

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ α -KONVEKS FONKSİYONLAR
SINIFININ İNCELENMESİ**

Arzu ŞEN

139770

**F.B.E Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 18.06.2003

Tez Danışmanı

: Prof.Dr. Hamit AVCI (Y.T.Ü.)

Jüri Üyeleri

: Prof.Dr. Füsun URAS (Y.T.Ü.)

: Prof.Dr. Akın TAŞDİZEN (Y.T.Ü.)

: Prof.Dr. Veli ŞAHMUROV (İ.Ü.)

: Prof.Dr. Nazım SADIĞ (İ.Ü.)

İSTANBUL, 2003

**Y.C. YÖNETİM KURULU
GECERLİDİR M.A. 122**

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. YALINKAT FONKSİYONLAR	7
3. YALINKAT FONKSİYONLAR İÇİN KLASİK DİSTORSİYON TEOREMLERİ	12
4. SUBORDINATION PRENSİBİ	27
5. POZİTİF REEL KISMA HAİZ FONKSİYONLAR	34
6. YILDIZIL FONKSİYONLAR	44
7. KONVEKS FONKSİYONLAR	51
8. α KONVEKS FONKSİYONLAR	66
9. KOMPLEKS MERTEBEDEN YILDIZIL FONKSİYONLAR	70
10. KOMPLEKS MERTEBEDEN KONVEKS FONKSİYONLAR	73
11. KOMPLEKS MERTEBEDEN α KONVEKS FONKSİYONLAR	75
12. SONUÇ	91
KAYNAKLAR	92
ÖZGEÇMİŞ	94

SİMGE LİSTESİ

α	$0 < \alpha < 1$ koşuluna uyan bir sayı
b	sıfırdan farklı kompleks bir sayı
b_0	$E(g)$ nin konform merkezi
C	konveks fonksiyonlar sınıfı
$C(\alpha)$	α yncı mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfı
$C(e^{-i\lambda} \cos \lambda)$	$z.f'(z)$ için λ -spirallike fonksiyonlar sınıfı
$C((1 - \alpha)e^{-i\lambda} \cos \lambda)$	$z.f'(z)$ için α yncı mertebeden λ -spirallike fonksiyonlar sınıfı
$C(r)$	analitik Jordan eğrisi
D	birim dairenin içi
Δ	birim dairenin dışı
$\partial D, \partial \Delta$	birim dairenin sınırı
$d(x,y)$	x ve y noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu
$E, E(g)$	$g(z) \in \Sigma$ fonksiyonuyla yapılan tasvirde, resim bölgesinin kompakt tamamlayıcısı
ϵ	pozitif bir reel sayı ve civarın yarıçapı
$G(A,B,C;z)$	Hipergeometrik fonksiyon
$\Gamma_\epsilon(x)$	iki boyutlu reel öklid uzayında bir x noktasının ϵ -civarı
$H(r)$	$C \setminus \{g(z) \mid z > r\}$
$h(\xi)$	z_0 noktasına göre $f(z)$ fonksiyonunun Koebe transformasyonu
$\prec$	subordinate olma özelliği
$M(\alpha)$	α konveks fonksiyonlar sınıfı
$M(\alpha, b)$	b kompleks mertebeden α konveks fonksiyonlar sınıfı
$N_\epsilon(x)$	x noktasının ϵ -civarı
Ω	bölge
P	pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar sınıfı

Σ	Δ da yalınkat $g(z)$ fonksiyonlar sınıfı
S	D de yalınkat $f(z)$ fonksiyonlar sınıfı
S^*	yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S^*(1 - \alpha)$	α yıncı mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S^*(1 - b)$	kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S^*(1 - e^{-i\lambda} \cos \lambda)$	λ -spirallike fonksiyonlar sınıfı
$S^*((1 - \alpha)e^{-i\lambda} \cos \lambda)$	α yıncı mertebeden λ -spirallike fonksiyonlar sınıfı
X	metrik uzay
Y	metrik uzayın bir alt uzayı



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1	(a,b) aralığının R^1 ve R^2 uzayında ifadesi..... 3
Şekil 1.2	Bölgenin O noktasına göre yıldızlı olma durumu 5
Şekil 1.3	Bölgenin O_1 noktasına göre yıldızlı olmama durumu 5
Şekil 1.4	Bölgenin konveks olma durumu 6
Şekil 2.1	Analitik fonksiyonlarda civar 9
Şekil 7.1	Teğet ve normal açıların gösterilimi 55



ÖNSÖZ

Doktora tezimi yöneten ve çalışmalarımda yakın ilgisini esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Hamit AVCI ' ya, bana her türlü problemimde dışardan destek veren Sayın Hocam Yard. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU'na ve sonsuz manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkürlerimi sunarım.



ÖZET

Basit bağlantılı bir bölgede analitik olan bir fonksiyon injektif ise yalınkattır. Yalınkat fonksiyon ilk olarak 1907 yılında Koebe tarafın dan tanıtıldı . Daha sonraki yıllarda diğer matematikçiler tarafından farklı yalınkat fonksiyon sınıfları tanıtılmıştır. Bir kompleks değişkenin analitik fonksiyonunun bir sınıfı üzerine yapılan çalışmanın temel amacı onun Taylor açılımındaki n . katsayısının modülü için bir üst sınır bulmaktır. Diğer temel amaç $f(z)$ fonksiyonunun modülü için distorsiyon teoremlerini bulmak ve aynı sınıf için Koebe bölgesini tayin etmektir. α -konveks fonksiyonlar sınıfı yıldızlı yalınkat fonksiyonlar ve konveks yalınkat fonksiyonların genelleştirilmiştir. 1970'li yıllarda P.T.Mocanu tarafından ortaya atılmıştır. Diğer yalınkat fonksiyon sınıfları kompleks b-mertebeden yıldızlı ve kompleks b-mertebeden konveks fonksiyonlardır. Bu sınıflar P.T.Wiatrowski tarafından tanıtılmıştır. Bu çalışmada α -konveks fonksiyonları kompleks mertebeden yıldızlı ve kompleks mertebeden konveks fonksiyonların bir lineer kombinezonu gibi genelleştirdik ve bu sınıf için integral gösterilimi, distorsiyon teoremini ve katsayı eşitsizliğini elde ettik.

Anahtar Kelimeler : Alfa, konveks, yıldızlı, kompleks mertebeden yıldızlı, kompleks mertebeden konveks.

ABSTRACT

A univalent function is analytic and injective in any simple connected domain. The univalent function was introduced by Koebe in 1907. After the years, different classes of the univalent functions were introduced by the other mathematicians. The basic aim of studying on a class of analytic functions of a complex variable is to find the upper bound of the module of an coefficient which is n .th coefficient of the Taylor's expansion. Another basic aim is to find the distortion theorems for the module of $f(z)$ and is to find Koebe Domain for this class.

The class of α -convex functions, which is generalization of univalent starlike functions and univalent convex functions, was introduced by P.T. Mocanu in seventies. Other classes of univalent functions are starlike functions of complex order b and convex functions of complex order b . These classes were introduced by P.T. Wiatrowski. In the study we generalized the class of α -convex functions as a linear combination of starlike functions of complex order and convex functions of complex order. And then we obtain an integral representation, distortion theorem and the coefficient inequality for this class.

Keywords : Alpha, convex, starlike, starlike of complex order, convex of complex order.

1.GİRİŞ

Birim çemberde analitik ve yalınkat olan tek kompleks değişkenli fonksiyonlar ilk olarak 1907 tarihinde Koebe tarafından incelenmiştir. Daha sonra da çeşitli matematikçiler bu sınıfları genelleştirerek çeşitli yalınkat fonksiyon sınıfları ortaya atmışlar ve bu sınıfları incelemişlerdir. Tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonların incelenmesinde temel amaç , ortaya atılan fonksiyon sınıfının Taylor açılımındaki a_n katsayısına ait modülün üst sınırını bulmak, fonksiyon sınıfına ait distorsiyon teoremlerini araştırmak ve Koebe bölgelerini ifade etmektir.

Biz bu çalışmada 1970'li yıllarda P. T. Mocanu tarafından ortaya atılan ve yıldızlı yalınkat fonksiyonlar sınıfı ile konveks yalınkat fonksiyonlar sınıfının bir genelleştirilmiş olan α -konveks fonksiyonlar sınıfını daha da genelleştirerek, 1980'li yıllarda P. Wiatrowski tarafından tanımlanan, kompleks mertebeden konveks ve kompleks mertebeden yıldızlı fonksiyonlar sınıflarının bir lineer kombinezonu olan "genelleştirilmiş α -konveks fonksiyonlar sınıfı" nı tanımlayarak, bu sınıf için yukarıda bahsedilen katsayı eşitsizliği ve distorsiyon teoremlerini inceledik. $0 \leq \alpha < 1$ reel bir parametre, $b \neq 0$ kompleks sayısının özel değerleri olmak üzere, daha önce yalınkat fonksiyonlar sınıfları için katsayı eşitsizlikleri ve distorsiyon teoremleri elde edildiğinden, incelediğimiz sınıfta bulunan neticeler, önceki neticelerin topluca ifade edilmesi bakımından önemlidir.

Şimdi analitik fonksiyonların tanım bölgelerinden bahsetmek için , elemanter topolojik kavramların tanımlarını vermek faydalı olacaktır.

1.1 Metrik Uzay : X boştan farklı herhangi bir cümle olsun. X cümlesinin herhangi iki elemanı için $d(x,y) \in \mathbb{R}$ reel sayısı, aşağıdaki aksiyomları sağlamak üzere verilmiş olsun.

- (i) $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ için $d(x,y) > 0$
- (ii) $\forall x, y \in X$, $x = y$ için $d(x,y) = 0$ (İdantik özelliği)
- (iii) $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ için $d(x,y) = d(y,x)$ (Simetrik özelliği)
- (iv) $\forall x, y, z \in X$, $x \neq y \neq z$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Üçgen eşitsizliği)

Bu takdirde

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

tasviri, X cümlesi üzerinde bir metrik uzay yapısını belirtmiş olur. Yani (X,d) sıralı ikilisine bir metrik uzay denir. Burada $x, y, z, \dots \in X$ lere X metrik uzayının noktaları, $d(x,y)$ reel sayısına da x ve y noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu adı verilir. Burada belirtmek gerekir ki yukarıda sıralanan aksiyomlara metrik uzay aksiyomları denir. Eğer X cümlesi C olarak alınırsa (C,d) sıralı ikilisi de bir metrik uzaydır.

1.2 Metrik Uzayların Alt Uzayları: X bir metrik uzay ve $Y \subset X$, X uzayının herhangi

bir alt cümlesi olsun. X metrik uzay olduğundan, X uzayında bir uzaklık fonksiyonu verilmiştir. Y cümlesinin her elemanı aynı zamanda X uzayının elemanı olduğundan, X uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonu, Y alt cümlesinin elemanları için aynı zamanda metrik uzay aksiyom- larını gerçekler. Bundan dolayı bir metrik uzayın her alt cümlesi de bir metrik uzaydır.

1.3.Tanım : X herhangi bir metrik uzay olsun. $\epsilon > 0$ reel sayısını ve $x \in X$ noktasını gözönüne alalım. X uzayı d uzaklık fonksiyonu ile donatılmış ise

$$N_\epsilon(x) = \{y | d(x, y) < \epsilon, y \in R\}$$

nokta cümlesine x noktasının ϵ -civarı adı verilir. Burada $\epsilon > 0$ reel sayısına bu civarın yarıçapı denir.

1.4 Tanım : X herhangi bir metrik uzay ve A , X uzayının bir alt cümlesi olsun. $x \in A$ noktası için $N_\epsilon(x) \subset A$ koşulunu sağlayan bir $N_\epsilon(x)$ civarı varsa, $x \in A$ noktasına A cümlesinin bir iç noktası denir.

1.5 Tanım : X herhangi bir metrik uzay ve A , X uzayının bir alt cümlesi olsun. A cümlesinin her noktası bir iç nokta ise, A cümlesine bir açık cümle denir.

1.6 Tanım : X herhangi bir metrik uzay ve A , X uzayının bir alt cümlesi olsun. X uzayına ait bir x noktası için, x noktasının her $N_\epsilon(x)$ civarında $x \neq y, y \in N_\epsilon(x)$ olacak şekilde, A cümlesinin hiç olmazsa bir y elemanı varsa, x noktasına A cümlesinin bir yığılma noktası veya limit noktası denir.

1.7 Tanım : X herhangi bir metrik uzay ve A , X metrik uzayının bir alt cümlesi olsun. A cümlesinin her yığılma noktası A cümlesinin bir noktası ise, A cümlesine kapalı cümle denir.(Yığılma noktasını içinde bulunduran kümeye kapalı küme denir.)

1.8 Alt ve Üst Uzaylara Göre Açık Olma Durumu : X metrik uzayının içinde bulunan bir Y alt metrik uzayı verilmiş olsun. A açık cümlesi Y alt metrik uzayının içinde olsun. Y nin bir alt uzay olmasından dolayı, Y uzayındaki civar kavramı, Y uzayını ihtiva eden X metrik uzayındaki civar kavramından daha dardır. Bundan dolayı, Y uzayında açık olan A cümlesi, X uzayında açık olmayabilir.

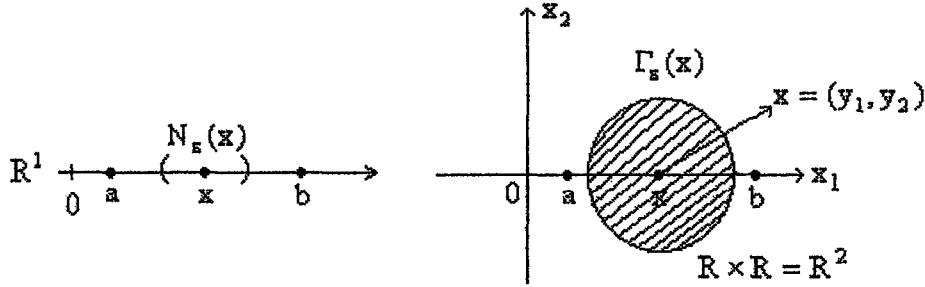
Buna örnek olarak; (a,b) açık aralığı R^1 bir boyutlu reel euclid uzayında açık bir cümledir. Fakat $R^1 \subset R^2$ yani R^1 bir boyutlu reel euclid uzayı $R^2 = R \times R$ iki boyutlu reel euclid uzayının bir alt uzayıdır ve (a,b) açık aralığı R^2 uzayında, bir açık cümle değildir.

İspat: R^1 bir boyutlu reel euclid uzayında bir (a,b) açık aralığı

$$(a,b) = \{x | a < x < b, x \in R^1\} \text{ nokta cümlesidir.}$$

Her (a,b) açık aralığı R^1 bir boyutlu reel euclid uzayında açık bir cümledir. Şimdi bir boyutlu reel euclid uzayının bir iki boyutlu R^2 euclid uzayının içinde alındığını farzedelim.

Burada ispatı basitleştirmek için, söz konusu R^1 uzayı R^2 uzayının içinde olan x_1 eksenini olarak alınmış olsun. Bu takdirde yukarıdaki aralık R^2 uzayında



Şekil 1.1 (a,b) aralığının R^1 ve R^2 uzayında ifadesi

$(a,b) = \{(x_1, x_2) \in R^2 | a < x_1 < b, x_2 = 0\}$ şeklinde belirtilen nokta cümlesidir ve $\forall x \in (a,b) \subset R^2$ noktasının genel bir $\Gamma_\epsilon(x)$ civarı

$$\Gamma_\epsilon(x) = \{y \in R^2 | [\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2]^{1/2} < \epsilon\} \text{ nokta cümlesidir.}$$

Fakat bu nokta cümlesi $y_2 \neq 0$ olacak şekilde y noktaları ihtiva ettiğinden (a,b) cümlesinin içinde bulunamaz. Bu halde (a,b) aralığının, R^2 uzayında düşünülmesi halinde, her x noktası için $\Gamma_\epsilon(x) \subset (a,b)$ olacak şekilde tek bir $\Gamma_\epsilon(x)$ bulunamaz. Yani (a,b) aralığı R^1 uzayında açık fakat R^2 uzayında açık değildir. İspat tamamlanmıştır.

Bu durumdan dolayı, alt ve üst uzaylara göre açık olma durumunu aşağıdaki ispatsız teoremle verebiliriz.

1.9 Teorem : X bir metrik uzay ve $Y \subset X$ alt metrik uzayını gözönüne alalım. Y alt metrik uzayında bulunan bir A alt cümlesinin Y uzayına göre açık olması için gerek ve yeter şart, B cümlesi X üst metrik uzayında açık bir cümle olmak üzere

$$A = B \cap Y$$

koşulunun gerçekleşmesidir.

1.10 Bağlantılı Olmak : X bir metrik uzay ve A bu uzayın bir alt cümlesi olsun. A cümlesi; boştan farklı, ayık, iki açık alt cümlelerin birleşimi olarak gösterilemezse, A cümlesine bağlantılıdır denir.

Yani bu demektir ki ;

$$B \neq \emptyset \quad B \text{ açık, } B \subset A$$

$$\text{ve } B \cap C = \emptyset \text{ olmak üzere } A = B \cup C$$

$$C \neq \emptyset \quad C \text{ açık, } C \subset A$$

olacak şekilde B ve C cümleleri bulunamıyorsa, A cümlesi bağlantılıdır denir.

1.11 Tanım: Boştan farklı, açık, bağlantılı bir cümleye bölge denir.

1.12 Tanım: Sonsuz noktasının düzleme katılmasıyla meydana gelen düzleme genişletilmiş

düzlem denir.

1.13 Tanım: Bir bölgenin tamamlayıcısı , genişletilmiş düzleme nazaran bağlantılı ise, bu bölgeye basit bağlantılı bölge denir.

1.14 Tanım: Bir bölgenin bir O noktasını herhangi bir A noktasına birleştiren doğru parçası tamamı ile bölge içinde kalıyorsa, bu bölgeye O noktasına nazaran yıldız bölge denir.

1.15 Tanım: Herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamı ile bölge içinde kalıyorsa, bölgeye konveks bölge denir.

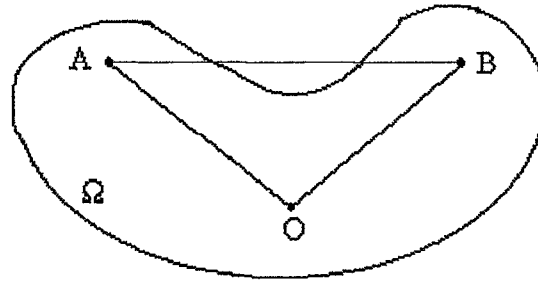
Şimdi de yıldız ve konveks bölge için analitik bir tanım verelim.

1.16 Tanım: Ω kompleks bir bölge olsun. Bu takdirde $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere, $z \in \Omega$ için $t.z \in \Omega$ koşulu gerçekleşiyorsa Ω bölgesine başlangıç noktasına nazaran yıldız bölge denir.

1.17 Tanım: Ω kompleks bir bölge olsun. $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere, $\forall z_1, z_2 \in \Omega$ için $t.z_1 + (1 - t).z_2 \in \Omega$ oluyorsa, Ω bölgesine konveks bölge denir.

1.18 Özellik: Yıldız bölge tanımından dolayı, bir O noktasına nazaran yıldız olan bölge, bölgenin bir başka noktasına nazaran yıldız bölge olmayabilir.

İspat : Şekil 1.2 O noktasına nazaran yıldız bir bölgedir, fakat A noktasına nazaran yıldız bölge değildir. O halde burada not etmek gerekir ki yıldız bölgeden bahsedildiği zaman, mutlaka sabit belirlenmiş bir noktadan bahsetmek lazımdır. Fakat konveks bölge tanımı gözönünde bulundurulacak olursa, konveks bölge her noktasına nazaran yıldız bölgedir.

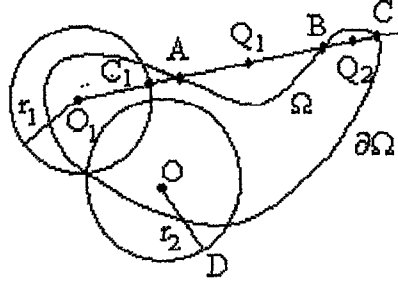


Şekil 1.2 Bölgenin O noktasına göre yıldızlı olma durumu

1.19 Özellik: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ bölgesi O başlangıç noktasına nazaran yıldız bölge olsun. $|z| = r$ çemberlerini gözönüne alalım. Bu çemberler üzerindeki noktaları, başlangıç noktasına birleştiren doğrular bölgenin sınırını en fazla bir noktada keser.

İspat: İspatı geometrik düşünceyle yapmak yerinde olur. Ω bölgesi O başlangıç noktasına göre yıldız bölge olsun. Başlangıç noktasını merkez kabul eden bir $z \in \Omega$ olmak üzere

$|z| = r_2$ çemberini gözönüne alalım. Şayet bu çember üzerindeki bir D noktasını başlangıç noktasına birleştiren doğru $\partial\Omega$ sınırını bir noktada keser. Eğer $|z| = r_1$ çemberini gözönüne alırsak, çember üzerindeki bir C_1 noktasını O_1 başlangıç noktasına birleştiren doğru $\partial\Omega$ sınırını A ve B gibi iki noktada keser. Halbuki yıldız bölge tanımından dolayı O_1Q_1 doğrusu tamamiyle bölge içinde kalmaz. Bu da bir çelişkidir. (Şekil 1.3)



Şekil 1.3 Bölgenin O_1 noktasına göre yıldızlı olmama durumu

Not: İspatta çelişkiye varabilmek için Ω bölgesi O_1 noktasına göre yıldız bölge farzedilmiştir.

1.20 Özellik: Ω bölgesi başlangıç noktasına göre yıldız bölge olsun. A noktası bölgenin sınırını bir kez dolaştığı zaman OA'nın argümanı daima aynı yönde 2π kadar değişir.

İspat: Özellik 1.19. dan A noktasına çember üzerinde karşılık gelen nokta A' olsun. Bu halde $\text{Arg } OA = \text{Arg } OA'$ olacağından, A' noktası çember üzerinde 2π kadar dolaştığı zaman argümanı 2π kadar değişir. O halde $\text{Arg } OA$ da 2π kadar değişir.

1.21 Özellik: Ω bölgesi konveks olsun. A noktası Ω bölgesinin sınırını bir kez dolaştığı zaman, teğetin argümanı da 2π kadar aynı yönde değişir.

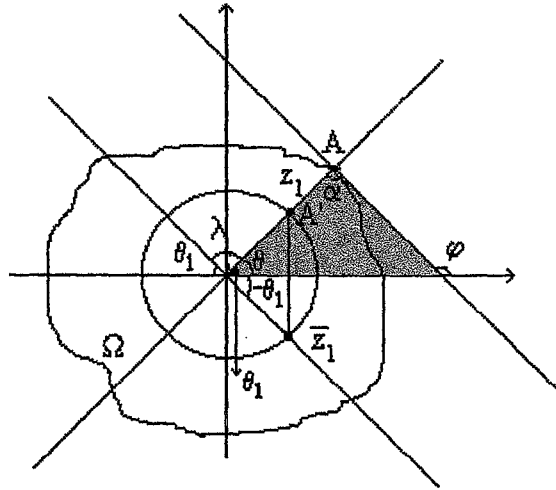
İspat: Ω bölgesi konveks olsun. $\alpha = \lambda$ (iç ters açılar olduğundan)

$$\alpha + 180 - \varphi = \lambda + \Theta_1$$

$\alpha + 180 - \varphi = \lambda + \Theta_1 \Rightarrow \varphi = 180 - \Theta_1 \Rightarrow -\Theta_1$, $\overline{z_1}$ nin argümanı olduğundan Θ_1, z_1 in argümanıdır. O halde $\varphi = 180 - \Theta_1$ bağıntısı

$$\varphi = 180 + \text{Arg } \overline{z_1} = 180 + \text{Arg } \overline{z_1} + 2\pi \text{ olarak yazılır.}$$

O halde $\overline{z_1}$ noktası daire üzerinde pozitif yönde bir kez dolaştığı zaman, argümanı 2π kadar artacağından φ de 2π artar, bu da iddianın doğruluğunu gösterir.



Şekil 1.4 Bölgenin konveks olma durumu

2. YALINKAT FONKSİYONLAR

2.1 Tanım : Bir $f(z)$ fonksiyonu, genişletilmiş düzlemde bulunan, bir Ω basit bağlantılı bölgesinde varolabilen bir kutup noktası dışında analitik ve $z_1, z_2 \in \Omega$ olmak üzere $z_1 \neq z_2$ için $f(z_1) \neq f(z_2)$ injektiflik koşulu gerçekleşirse, $f(z)$ fonksiyonuna Ω bölgesinde "yalıncat" tır denir.

Ω bölgesinde yalıncat olan bir $f(z)$ fonksiyonu, Ω nın her alt bölgesinde de yalıncattır.

2.2 Özellik : Yalıncat iki fonksiyonun bileşke fonksiyonu da yalıncattır.

İspat : Önce, injektif iki fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da injektif olduğunu göstermeliyiz.

$f : \Omega \rightarrow G$ injektif, $g : G \rightarrow H$ injektif olsun. Bu takdirde $g \circ f : \Omega \rightarrow H$ injektiftir.

Gerçekten $z_1, z_2 \in \Omega$ ise $f(z)$ fonksiyonunun injektifliğinden; $z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$ dir.

Diğer taraftan $g(z)$ fonksiyonu G de injektif olduğundan, $f(z_1) \neq f(z_2)$ için

$g(f(z_1)) \neq g(f(z_2))$ dir. Bu da bize $g \circ f$ fonksiyonunun injektif olduğunu gösterir.

Diğer taraftan ispatı tamamlamak için, analitik iki fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da analitik olduğunu ispatlamak lazımdır.

$f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları analitik iki fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \end{aligned} \quad (2.1)$$

bulunur. Diğer taraftan $\omega = f(z)$ dersek $\omega_0 = f(z_0)$ olur. $f(z)$ nin sürekliliğinden $z \rightarrow z_0$ olurken $\omega \rightarrow \omega_0$ olur ve $g(z)$ nin analitik olması nedeniyle

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{g(\omega) - g(\omega_0)}{\omega - \omega_0} = g'(\omega_0) \quad (2.2)$$

dir. $f(z)$ nin analitik olması nedeniyle;

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad (2.3)$$

dir.

Bulduğumuz bu sonuçları (2.1) ifadesinde yerine yazarsak

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = g'(\omega_0) \cdot f'(z_0)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

2.3 Özellik : $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f(z)$ nin yalınkat olmasıdır.

İspat : Gereklik: $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu yalınkat olsun. Bu takdirde

$g(z) = \frac{1}{z}$ yalınkat fonksiyonu alınır, 2.2. özelliğinden $g\left(\frac{1}{f(z)}\right)$ fonksiyonu da yalınkattır.

$g\left(\frac{1}{f(z)}\right) = f(z)$ fonksiyonu yalınkattır.

Yeterlilik: $f(z)$ fonksiyonu yalınkat olsun. $g(z) = \frac{1}{z}$ yalınkat fonksiyonu alınır, 2.2 özelliğinden, $g(f(z))$ fonksiyonu da yalınkattır. Yani

$g(f(z)) = \frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu da yalınkattır.

2.4 Tanım : Eğer bir $z_0 \in A$ noktasının en az bir civarında z_0 noktasından başka A cümlesine ait hiç bir nokta bulunmazsa, z_0 noktasına A cümlesinin bir "izole noktası " denir.

2.5 Özellik: Analitik bir fonksiyonun bir noktanın civarında injektif olması için gerek ve yeter şart bu noktada sıfır olmayan bir türeve sahip olmasıdır .Bu bize bir Ω bölgesinde analitik $f(z)$ fonksiyonunun yalınkat olması için $f'(z) \neq 0$ olduğunu gösterir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

İspat : Yeterlilik: $\omega = f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasında analitik olsun. Daha fazla olarak $f'(z_0) \neq 0$ koşulunu gerçeklesin.

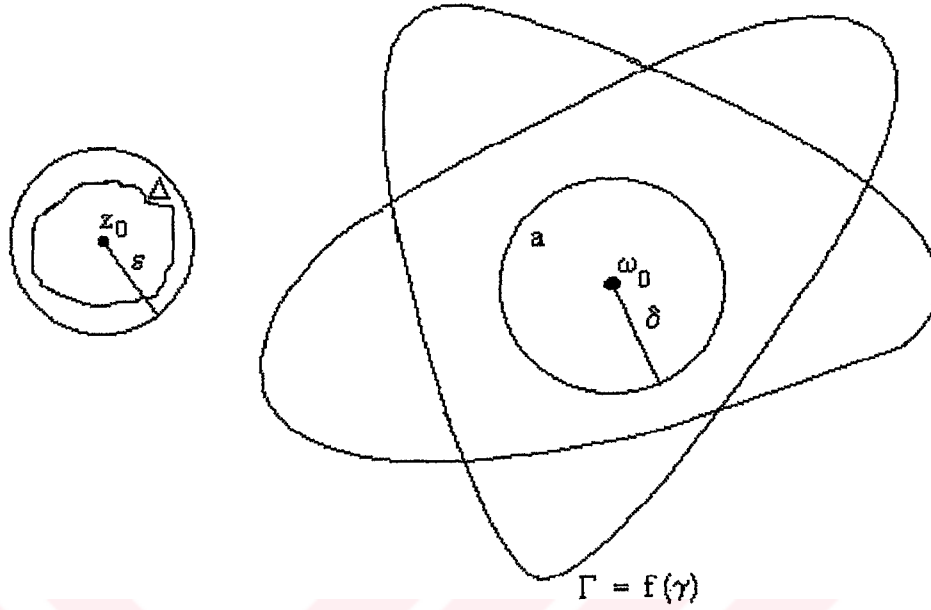
Şimdi $F(z) = f(z) - \omega_0$ fonksiyonunu tanımlayalım. Tanımdan dolayı $F(z)$ fonksiyonu z_0 da analitik ve $F'(z_0) = f'(z_0) \neq 0$ dır. O halde z_0 noktası için $F(z)$ fonksiyonu basit bir sıfıra haizdir.

Zira analitik fonksiyon için bir z_0 noktası $F^{(n)}(z_0) \neq 0$, $F^{(n-1)}(z_0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) olması halinde n katlı bir sıfırdır.

Analitik $F(z)$ fonksiyonunun sıfır noktası z_0 , bir izole noktadır. O halde z_0 noktası için, $F(z)$ nin içinde ve sınırı üzerinde analitik ve $F'(z_0) \neq 0$ olduğu bir $|z - z_0| \leq \epsilon$ civarı vardır.

$f[\{|z - z_0| < \epsilon\}] = \Gamma$ dersek, $\omega_0 = f(z_0)$ noktası metrik topolojide bir kapalı cümle olan, bu Γ eğrisinin tamamlayıcısında bulunacaktır. Bir açık cümle olan bu tamamlayıcı ω_0 ın uygun bir $|\omega - \omega_0| < \delta$ açık civarına da ihtiva edecektir.

$$[\delta = \inf_{\omega \in \Gamma} |\omega - \omega_0|]$$



Şekil 2.1 Analitik fonksiyonlarda civar

Şimdi de bir $a \in \{|\omega - \omega_0| < \delta\}$ alalım ve $G(z) = f(z) - a$ fonksiyonunu tanımlayalım. Tanımdan $G(z)$ fonksiyonu da $\{|z - z_0| \leq \epsilon\}$ da analitiktir.

$$F(z) = G(z) = f(z) - \omega_0 = f(z) + a, \quad \xi = z_0 + \epsilon e^{i\Theta}, \quad 0 \leq \Theta \leq 2\pi \Rightarrow$$

$$|F(z) - G(z)| = |a - \omega_0| < \delta \leq |f(\xi) - a| = |G(\xi)|$$

bulunur ki Rouché Teoremine göre $G(z)$ ile $F(z)$ nin $|z - z_0| < \epsilon$ içinde birer tane sıfırı vardır. Yani $|a - \omega_0| < \delta$ koşulunu gerçekleyen $\forall a \in C$ için $f(z) - a = 0$ olacak şekilde bir tek $z \in \{|z - z_0| < \epsilon\}$ kompleks sayısı vardır. Dolayısıyla $f(z)$, z_0 'n bir $\Delta = f^{-1}\{|\omega - \omega_0| < \delta\}$ dolayında injektiftir.

Gereklilik: $f(z)$ fonksiyonu z_0 'n bir dolayında injektif olsun. Bu takdirde $f(z) - a = 0$ bir tek kökü bulunacaktır. $f(z) - \omega_0 = 0$ 'n da bir tek kökü vardır ve bu basit bir sıfırdır. Yani $f'(z_0) \neq 0$ dır.

Fakat tersi doğru değildir. Bunu bir aksi örnekle ispatlayalım:

$\omega = \exp 2\pi z = e^{2\pi z}$ fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon $|z| < 1$ de sıfır olmayan türevlere haiz olduğu halde yalınkat değildir.

Gerçekten $\forall z \in \{|z| < 1\}$ için $(e^{2\pi z})' = 2\pi \cdot e^{2\pi z} \neq 0$ dır. Fakat injektif değildir. Zira ;

$$\frac{i}{2}, -\frac{i}{2} \in \{|z| < 1\} \Rightarrow e^{2\pi \frac{i}{2}} = e^{\pi i} = -1 = e^{2\pi \frac{-i}{2}} = e^{-\pi i} = -1$$

dir. Yani $\frac{i}{2} \neq -\frac{i}{2}$ olduğu halde $e^{2\pi \frac{i}{2}} = e^{2\pi \frac{-i}{2}}$ dir. Yani injektif değildir.

2.6 Özellik : z_0 noktası yalınkat $f(z)$ fonksiyonunun bir kutbu ise $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu z_0 in bir civarında yalınkattır.

İspat : z_0 noktası $f(z)$ yalınkat fonksiyonunun bir kutbu olduğundan $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ dır. O halde 2.5. özelliğinden; z_0 noktası $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun basit bir sıfır ve z_0 in bir civarında injektiftir. Dolayısıyla z_0 in bir civarında yalınkattır.

2.7 Özellik : $C : z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ Ω da düzgün bir Jordan yayı ise (kırık olmayan, $z'(t) \neq 0$ ve $z(t)$ sürekli) $f(C)$ de $f(\Omega)$ da düzgün bir Jordan yayıdır. $z_0 = z(t_0)$ olmak üzere $f(z_0)$ noktasındaki $f(C)$ nin teğeti ile pozitif reel eksen arasındaki açı

$$\text{Arg } \frac{df}{dz}(z_0) = \text{Arg} \left(\frac{df}{dz}(z_0) \cdot \frac{dz}{dt}(t_0) \right) = \text{Arg } f'(z_0) + \text{Arg } z'(t_0)$$

ile belirtilir. ($z_0 = \infty$ ya da $f(z_0) = \infty$ durumları hariç). Bu ise iki eğri aynı bir z_0 noktasından geçtikleri zaman, bu iki eğri arasındaki açının, görüntü eğrileri arasındaki açiya eşit olduğunu gösterir. O halde yalınkat fonksiyonlar birer konform homeomorfizmalardır.

İspat : $C_1 : z(t)$, $C_2 : z(s)$ iki eğri olsun. Öyleki $\alpha \leq t \leq \beta$, $\alpha_1 \leq s \leq \beta_1$ olsun. Üstelik $z_0 = z(t_0) = z(s_0)$ olsun. Yani C_1 ve C_2 eğrileri aynı bir z_0 noktasından geçsinler. $\omega = f(z)$ yalınkat olsun.

$\omega'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \neq 0$ dır. ($f(C_1)$ düzgün Jordan yayı olduğundan)

$\omega'(s_0) = f'(z_0) \cdot z'(s_0) \neq 0$ dır. ($f(C_2)$ düzgün Jordan yayı olduğundan)

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{Arg } \omega'_t(t_0) &= \text{Arg } f'(z_0) \cdot z'_t(t_0) = \text{Arg } f'(z_0) + \text{Arg } z'_t(t_0) \\ \text{Arg } \omega'_s(s_0) &= \text{Arg } f'(z_0) \cdot z'_s(s_0) = \text{Arg } f'(z_0) + \text{Arg } z'_s(s_0) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Arg } \omega'_t(t_0) - \text{Arg } \omega'_s(s_0) &= \text{Arg } f'(z_0) + \text{Arg } z'_t(t_0) \\ &\quad - \text{Arg } f'(z_0) - \text{Arg } z'_s(s_0) \\ &= \text{Arg } z'_t(t_0) - \text{Arg } z'_s(s_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Arg } \omega'_t(t_0) - \text{Arg } \omega'_s(s_0) = \text{Arg } z'_t(t_0) - \text{Arg } z'_s(s_0)$$

bulunur ki bu da bize açıların korunduğunu gösterir.

2.8 Özellik : $A \subset C$, Ω nın kompakt bir alt cümlesi olsun. Üstelik yalınkat f nin kutup noktasını ihtiva etmesin. Bu takdirde resminin Euclidyen alanı ;

$$\text{Alan } f(A) = \iint_A |f'(z)|^2 \cdot d\Omega$$

dır.

İspat : $f(z)$, Ω da yalınkat olduğundan analitiktir. Dolayısıyla $f(z)$, Cauchy-Riemann denklemlerini gerçeğe. Yani ;

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

dir.

Dolayısıyla ;

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f'(z)|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| \\ &= \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

bağıntısını yazabiliriz. Diğer taraftan;

$$\text{Alan } f(A) = \int \int_{f(A)} du.dv \quad (2.5)$$

dir. Fakat çok katlı integrallerde değişken dönüşümü kuralı gözönünde bulundurulursa

$$\left. \begin{array}{l} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

den dolayı

$$du.dv = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| dx.dy \quad (2.6)$$

dir. O halde (2.4) ve (2.6) bağıntıları karşılaştırılırsa;

$$du.dv = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| dx.dy = |f'(z)|^2 . dx.dy \quad (2.7)$$

bulunur. $dx.dy = d\Omega$ alan elemanı olarak yazılırsa ve (2.7) bağıntısı (2.5) bağıntısında yerine konursa;

$$\begin{aligned} \text{Alan } f(A) &= \int \int_{f(A)} du.dv = \int \int_A \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx.dy = \int \int_A |f'(z)|^2 . dx.dy \\ &= \int \int_A |f'(z)|^2 . d\Omega \end{aligned}$$

bulunur. Yani neticede

$$\text{Alan } f(A) = \int \int_A |f'(z)|^2 . d\Omega$$

bulunur.

3. YALINKAT FONKSİYONLAR İÇİN KLASİK DİSTORSİYON TEOREMLERİ

3.1 Gösterilimler :

$D = \{z \mid |z| < 1\}$ birim dairenin içi

$\Delta = \{z \mid |z| > 1\}$ birim dairenin dışı

$\partial D = \partial \Delta = \{z \mid |z| = 1\}$ birim dairenin sınırı

3.2 Tanım : $S = \{f(z) \mid f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, f'(0) = 1, f(0) = 0, f(z) \text{ D de yalınkat}\}$ cümlesini S sınıfı olarak adlandıracğıız.

3.3 Tanım : $\Sigma = \{g(z) \mid g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots, g(z) \text{ } \Delta \text{ da yalınkat}\}$ cümlesini Σ sınıfı olarak adlandıracğıız ve $E = E(g) = C \setminus g(\Delta)$ da $g(z) \in \Sigma$ fonksiyonuyla yapılan tasvirde, resim bölgesinin kompakt tamamlayıcısıdır. Ayrıca b_0 katsayısına $E(g)$ nin "konform merkezi" denir ve

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta$$

ifadesi ile verilir. $b_0 = 0$ alınarak Σ sınıfından elde edilen sınıfı da Σ_0 sınıfı olarak adlandıracğıız.

3.4 Teorem : (Alan Teoremi): $g \in \Sigma$ alalım. Buradan

$$\text{Alan } E = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \right)$$

dir.

Bu alan, E kompakt cümlesinin, iki boyutlu Lebesgue Ölçümüdür.

$H(r) = C \setminus \{g(z) \mid |z| > r\} \quad (r > 1)$ alalım.

$H(r)$ analitik Jordan eğrisi olan

$C(r) = \{g(re^{it}) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ile sınırlıdır, madem ki E, $r \rightarrow 1$ e yaklaşırken küçülen $H(r)$ cümlelerinin arakesitidir. O halde

$$\text{Alan } E = \lim_{r \rightarrow 1} \text{Alan } H(r)$$

tanımını yapabiliriz. Böylece Alan E yi hesaplamak için, Lebesque teorisine başvurmadan kaçınılmış oluruz.

İspat : Analitik Green formülünden ;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} \overline{h(\omega)} \cdot h'(\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{H(r)} |h'(\omega)|^2 \cdot d\Omega \quad (3.1)$$

$h(\omega) = \omega$ alırsak $\overline{h(\omega)} = \overline{\omega}$ olur. O halde $h(\omega) = \omega \implies h'(\omega) d\omega = d\omega$ buluruz. Diğer taraftan $\omega = g(z)$, $\overline{\omega} = \overline{g(z)}$ yazılışları da gözönünde bulundurulursa $d\omega = g'(z) dz$ bulunur. Buradan $d\omega = g'(z) dz = h'(\omega) d\omega$ yazılabilir. Ancak bu adımda da kutupsal koordinatlara geçilirse ;

$$z = re^{it} \implies dz = ire^{it}dt$$

bulunur. Buraya kadar bulunan bütün sonuçlar birleştirilirse;

$$d\omega = g'(z)dz = g'(re^{it})ire^{it}dt, \quad \bar{\omega} = \overline{g(re^{it})}$$

bulunur. Bulunan bu sonuçlar (3.1) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Alan } H(r) &= \frac{1}{\pi} \int \int_{H(r)} |h'(\omega)|^2 . d\Omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} \overline{h(\omega)} . h'(\omega) . d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} \bar{\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} \overline{g(z)} g'(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} ire^{it} g'(re^{it}) \overline{g(re^{it})} dt \end{aligned}$$

Yani sonuç olarak

$$\frac{1}{\pi} \text{Alan } H(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} ire^{it} g'(re^{it}) \overline{g(re^{it})} dt \quad (3.2)$$

bulunur. Ancak $g \in \Sigma$ olduğundan, Σ sınıfının tanımından dolayı

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \bar{z}^n \implies \overline{g(z)} = \bar{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} z^{-n}$$

dir. Bunlar kutupsal koordinatlarda yazılacak olursa;

$$g(re^{it}) = re^{it} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n} . e^{-int}$$

$$\overline{g(re^{it})} = re^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} . e^{int}$$

bulunur. Bu yazılışlardan hareket edilirse;

$$ire^{it} g'(re^{it}) = \left(ire^{it} + \sum_{n=0}^{\infty} (-in) b_n r^{-n} . e^{-int} \right) = i \left(re^{it} - \sum_{n=0}^{\infty} n b_n r^{-n} . e^{-int} \right)$$

olur.

$$ire^{it} g'(re^{it}) \overline{g(re^{it})} = i \left(re^{it} - \sum_{n=0}^{\infty} n b_n r^{-n} . e^{-int} \right) \left(re^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} . e^{int} \right)$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Alan } H(r) &= \frac{1}{\pi} \int \int_{H(r)} |h'(\omega)|^2 . d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i \left(re^{it} - \sum_{n=0}^{\infty} n b_n r^{-n} . e^{-int} \right) \left(re^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} . e^{int} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \sum_{n=0}^{\infty} n . |b_n|^2 . r^{-2n} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(- \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot b_n r^{-n+1} \cdot e^{-i(n+1)t} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n+1} \cdot e^{i(n+1)t} \right) dt \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(r^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \cdot r^{-2n} dt \right) \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(- \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot b_n r^{-n+1} \cdot \overline{e^{i(n+1)t}} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n+1} \cdot e^{i(n+1)t} \right) dt
\end{aligned}$$

bulunur. Ancak

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \quad (\mp 1, \mp 2, \dots) \\ 2\pi, & k = 0 \end{cases}$$

olduğunu son ifadede kullanırsak, son iki integralin sıfır olduğunu görürüz. O halde sonuç olarak ;

$$\frac{1}{\pi} \text{Alan} H(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(r^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \cdot r^{-2n} dt \right)$$

bulunur. Fakat alan pozitif bir büyüklük olduğundan;

$$\frac{1}{\pi} \text{Alan} H(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \cdot r^{-2n} dt \geq 0$$

$$\frac{1}{\pi} \text{Alan} H(r) = \frac{1}{2\pi} r^2 \cdot t \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \cdot r^{-2n} \cdot t \Big|_0^{2\pi} \geq 0$$

$$\frac{1}{\pi} \text{Alan} H(r) = r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \cdot r^{-2n} \geq 0$$

bulunur. Alan $E = \lim_{r \rightarrow 1} \text{Alan} H(r)$ olduğu da gözönüne alınırsa ;

$$\text{Alan } E = \pi \cdot \lim_{r \rightarrow 1} \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \cdot r^{-2n} \right) \geq 0$$

$$\text{Alan } E = \pi \cdot \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \right) \geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \leq 1$$

bulunur.

3.5 Sonuç : $g \in \Sigma$ alalım. Buradan $|b_1| \leq 1$ dir. Bu eşitsizlikte eşitlik ancak ve yalnız $g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$ ($b_0 \in C$, $\beta \in R$) olması ile mümkündür.

Ancak burada şunu belirtmek gerekir ki, verilen bir eşitsizlikte eşitliği gerçekleyen fonksiyona "ekstremal fonksiyon" adı verilir.

İspat : Yukarıda ispatladığımız alan teoreminde $\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1$ de

$b_2 = b_3 = \dots = b_n = \dots = 0$ ise $|b_1| \leq 1$ bulunur.

O halde $g \in \Sigma$ fonksiyonu $g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1}$ haline gelir. Fakat $|b_1| = 1$ ise $b_1 = e^{2i\beta}$ alabiliriz. Zira $|b_1| = |e^{2i\beta}| = 1$ dir. Yine alan teoremi kullanılırsa $|b_1| = 1$ koşulu altında $g(z)$ fonksiyonu

$$g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$$

haline gelir. Bu fonksiyon verilen bir eşitsizlikte, eşitliği gerçeklediği için ekstremal fonksiyondur. Bu fonksiyon $|z| > 1$ i gözönüne alınan düzlemde reel eksenle β açısı yapan doğrusal kesit üzerine resmeder.

Gerçekten ; $g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$ fonksiyonunda b_0 sabitini şimdilik ihmal edebiliriz. Zira bu fonksiyonla yapılan tasvirde, b_0 sabiti sadece bir paralel kayma verecektir. Dolayısıyla

$$f(z) = z + e^{2i\beta} z^{-1}$$

fonksiyonunu inceleyelim:

$$z = e^{i\theta} \text{ alalım.}$$

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= e^{i\theta} + e^{2i\beta} \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{2i\beta} \cdot e^{-i\theta} = e^{i\theta} + e^{2i\beta - i\theta} \\ &= e^{i\beta} (e^{i\theta} \cdot e^{-i\beta} + e^{i\beta} \cdot e^{-i\theta}) = 2e^{i\beta} \left(\frac{e^{i(\theta-\beta)} + e^{-i(\theta-\beta)}}{2} \right) \\ &= 2e^{i\beta} \cos(\theta - \beta) = e^{i\beta} \cdot \underbrace{2 \cdot \cos(\theta - \beta)}_{-2 \leq 2 \cos(\theta - \beta) \leq 2} \end{aligned}$$

olduğundan $|z| > 1$ bölgesini reel eksenle β açısı yapan doğrusal kesit üzerine resmeder. b_0 kadar kayma verilirse, asıl sonuç elde edilir.

3.6 Teorem : Eğer $g \in \Sigma$ ve $\omega \in E$ ise o halde

$$g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - \omega} = z + \frac{1}{2}(b_0 - \omega)z^{-1} + \dots \quad (|z| > 1)$$

fonksiyonu Σ da tek ve yalınkat bir fonksiyondur.

Eğer $f \in S$ ise $\sqrt{f(z^2)}$ S de tek ve yalınkat bir fonksiyondur.

İspat : $g \in \Sigma$ olduğundan dolayı ; ($|z| > 1$ için)

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^{-n} \implies g(z^2) - \omega = z^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^{-2n} - \omega \implies$$

$$g(z^2) - \omega = z^2 - \omega + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^{-2n} \implies$$

$$\begin{aligned} z^{-2}(g(z^2) - \omega) &= 1 - \omega z^{-2} + z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^{-2n} \\ &= 1 - \omega z^{-2} + z^{-2}(b_0 + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-4} + b_3 z^{-6} + \dots) \\ &= 1 - \omega z^{-2} + b_0 z^{-2} + b_1 z^{-4} + b_2 z^{-6} + b_3 z^{-8} + \dots \\ &= 1 + (b_0 - \omega) z^{-2} + b_1 z^{-4} + b_2 z^{-6} + b_3 z^{-8} + \dots \end{aligned}$$

fonksiyonu Δ da analitik ve çift bir fonksiyondur.

Gerçekten açılımından dolayı analitiktir, Δ da daima sıfırdan farklıdır ve çift fonksiyon oluşu da

$$\begin{aligned} F(z) = z^{-2}(g(z^2) - \omega) &\implies F(-z) = \frac{1}{(-z)^2}(g((-z)^2) - \omega) = \frac{1}{z^2}(g(z^2) - \omega) \\ &= z^{-2}(g(z^2) - \omega) = F(z) \end{aligned}$$

$F(-z) = F(z)$ olduğundan dolayı iddianın doğruluğu gerçekleşmiş olur.

Şimdi de $g^*(z) = z[z^{-2}(g(z^2) - \omega)]^{1/2}$ fonksiyonunu düşünüyoruz.

Bu fonksiyon $1 < |z| < \infty$ da analitik ve ∞ da

$$g^*(z) = z[z^{-2}(g(z^2) - \omega)]^{1/2} = z + \frac{1}{2}(b_0 - \omega)z^{-1} + \dots \quad (|z| > 1)$$

açılımına haizdir.

Gerçekten ;

$$[z^{-2}(g(z^2) - \omega)]^{1/2} = [1 + (b_0 - \omega)z^{-2} + b_1z^{-4} + b_2z^{-6} + \dots]^{1/2} \quad (3.3)$$

olduğunu ispatlamıştık. Bu ifade de $z^{-2} = \xi$ denilirse ikinci taraf

$$(1 + (b_0 - \omega)\xi + b_1\xi^2 + b_2\xi^3 + \dots)^{\frac{1}{2}}$$

haline gelir. Parantez içindeki ifade $1 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + \dots$ ifadesinin karesi olsun. Yani

$$\begin{aligned} 1 + (b_0 - \omega)\xi + b_1\xi^2 + b_2\xi^3 + \dots &= (1 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + \dots)^2 \\ &= 1 + c_1^2\xi^2 + c_2^2\xi^4 + c_3^2\xi^6 + \dots \\ &\quad + 2c_1\xi + 2c_2\xi^2 + 2c_3\xi^3 + \dots \\ &\quad + 2c_1c_2\xi^3 + 2c_1c_3\xi^4 + \dots \\ &= 1 + 2c_1\xi + (c_1^2 + 2c_2)\xi^2 + \dots \end{aligned}$$

$\implies$ katsayıları karşılaştırırsak ;

$$b_0 - \omega = 2c_1 \implies c_1 = \frac{1}{2}(b_0 - \omega)$$

olur. Bunları (3.3) ifadesinde yerine yazarsak ;

$$[z^{-2}(g(z^2) - \omega)]^{1/2} = [(1 + \frac{1}{2}(b_0 - \omega)z^{-2} + \dots)^2]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(b_0 - \omega)z^{-2} + \dots$$

Bu eşitlikte z ile çarpılırsa ;

$$g^*(z) = z[z^{-2}(g(z^2) - \omega)]^{1/2} = \sqrt{g(z^2) - \omega} = z + \frac{1}{2}(b_0 - \omega)z^{-1} + \dots$$

bulunur ki buda iddianın doğruluğunu gösterir.

Bu fonksiyon tektir. Gerçekten ;

$$g^*(z) = z[z^{-2}(g(z^2) - \omega)]^{1/2} \implies$$

$$g^*(-z) = (-z)[(-z)^{-2}(g((-z)^2) - \omega)]^{1/2} = -g^*(z)$$

olduğundan buda iddianın doğruluğunu gösterir.

Şimdi fonksiyonun yalınkat olduğunu gösterelim: $1 < |z| < \infty$ bölgesi fonksiyonun hiçbir singülaritesini bulundurmaz. Dolayısıyla bu fonksiyon $|z| > 1$ de analitiktir.

İnjektiftir. Gerçekten ;

$$g^*(z_1) = g^*(z_2) \implies z_1 \sqrt{z_1^{-2}(g(z_1^2) - \omega)} = z_2 \sqrt{z_2^{-2}(g(z_2^2) - \omega)}$$

$$\implies z_1^2(z_1^{-2}(g(z_1^2) - \omega)) = z_2^2(z_2^{-2}(g(z_2^2) - \omega))$$

$$\implies g(z_1^2) - \omega = g(z_2^2) - \omega \implies g(z_1^2) = g(z_2^2) \text{ ve } g(z) \text{ yalınkat olduğundan}$$

$$\implies z_1^2 = z_2^2 \implies z_1 = \pm z_2 \text{ bulunur. Fakat } g^*(z) \text{ tek olduğundan}$$

$$g^*(z_1) \neq g^*(-z_2) \implies z_1 \neq -z_2 \text{ dir.}$$

O halde $z_1 = z_2$ bulunur ki buda iddianın doğruluğunu gösterir.

Buraya kadar bulduklarımızı toparlarsak $g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - \omega}$ fonksiyonu Σ da tek bir fonksiyondur.

$f \in S$ olsun. $\implies f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ ($|z| < 1$) dir. $f(z)$, $|z| < 1$ de yalınkattır.

$$f(z^2) = z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \dots \implies \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \dots}$$

fonksiyonu S de tek fonksiyondur. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \sqrt{f(z^2)} &= \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \dots} = \sqrt{z^2(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots)} \\ &= z \sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots} \end{aligned}$$

$1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots$ ifadesi $1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots$ ifadesinin karesi olsun.

$$\begin{aligned} \implies 1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots &= (1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots)^2 \\ &= 1 + \beta_1^2 z^2 + \beta_2^2 z^4 + \dots + 2\beta_1 z + 2\beta_2 z^2 + \dots + 2\beta_1 \beta_2 z^3 + \dots \\ &= 1 + 2\beta_1 z + (\beta_1^2 + 2\beta_2) z^2 + 2\beta_1 \beta_2 z^3 + \dots \end{aligned}$$

Katsayılar eşitlenirse ;

$$0 = 2\beta_1 \implies \beta_1 = 0$$

$$a_2 = \beta_1^2 + 2\beta_2 \implies \beta_2 = \frac{1}{2}a_2$$

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z\sqrt{1 + a_2z^2 + \dots} = z\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}a_2z^2 + \dots\right)^2} = z + \frac{1}{2}a_2z^3 + \dots$$

$F(z) = z + \frac{1}{2}a_2z^3 + \dots \implies F(-z) = -F(z)$ olduğundan tek fonksiyondur.

$F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ dir. İnjektiftir.

$$\left. \begin{array}{l} F(z_1) = \sqrt{f(z_1^2)} \\ F(z_2) = \sqrt{f(z_2^2)} \end{array} \right\} \implies F(z_1) = F(z_2) \implies \sqrt{f(z_1^2)} = \sqrt{f(z_2^2)}$$

$\implies f(z_1^2) = f(z_2^2)$ olup $f(z)$ yalınkat olduğundan injektiftir.

$\implies z_1^2 = \mp z_2^2$ fakat $F(z)$ tek olduğundan $z_1 \neq -z_2$ dir. O halde $z_1 = z_2$ bulunur ki buda $F(z)$ nin D de injektifliğini gösterir. $F(z)$ nin $|z| < 1$ de analitik olduğu açıktır.

Buraya kadar bulduğumuz neticeleri toplarsak

$F(z) = \sqrt{f(z^2)}$ S de tek bir fonksiyondur.

3.7 Lemma : $g \in \Sigma$ alalım. Buradan $E \subset \{|\omega - b_0| \leq 2\}$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız E dört birim uzunluğunda bir parça ise gerçekleşir.

İspat : Sonuç 3.5 deki durumu $g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - \omega} = z + \frac{1}{2}(b_0 - \omega)z^{-1} + \dots$ Σ da tek bir fonksiyon olduğundan $\omega \in E$ için bu fonksiyona uygularsak ;

$$\left| \frac{1}{2}(b_0 - \omega) \right| \leq 1 \implies \frac{1}{2}|b_0 - \omega| \leq 1 \implies |b_0 - \omega| \leq 2$$

bulunur.

Şimdi eşitlik durumunu inceleyelim :

Yine Sonuç 3.5 deki eşitlik durumunu buraya uygularsak

$$g(z) = z + \frac{1}{2}(b_0 - \omega)z^{-1}$$

bulunur. Eşitlik durumu yazılırsa

$$\left| \frac{1}{2}(b_0 - \omega) \right| = 1 \implies \frac{1}{2}(b_0 - \omega) = -e^{i\beta}$$

alabiliriz. Bu halde fonksiyonumuz

$$g(z) = z - e^{i\beta}z^{-1}$$

haline gelir.

Fakat diğer taraftan

$$\left| \frac{1}{2}(b_0 - \omega) \right| = 1 \implies \frac{1}{2}(b_0 - \omega) = -e^{i\beta} \implies b_0 - \omega = -2e^{i\beta}$$

$$\implies b_0 = \omega - 2e^{i\beta}$$

bulunur. Bu b_0 sabiti de Sonuç 3.5 deki eşitlik halinde bulduğumuz fonksiyona uygulanırsa

$$g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1} \implies g(z) = z + (\omega - 2e^{i\beta}) + e^{2i\beta} z^{-1}$$

bulunur. Burada $b_0 = \omega - 2e^{i\beta}$ sabitini gözönüne almazsak,

$$g(z) = z + e^{2i\beta} z^{-1}$$

bulunur. $z = e^{i\theta}$ dersek;

$$\begin{aligned} g(e^{i\theta}) &= e^{i\theta} + e^{2i\beta} \cdot e^{-i\theta} = e^{i\theta} + e^{i\beta} \cdot e^{i\beta} \cdot e^{-i\theta} \\ &= e^{i\beta} (e^{i\theta} \cdot e^{-i\beta} + e^{i\beta} \cdot e^{-i\theta}) \\ &= e^{i\beta} (e^{i(\theta-\beta)} + e^{-i(\theta-\beta)}) = e^{i\beta} \cdot 2\cos(\theta - \beta) \end{aligned}$$

$\implies g(e^{i\theta}) = e^{i\beta} \cdot \underbrace{2\cos(\theta - \beta)}_{-2 \leq 2\cos(\theta-\beta) \leq 2}$ dan, E dört birim uzunluğunda bir parça ise gerçekleştiğini gösterir.

3.8. Sonuç: Eğer $g \in \Sigma_0$ ise buradan $|z| > 1$ için $|g(z)| \leq 2|z|$ dir.

İspat : Σ_0 sınıfındaki fonksiyonlar $g(z) = z + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots$ ($|z| > 1$) şeklinde olduklarından (zira $b_0 = 0$ dir);

$$g_1(z) = \frac{g(z)}{z} = \frac{z + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{z} = 1 + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-3} + \dots$$

fonksiyonu ∞ noktası civarında analitiktir. E alan teoreminde de izah ettiğimiz gibi $|z| > r$ için $r \rightarrow 1$ olurken küçülen $H(r)$ cümlelerinin arakesitidir. Dolayısıyla $|z| \rightarrow 1$ için bütün limit noktaları E üzerindedir. Burada bir evvelki teoremi kullanacak olursak ;

$$\left| \frac{g(z)}{z} \right| = \limsup_{|z| \rightarrow 1} \left| \frac{g(z)}{z} \right| = \max |\omega| \leq 2 \implies \left| \frac{g(z)}{z} \right| \leq 2$$

$\implies |g(z)| \leq 2|z|$ bulunur. Bu da istenen şeydir.

3.9. Teorem : $f \in S$ alalım. Buradan $|a_2| \leq 2$ dir ve $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ dir. $|a_2| = 2$ olması ancak ve yalnız $f(z)$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun, bir rotasyonu olması ile mümkündür. Dahası $f(z)$ tek fonksiyonsa, buradan $|a_3| \leq 1$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız

$$f(z) = z(1 - e^{2i\beta} z^2)^{-1}$$

olması ile mümkündür.

İspat : $f \in S$ olduğundan, S sınıfının tanımı gereği $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ dir.

$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \dots$ olduğundan, bu fonksiyonda S sınıfına aittir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{F(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{1}{2} a_2 \frac{1}{z^3} + \dots} = \frac{1}{\frac{1}{z} (1 + \frac{1}{2} a_2 z^{-2} + \dots)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} a_2 z^{-2} + \dots)} = z \left(1 - \left(\frac{1}{2} a_2 z^{-2} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2} a_2 z^{-2} + \dots \right)^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

$$= z - \frac{1}{2}a_2z^{-1} + \dots$$

fonksiyonu da $\sum$ sınıfına ait olacaktır. O halde $|b_1| \leq 1$ eşitsizliği bu fonksiyona uygulanırsa $\left|\frac{1}{2}a_2\right| \leq 1 \implies |a_2| \leq 2$ bulunur. Bu da istenen şeydir.

Diğer taraftan $f(z) = z + a_2z^2 + \dots \in S$ ise

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + \dots} = \frac{1}{\frac{1}{z}(1 + a_2\frac{1}{z} + \dots)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{1 + a_2\frac{1}{z} + a_3\frac{1}{z^2} + \dots} = z \frac{1}{1 + (a_2\frac{1}{z} + a_3\frac{1}{z^2} + \dots)} \\ &= z \left(1 - a_2\frac{1}{z} - a_3\frac{1}{z^2} + \dots + a_2^2\frac{1}{z^2} + a_3^2\frac{1}{z^4} + \dots \right) \\ &= z - a_2 - a_3\frac{1}{z} - \dots + a_2^2\frac{1}{z} - \dots \\ &= z - a_2 + (a_2^2 - a_3)z^{-1} + \dots \end{aligned}$$

fonksiyonu da $\sum$ sınıfına aittir. Bu fonksiyona da alan teoreminin sonucu $|b_1| \leq 1$ eşitsizliği uygulanırsa ; $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ bulunur. Bu da istenen şeydir.

Şimdi $|a_2| = 2$ olması halini düşünelim. Bunun için aşağıdaki durumları göz önünde bulunduralım:

"Sonuç 3.5 : $g \in \sum$ alalım. Buradan $|b_1| \leq 1$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız $g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta}z^{-1}$ olması ile mümkündür."

"Lemma 3.6 : $g \in \sum$ ve $\omega \in E$ ise $g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - \omega} = z + \frac{1}{2}(b_0 - \omega)z^{-1} + \dots$ fonksiyonu, $\sum$ sınıfında tek ve yalınkat bir fonksiyondur. Eğer $f \in S$ ise

$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2}a_2z^3 + \dots$ fonksiyonu S de tek ve yalınkat bir fonksiyondur."

"Teorem 3.7 : $g \in \sum$ alalım. $E \subset \{|\omega - b_0| \leq 2\}$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız E nin dört birim uzunluğunda bir parça olması halinde gerçekleşir."

Bu ifadelerin ışığı altında ;

$f \in S \implies f(z) = z + a_2z^2 + \dots \implies F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2}a_2z^3 + \dots \in S$ ve tek fonksiyondur.

$g(z) = \frac{1}{F(\frac{1}{z})} = z - \frac{1}{2}a_2z^{-1} + \dots \in \sum$ dir ve $\left|\frac{1}{2}a_2\right| \leq 1 \implies |a_2| \leq 2$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız yukarıda ispatladık ki $g(z) = z - \frac{1}{2}a_2z^{-1}$ olması ile mümkündür. O halde $|a_2| = |b_0 - \omega| \implies |\omega - b_0| = 2 \implies \omega - b_0 = 2e^{i\beta}$ alabiliriz. $\implies b_0 = \omega - 2e^{i\beta}$

($g(z) = z + b_0 + b_1z^{-1}$ fonksiyonuyla karşılaştırarak). Yukarıdaki sonucu kullanırsak ; $g^*(z) = z + b_0 + e^{2i\beta}z^{-1} \implies g^*(z) = z + (\omega - 2e^{i\beta}) + e^{2i\beta}z^{-1}$

bulunur. Fakat $\omega \in E$ olduğundan $\omega = 0$ alabiliriz. O halde

$$\begin{aligned} g^*(z) &= z - 2e^{i\beta} + e^{2i\beta}z^{-1} = z\left(1 - \frac{2}{z}e^{i\beta} + e^{2i\beta}\frac{1}{z^2}\right) \\ &= z\left(1 - e^{i\beta}\frac{1}{z}\right)^2 \end{aligned}$$

bulunur.

$$g^*(z) \in \Sigma \implies \frac{1}{g^*\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{z}(1-e^{i\beta}z)^2} = \frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{i(n-1)\beta} \cdot z^n$$

$\in S$ dir. Bu da tanım gereği Koebe fonksiyonunun rotasyonudur.

$f \in S$ tek ise $|a_3| \leq 1$ olduğunu ispatlayalım :

$$f(z) = z + a_2z^2 + \dots \implies \sqrt{f^2(z)} = z + \frac{1}{2}a_2z^3 + \dots,$$

S de tek fonksiyondur (bunu daha evvel de ispatladık) ve ikinci teriminin katsayısı sıfırdır.

O halde bunu da $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ eşitsizliğinde kullanırsak $a_2 = 0$ alınrsa $|0 - a_3| \leq 1 \implies$

$|a_3| \leq 1$ bulunur. Bir başka ispatta:

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2}a_2z^3 + \dots \quad a_3 = \frac{1}{2}a_2 \implies$$

$$|a_3| = \left|\frac{1}{2}a_2\right| \leq 1 \implies |a_3| \leq 1 \text{ bulunur.}$$

$|a_3| = 1$ eşitliği ancak ve yalnız $f(z) = z \cdot (1 - e^{2i\beta} \cdot z^2)^{-1}$ olması ile mümkündür. Gerçekten ;

$$\begin{aligned} f(z) &= z \cdot \frac{1}{1 - e^{2i\beta}z^2} \\ &= z \cdot [1 + e^{2i\beta}z^2 + e^{4i\beta}z^4 + \dots] \\ &= z + e^{2i\beta}z^3 + e^{4i\beta}z^5 + \dots \end{aligned}$$

$$|a_3| = |e^{2i\beta}| = 1$$

dir.

3.10. Hazırlık : $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots \in S$ alalım.

$$\implies f'(z) = 1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots \implies f'(0) = 1$$

$$\implies f''(z) = 2a_2 + 6a_3z + \dots \implies f''(0) = 2a_2 \text{ bulunur.}$$

$$f''(0) = 2a_2 \implies |f''(0)| = 2|a_2| \implies \frac{|f''(0)|}{2} = |a_2| \leq 2 \implies \left|\frac{f''(0)}{2}\right| \leq 2 \text{ bulunur.}$$

Bu düşüncenin sıfır noktasından herhangi bir $z_0 \in D$ noktasına taşınması halinde

$$f\left(\frac{\xi + z_0}{1 + \xi \bar{z}_0}\right) = f(z_0) + (1 - |z_0|^2)f'(z_0)\xi \\ + \frac{1}{2}\left[(1 - |z_0|^2)^2 f''(z_0) - 2\bar{z}_0(1 - |z_0|^2)f'(z_0)\right]\xi^2 + \dots$$

fonksiyonu da D de analitik ve yalınkattır. Fakat S sınıfına ait değildir. Zira normalize edilmemiştir. O halde bu fonksiyonun S sınıfına ait olması için normalize edilmesi gerekir.

Bunun için de ;

$$h(\xi) = \frac{f\left(\frac{\xi + z_0}{1 + \xi \bar{z}_0}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)f'(z_0)} = \xi + \left[\frac{1}{2}(1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0\right]\xi^2 + \dots$$

fonksiyonu $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ koşullarını gerçeklediğinden S sınıfına aittir. $h(\xi)$ fonksiyonu z_0 noktasına göre $f(z)$ fonksiyonunun Koebe transformasyonu olarak adlandırılır.

3.11 Lemma : Eğer $f \in S$ ise buradan

$$\left|z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2} \quad (|z| < 1)$$

dir.

İspat : Yukarıdaki hazırlıktan yola çıkarak,

$$h(\xi) = \frac{f\left(\frac{\xi + z_0}{1 + \xi \bar{z}_0}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)f'(z_0)} = \xi + \left[\frac{1}{2}(1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0\right]\xi^2 + \dots$$

fonksiyonu S sınıfına ait olduğundan ikinci teriminin katsayısı 2 den küçüktür.

$$\left|\frac{1}{2}(1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0\right| \leq 2$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafını

$$\frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2} = \left|\frac{2z_0}{1 - |z_0|^2}\right| > 0$$

ile çarparsak ;

$$\left|\frac{1}{2}(1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0\right| \left|\frac{2z_0}{1 - |z_0|^2}\right| \leq \frac{4|z_0|}{1 - |z_0|^2} \\ \Rightarrow \left|\left(\frac{1}{2}(1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0\right)\left(\frac{2z_0}{1 - |z_0|^2}\right)\right| \leq \frac{4|z_0|}{1 - |z_0|^2} \\ \Rightarrow \left|\frac{1}{2}(1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\frac{2z_0}{1 - |z_0|^2} - \bar{z}_0\frac{2z_0}{1 - |z_0|^2}\right| \leq \frac{4|z_0|}{1 - |z_0|^2} \\ \Rightarrow \left|z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1 - |z_0|^2}\right| \leq \frac{4|z_0|}{1 - |z_0|^2}$$

bulunur. Bu ifade de z_0 yerine z yazarsak ;

$$\left|z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2} \quad (|z| < 1)$$

elde edilir.

3.12 Teorem : ($\frac{1}{4}$ Distorsiyon Teoremi :

$\omega = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in S$ fonksiyonunun tasvirindeki, sınır noktalarının $\omega = 0$ noktasına olan uzaklıkları $\frac{1}{4}$ den küçük olamaz.

İspat : c noktası D nin tasvir bölgesi dışındaki bir nokta olsun.

$\frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + (a_2 + \frac{1}{c})z^2 + \dots$ fonksiyonu da S sınıfına aittir. İkinci terimin katsayısının modülü 2 den küçük olacağına göre $|a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$ dir. Diğer taraftan $|a_2| \leq 2$ dir ve

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{c} \right| &= \left| \frac{1}{c} + a_2 - a_2 \right| \leq \left| \frac{1}{c} + a_2 \right| + | -a_2 | \\ &= \left| \frac{1}{c} + a_2 \right| + |a_2| \leq 2 + 2 \implies \left| \frac{1}{c} \right| \leq 4 \implies \end{aligned}$$

$\frac{1}{|c|} \leq 4 \implies |c| \geq \frac{1}{4}$ bulunur ki bu da iddianın doğruluğunu gösterir.

3.13 Teorem : α ve β , D nin içinde $f(z) \in S$ fonksiyonunun alamadığı herhangi iki değer olsun. Bu halde

$$F(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\alpha}}$$

fonksiyonu da D de yalınkat olup

$$\frac{\beta}{1 - \frac{\beta}{\alpha}}$$

değerini alamaz.

İspat : $f(z)$, D de yalınkat olduğundan ve α değerini alamadığından $\frac{f(z)}{\alpha} \neq 1$ dir. Dolayısıyla $1 - \frac{f(z)}{\alpha} \neq 0$ dir. O halde

$$F(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\alpha}}$$

fonksiyonu D de analitiktir.

$$F(z_1) = F(z_2) \implies \frac{f(z_1)}{1 - \frac{f(z_1)}{\alpha}} = \frac{f(z_2)}{1 - \frac{f(z_2)}{\alpha}} \implies$$

$$\alpha f(z_1) - f(z_1)f(z_2) = \alpha f(z_2) - f(z_1)f(z_2) \implies \alpha f(z_1) = \alpha f(z_2)$$

$\implies f(z_1) = f(z_2)$, $f(z)$ D de yalınkat olduğundan $z_1 = z_2$ olur. O halde

$$F(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\alpha}}$$

fonksiyonu D de injektiftir. Bununla $F(z)$ fonksiyonunun D de yalınkat olduğunu ispatlamış oluruz.

$$\frac{\beta}{1 - \frac{\beta}{\alpha}}$$

sayısının tersinin modülünü düşünelim :

$$\left| \frac{1 - \frac{\beta}{\alpha}}{\beta} \right| = \left| \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha\beta} \right| = \left| \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha\beta} \right| = \left| \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right|$$

buluruz. Fakat bir evvelki teoremden dolayı ,

$\left| \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right| \leq 4$ bulunur. Bu da bize teoremin ispatını verir.

3.14 Teorem : $f \in S$ ise

- (i) $\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$
- (ii) $\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$
- (iii) $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left| z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$

dir.

Yukarıdaki eşitsizliklerde eşitlik ancak ve yalnız $f(z)$, Koebe fonksiyonunun uygun bir rotasyonu ise gerçekleşir.

İspat : 3.11 Lemma' da ispatlandı ki ;

$$\left| z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2} \quad (3.4)$$

dir. Diğer taraftan bir kompleks sayının reel kısmı ile modülü arasındaki $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$ bağıntısından hareket edilirse, (3.4) bağıntısı ;

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re} \left\{ z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\Rightarrow -\frac{4|z|}{1-|z|^2} + \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re} z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2} + \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}$$

$$\frac{2|z|^2-4|z|}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re} z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \leq \frac{4|z|+2|z|^2}{1-|z|^2} \quad (3.5)$$

yazılabilir. Diğer taraftan ;

$$\operatorname{Re} z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \log z} \right\}$$

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow dz = e^{i\theta} d\rho \Rightarrow \frac{dz}{d\rho} = e^{i\theta}$$

$$\log \rho e^{i\theta} = t \Rightarrow \frac{e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} d\rho = dt \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \rho$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \log z} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \rho \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \rho} \right\} = \rho \operatorname{Re} \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(z)| \end{aligned}$$

bulunur. Bunlar (3.5) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, (3.5) eşitsizliği ;

$$\frac{2\rho^2-4\rho}{1-\rho^2} \leq \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(z)| \leq \frac{2\rho^2+4\rho}{1-\rho^2}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\Rightarrow \frac{2\rho-4}{1-\rho^2} \leq \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(z)| \leq \frac{2\rho+4}{1-\rho^2}$$

Bu ifade 0 dan ρ ya kadar integre edilirse ;

$$\begin{aligned}
\int_0^\rho \frac{2\rho-4}{1-\rho^2} d\rho &\leq \int_0^\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(z)| d\rho \leq \int_0^\rho \frac{2\rho+4}{1-\rho^2} d\rho \\
\Rightarrow \log \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} &\leq \log |f'(z)| \leq \log \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} \\
\Rightarrow \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} &\leq |f'(z)| \leq \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}, \quad |z| = \rho \\
\text{olduğundan} \\
\Rightarrow \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} &\leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}
\end{aligned}$$

bulunur ki, bu da (i) eşitsizliğidir.

(ii) ispatlanırken (i) nin sağ tarafı z ile orjini birleştiren doğru boyunca integre edilirse ;

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \int_0^{|z|} f'(z) dz \right| \leq \int_0^\rho |f'(z)| dz \leq \int_0^\rho \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} d\rho \\
|f(z)| &\leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \tag{3.6}
\end{aligned}$$

bulunur.

$|f(z)|$ için bir alt sınır elde etmek üzere, $f(z)$ noktası ile orjini birleştiren doğru parçası $|z| < 1$ içinde tamamen $f(z)$ nin değerleriyle örtülür. Eğer $L, \omega = f(z)$ fonksiyonuyla bu doğru parçası üzerine tasvir edilen $|z| < 1$ de bir yay ise L boyunca $d\omega = f'(z)dz > 0$ dir. Böylece

$$|f(z)| = \left| \int_L f'(z) dz \right| = \int_L |f'(z)| dz \geq \int_0^\rho \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} d\rho = \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \tag{3.7}$$

bulunur. (3.6) ve (3.7) ifadeleri birleştirilirse ;

$$\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

bulunur. $|z| = \rho$ alınırsa

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

bulunur ki, bu da (ii) eşitsizliğidir.

(iii) Bundan evvel 3.10 Hazırlıkta

$$h(\xi) = \frac{f\left(\frac{\xi+z_0}{1+\xi z_0}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} = \xi + \left[\frac{1}{2}(1-|z_0|^2) \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0} \right] \xi^2 + \dots$$

fonksiyonunun S sınıfına ait olduğu ispatlanmıştı. Bu fonksiyonda $\xi = -z_0$ alınırsa ;

$$h(-z_0) = \frac{f\left(\frac{-z_0+z_0}{1+z_0(-z_0)}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} = -\frac{1}{1-|z_0|^2} \cdot \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$$

bulunur.

$$h(-z_0) = -\frac{1}{1-|z_0|^2} \cdot \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \in S$$

dir.

$f \in S$ için ii) $\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$ olduğu ispatlanmıştı. $h(\xi) \in S$ olduğundan $\xi = -z_0$ için bulunan $h(-z_0) \in S$ dir ve ii) koşulunu gerçekler.

$$\begin{aligned}
\frac{|z|}{(1+|z|)^2} &\leq |h(-z_0)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \implies \\
\frac{|z|}{(1+|z|)^2} &\leq \left| \frac{1}{(1-|z_0|^2)} \cdot \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \right| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \implies \\
\left| \frac{(1-|z_0|^2) \cdot z}{(1+|z|)^2} \right| &\leq \left| \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \right| \leq \left| \frac{(1-|z_0|^2) \cdot z}{(1-|z|)^2} \right| \implies \\
\left| \frac{(1-|z_0|^2)}{(1+|z|)^2} \right| &\leq \left| \frac{f(z_0)}{z \cdot f'(z_0)} \right| \leq \left| \frac{(1-|z_0|^2)}{(1-|z|)^2} \right| \implies \\
\left| \frac{(1-|z|)^2}{(1-|z_0|^2)} \right| &\leq \left| \frac{z \cdot f'(z_0)}{f(z_0)} \right| \leq \left| \frac{(1+|z|)^2}{(1-|z_0|^2)} \right| \implies \\
\left| \frac{(1-|z|)(1-|z|)}{(1-|z_0|)(1+|z_0|)} \right| &\leq \left| \frac{z \cdot f'(z_0)}{f(z_0)} \right| \leq \left| \frac{(1+|z|)(1+|z|)}{(1-|z_0|)(1+|z_0|)} \right| \implies \\
z_0 \text{ yerine } z \text{ yazılırsa ;} \\
\left| \frac{(1-|z|)(1-|z|)}{(1-|z|)(1+|z|)} \right| &\leq \left| \frac{z \cdot f'(z)}{f(z)} \right| \leq \left| \frac{(1+|z|)(1+|z|)}{(1-|z|)(1+|z|)} \right| \implies \\
\frac{1-|z|}{1+|z|} &\leq \left| \frac{z \cdot f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}
\end{aligned}$$

bulunur ki bu da (iii) eşitsizliğidir.

4. SUBORDINATION PRENSİBİ :

4.1 Tanım : $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D de analitik olsun. Eğer

- (i) $\varphi(z)$, D de analitik
- (ii) $\varphi(0) = 0$
- (iii) $|\varphi(z)| < 1$

koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu bulunabilir ve $f(z) = g(\varphi(z))$ bağıntısı gerçekleşirse, o takdirde $f(z)$ fonksiyonu, $g(z)$ fonksiyonuna "subordinate" dir denir ve $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir.

4.2 Açıklama : Subordination prensibi Schwarz Lemmasının Genelleştirilmiştir.

4.3 Teorem : $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde $f(D) \subset g(D)$ dir ve $f(0) = g(0)$ dır.

İspat : $f(z) \prec g(z)$ olduğundan dolayı tanım gereği

- (i) $\varphi(z)$, D de analitik
- (ii) $\varphi(0) = 0$
- (iii) $|\varphi(z)| < 1$

koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır. Öyle ki $f(z) = g(\varphi(z))$ dir. Burada $\varphi(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden; $|\varphi(z)| \leq |z|$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız $\varphi(z) = e^{i\theta} \cdot z$ olduğu zaman geçerlidir. O halde $z_1 \in \varphi(D)$ alalım $\implies z_1 = \varphi(z)$ olacak şekilde bir $z \in D$ vardır. $z_1 = \varphi(z) \implies |z_1| = |\varphi(z)| \leq |z| < 1 \implies |z_1| < 1 \implies z_1 \in D$ bulunur. O halde $z_1 \in \varphi(D) \implies z_1 \in D \implies \varphi(D) \subset D$ dir. $g(z)$ ve $f(z)$ fonksiyonları D de analitik olduğundan ve $f(z) \prec g(z)$ ve $\varphi(D) \subset D$ den $f(D) = g(\varphi(D)) \subset g(D) \implies f(D) \subset g(D)$ bulunur.

Aynı zamanda $\varphi(0) = 0$ ve $f(z) = g(\varphi(z)) \implies f(0) = g(\varphi(0)) = g(0) \implies f(0) = g(0)$ koşulu da bulunmuş olur.

4.4 Teorem : $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde

$$\{f(z) \mid |z| < r\} \subset \{g(z) \mid |z| < r\} \quad (0 < r < 1) \text{ dir.}$$

İspat : $f(z) \prec g(z)$ olsun.

Bu takdirde tanımdan dolayı D de yalıncat olması gerekmeyen ve

- (i) $\varphi(z)$, D de analitik
- (ii) $\varphi(0) = 0$
- (iii) $|\varphi(z)| < 1$

koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır. $\varphi(z)$, Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden $|\varphi(z)| \leq |z|$ dir. O halde $|\varphi(z)| \leq |z| < r < 1$ dir. $z_1 \in \varphi(D_r)$ alınsın. Bu takdirde $z_1 = \varphi(z)$ olacak şekilde en az bir $z \in D_r$ vardır.

$\Rightarrow z_1 = \varphi(z) \Rightarrow |z_1| = |\varphi(z)| \leq |z| < r < 1 \Rightarrow z_1 \in D_r$ olup $\varphi(D_r) \subset D_r$ dir. Ancak aynı zamanda $f(z) \prec g(z)$ olduğundan $f(z) = g(\varphi(z))$ dir. Buradan $\{f(z) \mid |z| < r\} = \{g(\varphi(z)) \mid |z| < r\}$ yazılabilir. $\varphi(D_r) \subset D_r$ olduğundan $g(z)$ de D_r de analitik olduğundan $g(\varphi(D_r)) \subset g(D_r)$ dir. $(0 < r < 1) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \{f(z) \mid |z| < r\} &= \{g(\varphi(z)) \mid |z| < r\} = \{g(\varphi(D_r)) \mid |z| < r\} \\ &\subset \{g(D_r) \mid |z| < r\} = \{g(z) \mid |z| < r\} \Rightarrow \\ &\{f(z) \mid |z| < r\} \subset \{g(z) \mid |z| < r\} \end{aligned}$$

bulunur ki buda istenen şeydir.

4.5 Teorem : $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)|$$

dir.

İspat : Teorem 4.3. de $f(D) \subset g(D)$ olduğunu ispatladık ve aynı zamanda $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D de analitik olduklarından maksimum modül teoremini kullanırsak ;

$$\left. \begin{array}{l} |f(z)| \text{ maksimum değerini ancak sınırda alabilir} \\ |g(z)| \text{ maksimum değerini ancak sınırda alabilir} \end{array} \right\}$$

ve $f(D) \subset g(D)$ olduğundan

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)|$$

sonucunu yazabiliriz.

4.6 Lemma : $\varphi(z)$ aşağıdaki koşulları gerçekleyen analitik bir fonksiyon olsun.

(i) $\varphi(z)$, $|z| < 1$ için analitik

(ii) $\varphi(z)$, $|z| < 1$ için $|\varphi(z)| < 1$ dir.

Bu takdirde $(1 - |z|^2)|\varphi'(z)| \leq 1 - |\varphi(z)|^2$

dir.

İspat : z_0 , birim dairede bir nokta olsun. $\omega_0 = f(z_0)$ noktası da z_0 noktasına $|\omega| < 1$ de karşılık gelen nokta olsun. $|z| < 1$ ve $|\omega| < 1$ dairelerine $t = e^{i\theta} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ transformasyonu z_0 noktasını $t = 0$ noktasına dönüştürür. $\omega = e^{i\phi} \frac{\omega-\omega_0}{1-\bar{\omega}_0 \omega}$ transformasyonu da ω_0 noktasını $\omega = 0$ noktasına dönüştürür.

$$t = e^{i\theta} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \Rightarrow t - \bar{z}_0 . z . t = e^{i\theta} . z - e^{i\theta} . z_0$$

$$\Rightarrow t + e^{i\theta} z_0 = e^{i\theta} . z + \bar{z}_0 . z . t \Rightarrow t + e^{i\theta} z_0 = z(e^{i\theta} + \bar{z}_0 t)$$

$$\Rightarrow z = \frac{t + e^{i\theta} z_0}{e^{i\theta} + \bar{z}_0 t}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\omega = e^{i\phi} \frac{\omega-\omega_0}{1-\bar{\omega}_0 \omega} = e^{i\phi} \frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{1-\overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)}$$

ifadesinde z değişkeni yerine değerini yazacak olursak

$$\omega = e^{i\phi} \frac{\varphi\left(\frac{t+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+\bar{z}_0t}\right) - \varphi(z_0)}{1 - \overline{\varphi(z_0)}\varphi\left(\frac{t+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+\bar{z}_0t}\right)}$$

Bu fonksiyon da $\omega = \omega(t)$ şeklinde Schwarz Lemmasının koşullarını gerçekleyen bir fonksiyondur.

Gerçekten ; $t = 0$ için

$$\omega(0) = e^{i\phi} \frac{\varphi\left(\frac{0+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+\bar{z}_0 \cdot 0}\right) - \varphi(z_0)}{1 - \overline{\varphi(z_0)}\varphi\left(\frac{0+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+\bar{z}_0 \cdot 0}\right)} = e^{i\phi} \frac{\varphi(z_0) - \varphi(z_0)}{1 - \overline{\varphi(z_0)}\varphi(z_0)} = 0$$

$|t| \leq 1$ için $\omega(t)$ fonksiyonu birim dairesinde analitiktir. Zira

$$t = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \omega = e^{i\phi} \frac{\omega - \omega_0}{1 - \bar{\omega}_0 \omega} = e^{i\phi} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{1 - \overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)}$$

olduğundan $\varphi(z)$ de $|z| < 1$ de analitik olduğundan $\omega = \omega(t)$ de analitiktir. (Lineer transformasyonla elde edilmiştir.)

$|t| \leq 1$ için $|\omega(t)| \leq 1$ dir. Bu da açıktır. Zira

$$\omega = e^{i\phi} \frac{\omega - \omega_0}{1 - \bar{\omega}_0 \omega} = e^{i\phi} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{1 - \overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)} = e^{i\phi} \frac{\varphi\left(\frac{t+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+\bar{z}_0t}\right) - \varphi(z_0)}{1 - \overline{\varphi(z_0)}\varphi\left(\frac{t+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+\bar{z}_0t}\right)}$$

olduğundan ;

$$|\omega| = 1 \text{ ise } \omega = \varphi(z) \implies |\varphi(z)| = 1 \text{ ve}$$

$$|z| = 1 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} t &= e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \implies |t| = \left| e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| \\ &= |e^{i\theta}| \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| \end{aligned}$$

$|z| = 1$ olduğundan $z = e^{i\varphi}$ alınırsa ;

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{e^{i\varphi} - z_0}{1 - e^{i\varphi} \bar{z}_0} \right| = \left| \frac{e^{i\varphi} - z_0}{e^{i\varphi}(e^{-i\varphi} - \bar{z}_0)} \right| = \left| \frac{1}{e^{i\varphi}} \right| \left| \frac{e^{i\varphi} - z_0}{e^{-i\varphi} - \bar{z}_0} \right| \\ &= \left| \frac{e^{i\varphi} - z_0}{e^{i\varphi} - z_0} \right| = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Fakat $t = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$, $|z| < 1$ de analitik olduğundan ve sınırdaki değeri 1 e eşit olduğundan dolayı maksimum prensibine göre $|z| < 1$ için $|t| < 1$ olacaktır. O halde

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{t+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+\bar{z}_0t} \implies z = z(t) \\ \omega &= e^{i\phi} \frac{\omega-\omega_0}{1-\bar{\omega}_0\omega} = e^{i\phi} \frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{1-\overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)} \end{aligned} \right\} \implies |\omega(t)| \leq 1 \text{ olacaktır.}$$

O halde $\omega = \omega(t)$ fonksiyonu birim dairede analitik, $\omega(0) = 0$, $|\omega(t)| \leq 1$ koşullarını gerçekler. Yani Schwarz Lemmasının koşullarını gerçekler. O halde $|\omega(t)| \leq |t|$ dir.

Ayrıca bir $\phi(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklerse

$|\phi'(0)| \leq 1$ dir. Gerçekten ; $|\phi(z)| \leq |z|$ dir. Zira Schwarz Lemmasından

$$\left| \frac{\phi(z)}{z} \right| \leq 1, \quad \phi(0) = 0, \quad \left| \frac{\phi(z)-\phi(0)}{z-0} \right| \leq 1 \implies$$

$z \rightarrow 0 \implies |\phi'(0)| \leq 1$ bulunur.

O halde $|\omega'(0)| \leq 1$ dir.

Şimdi

$$\begin{aligned} t &= e^{i\theta} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z} \implies \frac{dt}{dz} = e^{i\theta} \frac{1-\bar{z}_0z + \bar{z}_0(z-z_0)}{(1-\bar{z}_0z)^2} \\ &= e^{i\theta} \frac{1-\bar{z}_0z + \bar{z}_0z - z_0\bar{z}_0}{(1-\bar{z}_0z)^2} \implies \frac{dt}{dz} = e^{i\theta} \frac{1-|z_0|^2}{(1-\bar{z}_0z)^2} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\omega = e^{i\phi} \frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{1-\overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)} \implies$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} &= e^{i\phi} \frac{\varphi'(z)(1-\overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)) + \varphi'(z)\overline{\varphi(z_0)}(\varphi(z)-\varphi(z_0))}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(z_0)})^2} \\ &= e^{i\phi} \frac{\varphi'(z) - \varphi'(z)\varphi(z)\overline{\varphi(z_0)} + \varphi'(z)\varphi(z)\overline{\varphi(z_0)} - \varphi'(z)\varphi(z_0)\overline{\varphi(z_0)}}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(z_0)})^2} \end{aligned}$$

$$\implies \frac{d\omega}{dz} = e^{i\phi} \frac{\varphi'(z)(1-|\varphi(z_0)|^2)}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(z_0)})^2}$$

bulunur.

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{dz} \implies e^{i\phi} \frac{\varphi'(z)(1-|\varphi(z_0)|^2)}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(z_0)})^2} = e^{i\theta} \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{1-|z_0|^2}{(1-\bar{z}_0z)^2} \implies$$

$z = z_0$ yazılırsa ;

$$e^{i\phi} \frac{\varphi'(z_0)(1-|\varphi(z_0)|^2)}{(1-|\varphi(z_0)|^2)^2} = e^{i\theta} \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{1-|z_0|^2}{(1-|z_0|^2)^2} \implies$$

$$e^{i\phi} \varphi'(z_0) \frac{1}{1-|\varphi(z_0)|^2} = e^{i\theta} \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{1}{1-|z_0|^2}$$

modül alınır ;

$$|\varphi'(z_0)| \frac{1}{1-|\varphi(z_0)|^2} = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| \frac{1}{1-|z_0|^2}$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\leq \frac{1}{1-|z_0|^2} \implies \frac{|\varphi'(z_0)|}{1-|\varphi(z_0)|^2} \leq \frac{1}{1-|z_0|^2} \implies$$

$(1-|z_0|^2)|\varphi'(z_0)| \leq 1-|\varphi(z_0)|^2$ bulunur. Ancak z_0 keyfi olduğundan

$(1 - |z|^2)|\varphi'(z)| \leq 1 - |\varphi(z)|^2$ eşitsizliği elde edilir ki bu da ispatı istenen şeydir.

4.7 Teorem : $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde

$$\max_{|z| \leq r} (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \max_{|z| \leq r} (1 - |z|^2)|g'(z)|$$

dir.

İspat : $f(z) \prec g(z)$ olduğundan dolayı

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \varphi(z), |z| < 1 \quad \text{için analitik} \\ \text{(ii)} \quad \varphi(z), |z| < 1 \text{ de } \varphi(0) = 0. \\ \text{(iii)} \quad \varphi(z), |z| < 1 \text{ de } |\varphi(z)| < 1 \end{array} \right\}$$

koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve Lemma 4.6 dan dolayı

$$(1 - |z|^2)|\varphi'(z)| \leq 1 - |\varphi(z)|^2 \quad (4.1)$$

eşitsizliğini gerçekler.

Aynı zamanda $f(z) \prec g(z) \implies f(z) = g(\varphi(z))$ ifadesinde türev alınırsa

$$f'(z) = g'(\varphi) \cdot \varphi'(z) \implies |f'(z)| = |g'(\varphi)| \cdot |\varphi'(z)|, (1 - |z|^2) > 0 \text{ olduğundan ;}$$

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| = (1 - |z|^2)|g'(\varphi)| \cdot |\varphi'(z)| \text{ dir. Bu adımda da (4.1) bağıntısı kullanılırsa ;}$$

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| = (1 - |z|^2)|g'(\varphi)| \cdot |\varphi'(z)| \leq (1 - |\varphi(z)|^2)|g'(\varphi)| \quad (4.2)$$

bulunur. Fakat $\varphi(z)$,Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden

$|\varphi(z)| \leq |z|$ dir. Bu da en son (4.2)de kullanılıp maksimum teoremi uygulanırsa

$$\max_{|z| \leq r} (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \max_{|z| \leq r} (1 - |z|^2)|g'(z)| \quad (0 \leq r < 1)$$

bağıntısı elde edilir. Bu da ispatı istenen şeydir.

4.8 Lemma $\varphi(z)$ fonksiyonu $(0 \leq r < 1)$ olmak üzere

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad |z| < r \text{ de analitik} \\ \text{(ii)} \quad |z| < r \text{ de } \varphi(0) = 0 \\ \text{(iii)} \quad |z| < r \text{ de } |\varphi(z)| < 1 \end{array} \right\}$$

koşullarını gerçekliyorsa $|\varphi'(0)| \leq 1$ dir.

İspat : $\varphi(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden ;

$$|\varphi(z)| \leq |z| \implies \frac{|\varphi(z)|}{|z|} \leq 1 \implies \left| \frac{\varphi(z)}{z} \right| \leq r < 1 \implies$$

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(z)}{z} \right| \leq r < 1, \quad \varphi(0) = 0 \implies$$

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{z - 0} \right| \leq r < 1 \implies |\varphi'(0)| \leq 1$$

olduğunu ispatlar.

4.9. Teorem : $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu takdirde $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ dir.

İspat : $f(z) \prec g(z) \implies |z| < 1$ de analitik, $\varphi(0) = 0, |\varphi(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve $f(z) = g(\varphi(z))$ dir. $f'(z) = \varphi'(z)g'(\varphi(z))$

$$\implies |f'(z)| = |g'(\varphi(z))||\varphi'(z)| \implies |f'(0)| = |g'(\varphi(0))||\varphi'(0)|$$

bulunur. Fakat Lemma 4.8 ; $|\varphi'(0)| \leq 1$ ve $\varphi(0) = 0$ koşullarından dolayı

$$|f'(0)| = |g'(\varphi(0))||\varphi'(0)| \leq |g'(\varphi(0))| = |g'(0)|$$

$\implies |f'(0)| \leq |g'(0)|$ bulunur ki bu da ispatı istenen şeydir.

Ancak subordinate fonksiyonlar yalınkat fonksiyonlar oldukları zaman çok daha önemli durumlar ortaya çıkar.

4.10. Lemma : $g(z)$,D de yalınkat olsun. Ancak ve yalnız $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ ise $f(z) \prec g(z)$ dir.

İspat : $f(z) \prec g(z)$ ve $g(z)$, D de yalınkat olsun.Bu takdirde

(i) $|z| < 1$ de analitik

(ii) $|z| < 1$ de $\varphi(0) = 0$

(iii) $|z| < 1$ de $|\varphi(z)| < 1$

koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır. Ayrıca $\varphi(z)$, Schwarz Lemmasının koşullarını gerçeklediğinden $|\varphi(z)| \leq |z|$ dir. Dolayısıyla

$z_1 \in \varphi(D_r) \implies z_1 = \varphi(z)$ olacak şekilde en az bir $z \in D_r$ vardır.

$z_1 = \varphi(z) \implies |z_1| = |\varphi(z)| \leq |z| < r \implies |z_1| < r \implies z_1 \in D_r \implies$

$\varphi(D_r) \subset D_r$ dir. $g(z)$, D de yalınkat olduğundan $g(\varphi(D_r)) \subset g(D_r)$ dir.

$$\left. \begin{array}{l} f(z) = g(\varphi(z)) \\ g(\varphi(D_r)) \subset g(D_r) \\ f(D_r) = g(\varphi(D_r)) \end{array} \right\} \implies$$

$f(D_r) \subset g(D_r)$ bulunur. $r \rightarrow 1$ olunca $f(D) \subset g(D)$ bulunur.

$f(z) \prec g(z) \implies f(z) = g(\varphi(z)) \implies f(0) = g(\varphi(0)) = g(0)$ dir. Yani sonuç olarak $f(0) = g(0)$ bulunur.

Karşıt olarak $g(z)$, D de yalınkat , $f(0) = g(0)$, $f(D) \subset g(D)$ olsun. $\omega = g(z)$, D de yalınkat olduğundan analitik ve injektiflikten dolayı $z = g^{-1}(\omega)$ da $g(D)$ de analitiktir.

$\implies f(D) \subset g(D)$ ve $f(0) = g(0)$ olduğundan $z = g^{-1}(\omega)$ da $f(D)$ de analitiktir. $f(z)$ de D de analitik olsun.

$\varphi(z) = g^{-1}(f(z))$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\omega = g(z)$ yalınkat olduğundan g^{-1} fonksiyonu da analitiktir. $f(z)$ de analitik olduğundan $\varphi(z) = g^{-1}(f(z))$ bileşke fonksiyonu da $g(D)$ de analitiktir. Yine $g(z)$, D de yalınkat olduğundan

$\varphi(0) = g^{-1}(f(0)) \implies f(0) = g(\varphi(0)) = g(0) \implies \varphi(0) = 0$ koşulunu gerçekler ve aynı zamanda $|z| < 1$ deki bütün değerler $\omega = f(z)$ analitik fonksiyonu tarafından alınırlar.

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(z), \quad |z| < 1 \text{ de analitik} \\ \varphi(0) = 0 \quad \text{koşulunu} \quad |z| < 1 \end{array} \right\}$$

gerçekleyen bir fonksiyon olur. Diğer taraftan $\varphi(z) = g^{-1}(f(z))$ D de regüler analitik olduğundan ve bunun bütün değerleri $z = g^{-1}(\omega)$ fonksiyonu vasıtasıyla verilir. Zira $f(D) \subset g(D)$ dir. O halde $|\varphi(z)| < 1$ dir.



5. POZİTİF REEL KISMA HAİZ FONKSİYONLAR

5.1 Tanım :

- (i) $p(0) = 1$ ($|z| < 1$ de)
- (ii) $\operatorname{Re} p(z) > 0$ ($|z| < 1$ de)
- (iii) $p(z)$, $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de analitik

özelliklerini gerçekleyen fonksiyonların sınıfını P ile gösterelim.

5.2 Özellik : $\omega = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu gözönüne alınsın.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \omega &= \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1+z)(1-\bar{z}) + (1+\bar{z})(1-z)}{(1-z)(1-\bar{z})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \bar{z} + z - |z|^2 + 1 - z + \bar{z} - |z|^2}{|1-z|^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 - 2|z|^2}{|1-z|^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(1 - |z|^2)}{|1-z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{Re} \omega = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ bulunur. $|z| < 1 \Rightarrow |z|^2 < 1 \Rightarrow 1 - |z|^2 > 0$ ve $|1-z|^2 > 0$ dan $\operatorname{Re} \omega = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \omega > 0$ bulunur. (Yani birim dairede $\operatorname{Re} \omega > 0$ dir.)

Diğer taraftan bu fonksiyon ;

$$\left. \begin{array}{lll} z = 0 & \text{noktasını} & \omega = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \Rightarrow \omega = 1 \quad \text{noktasına} \\ z = 1 & \text{noktasını} & \omega = \infty \quad \text{noktasına} \\ z = \infty & \text{noktasını} & \omega = -1 \quad \text{noktasına} \end{array} \right\}$$

tasvir eder. Bu fonksiyon aynı zamanda ;

$$\begin{aligned} |\omega|^2 &= \omega \bar{\omega} = \left| \frac{1+z}{1-z} \right|^2 = \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \left(\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \right) = \frac{1 + \bar{z} + z + |z|^2}{1 - \bar{z} - z + |z|^2} \\ &= \frac{1 + 2\operatorname{Re} z + |z|^2}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2} = \frac{1 + 2\operatorname{Re} z + |z|^2 + 4\operatorname{Re} z - 4\operatorname{Re} z}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2} \\ &= \frac{1 + 2\operatorname{Re} z + |z|^2 - 4\operatorname{Re} z}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2} + \frac{4\operatorname{Re} z}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2} \\ &= \frac{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2} + \frac{4\operatorname{Re} z}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2} = 1 + 4 \frac{\operatorname{Re} z}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2} \end{aligned}$$

Yani sonuç olarak ; $|\omega|^2 = 1 + 4 \frac{\operatorname{Re} z}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2}$ bulunur. O halde

$$\operatorname{Re} \omega = \frac{1 - |z|^2}{|1-z|^2} \quad (5.1)$$

$$|\omega|^2 = 1 + 4 \frac{\operatorname{Re} z}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2} \quad (5.2)$$

sonuçlarından hareket edilirse ;

a) $|z| < 1$ ve $\operatorname{Re} z > 0$ olsun. Bu demektir ki : (5.1) ve (5.2) sonuçlarından $\operatorname{Re} \omega > 0$, $|\omega| > 1$ bulunur.

b) $|z| < 1$ ve $\operatorname{Re} z < 0$ olsun. Bu demektir ki : (5.1) ve (5.2) sonuçlarından $\operatorname{Re} \omega > 0$, $|\omega| < 1$ bulunur.

(a) ve (b) sonuçlarından elde edilen, birim dairenin sağ yarım düzleme tasvir edildiğidir. O halde buraya kadar yaptığımız işlemlerle ω fonksiyonunun birim dairede pozitif reel kısma sahip olduğunu ve birim daireyi sağ yarım düzleme tasvir ettiği görülmüştür.

5.3 Lemma : $p(z)$ fonksiyonu ancak ve yalnız $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ ise P sınıfına aittir.

İspat : $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ olsun. Bu halde öyle bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ki bu fonksiyon

(i) D de analitik

(ii) $|\varphi(z)| < 1$

(iii) $\varphi(0) = 0$

koşullarını gerçekler ve $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ farzedilirse $p(z) \prec g(z)$ olduğundan

$p(z) = g(\varphi(z)) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$ dir.

Buradan $p(0) = \frac{1+\varphi(0)}{1-\varphi(0)} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \implies p(0) = 1$ dir.

($\omega = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun incelenmesinde görüldüğü gibi)

$$\operatorname{Re} p(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} + \frac{1+\overline{\varphi(z)}}{1-\overline{\varphi(z)}} \right) = \frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\varphi(z)|^2}$$

ve $|\varphi(z)| < 1$ koşulunu gerçeklediğinden ve $1-|\varphi(z)|^2 > 0$ ve $|1-\varphi(z)|^2 > 0$ olduğundan $\operatorname{Re} p(z) = \frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\varphi(z)|^2} > 0$ olur. O halde $\varphi(z)$, D de analitik olduğundan $p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$ fonksiyonu da D de analitiktir. O halde

$p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$, $p(z)$ D de analitik olduğundan $p(z) \in P$ dir.

Tersine $p(z) \in P$ olsun. Bu halde $p(0) = 1$, $p(z)$ D de analitik, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını gerçekler.

$g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu gözönüne alınsın.

$g(0) = \frac{1+0}{1-0} \implies g(0) = 1$ ve $p(0) = 1$ den $p(0) = g(0)$ koşulu sağlanır.

$\omega \in p(D)$ alalım. $\implies \omega = p(z)$ olacak şekilde bir $z \in D$ vardır.

$\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Re} \omega > 0$ olduğundan ω noktası sağ yarım düzlemindedir.

Diğer yandan $g(z)$ fonksiyonu D den sağ yarım düzleme yalınkat bir fonksiyon olduğundan $\omega = g(z')$ olacak şekilde bir $z' \in D$ vardır.

Gerçekten $\omega = g(z') = \frac{1+z'}{1-z'} \implies z' = \frac{\omega-1}{\omega+1} \implies |z'| \leq 1$ ve

$|z'|^2 = 1 - 4 \frac{\text{Re } \omega}{|1+\omega|^2} = 1 - 4 \frac{\text{Re } \omega}{|\omega|+2\text{Re } \omega+1}$, $\text{Re } \omega > 0$ olduğundan $z' \in D$ dir.

$\implies \omega = g(z') \implies \omega \in g(D)$ dir. Böylece $p(D) \subset g(D)$ olur. O halde Lemma 4.10 dan ;
" $g(z)$, D de yalınkat olsun. Ancak ve yalnız $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ ise $f(z) \prec g(z)$ dir" olduğundan $p(z) \prec g(z)$ olur.

5.4 Hazırlık : Şimdi $\omega_1 = \frac{\omega-1}{\omega+1}$ fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon

$$\left. \begin{array}{ll} \omega = 0 \text{ noktasını} & \omega_1 = -1 \text{ noktasına} \\ \omega = \xi \text{ noktasını} & \omega_1 = \xi_1 \text{ noktasına} \\ \omega = \infty \text{ noktasını} & \omega_1 = 1 \text{ noktasına} \end{array} \right\}$$

tasvir eder. Dolayısıyla bu fonksiyon $\text{Re } \omega > 0$ sağ yarım düzlemi $|\omega_1| \leq 1$ dairesi üzerine resmeder ve $\omega_1(1) = 0$ koşulunu gerçekler.

Şimdi $\text{Re } f(z) \geq 0$ olsun. $f(z)$, D de analitik ise $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$ fonksiyonu, $|g(z)| < 1$ koşulunu gerçekler. Bundan dolayı herhangi bir pozitif reel kısma haiz bir fonksiyon ; $g(z)$, D de analitik ve $g(0) = 0$, $|g(z)| < 1$ olmak üzere $f(z) = \frac{1+g(z)}{1-g(z)}$ şeklinde yazılabilir. Bu halde $f(0) = 1$ dir.

$|a| < 1$ ise

$$\left| \frac{1+a}{1-a} \right| \leq \frac{1+|a|}{1-|a|} \quad (5.3)$$

dir.

Gerçekten, $|1+a| \leq 1+|a|$ (Üçgen Eşitsizliğinden)

$$\begin{aligned} 1 = |1| &= |1+a-a| = |1-a+a| \leq |1-a| + |a| \implies 1-|a| \leq |1-a| \\ \implies \left. \begin{array}{l} |1+a| \leq 1+|a| \\ 1-|a| \leq |1-a| \end{array} \right\} \frac{|1+a|}{|1-a|} &\leq \frac{1+|a|}{1-|a|} \implies \left| \frac{1+a}{1-a} \right| \leq \frac{1+|a|}{1-|a|} \end{aligned}$$

bulunur. O halde herhangi bir pozitif reel kısma haiz fonksiyon $f(z)$, $|g(z)| \leq 1$ koşulunu gerçekleyen fonksiyon olmak üzere ; $f(z) = \frac{1+g(z)}{1-g(z)}$ şeklinde yazılabilir- yordu. O halde (5.3) eşitsizliğinden dolayı ;

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad (5.4)$$

eşitsizliğini gerçekler. Ayrıca $\text{Re } f(z) > 0$ olsun. Bu halde

$$\text{Re} \left\{ \frac{1}{f(z)} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{\overline{f(z)}}{|f(z)|^2} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{f(z)}{|f(z)|^2} \right\} > 0$$

olduğundan, (5.4) eşitsizliğinden ;

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \implies |f(z)| \geq \frac{1-|z|}{1+|z|} \quad (5.5)$$

bulunur. Dolayısıyla (5.4) ve (5.5) eşitsizlikleri birleştirilirse ;

$$\left. \begin{array}{l} |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \\ |f(z)| \geq \frac{1-|z|}{1+|z|} \end{array} \right\} \implies$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad (5.6)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Dolayısıyla aşağıdaki özellik yazılabilir:

5.5 Özellik : $p(z) \in P$ olsun. Bu takdirde ;

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad \text{ve} \quad |p'(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|)^2}, \quad |p'(0)| \leq 2$$

dir.

İspat : Hazırlık 5.4 den dolayı ve $p(z) \in P$ olduğundan $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$,

$p(0) = 1$ koşullarını gerçekler. $\varphi(z)$, D de analitik, $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere ;

$p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$ şeklinde yazılabilir. Hazırlık 5.4 den ve (5.6) eşitliğinden ;

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} \implies p'(z) &= \frac{\varphi'(z)(1-\varphi(z)) + \varphi'(z)(1+\varphi(z))}{(1-\varphi(z))^2} \\ &= \frac{\varphi'(z) - \varphi'(z)\varphi(z) + \varphi'(z) + \varphi(z)\varphi'(z)}{(1-\varphi(z))^2} \end{aligned}$$

$$\implies p'(z) = \frac{2\varphi'(z)}{(1-\varphi(z))^2} \implies |p'(z)| = \frac{2|\varphi'(z)|}{|1-\varphi(z)|^2}$$

Ancak $\varphi(z)$ Schwarz lemmasının koşullarını gerçeklediğinden ve Lemma 4.6 dan dolayı ; $|\varphi'(z)| \leq \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}$ dir. Bunu $|p'(z)|$ de kullanırsak ;

$$\begin{aligned} |p'(z)| &= \frac{2|\varphi'(z)|}{|1-\varphi(z)|^2} \leq \frac{2\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}}{|1-\varphi(z)|^2} = \frac{2(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)|1-\varphi(z)|^2} \\ &= \frac{2(1-|\varphi(z)|)(1+|\varphi(z)|)}{(1-|z|)(1+|z|)|1-\varphi(z)|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies |p'(z)| &\leq \frac{2(1-|\varphi(z)|)(1+|\varphi(z)|)}{(1-|z|)(1+|z|)(1-|\varphi(z)|)^2} = \frac{2(1+|\varphi(z)|)}{(1+|z|)(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)} \\ &= \frac{1+|\varphi(z)|}{1+|z|} \cdot \frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)} \end{aligned}$$

$|\varphi(z)| \leq |z|$ olduğundan $1+|\varphi(z)| \leq 1+|z| \implies \frac{1+|\varphi(z)|}{1+|z|} \leq 1$ ifadesi kullanılırsa ;

$$\implies |p'(z)| \leq \frac{1+|\varphi(z)|}{1+|z|} \cdot \frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)} \leq \frac{2}{(1-|z|)(1-|\varphi(z)|)}$$

$$\leq \frac{2}{(1-|z|)(1-|z|)} = \frac{2}{(1-|z|)^2}$$

Yani sonuç olarak ;

$$|p'(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|)^2}$$

bulunur. $z = 0$ yazılırsa ; $|p'(0)| \leq 2$ bulunur.

5.6 Teorem : $p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots$ fonksiyonu D de analitik olsun. Bu takdirde aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir :

(i) $p(z)$ fonksiyonu P sınıfına aittir.

$$(ii) \quad p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \quad , \quad \gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$$

gerçeklenecek şekilde artan $\gamma(t)$ fonksiyonu vardır ($0 \leq t \leq 2\pi$)

(iii) $m = 1, 2, \dots$ için

$\sum_{k=0}^m \sum_{p=0}^m c_{k-p} \lambda_k \overline{\lambda_p} \geq 0$ ($\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in C$) dir. $c_0 = 2$ ve $c_{-k} = \overline{c_k}$ ($k \geq 1$) kabul edilmiştir.

İspat : (i) $p \in P$ olsun. Bu takdirde Schwarz Formülüne göre ;

" Schwarz Formülü : $f(z)$, $|z| < R$ de analitik olsun. Bu takdirde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{\xi+z}{\xi-z} u(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\xi} + ic$$

dir. Burada c keyfi reel sabittir ve $u(z)$ ise

$$u(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{\xi+z}{\xi-z} u(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\xi} \right]$$

de $f(z)$ nin reel kısmıdır."

O halde bu formülden ;

$$p(z) = \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{\xi+z}{\xi-z} \operatorname{Re} p(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\xi} \right]$$

$$\left(\xi = re^{it} \implies d\xi = ire^{it} dt \implies \frac{d\xi}{\xi} = \frac{ire^{it} dt}{re^{it}} = i dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \operatorname{Re} p(re^{it}) \cdot i dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \operatorname{Re} p(re^{it}) \cdot dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} d\gamma(t, r) \quad , \quad |z| < r < 1 \text{ için}$$

burada $\gamma(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \operatorname{Re} p(re^{it}) dt$ ve $0 \leq t \leq 2\pi$ artandır. $\operatorname{Re} p(z) > 0$ olduğundan ve $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 2\pi$ olmak üzere $\gamma(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} p(re^{it}) dt > 0$ dır. O halde $0 \leq t_2 - t_1 \leq 2\pi$ olduğundan ;

$$\begin{aligned} \gamma(t_2, r) &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{t_2} \operatorname{Re} p(re^{it}) dt}_{\gamma(t_2, r)} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} \operatorname{Re} p(re^{it}) dt}_{\gamma(t_1, r)} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re} p(re^{it}) dt > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma(t_2, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_2} \operatorname{Re} p(re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} \operatorname{Re} p(re^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re} p(re^{it}) dt \\ &> \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} \operatorname{Re} p(re^{it}) dt}_{\gamma(t_1, r)}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 2\pi \text{ için} \end{aligned}$$

$\gamma(t_1, r) \leq \gamma(t_2, r)$ dir. Yani fonksiyon $0 \leq t \leq 2\pi$ de artandır.

Diğer taraftan

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \cdot \operatorname{Re} p(re^{it}) \cdot dt$$

ifadesinde $z = 0$ yazılırsa, $p(0) = 1$ olduğundan

$$p(0) = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + 0}{re^{it} - 0} \cdot \operatorname{Re} p(re^{it}) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} p(re^{it}) \cdot dt = \gamma(2\pi, r)$$

Yani sonuç olarak $\gamma(2\pi, r) = 1$ bulunur. Aynı zamanda

$$\gamma(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \operatorname{Re} p(re^{it}) \cdot dt \text{ den}$$

$$\gamma(0, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^0 \operatorname{Re} p(re^{it}) \cdot dt = 0 \text{ bulunur.}$$

"Helly Seçme Teoremi : (Natanson p.223 veya Feller p.267)

$[a, b]$ aralığında sonsuz elemanı haiz bir $F = \{f(x)\}$ ailesi tanımlanmış olsun. Ailenin bütün fonksiyonları ve ailenin her fonksiyonunun toplam varyasyonu sınırlı ise yani $|f(x)| \leq K$ ve $\bigvee_a^b(f) \leq K$ ise F ailesinden bir $(f_n(x))$ dizisi seçmek mümkündür. Öyle ki dizi $[a, b]$ nin her noktasında sonlu bir $\varphi(x)$ fonksiyonuna yakınsar."

n' ye göre limiti 1 olan ($n \rightarrow \infty$ için $r_n \rightarrow 1$) öyle bir (r_n) dizisi bulunabilir ki $\gamma(t, r_n)$ bütün süreklilik noktaları için artan bir $\gamma(t)$ fonksiyonuna yakınsar. Böylece

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} \operatorname{Re} p(re^{it}) \cdot dt = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} d\gamma(t, r)$$

ifadesinden limite geçilirse

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}(1+zr^{-1}e^{-it})}{re^{it}(1-zr^{-1}e^{-it})} d\gamma(t, r) = \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} d\gamma(t)$$

bulunur.

(ii) koşulu gerçekleşmiş olsun. Katsayılar

$$c_k = 2 \int_0^{2\pi} e^{-ikt} d\gamma(t).$$

ile ifade edilirler.

Gerçekten ;

$$\begin{aligned} p(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} d\gamma(t) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z+e^{-it}z-e^{-it}z}{1-ze^{-it}} d\gamma(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-e^{-it}z}{1-e^{-it}z} + \frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z} \right) d\gamma(t) = \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z} \right] d\gamma(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[1 + 2e^{-it}z(1+e^{-it}z+e^{-2it}z^2+\dots) \right] d\gamma(t) \\ &= \int_0^{2\pi} d\gamma(t) + 2 \int_0^{2\pi} e^{-it}z d\gamma(t) + 2 \int_0^{2\pi} e^{-2it}z^2 d\gamma(t) + \dots \end{aligned}$$

olduğundan dolayı katsayılar

$$c_k = 2 \int_0^{2\pi} e^{-ikt} d\gamma(t) \quad , \quad (k = 1, 2, \dots)$$

ile ifade edilirler. $k \leq 0$ için de bu formül geçerlidir. Böylece

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k e^{-ikt} \right|^2 d\gamma(t) \\ &= \int_0^{2\pi} (\lambda_0 + \lambda_1 e^{-it} + \lambda_2 e^{-2it} + \dots + \lambda_m e^{-mit})(\overline{\lambda_0} + \overline{\lambda_1} e^{it} + \overline{\lambda_2} e^{2it} + \dots + \overline{\lambda_m} e^{mit}) d\gamma(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^m \lambda_k e^{-ikt} \right) \left(\sum_{p=0}^m \overline{\lambda_p} e^{ipt} \right) d\gamma(t) \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{p=0}^m \lambda_k \overline{\lambda_p} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-p)t} d\gamma(t) \end{aligned} \tag{5.7}$$

olur. Ancak

$$c_k = 2 \int_0^{2\pi} e^{-ikt} d\gamma(t) \quad , \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

olduğundan ve

$$\frac{1}{2} c_{k-p} = \int_0^{2\pi} e^{-i(k-p)t} d\gamma(t)$$

olur. Bu da (5.7) deki ifadede yerine yazılırsa ve $d\gamma(t) > 0$ olduğundan ;

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k e^{-ikt} \right|^2 d\gamma(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \sum_{p=0}^m \lambda_k \overline{\lambda_p} c_{k-p}$$

bulunur. Bu da (iii) ifadesidir.

(c) (iii) gerçekleşmiş olsun. $k = 0, 1, 2, \dots, m$ için $\lambda_k = z^k (|z| < 1)$ seçelim ve $m \rightarrow \infty$ olsun. Bu halde

$$0 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \sum_{p=0}^m \lambda_k \overline{\lambda_p} c_{k-p} \implies \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\overline{z})^p$$

elde ederiz. Bu halde bu toplamda üç tür terim vardır :

$$k = p \text{ olanlar} : \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_0 z^p (\overline{z})^p = 2 \sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} \quad (5.8)$$

$$k > p \text{ olanlar} \quad k = p + n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\overline{z})^p &= \sum_{k=p+n}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_n z^{p+n} (\overline{z})^p \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p} \quad (k-p=n, \quad n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$k' < p' \text{ olanlar} \quad p' = k' + n$$

$$\begin{aligned} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{p'=0}^{\infty} c_{k'-p'} z^{k'} (\overline{z})^{p'} &= \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{p'=k'+n}^{\infty} c_{-n} (z)^{k'} (\overline{z})^{k'} (\overline{z})^n \\ &= \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} |z|^{2k'} (\overline{z})^n \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sonuç olarak

$$\sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{p'=0}^{\infty} c_{k'-p'} z^{k'} (\overline{z})^{p'} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n z^n |z|^{2p}}$$

olur. (5.8), (5.9), (5.10) terimleri taraf tarafa toplanırsa ;

$$0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{k-p} z^k (\overline{z})^p = 2 \sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p}}_{\text{...}}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n z^n} |z|^{2p}}_{2\operatorname{Re} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p}} \\
& = 2 \sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + 2\operatorname{Re} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n |z|^{2p} \\
& = 2 \sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + 2\operatorname{Re} \sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \\
& = 2 \sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} + 2 \sum_{p=0}^{\infty} |z|^{2p} \cdot \underbrace{\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n}_{\operatorname{Re} p(z)-1} \text{ olduğundan} \\
& = \frac{2}{1-|z|^2} + \frac{2}{1-|z|^2} (\operatorname{Re} p(z) - 1) \\
& = \frac{2}{1-|z|^2} (1 + \operatorname{Re} p(z) - 1) = \frac{2}{1-|z|^2} \operatorname{Re} p(z)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{2}{1-|z|^2} \operatorname{Re} p(z) \Rightarrow |z| < 1 \Rightarrow |z|^2 < 1 \Rightarrow 1 - |z|^2 > 0 \Rightarrow \frac{2}{1-|z|^2} > 0$
 olduğundan $\operatorname{Re} p(z) > 0$ bulunur. $p(z) \in P$ olur. O halde sonuç olarak

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \\ \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \\ \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)}$$

olur.

5.7 Sonuç : $p(z) = 1 + c_1 z + \dots \in P$ olsun. Bu takdirde

$|c_n| \leq 2$ ($n = 1, 2, \dots$) ve eşitlik ancak ve yalnız $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 1$ olmak üzere
 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \geq 0$ için

$$p(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \frac{e^{i\alpha+2\pi i \frac{\nu}{n}} + z}{e^{i\alpha+2\pi i \frac{\nu}{n}} - z}$$

olması halinde geçerlidir.

İspat :

$$c_n = 2 \int_0^{2\pi} e^{-ikt} d\gamma(t)$$

den

$$\begin{aligned}
|c_n| &= 2 \left| \int_0^{2\pi} e^{-int} d\gamma(t) \right| \leq 2 \int_0^{2\pi} d\gamma(t) = 2(\gamma(2\pi) - \gamma(0)) \\
&= 2(1 - 0) = 2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow |c_n| \leq 2$ bulunur.

Ve eşitlik ancak ve yalnız bir α için $\alpha + \frac{2\pi\nu}{n}$ şeklindeki noktalarında γ_ν sıçramaları hariç $\gamma(t)$ nin sabit olması halinde geçerlidir. Böylece

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t)$$

şeklindedir ve $p(0) = 1 = \int_0^{2\pi} d\gamma(t)$ bulunur. O halde

$$|c_n| = 2 \left| \int_0^{2\pi} e^{-int} d\gamma(t) \right| = 2$$

bulunur.

6. YILDIZIL FONKSİYONLAR

6.1 Tanım (Yıldızıl Fonksiyon) : $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ içinde yalınkat ve $F = f(D)$ tasvir bölgesi O 'ya göre yıldız bölge ise yani $\omega \in F$ için, $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $t\omega \in F$ ise $f(z)$ fonksiyonuna "yıldızıl fonksiyon" denir. Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı S^* ile gösterilir.

6.2 Teorem : $f(z)$ analitik fonksiyonunun $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$p(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \in P$$

olmasıdır.

İspat : $f(z)$ D de yıldızıl olsun. Bu takdirde aşağıda yazılan üç koşul yıldızıl fonksiyon tanımından dolayı gerçekleşir:

- (i) $f(z)$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de yalınkattır.
- (ii) $f(D) = F$ tasvir bölgesi O 'ya göre yıldızıl bölgedir. Yani $\omega \in F$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $t\omega \in F$ dir.
- (iii) $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ ise $f(0) = 0$ dir ve $0 \in F = f(D)$ dir.

İddia 1 : $g(z) = t \cdot f(z)$ fonksiyonu $(0 \leq t \leq 1)$ $f(z)$ fonksiyonuna subordinatedir.

İspat :

$$f(z) = z + a_2z^2 + \dots \implies f(0) = 0$$

$$g(z) = t \cdot f(z) \implies g(0) = t \cdot f(0) = t \cdot 0 = 0 \implies f(0) = g(0)$$

$$\omega \in g(D) \implies t \cdot f(z) = \omega \tag{6.1}$$

olacak şekilde bir $z \in D$ vardır. $f(z)$ yıldızıl fonksiyon olduğundan $\forall z \in D$ için ve $t \in [0, 1] \leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$ olmak üzere

$$t \cdot f(z) \in f(D) \tag{6.2}$$

dir. O halde (6.1) ve (6.2) ifadelerinden $\omega = t \cdot f(z) \in f(D)$ dir. Buradan $g(D) \subset f(D)$ elde edilir.

Diğer taraftan $f(z)$, D de yalınkat olduğundan

" Lemma 4.10 : $G(z)$, D de yalınkat olsun. Ancak ve yalnız $G(0) = F(0)$ ve $F(D) \subset G(D)$ ise $F(z) \prec G(z)$ dir."

Bu Lemmanın yeterliliğine göre $t \cdot f(z) \prec f(z)$ olur. Diğer taraftan ;

İddia 2 : Burada subordinate prensibi kullanılacak olursa : $0 < r < 1$ olmak üzere $g(D_r) \subset f(D_r)$ sonucu bulunur. Bunun anlamı

$$\{t \cdot f(z) \mid |z| < r\} \subset \{f(z) \mid |z| < r\}$$

$(0 \leq t \leq 1, \quad 0 < r < 1)$ dir.

İddia 3 : Ancak aynı zamanda $\{f(z) \mid |z| < r\} = f(D_r)$ bölgesi bir yıldızlı bölgedir.

İspat : Gerçekten $\omega_0 \in f(D_r) \implies \omega_0 = f(z_0)$ olacak şekilde bir $z_0 \in D_r$ vardır. $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $t\omega_0 = tf(z_0) \in f(D_r)$ dir. $\implies g(D_r) \subset f(D_r) \implies t\omega_0 \in f(D_r)$ bulunur ki, bu da iddianın doğruluğunu gösterir. O halde $f(z)$ nin,

D_r de yıldızlı bir fonksiyon olduğu sonucuna varılır.

İddia 4 : Geometrik varsayımlar gösterir ki $\text{Arg } f(re^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ de θ nın artan bir fonksiyonudur.

İspat : İddia 3 de, $f(z)$ nin D_r de yıldızlı bir fonksiyon olduğu gösterilmişti. Özellik 1.20 den dolayı, θ nın pozitif yönde 2π kadar artması halinde $\text{Arg } f(re^{i\theta})$ da aynı yönde 2π kadar artar. Bu da $\text{Arg } f(re^{i\theta})$ nın, θ nın artan fonksiyonu olduğunu gösterir. Yani ;

$$\frac{d}{d\theta} [\text{Arg } f(re^{i\theta})] > 0 \quad (6.3)$$

dir.

Şimdi bu iddiaların ışığı altında teorem incelendiğinde ;

$\log f(z) = \log |f(z)| + i\text{Arg } f(z)$ bağıntısında $z = re^{i\theta}$ yazılırsa

$\log f(re^{i\theta}) = \log |f(re^{i\theta})| + i\text{Arg } f(re^{i\theta})$ bulunur. θ ya göre türetilirse ;

$$\implies ire^{i\theta} \cdot \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log |f(re^{i\theta})| \right\} + i \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \text{Arg } f(re^{i\theta}) \right\}$$

$$\implies re^{i\theta} \cdot \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = -i \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log |f(re^{i\theta})| \right\} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \text{Arg } f(re^{i\theta}) \right\}$$

$$\text{Re} \left\{ re^{i\theta} \cdot \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \text{Arg } f(re^{i\theta}) \right\} \quad (6.4)$$

bulunur.

Diğer taraftan ;

$\log f(z) = \log |f(z)| + i\text{Arg } f(z)$ den dolayı $\text{im}\{\log f(z)\} = \text{Arg}\{f(z)\}$ yazılabilir. Ancak diğer yandan $z = re^{i\theta} \implies \text{im}\{\log f(re^{i\theta})\} = \text{Arg}\{f(re^{i\theta})\}$ ifadesi θ ya göre türetilirse;

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \text{im} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \text{Arg } f(re^{i\theta}) \right\} \quad (6.5)$$

(6.4) ve (6.5) bağıntılarından ;

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} \left\{ re^{i\theta} \cdot \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \text{Arg } f(re^{i\theta}) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \text{im} \log f(re^{i\theta}) \right\} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \text{Arg } f(re^{i\theta}) \right\} \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\text{Re} \left\{ re^{i\theta} \cdot \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta} \text{im} \left\{ \log f(re^{i\theta}) \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \text{Arg } f(re^{i\theta}) \right\}$$

bulunur. Burada, yukarıda iddia 4 'ün sonucu olan (6.3) bağıntısı kullanılacak olursa ;

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ r e^{i\theta} \cdot \frac{f'(r e^{i\theta})}{f(r e^{i\theta})} \right\} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im} \left\{ \log f(r e^{i\theta}) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \operatorname{Arg} f(r e^{i\theta}) \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde bu bağıntı $\operatorname{Re} \left\{ z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} \geq 0$ şeklinde ifade edilebilir.

$p(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ ve $f(z)$, D de yalınkat (yıldızıl olduğundan);

$$p(z) = z \cdot \frac{(z+a_2 z^2+\dots)'}{z+a_2 z^2+\dots} = \frac{z+a_2 z^2+\dots}{z+a_2 z^2+\dots} = \frac{z(1+a_2 z+\dots)}{z(1+a_2 z+\dots)}$$

$$\Rightarrow p(0) = \frac{1+0+\dots}{1+0+\dots} = 1 \Rightarrow p(0) = 1$$

bulunur.

$f(z)$ D de yalınkat olduğundan $\forall z \neq 0 \in D$ için $f(z) \neq 0$ dır, $f'(0) \neq 0$ dır. O halde $p(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ D de analitik ve $\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Re} \left\{ z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re} p(z) \geq 0$ dır O halde $p(z) \in P$ dir.

Şimdi aksi ele alınsın. Yani $p(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \in P$ olsun. Bu takdirde $f(z)$, D de $f(z) \neq 0$ koşulunu gerçekler. Eğer gerçeklemeseydi $p(z)$ nin D de kutbu olacaktı. Bu da $p(z)$ nin, D de analitik olmasına aykırılık teşkil edecekti. Eğer a_m katsayısı, $f(z)$ nin sıfırdan farklı ilk katsayısı ise; $f(z) = a_m z^m + \dots$ olacaktı.

$$\Rightarrow f'(z) = m \cdot a_m z^{m-1} + \dots$$

$$\begin{aligned} p(z) &= z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = z \cdot \frac{m a_m z^{m-1} + \dots}{a_m z^m + \dots} = \frac{m a_m z^m + \dots}{a_m z^m + \dots} \\ &= \frac{a_m z^m (m + \dots)}{a_m z^m (1 + \dots)} = \frac{m + \dots}{1 + \dots} \end{aligned}$$

$\Rightarrow p(z) \in P \Rightarrow p(0) = 1$ dir. O halde $p(0) = \frac{m}{1} = m = 1$ olmak zorundadır. O halde sıfırdan farklı ilk katsayı a_1 dir, yani

$$f(z) = a_1 z + \dots \Rightarrow a_1 = 1 \text{ alınır} ; f(0) = 0 , f'(0) = 1 \neq 0$$

koşulunu gerçekler. $p(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \in P$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \left\{ z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im} \left\{ \log f(r e^{i\theta}) \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \operatorname{Arg} f(r e^{i\theta}) \right\} \geq 0$$

olduğundan dolayı $\operatorname{Arg} f(r e^{i\theta})$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ de artandır. O halde bu artımın toplamı

;

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Arg } f(re^{i\theta}) d\theta &= \int_0^{2\pi} \text{Re} \left[re^{i\theta} \cdot \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right] d\theta \\
(z = re^{i\theta} \implies dz &= ire^{i\theta} d\theta \implies d\theta = \frac{1}{i} \frac{dz}{z}) \\
\implies \text{Re} \int_{|z|=r} \left[z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{dz}{z} \right] &= \text{Re} \int_{|z|=r} \left[\frac{1}{i} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot dz \right] \\
&= \text{Re} \left[\frac{1}{i} 2\pi i \left(\underbrace{\sum_1 \text{sıfırlar}} - \underbrace{\sum_0 \text{Rezidüer}} \right) \right] = \text{Re}[2\pi] = 2\pi
\end{aligned}$$

dir. O halde $f(z)$ fonksiyonu $|z| = r$ dairesini birebir olarak yıl dızıl analitik eğri üzerine tasvir eder. O halde ;

" Lemma : $f(z)$, $\overline{D}$ de analitik, ∂D de injektif ise bu takdirde $f(z)$, D de yalınkattır ve D yi $j = f(\partial D)$ kapalı Jordan eğrisinin iç bölgesi üzerine tasvir eder. (Lemma 1.1 Bölüm 1 (Bazı Temel Sonuçlar) Chr. Pommerenke sayfa 13) ile $f(z)$ nin $D_r = \{z \mid |z| < r\}$ de yalınkat olduğu ve $f(D_r)$ nin yıldızıl bir bölge olduğu D_r yi $f(D_r)$ nin içine tasvir ettiği görülmüş olur. O halde $\{f(z) \mid |z| < r\}$ yıldızıl bir bölgedir ve her $0 < r < 1$ için bu işlem doğru olacağından

$f(z)$, $D = \{z \mid |z| < r < 1\}$ de yalınkattır ve yıldızıl bir fonksiyondur.

Şimdi de yıldızıl fonksiyonlar için bir gösteriliş çıkarılacak olursa ;

6.3 Teorem : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonunun $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen artan bir $\gamma(t)$ fonksiyonu için ;

$$f(z) = z \text{Exp} \left[2 \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - e^{-it} z} d\gamma(t) \right] \quad (|z| < 1)$$

olmasıdır.

İspat: " Teorem :5.6 $p(z) = 1 + c_1 z + \dots$ fonksiyonu D de analitik olsun. Bu takdirde aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir :

(i) $p(z)$ fonksiyonu P sınıfına aittir.

$$(ii) \quad p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-it} z}{1 - e^{-it} z} d\gamma(t) \quad , \quad \gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$$

gerçeklenecek şekilde artan $\gamma(t)$ fonksiyonu vardır. ($0 \leq t \leq 2\pi$) "

(iii) $m = 1, 2, \dots$ için

$$\sum_{k=0}^m \sum_{p=0}^m c_{k-p} \lambda_k \overline{\lambda_p} \geq 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in C \text{ dir.})$$

" Teorem :6.2 $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ analitik fonksiyonunun D de yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$p(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \in P$$

olmasıdır."

Yukarıda yazılan son iki teoreme göre ;

$$p(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t)$$

yazılabilir. Burada $\gamma(t)$ fonksiyonu istenilen özelliklere haizdir. O halde buradan ;

$$\begin{aligned} p(z) &= z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z + e^{-it}z - e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1-e^{-it}z + 2e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-e^{-it}z}{1-e^{-it}z} + \frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z} \right) d\gamma(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z} \right) d\gamma(t) \end{aligned}$$

Yani sonuç olarak ;

$$z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z} \right) d\gamma(t)$$

Her iki taraf z ye bölünürse ;

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{z} + \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} \right) d\gamma(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{z} d\gamma(t) \\ &+ \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) = \frac{1}{z} \int_0^{2\pi} d\gamma(t) + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \\ &= \frac{1}{z} \underbrace{\left[\gamma(2\pi) - \gamma(0) \right]}_1 + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \\ &= \frac{1}{z} + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1 - e^{-it}z} d\gamma(t) \\
&= \int_0^{2\pi} 2e^{-it} \left[\frac{1}{1 - e^{-it}z} \right] d\gamma(t) = 2 \int_0^{2\pi} e^{-it} [1 + e^{-it}z + e^{-2it}z^2 + \dots] d\gamma(t) \\
&= 2 \int_0^{2\pi} (e^{-it} + e^{-2it}z + e^{-3it}z^2 + \dots) d\gamma(t) \\
&= \int_0^{2\pi} 2e^{-it} d\gamma(t) + 2 \int_0^{2\pi} (e^{-2it}z + e^{-3it}z^2 + \dots) d\gamma(t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} 2e^{-it} d\gamma(t) + 2 \int_0^{2\pi} (e^{-2it}z + e^{-3it}z^2 + \dots) d\gamma(t)$$

(Teorem 5.6 da a_k katsayıları $a_k = 2 \int_0^{2\pi} e^{-ikt} d\gamma(t)$ şeklinde verilmişti .)

$$\Rightarrow \log f(z) - \log z = -2 \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it}z) d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log \frac{f(z)}{z} = -2 \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it}z) d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log \frac{f(z)}{z} = 2 \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it}z)^{-1} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log \frac{f(z)}{z} = 2 \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{(1 - e^{-it}z)} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{z} = \text{Exp} \left[2 \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{(1 - e^{-it}z)} d\gamma(t) \right]$$

$$\Rightarrow f(z) = z \text{Exp} \left[2 \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{(1 - e^{-it}z)} d\gamma(t) \right]$$

bulunur.

Şimdi tersine hareket edilirse ;

$$f(z) = z \text{Exp} \left[2 \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{(1 - e^{-it}z)} d\gamma(t) \right]$$

ifadesinde logaritma alınır ;

$$\Rightarrow \log f(z) = \log z + 2 \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{(1 - e^{-it}z)} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log f(z) = \log z + 2 \int_0^{2\pi} \log (1 - e^{-it}z)^{-1} d\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \log f(z) = \log z - 2 \int_0^{2\pi} \log (1 - e^{-it}z) d\gamma(t)$$

Türev alınıp yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa ;

$$p(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t)$$

bulunur ki bu da Teorem 5.6 gereğince $p(z) \in P$ dir ve Teorem 6.2 gereğince $f(z)$, D de yıldızlıdır.

7. KONVEKS FONKSİYONLAR

7.1 Tanım : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu eğer

- (i) $f(z)$, D de yalınkat
- (ii) tasvir bölgesi $f(D)$ konveks

koşullarını gerçeğe D de konvektir denir. Konveks fonksiyonlar sınıfı C ile gösterilir.

7.2 Teorem : Analitik $f(z)$ fonksiyonunun D de konveks olması için gerek ve yeter şart

$$1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \in P$$

olmasıdır.

Dahası $f(z)$, D de konveks ise o takdirde

$$\operatorname{Re} \left[\frac{2z \cdot f'(z)}{f(z) - f(\xi)} - \frac{z + \xi}{z - \xi} \right] \geq 0 \quad (|z| < 1, \quad |\xi| < 1) \quad (7.1)$$

dir.

(7.1) eşitsizliği (Sheil-Small 1969 VE Suffridge 1970 olarak bilinir).

$$\operatorname{Re} \frac{z \cdot f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re} \frac{f'(z)}{z} > \frac{1}{2}$$

yi gerektirir. ($|z| < 1$) ve $\operatorname{Re} \sqrt{f'(z)} > \frac{1}{2}$. (Marx-1932/1933, Strohacher 1933)

Birinci eşitsizlik $\xi = 0$ için özel haldir. İkinci eşitsizlik z ye göre kuvvet serisinde z nin katsayılarını karşılaştırmak suretiyle çıkar ve

$z^{-1} f(z) \prec (1 - z)^{-1}$ olarak ifade edilebilir ve bu nedenle

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|}, \quad (|z| < 1)$$

gerçeklenir.

İspat : $f(z)$,D de konveks olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar gerçekleşir:

- (i) $f(z)$,D de yalınkattır.
- (ii) $f(z)$,D yi konveks $f(D)$ tasvir bölgesine resmeder.

Göstermeliyiz ki $C(r) = \{f(z) | |z| = r\}$ eğrisi ($0 < r < 1$) konvektir.

$|z_1| < |z_2| < r \implies \left| \frac{z_1}{z_2} \right| < r$ dir. Buradan $|z| < 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere konveks bölge tanımından dolayı

$$t \cdot f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1 - t) f(z) \in f(D)$$

dir. Ancak burada

$$F(z) = t \cdot f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1 - t) f(z)$$

diyelim.

İddia 1 : $F(z) \prec f(z)$ dir.

Gerçekten

$$F(0) = t.f\left(\frac{z_1}{z_2}0\right) + (1-t)f(0) = t.f(0) + (1-t)f(0) = 0 = f(0)$$

($f(z)$, D de yalınkat olup $f(0) = 0$ dır.)

Yani sonuç olarak $F(0) = f(0)$ bulunur. Diğer taraftan bir $\omega \in F(D)$ alalım.

$$\Rightarrow \omega = F(z) = t.f\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + (1-t)f(z)$$

, olacak şekilde bir $z \in D$ vardır. Fakat $f(z)$,D de konveks olduğundan ;

$$\begin{aligned} \omega = t.f\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + (1-t)f(z) \in f(D) &\Rightarrow \omega \in f(D) \\ &\Rightarrow F(D) \subset f(D) \end{aligned}$$

dir. Ancak $f(z)$ aynı zamanda D de yalınkat olduğundan Lemma 4.10 dan ; dolayı $F(z) \prec f(z)$ olur. (Lemma 4.10 : $h(z)$, D de yalınkat olsun. Ancak ve yalnız $g(0) = h(0)$ ve $g(D) \subset h(D)$ ise $g(z) \prec h(z)$ dir.)

Diğer taraftan subordinate prensibinden dolayı (Teorem 4.4 den) ;

$F(D_r) \subset f(D_r)$ sonucunu getirir. O halde $z \in D_r$ için $F(z) \in f(D_r)$ dir. Özel olarak $z_2 \in D_r$ alınır ;

$$\begin{aligned} F(z_2) &= t.f\left(\frac{z_1}{z_2}z_2\right) + (1-t)f(z_2) \in f(D_r) \\ \Rightarrow F(z_2) &= t.f(z_1) + (1-t)f(z_2) \in f(D_r) \\ &= \{f(z) \mid |z| < r\} \end{aligned}$$

bulunur ki bu da $f(D_r)$ nin konveks olduğunu, dolayısıyla

$C(r) = \{f(z) \mid |z| = r\}$ eğrisinin konveks olduğunu gösterir.

İddia 2 : $f(z)$, D de konveks ise D de yalınkattır. Bu durumda

$$g(z, \xi) = \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\xi)} - \frac{z+\xi}{z-\xi}$$

fonksiyonu $|z| < 1$, $|\xi| < 1$ de analitiktir.

Gerçekten; $f(z)$, D de yalınkat olduğundan $f(z) = f(\xi) \iff z = \xi$ olması ile mümkündür.

$\xi \neq z$ olduğundan fonksiyonun D de kutbu yoktur.

Diğer taraftan ;

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow z} g(z, \xi) &= \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\xi)} - \frac{z+\xi}{z-\xi} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \text{belirsizliği mevcut olup} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{2z(z-\xi)f'(z) - (z+\xi)(f(z)-f(\xi))}{(z-\xi)(f(z)-f(\xi))} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \text{belirsizliği mevcut olup} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{-2zf'(z) - f(z) + f(\xi) + (z + \xi)f'(\xi)}{-f(z) + f(\xi) - (z - \xi)f'(\xi)} \\
&= \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{f'(\xi) + f'(\xi) + (z + \xi)f''(\xi)}{f'(\xi) + f'(\xi) - (z - \xi)f''(\xi)} \\
&= \frac{f'(z) + f'(z) + 2zf''(z)}{2f'(z)} = \frac{2(f'(z) + zf''(z))}{2f'(z)} \\
&= 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \tag{7.2}
\end{aligned}$$

limitinin mevcut olduğu görülür. O halde $g(\xi, z)$ fonksiyonu $|z| < 1$, $|\xi| < 1$ de analitiktir.

İddia 3 : Madem ki İddia 1 de $C(r)$ nin konveks olduğu ispatlandı .

O halde $\text{Arg}[f(re^{it}) - f(re^{i\theta})]$ artandır. $t \in (\theta, \theta + 2\pi)$ de

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\partial}{\partial t} [\text{Arg}[f(re^{it}) - f(re^{i\theta})]] \\
&= \frac{\partial}{\partial t} [\text{im} \log[f(re^{it}) - f(re^{i\theta})]] \tag{7.3}
\end{aligned}$$

dır. Zira

$$\log[f(re^{it}) - f(re^{i\theta})] = \log|f(re^{it}) - f(re^{i\theta})| + i[\text{Arg}(f(re^{it}) - f(re^{i\theta}))] \tag{7.4}$$

dır. Diğer taraftan $z = re^{it}$, $\xi = re^{i\theta}$, $z = \xi$ için (7.4) den t ye göre türev alacak olursak ;

$$\frac{ire^{it}.f'(re^{it})}{f(re^{it}) - f(re^{i\theta})} = \frac{\partial}{\partial t} [\log|f(re^{it}) - f(re^{i\theta})|] + i \frac{\partial}{\partial t} [\text{Arg}(f(re^{it}) - f(re^{i\theta}))]$$

Her iki tarafı i ile bölersek ;

$$\frac{re^{it}.f'(re^{it})}{f(re^{it}) - f(re^{i\theta})} = -i \frac{\partial}{\partial t} [\log|f(re^{it}) - f(re^{i\theta})|] + \frac{\partial}{\partial t} [\text{Arg}(f(re^{it}) - f(re^{i\theta}))] \Rightarrow$$

$$\text{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z) - f(\xi)} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\text{Arg}(f(re^{it}) - f(re^{i\theta}))] \tag{7.5}$$

bulunur.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{im} \log[f(re^{it}) - f(re^{i\theta})]] = \frac{\partial}{\partial t} [\text{Arg}[f(re^{it}) - f(re^{i\theta})]] \geq 0 \tag{7.6}$$

$$\text{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z) - f(\xi)} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\text{Arg}(f(re^{it}) - f(re^{i\theta}))] \geq 0 \tag{7.7}$$

(7.6) ve (7.7) den

$$\begin{aligned}
\text{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z) - f(\xi)} \right\} &= \frac{\partial}{\partial t} [\text{im} \log[f(re^{it}) - f(re^{i\theta})]] \\
&= \frac{\partial}{\partial t} [\text{Arg}[f(re^{it}) - f(re^{i\theta})]] \geq 0
\end{aligned}$$

bulunur. Madem ki

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{z+\xi}{z-\xi} &= \frac{1}{2} \left[\frac{z+\xi}{z-\xi} + \frac{\bar{z}+\bar{\xi}}{\bar{z}-\bar{\xi}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{(z+\xi)(\bar{z}-\bar{\xi}) + (z-\xi)(\bar{z}+\bar{\xi})}{|z-\xi|^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{|z|^2 - z\bar{\xi} + \xi\bar{z} + |z|^2 + z\bar{\xi} - \xi\bar{z} - |\xi|^2 - |\xi|^2}{|z-\xi|^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(|z|^2 - |\xi|^2)}{|z-\xi|^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \frac{z+\xi}{z-\xi} = \frac{|z|^2 - |\xi|^2}{|z-\xi|^2}$$

olduğundan $|z| = |\xi|$ ve $z \neq \xi$ için $\operatorname{Re} \frac{z+\xi}{z-\xi} = 0$ dir.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{Re} g(z, \xi) &= \operatorname{Re} \left[\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\xi)} - \frac{z+\xi}{z-\xi} \right] = \operatorname{Re} \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\xi)} - \underbrace{\operatorname{Re} \frac{z+\xi}{z-\xi}}_0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Re} g(z, \xi) &= \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z) - f(\xi)} = \frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{Arg} [f(re^{it}) - f(re^{i\theta})]] \geq 0 \\ \Rightarrow \operatorname{Re} g(z, \xi) &\geq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade de (7.1) eşitsizliğidir. Diğer taraftan $g(z, \xi)$ fonksiyonu $|z| < 1$, $|\xi| < 1$ de sürekli olduğundan $\xi \rightarrow z$ için

$$g(z, z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

bulunur. O halde maksimum prensibi uygulanacak olursa $|\xi| < 1$, $|z| < 1$ de $\operatorname{Re} g(z, \xi) \geq 0$ bulunur. Şayet $r \rightarrow 1$ götürülürse bu eşitsizlik $|z| < 1$, $|\xi| < 1$ de geçerli kalacaktır. O halde süreklilikten ve yukarıda alınan limitten dolayı;

$$\begin{aligned} p(z) &= \lim_{\xi \rightarrow z} g(z, \xi) = g(z, z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \\ \Rightarrow \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) &\geq 0, \quad p(0) = 1 \end{aligned}$$

koşulları gerçekleştiğinden ; $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P$ dir.

Bu durum zaten (7.1) ve (7.2) eşitsizliklerinden kolayca görülmektedir.

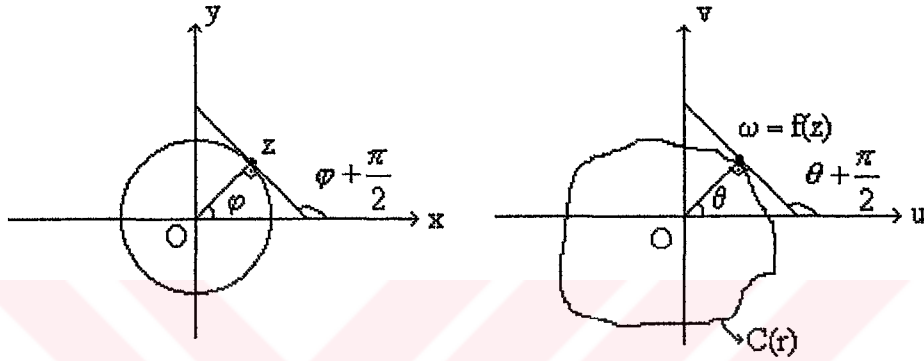
Simdi de tersine hareket edilsin :

$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P$ olsun. Bu halde aşağıdaki koşullar gerçekleşir. (P sınıfının özelliğinden) ;

(i) $p(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$, D de analitiktir.

(ii) $\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq 0$ dir.

(iii) $p(0) = 1 + \frac{0f''(0)}{f'(0)} = 1 \implies p(0) = 1$ dir.



Şekil 7.1 Teğet ve normal açıların gösterilimi

$|z| < r$ ve $\omega = f(z)$ alalım. $\implies$

$$\operatorname{Arg} f'(z) = \operatorname{Arg} \frac{d\omega}{dz} = \operatorname{Arg} d\omega - \operatorname{Arg} dz = \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \implies$$

$$\operatorname{Arg} f'(z) = \theta + \frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{\pi}{2} \implies \operatorname{Arg} f'(z) = \theta - \varphi \text{ teğetin açısıdır. Normalin açısı ise}$$

$$\theta = \theta(\varphi) = \operatorname{Arg} f'(z) + \varphi \text{ veya}$$

$$\theta = \theta(\varphi) = \operatorname{Arg} f'(re^{i\varphi}) + \varphi \text{ dir. Buradan } \varphi \text{ ye göre türev alınırsa ;}$$

$$\theta'(\varphi) = 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Arg} f'(re^{i\varphi}) \quad (7.8)$$

bulunur. Diğer yandan

$$(I)' = \log f'(re^{i\varphi}) = \log |f'(re^{i\varphi})| + i \operatorname{Arg} f'(re^{i\varphi}) \quad (7.9)$$

olduğundan dolayı ;

$$\operatorname{im} \log f'(re^{i\varphi}) = \operatorname{Arg} f'(re^{i\varphi}) \quad (7.10)$$

yazılabilir. Bunun φ ye göre türevi alınırsa ;

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{im} \log f'(re^{i\varphi}) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Arg} f'(re^{i\varphi}) \quad (7.11)$$

bağıntısı yazılabilir. Bir adım daha ilerlenirse ;

$$1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{im} \log f'(re^{i\varphi}) = 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Arg} f'(re^{i\varphi}) \quad (7.12)$$

bağıntısı yazılabilir.

(7.8) ve (7.12) bağıntıları birleştirilirse ;

$$\theta'(\varphi) = 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{Arg } f'(re^{i\varphi}) = 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{im } \log f'(re^{i\varphi}) \quad (7.13)$$

yazılır.

Diğer yandan (7.9) bağıntısından φ ye göre türev alınırsa ;

$$\frac{re^{i\varphi} \cdot f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \log |f'(re^{i\varphi})| + i \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{Arg } f'(re^{i\varphi})$$

Her iki taraf i ile bölünürse ;

$$\frac{re^{i\varphi} \cdot f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \log |f'(re^{i\varphi})| + \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{Arg } f'(re^{i\varphi})$$

bulunur. Buradan da;

$$1 + \frac{re^{i\varphi} \cdot f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} = 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{Arg } f'(re^{i\varphi}) - i \frac{\partial}{\partial \varphi} \log |f'(re^{i\varphi})|$$

yazılabilir. Buradan ;

$$\text{Re} \left\{ 1 + \frac{re^{i\varphi} \cdot f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} \right\} = 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{Arg } f'(re^{i\varphi}) \quad (7.14)$$

yazılabilir. Fakat bu bağıntıda (7.13) bağıntısı ile birleştirilecek olursa ;

$$\begin{aligned} \theta'(\varphi) &= \text{Re} \left\{ 1 + \frac{re^{i\varphi} \cdot f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} \right\} = 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{Arg } f'(re^{i\varphi}) \\ &= 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{im } \log f'(re^{i\varphi}) \end{aligned} \quad (7.15)$$

bağıntısı elde edilir.

Diğer taraftan $p(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = 1 + \frac{re^{i\varphi} \cdot f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} \in P$ olduğundan dolayı P sınıfının tanımından dolayı

$$\begin{aligned} \text{Re } p(z) &= \text{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = \text{Re} \left\{ 1 + \frac{re^{i\varphi} \cdot f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} \right\} \\ &= 1 + \text{Re} \frac{re^{i\varphi} \cdot f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} \geq 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

dır. (7.16) bağıntısı ile (7.15) bağıntısı birleştirilirse ;

$$\begin{aligned} \theta'(\varphi) &= 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{im } \log f'(re^{i\varphi}) = 1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{Arg } f'(re^{i\varphi}) \\ &= 1 + \text{Re} \frac{re^{i\varphi} \cdot f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu da $\theta'(\varphi) \geq 0$ demektir ki bunun anlamı $\theta(\varphi)$ nin φ ye göre artan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Bu en son bağıntıdan integrasyon alınır ;

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi=0}^{2\pi} \theta'(\varphi) d\varphi &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{re^{i\varphi} \cdot f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} d\varphi \right\} \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi + \operatorname{Re} \int_{\varphi=0}^{2\pi} re^{i\varphi} \frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi + \operatorname{Re} \int_{|z|=r} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \frac{dz}{iz}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z = re^{i\varphi} \Rightarrow dz = ire^{i\varphi} d\varphi \Rightarrow dz = iz d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz} \text{ olduğundan}) \\
= \varphi \Big|_0^{2\pi} + \operatorname{Re} \int_{|z|=r} \frac{1}{i} \frac{f''(z)}{f'(z)} dz = 2\pi + \operatorname{Re} \{ 2\pi i \frac{1}{i} (\underbrace{\sum_1 \text{sıfırlar}} - \underbrace{\sum_0 \text{kutuplar}}) \} = 2\pi
\end{aligned}$$

Yani sonuç olarak $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \theta'(\varphi) d\varphi = 2\pi$ bulunur. Bu da $\theta(\varphi)$ fonksiyonunun toplam artımının 2π olduğunu gösterir. Bu ise $f(z)$ fonksiyonunun $|z| = r$ çemberini birebir olarak konveks $C(r)$ eğrisi üzerine resmettiğini gösterir. Buradan $f(D)$ konvektir. Konvekslik tanımından dolayı da $f(z)$, D de konvektir.

Şimdi de sırasıyla;

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}, \frac{|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|} \quad (|z| < 1)$$

eşitsizlikleri ispatlansın:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\xi)} - \frac{z+\xi}{z-\xi} \right\} \geq 0$$

ifadesinde $\xi = 0$ yazılırsa ($f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \Rightarrow$

$f(\xi) = \xi + a_2 \xi^2 + \dots$, $f(0) = 0$ olduğundan)

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{2zf'(z)}{f(z)} - 1 \right\} > 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \frac{2zf'(z)}{f(z)} > 1 \Rightarrow \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}$$

bulunur ki bu da ilk eşitsizliktir.

Şimdi ikinci eşitsizliğe geçilirse ; yani $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$ olduğu ispat edilmek istenirse bunun için

$$g(z, \xi) = \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\xi)} - \frac{z+\xi}{z-\xi}$$

fonksiyonunun z ye göre açılımı düşünölsün.

$$\begin{aligned}
 \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\xi)} &= 2zf'(z) \frac{1}{f(z) - f(\xi)} = 2zf'(z) \frac{1}{-f(\xi) \left[1 - \frac{f(z)}{f(\xi)} \right]} \\
 &= -\frac{2zf'(z)}{f(\xi)} \frac{1}{\left[1 - \frac{f(z)}{f(\xi)} \right]} = -\frac{2zf'(z)}{f(\xi)} \left(1 + \frac{f(z)}{f(\xi)} + \frac{(f(z))^2}{(f(\xi))^2} + \dots \right) \\
 &= -\frac{2zf'(z)}{f(\xi)} - \frac{2zf'(z)f(z)}{(f(\xi))^2} + \dots \\
 &= -\frac{2z(1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots)}{f(\xi)} \\
 &\quad - \frac{2z(1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots)(z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots)}{(f(\xi))^2} + \dots \\
 &= -\frac{2}{f(\xi)}z + \dots \quad (\text{buradaki } z \text{ nin katsayısı}) \tag{7.17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{z + \xi}{z - \xi} &= \frac{z + \xi - \xi + \xi}{z - \xi} = \frac{z - \xi}{z - \xi} + \frac{2\xi}{z - \xi} = 1 + \frac{2\xi}{-\xi \left(1 - \frac{z}{\xi} \right)} = 1 - \frac{2}{1 - \frac{z}{\xi}} \\
 &= 1 - 2 \left(1 + \frac{z}{\xi} + \frac{z^2}{\xi^2} + \dots \right) = -1 - \frac{2z}{\xi} - \dots \tag{7.18}
 \end{aligned}$$

bulunur. (7.17) ve (7.18) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa ;

$$g(z, \xi) = \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\xi)} - \frac{z + \xi}{z - \xi} = 1 - \left(\frac{2}{f(\xi)} - \frac{2}{\xi} \right) z - \dots$$

bulunur. Ancak $\text{Reg}(z, \xi) \geq 0$ olduğundan katsayılar 2 den küçüktür. O halde

$$-|z| \leq \text{Re } z \leq |z| \text{ den}$$

$$\text{Re} \left\{ \frac{2}{f(\xi)} - \frac{2}{\xi} \right\} \leq 2 \left| \frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{\xi} \right| \leq 2 \Rightarrow$$

$$2\text{Re} \left\{ \frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{\xi} \right\} \leq 2 \left| \frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{\xi} \right| \leq 2 \Rightarrow$$

$$\text{Re} \left\{ \frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{\xi} \right\} \leq \left| \frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{\xi} \right| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\text{Re} \left\{ \frac{1}{f(\xi)} \left(1 - \frac{1}{\frac{\xi}{f(\xi)}} \right) \right\} \leq \left| \frac{1}{f(\xi)} \left(1 - \frac{1}{\frac{\xi}{f(\xi)}} \right) \right| \leq 1$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{f(\xi)}\left(1 - \frac{f(\xi)}{\xi}\right)\right\} \leq \left|\frac{1}{f(\xi)}\right|\left|1 - \frac{f(\xi)}{\xi}\right| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{f(\xi)} + \frac{-1}{\xi}\right\} \leq \left|1 - \frac{f(\xi)}{\xi}\right| \leq \frac{|f(\xi)|}{1} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{\xi}\right\} \leq \left|1 - \frac{f(\xi)}{\xi}\right| \leq |\xi|\left|\frac{f(\xi)}{\xi}\right|$$

$\Rightarrow |\xi| \leq 1$ olduğundan ;

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{\xi}\right\} \leq \left|1 - \frac{f(\xi)}{\xi}\right| \leq \left|\frac{f(\xi)}{\xi}\right|$$

$\Rightarrow \frac{f(\xi)}{\xi} = \omega$ ile gösterilirse son eşitsizlik $|1 - \omega| \leq |\omega|$ dan dolayı $|1 - \omega|^2 \leq |\omega|^2$ olur.

$$\omega = u + iv \text{ ise } 1 - \omega = 1 - u - iv \Rightarrow |1 - \omega|^2 \leq |\omega|^2$$

$$\Rightarrow (1 - u)^2 + v^2 \leq u^2 + v^2 \Rightarrow 1 - 2u + u^2 \leq u^2 \Rightarrow 1 - 2u \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2u \Rightarrow u \geq \frac{1}{2} \text{ bulunur. } u = \operatorname{Re} \frac{f(\xi)}{\xi} \text{ olduğundan ; } \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} \geq \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Şimdi de bu $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$ eşitsizliğinin $\frac{f(z)}{z} \prec \frac{1}{1-z}$ şeklinde de ifade edildiği gösterilsin:

Bunun için ilk olarak $\frac{f(z)}{z} \prec \frac{1}{1-z}$ olduğu gösterilmelidir.

$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de konveks olduğundan dolayı D de analitiktir ve $f(0) = 0$ koşulunu gerçeklediğinden $\frac{f(z)}{z}$ fonksiyonu da D de analitiktir. Diğer taraftan $g(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonunun da D de analitik olduğu apaçıktır. Aynı zamanda ;

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \Rightarrow$$

$$F(z) = \frac{f(z)}{z} = 1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots$$

ve

$$g(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

$$\Rightarrow F(0) = 1 \text{ ve } g(0) = 1 \Rightarrow F(0) = g(0) = 1 \text{ bulunur. Aynı zamanda } \omega = g(z) = \frac{1}{1-z},$$

D de yalınkattır. Zira $a = 0, b = 1, c = -1, d = 1$

ve $ad - bc = 1 \neq 0$ olan bir lineer transformasyondur. O halde $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$ olduğundan bu demektir ki $\frac{f(z)}{z}$ fonksiyonunun D yi $x = \frac{1}{2}$ doğrusuyla sınırlandırılmış sağ yarı düzleme tasvir eder. Diğer taraftan $\omega = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonu $|z| < 1$ 'i $\operatorname{Re} \omega \geq \frac{1}{2}$ üzerine tasvir eder.

Gerçekten

$$|z| < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\bar{z}+1-z}{|1-z|^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2-(z+\bar{z})}{(1-x)^2+y^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2-2\operatorname{Re} z}{1-2x+x^2+y^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2(1-x)}{1-2x+x^2+y^2} \right) = \frac{1-x}{1-2x+x^2+y^2} \geq \frac{1-x}{1-2x+1} \\
&= \frac{1-x}{2-2x} = \frac{1-x}{2(1-x)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\operatorname{Re} \omega = \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} \geq \frac{1}{2}$ dir. O halde $g(z) = \frac{1}{1-z}$ D de yalıncat, $F(D) \subset g(D)$ olduğundan $\frac{f(z)}{z} \prec \frac{1}{1-z}$ dir.

$F(z) = \frac{f(z)}{z} \prec \frac{1}{1-z} = g(z)$ olduğundan $\operatorname{Re} g(z) > \frac{1}{2} > 0$ olduğundan ve $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2} > 0$ olduğundan dolayı ve

$F_1(z) = \frac{f(z)}{z} \implies F_1(0) = 1 \implies F_1(z) = \frac{f(z)}{z} \in P$ dir. Dolayısıyla $|a| < 1$ olmak üzere

$1 = |1-a+a| \leq |1-a| + |a| \implies 1-|a| \leq |1-a|$ dir. Dolayısıyla $\frac{1}{|1-a|} \leq \frac{1}{1-|a|}$ dir. O halde bu eşitsizlikten dolayı ve $F_1(z) = \frac{f(z)}{z} \prec \frac{1}{1-z}$ olduğundan dolayı $\left(\frac{f(z)}{z} \prec \frac{1}{1-z} \right)$ idi. $\varphi(z) \equiv z$ alınırsa) iddia doğrudur.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(z)}{z} \right| &= \left| \frac{1}{1-\varphi(z)} \right| \leq \frac{1}{1-|z|} \implies \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{1-|z|} \\
\implies \frac{|f(z)|}{|z|} &\leq \frac{1}{1-|z|} \implies
\end{aligned}$$

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|} \quad (7.19)$$

bulunur.

$\frac{f(z)}{z} \prec \frac{1}{1-z}$ idi. Buradan $\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{1-\varphi(z)}$ olur.

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| = \left| \frac{1}{1-\varphi(z)} \right| \geq \frac{1}{1+|z|}$$

bulunur.

$$\left(|1-\varphi(z)| \leq 1+|\varphi(z)| \leq 1+|z| \implies \left| \frac{1}{1-\varphi(z)} \right| \geq \frac{1}{1+|z|} \text{ dir} \right)$$

Buradan ;

$$|f(z)| \geq \frac{|z|}{1+|z|} \quad (7.20)$$

bulunur.

(7.19) ve (7.20) birleştirilirse;

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|}$$

bulunur .

7.3 Sonuç: $f(z)$ fonksiyonunun D 'de konveks olması için gerek ve yeter şart $z.f'(z)$ fonksiyonunun D 'de yıldızlı olmasıdır.

İspat: Bu sonuç aşağıdaki teoremlerin bir sonucudur.

Teorem 6.2: $f(z)$ analitik fonksiyonunun D 'de yıldızlı olması için gerek ve yeter şart $z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \in P$ olmasıdır."

Teorem 7.2: $f(z)$ analitik fonksiyonunun D 'de konveks olması için gerek ve yeter şart $1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \in P$ olmasıdır."

Bu teoremlerden dolayı ;

$$\begin{aligned} \frac{z \cdot \frac{d}{dz}[z \cdot f'(z)]}{z \cdot f'(z)} &= \frac{z \cdot [f'(z) + z \cdot f''(z)]}{z \cdot f'(z)} = \frac{z \cdot f'(z) + z^2 \cdot f''(z)}{z \cdot f'(z)} \\ &= 1 + \frac{z \cdot f''(z)}{f'(z)} \end{aligned} \quad (7.21)$$

dir. O halde ; $f(z)$ fonksiyonu D 'de konveks olsun. Bunun için gerek ve yeter şartda Teorem 7.2 dir. Yani $1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \in P$ dir. Diğer taraftan $F(z) = z \cdot f'(z)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\frac{d}{dz}F(z) = \frac{d}{dz}[z \cdot f'(z)] = f'(z) + z \cdot f''(z) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dz}F(z) = f'(z) + z \cdot f''(z) \Rightarrow \frac{\frac{d}{dz}F(z)}{f'(z)} = 1 + \frac{z \cdot f''(z)}{f'(z)} \in P$$

dir.(Teorem 7.2'den dolayı) O halde Teorem 6.2'den dolayı da $F(z) = z \cdot f'(z)$ D 'de yıldızlıdır.

Tersine $F(z) = z \cdot f'(z)$ fonksiyonu D 'de yıldızlı olsun. Bu fonksiyon;

$$\frac{\frac{d}{dz}F(z)}{f'(z)} = 1 + \frac{z \cdot f''(z)}{f'(z)} \in P$$

özellikliğini gerçeklediğinden $f(z)$ fonksiyonu D 'de konvekstir. Bu özellikler ortaklaşa (7.21)

bağıntısı gibi yazılabilir. Zira

$$\frac{\frac{d}{dz}F(z)}{f'(z)} = \frac{z \cdot \frac{d}{dz}[F(z)]}{z \cdot f'(z)} = \frac{z \cdot \frac{d}{dz}[z \cdot f'(z)]}{z \cdot f'(z)} = 1 + \frac{z \cdot f''(z)}{f'(z)}$$

dir.

D'de yıldızlı ve konveks olan fonksiyonlar arasındaki bağıntı bu sonuçlar verildikten sonra, D'de yıldızlı ve konveks olan fonksiyonlara ait kesin katsayı tahminleri aşağıdaki teoremden verilebilir : (Löwner 1917, Privalov 1924)

7.4 Teorem : Eğer $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu D de yıldızlı ise $|a_n| \leq n$ dir. ($n = 2, 3, \dots$).

Eğer $f(z)$ bir tek yıldızlı fonksiyon veya konveks fonksiyon ise $|a_n| \leq 1$ dir. ($n = 2, 3, \dots$).

Eşitlik ancak ve yalnız sırasıyla

$$f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2}, f(z) = \frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2}, f(z) = \frac{z}{1-e^{i\beta}z} \quad (\beta \in R)$$

fonksiyonları için gerçekleşir.

$\sqrt{f(z^2)}$ tek fonksiyonu tekrar yıldızlıdır.

İspat : Eğer $f(z)$ yıldızlı ise

$$p(z) = \frac{z.f'(z)}{f(z)} = \frac{z.(1+2a_2z+\dots)}{z+a_2z^2+\dots} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

fonksiyonu Teorem 6.2 vasıtasıyla P sınıfına aittir.

$$p(z) = \frac{z.f'(z)}{f(z)} \implies z.f'(z) = f(z).p(z)$$

eşitliği ele alınsın. Bunların katsayıları karşılaştırılacak olursa

$$z.f'(z) = z.(1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots) = (z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots)(1 + c_1z + c_2z^2 + \dots)$$

$$= p(z).f(z)$$

$$\implies z + 2a_2z^2 + 3a_3z^3 + \dots = \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right)$$

$$\begin{aligned} \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right) \left(1 + c_1z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n\right) &= z + c_1z^2 + z \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + c_1z \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \\ &\quad + \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n\right) \end{aligned}$$

Sonuçta katsayılar karşılaştırılırsa ;

$$a_n = \frac{1}{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_{\nu} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

rekürans bağıntısı bulunur. Sonuç 5.7 den dolayı $|c_n| \leq 2$ dir.

$$a_n = \frac{1}{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_{\nu} \implies |a_n| = \left| \frac{1}{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_{\nu} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n-1} \left| \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n-\nu} a_{\nu} \right| \leq \frac{1}{n-1} \left| \sum_{\nu=1}^{n-1} 2a_{\nu} \right| = \frac{2}{n-1} \left| \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu} \right| \\
&\leq \frac{2}{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} |a_{\nu}|
\end{aligned}$$

Yani sonuç olarak ;

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} |a_{\nu}| \quad (n = 2, 3, \dots)$$

bulunur. $|a_1| \leq 1$ olduğundan $|a_n| \leq n$ olduğunu indüksiyonla ispatlamaya çalışırsak;

$n = 1$ için $|a_1| \leq 1$ dir.

$$n = 2 \text{ için } |a_2| \leq \frac{2}{2-1} \sum_{\nu=1}^{2-1} |a_{\nu}| = 2 \sum_{\nu=1}^1 |a_{\nu}| = 2|a_1| \leq 2.1 = 2$$

Yani sonuçta $|a_2| \leq 2$ bulunur.

$n = k - 1$ için doğru olsun. Yani $|a_{k-1}| \leq k - 1$ doğru olsun. (İndüksiyon hipotezi)

$n = k$ için doğruluk ispatı : (indüksiyon hipotezinden)

$$\begin{aligned}
|a_k| &\leq \frac{2}{k-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} |a_{\nu}| = \frac{2}{k-1} (|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{k-1}|) \\
&\leq \frac{2}{k-1} (1 + 2 + 3 + \dots + (k-1)) = \frac{2}{k-1} \left(\frac{(k-1)k}{2} \right) = k
\end{aligned}$$

$$(\text{ Zira } 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}) \implies |a_k| \leq k$$

bulunur. O halde indüksiyon tamamlanmıştır. Yani $|a_n| \leq n$ dir. Şimdi $f(z)$ konveks olsun. Bu halde Sonuç 7.3 den dolayı $z.f'(z)$ fonksiyonu yıldızlı olacaktır. Dolayısıyla yukarıda ispatlanan eşitsizlik yıldızlı fonksiyonlar için $|a_n| \leq n$ idi. O halde

$$\begin{aligned}
z.f'(z) &= z.(z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots)' \\
&= z.(1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + na_n z^{n-1} + \dots) \\
&= z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + \dots + na_n z^n + \dots
\end{aligned}$$

yıldızlı fonksiyonu için

$$\implies |na_n| \leq n \implies |a_n| \leq 1$$

bulunur. Şimdi eşitliklerin ancak ve yalnız

$$f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2}, f(z) = \frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2}, f(z) = \frac{z}{1-e^{i\beta}z} \quad (\beta \in R)$$

olması halinde mevcut oldukları gösterilsin :

$$f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{i(n-1)\beta} z^n \Rightarrow$$

$$|a_n| = |n \cdot e^{i(n-1)\beta}| = n$$

Yani

$$|a_n| = n \iff f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2}$$

dir.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2} = z + e^{2i\beta}z^3 + e^{4i\beta}z^5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2(n-1)i\beta} \cdot z^{2n-1}$$

$$|a_n| = |e^{2(n-1)i\beta}| = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

olarak iddia doğrulanır.

$$f(z) = \frac{z}{1-e^{i\beta}z} = z + e^{i\beta}z^2 + e^{2i\beta}z^3 + \dots$$

$$|a_n| = |e^{(n-1)i\beta}| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

olarak iddia doğrulanır.

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2z^4 + a_3z^6 + \dots} = z \cdot \sqrt{1 + a_2z^2 + a_3z^4 + \dots}$$

$$= z + \frac{a_2}{2}z^3 + \dots$$

fonksiyonu D de yalınkattır.

Gerçekten ; $g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow \sqrt{f(z_1^2)} = \sqrt{f(z_2^2)} \Rightarrow f(z_1^2) = f(z_2^2) \Rightarrow z_1^2 = z_2^2 \Rightarrow z_1 = z_2$ olmasıyla mümkündür. Dolayısıyla injektiftir. $f(z)$, D de analitik olduğundan $\sqrt{f(z^2)}$ de , D de analiktir ve $g(z)$ nin açılımından dolayı $F(z)$ tek fonksiyondur. Yani $F(-z) = -F(z)$ dir(bu açıktır.) ve $f(z)$ fonksiyonu aynı zamanda D de yalınkat olduğundan injektiftir. Yani $z_1 = z_2$ için $f(z_1) = f(z_2)$ dir. Dolayısıyla ;

$$F(z_1) = \sqrt{f(z_1^2)} = \sqrt{f(z_2^2)} = F(z_2) \Rightarrow f(z_1^2) = f(z_2^2) \Rightarrow z_1^2 = z_2^2 \Rightarrow z_1 = \pm z_2$$

bulunur. Fakat diğ er taraftan $F(z)$ tek olduğundan $z_1 \neq -z_2$ dir. Dolayısıyla $z_1 = z_2$ dir. O halde sonu ta $F(z)$ fonksiyonu D de injektiftir. O halde $F(z)$, D de yal nkattır. Aynı zamanda bu fonksiyon D de yildızıldır.



8. α KONVEKS FONKSİYONLAR

8.1 Tanım : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu $D = \{z | |z| < 1\}$ de analitik ve $f(z) \cdot \frac{f'(z)}{z} \neq 0$ koşulunu gerçeklesin. α bir reel sayı olmak üzere ;

$$\operatorname{Re} \left[(1 - \alpha) \cdot z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha (1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)}) \right] > 0$$

koşulunu gerçeklerse $f(z)$ fonksiyonuna D de " α konveks fonksiyon" adı verilir.

8.2 Tanım : $f(z)$ fonksiyonu ($f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$) $D = \{z | |z| < 1\}$ de analitik olsun.

$\operatorname{Re} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} > \alpha$ koşulunu gerçeklerse, $f(z)$ fonksiyonuna D de " α nıncı mertebeden yıldızlı fonksiyon" adı verilir.

8.3 Tanım : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu $D = \{z | |z| < 1\}$ de analitik ve $\operatorname{Re} \left[1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] \geq \alpha$ koşulunu gerçeklerse, $f(z)$ fonksiyonuna " α nıncı mertebeden konveks fonksiyon" adı verilir. $C(\alpha)$ ile gösterilir.

8.4 Tanım : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu D de analitik ve λ reel ve $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$\operatorname{Re} \left[e^{i\lambda} \cdot z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right] > 0$ koşulunu gerçeklerse, $f(z)$ fonksiyonuna "spiral-like fonksiyon" adı verilir.

8.5 Teorem : $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $D = \{z | |z| < 1\}$ de α konveks ise $f(z)$ fonksiyonu D de yıldızlı ve yalınkattır.

İspat : Tanımdan dolayı $f(z)$, α konveks ise $f(z)$, D de analitik ve α reel bir sayı olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left[(1 - \alpha) \cdot z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha (1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)}) \right] \geq 0$$

dır. Dolayısıyla $p(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ denilirse, $z = re^{i\theta}$ kutupsal gösterilişi kullanılırsa

$$\log p(re^{i\theta}) = \log \left(re^{i\theta} \cdot \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right)$$

yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log p(re^{i\theta}) \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log \left(re^{i\theta} \cdot \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right) \right\}$$

Bu adımda da gerekli türevler alınır ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log p(re^{i\theta}) \right\} &= \frac{ire^{i\theta} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} + re^{i\theta} \frac{ire^{i\theta} \cdot f''(re^{i\theta}) \cdot f(re^{i\theta}) - ire^{i\theta} \cdot [f'(re^{i\theta})]^2}{[f(re^{i\theta})]^2}}{re^{i\theta} \cdot \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log p(z) \right\} &= \frac{ire^{i\theta} \cdot f(re^{i\theta}) \cdot f'(re^{i\theta}) + ir^2 e^{2i\theta} \cdot f(re^{i\theta}) \cdot f''(re^{i\theta}) - ir^2 e^{2i\theta} \cdot [f'(re^{i\theta})]^2}{\frac{re^{i\theta} \cdot f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log p(z) \right\} &= \frac{ire^{i\theta} \cdot f(re^{i\theta}) \cdot f'(re^{i\theta}) + ir^2 e^{2i\theta} \cdot f(re^{i\theta}) \cdot f''(re^{i\theta}) - ir^2 e^{2i\theta} \cdot [f'(re^{i\theta})]^2}{re^{i\theta} \cdot f(re^{i\theta}) \cdot f'(re^{i\theta})} \\
\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log p(z) \right\} &= i + ire^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} - ire^{i\theta} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \\
i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log p(z) \right\} &= -\alpha - \alpha re^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} + \alpha re^{i\theta} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \\
-i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \log p(z) \right\} &= \alpha + \alpha re^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} - \alpha re^{i\theta} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}
\end{aligned}$$

Bulunan bu eşitliğin her iki tarafına $p(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ ifadesi eklenirse ;

$$\begin{aligned}
p(z) - i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(z) &= \alpha + \alpha z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} - \alpha z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + p(z) \\
z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(z) &= \alpha + \alpha z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} - \alpha z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \\
z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(z) &= (1 - \alpha) z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha \cdot \left(1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \\
\operatorname{Re} \left[(1 - \alpha) z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha \cdot \left(1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right] &= \operatorname{Re} \left[z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \log z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. α konveks tanımı gözönünde bulundurulursa ;

$$\operatorname{Re} \left[(1 - \alpha) z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha \cdot \left(1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right] = \operatorname{Re} \left[z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \log z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right] \geq 0$$

bulunur. D de öyle bir $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ noktası olduğu farzedilsin ki ;

$$|z| \leq r_0 \quad \text{ için } \quad \operatorname{Re} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} > 0$$

$$z = z_0 \quad \text{ için } \quad \operatorname{Re} p(z_0) = \operatorname{Re} z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = 0$$

olsun.

Bu ifade $\operatorname{Arg} p(r_0 e^{i\theta_0})$ nın bir maksimum veya minimumu olduğunu gösterir. Bu ise

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Arg} p(r_0 e^{i\theta_0}) = 0 \quad \text{ demektir.}$$

Gerçekten ;

$$\log p(z) = \log |p(z)| + i \operatorname{Arg} p(z) \implies$$

$$\log p(re^{i\theta}) = \log |p(re^{i\theta})| + i \operatorname{Arg} p(re^{i\theta}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(z) &= z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha + \alpha z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} - \alpha z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \\ &= \alpha z \cdot \frac{p'(z)}{p(z)} + z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \end{aligned}$$

Yani sonuç olarak ;

$$\begin{aligned} p(z) - i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(z) &= (1 - \alpha)z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha \left(1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \\ &= p(z) + \alpha z \cdot \frac{p'(z)}{p(z)} \end{aligned}$$

O halde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[p(z) - i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(z) \right] &= \operatorname{Re} \left[(1 - \alpha)z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left(1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \right] = \operatorname{Re} \left[p(z) + \alpha z \cdot \frac{p'(z)}{p(z)} \right] \end{aligned} \quad (8.1)$$

bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan ;

$\log p(z) = \log |p(z)| + i \operatorname{Arg} p(z)$ ifadesinde θ ya göre türev alındığında ;

$$iz \cdot \frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{\partial}{\partial \theta} \log |p(z)| + i \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Arg} p(z) \Rightarrow$$

$$z \cdot \frac{p'(z)}{p(z)} = -i \frac{\partial}{\partial \theta} \log |p(z)| + \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Arg} p(z) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} z \cdot \frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Arg} p(z)$$

dir. Bu bulunan son ifade (8.1) ile karşılaştırılırsa ;

$$\operatorname{Re} \left[p(z) - i\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(z) \right] = \operatorname{Re} \left[(1 - \alpha)z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right]$$

$$\begin{aligned}
+\alpha\left(1+z\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) &= \operatorname{Re}\left[p(z)+\alpha z\cdot\frac{p'(z)}{p(z)}\right] \\
&= \operatorname{Re} p(z)+\alpha\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Arg} p(z)
\end{aligned} \tag{8.2}$$

bulunur ki, bu da iddianın doğruluğunu gösterir. Ancak bu durumda ;

$$\operatorname{Re}\left[(1-\alpha)z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+z\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right]=\operatorname{Re}\left[z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}-i\alpha\frac{\partial}{\partial\theta}\log\left(z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\right]$$

ifadesinin sıfır olduğunu gösterir. Bu ise $f(z)$ nin α konveks fonksiyon oluşuna aykırılık teşkil eder. O halde $|z| < 1$ de , böyle bir nokta yoktur.

Dolayısıyla;

$$\operatorname{Re} p(z) > 0 \implies \operatorname{Re} z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)} > 0 \tag{8.3}$$

dır. Diğer taraftan;

$$p(z)=z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}=z\cdot\frac{(z+a_2z^2+\dots)'}{z+a_2z^2+\dots}=\frac{1+2a_2z+\dots}{1+a_2z+\dots}$$

$\implies p(0)=1$ olduğundan , $p(z)=z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}$ fonksiyonu sonuç olarak

$\operatorname{Re} p(z) > 0$, $p(0)=1$ koşullarını gerçeklediğinden, $f(z)$, D de yıldızlıdır. Dolayısıyla yıldızlı fonksiyon tanımından dolayı da $f(z)$, D de yalınkattır.

8.6 Sonuç : $\alpha \geq 1$ ise $f(z)$ fonksiyonu $|z| < 1$ de konveks bir fonksiyondur.

İspat :

$$\operatorname{Re}\left[(1-\alpha)z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+z\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right]>0$$

ifadesinde $\alpha \geq 1$ ise ilk terim $\left((1-\alpha)z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\right)$ negatif olacağından bu ifade de $\operatorname{Re}\alpha\left(1+z\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geq 0$ bulunur ki bu da konveks fonksiyonlarda Teorem 7.2 ye göre $f(z)$ nin konveks olduğunu gösterir.

9. KOMPLEKS MERTEBEDEN YILDIZIL FONKSİYONLAR

9.1. Tanım : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu D de tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ ve $b \neq 0$ kompleks bir sayı olmak üzere ;

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{b} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right) > 0$$

koşulunu gerçeklerse, $f(z)$ fonksiyonuna "kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyon" denir ve bu sınıf $S^*(1-b)$ ile gösterilir.

9.2 Özel Hal 1: $b = 1$ için ; $\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) > 0$ elde edilir ki bu "yıldızıl fonksiyon" dur.

9.3 Özel Hal 2: $b = 1 - \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$ için ; $\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) > \alpha$ elde edilir ki bu " α nıncı mertebeden yıldızıl fonksiyon" dur.

9.4 Özel Hal 3: $b = e^{-i\lambda} \cos \lambda$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ için ; $\operatorname{Re} \left(e^{i\lambda} \cdot z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right) > 0$ elde edilir ki bu " λ -spirallike fonksiyon" dur.

9.5 Özel Hal 4: $b = (1 - \alpha)e^{-i\lambda} \cos \lambda$, $0 \leq \alpha < 1$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ için ;

$\operatorname{Re} \left(e^{i\lambda} \cdot z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right) > \alpha$ elde edilir ki bu " α yıncı mertebeden λ -spirallike fonksiyon" dur.

9.6 Açıklama : Dolayısıyla kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfı ; yıldızıl, α yıncı mertebeden yıldızıl, λ -spirallike, α yıncı mertebeden λ -spirallike fonksiyonlar sınıfını içerir.

9.7 Temel Teorem : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu D bölgesinde tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(z)$ nin kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $f(z) = z \cdot \left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^b$ denklemini gerçekleyen $f_1(z)$ fonksiyonunun yıldızıl olmasıdır.

Burada $\left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^b$ nin $z = 0$ da değeri 1 olan Riemann Dalı seçilir.

(Zira

$$\left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^b = \left(\frac{z + a_2 z^2 + \dots}{z} \right)^b = (1 + a_2 z + \dots)_{z=0}^b = (1)^b$$

nin, b kompleks olduğundan Riemann yaprakları vardır. Bunlardan sadece değerin 1 olduğu Riemann yaprağı alınır.)

İspat : $\Leftarrow$: $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu D bölgesinde tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca $f(z) = z \cdot \left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^b$ denklemini gerçekleyen $f_1(z)$ fonksiyonu yıldızıl fonksiyon olsun.

Son eşitlikte her iki tarafın logaritmik türevi alınır ;

$$\log f(z) = \log z + b \cdot \log f_1(z) - b \cdot \log z$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + b \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - b \cdot \frac{1}{z} \Rightarrow$$

Şimdi eşitliğin her iki tarafı $|z| < 1$ olan z ile çarpılırsa ;

$$z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + b \cdot z \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - b \Rightarrow$$

$$z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 = b \cdot z \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - b \Rightarrow$$

Her iki taraf $b \neq 0$ kompleks sayısı ile bölünürse ;

$$\frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) = z \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - 1 \Rightarrow$$

$$1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) = z \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} \Rightarrow$$

$f_1(z)$ yıldızlı fonksiyon olduğundan ; $\operatorname{Re} z \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} > 0$ dır.

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right) = \operatorname{Re} \left(z \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} \right) > 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right) > 0$$

bulunur ki, bu $f(z)$ nin "kompleks mertebeden yıldızlı fonksiyon" olduğunu gösterir.

$\Rightarrow$: $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu D bölgesinde tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. $f(z)$ kompleks mertebeden yıldızlı fonksiyon yani

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right) > 0$$

olsun. O takdirde $f(z) = z \cdot \left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^b$ denklemini gerçekleyen $f_1(z)$ fonksiyonu yıldızlıdır.

Gerçekten $f(z) = z \cdot \left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^b$ ifadesinin logaritmik türevi alınır ve bir takım işlemler uygulanırsa ;

$$1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) = z \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right) = \operatorname{Re} \left(z \cdot \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} \right)$$

bulunur.

Son eşitlikte sol taraf pozitif olduğundan, sağ tarafta pozitif olur ki bu $f_1(z)$ nin yıldızlı fonksiyon olduğunu gösterir.



10. KOMPLEKS MERTEBEDEN KONVEKS FONKSİYONLAR

10.1 Tanım : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu D de tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. $f'(z) \neq 0$ ve $b \neq 0$ kompleks bir sayı olmak üzere ;

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{b} z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

koşulunu gerçeklerse, $f(z)$ fonksiyonuna "kompleks mertebeden konveks fonksiyon" denir ve bu sınıf $C(b)$ ile gösterilir.

10.2 Özel Hal 1 : $b = 1$ için ; $\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > 0$ elde edilir ki bu "konveks fonksiyon" dur.

10.3 Özel Hal 2 : $b = 1 - \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$ için ; $\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha$ elde edilir ki bu " α nıncı mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfı" dır.

10.4 Özel Hal 3: $b = e^{-i\lambda} \cos \lambda$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ için ; $\operatorname{Re} \left(e^{i\lambda} \cdot \left(1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right) > 0$ elde edilir ki bu " $(z \cdot f'(z))$ nin λ -spirallike fonksiyonlar sınıfı" dır.

10.5 Özel Hal 4: $b = (1 - \alpha)e^{-i\lambda} \cos \lambda$, $0 \leq \alpha < 1$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ için ;

$\operatorname{Re} \left(e^{i\lambda} \cdot \left(1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right) > \alpha$ elde edilir ki bu " $(z \cdot f'(z))$ nin α yıncı mertebeden λ -spirallike fonksiyonlar sınıfı" dır.

10.6 Temel Teorem : $f(z)$ nin D de kompleks mertebeden konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $(z \cdot f'(z))$ fonksiyonunun D de kompleks mertebeden yıldızlı fonksiyon olmasıdır.

İspat : Gereklik: $f(z)$, kompleks mertebeden konveks fonksiyon olsun. O takdirde ;

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{b} z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

dır. $g(z) = z \cdot f'(z)$ diyelim.

$$\Rightarrow \log g(z) = \log z + \log f'(z)$$

$$\Rightarrow \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{z} + \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

$$\Rightarrow z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} = 1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

$$\Rightarrow z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 = z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} \cdot \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) = \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{b} \cdot \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) = 1 + \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \cdot \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right]$$

bulunur. Sağ taraf pozitif olduğundan, sol taraf da pozitiftir. Yani

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \cdot \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) \right] > 0$$

dır. Buda $g(z)$ nin kompleks mertebeden yıldızlı olduğunu ifade eder. Yani $g(z) = z \cdot f'(z)$ kompleks mertebeden yıldızlı fonksiyondur. Bu da gerek şartın ispatıdır.

Yeterlilik: $p(z) = z \cdot f'(z)$ kompleks mertebeden yıldızlı fonksiyon olsun. Her iki tarafın logaritmik türevi alınıp, gerekli işlemler yapılırsa istenen sonuç bulunur.

10.7 Açıklama : Bu teoremler vasıtasıyla, yıldızlı ve konveks fonksiyonlar için ispatlanan tüm teoremler, kompleks mertebeden yıldızlı ve kompleks mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfına genişletilebilir.

11. GENELLEŞTİRİLMİŞ α -KONVEKS FONKSİYONLAR SINIFI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

11.1 Özet : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, $f(z) \in A$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de tanımlı, analitik bir fonksiyon olsun. $f(z) \cdot \frac{f'(z)}{z} \neq 0$, $0 \leq \alpha < 1$, $b \neq 0$ kompleks bir sayı olmak üzere $z \in D$ için ;

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 - \alpha) \left[1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right] + \alpha \left(1 + \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > 0$$

koşulunu gerçeklerse, $f(z)$ fonksiyonuna "kompleks mertebeden α konveks fonksiyon" denir ve bu sınıf $M(\alpha, b)$ ile gösterilir.

Bu çalışmanın amacı, $M(\alpha, b)$ sınıfının temel özelliklerini vermektir.

11.2 Tanım : $A = \{f(z) \mid f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, f'(0) = 1, f(0) = 0, f(z), D \text{ de analitik}\}$ cümlesini A sınıfı olarak adlandıracağız.

11.3 Tanım : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, $f(z) \in A$ fonksiyonu D de tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. $f(z)$ fonksiyonunun b kompleks mertebeli konveks fonksiyon yani $f(z) \in C(b)$ olması ancak ve yalnız D bölgesinde $f'(z) \neq 0$ ve $b \neq 0$ kompleks bir sayı olmak üzere ;

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > 0, \quad z \in D$$

eşitsizliğin gerçekleşmesi ile mümkündür.

11.4 Tanım : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, $f(z) \in A$ fonksiyonu D de tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. $f(z)$ fonksiyonunun b kompleks mertebeli yıldızlı fonksiyon yani $f(z) \in S^*(1 - b)$ olması ancak ve yalnız D bölgesinde $f(z) \neq 0$ ve $b \neq 0$ kompleks bir sayı olmak üzere ;

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right] > 0, \quad z \in D$$

eşitsizliğin gerçekleşmesi ile mümkündür.

11.5 Özel Haller : Çeşitli yazarlar daha önceki çalışmalarında b ye verilen özel değerler için önemli alt sınıflar elde etmişlerdir:

(i) $b = 1$ için ; $C(1) = C$ "konveks fonksiyonlar sınıfı" elde edilir.

(ii) $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, $b = 1 - \alpha$ için ; $C(\alpha)$ " α yıncı mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfı " elde edilir. (M.S. Robertson)

(iii) $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $b = e^{-i\lambda} \cdot \cos \lambda$ için ; $C(e^{-i\lambda} \cdot \cos \lambda)$ " $z \cdot f'(z)$ için λ -spirallike fonksiyonlar sınıfı " elde edilir. (M.S. Robertson)

(iv) $0 \leq \alpha < 1$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $b = (1 - \alpha)e^{-i\lambda} \cdot \cos \lambda$ için ;

$C((1 - \alpha)e^{-i\lambda} \cdot \cos \lambda)$ " $z \cdot f'(z)$ fonksiyonu için α yıncı mertebeden λ -spirallike fonksiyonlar

sınıfı" dır. (Chichra and Sizuk).

(v) $b = 1$ için ; $S^*(1 - 1) = S^*$ "yıldızlı fonksiyonlar sınıfı" elde edilir.

(vi) $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $b = 1 - \alpha$ için ; $S^*(1 - \alpha)$ " α yıncı mertebeden yıldızlı fonksiyonlar sınıfı" elde edilir.(M.S. Robertson)

(vii) $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $b = e^{-i\lambda} \cdot \cos \lambda$ için ; $S^*(1 - e^{-i\lambda} \cdot \cos \lambda)$ " λ -spirallike fonksiyonlar sınıfı" dır.(L.Spacek)

(viii) $0 \leq \alpha < 1$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere, $b = (1 - \alpha)e^{-i\lambda} \cdot \cos \lambda$ için ;

$S^*((1 - \alpha)e^{-i\lambda} \cdot \cos \lambda)$ " α yıncı mertebeden λ -spirallike fonksiyonlar sınıfı" dır.

11.6 Tanım : $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$, $f(z) \in A$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ de tanımlı , her yerde analitik bir fonksiyon olsun. $f(z) \cdot \frac{f'(z)}{z} \neq 0$, $0 \leq \alpha < 1$, $b \neq 0$ kompleks bir sayı olmak üzere $z \in D$ için ;

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 - \alpha) \left[1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right] + \alpha \left(1 + \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > 0$$

koşulunu gerçeklerse, $f(z)$ fonksiyonuna " b kompleks mertebeden α konveks fonksiyon" denir ve bu sınıf $M(\alpha, b)$ ile gösterilir.

$b = 1$ için ;

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 - \alpha) z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha \left(1 + z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > 0$$

" α konveks fonksiyonlar sınıfı" elde edilir. Demek ki " b kompleks mertebeden α konveks fonksiyonlar sınıfı", " α konveks fonksiyonlar sınıfı"nın genelleştirilmişidir.

11.7 Tanım: $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots$ fonksiyonu D de analitik ve $\operatorname{Re} p(z) > 0$ ise o takdirde bu şekilde tanımlanan fonksiyonlar sınıfı P ile ifade edilir .

11.8 Teorem : $h(z) = z + b_2z^2 + \dots$ fonksiyonu D de analitik ve

$h(0) = h'(0) - 1 = 0$ olacak şekilde normalize edilmiş olsun. $h(z) \in C(b)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$s(z) = z \cdot \left(\frac{h(z) - h(\xi)}{z - \xi} \right)^2 \quad |z| < 1, |\xi| < 1, \xi \neq z, \quad \xi = \eta z, \quad |\eta| < 1$$

denklemini gerçekleyen her $s(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$ fonksiyonunun $S^*(1 - b)$ sınıfına ait olmasıdır.

Bu teorem Yaşar POLATOĞLU tarafından ispatlanmıştır.

İspat : $\implies$: $h(z) = z + b_2z^2 + \dots$ fonksiyonu D de analitik ve $h(0) = h'(0) - 1$ olacak şekilde normalize edilmiş olsun. $h(z) \in C(b)$ yani $h(z)$ fonksiyonu D bölgesinde kompleks mertebeden konveks fonksiyon olsun. O takdirde $h(z)$ fonksiyonu D bölgesinde her yerde analitik ve süreklidir. O takdirde ;

$$s(z) = z \cdot \left(\frac{h(z) - h(\xi)}{z - \xi} \right)^2 = z \cdot (h'(z))^2$$

şeklinde ifade edilir. Her iki tarafın logaritmik türevi alındığında ;

$$\log s(z) = \log z + 2 \log h'(z) \Rightarrow$$

$$\frac{s'(z)}{s(z)} = \frac{1}{z} + 2 \frac{h''(z)}{h'(z)} \Rightarrow$$

$$z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} = 1 + 2z \cdot \frac{h''(z)}{h'(z)} \Rightarrow$$

$$z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} - 1 = 2z \cdot \frac{h''(z)}{h'(z)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2b} \cdot \left(z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} - 1 \right) = \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{h''(z)}{h'(z)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2b} \cdot \left(z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} - 1 \right) + 1 = 1 + \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{h''(z)}{h'(z)} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2b} \cdot \left(z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} - 1 \right) + 1 \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{h''(z)}{h'(z)} \right]$$

elde edilir. $h(z) \in C(b)$ olduğundan ;

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{h''(z)}{h'(z)} \right] > 0$$

olur. Buradan ;

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2b} \cdot \left(z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} - 1 \right) + 1 \right] > 0$$

olduğu çıkar ki bu ifade $s(z)$ fonksiyonunun, kompleks mertebeden yıldızlı fonksiyon olduğunu gösterir. Gerek şart ispatlanmıştır.

$\Leftarrow: h(z) = z + b_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu D de analitik ve $h(0) = 0, h'(0) = 1$ olsun.

$$s(z) = z \cdot \left(\frac{h(z) - h(\xi)}{z - \xi} \right)^2 \quad |z| < 1, |\xi| < 1, \xi \neq z$$

denklemini gerçekleyen her $s(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \in S^*(1-b)$ olsun. $s(z)$ ifadesinde her iki tarafın logaritmik türevi alınır ;

$$\log s(z) = \log z + 2 \log \frac{h(z) - h(\xi)}{z - \xi} \Rightarrow$$

$$\frac{s'(z)}{s(z)} = \frac{1}{z} + 2 \frac{\frac{h'(z)(z - \xi) - (h(z) - h(\xi))}{(z - \xi)^2}}{\frac{h(z) - h(\xi)}{z - \xi}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{s'(z)}{s(z)} &= \frac{1}{z} + 2 \frac{h'(z)(z-\xi) - h(z) + h(\xi)}{(z-\xi)(h(z) - h(\xi))} \implies \\
z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} &= 1 + 2z \cdot \frac{h'(z)(z-\xi) - h(z) + h(\xi)}{(z-\xi)(h(z) - h(\xi))} \implies \\
z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} - 1 &= 2z \cdot \frac{h'(z)(z-\xi) - h(z) + h(\xi)}{(z-\xi)(h(z) - h(\xi))} \implies \\
\frac{1}{b} \cdot \left(z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} - 1 \right) &= \frac{1}{b} \cdot 2z \cdot \frac{h'(z)(z-\xi) - h(z) + h(\xi)}{(z-\xi)(h(z) - h(\xi))} \implies \\
\frac{1}{b} \cdot \left(z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} - 1 \right) + 1 &= 1 + \underbrace{\frac{1}{b} \cdot 2z \cdot \frac{h'(z)(z-\xi) - h(z) + h(\xi)}{(z-\xi)(h(z) - h(\xi))}}_{H(z, \xi)} \implies
\end{aligned}$$

$s(z) \in S^*(1-b)$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{b} \cdot \left(z \cdot \frac{s'(z)}{s(z)} - 1 \right) + 1 \right] > 0$$

dir. O takdirde $\operatorname{Re} H(z, \xi) > 0$ olur.

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow z} H(z, \xi) &= \lim_{\xi \rightarrow z} \left[1 + \frac{1}{b} \cdot 2z \cdot \frac{h'(z)(z-\xi) - h(z) + h(\xi)}{(z-\xi)(h(z) - h(\xi))} \right] \\
&= 1 + \frac{1}{b} \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{2z \cdot h'(z)(z-\xi) - 2zh(z) + 2zh(\xi)}{(z-\xi)(h(z) - h(\xi))} \rightarrow \frac{0}{0} \\
&= 1 + \frac{1}{b} \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{-2zh'(z) + 2zh'(\xi)}{-h(z) + h(\xi) - zh'(\xi) + \xi h'(\xi)} \rightarrow \frac{0}{0} \\
&= 1 + \frac{1}{b} \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{2zh''(\xi)}{h'(\xi) - zh''(\xi) + h'(\xi) + \xi h''(\xi)} \\
&= 1 + \frac{1}{b} \frac{2zh''(z)}{2h'(z)} = 1 + \frac{1}{b} \frac{zh''(z)}{h'(z)}
\end{aligned}$$

$$\implies \lim_{\xi \rightarrow z} H(z, \xi) = 1 + \frac{1}{b} \frac{zh''(z)}{h'(z)}$$

bulunur. $\operatorname{Re} H(z, \xi) > 0$ olması, $\operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{b} \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right) > 0$ olduğunu gösterir. Bu ise $h(z) \in C(b)$ demektir ki yeter şartın ispatıdır.

11.9 Teorem : $S^*(1-b)$ sınıfı rotasyon altında invaryanttır.

İspat : $g(z) = f(e^{i\alpha} \cdot z)$, $f(z) \in S^*(1-b)$ olsun. Her iki tarafın logaritmik türevi alınır ;

$$\log g(z) = \log f(e^{i\alpha} \cdot z) \implies$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = e^{i\alpha} \cdot \frac{f'(e^{i\alpha} \cdot z)}{f(e^{i\alpha} \cdot z)} \implies$$

$$z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} = e^{i\alpha} \cdot z \cdot \frac{f'(e^{i\alpha} \cdot z)}{f(e^{i\alpha} \cdot z)} \implies$$

$$1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) = 1 + \frac{1}{b} \left(e^{i\alpha} \cdot z \cdot \frac{f'(e^{i\alpha} \cdot z)}{f(e^{i\alpha} \cdot z)} - 1 \right)$$

$\xi = e^{i\alpha} \cdot z$ denirse $|\xi| = |z| < 1$ olduğundan ;

$$1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) = 1 + \frac{1}{b} \left(\xi \cdot \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \left(\xi \cdot \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} - 1 \right) \right]$$

bulunur. $f(z) \in S^*(1-b)$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı pozitiftir. Dolayısıyla sol tarafta pozitif olur ki, bu $g(z) \in S^*(1-b)$ dir. Bu ise $S^*(1-b)$ sınıfının rotasyon altında invaryanlığını gösterir.

11.10 Teorem : $C(b)$ sınıfı rotasyon altında invaryanttır.

İspat : $g(z) = f(e^{i\alpha} \cdot z)$, $f(z) \in C(b)$ olsun. Her iki tarafın logaritmik türevi alınır ;

$$\log g(z) = \log f(e^{i\alpha} \cdot z) \Rightarrow$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = e^{i\alpha} \cdot \frac{f'(e^{i\alpha} \cdot z)}{f(e^{i\alpha} \cdot z)}$$

bulunur. Bu ifadede bir kez daha logaritmik türev alınır ;

$$\log g'(z) - \log g(z) = \log e^{i\alpha} + \log f'(e^{i\alpha} \cdot z) - \log f(e^{i\alpha} \cdot z)$$

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} = e^{i\alpha} \cdot \frac{f''(e^{i\alpha} \cdot z)}{f'(e^{i\alpha} \cdot z)} - e^{i\alpha} \cdot \frac{f'(e^{i\alpha} \cdot z)}{f(e^{i\alpha} \cdot z)}$$

$$z \frac{g''(z)}{g'(z)} = z \cdot e^{i\alpha} \cdot \frac{f''(e^{i\alpha} \cdot z)}{f'(e^{i\alpha} \cdot z)}$$

$\xi = e^{i\alpha} \cdot z$ denirse $|\xi| = |z| < 1$ olduğundan ;

$$\Rightarrow \frac{1}{b} \cdot z \frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{1}{b} \cdot \xi \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{b} \cdot z \frac{g''(z)}{g'(z)} = 1 + \frac{1}{b} \cdot \xi \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \cdot z \frac{g''(z)}{g'(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \cdot \xi \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right]$$

$f(z) \in C(b)$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı pozitiftir. O halde eşitliğin sol tarafı da pozitif olur ki, bu $g(z) \in C(b)$ olduğunu, dolayısıyla $C(b)$ sınıfının rotasyon altında invaryanlığını gösterir.

11.11 Teorem : $h(z) \in C(b)$ olsun. O takdirde $h(z)$ fonksiyonu için

$$\operatorname{Re} \frac{h(z)}{z} > \frac{1}{1+b} \quad , \quad \operatorname{Re} \left[\frac{1+b}{2} \cdot \frac{h(z)}{z} \right] > \frac{1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu teorem Yaşar Polatoğlu tarafından ispatlanmıştır.

İspat : $h(z) \in C(b)$ olsun. O takdirde

$$s(z) = z \cdot \left(\frac{h(z) - h(\xi)}{z - \xi} \right)^2 \quad |z| < 1, |\xi| < 1, \xi \neq z$$

denklemini gerçekleyen her $s(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ fonksiyonu $S^*(1-b)$ sınıfına

aittir. $s(z) = z \cdot \left(\frac{h(z)-h(\xi)}{z-\xi} \right)^2$ ifadesinde logaritmik türev alınır ;

$$\frac{s'(z)}{s(z)} = \frac{1}{z} + 2 \cdot \left[\frac{h'(z)}{h(z)-h(\xi)} - \frac{1}{z-\xi} \right]$$

ifadesi z nin kuvvetlerine göre yazılırsa ;

$$\frac{s'(z)}{s(z)} = \frac{1}{z} + 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{h(\xi)} \right) + \left(-\frac{2a_2}{h(\xi)} - \frac{1}{(h(\xi))^2} + \frac{1}{\xi^2} \right) z + \dots \right]$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{b} \left(\frac{z \cdot s'(z)}{s(z)} - 1 \right) = 1 + \frac{1}{b} \left(\frac{2}{\xi} - \frac{2}{h(\xi)} \right) z + \frac{1}{b} \left(-\frac{4a_2}{h(\xi)} - \frac{2}{(h(\xi))^2} + \frac{2}{\xi^2} \right) z^2 + \dots$$

eşitliğinin sol tarafının reel kısmı pozitif olduğundan, sağ tarafının reel kısmı da pozitif olur ki bu katsayılarının yani $|c_n| \leq 2$ olmasını gerektirir.

$\left| \frac{1}{b} \left(\frac{2}{\xi} - \frac{2}{h(\xi)} \right) \right| \leq 2$ olur. Burada da gerekli işlemler yapılırsa ;

$\operatorname{Re} \left(\frac{h(\xi)}{\xi} \right) > \frac{1}{1+|b|}$, $\xi = z$ için ise ; $\operatorname{Re} \frac{h(z)}{z} > \frac{1}{1+|b|}$ ve dolayısıyla $\operatorname{Re} \left[\frac{1+|b|}{2} \cdot \frac{h(z)}{z} \right] > \frac{1}{2}$ bulunur. Bu da ispatı istenen şeydir.

M(α , b) GENELLEŞTİRİLMİŞ α -KONVEKS FONKSİYONLAR SINIFI OLAN "KOMPLEKS MERTEBEDEN α KONVEKS FONKSİYONLAR SINIFI" NİN ÖZELLİKLERİ

11.12 Lemma : $f(z)$ fonksiyonu, birim dairede analitik ve

$f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olacak şekilde normalize edilmiş fonksiyon olsun.

$0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $f(z) \in M(\alpha, b)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$g(z) = f(z) \cdot \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^\alpha, \quad z \in D \quad (11.1)$$

denklemini gerçekleyen her $g(z) = z + b_2 z^2 + \dots$ fonksiyonunun $S^*(1-b)$ sınıfına ait olmasıdır. Burada $\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^\alpha$ nın, $z = 0$ daki değeri 1 olacak şekilde Riemann Yüzeyi seçilir.

Bu Lemmanın α -konveks fonksiyonlar sınıfı için ispatı P.T. Mocanu tarafından yapılmıştır. Biz bu ispatı, "b kompleks mertebeden α konveks fonksiyonlar sınıfı" için genişleteceğiz.

İspat : $\Rightarrow f(z)$ fonksiyonu, birim dairede analitik ve

$f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olacak şekilde normalize edilmiş fonksiyon olsun. $f(z) \in M(\alpha, b)$ yani

$$\operatorname{Re} \left\{ (1-\alpha) \left[1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right] + \alpha \left(1 + \frac{1}{b} \cdot z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > 0$$

olsun.

$$g(z) = f(z) \cdot \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^\alpha, \quad z \in D$$

ise; logaritmik türev alındığında ;

$$\begin{aligned}
 \log g(z) &= \log f(z) + \alpha \log z + \alpha \log f'(z) - \alpha \log f(z) \\
 \Rightarrow \frac{g'(z)}{g(z)} &= \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha \cdot \frac{1}{z} + \alpha \frac{f''(z)}{f'(z)} - \alpha \frac{f'(z)}{f(z)} \\
 \Rightarrow z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} &= z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha + \alpha z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} - \alpha z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \\
 z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 &= z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha + \alpha z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} - \alpha z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \\
 1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) &= 1 + \frac{1}{b} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1}{b} \alpha + \frac{1}{b} \alpha z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{b} \alpha z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{b} + \alpha - \alpha \\
 &= 1 + \frac{1}{b} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{b} - \alpha - \frac{\alpha}{b} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{\alpha}{b} + \alpha + \frac{\alpha}{b} z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \\
 &= (1 - \alpha) \left(1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right) + \alpha \left(1 + \frac{1}{b} z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)
 \end{aligned}$$

Yani sonuç olarak ;

$$1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) = (1 - \alpha) \left(1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right) + \alpha \left(1 + \frac{1}{b} z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)$$

bulunur. Bu eşitlikte, her iki tarafın reel kısımları da eşit olur. Ayrıca $f(z) \in M(\alpha, b)$ olduğundan sağ tarafın reel kısmı pozitif olduğundan, sol tarafın reel kısmı da pozitif olur.

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) \right] > 0$$

Bu da $g(z) \in S^*(1 - b)$ yani kompleks mertebeden yıldızlı fonksiyon olduğunu gösterir ki ispat tamamlanmıştır.

$$\Leftarrow: g(z) = f(z) \cdot \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^\alpha, \quad z \in D \text{ denklemini gerçekleyen her}$$

$g(z) = z + b_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu, $S^*(1 - b)$ sınıfına ait olsun.

$g(z) = f(z) \cdot \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^\alpha$ ifadesinden logaritmik türev alınıp, gerekli işlemler yapılırsa ;

$$1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) = (1 - \alpha) \left(1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right) + \alpha \left(1 + \frac{1}{b} z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)$$

ve buradan da

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} - 1 \right) \right] = \operatorname{Re} \left\{ (1 - \alpha) \left(1 + \frac{1}{b} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right) + \alpha \left(1 + \frac{1}{b} z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right\}$$

bulunur. $g(z) \in S^*(1-b)$ olduğundan, son eşitliğin birinci tarafı pozitiftir. Dolayısıyla ikinci taraf da pozitif olmak zorundadır. Bu ise $f(z) \in M(\alpha, b)$ olduğunu gösterir ki bu ise ispatlanması gereken ifadedir.

11.13 Lemma (İntegral Gösterilimi) : $f(z)$ fonksiyonu, birim dairede analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olacak şekilde normalize edilmiş fonksiyon olsun. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $f(z) \in M(\alpha, b)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $g(z)$ yıldızlı fonksiyon olmak üzere ;

$$f(z) = \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z z^{\frac{1}{\alpha} - \frac{b}{\alpha} - 1} [g(z)]^{\frac{b}{\alpha}} dz \right]^\alpha, \quad z \in D \quad (11.2)$$

eşitliğinin gerçekleşmesidir.

İspat : $\Rightarrow$ $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $f(z) \in M(\alpha, b)$ olsun. Lemma 11.12 den;

$f_1(z) = f(z) \cdot \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^\alpha$, $z \in D$ denklemini gerçekleyen her $f_1(z) = z + b_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu $S^*(1-b)$ sınıfına aittir. Yani yukarıdaki denklemi gerçekleyen her $f_1(z)$ fonksiyonu, kompleks mertebeden yıldızlı bir fonksiyondur. Bu denklemde $f(z)$ yi bulmak için her iki tarafın $1/\alpha$ kuvveti alınacak olursa ;

$$\begin{aligned} [f_1(z)]^{1/\alpha} &= [f(z)]^{1/\alpha} \cdot z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \Rightarrow \\ [f_1(z)]^{1/\alpha} &= z \cdot f'(z) \cdot [f(z)]^{\frac{1}{\alpha} - 1} \Rightarrow \\ z^{-1} [f_1(z)]^{1/\alpha} &= \frac{f'(z)}{[f(z)]^{1 - \frac{1}{\alpha}}} \Rightarrow \end{aligned}$$

Her iki tarafın integralini alacak olursak ;

$$\begin{aligned} \int_0^z z^{-1} [f_1(z)]^{1/\alpha} dz &= \int_0^z \frac{f'(z)}{[f(z)]^{1 - \frac{1}{\alpha}}} dz \Rightarrow \\ &= \int \frac{du}{u^{1 - \frac{1}{\alpha}}} = \int u^{\frac{1}{\alpha} - 1} du \\ &= \frac{u^{\frac{1}{\alpha} - 1 + 1}}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha \cdot u^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \alpha \cdot [f(z)]^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^z z^{-1} [f_1(z)]^{1/\alpha} dz = \alpha [f(z)]^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^z z^{-1} [f_1(z)]^{1/\alpha} dz = [f(z)]^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z z^{-1} [f_1(z)]^{1/\alpha} dz \right]^\alpha = f(z)$$

bulunur. Diğer taraftan Teorem 9.7 ye göre ; $f_1(z)$ nin kompleks mertebeden yıldızlı olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(z) = z \cdot \left(\frac{g(z)}{z} \right)^b$$

denklemini gerçekleyen $g(z)$ fonksiyonunun yıldızlı olmasıdır.

Bu ifadeyi yukarıda bulduğumuz eşitlikte yerine yazarsak ;

$$f(z) = \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z z^{-1} \left[z \cdot \left(\frac{g(z)}{z} \right)^b \right]^{\frac{1}{\alpha}} dz \right]^\alpha$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z z^{-1} z^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{(g(z))^{\frac{b}{\alpha}}}{z^{\frac{b}{\alpha}}} dz \right]^\alpha$$

$$f(z) = \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z z^{\frac{1}{\alpha} - \frac{b}{\alpha} - 1} (g(z))^{\frac{b}{\alpha}} dz \right]^\alpha$$

bulunur ki, bu gerek şartın ispatıdır.

$\Leftarrow$: $0 < \alpha < 1$ için , $g(z) \in S^*$ olmak üzere ;

$$f(z) = \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z z^{\frac{1}{\alpha} - \frac{b}{\alpha} - 1} (g(z))^{\frac{b}{\alpha}} dz \right]^\alpha, \quad z \in D$$

eşitliği gerçeklensin. O takdirde $f(z) \in M(\alpha, b)$ dir. Gerçekten ;

Teorem 9.7 ifadesini kullanacak olursak ; yani " $f_1(z) \in S^*(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(z) = z \cdot \left(\frac{g(z)}{z} \right)^b \iff g(z) = z \cdot \left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^{\frac{1}{b}}$$

denklemini gerçekleyen $g(z) \in S^*$ olmasıdır"

ifadesini $f(z)$ de yazarsak ;

$$\iff f(z) = \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z z^{\frac{1}{\alpha} - \frac{b}{\alpha} - 1} \left[z \cdot \left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^{\frac{1}{b}} \right]^{\frac{b}{\alpha}} dz \right]^\alpha$$

$$\Longleftrightarrow [f(z)]^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \int_0^z z^{\frac{1}{\alpha}-\frac{b}{\alpha}-1} z^{\frac{b}{\alpha}} \frac{(f_1(z))^{\frac{1}{\alpha}}}{z^{\frac{1}{\alpha}}} dz$$

$$\Longleftrightarrow \alpha [f(z)]^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^z z^{-1} (f_1(z))^{\frac{1}{\alpha}} dz$$

Burada eşitliğin birinci kısmı ;

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \alpha [f(z)]^{\frac{1}{\alpha}} &= \int_0^z \alpha \frac{1}{\alpha} [f(z)]^{\frac{1}{\alpha}-1} f'(z) dz \\ &= \int_0^z \frac{f'(z)}{[f(z)]^{1-\frac{1}{\alpha}}} dz \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^z z^{-1} [f_1(z)]^{1/\alpha} dz = \int_0^z \frac{f'(z)}{[f(z)]^{1-\frac{1}{\alpha}}} dz$$

Her iki tarafın türevi alınır ;

$$\Longleftrightarrow z^{-1} [f_1(z)]^{1/\alpha} = \frac{f'(z)}{[f(z)]^{1-\frac{1}{\alpha}}} \Rightarrow$$

$$[f_1(z)]^{1/\alpha} = [f(z)]^{1/\alpha} \cdot z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(z) = f(z) \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^{\alpha}, \quad f_1(z) \in S^*(1-b)$$

bulunur ki Lemma 11.12 den " $f(z) \in M(\alpha, b)$ olması için gerek ve yeter şart

$f_1(z) = f(z) \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^{\alpha}$ denklemini gerçekleyen her $f_1(z) \in S^*(1-b)$ olmasıdır" ifadesinden

; $f(z) \in M(\alpha, b)$ sonucu çıkar ki bu yeter şartın ispatıdır.

11.14 Teorem : $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $f(z) \in M(\alpha, b)$ ise o takdirde

$|z| = r$ ($0 < r < 1$) için ;

$$-K(\alpha, |b|, -r) \leq |f(z)| \leq K(\alpha, |b|, r) \quad (11.3)$$

eşitsizliği elde edilir.

Her iki eşitsizliğin eşitlik hali ;

$$f_*(z) = \frac{2}{(1+|b|)} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \int_0^z \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot (1-\xi)^{-\frac{2}{\alpha}} d\xi \right]^{\alpha}$$

kompleks mertebeli α -konveks fonksiyon için gerçekleşir.

İspat : $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $f(z) \in M(\alpha, b)$ olsun. Teorem 11.12 den

$$f_1(z) = f(z) \cdot \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right)^{\alpha}$$

denklemini gerçekleyen her $f_1(z) \in S^*(1-b)$ dir. O takdirde ;

$$(f_1(z))^{\frac{1}{\alpha}} = (f(z))^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot z \cdot f'(z) \Rightarrow$$

$$|f_1(z)|^{\frac{1}{\alpha}} = \left| (f(z))^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot z \cdot f'(z) \right|$$

olur. Teorem 11.14 den ; $f_1(z) \in S^*(1-b)$ ise o takdirde

$$\frac{2r}{(1+|b|)(1+r)^2} \leq |f_1(z)| \leq \frac{2r}{(1+|b|)(1-r)^2}$$

dir. Buradan ;

$$\left[\frac{2r}{(1+|b|)(1+r)^2} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq |f_1(z)|^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left[\frac{2r}{(1+|b|)(1-r)^2} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

olur.

$$\Rightarrow |f_1(z)|^{\frac{1}{\alpha}} = \left| (f(z))^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot z \cdot f'(z) \right| \leq \left[\frac{2r}{(1+|b|)(1-r)^2} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow r \cdot |f(z)|^{\frac{1}{\alpha}-1} |f'(z)| \leq \left(\frac{2}{1+|b|} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{(1-r)^{\frac{2}{\alpha}}}$$

$$\Rightarrow \int_0^r |f(z)|^{\frac{1}{\alpha}-1} |f'(z)| \cdot dz \leq \left(\frac{2}{1+|b|} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot (1-\rho)^{-\frac{2}{\alpha}} \cdot d\rho$$

$$(u = |f(z)| \Rightarrow du = |f'(z)| dz)$$

$$\Rightarrow \frac{|f(z)|^{\frac{1}{\alpha}}}{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{2}{1+|b|} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot (1-\rho)^{-\frac{2}{\alpha}} \cdot d\rho$$

$$\Rightarrow |f(z)|^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{2}{1+|b|} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot (1-\rho)^{-\frac{2}{\alpha}} \cdot d\rho$$

$$\Rightarrow |f(z)| \leq \frac{2}{1+|b|} \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot (1-\rho)^{-\frac{2}{\alpha}} \cdot d\rho \right]^{\alpha}$$

$$\Rightarrow |f(z)| \leq K(\alpha, |b|, r)$$

bulunur. Böylece eşitsizliğin sağ tarafı ispatlanmıştır.

Eşitsizliğin sol tarafını ispatlamak için ; $(1+\rho)^{-\frac{2}{\alpha}}$ fonksiyonu, $|z| < r < 1$ i yalınkat olarak konveks bir bölge üzerine resmettiğinden, orjinden çıkan ve $f(z) = R \cdot e^{i\varphi}$ noktası ile birleşen doğru parçasını alalım. Bu doğru parçası , yukarıda söylediğimizden dolayı $|z| < 1$ deki $f(z)$ nin değerleri ile tamamen örtülür. Zira kompleks mertebeden yıldızlı fonksiyonlar sınıfı rotasyon altında invaryanttır.

Eğer $L, |z| < 1$ de $\omega = f(z)$ fonksiyonu ile bu doğru parçası üzerine tasvir edilen doğrunun uzunluğu ise o takdirde bu doğru parçasının uzunluğu ;

$$R^{\frac{1}{\alpha}} = |f(z)|^{\frac{1}{\alpha}} = \int_L \left| \frac{df(\xi)^{\frac{1}{\alpha}}}{d\xi} \right| |d\xi|$$

dır. $f(z)$ kompleks mertebeli α -konveks fonksiyon olduğundan, 11.13 İntegral Gösteriliminden ;

$$\frac{df(\xi)^{\frac{1}{\alpha}}}{d\xi} = \frac{\frac{1}{\alpha}[f_1(\xi)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\xi}$$

olacak şekilde $f_1(z)$ kompleks mertebeli yıldızlı fonksiyonu vardır. Böylece $\rho = |\xi|$ ise (11.3) sonucu çıkarılır. Bu teoremin ispatı S.S. Miller metodu üzerine oturtulmuştur.

$$R^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \int_L \left| \frac{(f_1(\xi))^{\frac{1}{\alpha}}}{\xi} \right| |d\xi| \Rightarrow \text{Teorem 11.14 den ;}$$

$$R^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{(1+|b|)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \alpha} \int_L \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} (1+\rho)^{-\frac{2}{\alpha}} d\rho$$

$$R \geq \frac{2}{(1+|b|)} \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} (1+\rho)^{-\frac{2}{\alpha}} d\rho \right]^{\alpha}$$

ifadesinde $\rho = r.u$ olarak alınıp ve

$$|f(z)| \geq -K(\alpha, |b|, -r)$$

ve dolayısıyla (11.3) ifadesi elde edilir.

$b = 1$ için , S.S. Miller'ın sonuçları elde edilir.

11.15 Teorem : $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu $M(\alpha, b)$ sınıfına ait olsun. $S(n)$;

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = m \text{ ve } r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \dots + nr_n = n$$

olacak şekilde negatif olmayan $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ tamsayılarının tüm n-liler kümesi olsun.

$$\gamma(\alpha, m) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) \dots (\alpha-m) \quad , \quad \gamma(\alpha, 0) = \alpha$$

ise o takdirde $n = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$|a_{n+1}| \leq \sum_{S(n)} \frac{\gamma(\alpha, m-1) \cdot c_1^{r_1} \cdot c_2^{r_2} \dots c_n^{r_n}}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \dots r_n!}$$

dir. Buradaki toplam $S(n)$ deki tüm n-liler üzerinde alınmıştır.

c_n ler ise ;

$$c_n = \frac{1}{n! \alpha^n (1+n\alpha)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (2b + k\alpha)$$

dir.

İspat : Eğer Lemma 11.13 deki $g(z)$ fonksiyonunu, yıldızlı fonksiyonlar sınıfı için tanımlanan $g_*(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in S^*$ Koebe fonksiyonu olarak alacak olursak o takdirde

$$f_*(z) = \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-\xi)^{-\frac{2b}{\alpha}} d\xi \right]^\alpha$$

elde ederiz. Bu fonksiyon katsayı teoremi için ekstremal fonksiyondur.

$$\begin{aligned} f_*(z) &= \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-\xi)^{-\frac{2b}{\alpha}} d\xi \right]^\alpha \\ &= \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z \xi^{\frac{1}{\alpha}-2} \frac{\xi}{(1-\xi)^{\frac{2b}{\alpha}}} d\xi \right]^\alpha \\ &= \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z \xi^{\frac{1}{\alpha}-2} \left(\xi + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-2} \frac{\frac{2b}{\alpha} + k}{k+1} \right) \xi^n \right) d\xi \right]^\alpha \end{aligned} \quad (11.4)$$

Şimdi de

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-2} \frac{\frac{2b}{\alpha} + k}{k+1}$$

diyelim.

$$\begin{aligned} n=2 \text{ için;} & \quad A_2 = \frac{2b}{\alpha} \\ n=3 \text{ için;} & \quad A_3 = \frac{2b}{\alpha} \cdot \frac{2b+\alpha}{2\alpha} \\ n=4 \text{ için;} & \quad A_4 = \frac{2b}{\alpha} \cdot \frac{2b+\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{2b+2\alpha}{3\alpha} \\ n=5 \text{ için;} & \quad A_5 = \frac{2b}{\alpha} \cdot \frac{2b+\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{2b+2\alpha}{3\alpha} \cdot \frac{2b+3\alpha}{4\alpha} \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

$$n=n \text{ için;} \quad A_n = \frac{2b}{\alpha} \cdot \frac{2b+\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{2b+2\alpha}{3\alpha} \cdot \frac{2b+3\alpha}{4\alpha} \dots \frac{2b+(n-2)\alpha}{(n-1)\alpha}$$

elde edilir. Bu ifadeleri (11.4) ifadesinde yerine yazacak olursak ;

$$\begin{aligned} f_*(z) &= \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z \xi^{\frac{1}{\alpha}-2} \cdot \left(\xi + \frac{2b}{\alpha} \xi^2 + \frac{2b}{\alpha} \cdot \frac{2b+\alpha}{2\alpha} \xi^3 + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2b}{\alpha} \cdot \frac{2b+\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{2b+2\alpha}{3\alpha} \cdot \frac{2b+3\alpha}{4\alpha} \dots \frac{2b+(n-2)\alpha}{(n-1)\alpha} \xi^n + \dots \right) d\xi \right]^\alpha \\ &= \left[z^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{2b}{\alpha(1+\alpha).1!} z^{\frac{1}{\alpha}+1} + \frac{2b(2b+\alpha)}{\alpha^2(1+2\alpha).2!} z^{\frac{1}{\alpha}+2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{2b(2b+\alpha) \dots [2b+(n-1)\alpha]}{\alpha^n(1+n\alpha).n!} z^{\frac{1}{\alpha}+n} + \dots \right]^\alpha \\ &= z.H(z) = z. \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \right]^\alpha \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$c_n = \frac{1}{n! \alpha^n (1+n\alpha)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (2b + k\alpha)$$

elde edilir.

$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ olsun. O takdirde (11.5) bağıntısı ;

$$H(z) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \right]^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} z^n \quad (11.6)$$

şeklinde ifade edilir.

Diğer yandan (11.6) eşitliğinde ardarda türev alınırsa ;

$$H(0) = 1$$

$$H'(0) = \alpha(1!c_1)$$

$$H''(0) = \alpha(\alpha-1)(1!c_1)^2 + \alpha 2!c_2$$

$$\begin{aligned} H'''(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1!c_1)^3 \\ &+ 3\alpha(\alpha-1)(1!c_1)(2!c_2) + \alpha(3!c_3) \end{aligned} \quad (11.7)$$

Böylece tümevarım yönteminden ;

$$|a_{n+1}| \leq \frac{|H^{(n)}(0)|}{n!}, \quad n \geq 1$$

elde edilir. Diğer yandan (11.6) ifadesinden ;

$$H(z) = [h(z)]^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \cdot z^n \quad (11.8)$$

elde edilir. (11.8) ifadesinden diferansiyel alacak olursak ;

$$H'(z) = \alpha \frac{h'(z)}{h(z)} H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_{n+1} \cdot z^{n-1} \quad (11.9)$$

elde edilir. Burada $h(z)$, $h'(z)$ kuvvet serileri kullanılacak olursa, $H(z)$ fonksiyonu ;

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_{n+1} z^{n-1} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \right) = \alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} z^n \right) \quad (11.10)$$

elde edilir. Burada $n \geq 1$ sabit tamsayıları için (11.10) denkleminde z^{n-1} in katsayısı

elde edilir ve

$$\sum_{k=0}^n [k - \alpha(n-k)] \cdot c_{n-k} \cdot a_{k+1} = 0 \quad (c_0 = a_1 = 1) \quad (11.11)$$

elde edilir. $c_0 = 1$ olduğundan, a_{n+1} için (11.11) denklemi çözülür ve

$$a_{n+1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [k - \alpha(n-k)] \cdot c_{n-k} \cdot a_{k+1} \quad (11.12)$$

denklemi elde edilir.

(11.12) denklemi a_{n+1} i hesaplayan rekürans formülüdür. Her n tamsayısı için, a_{n+1} katsayıları (11.5) denklemiyle tanımlanmak ve (11.12) denklemini gerçeklemek üzere ; yukarıdaki teoremin ispatı indüksiyon yöntemiyle aşağıdaki şekilde yapılabilir.

Her $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ için ;

$$a_{n+1} = \sum_{S(n)} \frac{\gamma(\alpha, j-1) \cdot c_1^{r_1} \cdot c_2^{r_2} \dots c_k^{r_k}}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \dots r_k!} \quad (11.13)$$

olsun. Burada $j = \sum_{i=1}^k r_i$ dir ve toplam $\sum_{i=1}^k i r_i = k$ için tüm negatif olmayan $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_k)$ k-lılar kümesi $S(k)$ üzerinde alınmıştır.

Şimdi de $k < n$ ise uygun miktarda sıfırlar eklenerek k-lılar, n-lilere genişletilebilir. O takdirde negatif olmayan tamsayılarda

$$\sum_{i=1}^n i r_i = k, \quad k < n \quad (11.14)$$

ifadesinin bir çözümü $i = k+1, k+2, \dots, n$ için $r_i = 0$ olarak verilmelidir. (11.13) denklemindeki $\frac{c_i^{r_i}}{r_i!}$ çarpanlarının dahil edilmesi ile $i = k+1, k+2, \dots, n$ için bu çarpanlar 1 olduğundan, değer değişmez.

Böylece (11.13) denklemi;

$$a_{n+1} = \sum_{S(n)} \frac{\gamma(\alpha, j-1) \cdot c_1^{r_1} \cdot c_2^{r_2} \dots c_n^{r_n}}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \dots r_n!} \quad k \leq n \quad (11.15)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $j = \sum_{i=1}^n r_i$ dir ve toplam tüm negatif olmayan çözümlerinin $S(k)$ kümesi üzerinde alınmıştır. (11.15) denklemini R nin sağ tarafında kullanırız. O takdirde

$$R = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{S(k)} \frac{[k-\alpha(n-k)] \gamma(\alpha, j-1) \cdot c_{n-k}^{r_1} \cdot c_1^{r_2} \cdot c_2^{r_3} \dots c_n^{r_n}}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \dots r_n!} \quad (11.16)$$

dir.

$(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, $S(n)$ içinde

$$\sum_{i=1}^n i y_i = n, \quad \sum_{i=1}^n y_i = m \quad (11.17)$$

olacak şekilde herhangi sabit n-liler olsun. (11.16) denkleminde $c_1^{y_1} \cdot c_2^{y_2} \cdot c_3^{y_3} \dots c_n^{y_n}$ nin C katsayısı tanımlanır. Bu katsayı toplamdaki çeşitli terimlerin birleşmesiyle oluşur. Gerçekte bu tür terimler ancak ve yalnız

$$c_{n-k}^{r_1} \cdot c_1^{r_2} \cdot c_2^{r_3} \dots c_n^{r_n} = c_1^{y_1} \cdot c_2^{y_2} \cdot c_3^{y_3} \dots c_n^{y_n}$$

ise elde edilir.

Özel olarak, a, $y_a \geq 1$ ifadesinin indisi olsun. $i \neq a$ için $r_i = y_i$ ve $r_a = y_a - 1$ olsun. Bu a sabiti için $j = \sum_{i=1}^n r_i = m - 1$ elde edilir. (11.16) denkleminde $n - k = a$ olsun.

A, $y_a \neq 0$ olan a'ların kümesi ise o takdirde

$$C = -\frac{1}{n} \sum_{a \in A} \frac{(n-a-\alpha) \cdot \gamma(\alpha, m-2)}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \dots r_n!} \quad (11.18)$$

dir. Bu denklemin pay ve paydasında y_a çarpanını yazarsak ;

$$\begin{aligned}
 C &= - \sum_{a \in A} \frac{y_a(n-a-\alpha a) \cdot \gamma(\alpha, m-2)}{n \cdot y_1! \cdot y_2! \cdot y_3! \cdots y_n!} \\
 &= \frac{\gamma(\alpha, m-2)}{n \cdot y_1! \cdots y_n!} \sum_{a \in A} y_a(a\alpha + a - n) \\
 &= \frac{\gamma(\alpha, m-2)}{n \cdot y_1! \cdot y_2! \cdot y_3! \cdots y_n!} \sum_{a=1}^n (\alpha a y_a + a y_a - n y_a)
 \end{aligned}$$

$y_a = 0$ alınır ;

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\gamma(\alpha, m-2)}{n \cdot y_1! \cdot y_2! \cdot y_3! \cdots y_n!} n \cdot [\alpha - (m-1)] \\
 &= \frac{\gamma(\alpha, m-1)}{y_1! \cdot y_2! \cdot y_3! \cdots y_n!}
 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir ki (11.18) denkleminin sağ tarafında istenen $c_1^{y_1} \cdot c_2^{y_2} \cdot c_3^{y_3} \cdots c_n^{y_n}$ kesin katsayıları her sabit $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ için sağlanacağından ispat tamamlanmıştır. Sınırlar, $f_*(z)$ fonksiyonu ile tanımlı $\alpha > 0$ için kesindir. Bu teoremin ispatı A.W. Goodman tarafından yapılmıştır. Şunu da ifade etmek gerekir ki, b ye verilen özel değerler ve α katsayı eşitsizlikleri, α konveks fonksiyonlar sınıfı için elde edilir.

$b = 1$ için, konveks fonksiyonların katsayı eşitsizliği P.K. Kulshrestha tarafından bulunmuştur.

12. SONUÇ

Biz bu çalışmamızda genelleştirilmiş α -konveks fonksiyonlar sınıfına ait bir temel karakterizasyon lemması verdik ve bu lemma yardımıyla sınıfımız için integral gösterilimini elde ettik. Bu integral gösteriliminden hareket ederek, sınıfa ait kesin distorsiyon eşitsizliklerini ve sınıfa ait fonksiyonun Taylor açılımındaki a_n katsayısı için kesin üst sınırı bulduk. Gerek distorsiyon eşitsizliklerinde ve gerekse katsayı eşitsizliğinde, ekstremal fonksiyon elde edildiğinden verilen eşitsizlikler kesindir.



KAYNAKLAR

Ahlfors, L., (1965), Complex Analysis, International Student Edition in Pure and Applied Mathematics.

Bernardi, S., (1982), Bibliography of Schlicht Functions, Mariner Publishing Company, Inc. Tampa, Florida.

Bajpai, S. and Mehrotra, T., (1973), "On the coefficient structure and growth theorem for these functions $f(z)$ for which $z.f'(z)$ is spirallike", Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) 16(30)(1973), 5-12.

Chichra, P., (1975), "Regular functions for which $z.f'(z)$ is α -spiral-like", Proc. Amer. Math. Soc. 49(1975), 151-160.

Duren, P., (1981), Univalent functions, Springer-Verlag, New York.

Goodman, A., (1972), "Coefficients for the area theorem", Proc. Amer. Math. Soc., 33 (1972), no.2, pp. 438-444.

Goodman, A., (1983), Univalent functions, Volume I and Volume II, Mariner publishing Comp., Inc., Tampa, Florida.

Hayman, W., (1994), Multivalent Functions, Cambridge University press.

Jack, I. S., (1971), "Functions starlike and convex of order α ", J. London Math. Soc. (2)3(1971), 469-474.

Kulshrestha, P. K., (1974), "Coefficients for alpha-convex univalent functions", Bull. Amer. Math. Soc. 80(1974), 341-342.

Kulshrestha, P. K., (1973), "Bounded Robertson functions", Notices A. M. S. 20, August 1973, Abstract 706-30-5, p. A-521.

Libera, R. J. and Ziegler, M. R., (1972), "Regular functions $F(z)$ for which $z.F'(z)$ is alpha-spiral", Trans. Amer. Math. Soc., 166(1972), pp. 361-370.

Miller, S. S., (1973), "Distortion properties of alpha-starlike functions", Proc. Amer. Math. Soc. 38(1973), 311-318.

Nasr, M. A. and Aouf, M., (1985), "Starlike function of complex order", Journal of Natural Sciences and Mathematics, Vol. 25, No1, p.p. 1-12, 1985.

Nehari, Z., (1958), Conformal Mapping Dover Publication, New York.

Polatoğlu, Y., (1989), "The Radius of α -Convexity for the Classes, λ -Spirallike Functions and p -Fold λ -Spirallike Functions", Revue Roumaine De Mathematiques Pures Et Appliques, Vol. 34, No. 3, 1989, 119-124.

Polatoğlu, Y., (1995), "The Radius Problem for Convex Functions of Complex Order", Turkish Journal of Mathematics, Vol. 19, No. 3, 1995, p.p. 283-289.

Polatoğlu, Y., (1998), "Koebe Domain for Convex Functions of Complex Order", J. Math., The Punjab Univ., Vol. 31, 1998, p.p. 13-24.

Polatoğlu, Y., Bolcal, M. and Şen, A., (2002), "Koebe Domain of Starlike Functions of Complex Order with Montel Normalization", Glasnik Mat., Vol. 37(57), 2002, p.p. 89-92.

Pommerenke, C., (1975), Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen.

Robertson, M. S., (1936), "On the theory of univalent functions", Ann. Math. 37(1936), 374-408.

Robertson, M. S., (1969), "Univalent functions $f(z)$ for which $z.f(z)$ is spirallike", Mich. Math. J. 16(1969), 97-101.

Wiatrowski, P., (1971), "The coefficients of a certain family of holomorphic functions", Zeszyty Nauk. Univ. Lodz. Nauki Mat. Przyrod. Ser II Zeszyt 39 Mat.(1971), 75-85.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	22.08.1968	
Doğum Yeri	İstanbul	
Lise	1982-1985	Yeşilköy 50. Yıl Anadolu Lisesi
Lisans	1985-1989	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1989-1991	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı
Doktora	1998-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı
Çalıştığı kurumlar		
	1989-1991	Yıldız teknik Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi
	1991-1998	Çeşitli Özel Kolejlerde Matematik öğretmenliği
	1998-Devam	İstanbul Kültür Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü Öğretim Görevlisi