinde olur

Varsayım 2.5: Bir $\hat{T} > 0$ için $\forall t \in [0, \hat{T}]$ olmak üzere $\rho \geq l(t)$ olsun

$$G(t) = \left\{ \int_0^t \Pi e^{(t-s)A} B w(s) ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq (\rho - l(t))^2 \right. \right\} \quad (2.47)$$

kümesini göz önüne alalım.

Buna göre Teorem 2.1'i de aşağıdaki gibi yazabiliriz.

Teorem 2.4: Varsayım 2.4 ve Varsayım 2.5'in doğru olduğunu kabul edelim

$$\Pi e^{t_1 A} z_0 \in G(t_1), \quad t_1 \leq \hat{T} \quad (2.48)$$

doğru olsun. O halde z_0 noktasından başlayan $(0, t_1]$ zaman diliminde oyunu bitirmek mümkündür.

Şimdi Teorem 2.4'den istifade ederek aşağıdaki takip problemini çözelim.

$x, y \in R^n$ olmak üzere takip eden oyuncunun ve takip edilen nesnenin hareket denklemleri

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = u \quad (2.49)$$

$$\ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_2 y = v \quad (2.50)$$

diferansiyel denklemleri ile verilsin. Burada a_i, b_i katsayıları gerçel sayılar, $u \in R^n, v \in R^n$ ise mümkün kontrollerdir. $u(t)$ ve $v(t)$ kontrolleri ölçülebilir ve aşağıdaki koşulları sağlayan kontrol fonksiyonlarıdır.

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \quad \|v(s)\| \leq \sigma, \quad \rho > 0, \sigma > 0 \quad (2.51)$$

Bu kısıtlar sırasıyla integral ve geometrik kısıtlardır. t_1 anında

$$x(t_1) = y(t_1) \quad (2.52)$$

eşitlikleri gerçekleşirse oyun bitmektedir. Burada takip eden oyuncu yukarıdaki eşitliğin gerçekleşmesini istemekte ama takip edilen oyuncu ise bu durumun gerçekleşmesini

engellemeye çalışmaktadır. Takip eden oyuncu $t=0$ zamanda $(x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$, $x_0 \neq y_0$ başlangıç noktasından oyuna başlamakta ve $\forall t \geq 0$ anında $(x(s), \dot{x}(s), y(s), \dot{y}(s))$ vektörlerini ve $v(s)$ kontrolünü $s \leq t$ anında bilmektedir.

(2.49), (2.50) ve (2.51) ile verilen takip problemini diferansiyel oyun halinde yazmak için $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ şeklinde alalım. $z_1, z_2, z_3, z_4 \in R^n$ birer vektördür. O halde (2.49) ve (2.50) denklemleri aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -a_1 z_2 - a_2 z_1 + u \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -b_1 z_4 - b_2 z_3 + v \end{aligned} \quad (2.53)$$

(2.1)'deki A, B, C matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -a_2 E & -a_1 E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -b_2 E & -b_1 E \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix},$$

şeklinde elde edilir.

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \in R^{4n} \times R^{4n},$$

E $n \times n$ birim matris, 0 $n \times n$ sıfır matristir. $M \subset R^{4n}$ terminal kümesi (2.52)'deki denklemden

$$M = \{z \in R^{4n} | z_1 = z_3\} \quad (2.54)$$

terminal kümesi elde edilir. $z(t_1) \in M$ olması demek (2.52) sonucunun gerçekleşmesi demektir. Yani $x(t_1) = y(t_1)$ dir.

Bu problem için L , M alt uzayının ortogonal alt uzayı olsun. $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in L$ olmak üzere

$$L = \{z \in R^{4n} | z_1 = -z_3\}$$

dir.

$\Pi : R^{4n} \rightarrow L$ ortogonal izdüşüm operatörü olsun. İzdüşüm matrisi L 'deki uygun bazda

$$\Pi = \begin{bmatrix} E & 0 & -E & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır.

$$\Pi z = \begin{bmatrix} E & 0 & -E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - z_3 \end{bmatrix}$$

buradan görülür ki

$$\Pi z = 0$$

olursa $z_1 = z_3$ dir. Bu ise $z \in M$ dir.

$\varphi_1(0) = 1, \dot{\varphi}_1(0) = 0, \varphi_2(0) = 0, \dot{\varphi}_2(0) = 1$ başlangıç koşulları verilen

$$\ddot{\xi} + a_1 \dot{\xi} + a_2 \xi = 0 \quad (2.55)$$

skaler diferansiyel denkleminin özel çözümlerini $\varphi_1(t)$ ve $\varphi_2(t)$ şeklinde yazalım. Aynı şekilde $\psi_1(0) = 1, \dot{\psi}_1(0) = 0, \psi_2(0) = 0, \dot{\psi}_2(0) = 1$ başlangıç koşulları verilen

$$\ddot{\eta} + b_1 \dot{\eta} + b_2 \eta = 0 \quad (2.56)$$

Skaler diferansiyel denkleminin özel çözümlerini $\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$ şeklinde yazalım (Shepley, 1984). o halde ilk önce e^{tA} 'yı hesaplayalım. e^{tA} 'yı taylor serisine açalım.

$$e^{tA} = \hat{E} + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^i A^i}{i!} + \dots$$

Bu ise kolayca hesaplanır. Buradaki A matrisi ve $\hat{E}$ birim matrisleri yukarıda verilmiştir.

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \varphi_1(t)E & \varphi_2(t)E & 0 & 0 \\ \dot{\varphi}_1(t)E & \dot{\varphi}_2(t)E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1(t)E & \psi_2(t)E \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_1(t)E & \dot{\psi}_2(t)E \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

olacaktır.

$$\Pi e^{u} B = \begin{bmatrix} E & 0 & -E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t)E & \varphi_2(t)E & 0 & 0 \\ \dot{\varphi}_1(t)E & \dot{\varphi}_2(t)E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1(t)E & \psi_2(t)E \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_1(t)E & \dot{\psi}_2(t)E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$= -\varphi_2(t)E$$

$$\Pi e^{u} C = \begin{bmatrix} E & 0 & -E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t)E & \varphi_2(t)E & 0 & 0 \\ \dot{\varphi}_1(t)E & \dot{\varphi}_2(t)E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1(t)E & \psi_2(t)E \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_1(t)E & \dot{\psi}_2(t)E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$= -\psi_2(t)E$$

$$\Pi e^{u} B F(t) = -\varphi_2(t)F(t)$$

Varsayım 2.4'deki (2.45) ifadesi aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$-\varphi_2(t)F(t) = -\psi_2(t)E, \quad t \geq 0$$

$$F(t) = \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} E$$

$t = 0$ daki limitibakalım.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{\psi}_2(t)}{\dot{\varphi}_2(t)} = 1 \text{ dir. Buna göre}$$

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} E, & t > 0 \\ E, & t = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

dir. Varsayım 2.4'deki (2.45) ifadesi sağlanacaktır. (2.60) ifadesini (2.46)'deki $I(t)$ yerine koyarsak

$$I^2(t) = \sup \left\{ \int_0^t \left\| \frac{\psi_2(s)}{\varphi_2(s)} E v(s) \right\|^2 ds \mid \|v(s)\| \leq \sigma, s \in [0, t] \right\}$$

$$I^2(t) \leq \sigma^2 \int_0^t \|F(s)\|^2 ds$$

$$I^2(t) \leq \sigma^2 \int_0^t \frac{\psi_2^2(s)}{\varphi_2^2(s)} ds \quad (2.61)$$

olacaktır. Aşağıdaki durumları ayrı ayrı inceleyeceğiz.

- a. (2.55)'in farklı λ_1 ve λ_2 gerçel karakteristik kökleri (2.56)'nın da farklı γ_1 ve γ_2 gerçel karakteristik kökleri var
- b. (2.55)'in $\alpha_1 \pm i\beta_1$ karmaşık kökleri (2.56)'nın ise $\alpha_2 \pm i\beta_2$ karmaşık kökleri var
- c. (2.55)'in λ iki kat kökü (2.56)'nın ise γ iki kat kökü var
- d. (2.55)'in λ iki kat kökü (2.56)'nın ise $\alpha \pm i\beta$ karmaşık kökleri var
- e. (2.55)'in λ iki kat kökü (2.56)'nın da farklı γ_1 ve γ_2 gerçel karakteristik kökleri var
- f. (2.55)'in farklı λ_1 ve λ_2 gerçel karakteristik kökleri (2.56)'nın ise γ iki kat kökü var
- g. (2.55)'in farklı λ_1 ve λ_2 gerçel karakteristik kökleri (2.56)'nın ise $\alpha \pm i\beta$ karmaşık kökleri var
- h. (2.55)'in $\alpha \pm i\beta$ karmaşık kökleri, (2.56)'nın ise γ iki kat kökü var
- i. (2.55)'in $\alpha \pm i\beta$ karmaşık kökleri, (2.56)'nın ise da farklı γ_1 ve γ_2 gerçel karakteristik kökleri var

Şimdi bu durumları tek tek inceleyelim.

a-) (2.55)'in farklı λ_1 ve λ_2 gerçel karakteristik kökleri (2.56)'nın da farklı γ_1 ve γ_2 gerçel karakteristik kökleri olması halinin incelenmesi

(2.55)'deki diferansiyel denkleme ait karakteristik denklem $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ olup gerçel kökleri olsun. Buna göre genel çözüm $\varphi_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ dir.

$$\varphi_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$e^{\lambda_1 t} \Big|_{t=0} = 1, \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \Big|_{t=0} = \lambda_1$$

$$e^{\lambda_2 t} \Big|_{t=0} = 1, \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \Big|_{t=0} = \lambda_2$$

burada $t = 0$ için aşağıdaki hesaplamaları yapalım.

$$0 = c_1 + c_2$$

$$1 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2$$

eşitliklerinden

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{ ve } c_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

bulunur. Buna göre $\varphi_2(t)$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$$

şeklinde bulunur. $\varphi_1(t)$ 'i hesaplayalım

$$\varphi_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\dot{\varphi}_1(t) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

burada $t = 0$ için aşağıdaki hesaplamaları yapalım.

$$1 = c_1 + c_2$$

$$0 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2$$

eşitliklerinden

$$c_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \text{ ve } c_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

bulunur. Buna göre $\varphi_1(t)$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t})$$

şeklinde bulunur. Aynı yöntemlerle (2.56) diferansiyel denklemin özel çözümü olan $\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$ 'yi de aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\psi_2(t) = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}), \quad \psi_1(t) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_2 e^{\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{\gamma_2 t}).$$

$\varphi_2(t)$ ve $\psi_2(t)$ 'de düzenleme yapıp (2.60)'da yerine koyarsak

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{(\gamma_2 - \lambda_2)t} \frac{(1 - e^{-(\gamma_2 - \gamma_1)t})}{(1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t})} E, & t > 0 \\ E, & t = 0 \end{cases}$$

olur.

i-) $\lambda_1 < \lambda_2$ ve $\gamma_1 < \gamma_2$ olduğunu varsayalım.

$$\delta = \max \left(1, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \right)$$

alalım. $\alpha \neq \beta$ için Pontryagin $\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} : \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \in \left(1, \frac{\beta}{\alpha} \right)$ olduğunu göstermiştir (1967). Burada

$\alpha, \beta > 0$ dır. Bizim örneğimizde de $\frac{1 - e^{-(\gamma_2 - \gamma_1)t}}{\gamma_2 - \gamma_1} : \frac{1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \in \left(1, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \right)$ olacaktır. Buradan

$$\frac{1 - e^{-(\gamma_2 - \gamma_1)t}}{\gamma_2 - \gamma_1} : \frac{1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \leq \delta$$

* elde edebiliriz. (2.61) ifadesindeki $\frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} \leq \delta e^{(\gamma_2 - \lambda_2)t}, t > 0$

ve

$$\frac{\psi_2^2(t)}{\varphi_2^2(t)} \leq \delta^2 e^{2(\gamma_2 - \lambda_2)t}, t > 0$$

olacaktır. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafını integralini alırsak

$$\int_0^t \frac{\psi_2^2(s)}{\varphi_2^2(s)} ds \leq \delta^2 \int_0^t e^{2(\gamma_2 - \lambda_2)s} ds \quad (2.62)$$

$$\int_0^t e^{2(\gamma_2 - \lambda_2)s} ds = \frac{e^{2(\gamma_2 - \lambda_2)t} - 1}{2(\gamma_2 - \lambda_2)} \quad (2.63)$$

dir.

ii-) $\gamma_2 - \lambda_2 < 0$ olduğunu varsayalım

$\alpha < 0$ için $\frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}$ ifadesini göz önüne alalım (2.64)

$$1-) t = 0 \text{ için } \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} = 0,$$

$$2-) t \rightarrow +\infty \text{ yaklaşırken } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha},$$

$$3-) \left(\frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \right)' = \frac{\alpha e^{\alpha t}}{\alpha} = e^{\alpha t} > 0 \text{ olduğuna göre } \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \text{ monoton artandır}$$

1, 2 ve 3 şıkkından bu ifadenin supremumu $\sup_{[0, +\infty)} \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$ çıkmaktadır. Yukarıdaki ikinci ifade de α yerine $2(\gamma_2 - \lambda_2)$ yazarsak

$$\sup_{[0, +\infty)} \frac{e^{2(\gamma_2 - \lambda_2)t} - 1}{2(\gamma_2 - \lambda_2)} = -\frac{1}{2(\gamma_2 - \lambda_2)} \quad (2.65)$$

olur. (2.61), (2.62), (2.63) ve (2.65) ifadelerinden

$$l^2(t) \leq \sigma^2 \delta^2 \frac{1}{2(\lambda_2 - \gamma_2)}$$

çıkmaktadır.

$\rho \geq \frac{\sigma \delta}{\sqrt{2(\lambda_2 - \gamma_2)}}$ olsun. Buradan $\rho \geq l(t)$ olduğu aşıkardır. Buna göre varsayım 2.5 sağlanıyor.

$$\hat{G}(t) = \left\{ \int_0^t \varphi_2(s) w(s) ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \frac{\sigma \delta}{\sqrt{2(\lambda_2 - \gamma_2)}} \right)^2 \right. \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme (2.47) ile gösterilen kümeden daha küçüktür. yani

$$\hat{G}(t) \subset G(t)$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \varphi_2(s)w(s)ds \right\| &\leq \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s)ds} \sqrt{\int_0^t \|w(s)\|^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s)ds} \left(\rho - \frac{\sigma\delta}{\sqrt{2(\lambda_2 - \gamma_2)}} \right) \end{aligned}$$

dır. Buna göre $\hat{G}(t)$ merkezi sıfırda olan

$$\sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s)ds} \left(\rho - \frac{\sigma\delta}{\sqrt{2(\lambda_2 - \gamma_2)}} \right) \quad (2.66)$$

yarı çaplı bir küredir.

$$z_0 = \begin{bmatrix} z_{01} \\ z_{02} \\ z_{03} \\ z_{04} \end{bmatrix}$$

başlangıç vektörü olmak üzere;

$$\begin{aligned} \Pi e^{tA} z_0 &= \begin{bmatrix} E_n & 0 & -E_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t)z_{01} + \varphi_2(t)z_{02} \\ \dot{\varphi}_1(t)z_{01} + \dot{\varphi}_2(t)z_{02} \\ \psi_1(t)z_{03} + \psi_2(t)z_{04} \\ \dot{\psi}_1(t)z_{03} + \dot{\psi}_2(t)z_{04} \end{bmatrix} \\ &= \varphi_1(t)z_{01} + \varphi_2(t)z_{02} - \psi_1(t)z_{03} - \psi_2(t)z_{04} \end{aligned} \quad (2.67)$$

dir.

iii-) $\lambda_1 < \lambda_2, \gamma_1 < \gamma_2 < \lambda_2, \lambda_2 < 0$ olduğunu varsayalım

Buna göre $\gamma_1 < 0, \gamma_2 < 0, \lambda_1 < 0$ olur . Buradan $t \rightarrow +\infty$ giderken $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi e^{tA} z_0 = 0$ dir. (2.66)',

dan

$$\rho > \frac{\sigma\delta}{\sqrt{2(\lambda_2 - \gamma_2)}} \text{ olsa}$$

$\hat{G}(t)$ 'nin yarı çapı monoton arttığı için t 'nin yeteri kadar büyük değerleri için pozitif bir sayıdan büyüktür.

Sonuç: $t \rightarrow +\infty$ giderken $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi e^{tA} z_0 = 0$, olduğu için ve $\hat{G}(t)$ 'nin yarı çapı t 'nin yeteri kadar büyük değeri için pozitif bir sayıdan büyük olduğuna göre $\Pi e^{tA} z_0 \in G(t)$ varsayımı sağlanmaktadır.

Böylece aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 2.5: (2.55) ve (2.56)'nın $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2$, gerçel ve birbirinden farklı kökleri olsun. Buna göre

1. $\lambda_1 < \lambda_2$,
2. $\gamma_1 < \gamma_2 < \lambda_2 < 0$,
3. $\rho > \frac{\sigma\delta}{\sqrt{2(\lambda_2 - \gamma_2)}}$

koşulları sağlanıyorsa $\forall (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ başlangıç noktasından $x_0 \neq y_0$ için oyunu bitirmek mümkündür.

b-) (2.55)'in $\alpha_1 \pm i\beta_1$ karmaşık kökleri (2.56)'nın ise $\alpha_2 \pm i\beta_2$ karmaşık kökleri olması halinin incelenmesi

(2.55) diferansiyel denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ olup kökleri $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ şeklinde bir çift eşlenik karmaşık sayıdır. Buna göre genel çözüm

$$\varphi_2(t) = e^{\alpha_1 t} (c_1 e^{-i\beta_1 t} + c_2 e^{i\beta_1 t})$$

dir. Burada c_1 ve c_2 bulmak için bu denklemin türevini alalım ve $t=0$ 'a göre sistemin başlangıç noktasına göre çözelim.

$$\varphi_2(t) = e^{\alpha_1 t} (c_1 \cos \beta_1 t + c_2 \sin \beta_1 t)$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \alpha_1 e^{\alpha_1 t} (c_1 \cos \beta_1 t + c_2 \sin \beta_1 t) + e^{\alpha_1 t} (-c_1 \beta_1 \sin \beta_1 t + c_2 \beta_1 \cos \beta_1 t)$$

$$e^{\alpha_1 t} \Big|_{t=0} = 1, \quad c_1 \cos \beta_1 t \Big|_{t=0} = c_1, \quad c_2 \sin \beta_1 t \Big|_{t=0} = 0$$

$$\alpha_1 e^{\alpha_1 t} \Big|_{t=0} = \alpha_1, \quad -c_1 \beta_1 \sin \beta_1 t \Big|_{t=0} = 0, \quad c_2 \beta_1 \cos \beta_1 t \Big|_{t=0} = c_2 \beta_1$$

$$c_1 = 0 \text{ ve } c_2 = \frac{1}{\beta_1}$$

bulunur. Buna göre $\varphi_2(t)$ 'nin değeri

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\beta_1} e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t$$

şeklinde bulunur. $\varphi_1(t) = e^{\alpha_1 t} (c_1 \cos \beta_1 t + c_2 \sin \beta_1 t)$

$$c_1 = 1$$

$$0 = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2$$

eşitliklerinden $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ bulunur. Buna göre $\varphi_1(t)$

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha_1 t} \left(\cos \beta_1 t - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 t \right)$$

şeklinde bulunur. Aynı yöntemlerle (2.56) diferansiyel denklemin özel çözümü olan $\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$ de aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\psi_1(t) = e^{\alpha_2 t} \left(\cos \beta_2 t - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \sin \beta_2 t \right)$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{\beta_2} e^{\alpha_2 t} \sin \beta_2 t$$

Buna göre Varsayım 2.4' deki (2.45) ifadesi aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$-\varphi_2(t)F(t) = -\psi_2(t)E, t \geq 0$$

$$F(t) = \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} E$$

$$F(t) = \frac{\psi_2}{\varphi_2} E = \frac{\sin \beta_2 t}{\sin \beta_1 t} \frac{\beta_1}{\beta_2} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} E$$

burada $\beta_2 = k\beta_1$, $k = 1, 2, 3, \dots$ olarak alırsak.

$$F(t) = \frac{\psi_2}{\varphi_2} = \frac{\sin \beta_2 t}{\sin \beta_1 t} \frac{\beta_1}{\beta_2} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} E$$

$$f(t) = \frac{1}{k} \frac{\sin k \beta_1 t}{\sin \beta_1 t} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} E$$

olur. $t = t_*$ için $\sin \beta_1 t_* = 0$ olsa,

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \frac{1}{k} \frac{\sin k \beta_1 t}{\sin \beta_1 t} = 1 \text{ olduğuna göre}$$

$$F(t) = \begin{cases} f(t)E, & \sin \beta_1 t \neq 0 \\ e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} E, & \sin \beta_1 t = 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

dir. şimdi (2.69)'a bakalım ve $\sin \beta_1 t \neq 0$ 'yi sağlayan her t için ve her $k = 1, 2, 3, \dots$ için

olduğunu $\left| \frac{\sin k \beta_1 t}{\sin \beta_1 t} \frac{1}{k} \right| \leq 1$ göstermek kolaydır. $|f(t)| \leq e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t}$, $t \geq 0$ dikkate alırsak

$$|F(t)| \leq e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t}, \text{ her } t \geq 0 \text{ için} \quad (2.70)$$

olduğu görülür. (2.70) ifadesini (2.61)'deki $l(t)$ 'de yerine koyarsak

$$l^2(t) \leq \sigma^2 \int_0^t e^{2(\alpha_2 - \alpha_1)s} ds$$

$$l^2(t) \leq \sigma^2 \frac{1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} (e^{2(\alpha_2 - \alpha_1)t} - 1)$$

olacaktır.

i-) $\alpha_2 - \alpha_1 < 0$ olduğunu varsayalım

(2.65)'de ki eşitliğinden

$$\sup_{[0, +\infty)} \frac{e^{2(\alpha_2 - \alpha_1)t} - 1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} = -\frac{1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

olur. Buradan yukarıdaki eşitsizlik

$$l^2(t) \leq \frac{\sigma^2}{2(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

dir. varsayım 2.4'de $\rho \geq l(t)$ olmalıdır. Buna göre $\rho > \frac{\sigma}{\sqrt{2(\alpha_1 - \alpha_2)}}$ olsun. Buradan ise $\rho \geq l(t)$ olduğu aşıkardır. Yani varsayım 2.5 sağlanmaktadır.

$$\hat{G}(t) = \left\{ \int_0^t \varphi_2(s)w(s)ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right)^2 \right. \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme (2.47) ile gösterilen kümesinden daha küçüktür. Yani $\forall t$ için $\hat{G}(t) \subset G(t)$ olduğu aşıkardır. Burada

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \varphi_2(s)w(s)ds \right\| &\leq \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s)ds} \sqrt{\int_0^t \|w(s)\|^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s)ds} \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right) \end{aligned}$$

dır. Buna göre $\hat{G}(t)$ merkezi sıfırda olan yarıçapı

$$R(t) = \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right) \sqrt{\int_0^t \frac{1}{\beta_1^2} e^{2\alpha_1 s} \sin^2 \beta_1 s ds}$$

olan bir küredir.

ii-) $\alpha_1 < 0$ olduğunu varsayalım

Buna göre $\alpha_2 < \alpha_1 < 0$ dir. $t \rightarrow +\infty$ giderken $\forall z_0$ için $\Pi e^{tA} z_0 \rightarrow 0$ olmaktadır.

$R(t)$ monoton artmaktadır. Buradan t 'nin yeteri kadar büyük değerleri için $\Pi e^{tA} z_0 \in G(t)$ dir.

iii-) $\alpha_1 = 0$ için inceleyelim.

O halde $t \in [0, +\infty)$ için $\Pi e^{tA} z_0$ sınırlıdır. $t \rightarrow +\infty$ giderken $R(t) \rightarrow +\infty$ olduğundan $\Pi e^{tA} z_0 \in G(t)$ dir.

Sonuç olarak aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 2.6: (2.55)'in $\alpha_1 \pm i\beta_1$ karmaşık kökleri olsun, (2.56)'in $\alpha_2 \pm i\beta_2$ karmaşık kökleri olsun. Buna göre

1. $\beta_2 = k\beta_1, k = 1, 2, 3, \dots$
2. $\alpha_2 < \alpha_1$
3. $\rho > \frac{\sigma}{\sqrt{2(\alpha_1 - \alpha_2)}}$
4. $\alpha_1 \leq 0$

koşulları sağlanıyorsa $\forall (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ başlangıç noktasından $x_0 \neq y_0$ için oyunu bitirmek mümkündür.

c-) (2.55)'in λ iki kat kökü (2.56)'nın ise γ iki kat kökü olması halinin incelenmesi

(2.55) diferansiyel denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ olup iki kat köke sahip olsun. Buna göre genel çözüm

$$\varphi_2(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

dir. Burada c_1 ve c_2 'yi bulmak için bu denklemin türevini alalım ve sistemin başlangıç noktasına göre çözelim.

$$\varphi_2(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

$$\varphi_2(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + \lambda c_2 t e^{\lambda t}$$

$$c_1 e^{\lambda t} \Big|_{t=0} = c_1, \quad c_2 t e^{\lambda t} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$\lambda c_1 e^{\lambda t} \Big|_{t=0} = \lambda c_1, \quad c_2 e^{\lambda t} \Big|_{t=0} = c_2, \quad \lambda c_2 t e^{\lambda t} \Big|_{t=0} = 0$$

$$c_1 = 0 \text{ ve } c_2 = 1$$

bulunur. Buna göre $\varphi_2(t)$

$$\varphi_2(t) = t e^{\lambda t}$$

şeklinde bulunur. $\varphi_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$

$$c_1 = 1$$

$$0 = \lambda c_1 + c_2$$

eşitliklerinden $c_1 = 1$, $c_2 = -\lambda$ bulunur. Buna göre $\varphi_1(t)$

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} - \lambda t e^{\lambda t}$$

şeklinde bulunur. Aynı yöntemlerle (2.56) diferansiyel denklemin özel çözümü olan $\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$ de aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\psi_2(t) = t e^{\gamma t}, \quad \psi_1(t) = e^{\gamma t} - \gamma t e^{\gamma t}.$$

Buna göre Varsayım 2.4'deki (2.45) ifadesi aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$-\varphi_2(t)F(t) = -\psi_2(t)E, t \geq 0$$

$$F(t) = \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} E$$

$$F(t) = \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} E = \frac{t e^{\gamma t}}{t e^{\lambda t}} E = e^{(\gamma - \lambda)t} E \quad (2.71)$$

i-) $\gamma < \lambda$ olduğunu varsayalım

(2.71) ifadesini (2.61)'deki $I(t)$ 'de yerine yazarsak

$$I^2(t) \leq \sigma^2 \int_0^t e^{2(\gamma - \lambda)s} ds$$

$$\int_0^t \frac{\psi_2^2}{\varphi_2^2} = \frac{1}{2(\gamma - \lambda)} (e^{2(\gamma - \lambda)t} - 1)$$

$$I^2(t) \leq \sigma^2 \frac{1}{2(\gamma - \lambda)} (e^{2(\gamma - \lambda)t} - 1)$$

(2.65)'de ki denklemden

$$\sup_{[0, +\infty)} \frac{1}{2(\gamma - \lambda)} (e^{2(\gamma - \lambda)t} - 1) = \frac{1}{2(\lambda - \gamma)}$$

olur. Buradan

$$l^2(t) \leq \sigma^2 \frac{1}{2(\gamma - \lambda)} (e^{2(\gamma - \lambda)} - 1) \leq \sigma^2 \frac{1}{2(\lambda - \gamma)}$$

elde edilir. varsayım 2.5'de $\rho \geq l(t)$ olmalıdır. Buna göre $\rho \geq \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma)}}$ olsun. Burada $\rho \geq l(t)$ olduğu aşıkardır. Yani varsayım 2.5 sağlanmaktadır.

$$\hat{G}(t) = \left\{ \int_0^t \varphi_2(s) w(s) ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma)}} \right)^2 \right. \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme (2.47) ile gösterilen kümesinden daha küçüktür. Yani $\forall t$ için $\hat{G}(t) \subset G(t)$ olduğu aşıkardır. Burada

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \varphi_2(s) w(s) ds \right\| &\leq \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s) ds} \sqrt{\int_0^t \|w(s)\|^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s) ds} \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma)}} \right) \end{aligned}$$

dır. Buna göre $\hat{G}(t)$ merkezi sıfırda olan yarıçapı

$$R(t) = \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma)}} \right) \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s) ds}$$

olan bir küredir.

ii-) $\lambda < 0$ olduğunu varsayalım.

Buna göre $\gamma < 0$ olur. $t \rightarrow +\infty$ giderken $\forall z_0$ için $\Pi e^{t\lambda} z_0 \rightarrow 0$ olmaktadır.

$R(t)$ yarı çapı monoton artmaktadır. Buradan t 'nin yeteri kadar büyük değerleri için $\Pi e^{t\lambda} z_0 \in G(t)$ dir.

Sonuç: $t \rightarrow +\infty$ giderken $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi e^{t\lambda} z_0 = 0$ olduğu için ve $\hat{G}(t)$ 'nin yarı çapı yukarıdaki özelliğinden dolayı $\Pi e^{t\lambda} z_0 \in G(t)$ dir ve varsayımı sağlamaktadır.

Aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 2.7: (2.55) ve (2.56)'nın sırasıyla λ ve γ gerçel iki katlı kökleri olsun. Buna göre

$$1. \quad \gamma < \lambda < 0,$$

$$2. \quad \rho > \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma)}}$$

koşulları sağlanıyorsa $\forall (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ başlangıç noktasından $x_0 \neq y_0$ için oyunu bitirmek mümkündür.

d-) (2.55)'in λ iki kat kökü (2.56)'nın ise $\alpha \pm i\beta$ karmaşık kökleri olması halinin incelenmesi

(2.55) deki diferansiyel denklemin iki kat kökü için çözüm “c şıkkı” nda verilmiştir. Buna göre $\varphi_1(t)$ ve $\varphi_2(t)$ 'in çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} - \lambda t e^{\lambda t}, \quad \varphi_2(t) = t e^{\lambda t}.$$

(2.56) deki diferansiyel denklemin eşlenik karmaşık kökü için çözüm “b şıkkı” nda verilmiştir. Buna göre $\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$ 'in çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$\psi_2(t) = \frac{1}{\beta} t e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \psi_1(t) = e^{\alpha t} \left(\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right).$$

Buna göre varsayım 2.4'deki (2.45) ifadesi aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$-\varphi_2(t)F(t) = -\psi_2(t)E, \quad t \geq 0$$

$$F(t) = \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} E$$

$$F(t) = \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} E = \frac{e^{\alpha t} \sin \beta t}{\beta t e^{\lambda t}} E = \frac{\sin \beta t}{\beta t} e^{(\alpha - \lambda)t} E$$

olur. $t = t_*$ için $\sin \beta_1 t_* = 0$ olsa, $\lim_{x \rightarrow t_*} \frac{1}{k} \frac{\sin k \beta_1 t}{\sin \beta_1 t} = 1$ olduğuna göre

$$F(t) = \frac{\sin \beta t}{\beta t} e^{(\alpha - \lambda)t} E \leq e^{(\alpha - \lambda)t} \quad (2.72)$$

dir.

i-) $\alpha < \lambda$ olduğunu varsayalım

(2.72) ifadesini (2.61)'deki $I(t)$ de yerine yazarsak

$$I^2(t) \leq \sigma^2 \int_0^t e^{2(\alpha-\lambda)s} ds$$

$$\int_0^t \frac{\varphi_2^2}{\varphi_2^2} = \frac{1}{2(\alpha-\lambda)} (e^{2(\alpha-\lambda)t} - 1)$$

$$\int_0^t \frac{\varphi_2^2}{\varphi_2^2} ds \leq \int_0^t e^{2(\alpha-\lambda)s} ds = \frac{1}{2(\alpha-\lambda)} (e^{2(\alpha-\lambda)t} - 1)$$

$$I^2(t) \leq \sigma^2 \frac{1}{2(\alpha-\lambda)} (e^{2(\alpha-\lambda)t} - 1)$$

dir. (2.65)'de ki denklemden

$$\sup_{[0,+\infty]} \frac{e^{2(\alpha-\lambda)t} - 1}{2(\alpha-\lambda)} = \frac{1}{2(\lambda-\alpha)} \text{ olur. Buradan}$$

$$I^2(t) \leq \sigma^2 \frac{1}{2(\lambda-\alpha)}$$

elde edilir. varsayım 2.5'de $\rho \geq I(t)$ olmalıdır. Buna göre $\rho \geq \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda-\alpha)}}$ olsun. Burada

$\rho \geq I(t)$ olduğu aşıkardır. Yani varsayım 2.5 sağlanmaktadır.

$$\hat{G}(t) = \left\{ \int_0^t \varphi_2(s) w(s) ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda-\alpha)}} \right)^2 \right. \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme (2.47) ile gösterilen kümesinden daha küçüktür. Yani

$\forall t$ için $\hat{G}(t) \subset G(t)$ olduğu aşıkardır. Burada

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \varphi_2(s) w(s) ds \right\| &\leq \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s) ds} \sqrt{\int_0^t \|w(s)\|^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s) ds} \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda-\alpha)}} \right) \end{aligned}$$

dır. Buna göre $\hat{G}(t)$ merkezi sıfırda olan yarıçapı

$$R(t) = \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s) ds} \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \alpha)}} \right)$$

olan bir küredir.

ii-) $\lambda < 0$ olduğunu varsayalım

Buna göre $\alpha < 0$ olur. $t \rightarrow +\infty$ giderken $\forall z_0$ için $\Pi e^{t\lambda} z_0 \rightarrow 0$ olmaktadır.

$R(t)$ yarı çapı monoton artmaktadır. Buradan t 'nin yeteri kadar büyük değerleri için $\Pi e^{t\lambda} z_0 \in G(t)$ dir.

Sonuç: $t \rightarrow +\infty$ giderken $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi e^{t\lambda} z_0 = 0$ olduğu için ve $\hat{G}(t)$ 'nin yarı çapı yukarıdaki özelliğinden dolayı $\Pi e^{t\lambda} z_0 \in G(t)$ olmaktadır ve varsayımı sağlamaktadır.

Aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 2.8: (2.55) ve (2.56)'nın sırasıyla λ iki kat kökü ve $\alpha + i\beta$ karmaşık kökleri olsun. Buna göre

$$1. \quad \alpha < \lambda < 0,$$

$$2. \quad \rho > \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \alpha)}},$$

koşulları sağlanıyorsa $\forall (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ başlangıç noktasından $x_0 \neq y_0$ için oyunu bitirmek mümkündür.

e-) (2.55)'in λ iki kat kökü (2.56)'nın da farklı γ_1 ve γ_2 gerçel karakteristik kökleri olması halinin incelenmesi

(2.55)'deki diferansiyel denklemin iki kat kökü için çözüm “c şıkkı” nda verilmiştir. Buna göre $\varphi_1(t)$ ve $\varphi_2(t)$ 'in çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} - \lambda t e^{\lambda t}, \quad \varphi_2(t) = t e^{\lambda t}.$$

(2.56)'deki diferansiyel denklemin farklı gerçel kökler için çözüm “a şıkkı” nda verilmiştir. Buna göre $\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$ 'in çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$\psi_1(t) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{\gamma_1 t} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{\gamma_2 t}, \quad \psi_2(t) = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}).$$

Buna göre Varsayım 2.4'deki (2.45) ifadesi aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$-\varphi_2(t)F(t) = -\psi_2(t)E, t \geq 0$$

$$F(t) = \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} E$$

$$F(t) = \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} E = \frac{e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}}{(\gamma_1 - \gamma_2) t e^{\lambda t}} E = \frac{e^{\gamma_2 t} - e^{\gamma_1 t}}{(\gamma_2 - \gamma_1) t e^{\lambda t}} E = \frac{1 - e^{(\gamma_1 - \gamma_2)t}}{(\gamma_2 - \gamma_1) t e^{(\lambda - \gamma_2)t}} E \quad (2.73)$$

i-) $\gamma_1 < \gamma_2$ olduğunu varsayalım

$\frac{1 - e^{\alpha t}}{t}$ fonksiyonu $\alpha < 0$ için monoton azalandır ve $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\alpha t}}{t} = \alpha$ dir. Buna göre $\frac{1 - e^{(\gamma_1 - \gamma_2)t}}{t}$ fonksiyonu da $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$ için monoton azalan bir fonksiyondur ve bu fonksiyonun limiti $\gamma_1 - \gamma_2$ dir.

ii-) $\gamma_2 - \lambda < 0$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda (2.73) ifadeside aşağıdaki şekilde olur.

$$\frac{\psi_2}{\varphi_2} \leq e^{(\gamma_2 - \lambda)t}$$

Bunun integralini alırsak

$$\int_0^t \frac{\psi_2^2}{\varphi_2^2} \leq \int_0^t e^{2(\gamma_2 - \lambda)s} = \frac{1}{2(\gamma_2 - \lambda)} (e^{2(\gamma_2 - \lambda)t} - 1)$$

dir. (2.65)'de ki denklemden $\sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{e^{2(\gamma_2 - \lambda)t} - 1}{2(\gamma_2 - \lambda)} = \frac{1}{2(\lambda - \gamma_2)}$ olur. (2.73) ve son ifadeden

$$I^2(t) \leq \sigma^2 \frac{1}{2(\lambda - \gamma_2)}$$

dir. varsayım 2.5'de $\rho \geq I(t)$ olmalıdır. Buna göre $\rho \geq \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma_2)}}$ olsun. Burada $\rho \geq I(t)$

olduğu aşıkardır. Yani varsayım 2.5 sağlanmaktadır.

$$\hat{G}(t) = \left\{ \int_0^t \varphi_2(s) w(s) ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma_2)}} \right)^2 \right. \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme (2.47) ile gösterilen kümesinden daha küçüktür. Yani $\forall t$ için $\hat{G}(t) \subset G(t)$ olduğu aşıkardır. Burada

$$\left\| \int_0^t \varphi_2(s) w(s) ds \right\| \leq \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s) ds} \sqrt{\int_0^t \|w(s)\|^2 ds} \leq \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s) ds} \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma_2)}} \right)$$

dır. Buna göre $\hat{G}(t)$ merkezi sıfırda olan yarıçapı

$$R(t) = \sqrt{\int_0^t \varphi_2^2(s) ds} \left(\rho - \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma_2)}} \right)$$

olan bir küredir.

iii-) $\lambda < 0$ olduğunu varsayalım

Buna göre $\alpha < 0$ olur. $t \rightarrow +\infty$ giderken $\forall z_0$ için $\Pi e^{tA} z_0 \rightarrow 0$ olmaktadır.

$R(t)$ yarı çapı monoton artmaktadır. Buradan t 'nin yeteri kadar büyük değerleri için $\Pi e^{tA} z_0 \in G(t)$ dir.

* Aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 2.9: (2.55)'nin λ iki kat kökü, (2.56)'nın farklı γ_1 ve γ_2 reel iki kökü olsun. Buna göre

$$1. \quad \gamma_2 < \lambda < 0,$$

$$2. \quad \gamma_1 < \gamma_2,$$

$$3. \quad \rho > \frac{\sigma}{\sqrt{2(\lambda - \gamma_2)}}$$

koşulları sağlanıyorsa $\forall (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ başlangıç noktasından $x_0 \neq y_0$ için oyunu bitirmek mümkündür.

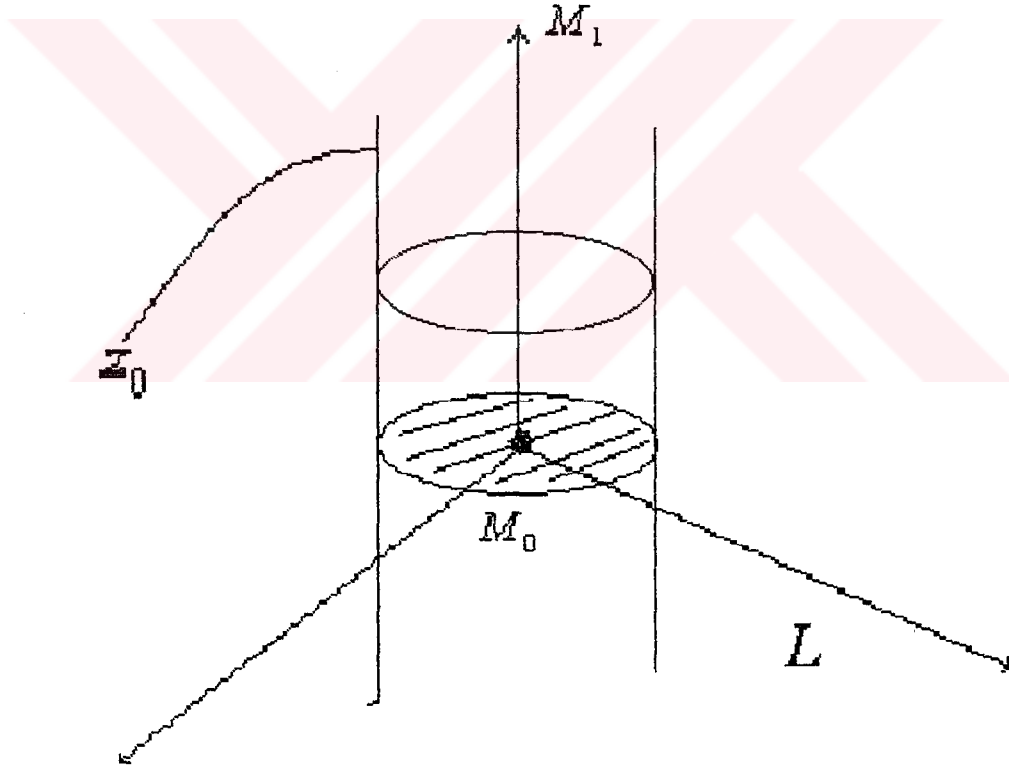
3. EKSİK BİLGİ ALTINDA TAKİP PROBLEMİ

3.1 Eksik Bilgi Altında İntegral ve Geometrik Kısıtlımalı Lineer Diferansiyel Oyunlarda Bir Yöntem

$z(t)$ süreci

$$\dot{z}(t) = Az(t) - Bu(t) + Cv(t) \quad (3.1)$$

denklemini ile verilmiştir. Burada $z \in R^n$, $u \in R^p$, $v \in R^q$ A - $n \times n$ boyutlu, B - $p \times n$ boyutlu, C - $q \times n$ boyutlu verilmiş matrislerdir. Takip eden oyuncu $u(t)$ kontrolü ile $z(t)$ yörüngesini $z_0 \notin M$ başlangıç noktasından sonlu zamanda M 'e getirmek istemekte, İkinci oyuncu $v(t)$ kontrolünü kullanarak bu isteğe engel olmak istemektedir. Burada M terminal kümesi $M_0 + M_1$ şeklinde silindirik bir kümedir (şekil 2.1). Burada M_1 alt uzay, M_0 ise L 'e dahildir. L ise M_1 'in R^n de ortogonal tamamlayıcısıdır. Yani $R^n = M_1 \oplus L$ dir.



Şekil 2.1: Eksik bilgi altında M terminal kümesinin gösterilmesi

$\Pi: R^n \rightarrow L$ ortogonal izdüşüm olsun. O halde $z(t_1) \in M$ olduğunda $\Pi z(t_1) \in M_0$ olur. Bunun terside doğrudur.

$u(t)$ ve $v(t)$ kontrolleri

$$\int_0^{\infty} \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \quad v(t) \in Q \quad (3.2)$$

sırasıyla integral ve geometrik kısıtlamaları sağlıyor. Burada $Q \subset R^q$ kompakt bir alt kümedir ve $u(\cdot)$ ise karesi integrallenebilen fonksiyonlar sınıfındandır.

Takip Problemi ; Öyle u stratejisi bulunuz ki her $v(t)$ için $z(t_1) \in M$ veya $\Pi z(t_1) \in M_0$ olsun

Tanım 3.1: $z_0 \notin M$ başlangıç noktası için öyle bir $T(z_0) > 0$ zamanı var ve her keyfi mümkün $v(\cdot)$ kontrolü için öyle mümkün $u(\cdot)$ kontrolü kurulabilirse, (3.1) diferansiyel denkleminin, $z(t)$ yörüngesi $t_1 \leq T(z_0)$ anında $z(t_1) \in M$ olursa, oyunu z_0 noktasından sonlu zamanda bitirmek mümkündür denir.

Takip eden oyuncu $\forall t > 0$ için takip edilen oyuncunun kontrolü hakkında başlangıçtan itibaren belli bir zaman aralığında bilgi almıyor ve bu zamandan sonra ise aldığı bilgi de gecikmeli olmaktadır.

Bu çalışmada incelenen diferansiyel oyunun böyle bir özelliği olduğuna göre bu tip problemlere eksik bilgi altında takip problemi adını verdik.

Bu tanımla ilgili olarak aşağıdaki problemler incelenmiştir.

- 1) Hangi $z_0 \notin M$ başlangıç noktasından oyunun bitirilmesi mümkündür?
- 2) Oyunu bitiren $u(\cdot)$ stratejisi nasıl kurulabilir?
- 3) $T(z_0)$ zamanı mevcut mu?

Burada takip eden oyuncu her $t \in [t_0, T]$ için bildiği $\{v(s) | s \in [\tau(t_0), \tau(t)]\}$ dir. Burada T ve t_0 verilmiştir. her $t \geq t_0$ için $\tau(t)$ fonksiyonu verilmiş sürekli ve diferansiyellenebilen monoton artan ve $\tau(t_0) \geq 0$, $\tau(t) \leq t$ dir. $\tau(t)$ fonksiyonu ve t_0 zamanı, takip eden tarafından bilinmektedir. Demek ki takip eden $[0, t_0]$ zaman aralığında $v(s)$ hakkında hiçbir şey bilmiyor t_0 anından sonra her t anında $v(s)$ hakkında $t - \tau(t)$ gecikmesi ile bilgi sahibi oluyor. $u^*(t)$, $[0, t_0]$ zamanında takipçinin kontrolü olsun. Buna göre

$$\int_0^{t_0} \|u^*(t)\|^2 dt \leq \rho^2 \text{ olmalıdır.}$$

$$\tilde{\rho}^2 = \rho^2 - \int_0^{t_0} \|u^*(t)\|^2 dt \quad (3.4)$$

yazalım.

Varsayım 3.1: Öyle sürekli operatör fonksiyonu $F(s): R^q \rightarrow R^p$ var ki

$$\Pi e^{(t_1 - \tau(s))A} C = \Pi e^{(t_1 - s)A} B F(s), s \in [t_0, t_1], \quad (3.5)$$

dir. Burada $t_1 \leq T$ 'dir. $l^2(t)$ sayısını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$l^2(t) = \sup_{\substack{v(s) \in Q \\ s \in [0, t]}} \int_{t_0}^t \|F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)\|^2 ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.6)$$

Varsayım 3.2: Her $t: t_0 \leq t \leq t_1$ için $\tilde{\rho} \geq l(t)$ olsun, (3.7)

Aşağıdaki kümeleri göz önüne alalım.

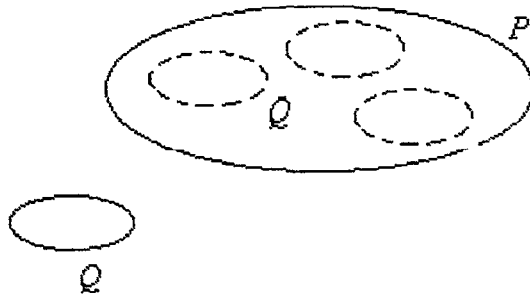
$$H(t, t_0) = \left\{ \int_0^{\tau(t_0)} \Pi e^{(t-s)A} C v(s) ds + \int_{\tau(t)}^t \Pi e^{(t-s)A} C v(s) ds \mid v(s) \in Q, s \in [0, t] \right\} \quad (3.8)$$

$G(t)$ kümesini yazalım.

$$G(t) = \left\{ \int_{t_0}^t \Pi e^{(t-s)A} B w(s) ds \mid \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq (\tilde{\rho} - l(t))^2 \right\}$$

$H(t, t_0)$ ve $G(t)$ kümeleri kompakt kümelerdir.

Tanım 3.2 $P \subset R^n, Q \subset R^n$ kümeleri verilsin. Buna göre Pontryagin farkı $P \ast Q = \{x \in R^n \mid x + Q \subset P\}$ şeklindedir. (şekil 2.2).



Şekil 2.2 : Pontryagin farkı

Varsayım 3.3:

$$M_0 \overset{*}{\neq} H(t, t_0) \neq \emptyset, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (3.10)$$

dir

Varsayım 3.4: Aşağıdaki koşul sağlansın:

$$\Pi e^{t_1 A} \left(z_0 - \int_0^{t_0} e^{-sA} B u^*(s) ds \right) \in G(t_1) + (M_0 \overset{*}{\neq} H(t_1, t_0)) \quad (3.11)$$

Teorem 3.1: Varsayım 3.1 ile varsayım 3.4 sağlandığı takdirde $z_0 \notin M$ başlangıç noktasından başlayan oyun $t = t_1$ anında biter.

İspat: varsayım 3.4 den elde edilir ki öyle $w^*(s)$, $t_0 \leq s \leq t_1$ için

$$\text{a-)} \int_{t_0}^{t_1} \|w^*(s)\|^2 ds \leq (\tilde{\rho} - l(t_1))^2 \quad (3.12)$$

$$\text{b-)} \Pi e^{t_1 A} \left(z_0 - \int_0^{t_0} e^{-sA} B u^*(s) ds \right) - \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A} B w^*(s) ds + H(t_1, t_0) \subset M_0 \quad (3.13)$$

dir. $v(s)$, $s \in [0, t_1]$ takip edilenin keyfi mümkün kontrolü olsun. (3.13) denkleminde aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \Pi e^{t_1 A} \left(z_0 - \int_0^{t_0} e^{-sA} B u^*(s) ds \right) - \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A} B w^*(s) ds + \\ + \int_0^{\tau(t_0)} \Pi e^{(t_1-s)A} C v(s) ds + \int_{\tau(t_1)}^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} C v(s) ds \in M_0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Bu problem için takip eden oyuncunun kontrolünü aşağıdaki gibi kuralım:

$$u(s) = \begin{cases} u^*(s) & , s \in [0, t_0] \\ F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s) + w^*(s) & , s \in [t_0, t_1] \end{cases} \quad (3.15)$$

$u(s)$ in mümkün olduğunu gösterelim.

$$\sqrt{\int_0^{t_1} \|u(s)\|^2 ds} = \sqrt{\int_0^{t_0} \|u^*(s)\|^2 ds + \int_{t_0}^{t_1} \|F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s) + w^*(s)\|^2 ds} \quad (3.16)$$

(3.4)'deki ifadeden

$$\int_0^{t_0} \|u^*(s)\|^2 ds = \rho^2 - \tilde{\rho}^2 \quad (3.17)$$

elde edilir.

$$\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \|F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s) + w^*(s)\|^2 ds} \leq \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \|F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)\|^2 ds} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \|w^*(s)\|^2 ds} \quad (3.18)$$

$$\leq l(t_1) + \tilde{\rho} - l(t_1) = \tilde{\rho}$$

(3.16)'deki ifade de

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_0^{t_1} \|u(s)\|^2 ds} &\leq \sqrt{\rho^2 - \tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2} = \rho \\ z(t_1) &= e^{t_1 A} z_0 - \int_0^{t_1} e^{(t_1-s)A} Bu(s) ds + \int_0^{t_1} e^{(t_1-s)A} Cv(s) ds \\ &= e^{t_1 A} z_0 - \int_0^{t_0} e^{(t_1-s)A} Bu^*(s) ds + \int_{\tau(t_0)}^{\tau(t_1)} e^{(t_1-s)A} Cv(s) ds + \int_0^{\tau(t_0)} e^{(t_1-s)A} Cv(s) ds \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A} B(F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s) + w^*(s)) ds + \int_{\tau(t_1)}^{t_1} e^{(t_1-s)A} Cv(s) ds \\ &= e^{t_1 A} \left(z_0 - \int_0^{t_0} e^{-sA} Bu^*(s) ds \right) - \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A} BF(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s) ds - \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A} Bw^*(s) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau(s))A} Cv(\tau(s))\dot{\tau}(s) ds + \int_0^{\tau(t_0)} e^{(t_1-s)A} Cv(s) ds + \int_{\tau(t_1)}^{t_1} e^{(t_1-s)A} Cv(s) ds \end{aligned}$$

burada $\tau(r) = s$ dönüşümü yapılarak

$$\int_{\tau(t_0)}^{\tau(t_1)} e^{(t_1-s)A} Cv(s) ds = \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau(r))A} Cv(\tau(r))\dot{\tau}(r) dr$$

elde edilmiştir. Buradan

$$\begin{aligned}
\Pi z(t_1) = & \Pi e^{t_1 A} \left(z_0 - \int_0^{t_0} e^{-sA} B u^*(s) ds \right) - \int_{t_0}^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B F(s) v(\tau(s)) \dot{\tau}(s) ds \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B w^*(s) ds + \int_{t_0}^{t_1} \Pi e^{(t_1-\tau(s))A} C v(\tau(s)) \dot{\tau}(s) ds + \int_0^{\tau(t_0)} \Pi e^{(t_1-s)A} C v(s) ds \\
& + \int_{\tau(t_1)}^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} v(s) ds
\end{aligned}$$

varsayım 3.1'den

$$\int_{t_0}^{t_1} \Pi e^{(t_1-s)A} B F(s) v(\tau(s)) \dot{\tau}(s) ds = \int_{t_0}^{t_1} \Pi e^{(t_1-\tau(s))A} C v(\tau(s)) \dot{\tau}(s) ds$$

olduğuna göre yukarıdaki ifadeyi kullanarak (3.14)'yi dikkate aldığımızda $\Pi z(t_1) \in M_0$ dir. Sonuç olarak takip edilen ikinci oyuncunun her uygun $v(s)$ kontrolüne karşı takip eden birinci oyuncunun (3.15)'de öyle bir $u(s)$ kontrolü kurulur ki z_0 başlangıç noktasından çıkan yörünge en geç t_1 zamanında M alt uzayına gelir. Böylece teoremin ispatı yapılmıştır.

Yukarıda ispatını yaptığımız teoremi bir örneğin çözümüne uygulayalım.

Örnek 3.1: Varsayalım ki takip eden oyuncunun hareketi

$$\dot{x} + \alpha x = u \tag{3.19}$$

olsun. Takip edilen oyuncunun hareketi ise

$$\dot{y} + \beta y = v \tag{3.20}$$

ile verilsin. $\alpha > 0, \beta > 0$ sürtünme katsayısı olup birer skaler sayılar, $x, y, u, v \in R^n$ vektörler ve $u(t), v(t)$ kontrolleri ölçülebilir ve aşağıdaki koşulları sağlayan kontrol fonksiyonlarıdır.

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt \leq \rho^2, \rho > 0, \|v(t)\| \leq \sigma \tag{3.21}$$

ayrıca her biri sırasıyla integral ve geometrik kısıtlardır. $\varepsilon > 0$ bir sayı olarak verilmiştir. Oyun $(x_0, y_0) : \|x_0 - y_0\| > \varepsilon$ başlangıç noktasından başlıyor.

$$\|x(t_1) - y(t_1)\| \leq \varepsilon \tag{3.22}$$

olduğu zaman $t = t_1$ anında da bitmektedir. Takip eden oyuncu $\forall t > 0$ anında (x_0, y_0) için bilgi sahibidir.

Başlangıç koşulları $(x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ ve $\alpha, \beta, \rho, \sigma$ parametreleri hangi koşulları sağlamalıdır ki t_1 zamanında oyun bu başlangıç noktasından bitsin yani (3.22)'deki ifade gerçekleşsin.

Bu problemi çözmek için baş taraftaki Teorem 3.1'i uygulayacağız. (3.19), (3.20) ve (3.21) ile verilen takip problemini (3.1)'deki diferansiyel oyun halinde yazmak gerekecektir. Bu durumda $x = z_1$, $y = z_2$, şeklinde yazalım. $z_1, z_2 \in R^n$ dir, yani birer vektördür. O halde (3.19) ve (3.20) denklemleri aşağıdaki

$$\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + u \quad (3.23)$$

$$\dot{z}_2 = -\beta z_2 + v$$

gibi yazılır. (3.1)'deki A, B, C matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha E & 0 \\ 0 & -\beta E \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -E \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada 0 – (kxk) sıfır matrisi, E – (kxk) birim matrisi ifade etmektedir. O halde (3.23) denklemini (3.1)'deki gibi yazabiliriz. (3.22)'deki denklemden

$$M_1 = \{(z_1, z_2) | z_1 = z_2\} \quad (3.24)$$

lineer uzayı elde edilir.

$M_1 = \{(z_1, z_2) | z_1 = z_2\}$ olsun, buna göre $M_1 \perp L$ olduğu için $L = \{(z_1, z_2) | z_1 = -z_2\}$ dir. M_0 ise $M_0 = \{(z, -z) | \|z\| \leq \frac{\epsilon}{2}\}$ şeklinde tanımlayalım. M_0 'in bu şekilde olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$(z_1, z_2) \in M_0 + M_1 \Rightarrow$$

$$(z_1, z_2) = (z, -z) + (a, a)$$

$$z_1 = z + a,$$

$$z_2 = -z + a$$

$\|z_1 - z_2\| = 2\|z\| \leq \varepsilon$, $z = (z_1, z_2) \in R^{2n}$, yani $(z_1, z_2) \in M_0 + M_1$ dir. Bu ise $\|z_1 - z_2\| \leq \varepsilon$ dir.

Buradan terminal kümesini $M = M_0 + M_1$ şeklinde buluruz.

Şimdi (3.1), (3.21), (3.24) diferansiyel oyununu ele alalım ve takip eden oyuncu öyle bir strateji kurmalıdır ki takip edilen oyuncunun her kontrolü (3.1)'nin uygun $z(t)$ çözümü M kümesine ait olsun. Yani $z(t_1) \in M$ olsun ve takip edilen oyuncunun maksadı da öyle $v(t)$ mümkün kontrolü kursun ki her $t \geq 0$ için $z(t) \notin M$ olsun. Yani oyun hiçbir zaman bitmesin.

$\Pi: R^{2n} \rightarrow R^n$ ortogonal izdüşüm matrisini

$$\Pi = [E \quad -E]$$

şeklinde yazalım.

$$\Pi z = [E \quad -E] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = z_1 - z_2$$

buradan görülür ki $\|\Pi z\| \leq \varepsilon$ olursa $\|z_1 - z_2\| \leq \varepsilon$ dir. Bu ise $(z_1, z_2) \in M$ dir.

$\forall T > 0$ olsun incelediğimiz bu örnek için Teorem 3.1'deki $t_0 = 0$ ve $\tau(t) = \frac{t}{2}$ olarak alacağız. Varsayım 3.1'deki (3.5)

$$\Pi e^{(t_1 - \tau(s))A} C = \Pi e^{(t_1 - s)A} B F(s), s \in [t_0, t_1] \quad (3.27)$$

sağlamak ve gerçekleştirmek için $\Pi e^{tA} B$, $\Pi e^{tA} C$ matrislerini ve $F(s)$ operatörünü hesaplamalıyız. Önce $\Pi e^{tA} B$ matrisini hesaplayalım. Bunun için e^{tA} 'yı Taylor serisine açalım:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \hat{E} + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^i A^i}{i!} + \dots \\ e^{tA} &= \hat{E} + \begin{bmatrix} -\alpha t E & 0 \\ 0 & -\beta t E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^2 \alpha^2}{2!} E & 0 \\ 0 & \frac{t^2 \beta^2}{2!} E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^3 \alpha^3}{3!} E & 0 \\ 0 & -\frac{t^3 \beta^3}{3!} E \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} E e^{-\alpha t} & 0 \\ 0 & E e^{-\beta t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$e^{tA}B = \begin{bmatrix} Ee^{-\alpha} & 0 \\ 0 & Ee^{-\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ee^{-\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi e^{tA}B = \begin{bmatrix} E & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Ee^{-\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = -Ee^{-\alpha}$$

dir. Aynı yöntemlerle $\Pi e^{tA}C$ matrisi aşağıdaki gibi

$$\Pi e^{tA}C = \begin{bmatrix} E & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ee^{-\alpha} & 0 \\ 0 & Ee^{-\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -Ee^{-\beta} \end{bmatrix} = -Ee^{-\beta}$$

hesaplanır. Bulduğumuz bu değerleri Varsayım 3.1'deki formülde yerine koyarsak $F(s)$ 'i buradan bulabiliriz.

$$\Pi e^{(t_1 - \tau(s))A}C = \Pi e^{(t_1 - s)A}BF(s)$$

$$-e^{-\beta(t_1 - \tau(s))}CE = -e^{-\alpha(t_1 - s)A}EF(s)$$

$$F(s) = e^{\alpha(t_1 - s) - \beta(t_1 - \tau(s))}E, [0, T]$$

burada $\tau(s) = \frac{s}{2}$ alırsak;

$$F(s) = e^{(\alpha - \beta)t_1 - \alpha s + \beta \frac{s}{2}}E,$$

$$F(s) = e^{(\alpha - \beta)t_1} e^{(\frac{\beta}{2} - \alpha)s}E, s \in [0, t_1]$$

$t_0 = 0$ olduğuna göre

$$\int_0^{t_0} \|u^*(t)\|^2 dt = 0 \text{ olduğundan } \tilde{\rho} = \rho \text{ dir}$$

$$\int_0^t \|F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)\|^2 ds =$$

$$= \int_0^t \left\| e^{(\alpha - \beta)t_1} e^{(\frac{\beta}{2} - \alpha)s} v\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{2} \right\|^2 ds \leq e^{2(\alpha - \beta)t_1} \sigma^2 \frac{1}{4} \int_0^t e^{2(\frac{\beta}{2} - \alpha)s} ds$$

sol taraftaki integrali hesaplırsak

$$\int_0^t e^{2(\frac{\beta}{2}-\alpha)s} ds = \frac{1}{2(\frac{\beta}{2}-\alpha)} e^{2(\frac{\beta}{2}-\alpha)s} \Big|_0^t = \frac{1}{2(\frac{\beta}{2}-\alpha)} \left[e^{2(\frac{\beta}{2}-\alpha)t} - 1 \right]$$

buluruz.

$$\int_0^t \|F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{4} \sigma^2 e^{2(\alpha-\beta)t_1} \frac{1}{2(\frac{\beta}{2}-\alpha)} \left[e^{2(\frac{\beta}{2}-\alpha)t} - 1 \right]$$

buna göre

$$I^2(t) \leq \frac{1}{4} \sigma^2 e^{2(\alpha-\beta)t_1} \frac{1}{\beta-2\alpha} \left[e^{(\beta-2\alpha)t} - 1 \right], \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (3.28)$$

dir.

i-) $\frac{\beta}{2} < \alpha < \beta$ olsun

(3.28) ifadesinden $I^2(t) \leq \frac{1}{4} \sigma^2 \frac{e^{(\beta-2\alpha)t} - 1}{(\beta-2\alpha)}$ dir.

$\left(\frac{e^r - 1}{r} \right)' = \frac{re^r}{r} = e^r > 0$ monoton artan olduğu için $\frac{e^{(\beta-2\alpha)t} - 1}{\beta-2\alpha}$ monoton artan olacaktır.

• Buna göre $0 \leq t \leq t_1$ aralığında $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{(\beta-2\alpha)t} - 1}{\beta-2\alpha} = \frac{1}{2\alpha-\beta}$ olacaktır. Buna göre $\forall t \geq 0$ için

$$I^2(t) \leq \frac{\sigma^2}{2\alpha-\beta} \cdot \frac{1}{4} \text{ dir.}$$

$\rho \geq \sqrt{\frac{\sigma^2}{(2\alpha-\beta)} \cdot \frac{1}{4}}$ veya $\rho \geq \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{1}{2\alpha-\beta}}$ olduğu zaman varsayım 3.2 gerçekleşir.

$$H(t,0) = \left\{ \int_0^0 + \int_{\frac{t}{2}}^t \Pi e^{(t-s)A} C v(s) ds \mid \|v\| \leq \sigma, s \in [0,t] \right\}$$

$$H(t,0) = \left\{ \int_{\frac{t}{2}}^t -e^{-\beta(t-s)} v(s) ds \mid \|v\| \leq \sigma, s \in [0,t] \right\}$$

$$\left\| \int_{\frac{t}{2}}^t -e^{-\beta(t-s)} v(s) ds \right\| \leq \sigma \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-\beta(t-s)} ds$$

$$\int_{\frac{t}{2}}^t e^{-\beta(t-s)} ds = e^{-\beta t} \int_{\frac{t}{2}}^t e^{\beta s} ds = \frac{1}{\beta} e^{-\beta t} e^{\beta s} \Big|_{\frac{t}{2}}^t = \frac{e^{-\beta t}}{\beta} \left(e^{\beta} - e^{\beta \frac{t}{2}} \right) = \frac{1}{\beta} - \frac{e^{-\beta \frac{t}{2}}}{\beta}$$

olur. Buna göre

$$H(t,0) = B \left(0; \sigma \left(\frac{1}{\beta} - \frac{e^{-\beta \frac{t}{2}}}{\beta} \right) \right)$$

dir. $B \left(0; \sigma \left(\frac{1}{\beta} - \frac{e^{-\beta \frac{t}{2}}}{\beta} \right) \right)$; merkezi sıfırda ve yarıçapı $\sigma \left(\frac{1 - e^{-\beta \frac{t}{2}}}{\beta} \right)$ olan bir küredir.

$\frac{1}{\beta} - \frac{e^{-\beta \frac{t}{2}}}{\beta}$ monoton artarak $\frac{1}{\beta}$ yaklaşmaktadır. Yani $\forall t$ için $\frac{1}{\beta} - \frac{e^{-\beta \frac{t}{2}}}{\beta} \leq \frac{1}{\beta}$ olduğu aşikardır.

Eğer $\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2} \geq \frac{\sigma}{\beta}$ olsa $H(t,0) \subset M_0, \forall t \geq 0$ dir. Buradan varsayım 3.3 $\forall t \geq 0$ için

$M_0 * H(t,0) \neq \emptyset$ gerçekleşecektir.

$$G(t) = \left\{ \int_0^t -e^{\alpha(t-s)} w(s) ds \left\| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq (\rho - l(t))^2 \right\} \right\}$$

$$\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = e^{-2\alpha t} \int_0^t e^{2\alpha s} ds = e^{-2\alpha t} \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha s} \Big|_0^t = \frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1) = \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}$$

bulduğumuz değeri aşağıda yerine yazarsak

$$\left\| \int_0^t -e^{\alpha(t-s)} w(s) ds \right\| \leq \sqrt{\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds} \cdot \sqrt{\int_0^t \|w(s)\|^2 ds} \leq (\rho - l(t)) \cdot \frac{\sqrt{1 - e^{-2\alpha t}}}{\sqrt{2\alpha}}$$

olur. Bundan daha küçük olan

$$\hat{G}(t) = \left\{ \int_0^t e^{\alpha(t-s)} w(s) ds \left| \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{1}{2\alpha - \beta}} \right)^2 \right. \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. $\forall t$ için $\hat{G}(t) \subset G(t)$ olduğu aşıkardır.

$$M_0 \ast H(t, 0) \supset B \left(0, \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2} - \frac{\sigma}{\beta} \right)$$

ii-) (3.11)'deki ifadeden $\Pi e^{t_1 A} z_0 \in \hat{G}(t_1) + B \left(0, \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2} - \frac{\sigma}{\beta} \right)$ olup olmadığını inceleyelim.

Eğer bunun doğru olduğunu gösterdiğimiz zaman varsayım 3.4'ünde doğruluğunu gerçeklemiş oluruz. $\Pi e^{t_1 A} z_0$ 'yı hesaplayalım:

$$\Pi e^{t_1 A} z_0 = \begin{bmatrix} e^{-\alpha t_1} z_{01} \\ e^{-\beta t_1} z_{02} \end{bmatrix},$$

burada $z_0 = \begin{bmatrix} z_{01} & z_{02} \end{bmatrix}$ dir.

$$\hat{G}(t_1) = B \left(0, \frac{\sqrt{1 - e^{-2\alpha t_1}}}{\sqrt{2\alpha}} \left(\rho - \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{1}{2\alpha - \beta}} \right) \right)$$

$t_1 \rightarrow +\infty$ olduğu zaman $\Pi e^{t_1 A} z_0 \rightarrow 0$ olur. Aynı zamanda

$$\frac{\sqrt{1 - e^{-2\alpha t_1}}}{\sqrt{2\alpha}} \left(\rho - \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{1}{2\alpha - \beta}} \right) \rightarrow \frac{\rho - \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{1}{2\alpha - \beta}}}{\sqrt{2\alpha}} \text{ olur. bu ise (3.11)'deki denklemi sağlar.}$$

Böylelikle aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 3.2: Takip eden oyuncunun hareketi $\dot{x} + \alpha x = u$, takip edilen oyuncunun hareketi ise $\dot{y} + \beta y = v$ ile verilsin. $\varepsilon > 0$ bir sayı olarak verilmiştir. Buna göre

$$\frac{\beta}{2} < \alpha < \beta, \quad \rho > \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{1}{2\alpha - \beta}}, \quad \varepsilon \geq \frac{\sqrt{2}\sigma}{\beta}$$

koşulları sağlandığı takdirde her $z_0 = [z_{01}, z_{02}] : \|z_{01} - z_{02}\| > \varepsilon$ noktasından başlayan oyunun bitmesi mümkündür.

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada karışık kısıtlamalı lineer diferansiyel oyunlar için (Pontryagin, 1966,1967 Nikolsky, 1969 ve Azimov, 1974)'un çözüm yöntemleri geliştirilerek yeni bir çözüm yöntemi getirilmiştir. Lineer diferansiyel oyunun tanımı yapılmış ve onunla ilgili teorem geliştirilmiş, bu teoremin ispatı yapılmıştır. Bu teoremle ilgili örnekler verilmiştir. Ayrıca kuadratik lineer diferansiyel oyunların çözümleri incelenmiştir. Ayrıca bu çözümler için genel bir algoritma geliştirilmiştir.

İkinci bölümde eksik bilgi altında lineer diferansiyel oyunlar için yeni bir çözüm yöntemi getirilmiştir. Bu bölümdeki lineer diferansiyel oyunlar için terminal küme silindir küme olarak ele alınmıştır. Lineer diferansiyel oyunun tanımı yapılmış ve onunla ilgili teorem geliştirilmiş ve ispatı yapılmıştır. Bu teoremle ilgili bir örnek verilmiş ve çözümü incelenmiştir.

Tezimin girişinde de belirttiğim gibi diferansiyel oyunlar ekonomi ve askeri alanlarda kullanılmaktadır. Yapmış olduğum bu teorik çalışmanın uygulaması yukarıda belirtilen alanlarda yapılabilir.

Benden sonra lineer diferansiyel oyunlar alanında çalışma yapmak isteyenler aşağıda sıralayacağım konularla ilgilenebilirler.

1-) Lineer diferansiyel oyunlarda, karışık kısıtlamalı kontroller altında kaçma (evasion) problemi

2-) $\dot{z}(t) = A_1 z(t) + A_2 z(t - \tau) + Bu + Cv$ şeklindeki lineer diferansiyel oyunlar

3-) Takip eden nesnelerin hareket denklemleri $\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i$, $i = \overline{1, q}$, takip edilen nesnenin hareket denklemi $\dot{y} = Dy + Cv$ olmak üzere karışık kısıtlamalı lineer diferansiyel oyunlar.

KAYNAKLAR

- Ahlatçioğlu, M., Tiryaki, F., (1998), Oyunlar Teorisi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Ayres, F., (1972), Matrix, (Ter. Pakdemirli, E., 1978, Güven Kitap Evi, Ankara), McGraw-Hill, New York.
- Ayres, F., (1972), Teori ve Problemlerle Diferansiyel Denklemler, (Ter. Pakdemirli, E., 1978, Güven Kitap Evi, Ankara), McGraw-Hill, New York.
- Azimov, A.Ya. (1974) "İntegral Kısıtlı Lineer Diferansiyel Oyunlarda bir Yöntem Hakkında" İzvestiya Akademi Nauk SSSR, seriya Technicheskaya Kibernetika, N2, 31-35.
- Bardi M., T.E.S. Raghavan, T. Parthasarathy, editors foreword by Tamer Başar., (1999), Stochastic and Differential Games : theory and numerical methods, Birkhäuser , Boston
- Boltyanskii, V. G., (1978), Optimal Control of Discrete Systems, (translated from Russian by Ron Hardin) J. Wiley, New York.
- Chikrii, A., (1997), Conflict-Controlled Processes, Academic Publishers, Dordrecht /Boston/London, Kluwer.
- Dimitri P. Bertsekas, (1995), Dynamic Programming and Optimal Control: 2nd Edition, Athena Scientific, Belmont. Mass:
- Frank, L., (1995), Optimal Control, J. Wiley, New York.
- Friedman, A., (1971), Differential Games , Jhon Wiley, New York.
- Gök, Ö., (1997), Fonksiyonel Analize Giriş, Yıldız Teknik üniversitesi, İstanbul.
- Gök, Ö., (1997), Reel analiz, Yıldız Teknik üniversitesi, İstanbul.
- Hajek, O. (1975) Pursuit Games An Introduction To The Theory And Applications Of Differential Games Of Pursuit And Evasion, Academic Press Inc., New York,
- Isaacs R., (1965) Differential Games, Wiley, New York
- Isaacs R., (1999) Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization, Dover Publications, Inc. Mineola, New York.
- Krasovsky N. N., Subbotin A. N., (1988), Positional Differential Games, Springer- Verlag, New York.
- Krasovsky A. N., Krasovskii N. N., (1995), "Control Under Lack of Information." Birkhauser, Boston. 1995.- 322 p.-
- Krasovsky N. N., (1985), Dynamic Systems Control, Moscow, Nauka.
- Krasovsky N. N., Subbotin, A. I., (1988), Game-Theoretical Control Problems.- New York; Berlin: Springer-Verlag .

- Krasovsky, N. N. (1970), Game Problems on Motions Encounter, Moscow, Nauka. 1970.
- Lee, E. B. and Markus, L. (1972), Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Lewin J., (1994), Differential Games : Theory and Methods for Solving Game Problems with Singular Surfaces, Springer – Verlag, New York.
- Lurie, (1993), Optimal Control Theory of Distributed Systems, Plenum Press, New York.
- Nikolsky, M.S., (1969), “İntegral Kısıtlı Lineer Diferansiyel Oyunlar.” Upravlyaemie Sistemi, Sibirskoe Otdelenie Akademi Nauk SSSR, N2, 203-214.
- Pontryagin, L. S. (1990), Optimal Control and Differential Games, American mathematical society, New York.
- Pontryagin L. S., (1980), “Linear Differential Games of Pursuit”, Mat. Sbornik. V112 (3), 325 – 370.
- Pontryagin, L. S. (1967) “Linear Differential Games 2”- Doklady Akademi Nauk SSSR, N4, V175, 1210 - 1213.
- Pontryagin, L. S. (1962), Ordinary Differential Equations, Reading, Mass: Addison – wesley.
- Pontryagin, L. S. (1966), “Linear Differential Games 1”, Doklady Akademi Nauka SSSR, N4, V174, 215 -253.
- Pontryagin, L. S. (1967), “On The Theory of Differential Games” Uspekhi Math., Nauka SSSR, N6, V174. 151 - 165
- Pontryagin, L. S.(1988), Selected Scientific Works, Vol. 2, Moscow, Nauka,
- * Pontryagin, L. S., Boltianski, V. G., Gamkrelidze, P. V., and Mishchenko, E. F., (1961), “Mathemaatical Theory of Optimal Process”, Fizmatgiz, Moscow, [English Trans: Interscience, New York (1962)]
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mrshchenko, E. F. (1962), The Mathematical Theory of Optimal Processes, New York.
- Propoi, A. I., (1981), “Elements of the Theory of Optimal Discrete Systems”, Nauka, Moscow.
- Shepley L. R., (1984), Differential Equations, J. Wiley & Sons, Inc., New York.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi: 01 Ocak 1970

Doğum Yeri : Ordu

Yüksek Öğrenimi 1988-1992 YTÜ Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 1992-1994 YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Ana Bilim Dalı

Doktora 2000-2003 YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Ana Bilim Dalı

Çalıştığı kurum

2000- Devam ediyor. YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü,
Araştırma Görevlisi.