

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Operatör Kat., bir Dif. Ope. Neg.
Özd., Say., Asım., Dav.

Doktora Tezi

Serpil Şengil

2006

209
281

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL
OPERATÖRÜN NEGATİF ÖZDEĞER SAYISININ
ASİMTOTİK DAVRANIŞI**

Yüksek Matematikçi Serpil ŞENGÜL

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 16 Haziran 2006
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Füsün URAS (YTÜ)
Doç. Dr. Ayşe KARA (YTÜ)
Prof. Dr. Semin AKDOĞAN (MÜ)
Prof. Dr. Mustafa BAYRAM (YTÜ)

İSTANBUL, 2006

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC): R209/281

Kayıt No : 3310
Geldiği Yer : Fen Bilim Enst.
Tarih : 14.11.06
Fiyat : 6,24
Fatura No :
Ayniyat No : 1-14
Ek :

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
D.B. No: 77039

VII - 78

**OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL
OPERATÖRÜN NEGATİF ÖZDEĞER SAYISININ
ASİMTOTİK DAVRANIŞI**

Yüksek Matematikçi Serpil ŞENGÜL

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 16 Haziran 2006

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV (YTÜ)

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Füsün URAS (YTÜ)

Doç. Dr. Ayşe KARA (YTÜ)

Prof. Dr. Semir AKDOĞAN (MÜ)

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM (YTÜ)

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
KISALTMA LİSTESİ	iv
TEŞEKKÜR	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	4
2.1 Kapalı ve Kapanabilir Operatörler.....	4
2.2 Yarı Sınırlı Operatörler.....	6
2.3 Bochner İntegrali	7
2.4 $L_2(a, b; H)$ Uzayına Örnekler	10
3. OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN NEGATİF ÖZDEĞER SAYISININ ASİMTOTİK DAVRANIŞI.....	12
3.1 Operatör Katsayılı Bir Diferansiyel İfade ile Oluşturulan Bir Simetrik Operatörün Kendine Eş Bir Genişlemesi Hakkında	12
3.2 L Operatörünün Spektrumunun Negatif Kısımının İncelenmesi	28
3.3 L Operatörünün Negatif Özdeğerlerinin Sayısı İçin Asimtotik Formüller	61
3.4 Örnekler	72
4. SONUÇLAR.....	76
KAYNAKLAR.....	77
ÖZGEÇMİŞ.....	79

SİMGE LİSTESİ

$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi
$R(L)$	L operatörünün değer kümesi
L^*	L nin eşlenik operatörü
$\bar{L}$	L operatörünün kapanışı
$(.,.)$	İç çarpım
$N(\varepsilon)$	L operatörünün $-\varepsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin sayısı
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$\chi_E(x)$	E kümesinin karakteristik fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

B-integrali: Bochner integrali

B-ölçülebilir: Bochner anlamında ölçülebilir

Hhhy : Hemen hemen her yerde

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana yol gösteren, yardım ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV'a, beni bu alanda çalışmaya yönlendiren hocam sayın Prof. Dr. Hamit AVCI'ya, manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen Doç. Dr. Ayşe KARA'ya, Yard. Doç. Dr. Zerrin OER'e, Yard. Doç. Dr. Erhan ÇALIŞKAN'a ve Yonca SEZER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere $[0, \infty)$ aralığında tanımlı ve değerleri H ye ait olan Bochner anlamında ölçülebilir ve

$$\int_0^\infty \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarının kümesini $L_2(0, \infty; H)$ ile gösterelim. $L_2(0, \infty; H)$ kümesi bir lineer uzaydır. Bu uzayın herhangi iki f ve g elemanlarının iç çarpımını

$$(f, g)_{(0, \infty)} = \int_0^\infty (f(x), g(x)) dx$$

formülü ile tanımlarsak $L_2(0, \infty; H)$ sonsuz boyutlu, ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur.

“Operatör Katsayılı Bir Diferansiyel Operatörün Negatif Özdeğer Sayısının Asimtotik Davranışı” adlı bu tez çalışmasında $L_2(0, \infty; H)$ uzayında

$$l(y) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve $\alpha \in (-\infty, \infty)$ bir sabit olmak üzere

$$\cos \alpha \cdot y(0) + \sin \alpha \cdot y'(0) = 0$$

sınır koşuluyla oluşturulan bir diferansiyel operatörün kapanışının kendine eş olduğu ve bu kendine eş operatörün alttan yarı sınırlı olduğu, spektrumunun negatif kısmının ayık olduğu ispatlanmış ve $-\varepsilon$ dan ($\varepsilon > 0$) küçük olan özdeğerlerinin $N(\varepsilon)$ sayısı için $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$N(\varepsilon) = \pi^{-1} [1 + O(\varepsilon^{t_0})] \sum_j \int_{\alpha_j(x) \geq \varepsilon} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx,$$

$$N(\varepsilon) = \pi^{-1} [1 + O(e^{-\varepsilon^{-\beta}})] \sum_j \int_{\alpha_j(x) \geq \varepsilon} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx$$

şeklinde asimtotik formüller bulunmuştur. Bu formüllerde $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots$ ile tam sürekli kendine eş $Q(x): H \rightarrow H$ operatörünün özdeğerleri gösterilmiştir. t_0 ve β pozitif sabitlerdir.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzayı, kendine eş operatör, simetrik operatör, kapalı operatör, kapanabilir operatör, Bochner integrali, özdeğer, ayık spektrum.

ABSTRACT

Let $L_2(0, \infty; H)$ denote the set of all functions f , defined in the interval $[0, \infty)$ with values in an infinite dimensional separable Hilbert space H , which are measurable in the sense of Bochner and satisfy the condition

$$\int_0^{\infty} \|f(x)\|^2 dx < \infty.$$

The set $L_2(0, \infty; H)$ is a linear space. The space $L_2(0, \infty; H)$ becomes an infinite dimensional separable Hilbert space by defining the inner-product for any f and g in $L_2(0, \infty; H)$ as

$$(f, g)_{(0, \infty)} = \int_0^{\infty} (f(x), g(x)) dx.$$

In this thesis, entitled with "Asymptotic Behaviour of the Number of Negative Eigenvalues of a Differential Operator with Operator Coefficient", we prove that the closure of a symmetric operator formed by the differential expression

$$l(y) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x)$$

and the boundary condition

$$\cos \alpha \cdot y(0) + \sin \alpha \cdot y'(0) = 0$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$ is a constant, is self adjoint and this self adjoint operator is semi bounded below and negative part of its spectrum is discrete in the space $L_2(0, \infty; H)$. Moreover, for number $N(\varepsilon)$ of eigenvalues smaller than $-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) we find asymptotic formulas of the form

$$N(\varepsilon) = \pi^{-1} [1 + O(\varepsilon^{t_0})] \sum_{j: \alpha_j(x) \geq \varepsilon} \int \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx$$

$$N(\varepsilon) = \pi^{-1} [1 + O(e^{-\varepsilon^{-\beta}})] \sum_{j: \alpha_j(x) \geq \varepsilon} \int \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx$$

when $\varepsilon \rightarrow 0$. $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots$, in the above formulas, denote the eigenvalues of the operator $Q(x): H \rightarrow H$ which is completely continuous and self adjoint. t_0 and β are positive constants.

Key Words: Hilbert space, self adjoint operator, symmetric operator, closed operator, closable operator, Bochner integral, eigenvalue, discrete spectrum.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada ikinci mertebeden operatör katsayılı bir diferansiyel ifade ile oluşturulan simetrik operatörün kapanışının kendine eş olduğu ve bu kendine eş operatörün alttan yarı sınırlı olduğu, spektrumunun negatif kısmının ayırık olduğu ispatlanmış ve negatif özdeğerlerin sayısı için asimtotik formüller bulunmuştur.

Aşağıda bu tez çalışmasının temel ayrıntılarını vereceğiz:

3.1 H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda iç çarpımı $(\cdot, \cdot)$ ve normu $\|\cdot\|$ ile göstereceğiz. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere (a, b) aralığında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan ve

1 $f : [a, b] \rightarrow H$ fonksiyonu Bochner anlamında ölçülebilirdir.

$$2 \int_a^b \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşullarını sağlayan tüm f fonksiyonlarının kümesini $L_2(a, b; H)$ ile göstereceğiz. $L_2(a, b; H)$ kümesi bir lineer uzaydır. Bu lineer uzayın

$$(f, g)_{(a, b)} = \int_a^b (f(x), g(x)) dx \quad (f, g \in L_2(a, b; H))$$

fonksiyonu ile bir Hilbert uzayı olduğu bilinmektedir. (Kirillov, 1976).

$Q(x)$ her $x \in [0, \infty)$ için H den H ye kendine eş bir operatör olsun. Ayrıca $Q(x)$ operatör fonksiyonun $[0, \infty)$ aralığında $B(H)$ uzayındaki norma göre sürekli bir operatör fonksiyon olduğunu varsayacağız. $p(x)$ $[0, \infty)$ aralığında tanımlı ve sürekli türeve sahip olan bir fonksiyon olsun. $c_1 \leq p(x) \leq c_2$ olacak şekilde c_1 ve c_2 pozitif sabitlerinin var olduğunu kabul edelim. $[0, \infty)$ aralığında H uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olan, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ bir sabit olmak üzere

$$\cos \alpha \cdot y(0) + \sin \alpha \cdot y'(0) = 0$$

koşulunu sağlayan ve ∞ da kompakt desteğe sahip olan tüm $y(x)$ fonksiyonlarının kümesi

$D(L_0)$ olsun. $L_0 : D(L_0) \rightarrow L_2(0, \infty; H)$

$$(L_0 y)(x) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x)$$

operatörünü göz önüne alalım. 3.1 kısmında elde edilen temel sonuç aşağıdaki teoremden ibarettir:

Teorem 3.1.6 : Eğer her $x \in [0, \infty)$ için $Q(x) \leq \beta I$ olacak şekilde bir $\beta \in (-\infty, \infty)$ sabiti varsa $L = \overline{L_0}$ operatörü kendine eşittir. $D(L) \subset L_2(0, \infty; H)$ uzayının

- a) $y(x)$ ve $y'(x)$ her sonlu $[0, a]$ aralığında H uzayındaki norma göre mutlak süreklidir.
- b) $-(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x) \in L_2(0, \infty; H)$
- c) $\cos \alpha \cdot y(0) + \sin \alpha \cdot y'(0) = 0$

koşullarını sağlayan tüm $y = y(x)$ fonksiyonlarından ibarettir. Ayrıca

$$(Ly)(x) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x) \quad y \in D(L) \text{ dir.}$$

3.2 Bu kısımda $Q(x)$ operatör fonksiyonunun bazı ek koşulları sağladığı da varsayılarak $\sin \alpha = 0$ halinde kendine eş L operatörünün alttan yarı sınırlı olduğu, spektrumunun negatif kısmının ayırık olduğu ispatlanmış ve negatif özdeğerlerinin sayısı için bazı eşitsizlikler ispatlanmıştır.

3.3 L operatörünün $-\varepsilon$ dan ($\varepsilon > 0$) küçük olan özdeğerlerinin sayısını $N(\varepsilon)$ ile gösterelim. Ayrıca tam sürekli kendine eş $Q(x) : H \rightarrow H$ operatörünün özdeğerleri $\alpha_1(x) \geq \alpha_2(x) \geq \dots \geq \alpha_j(x) \dots$ olsun. Bu kısımda farklı koşullar altında $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$N(\varepsilon) = \pi^{-1} [1 + O(\varepsilon^{\beta_0})] \sum_{j: \alpha_j(x) \geq \varepsilon} \int \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \quad (1.1)$$

ve

$$N(\varepsilon) = \pi^{-1} [1 + O(e^{-\varepsilon^{-\beta}})] \sum_{j: \alpha_j(x) \geq \varepsilon} \int \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \quad (1.2)$$

şeklinde farklı asimtotik formüller bulunmuştur. Bu formüllerde t_0 ve β pozitif sabitlerdir.

3.3, (1.1) ve (1.2) asimtotik formülleri $Q(x)$ operatör fonksiyonunun farklı koşulları sağladığı varsayılarak bulunmuştur. 3.4 kısmında varsayılan koşulları sağlayan $Q(x)$ operatör fonksiyonuna örnekler verilmiştir.

Çeşitli diferansiyel operatörlerin negatif özdeğer sayısının asimtotik davranışı Skaček, B.Y. (1963); Adıgüzelov, E.E., (1980); Maksudov, F.G., Bayramoğlu, M., Adıgüzelov, E.E., (1993); Avcı, H., (1998) ve Adıgüzelov, E.E., Bakşi, Ö., Bayramov, A., M., (2002) çalışmalarında incelenmiştir. Adıgüzelov, E.E., Oer, Z. (2002) çalışmasında yarı eksende verilmiş Sturm-Liouville operatörünün negatif özdeğerlerinin toplamı için asimtotik formül bulunmuştur. Kostyuchenko, A.G., Levitan, B.M. (1967); Bayramoğlu, M., (1971); Maksudov, F.G., Hüseyinov, V.G., (1978); Aslanov, G.İ., (1984) ve birçok çalışmada saf ayrık spektruma sahip olan operatör katsayılı diferansiyel operatörlerin özdeğer sayısının asimtotik davranışı incelenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Kapalı ve Kapanabilir Operatörler

Tanım 2.1.1 : X ve Y herhangi iki Banach uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$ koşullarını sağlayan her $\{x_n\} \subset D(A)$ dizisi için $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ oluyorsa A ya **kapalı operatör** denir.

Bu tanımdan görüldüğü gibi sınırlı lineer operatörler ile kapalı operatörler arasındaki temel farklar şunlardır:

Eğer $A : D(A) \rightarrow Y$ sınırlı lineer bir operatör ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ koşulunu sağlayan her $\{x_n\} \subset D(A)$ dizisi için $Ax_n \subset Y$ dizisi yakınsaktır. Ancak $\{x_n\} \subset D(A)$ dizisinin yakınsadığı $x \in X$ elemanının $D(A)$ ya ait olması zorunlu değildir. Eğer $A : D(A) \rightarrow Y$ kapalı operatör ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ koşulunu sağlayan her $\{x_n\} \subset D(A)$ dizisi için bu defa $Ax_n \subset Y$ dizisinin yakınsak olması zorunlu değildir. Fakat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$ ise $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ dir.

Teorem 2.1.1 : X ve Y herhangi iki Banach uzayı ve $A : D(A) \rightarrow Y$ ($D(A) \subset X$) sınırlı lineer bir operatör olsun. A operatörünün kapalı olması için gerek ve yeter koşul $D(A)$ nin kapalı olmasıdır.

İspat :

Gereklilik: A operatörünün kapalı olduğunu varsayalım. $x \in D(A)$ nin herhangi bir yığılma noktası olsun. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olacak şekilde bir $\{x_n\} \subset D(A)$ dizisi vardır. A operatörü sürekli olduğundan $\{Ax_n\}$ dizisi bir $y \in Y$ elemanına yakınsar. Yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y .$$

A operatörü kapalı olduğundan $x \in D(A)$ ve $Ax = y$ olmalıdır. Böylece $D(A)$ tüm yığılma noktalarını içerir. $D(A)$ kapalıdır.

Yeterlilik: $D(A)$ nin kapalı olduğunu varsayalım. $\{x_n\} \subset D(A)$; $x \in X$; $y \in Y$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$ olsun. $D(A)$ kapalı olduğundan $x \in D(A)$ dir. Öte yandan A operatörü sürekli olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$ yani $y = Ax$ dir. A operatörü kapalıdır. $\square$

Teorem 2.1.2 : Kapalı bir A operatörünün A^{-1} tersi varsa A^{-1} operatörü de kapalıdır.

İspat: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{-1}y_n = x$$

olsun. Burada $\{y_n\} \subset D(A^{-1}) = R(A)$ $\{x_n\} \subset D(A)$ dir. Ayrıca $Ax_n = y_n$ olsun. Ters operatör tanımından $x_n = A^{-1}y_n$ dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ dir.}$$

A operatörü kapalı olduğundan $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ dir. Böylece, $y \in R(A) = D(A^{-1})$ $x = A^{-1}y$ olup A^{-1} operatörü kapalıdır.

Teorem 2.1.3 : Tanım kümesi kapalı olan her kapalı operatör sınırlıdır.

Tanım 2.1.2 : X ve Y herhangi iki Banach uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow Y$ kapalı olmayan bir lineer operatör olsun. Eğer A nın kapalı bir genişlemesi varsa A ya **kapanabilir operatör** denir.

Eğer A kapanabilir bir operatör ise aşağıdaki özelliklere sahip olan bir $\bar{A}$ operatörü vardır:

- 1) $A \subset \bar{A}$
- 2) $\bar{A}$ operatörü kapalıdır.
- 3) B A nın herhangi bir kapalı genişlemesi ise $\bar{A} \subset B$.

$\bar{A}$ operatörüne A nın kapanışı denir. $\bar{A}$ operatörü şöyle oluşturulabilir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (\{x_n\} \subset D(A))$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$$

ise $x \in D(\bar{A})$ ve $\bar{A}x = y$ kabul edilir.

Teorem 2.1.4 : A^* kapalıdır.

İspat: $x_n \rightarrow x_0$ ($\{x_n\} \subset D(A^*)$) ve $A^*x_n \rightarrow y_0$ olsun. Her $x \in D(A)$ elemanı için

$$(Ax, x_n) = (x, A^*x_n) \quad (x \in D(A))$$

dır. Burada limite geçilirse

$$(Ax, x_0) = (x, y_0) \quad (x \in D(A))$$

elde edilir. Bu bağıntıdan A^* in tanımı gereğince

$$x_0 \in D(A^*) \text{ ve } A^*x_0 = y_0$$

elde edilir. $\square$

A simetrik bir operatör ise $A \subset A^*$ dır. Teorem 2.1.4 gereğince A^* operatörü kapalıdır. Dolayısıyla her simetrik operatör kapanabilirdir.

2.2 Yarı Sınırlı Operatörler

Tanım 2.2.1 : $A: D(A) \rightarrow H$ herhangi bir simetrik operatör olsun. Eğer tüm $x \in D(A)$ elemanları için

$$(Ax, x) \geq c(x, x)$$

olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ sabiti varsa A ya **alttan yarı sınırlı operatör** denir.

Benzer şekilde üstten yarı sınırlı operatörün tanımı verilebilir.

H bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A: D(A) \rightarrow H$ alttan yarı sınırlı, kendine eş

bir operatör olsun. Bir $\alpha \in (-\infty, \infty)$ sabiti için A operatörünün spektrumunun $(-\infty, \alpha)$ aralığına ait olan kısmının sadece özdeğerlerden ibaret olduğunu, her özdeğerin katlılığının sonlu olduğunu ve bu özdeğerler kümesinin α dan küçük olan bir yığılma noktasına sahip olmadığını kabul edelim. Burada özel olarak $\sigma(A) \cap (-\infty, \alpha) = \emptyset$ olabilir. Bu durumda A operatörünün spektrumunun $(-\infty, \alpha)$ aralığına ait olan kısmı ayrıktır denir.

2.3 Bochner İntegrali

Tanım 2.3.1 : H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $f:[a,b] \rightarrow H$ herhangi bir fonksiyon olsun.

Ayrıca $\{E_i\}_1^\infty [a,b] = \bigcup_{i=1}^n E_i$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığının ikişerli ayrık, ölçülebilir alt kümelerinin sonlu bir topluluğu olsun. Eğer f fonksiyonu her E_i kümesinde sabit ise yani hemen hemen her $x \in E_i$ için $f(x) = f_i \in H$ ($i=1,2,\dots,n$) ise f ye **basit fonksiyon** denir ve

$$f(x) = (f_1, E_1; f_2, E_2; \dots; f_n, E_n)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.3.2 : $f(x):[a,b] \rightarrow H$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında tanımlı H değerli basit fonksiyonların hemen hemen her yerde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k(x) - f(x)\| = 0$$

koşulunu sağlayan bir $\{f_k\}_1^\infty$ dizisi varsa f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında **Bochner anlamında ölçülebilir (B-ölçülebilir)** bir fonksiyon denir.

Tanım 2.3.3 : $f(x):[a,b] \rightarrow H$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer her $h \in H$ için $(f(x), h)$ skaler fonksiyonu Lebesgue anlamında ölçülebilir ise f ye $[a,b]$ aralığında **Bochner anlamında zayıf ölçülebilir (zayıf B-ölçülebilir)** bir fonksiyon denir.

Teorem 2.3.1 : Bir $f:[a,b] \rightarrow H$ fonksiyonu ancak ve ancak zayıf B-ölçülebilir ise B-ölçülebilirdir. Yani, $f:[a,b] \rightarrow H$ fonksiyonunun B-ölçülebilir olması ile zayıf B-ölçülebilir olması eş değerdir.

Tanım.2.3.4: $f(x) = (f_1, E_1; f_2, E_2; \dots; f_n, E_n):[a,b] \rightarrow H$ herhangi bir basit fonksiyon olsun.

$\sum_{i=1}^n m(E_i) f_i$ toplamına f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında **Bochner integrali (B-integrali)**

denir ve $(B) \int_a^b f(x) dx$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.5 : $f : [a, b] \rightarrow H$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında tanımlı H değerli basit fonksiyonların

1) $[a, b]$ aralığında $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k(x) - f(x)\| = 0$ dır. Yani f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında B-ölçülebilirdir.

2) $\|f_k(x) - f(x)\|$ ($k=1, 2, \dots$) fonksiyonları $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrale edilebilirdir.

3) $\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_a^b \|f_k(x) - f(x)\| dx = 0$

koşullarını sağlayan bir $\{f_k(x)\}_1^\infty$ dizisi varsa f ye $[a, b]$ aralığında **Bochner anlamında integrale edilebilir (B-integre edilebilir)** bir fonksiyon denir.

Eğer f $[a, b]$ aralığında B-integre edilebilir bir fonksiyon ve $\{f_k(x)\}_1^\infty$ basit fonksiyonların tanım 2.3.5 deki 1), 2) ve 3) koşullarını sağlayan her hangi bir dizisi ise H uzayındaki

norma göre $\lim(B) \int_a^b f_k(x) dx$ limitinin var olduğu ve bu limitin $\{f_k(x)\}_1^\infty$ dizisinin seçimine

bağlı olmadığı ispatlanabilir. (Erugin, 1978)

Tanım 2.3.6 : f $[a, b]$ aralığında B-integrallenebilir bir fonksiyon ve $\{f_k(x)\}_1^\infty$ basit fonksiyonların tanım 2.3.5 deki 1), 2) ve 3) koşullarını sağlayan bir dizisi olsun.

$\lim(B) \int_a^b f_k(x) dx$ limitine f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında **Bochner integrali (B-integrali)**

denir ve $(B) \int_a^b f_k(x) dx$ ile gösterilir.

$E \subset [a, b]$ olsun.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \text{ ise} \\ 0, & x \in [a, b] \setminus E \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonuna E kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 2.3.7 : $f(x):[a,b] \rightarrow H$ $[a,b]$ aralığında B-integrallenebilir herhangi bir fonksiyon ve E $[a,b]$ aralığının ölçülebilir bir alt kümesi olsun. $(B) \int_a^b \chi_E(x)f(x)dx$ integraline f fonksiyonunun E kümesinde **Bochner integrali (B-integrali)** denir ve $(B) \int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.8 : $F(x):[a,b] \rightarrow H$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer h , H uzayının herhangi bir elemanı ve $f(x):[a,b] \rightarrow H$ $[a,b]$ aralığında B-integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$F(x) = h + \int_a^x f(t)dt \quad ; \quad x \in [a,b]$$

ise F fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında **mutlak süreklidir** denir. (Gorbaçuk ve Gorbaçuk, 1984)

H sonsuz boyutlu bir uzay ise mutlak sürekliliğin bu tanımı alışılmış tanıma denk değildir. Eğer $F(x):[a,b] \rightarrow H$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ise yani $h \in H$ ve $f(x):[a,b] \rightarrow H$, $[a,b]$ aralığında B-integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$F(x) = h + \int_a^x f(t)dt \quad ; \quad x \in [a,b]$$

ise $[a,b]$ aralığında $h \in H$ $F'(x) \in H$ türevi vardır ve $F'(x) = f(x)$ $[a,b]$ aralığında $h \in H$ dir.

$F(x):[a,b] \rightarrow H$ mutlak sürekli bir fonksiyon ise

$$\int_a^\beta F'(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

her $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ için Newton-Leibniz formülü sağlanır.

Tanım 2.3.9 ($L_2(a,b;H)$ Uzayı) : H bir ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda iç çarpımı $(\cdot, \cdot)$ ve normu $\|\cdot\|$ ile gösterelim. $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere (a,b) aralığında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan ve

1) $f(x):(a,b) \rightarrow H$ fonksiyonu Bochner anlamında ölçülebilirdir.

$$2) \int_a^b \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşullarını sağlayan tüm f fonksiyonlarının kümesini $L_2(a,b;H)$ ile gösterelim. $L_2(a,b;H)$ kümesi bir lineer uzaydır. Bu lineer uzayın

$$(f, g)_{(a,b)} = \int_a^b (f(x), g(x)) dx \quad (f, g \in L_2(a,b;H))$$

fonksiyonu ile bir Hilbert uzayı olduğu bilinmektedir. H uzayı ayrılabilir ise $L_2(a,b;H)$ uzayı da ayrılabilir (Kirillov, 1976). $L_2(a,b;H)$ uzayında normu $\| \cdot \|_{(a,b)}$ ile göstereceğiz.

2.4 $L_2(a,b;H)$ Uzayına Örnekler

1) $H = \mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$ olsun. Bu durumda $L_2(a,b;H)$ uzayı reel $L_2(a,b)$ uzayı olacaktır.

2) $H = l_2$ olsun. Bu durumda $L_2(a,b;H)$ uzayı $f_1, f_2, \dots$ (a,b) aralığında tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$i) \text{ her } t \in (a,b) \text{ için } \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(t)|^2 < \infty$$

$$ii) \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(t)|^2 \right] dt < \infty$$

koşullarını sağlayan tüm $x(t) = \{f_i(t)\}_1^{\infty}$ vektör fonksiyonlarının oluşturduğu kümedir ve $L_2(a,b;H)$ de iç çarpım

$$(x, y)_{(a,b)} = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(t) \overline{g_i(t)}| \right] dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada $y = \{g_i(t)\}_1^{\infty} \in L_2(a,b;H)$ dır.

3) $H = L_2(c,d)$ $(-\infty \leq c < d \leq \infty)$ olsun. Bu taktirde $L_2(a,b;H)$ uzayı $(a,b) \times (c,d)$ kümesinde tanımlı, ölçülebilir

$$\int_a^b \left[\int_c^d |u(x,t)|^2 dt \right] dx < \infty$$

veya

$$\int_a^b \int_c^d |u(x,t)|^2 dx dt < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm $u(x,t)$ fonksiyonlarının kümesidir. $L_2(a,b;H)$ in herhangi iki $u=u(x,t)$ ve $v=v(x,t)$ fonksiyonlarının iç çarpımı

$$(u,v)_{(a,b)} = \int_a^b \left(\int_c^d u(x,t) \overline{v(x,t)} dt \right) dx$$

şeklinde tanımlanır.

3. OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN NEGATİF ÖZDEĞER SAYISININ ASİMTOTİK DAVRANIŞI

3.1 Operatör Katsayılı Bir Diferansiyel İfade ile Oluşturulan Bir Simetrik Operatörün Kendine Eş Bir Genişlemesi Hakkında

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $Q(x)$ her $x \in [0, \infty)$ için H den H ye kendine eş bir operatör olsun. Ayrıca $Q(x)$ in $[0, \infty)$ aralığında $B(H)$ uzayındaki norma göre sürekli bir operatör fonksiyon olduğunu varsayacağız. $p(x)$ $[0, \infty)$ aralığında tanımlı ve sürekli türe ve sahip olan bir fonksiyon olsun. $c_1 \leq p(x) \leq c_2$ olacak şekilde c_1 ve c_2 pozitif sabitlerinin var olduğunu kabul edelim. $[0, \infty)$ aralığında H uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türe ve sahip olan, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ bir sabit olmak üzere

$$\cos \alpha \cdot y(0) + \sin \alpha \cdot y'(0) = 0 \quad (3.1)$$

koşulunu sağlayan ve ∞ da kompakt desteğe sahip olan tüm $y(x)$ fonksiyonlarının kümesi $D(L_0)$ olsun. $L_0 : D(L_0) \rightarrow L_2(0, \infty; H)$

$$(L_0 y)(x) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x) \quad (3.2)$$

operatörünü göz önüne alalım. $\overline{D(L_0)} = L_2(0, \infty; H)$ dir. Her $y, z \in D(L_0)$ için $x \geq b$ iken $y^{(i)}(x) = z^{(i)}(x) = 0$ ($i = 0, 1, 2$) olacak şekilde y ve z ye bağlı bir $b \in (0, \infty)$ sayısı vardır.

Kısmi integrasyondan yararlanarak

$$\begin{aligned} (L_0 y, z)_{(0, \infty)} &= \int_0^\infty \left(-(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x), z(x) \right) dx \\ &= -(p(x)y'(x), z(x)) \Big|_0^b + \int_0^b (p(x)y'(x), z'(x)) dx - \int_0^b (y(x), Q(x)z(x)) dx \\ &= p(0)(y'(0), z(0)) + (y(x), p(x)z'(x)) \Big|_0^b - \int_0^b (y(x), (p(x)z'(x))') dx - \int_0^b (y(x), Q(x)z(x)) dx \end{aligned}$$

$$= p(0)(y'(0), z(0)) - p(0)(y(0), z'(0)) + \int_0^b \left(y(x), -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x) \right) dx \quad (3.3)$$

elde edilir.

$$(y'(0), z(0)) - (y(0), z'(0)) = 0 \quad (3.4)$$

olduğunu gösterelim. $\cos \alpha = 0$ iken (3.1) sınır koşulu $y'(0) = 0$ haline gelir. Bu durumda (3.4) eşitliğinin sağlandığı açıktır. $\cos \alpha \neq 0$ halinde

$$y(0) = -y'(0) \tan \alpha \quad (3.5)$$

$$z(0) = -z'(0) \tan \alpha \quad (3.6)$$

dır. Dolayısıyla

$$(y'(0), z(0)) - (y(0), z'(0)) = -\tan \alpha (y'(0), z'(0)) + \tan \alpha (y'(0), z'(0)) = 0 \quad (3.7)$$

dır. Görüldüğü gibi her $\alpha \in (-\infty, \infty)$ sabiti için (3.4) eşitliği sağlanır. (3.3) ve (3.4) ten

$$(L_0 y, z)_{(0, \infty)} = (y, L_0 z)_{(0, \infty)} \quad (3.8)$$

bulunur. Böylece L_0 in bir simetrik operatör olduğunu gösterdik. Dolayısıyla L_0 operatörü $\overline{L_0}$ kapanışına sahiptir. Burada bazı koşullar altında $\overline{L_0}$ operatörünün kendine eş olduğunu ispatlayacağız. Bunun için önce L_0 operatörünün eşleniği olan L_0^* operatörünü incelemek gerekiyor.

Teorem 3.1.1 : $f(x)$, $a \leq x \leq b$ değerleri H uzayına ait olan ve

a) $[a, b]$ aralığında $f(x)$ H uzayındaki norma göre mutlak sürekli türeve sahiptir.

b) $f''(x) \in L_2(a, b; H)$

c) $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer $h(x) \in L_2(a, b; H)$ a), b) ve c) koşullarını sağlayan her $f(x)$ için

$$\int_a^b (f''(x), h(x)) dx = 0 \quad (3.9)$$

eşitliğini sağlayan bir fonksiyon ise

$$h(x) = g + xe \quad (3.10)$$

dir. Burada g ve e H nin sabit elemanlarıdır.

İspat: $f''(t) = \lambda(t)$ olsun. O zaman $f'(x) = \int_a^x \lambda(t) dt$, $f(x) = \int_a^x (x-t)\lambda(t) dt$ dir.

Dolayısıyla c) koşulundan

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda(t) dt &= 0 \\ \int_a^b t\lambda(t) dt &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. Karşıt olarak bir $\lambda(t) \in L_2(a, b; H)$ fonksiyonu (3.11) koşullarını sağlıyorsa

$$f(x) = \int_a^x (x-t)\lambda(t) dt \text{ fonksiyonu a), b) ve c) koşullarını sağlar. Eğer } h(t) \in L_2(a, b; H)$$

fonksiyonu (3.11) koşullarını sağlamıyorsa

$$h_1(t) = h(t) - g - te \quad (3.12)$$

fonksiyonu (3.11) koşullarını sağlayacak şekilde $g, e \in H$ vardır. Gerçekten g ve e nin bulunması için

$$\int_a^b h_1(t) dt = \int_a^b h(t) dt - (b-a)g - \frac{(b-a)^2}{2}e = 0 \quad (3.13)$$

$$\int_a^b th_1(t) dt = \int_a^b th(t) dt - \frac{(b-a)^2}{2}g - \frac{(b-a)^3}{3}e = 0 \quad (3.14)$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan

$$g = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(t) dt - \frac{b-a}{2}e \quad (3.15)$$

$$\int_a^b th(t) dt - \frac{(b-a)^2}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b h(t) dt - \frac{b-a}{2}e \right] - \frac{(b-a)^3}{3}e = 0 \quad (3.16)$$

$$\int_a^b th(t)dt - \frac{b-a}{2} \int_a^b h(t)dt + \frac{(b-a)^3}{4} e - \frac{(b-a)^3}{3} e = 0 \quad (3.17)$$

$$e = \frac{12}{(b-a)^3} \int_a^b th(t)dt - \frac{6}{(b-a)^2} \int_a^b h(t)dt \quad (3.18)$$

$$g = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(t)dt - \frac{6}{(b-a)^2} \int_a^b th(t)dt + \frac{3}{b-a} \int_a^b h(t)dt \quad (3.19)$$

bulunur. (3.9) eşitliği

$$\int_a^b (\lambda(x), h(x))dx = 0 \quad (3.20)$$

şeklinde yazılabilir. (3.11) ve (3.12) den yararlanarak

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda(x), h_1(x))dx &= \int_a^b (\lambda(x), h(x) - g - xe)dx \\ &= \int_a^b (\lambda(x), h(x))dx - \int_a^b (\lambda(x), g)dx - \int_a^b (x\lambda(x), e)dx \\ &= \int_a^b (\lambda(x), h(x))dx - \left(\int_a^b \lambda(x)dx, g \right) - \left(\int_a^b x\lambda(x)dx, e \right) \\ &= \int_a^b (\lambda(x), h(x))dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.20) eşitliği

$$\int_a^b (\lambda(x), h_1(x))dx = 0 \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin (3.11) koşullarını sağlayan her $\lambda(x) \in L_2(a, b; H)$ fonksiyonu için sağlandığını hatırlatalım. $h_1(x)$ (3.11) koşullarını sağladığından (3.22) de $\lambda(x) = h_1(x)$ alınabilir. O takdirde

$$\int_a^b \|h_1(x)\|^2 dx = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir. Buradan $h_1(x)=0$ ya da $h(x)=g+xe$ bulunur. Dolayısıyla $L_2(a,b;H)$ uzayının elemanı olarak $h(x)=g+xe$ dir. $\square$

$[0,\infty)$ aralığında kompakt desteğe, H uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türe ve sahip olan ve $\alpha \in (-\infty,\infty)$ bir sabit olmak üzere (3.1) sınır koşulunu sağlayan tüm $y(t)$ fonksiyonlarının kümesi $D(L_0)$ olsun. Ayrıca

$$A = \{y(0) : y \in D(L_0)\}$$

$$B = \{y'(0) : y \in D(L_0)\}$$

olsun.

Teorem 3.1.2 : $\sin \alpha \neq 0$ ise $A = H$ ve $\cos \alpha \neq 0$ ise $B = H$ dir.

İspat : g H nin keyfi bir elemanı olsun. Önce $\sin \alpha \neq 0$ olduğunu varsayalım. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f(x)$ skaler fonksiyonu vardır:

- 1) $f(x)$ ($0 \leq x < \infty$) fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli türe ve sahiptir.
- 2) $f(0)=1$, $f'(0)=-\cot \alpha$
- 3) Her $x \geq a$ için $f(x)=0$ olacak şekilde bir $a \in (0,\infty)$ sayısı vardır.

$y(x)=f(x)g$ olsun. $y(x) \in D(L_0)$ dir. Gerçekten $y(x)$ ($0 \leq x < \infty$) fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında H uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türe ve sahiptir, her $x \geq a$ için $y(x)=0$ ve

$$\cos \alpha .y(0)+\sin \alpha .y'(0)=\cos \alpha f(0)g+\sin \alpha f'(0)g=\cos \alpha g+\sin \alpha \left(-\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)g=0$$

dir. Ayrıca $y(0)=f(0).g=g$ dir. Yani; $g \in A$ dir. Bu nedenle $A = H$ dir.

Bu kez $\cos \alpha \neq 0$ olduğunu varsayalım. 1) , 3) ve

$$4) \quad \varphi(0)=-\tan \alpha \quad , \quad \varphi'(0)=1$$

koşullarını sağlayan bir $\varphi(x)$ ($0 \leq x < \infty$) fonksiyonu vardır. $y(x) = \varphi(x) \cdot g$ olsun. $y(x) \in D(L_0)$ dir. Çünkü $y(x)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında H uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türeve sahiptir. Her $x \geq a$ için $y(x) = 0$ ve

$$\cos \alpha \cdot y(0) + \sin \alpha \cdot y'(0) = \cos \alpha \varphi(0)g + \sin \alpha \varphi'(0)g = \cos \alpha \left(-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) g + \sin \alpha g = 0$$

dir. Yani $y(x) \in D(L_0)$ dir. Öte yandan $y'(0) = \varphi'(0) \cdot g = g$ olduğundan $g \in B$ dir. Sonuç olarak $B = H$ dir. $\square$

$[0, \infty)$ aralığında H uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olan, $y(0) = y'(0) = 0$ koşullarını sağlayan ve ∞ da kompakt desteğe sahip olan tüm $y(t) \in L_2(0, \infty; H)$ fonksiyonlarının kümesini $D(L_1)$ ile gösterelim. $L_1 : D(L_1) \rightarrow L_2(0, \infty; H)$

$$(L_1 y)(x) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x)$$

operatörünü göz önüne alalım. L_1 bir simetrik operatördür. L_0^* operatörünü incelemek için önce teorem 3.1.1 den yararlanarak L_1^* operatörünü inceleyeceğiz.

Teorem 3.1.3 : Her $z = z(x) \in D(L_1^*)$ fonksiyonu ;

a) $z(x)$ ve $z'(x)$ her sonlu $[0, a]$ aralığında H uzayındaki norma göre mutlak süreklidir.

$$b) -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x) \in L_2(0, \infty; H)$$

koşullarını sağlıyor ve

$$(L_1^* z)(x) = -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x)$$

dir.

İspat : Eşlenik operatörün tanımı gereğince eğer $z = z(x) \in D(L_1^*)$ ise

$$(L_1 y, z)_{(0, \infty)} = (y, z^*)_{(0, \infty)} \quad (y \in D(L_1)) \quad (3.24)$$

olacak şekilde bir $z^* = z^*(x) \in L_2(0, \infty; H)$ vardır. (3.24) eşitliği

$$\int_0^{\infty} \left(- (p(x)y'(x))' - Q(x)y(x), z(x) \right) dx = \int_0^{\infty} (y(x), z^*(x)) dx \quad (3.25)$$

ya da

$$u(x) = Q(x)z(x) + z^*(x) \quad (3.26)$$

olmak üzere

$$- \int_0^{\infty} \left((p(x)y'(x))', z(x) \right) dx = \int_0^{\infty} (y(x), u(x)) dx \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir. Her $x \geq b$ için $y(x) = y'(x) = 0$ olacak şekilde bir $b \in (0, \infty)$ sayısının

var olduğunu göz önüne alarak ve kısmi integrasyondan yararlanarak

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left((p(x)y'(x))', z(x) \right) dx &= \int_0^b (p'(x)y'(x), z(x)) dx + \int_0^b (p(x)y''(x), z(x)) dx \\ &= \int_0^b \left(y'(x), \left(\int_0^x p'(t)z(t) dt \right)' \right) dx + \int_0^b (y''(x), p'(x)z(x)) dx \\ &= \left(y'(x), \int_0^x p'(t)z(t) dt \right) \Big|_0^b - \int_0^b \left(y''(x), \int_0^x p'(t)z(t) dt \right) dx + \int_0^b (y''(x), p(x)z(x)) dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(y''(x), p(x)z(x) - \int_0^x p'(t)z(t) dt \right) dx \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (y(x), u(x)) dx &= \int_0^b \left(y(x), \left(\int_0^x u(t) dt \right)' \right) dx \\ &= \left(y(x), \int_0^x u(t) dt \right) \Big|_0^b - \int_0^b \left(y'(x), \int_0^x u(t) dt \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^b \left(y'(x), \int_0^x \left(\int_0^t u(\tau) d\tau \right)' dt \right) dx \\
&= - \left(y'(x), \int_0^x \left(\int_0^t u(\tau) d\tau \right) dt \right) \Big|_0^b + \int_0^b \left(y''(x), \int_0^x \left(\int_0^t u(\tau) d\tau \right) dt \right) dx \\
&= \int_0^b \left(y''(x), t \int_0^t u(\tau) d\tau \Big|_0^x - \int_0^x t u(t) dt \right) dx \\
&= \int_0^b \left(y''(x), \int_0^x (x-t) u(t) dt \right) dx \tag{3.29}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.27), (3.28), ve (3.29) dan

$$- \int_0^\infty \left(y''(x), p(x)z(x) - \int_0^x p'(t)z(t)dt \right) dx = \int_0^\infty \left(y''(x), \int_0^x (x-t)u(t)dt \right) dx \tag{3.30}$$

ya da

$$\int_0^\infty \left(y''(x), -p(x)z(x) + \int_0^x p'(t)z(t)dt - \int_0^x (x-t)u(t)dt \right) dx = 0 \tag{3.31}$$

bulunur. (3.31) eşitliği kompakt desteğe, H uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olan ve $y(0) = y'(0) = 0$ koşullarını sağlayan her $y(x) \in L_2(0, \infty; H)$ fonksiyonu için sağlandığından teorem 3.1.1 gereğince

$$-p(x)z(x) + \int_0^x p'(t)z(t)dt - \int_0^x (x-t)u(t)dt = g + xe \tag{3.32}$$

dir. Burada $g \in H$ ve $e \in H$, $z = z(x) \in D(L_1^*)$ fonksiyonuna bağlı olan elemanlardır.

(3.32) den $z(x)$ in her sonlu $[0, a]$ aralığında mutlak sürekli olduğu görülmektedir. (3.32)

eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$-p'(x)z(x) - p(x)z'(x) + p'(x)z(x) - \int_0^x u(t)dt = e \tag{3.33}$$

elde edilir. Buradan $z'(x)$ fonksiyonunun da her sonlu aralıkta H uzayındaki norma göre mutlak sürekli olduğu görülmektedir. (3.33) ten

$$-(p(x)z'(x))' - u(x) = 0 \quad (3.34)$$

ya da

$$u(x) = Q(x)z(x) + z^*(x)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$-(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x) = z^*(x) \quad (3.35)$$

bulunur. Buradan $-(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x) \in L_2(0, \infty; H)$ ve

$$(L_1^* z)(x) = -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x) \quad (3.36)$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.4 : $D(L_0^*)$ kümesi $L_2(0, \infty; H)$ uzayının

a) $z(x)$ ve $z'(x)$ her sonlu $[0, a]$ ($a \in (0, \infty)$) aralığında H uzayındaki norma göre mutlak süreklidir.

b) $-(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x) \in L_2(0, \infty; H)$

c) $\cos \alpha \cdot z(0) + \sin \alpha \cdot z'(0) = 0$

koşullarını sağlayan tüm $z = z(x)$ fonksiyonlarından ibarettir ve

$$(L_0^* z)(x) = -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x)$$

dir.

İspat : $L_1 \subset L_0$ olduğundan $L_0^* \subset L_1^*$ dir. O halde teorem 3.1.3 den her $z = z(x) \in D(L_0^*)$ fonksiyonunun a.) ve b.) koşullarını sağladığı ve

$$(L_0^* z)(x) = (L_1^* z)(x) = -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x) \quad (3.37)$$

elde edilir. Her $z \in D(L_0^*)$ için c.) koşulunun sağlandığını gösterelim. Eşlenik operatörün tanımını gereğince $z \in D(L_0^*)$ ise

$$\begin{aligned} (L_0 y, z)_{(0, \infty)} &= - \int_0^{\infty} \left((p(x)y'(x))' + Q(x)y(x), z(x) \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} (y(x), z^*(x)) dx = (y, z^*)_{(0, \infty)} \quad (y \in D(L_0)) \end{aligned} \quad (3.38)$$

dır. Kısmi integrasyondan yararlanarak

$$\begin{aligned} - \int_0^{\infty} \left((p(x)y'(x))', z(x) \right) dx &= - (p(x)y'(x), z(x)) \Big|_0^b + \int_0^b (p(x)y'(x), z'(x)) dx \\ &= (p(0)y'(0), z(0)) + (y(x), p(x)z'(x)) \Big|_0^b - \int_0^b (y(x), (p(x)z'(x))') dx \\ &= p(0)(y'(0), z(0)) - p(0)(y(0), z'(0)) - \int_0^{\infty} (y(x), (p(x)z'(x))') dx \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir. (3.38) ve (3.39) dan

$$\begin{aligned} p(0)(y'(0), z(0)) - p(0)(y(0), z'(0)) - \int_0^{\infty} (y(x), (p(x)z'(x))') dx - \int_0^{\infty} (Q(x)y(x), z(x)) dx \\ = \int_0^{\infty} (y(x), z^*(x)) dx \end{aligned} \quad (3.40)$$

ya da

$$\begin{aligned} p(0)(y'(0), z(0)) - p(0)(y(0), z'(0)) + \int_0^{\infty} \left(y(x), -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x) \right) dx \\ = (y, L_0^* z)_{(0, \infty)} \end{aligned} \quad (3.41)$$

bulunur. (3.37) ve (3.41) den

$$p(0)(y'(0), z(0)) - p(0)(y(0), z'(0)) + (y, L_0^* z)_{(0, \infty)} = (y, L_0^* z)_{(0, \infty)} \quad (3.42)$$

ya da

$$(y'(0), z(0)) - (y(0), z'(0)) = 0 \quad (y \in D(L_0)) \quad (3.43)$$

elde edilir. Eğer $\sin \alpha \neq 0$ ise (3.1) sınır koşulundan

$$y'(0) = -\cot \alpha \cdot y(0) \quad (3.44)$$

bulunur. Bu ifade (3.43) de yerine konursa

$$(-\cot \alpha \cdot y(0), z(0)) - (y(0), z'(0)) = 0 \quad (3.45)$$

ya da

$$(y(0), \cos \alpha \cdot z(0) + \sin \alpha \cdot z'(0)) = 0, \quad (y \in D(L_0)) \quad (3.46)$$

elde edilir. Teorem 3.1.2 gereğince $\sin \alpha \neq 0$ ise $A = \{y(0) : y \in D(L_0)\} = H$ dir. Son iki bağıntıdan

$$\cos \alpha \cdot z(0) + \sin \alpha \cdot z'(0) = 0 \quad (3.47)$$

bulunur.

Eğer $\cos \alpha \neq 0$ ise (3.1) koşulundan

$$y(0) = -\tan \alpha \cdot y'(0) \quad (3.48)$$

elde edilir. Bu ifade (3.43) de yerine yazılırsa

$$(y'(0), z(0)) + (\tan \alpha \cdot y'(0), z'(0)) = 0 \quad (3.49)$$

ya da

$$(y'(0), \cos \alpha \cdot z(0) + \sin \alpha \cdot z'(0)) = 0, \quad (y \in D(L_0)) \quad (3.50)$$

elde edilir. Teorem 3.1.2 gereğince $\cos \alpha \neq 0$ ise $B = \{y'(0) : y \in D(L_0)\} = H$ dir. Yine son iki bağıntıdan

$$\cos \alpha \cdot z(0) + \sin \alpha \cdot z'(0) = 0 \quad (3.51)$$

bulunur. İspatın tamamlanması için a), b) ve c) koşullarını sağlayan her $z(x) \in L_2(0, \infty; H)$

fonksiyonunun $D(L_0^*)$ kümesine ait olduğunu ve $(L_0^* z)(x) = -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x)$ olduğunu göstermek gerekir. $y \in D(L_0)$ ve z a.), b.) ve c.) koşullarını sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. Her $x \geq b$ için $y(x) = y'(x) = 0$ olacak şekilde bir $b \in (0, \infty)$ vardır. Bunu göz önüne alarak ve yine kısmi integrasyondan yararlanarak

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty (p(x)y'(x))', z(x) dx &= (p(x)y'(x), z(x)) \Big|_0^b - \int_0^b (p(x)y'(x), z'(x)) dx \\
 &= -p(0)(y'(0), z(0)) - p(x)(y(x), z'(x)) \Big|_0^b + \int_0^b (y(x), (p(x)z'(x))') dx \\
 &= p(0)(y(0), z'(0)) - p(0)(y'(0), z(0)) + \int_0^\infty (y(x), (p(x)z'(x))') dx
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

elde edilir.

$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, $z(0)\cos\alpha + z'(0)\sin\alpha = 0$ koşullarından $\cos\alpha \neq 0$ halinde

$y(0) = -y'(0)\tan\alpha$, $z(0) = -z'(0)\tan\alpha$ bulunur. Dolayısıyla

$$(y(0), z'(0)) - (y'(0), z(0)) = -\tan\alpha(y'(0), z'(0)) + \tan\alpha(y'(0), z'(0)) = 0 \tag{3.53}$$

elde edilir. (3.52) ve (3.53) ten

$$\int_0^\infty (p(x)y'(x))', z(x) dx = \int_0^\infty (y(x), (p(x)z'(x))') dx \tag{3.54}$$

bulunur. Bu eşitlikten yararlanarak

$$\begin{aligned}
 (L_0 y, z)_{(0, \infty)} &= \int_0^\infty (-(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x), z(x)) dx \\
 &= \int_0^\infty (y(x), -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x)) dx = (y, L_0^* z)_{(0, \infty)}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

elde edilir. Buradan görülüyor ki $z = z(x) \in L_2(0, \infty; H)$ fonksiyonu a.), b) ve c) koşullarını

sağlıyorsa $z \in D(L_0^*)$ ve $(L_0^* z)(x) = -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x)$ dir. $\square$

Teorem 3.1.5: Her $x \in [0, \infty)$ için $Q(x) \leq \beta I$ olacak şekilde bir $\beta \in \mathfrak{R}$ sabitinin var olduğunu kabul edelim. Eğer $y(x) \in L_2(0, \infty; H)$ fonksiyonu

a) $y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonları her sonlu $[0, a]$ ($a \in (0, \infty)$) aralığında H uzayındaki norma göre mutlak süreklidir.

b) $l(y) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x) \in L_2(0, \infty; H)$

koşullarını sağlıyorsa $y'(x) \in L_2(0, \infty; H)$ dir.

İspat: Kısmi integrasyondan yararlanarak her $a \in (0, \infty)$ için

$$\int_0^a \left((p(x)y'(x))', y(x) \right) dx = (p(x)y'(x), y(x)) \Big|_0^a - \int_0^a p(x) \|y'(x)\|^2 dx \quad (3.56)$$

ya da

$$\int_0^a \left((p(x)y'(x))', y(x) \right) dx + \int_0^a p(x) \|y'(x)\|^2 dx = p(a)(y'(a), y(a)) - p(0)(y'(0), y(0)) \quad (3.57)$$

bulunur. $y \in L_2(0, \infty; H)$ ve $l(y) \in L_2(0, \infty; H)$ olmasından

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_0^a \left((p(x)y'(x))', y(x) \right) dx + \int_0^a (Q(x)y(x), y(x)) dx \right] \quad (3.58)$$

sonlu limitinin varlığı elde edilir.

$$\int_0^a (Q(x)y(x), y(x)) dx = \int_0^a ((Q(x) - \beta I)y(x), y(x)) dx + \beta \int_0^a \|y(x)\|^2 dx \quad (3.59)$$

dir. $((Q(x) - \beta I)y(x), y(x)) \leq 0$ olduğundan

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a ((Q(x) - \beta I)y(x), y(x)) dx \quad (3.60)$$

limiti vardır. Bu limit ya sonludur ya da $-\infty$ dur. O halde $y(x) \in L_2(0, \infty; H)$ olduğu yani

$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \|y(x)\|^2 dx$ limitinin sonlu olduğu göz önüne alınırsa (3.59) dan

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a (Q(x)y(x), y(x)) dx \quad (3.61)$$

limitinin varlığı elde edilir. (3.60) limitinin sonlu ya da $-\infty$ olmasına bağlı olarak (3.61) limiti sonlu ya da $-\infty$ dur. O halde sonlu (3.58) limitinin varlığından

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \left((p(x)y'(x))', y(x) \right) dx \quad (3.62)$$

sonlu limitinin varlığı ya da

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^a \left((p(x)y'(x))', y(x) \right) dx = \infty \quad (3.63)$$

elde edilir. Sonlu (3.62) limitini varlığını gösterelim. Aksini varsayalım. O halde (3.63) eşitliği sağlanır. (3.57) ve (3.63) den

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(y'(a), y(a)) = \infty \quad (3.64)$$

bulunur. Öte yandan

$$\left(\|y(a)\|^2 \right)' = (y(a), y(a))' = (y'(a), y(a)) + (y(a), y'(a)) = 2 \operatorname{Re}(y'(a), y(a)) \quad (3.65)$$

dır. (3.64) ve (3.65) den

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\|y(a)\|^2 \right)' = \infty \quad (3.66)$$

elde edilir. O halde bir $[b, \infty)$ ($b \in (0, \infty)$) aralığında $\|y(x)\|^2$ fonksiyonu monoton artandır. Bu sonuç $y(x) \in L_2(0, \infty; H)$ olmasına aykırıdır. Dolayısıyla sonlu (3.62) limiti vardır. O halde (3.57) den

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a p(x) \|y'(x)\|^2 dx = \int_0^\infty p(x) \|y'(x)\|^2 dx < \infty \quad (3.67)$$

bulunur. $p(x) \geq c_1 > 0$ olduğu göz önüne alınırsa (3.67) den

$$\int_0^\infty \|y'(x)\|^2 dx < \infty \quad (3.68)$$

yani $y'(x) \in L_2(0, \infty; H)$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.6: Eğer her $x \in [0, \infty)$ için $Q(x) \leq \beta I$ olacak şekilde bir $\beta \in (-\infty, \infty)$ sabiti varsa $L = \overline{L_0}$ operatörü kendine eşitir ve $D(L) \subset L_2(0, \infty; H)$ uzayının

a.) $y(x)$ ve $y'(x)$ her sonlu $[0, a]$ aralığında H uzayındaki norma göre mutlak süreklidir.

b.) $-(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x) \in L_2(0, \infty; H)$

c.) $\cos \alpha \cdot y(0) + \sin \alpha \cdot y'(0) = 0$

koşullarını sağlayan tüm $y = y(x)$ fonksiyonlarından ibarettir. Ayrıca

$$(Ly)(x) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x), \quad y \in D(L)$$

dir.

İspat: y ve $z \in D(L_0^*)$ kümesinin herhangi iki elemanı olsun. Teorem 3.1.4 gereğince $y(x), z(x) \in L_2(0, \infty; H)$,

$$-(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x), -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x) \in L_2(0, \infty; H) \quad (3.69)$$

dir. O halde teorem 3.1.5 gereğince $y'(x), z'(x) \in L_2(0, \infty; H)$ dir. Dolayısıyla $(y'(x), z(x)), (y(x), z'(x)) \in L_1[0, \infty)$ dur. Bu nedenle $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(y'(a_n), z(a_n)) - (y(a_n), z'(a_n))] = 0 \quad (3.70)$$

olacak şekilde bir $\{a_n\}$ dizisi vardır. Bu $\{a_n\}$ dizisi için

$$\begin{aligned} (L_0^* y, z)_{(0, \infty)} &= \int_0^\infty \left(-(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x), z(x) \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{a_n} \left(-(p(x)y'(x))', z(x) \right) dx - \int_0^{a_n} (Q(x)y(x), z(x)) dx \end{aligned} \quad (3.71)$$

dir. Ayrıca $\cos \alpha \cdot y(0) + \sin \alpha \cdot y'(0) = \cos \alpha \cdot z(0) + \sin \alpha \cdot z'(0) = 0$ koşullarından yararlanarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^{a_n} \left((p(x)y'(x))', z(x) \right) dx = (p(x)y'(x), z(x)) \Big|_0^{a_n} - (y(x), p(x)z'(x)) \Big|_0^{a_n} + \int_0^{a_n} (y(x), (p(x)z'(x))') dx \\
& = p(0)[(y(0), z'(0)) - (y'(0), z(0))] + p(a_n)[(y'(a_n), z(a_n)) - (y(a_n), z'(a_n))] \\
& \quad + \int_0^{a_n} (y(x), (p(x)z'(x))') dx \\
& = p(a_n)[(y'(a_n), z(a_n)) - (y(a_n), z'(a_n))] + \int_0^{a_n} (y(x), (p(x)z'(x))') dx \tag{3.72}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.70), (3.71) ve (3.72) den

$$\begin{aligned}
(L_0^* y, z)_{(0, \infty)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ p(a_n)[(y'(a_n), z(a_n)) - (y(a_n), z'(a_n))] \\
& \quad + \int_0^{a_n} (y(x), -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x)) dx \} \\
&= \int_0^\infty (y(x), -(p(x)z'(x))' - Q(x)z(x)) dx = (y, L_0^* z)_{(0, \infty)} \tag{3.73}
\end{aligned}$$

bulunur. Görüldüğü gibi L_0^* bir simetrik operatördür. Dolayısıyla

$$L_0^* \subset (L_0^*)^* \tag{3.74}$$

dır. Öte yandan L_0 da bir simetrik operatör olduğundan $L_0 \subset L_0^*$ dır. Bu durumda

$$(L_0^*)^* \subset L_0^* \tag{3.75}$$

olduğu bilinmektedir. (3.74) ve (3.75) den

$$L_0^* = (L_0^*)^* \tag{3.76}$$

elde edilir. Yani L_0^* operatörü kendine eşittir. Diğer taraftan

$$(L_0^*)^* = \overline{L_0} \tag{3.77}$$

olduğu bilinmektedir. (3.76) ve (3.77) den

$$\overline{L_0} = L_0^* \quad (3.78)$$

bulunur. Böylece $L = \overline{L_0} = L_0^*$ operatörü kendine eştir ve teorem 3.1.4 gereğince $D(L) = D(\overline{L_0})$ $L_2(0, \infty; H)$ uzayının a.), b.) ve c.) koşullarını sağlayan $y(x)$ fonksiyonlarından ibarettir. Ayrıca

$$(Ly)(x) = (\overline{L_0}y)(x) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x) \quad (3.79)$$

dir. $\square$

3.2 L Operatörünün Spektrumunun Negatif Kısımının İncelenmesi

Bu bölümde $\sin \alpha = 0$ halinde kendine eş L operatörünün spektrumunun negatif kısmının ayrık olduğunu ve $-\varepsilon$ dan ($\varepsilon > 0$) küçük olan öz değerlerin sayısı için bazı eşitsizlikler ispatlayacağız.

Teorem 3.1.6. gereğince $D(L)$ $L_2(0, \infty; H)$ uzayının

a) $y(x)$ ve $y'(x)$ her sonlu $[0, a]$ aralığında H uzayındaki norma göre mutlak süreklidir.

b) $l(y) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x) \in L_2(0, \infty; H)$

c) $y(0) = 0$

koşullarını sağlayan tüm $y = y(x)$ fonksiyonlarının kümesidir ve her $y \in D(L)$ için

$$(Ly)(x) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x)$$

dir. L ye $L_2(0, \infty; H)$ uzayında

$$l(y) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x) \quad (3.80)$$

diferansiyel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan operatör diyeceğiz.

Teorem 3.2.1 : $\|Q(x)\|$ fonksiyonu sınırlı ise her $y \in D(L)$ için $(p(x)y'(x))' \in L_2(0, \infty; H)$ ve

$$-\int_0^{\infty} \left((p(x)y'(x))', y(x) \right) dx = \int_0^{\infty} p(x) \|y'(x)\|^2 dx \quad (3.81)$$

dir.

İspat: $\|Q(x)\| < c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. Dolayısıyla

$$\int_0^{\infty} \|Q(x)y(x)\|^2 dx \leq \int_0^{\infty} \|Q(x)\|^2 \|y(x)\|^2 dx \leq c^2 \int_0^{\infty} \|y(x)\|^2 dx < \infty \quad (3.82)$$

dır. Yani $Q(x)y(x) \in L_2(0, \infty; H)$ dir. O halde $-(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x) \in L_2(0, \infty; H)$ olmasından $-(p(x)y'(x))' \in L_2(0, \infty; H)$ elde edilir. Ayrıca teorem 3.1.5 gereğince $y'(x) \in L_2(0, \infty; H)$ dir. O halde $(p(x)y'(x), y(x)) \in L_1(0, \infty)$ dur. Bu nedenle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (p(a_n)y'(a_n), y(a_n)) = 0 \quad (3.83)$$

koşullarını sağlayan bir $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ dizisi vardır. Kısmi integrasyondan yararlanarak ve $y(0) = 0$ olduğunu göz önüne alarak

$$\begin{aligned} \int_0^{a_n} \left((p(x)y'(x))', y(x) \right) dx &= (p(x)y'(x), y(x)) \Big|_0^{a_n} - \int_0^{a_n} (p(x)y'(x), y'(x)) dx \\ &= (p(a_n)y'(a_n), y(a_n)) - \int_0^{a_n} p(x) \|y'(x)\|^2 dx \end{aligned} \quad (3.84)$$

elde edilir. (3.83) ve (3.84) ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{a_n} \left((p(x)y'(x))', y(x) \right) dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{a_n} p(x) \|y'(x)\|^2 dx \quad (3.85)$$

ya da

$$-\int_0^{\infty} ((p(x)y'(x))', y(x)) dx = \int_0^{\infty} p(x) \|y'(x)\|^2 dx \quad (3.86)$$

bulunur. $\square$

Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

1. Her $x \in [0, \infty)$ için $Q(x) : H \rightarrow H$ tam sürekli kendine eş ve pozitif bir operatördür.
2. $Q(x)$ monoton azalandır.
3. $Q(x)$ $B(H)$ uzayındaki norma göre süreklidir ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \|Q(x)\| = 0$ dır.
4. $c_1 \leq p(x) \leq c_2$ olacak şekilde c_1 ve c_2 pozitif sabitleri vardır.
5. $p(x)$ fonksiyonu sürekli ve sınırlı türeve sahiptir.
6. $p(x)$ fonksiyonu azalmayıdır.

Tezin bundan sonraki bölümlerinde 1.,2.,...,6. koşulları dendiğinde bu koşulların kastedildiği anlaşılmalıdır.

Teorem 3.2.2 : $U = U(x)$ bir (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ aralığında tanımlı ve değerleri normlu lineer bir $(X, \|\cdot\|)$ uzayına ait olan bir vektör fonksiyon olsun. Eğer U fonksiyonu $\|\cdot\|$ normuna göre sürekli ise $\|U(x)\|$ skaler fonksiyonu süreklidir.

İspat: Her $x, y \in [0, \infty)$ için

$$\|U(x)\| = \|U(x) - U(y) + U(y)\| \leq \|U(x) - U(y)\| + \|U(y)\|$$

dir. Bu bağıntıdan

$$\|U(x)\| - \|U(y)\| \leq \|U(x) - U(y)\| \quad (3.87)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $x, y \in [0, \infty)$ için sağlandığından

$$\|U(y)\| - \|U(x)\| \leq \|U(y) - U(x)\| \quad (3.88)$$

dir. (3.87) ve (3.88) den

$$\|U(x)\| - \|U(y)\| \leq \|U(x) - U(y)\| \quad (3.89)$$

bulunur. Bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\|U(x + \Delta x)\| - \|U(x)\| \leq \|U(x + \Delta x) - U(x)\| \quad (3.90)$$

elde edilir. $U(x)$ operatör fonksiyonu $B(H)$ uzayındaki norma göre sürekli olduğundan yani

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|U(x + \Delta x) - U(x)\| = 0 \text{ olduğundan} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|\|U(x + \Delta x)\| - \|U(x)\|\| = 0 \text{ ya da}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|U(x + \Delta x) - U(x)\| = 0 \quad (3.91)$$

elde edilir. $\square$

$Q(x)$ operatör fonksiyonu 3. koşulunu sağlıyorsa teorem 3.2.2 den her $x \in [0, \infty)$ için $\|Q(x)\| < c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabitinin varlığı elde edilir. Bu durumda her $y \in L_2(0, \infty; H)$ için

$$\int_0^\infty \|Q(x)y(x)\|^2 dx \leq \int_0^\infty \|Q(x)\|^2 \|y(x)\|^2 dx \leq c^2 \int_0^\infty \|y(x)\|^2 dx = c^2 \|y\|^2 \quad (3.92)$$

dir. Görüldüğü gibi $Q : L_2(0, \infty; H) \rightarrow L_2(0, \infty; H)$

$$(Qy)(x) = Q(x)y(x) \quad (3.93)$$

lineer operatörü sınırlıdır. Dolayısıyla 3. koşulu sağlandığı takdirde her $y \in D(L)$ için

$$-(p(x)y'(x))' \in L_2(0, \infty; H) \text{ dir.}$$

Teorem 3.2.3 : 1., 3., 4. ve 5. koşulları sağlandığı taktide L operatörü alttan yarı sınırlıdır ve spektrumunun negatif kısmı ayrıktır.

İspat: $L_2(0, \infty; H)$ uzayında

$$l_0(y) = -y''(x) - c_1^{-1}Q(x)y(x) \quad (3.94)$$

ifadesi ve $y(0)=0$ sınır koşulu ile oluşturulan kendine eş operatörü L_{01} ile gösterelim. $y, D(L)$ nin herhangi bir elemanı olsun. Teorem 3.1.5 gereğince $y'(x) \in L_2(0, \infty; H)$ dir. Öte yandan $p(x)$ fonksiyonu 5. koşulunu sağladığından $p'(x)y'(x) \in L_2(0, \infty; H)$ dir. O halde

$$(p(x)y'(x))' = p'(x)y'(x) + p(x)y''(x) \quad (3.95)$$

formülünden $p(x)y''(x) \in L_2(0, \infty; H)$ elde edilir. $p(x) \geq c_1$ olduğundan

$$\int_0^\infty \|y''(x)\|^2 dx \leq c_1^{-1} \int_0^\infty \|p(x)y''(x)\|^2 dx < \infty \quad (3.96)$$

dir. Yani $y''(x) \in L_2(0, \infty; H)$ dir. Böylece $y \in D(L)$ ise $y \in D(L_{01})$ olduğunu gösterdik.

Benzer şekilde $y \in D(L_{01})$ ise $y \in D(L)$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla $D(L) = D(L_{01})$ dir.

Teorem 3.2.1 i L_{01} operatörüne uygularsak her $y \in D(L_{01})$ için

$$\int_0^{\infty} \|y'(x)\|^2 dx = - \int_0^{\infty} (y''(x), y(x)) dx \quad (3.97)$$

bulunur. Bu eşitlikten ve 3. koşulunun sağlanmasından yararlanarak her $y \in D(L_{01})$ için

$$\begin{aligned} (L_{01}y, y)_{(0,\infty)} &= \int_0^{\infty} (-y''(x) - c_1^{-1}Q(x)y(x), y(x)) dx \\ &= - \int_0^{\infty} (y''(x), y(x)) dx - c_1^{-1} \int_0^{\infty} (Q(x)y(x), y(x)) dx \\ &\geq \int_0^{\infty} \|y'(x)\|^2 dx - c_1^{-1} \int_0^{\infty} \|Q(x)\| \|y\|^2 dx \geq -c_1^{-1}c \int_0^{\infty} \|y\|^2 dx = -c_1^{-1}c(y, y)_{(0,\infty)} \end{aligned} \quad (3.98)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi L_{01} operatörü alttan yarı sınırlıdır.

Teorem 3.2.1 den yararlanarak her $y \in D(L) = D(L_{01})$ için

$$\begin{aligned} (Ly, y)_{(0,\infty)} &= \int_0^{\infty} \left(- (p(x)y'(x))' - Q(x)y(x), y(x) \right) dx \\ &= - \int_0^{\infty} \left((p(x)y'(x))', y(x) \right) dx - \int_0^{\infty} (Q(x)y(x), y(x)) dx \\ &= \int_0^{\infty} p(x) \|y'(x)\|^2 dx - \int_0^{\infty} (Q(x)y(x), y(x)) dx \\ &\geq c_1 \left[\int_0^{\infty} \|y'(x)\|^2 dx - \int_0^{\infty} (c_1^{-1}Q(x)y(x), y(x)) dx \right] \\ &= c_1 \left[- \int_0^{\infty} (y''(x), y(x)) dx - \int_0^{\infty} (c_1^{-1}Q(x)y(x), y(x)) dx \right] \end{aligned}$$

$$= c_1 \int_0^{\infty} (-y''(x) - c_1^{-1} Q(x)y(x), y(x)) dx = (c_1 L_{01} y, y)_{(0, \infty)} \quad (3.99)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$L \geq c_1 L_{01} \quad (3.100)$$

dır. Bu bağıntıdan ve L_{01} operatörünün alttan yarı sınırlı olmasından L operatörünün de alttan yarı sınırlı olması elde edilir. L_{01} operatörünün spektrumunun negatif kısmının ayrık olduğu bilinmektedir (Yafaev, 1970). Yani L_{01} operatörünün spektrumunun negatif kısmı sadece özdeğerlerden ibarettir. Her özdeğerin katlılığı sonludur ve negatif özdeğerler kümesi bir tek sıfır yığılma noktasına sahip olabilir. Söz konusu operatörün negatif özdeğerleri $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n, \dots$ olsun. O halde $c_1 L_{01}$ operatörünün negatif özdeğerleri $-c_1 \lambda_1, -c_1 \lambda_2, \dots, -c_1 \lambda_n, \dots$ olacaktır. $\lambda \neq -c_1 \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots$) yani $\frac{\lambda}{c_1} \neq -\lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots$)

koşulunu sağlayan her $\lambda \in (-\infty, 0)$ sayısı için $(c_1 L_{01} - \lambda I)^{-1}$ ters operatörü var ve

$$(c_1 L_{01} - \lambda I)^{-1} = c_1^{-1} \left(L_{01} - \frac{\lambda}{c_1} I \right)^{-1} \quad (3.101)$$

dir. $\frac{\lambda}{c_1} \in \rho(L_{01})$ olduğundan $\left(L_{01} - \frac{\lambda}{c_1} I \right)^{-1}$ kendine eş operatörü $L_2(0, \infty; H)$ uzayında tanımlı ve sınırlıdır. O halde (3.101) den $(c_1 L_{01} - \lambda I)^{-1}$ operatörünün de $L_2(0, \infty; H)$ uzayında tanımlı ve sınırlı olduğu sonucu elde edilir. Görüldüğü gibi $c_1 L_{01}$ operatörünün negatif özdeğeri olmayan her $\lambda \in (-\infty, 0)$ sayısı bu operatörün bir regüler değeridir. Dolayısıyla $c_1 L_{01}$ operatörünün de spektrumunun negatif kısmı ayrıktır. O halde (3.100) den L operatörünün spektrumunun negatif kısmının ayrık olduğu elde edilir (Smirnov, 1964).□

$Q(x): H \rightarrow H$ operatörünün özdeğerleri $\alpha_1(x) \geq \alpha_2(x) \geq \dots \geq \alpha_j(x) \geq \dots$ olsun. Her $x \in [0, \infty]$ için $Q(x) > 0$ olduğundan $\alpha_j(x) > 0$ ($j = 1, 2, \dots$) dir. Ayrıca $\alpha_1(x) = \sup_{\|f\|=1} (Q(x)f, f)$

(Cohberg ve Krein, 1969) ve $\|Q(x)\| = \sup_{\|f\|=1} |(Q(x)f, f)| = \sup_{\|f\|=1} (Q(x)f, f)$ (Lysternik ve

Sobolev, 1955) olduğundan $\alpha_1(x) = \|Q(x)\|$ dir. O halde teorem 3.2.2 den dolayı $\alpha_1(x)$

fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli. $Q(x)$ operatör fonksiyonu monoton azalan olduğundan $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_j(x), \dots$ fonksiyonları monoton azalandır (Adıgüzelov, 1980).

Öte yandan $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_1(x) = 0$ olduğundan α_1 fonksiyonunun görüntü kümesi $(0, \alpha_1(0)]$ aralığıdır. Dolayısıyla α_1 fonksiyonu $(0, \alpha_1(0)]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan ters fonksiyona sahiptir. Bu ters fonksiyonu ψ_1 ile gösterelim. $\varepsilon \in (0, \alpha_1(0)]$ olmak üzere aşağıdaki operatörleri göz önüne alalım:

1) $L_2(\psi_1(\varepsilon), \infty; H)$ uzayında (3.80) ifadesi ve $y'(\psi_1(\varepsilon)) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan operatör L_{02} olsun.

2) $L_2(0, \psi_1(\varepsilon); H)$ uzayında (3.80) ifadesi ve

$$y(0) = y(\psi_1(\varepsilon)) = 0,$$

$$y'(0) = y'(\psi_1(\varepsilon)) = 0$$

sınır koşullarıyla oluşturulan operatörler sırasıyla L_1 ve L_2 olsun.

3) $L_2(x_{i-1}, x_i; H)$ uzayında (3.80) ifadesi ve

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0,$$

$$y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = 0$$

sınır koşullarıyla oluşturulan operatörler sırasıyla $L_{(1)\varepsilon}$ ve $L_{(2)\varepsilon}$ olsun. Teorem 3.2.1 in ispatına benzer şekilde aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

Teorem 3.2.4 : 3., 4. ve 5. koşulları sağlandığı takdirde her $y \in D(L_{02})$ için

$$-\int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} ((p(x)y'(x))', y(x)) dx = \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} p(x) \|y'(x)\|^2 dx$$

dir.

Teorem 3.2.5 : 1., 2., 3., 4. ve 5. koşulları sağlanıyorsa her $y \in D(L_{02})$ için

$$(L_{02}y, y)_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} \geq -\varepsilon (y, y)_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)}$$

dır.

İspat: Her $y \in D(L_{02})$ için

$$\begin{aligned} (L_{02}y, y)_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} &= \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (-(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x), y(x)) dx \\ &= - \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} ((p(x)y'(x))', y(x)) dx - \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (Q(x)y(x), y(x)) dx \end{aligned} \quad (3.102)$$

dır. Teorem 3.2.4 gereğince

$$- \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} ((p(x)y'(x))', y(x)) dx = \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} p(x) \|y'(x)\|^2 dx \quad (3.103)$$

dır. Ayrıca

$$(Q(x)y(x), y(x)) \leq \|Q(x)y(x)\| \|y(x)\| \leq \|Q(x)\| \|y(x)\|^2 = \alpha_1(x) \|y(x)\|^2 \quad (3.104)$$

dır. (3.102), (3.103) ve (3.104) ten

$$(L_{02}y, y)_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} \geq \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} p(x) \|y'(x)\|^2 dx - \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} \alpha_1(x) \|y(x)\|^2 dx \geq - \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} \alpha_1(x) \|y(x)\|^2 dx \quad (3.105)$$

bulunur. α_1 fonksiyonu azalan olduğundan $[\psi_1(\varepsilon), \infty)$ aralığında

$$\alpha_1(x) \leq \alpha_1(\psi_1(\varepsilon)) = \varepsilon \quad (3.106)$$

dır. (3.105) ve (3.106) dan

$$(L_{02}y, y)_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} \geq -\varepsilon(y, y) \quad (3.107)$$

elde edilir. $\square$

L , L_1 ve L_2 operatörlerinin $-\varepsilon$ dan ($\varepsilon > 0$) küçük olan özdeğerlerinin sayısı sırasıyla $N(\varepsilon)$, $N_1(\varepsilon)$ ve $N_2(\varepsilon)$ olsun. Ayrıca L operatörünün negatif özdeğerleri $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörleri sırasıyla $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ olsun.

Aşağıdaki operatörleri göz önüne alalım:

$$S = L + \varepsilon I, \quad S_1 = L_1 + \varepsilon I, \quad S_2 = L_2 + \varepsilon I$$

Burada S ifadesindeki I $L_2(0, \infty; H)$ uzayında, S_1 ve S_2 nin ifadesindeki I da $L_2(0, \psi_1(\varepsilon); H)$ uzayındaki birim operatörlerdir.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N(\varepsilon)} < -\varepsilon \quad \text{ve} \quad \lambda_{N(\varepsilon)+1} \geq -\varepsilon \quad (3.108)$$

dır. S operatörünün ε dan küçük özdeğerleri

$$\mu_i = \lambda_i + \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3.109)$$

olduğundan (3.108) den $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{N(\varepsilon)} < 0$, $\mu_{N(\varepsilon)+1} \geq 0$ elde edilir. Buradan S operatörünün negatif özdeğerler sayısının $N(\varepsilon)$ olduğu görülmektedir. Benzer şekilde S_1 operatörünün negatif özdeğerler sayısının $N_1(\varepsilon)$ ve S_2 operatörünün negatif özdeğerler sayısının da $N_2(\varepsilon)$ olduğu gösterilebilir. S_1 ve S_2 operatörlerinin negatif özdeğerleri sırasıyla $\mu_{(1)1} \leq \mu_{(1)2} \leq \dots \leq \mu_{(1)N_1(\varepsilon)}$ ve $\mu_{(2)1} \leq \mu_{(2)2} \leq \dots \leq \mu_{(2)N_2(\varepsilon)}$, bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörleri de sırasıyla $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_1(\varepsilon)}$ ve $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_2(\varepsilon)}$ olsun.

Teorem 3.2.6 : 1., 2., 3., 4. ve 5. koşulları sağlanıyorsa $N(\varepsilon) \geq N_1(\varepsilon)$ dir.

İspat: Aksini varsayıp $N(\varepsilon) < N_1(\varepsilon)$ olduğunu kabul edelim. O halde $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_1(\varepsilon)}$ vektörlerinin

$$(u_i, \varphi)_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = \int_0^{\psi_1(\varepsilon)} (u_i(x), \varphi(x)) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)) \quad (3.110)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \beta_i \varphi_i$$

lineer kombinasyonu vardır.

$$(S_1 \varphi, \varphi)_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = \left(S_1 \left(\sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \beta_i \varphi_i \right), \sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \beta_i \varphi_i \right)_{(0, \psi_1(\varepsilon))} \quad (3.111)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \beta_i \mu_{(1)i} \varphi_i, \sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \beta_i \varphi_i \right)_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = \sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \mu_{(1)i} |\beta_i|^2 = \alpha < 0 \quad (3.112)$$

dır. (Glazman, 1965) dekine benzer şekilde aşağıdaki özelliklere sahip olan bir $\tilde{\varphi}$ vektör fonksiyonunun var olduğu gösterilebilir:

1) $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(x)$ vektör fonksiyonu $[0, \psi_1(\varepsilon)]$ aralığında H uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türevelere sahiptir.

2) Bir $[a, b] \subset (0, \psi_1(\varepsilon))$ aralığının dışında $\tilde{\varphi}(x)$ sıfırdır.

$$3) \left| (S_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_{(0, \psi_1(\varepsilon))} - (S_1 \varphi, \varphi)_{(0, \psi_1(\varepsilon))} \right| < -\frac{\alpha}{2}$$

$$4) (u_i, \tilde{\varphi})_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon))$$

Bilindiği gibi

$$\inf_{y \in D(S), \|y\|_{(0, \infty)} = 1, y \perp u_i \ (i=1, 2, \dots, N(\varepsilon))} (Sy, y)_{(0, \infty)} = \mu_{N(\varepsilon)+1} \quad (3.113)$$

dır. Dolayısıyla

$$\left(S_1 \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|} \right), \frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|} \right)_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = \left(S \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|} \right), \frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|} \right)_{(0, \infty)} \geq \mu_{N(\varepsilon)+1} \geq 0 \quad (3.114)$$

dır. Buradan

$$(S_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_{(0, \psi_1(\varepsilon))} \geq 0 \quad (3.115)$$

elde edilir. (3.112) ve (3.115) den

$$(S_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_{(0, \psi_1(\varepsilon))} - (S_1 \varphi, \varphi)_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = (S_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_{(0, \psi_1(\varepsilon))} - \alpha \geq -\alpha \quad (3.116)$$

bulunur. Öte yandan yukarıda

$$\left| (S_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_{(0, \psi_1(\varepsilon))} - (S_1 \varphi, \varphi)_{(0, \psi_1(\varepsilon))} \right| < -\frac{\alpha}{2}$$

idi. Bu son iki bağıntı birbiri ile çelişmektedir. Dolayısıyla $N(\varepsilon) \geq N_1(\varepsilon)$ olmalıdır. $\square$

Teorem 3.2.7 : 1., 2., 3., 4. ve 5. koşulları sağlanıyorsa $N(\varepsilon) \leq N_2(\varepsilon)$ dir.

İspat: Yine aksini varsayıp $N(\varepsilon) > N_2(\varepsilon)$ olduğunu kabul edelim. O takdirde $u_1, u_2, \dots, u_{N(\varepsilon)}$ vektör fonksiyonlarının

$$(\psi_i, u)_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = \int_0^{\psi_1(\varepsilon)} (\psi_i(x), u(x)) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N_2(\varepsilon)) \quad (3.117)$$

koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir

$$u = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} d_i u_i \quad (3.118)$$

lineer kombinasyonu vardır.

$$\begin{aligned} (Su, u)_{(0, \infty)} &= \left(S \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} d_i u_i \right), \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} d_i u_i \right)_{(0, \infty)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} d_i \mu_i u_i, \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} d_i u_i \right)_{(0, \infty)} = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i |d_i|^2 < 0 \end{aligned} \quad (3.119)$$

dır. Bu ifade

$$(Su, u)_{(0, \infty)} = \int_0^{\psi_1(\varepsilon)} (S(u(x)), u(x)) dx + \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (S(u(x)), u(x)) dx < 0 \quad (3.120)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (S(u(x)), u(x)) dx \geq 0 \quad (3.121)$$

olduğunu gösterelim. $\int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} \|u(x)\|_{(0, \infty)}^2 dx = 0$ ise

$$\begin{aligned} \left| \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (S(u(x)), u(x)) dx \right| &\leq \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (S(u(x)), u(x)) dx \leq \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} \|S(u(x))\| \|u(x)\| dx \\ &\leq \left(\int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} \|S(u(x))\|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} \|u(x)\|^2 dx \right)^{1/2} = 0 \end{aligned} \quad (3.122)$$

dır. Buradan

$$\int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (Su(x), u(x)) dx = 0 \quad (3.123)$$

elde edilir. (3.121) eşitsizliğini $\int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} \|u(x)\|^2 dx > 0$ halinde de ispatlayalım. Aksini varsayıp

$$\int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (S(u(x)), u(x)) dx < 0 \quad (3.124)$$

olduğunu kabul edelim. (3.124) ten

$$\inf_{y \in D(S), \|y\|_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} = 1} \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (S(y(x)), y(x)) dx < 0 \quad (3.125)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\inf_{y \in D(S), y'(\psi_1(\varepsilon)) = 0, \|y\|_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} = 1} \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (S(y(x)), y(x)) dx = \inf_{y \in D(S), \|y\|_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} = 1} \int_{\psi_1(\varepsilon)}^{\infty} (S(y(x)), y(x)) dx \quad (3.126)$$

olduğu bilinmektedir. (3.125) ve (3.126) dan

$$\inf_{y \in D(L_{02}), \|y\|_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} = 1} ((L_{02} + \varepsilon I)y, y)_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} < 0 \quad (3.127)$$

ya da

$$\inf_{y \in D(L_{02}), \|y\|_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} = 1} (L_{02}y, y)_{(\psi_1(\varepsilon), \infty)} < -\varepsilon \quad (3.128)$$

bulunur. Bu sonuç teorem 3.2.5 e aykırıdır. Dolayısıyla (3.121) eşitsizliği sağlanmalıdır.

(3.120) ve (3.121) den

$$\int_0^{\psi_1(\varepsilon)} (S(u(x)), u(x)) dx < 0 \quad (3.129)$$

bulunur.

$$(u, \psi_i)_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = \int_0^{\psi_1(\varepsilon)} (u(x), \psi_i(x))_{(0, \infty)} dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N_2(\varepsilon))$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.129) dan

$$\inf_{y \in D(S), \|y\|_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = 1, y \perp \psi_i (i=1, 2, \dots, N_2(\varepsilon))} \int_0^{\psi_1(\varepsilon)} (S(y(x)), y(x)) dx < 0 \quad (3.130)$$

elde edilir. (3.130) dan

$$\inf_{y \in D(S), \|y\|_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = 1, y'(0) = y'(\psi_1(\varepsilon)) = 0, y \perp \psi_i (i=1, 2, \dots, N_2(\varepsilon))} \int_0^{\psi_1(\varepsilon)} (S(y(x)), y(x)) dx < 0 \quad (3.131)$$

bulunur. Buradan da

$$\inf_{y \in D(S_2), \|y\|_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = 1, y \perp \psi_i (i=1, 2, \dots, N_2(\varepsilon))} \int_0^{\psi_1(\varepsilon)} (S_2(y(x)), y(x)) dx < 0 \quad (3.132)$$

elde edilir. Öte yandan

$$\inf_{y \in D(S_2), \|y\|_{(0, \psi_1(\varepsilon))} = 1, y \perp \psi_i (i=1, 2, \dots, N_2(\varepsilon))} \int_0^{\psi_1(\varepsilon)} (S_2(y(x)), y(x)) dx = \mu_{(2)(N_2(\varepsilon)+1)} \geq 0 \quad (3.133)$$

dır. Ortaya çıkan bu çelişki $N(\varepsilon) > N_2(\varepsilon)$ eşitsizliğinin sağlanamayacağını yani $N(\varepsilon) \leq N_2(\varepsilon)$ olduğunu gösterir. $\square$

$[0, \psi_1(\varepsilon)]$ aralığını uzunlukları

$$\delta = \frac{\psi_1(\varepsilon)}{\lceil \psi_1^k(\varepsilon) \rceil + 1} \quad (3.134)$$

olan parçalara bölelim. Burada $k \in (0, 1)$ aralığına ait olan sabit bir sayı ve $\varepsilon, \psi_1^k(\varepsilon) \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir pozitif sayıdır. $\lceil \psi_1^k(\varepsilon) \rceil$ ile $\psi_1^k(\varepsilon)$ sayısının tam kısmı gösterilmiştir. $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_M = \psi_1(\varepsilon)$, $[0, \psi_1(\varepsilon)]$ aralığının bölüntü noktaları olsun. Ayrıca $L_2(x_{i-1}, x_i; H)$ uzayında $-p(x_i)y''(x) - Q(x_i)y(x)$ ifadesi ve $y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0$ sınır koşulları ile oluşturulan operatör $L_{(1)}$, $-p(x_{i-1})y''(x) - Q(x_{i-1})y(x)$ ifadesi ve $y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = 0$ sınır koşulları ile oluşturulan operatör de $L_{(2)}$ olsun.

Teorem 3.2.8 : 2., 4., 5. ve 6. koşulları sağlanıyorsa $L_{(1)k} < L_{(1)}$ ve $L_{(2)k} > L_{(2)}$ dir.

İspat: $y \in D(L_{(1)})$ olsun. O halde $y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonları $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında H

uzayındaki norma göre mutlak sürekli ve $y''(x) \in L_2(x_{i-1}, x_i; H)$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|(p(x)y'(x))'\|^2 dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|p'(x)y'(x) + p(x)y''(x)\|^2 dx \\
 &\leq 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|p'(x)y'(x)\|^2 dx + 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|p(x)y''(x)\|^2 dx \\
 &= 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |p'(x)| \|y'(x)\|^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} |p(x)| \|y''(x)\|^2 dx
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

dir. $p'(x)$ sürekli olduğundan

$$|p'(x)| < \text{const} \tag{3.136}$$

dir. $y'(x)$ fonksiyonu H uzayındaki norma göre sürekli olduğundan teorem 3.2.2 gereğince

$\|y'(x)\|$ skaler fonksiyonu $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında sürekli ve Dolayısıyla bu aralıkta

$$\|y'(x)\|^2 < \text{const} \tag{3.137}$$

dir. (3.135), (3.136) ve (3.137) den

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|(p(x)y'(x))'\|^2 dx \leq \text{const} + \text{const} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|y''(x)\|^2 dx < \text{const} \tag{3.138}$$

bulunur. Görüldüğü gibi $y \in D(L_{(i)})$ ise $y \in D(L_{(i)})$ dir. Yani

$$D(L_{(i)}) \subset D(L_{(i)}) \tag{3.139}$$

dir. Her $y \in D(L_{(i)})$ ve $y \neq 0$ için

$$\begin{aligned}
 (L_{(i)}, y, y)_{(x_{i-1}, x_i)} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x), y(x)) dx \\
 &= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} ((p(x)y'(x))', y(x)) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Q(x)y(x), y(x)) dx = (p(x)y'(x), y(x)) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)(y'(x), y'(x)) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Q(x)y(x), y(x)) dx \\
& = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \|y'(x)\|^2 dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Q(x)y(x), y(x)) dx
\end{aligned} \tag{3.140}$$

dir. $p(x)$ fonksiyonu monoton azalmayan ve $Q(x)$ operatör fonksiyonu monoton azalan olduğundan (3.140) dan

$$\begin{aligned}
(L_{(1)i}, y, y)_{(x_{i-1}, x_i)} & < \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x_i) \|y'(x)\|^2 dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Q(x_i)y(x), y(x)) dx \\
& = p(x_i)(y'(x), y(x)) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (y''(x), y(x)) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Q(x_i)y(x), y(x)) dx \\
& = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-p(x_i)y''(x) - Q(x_i)y(x), y(x)) dx = (L_{(1)i}, y, y)_{(x_{i-1}, x_i)}
\end{aligned} \tag{3.141}$$

elde edilir. (3.139) ve (3.141) den $L_{(1)i} < L_{(1)}$ bulunur.

Bu kez $L_{(2)i} > L_{(2)}$ olduğunu gösterelim. $y \in D(L_{(2)i})$ olsun. Bu halde yine $y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonları H uzayındaki norma göre mutlak süreklidir ve $(p(x)y'(x))' \in L_2(x_{i-1}, x_i; H)$ dir. $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında

$$\begin{aligned}
\|(p(x)y'(x))'\| & = \|p'(x)y'(x) + p(x)y''(x)\| \\
& \geq \|p(x)y''(x)\| - \|p'(x)y'(x)\| = |p(x)| \|y''(x)\| - |p'(x)| \|y'(x)\| \\
& \geq p(x_{i-1}) \|y''(x)\| - \text{const}
\end{aligned} \tag{3.142}$$

dir. Buradan

$$(p(x_{i-1}) \|y''(x)\|)^2 \leq (\|(p(x)y'(x))'\| + \text{const})^2 \leq 2\|(p(x)y'(x))'\|^2 + \text{const} \tag{3.143}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x_{i-1}) \|y''(x)\|^2 dx \leq 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|(p(x)y'(x))'\|^2 dx + const < const \quad (3.144)$$

Böylece $y \in D(L_{(2)l})$ ise $y \in D(L_{l(2)})$ olduğunu yani

$$D(L_{(2)l}) \subset D(L_{l(2)}) \quad (3.145)$$

olduğunu gösterdik. Her $y \in D(L_{(2)l})$ için, $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} (L_{l(2)}y, y)_{(x_{i-1}, x_i)} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-p(x_{i-1})y''(x) - Q(x_{i-1})y(x), y(x)) dx \\ &= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (p(x_{i-1})y''(x), y(x)) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Q(x_{i-1})y(x), y(x)) dx \\ &= -(p(x_{i-1})y'(x), y(x))_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x_{i-1})(y'(x), y'(x)) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Q(x_{i-1})y(x), y(x)) dx \\ &< \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)(y'(x), y'(x)) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Q(x)y(x), y(x)) dx \\ &= p(x)(y'(x), y(x))_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} ((p(x)y'(x))', y(x)) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Q(x)y(x), y(x)) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x), y(x)) dx = (L_{(2)l}y, y)_{(x_{i-1}, x_i)} \end{aligned} \quad (3.146)$$

bulunur. (3.145) ve (3.146) dan $L_{(2)l} > L_{l(2)}$ elde edilir. $\square$

$L_{l(1)}$ operatörünün özdeğerlerini bulalım. Bunun için $x_{i-1} = a$, $x_i = b$, $p(x_i) = d$ olmak üzere $L_2[a, b]$ uzayında $-du''(x)$ ifadesi ve $u(a) = u(b) = 0$ sınır koşullarıyla oluşturulan A operatörünü göz önüne alalım. λ , A operatörünün bir özdeğeri ve $f(x)$ bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü olsun. Ayrıca γ , $Q(b): H \rightarrow H$ operatörünün bir özdeğeri ve ϕ de bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü olsun. $f(x)\phi \in L_2(a, b; H)$ dir. $f(x)\phi$ vektör

fonksiyonunun H uzayındaki norma göre türevi $f'(x)\varphi$ dir. Gerçekten

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x + \Delta x)\varphi - f(x)\varphi}{\Delta x} - f'(x)\varphi \right\| &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|\varphi\| \left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right| \\ &= \|\varphi\| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right| = 0 \end{aligned} \quad (3.147)$$

dır. Dolayısıyla

$$(f(x)\varphi)'' = (f'(x)\varphi)' = f''(x)\varphi \quad (3.148)$$

dir. $f'(x)$ in $[a, b]$ de mutlak sürekli olmasından yararlanarak kolayca görülebilir ki

$(f(x)\varphi)' = f'(x)\varphi$ vektör fonksiyonu H uzayındaki norma göre mutlak sürekli dir. Öte yandan $f''(x) \in L_2[a, b]$ olduğundan

$$\int_a^b \|f''(x)\varphi\|^2 dx = \|\varphi\|^2 \int_a^b |f''(x)|^2 dx < \infty \quad (3.149)$$

dur. Yani $(f(x)\varphi)'' \in L_2(a, b; H)$ dir. Ayrıca

$$f(a)\varphi = f(b)\varphi = 0$$

olduğundan $f(x)\varphi \in D(L_{(1)})$ dir. $(Af)(x) = -df''(x) = \lambda f(x)$ ve $Q(b)\varphi = \gamma\varphi$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} L_{(1)}(f(x)\varphi) &= -d(f(x)\varphi)'' - Q(b)(f(x)\varphi) = -df''(x)\varphi - f(x)Q(b)\varphi \\ &= \lambda f(x)\varphi - \gamma f(x)\varphi = (\lambda - \gamma)f(x)\varphi \end{aligned} \quad (3.150)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $\lambda - \gamma$ $L_{(1)}$ operatörünün bir özdeğeri ve $f(x)\varphi$ de bu özdeğere karşılık gelen bir özvektördür. Dolayısıyla $L_{(1)}$ operatörünün özdeğerlerini bulmak için A operatörünün veya bir başka deyişle

$$-du''(x) = \lambda u(x), \quad (3.151)$$

$$u(a) = u(b) = 0 \quad (3.152)$$

sınır değer probleminin özdeğerlerini bulmak gerekir. (3.151) denkleminin genel çözümü k_1 ve k_2 herhangi sabitler olmak üzere

$$u(x) = k_1 \cos \sqrt{\lambda d^{-1}} x + k_2 \sin \sqrt{\lambda d^{-1}} x \quad (3.153)$$

şeklinde dir. u nun özfonksiyon olması için (3.152) sınır koşullarının sağlanması yani k_1, k_2 nin

$$k_1 \cos \sqrt{\lambda d^{-1}} a + k_2 \sin \sqrt{\lambda d^{-1}} a = 0 \quad (3.154)$$

$$k_1 \cos \sqrt{\lambda d^{-1}} b + k_2 \sin \sqrt{\lambda d^{-1}} b = 0$$

denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün olması gerekir. (3.154) denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olabilmesi için

$$\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda d^{-1}} a & \sin \sqrt{\lambda d^{-1}} a \\ \cos \sqrt{\lambda d^{-1}} b & \sin \sqrt{\lambda d^{-1}} b \end{vmatrix} = 0$$

ya da

$$\cos \sqrt{\lambda d^{-1}} a \cdot \sin \sqrt{\lambda d^{-1}} b - \cos \sqrt{\lambda d^{-1}} b \cdot \sin \sqrt{\lambda d^{-1}} a = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\sin(b-a) \sqrt{\lambda d^{-1}} = 0$$

veya

$$(b-a) \sqrt{\lambda d^{-1}} = n\pi ; \quad (n \in \mathbf{Z}) \quad (3.155)$$

bulunur. Buradan da

$$\lambda = d \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2$$

elde edilir. λ nın bu ifadesi (3.154) sisteminin birinci denkleminde yerine konursa

$$k_1 \cos \frac{n\pi}{b-a} a + k_2 \sin \frac{n\pi}{b-a} a = 0$$

ya da

$$k_1 = -k_2 \frac{\sin \frac{n\pi}{b-a} a}{\cos \frac{n\pi}{b-a} a} \quad (3.156)$$

bulunur. (3.153), (3.155) ve (3.156) dan

$$\begin{aligned} u(x) &= -k_2 \frac{\sin \frac{n\pi}{b-a} a}{\cos \frac{n\pi}{b-a} a} \cos \frac{n\pi}{b-a} x + k_2 \sin \frac{n\pi}{b-a} x \\ &= -\frac{k_2}{\cos \frac{n\pi}{b-a} a} \left(\cos \frac{n\pi}{b-a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b-a} a - \sin \frac{n\pi}{b-a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b-a} a \right) \\ &= \frac{k_2}{\cos \frac{n\pi}{b-a} a} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} \end{aligned} \quad (3.157)$$

elde edilir. Bu $u(x) = \frac{k_2}{\cos \frac{n\pi}{b-a} a} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}$ fonksiyonu $k_2 \neq 0$ olmak üzere (3.151),

(3.152) sınır değer probleminin

$$\lambda_n = d \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.158)$$

özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonudur. Böylece (3.151), (3.152) sınır değer

probleminin özdeğerlerinin (3.158) şeklinde ve $\lambda_n = d \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2$ özdeğerine karşılık gelen bir

özfonksiyonunun da

$$\sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}$$

şeklinde olduğunu gösterdik. $a = x_{i-1}$, $b = x_i$, $d = p(x_i)$ olduğu hatırlanırsa her n doğal sayısı için

$$\lambda_n - \gamma = p(x_i) \left(\frac{n\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \gamma \quad (3.159)$$

sayısının $L_{(1)}$ operatörünün bir özdeğeri ve $\sin \frac{n\pi(x_i - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ fonksiyonunun da bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü olduğu ortaya çıkar. $Q(x): H \rightarrow H$ operatörünün $\alpha_1(x) \geq \alpha_2(x) \geq \dots \geq \alpha_i(x) \geq \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörleri sırasıyla $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_j(x)$ ise

$$p(x_i) \left(\frac{n\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_i)$$

sayısı her $n, j \in \mathbb{N}$ için $L_{(1)}$ operatörünün bir özdeğeri ve

$$\sin \frac{n\pi(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \varphi_j(x_i)$$

vektör fonksiyonu da bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörüdür.

Teorem 3.2.9 : $\{f_n(x)\}$ $L_2[a, b]$ uzayında ve $\{e_j\}$ de bir H Hilbert uzayında herhangi tam diziler ise $\{f_n(x)e_j\}_{n=1, j=1}^{\infty, \infty}$ kümesi $L_2(a, b; H)$ uzayında tamdır.

İspat: Önce her $n, j \in \mathbb{N}$ için $f_n(x)\varphi_j \in L_2(a, b; H)$ olduğunu belirtelim. $y = y(x) \in L_2(a, b; H)$ uzayının

$$y(x) \perp \{f_n(x)e_j\}_{n=1, j=1}^{\infty, \infty}$$

olacak şekilde herhangi bir elemanı olsun. Her $n, j \in \mathbb{N}$ için

$$\int_a^b (f_n(x)e_j, y(x)) dx = 0$$

ya da

$$\int_a^b (e_j, y(x)) f_n(x) dx = 0 \quad (n=1, 2, \dots; j=1, 2, \dots) \quad (3.160)$$

dir. $\{f_n(x)\}$ $L_2[a,b]$ de tam dizi olduğundan (3.160) dan $L_2[a,b]$ nin fonksiyonları olarak

$$(e_j, y(x)) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

elde edilir. Dolayısıyla $[a,b]$ aralığında $hhhy$ $(y(x), e_j) = 0$ dir.

$$E_j = \{x \in [a,b]; (y(x), e_j) \neq 0\} \text{ ve } E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \text{ olsun. } mE_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots) \text{ olduğundan}$$

$$0 \leq mE \leq \sum_{j=1}^{\infty} mE_j = 0$$

dir. Buradan $mE = 0$ bulunur. Öte yandan her $x \in [a,b] \setminus E$ için

$$(y(x), e_j) = 0, \quad (j=1, 2, \dots) \quad (3.161)$$

dir. $\{e_j\}$ H de tam dizi olduğundan (3.161) den her $x \in [a,b] \setminus E$ için $y(x)=0$ bulunur. Böylece

$[a,b]$ aralığında $hhhy$ $y(x) = 0$ dir. Sonuç olarak $[a,b]$ de $hhhy$ $\|y(x)\| = 0$ ve bu nedenle

$$\|y\|_{(a,b)}^2 = \int_a^b \|y(x)\|^2 dx = 0 \quad (3.162)$$

ya da

$L_2(a,b;H)$ uzayının elemanı olarak $y = 0$ elde edilir. $L_2(a,b;H)$ uzayı

$$y \perp \{f_n(x)\varphi_j\}_{n=1, j=1}^{\infty, \infty}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir y elemanına sahip olmadığından $\{f_n(x)\varphi_j\}_{n=1, j=1}^{\infty, \infty}$ kümesi

$L_2(a,b;H)$ de tamdır. $\square$

Teorem 3.2.10 : 1. ve 4. koşulları sağlanıyorsa $L_{(1)}$ operatörünün özdeğerleri

$$p(x_i) \left(\frac{n\pi}{x_j - x_{i-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_i) \quad (n=1, 2, \dots; j=1, 2, \dots) \quad (3.163)$$

$L_{(2)}$ operatörünün özdeğerleri de

$$p(x_{i-1}) \left(\frac{(n-1)\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_{i-1}) \quad (n=1,2,\dots; j=1,2,\dots) \quad (3.164)$$

şeklindedir.

İspat: Her $n, j \in \mathbb{N}$

$$p(x_i) \left(\frac{n\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_i) \text{ nin } L_{i(1)} \text{ operatörünün bir özdeğeri ve } \sin \frac{n\pi(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \varphi_j(x_i)$$

vektör fonksiyonunun da bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla

$$\sin \frac{n\pi(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \varphi_j(x_i) \quad (n=1,2,\dots; j=1,2,\dots)$$

$L_{i(1)}$ operatörünün (3.163) özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlardır:

$$L_{i(1)} \left(\sin \frac{n\pi(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \varphi_j(x_i) \right) = \left[p(x_i) \left(\frac{n\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_i) \right] \sin \frac{n\pi(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \varphi_j(x_i)$$

$$(n=1,2,\dots; j=1,2,\dots).$$

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $Q(x_i): H \rightarrow H$ tam sürekli kendine eş bir operatör

olduğundan $\{\varphi_j(x_i)\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi H de tamdır. Öte yandan $\left\{ \sin \frac{n\pi(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$L_2[x_{i-1}, x_i]$ de tam olduğundan teorem 3.2.9 gereğince

$$\left\{ \sin \frac{n\pi(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \varphi_j(x_i) \right\}_{n=1, j=1}^{\infty, \infty} \text{ kümesi } L_2(x_{i-1}, x_i; H) \text{ uzayında tamdır.}$$

Bir λ sayısının $L_{i(1)}$ in bir özdeğeri ve y nin bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü olduğunu varsayalım. Eğer

$$\lambda \notin \left\{ p(x_i) \left(\frac{n\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_i) \right\}_{n=1, j=1}^{\infty, \infty}$$

olsaydı $L_{i(1)}$ operatörü kendine eş olduğundan

$$y \perp \left\{ \sin \frac{n\pi(x - x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} \cdot \varphi_j(x_j) \right\}_{n=1, j=1}^{\infty, \infty} \quad (3.165)$$

olurdu. Öte yandan $\left\{ \sin \frac{n\pi(x - x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} \cdot \varphi_j(x_j) \right\}_{n=1, j=1}^{\infty, \infty}$ kümesi tam olduğundan (3.165) den $y=0$

elde edilir. Oysa y bir özvektördür ve bu nedenle $y \neq 0$ dır. Bu çelişki

$$\lambda \in \left\{ p(x_j) \left(\frac{n\pi}{x_j - x_{j-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_j) \right\}_{n=1, j=1}^{\infty, \infty}$$

olduğunu yani $L_{(1)}$ operatörünün özdeğerlerinin

$$p(x_j) \left(\frac{n\pi}{x_j - x_{j-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_j) \quad (n=1, 2, \dots; j=1, 2, \dots)$$

şeklinde olduğunu gösterir. Benzer şekilde $L_{(2)}$ operatörünün özdeğerlerinin (3.164) şeklinde olduğu ispatlanabilir. $\square$

$\varepsilon \in (0, \alpha_j(0))$ olmak üzere

$$E_{j,\varepsilon} = \{x \in [0, \infty) : \alpha_j(x) \geq \varepsilon\}, \quad (3.166)$$

$$\psi_j(\varepsilon) = \sup E_{j,\varepsilon} \quad (3.167)$$

olsun.

Yardımcı Teorem 3.2.1 : Her $x_0 \in [0, \psi_j(\varepsilon))$ için $\alpha_j(x_0) > \varepsilon$ dur.

İspat : $x_0 < \psi_j(\varepsilon)$ olduğundan $E_{j,\varepsilon}$ kümesinin bir üst sınırı değildir. Dolayısıyla $E_{j,\varepsilon}$ kümesinin $x_1 > x_0$ olacak şekilde bir x_1 elemanı vardır. $E_{j,\varepsilon}$ kümesinin tanımı gereğince

$$\alpha_j(x_1) \geq \varepsilon \quad (3.168)$$

dır. Öte yandan α_j fonksiyonu azalan olduğundan

$$\alpha_j(x_1) < \alpha_j(x_0) \quad (3.169)$$

dir. (3.168) ve (3.169) dan

$$\alpha_j(x_0) > \varepsilon \quad (3.170)$$

bulunur. $\square$

$L_{(1)j}$ ve $L_{(1)i}$ operatörlerinin $-\varepsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin sayısı sırasıyla $n_{(1)j}$ ve $n_{(1)i}$ olsun.

Teorem 3.2.11 : 1.– 6. koşulları sağlandığı takdirde ε nun küçük değerleri için

$$n_{(1)j} > \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_i}^{\varphi_{i,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - 1 \right]$$

dir. Burada

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = \min\{x_{i+1}, \psi_j(\varepsilon)\} \quad (i = 1, 2, \dots, M-1) \quad (3.171)$$

dir.

İspat : Teorem 3.2.10 gereğince $L_{(1)i}$ operatörünün özdeğerleri

$$p(x_i) \left(\frac{n\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_i) \quad (n=1, 2, \dots; j=1, 2, \dots) \text{ şeklindedir. Dolayısıyla } n_{(1)i},$$

$$p(x_i) \left(\frac{n\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_i) < -\varepsilon \quad (3.172)$$

eşitsizliğini sağlayan (n, j) ($n, j \in \mathbb{N}$) ikililerinin sayısıdır. (3.172) den

$$n < \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} \quad (\delta = x_i - x_{i-1}) \quad (3.173)$$

bulunur. Buradan j nin $\alpha_j(x_i) > \varepsilon$ koşulunu sağlayan sabit bir değeri için (3.172)

eşitsizliğini sağlayan (n, j) ikililerinin yani n doğal sayılarının $n_{(1)j}$ sayısı için

$$n_{i(1)j} = \begin{cases} \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} - 1, & \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} \in \mathbb{N} \quad \text{ise} \\ \left\lceil \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} \right\rceil, & \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} \notin \mathbb{N} \quad \text{ise} \end{cases} \quad (3.174)$$

elde edilir. Bu bağıntıdan ve $n_{i(1)} = \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} n_{i(1)j}$ eşitliğinden

$$n_{i(1)} \geq \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} \left[\frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} - 1 \right] \quad (i = 1, 2, \dots, M-1) \quad (3.175)$$

bulunur. Adıgüzelov'un (1980) çalışmasından $\alpha_j(x)$ ($j=1,2,\dots$) fonksiyonlarının azalan oldukları bilinmektedir. Öte yandan varsayım gereği $p(x)$ fonksiyonu azalmayıp artmaktadır. O halde yardımcı teorem 3.2.1 den yararlanarak $\alpha_j(x_{i+1}) \geq \varepsilon$ ya da $x_{i+1} \leq \psi_j(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\delta \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} dx > \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \quad (3.176)$$

ve $\alpha_j(x_{i+1}) < \varepsilon < \alpha_j(x_i)$ ya da $x_i \leq \psi_j(\varepsilon) \leq x_{i+1}$ koşullarını sağlayan her $j \in \mathbb{N}$ için de

$$\delta \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} \geq \int_{x_i}^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} dx > \int_{x_i}^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \quad (3.177)$$

bulunur. (3.176) ve (3.177) den $\alpha_j(x_i) > \varepsilon$ koşulunu sağlayan her $j \in \mathbb{N}$ için $\varphi_{i,j}(\varepsilon) = \min\{x_{i+1}, \psi_j(\varepsilon)\}$ olmak üzere

$$\delta \sqrt{\frac{\alpha_j(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} > \int_{x_i}^{\varphi_{i,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \quad (3.178)$$

elde edilir. (3.175) ve (3.178) den

$$n_{i(1)} > \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_i}^{\varphi_{i,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - 1 \right] \quad (3.179)$$

bulunur. Öte yandan teorem 3.2.8 gereğince $L_{(1)l} < L_{l(1)}$ dir. Bu durumda (Smirnov, 1964) den

$$n_{(1)l} \geq n_{l(1)} \quad (3.180)$$

olduğu bilinmektedir. (3.179) ve (3.180) den

$$n_{(1)l} > \sum_{j: \alpha_j(x_j) > \varepsilon} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_j}^{\varphi_{l,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - 1 \right]$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.2.12 : 1. – 6. koşulları sağlandığı takdirde ε nun küçük değerleri için

$$N(\varepsilon) > \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\varphi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - \text{const. } l_\varepsilon \int_0^\delta \sqrt{\alpha_1(x)} dx - \text{const. } l_\varepsilon \varphi_1^k(\varepsilon)$$

dur. Burada $l_\varepsilon = \sum_{\alpha_j(0) \geq \varepsilon} 1$ dir.

İspat : R. Courant'ın varyasyon prensiplerinden (Courant ve Hilbert, 1970) dolayı

$$N_1(\varepsilon) \geq \sum_{i=1}^M n_{(1)i}$$

dir. Bu eşitsizlikten ve teorem 3.2.11 den yararlanarak

$$N_1(\varepsilon) \geq \sum_{i=1}^{M-1} n_{(1)i} > \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j: \alpha_j(x_j) > \varepsilon} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_j}^{\varphi_{i,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - 1 \right] \quad (3.181)$$

elde edilir. Bu bağıntının sonundaki

$$\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j: \alpha_j(x_j) > \varepsilon} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_j}^{\varphi_{i,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - 1 \right] \quad (3.182)$$

toplamı $\alpha_j(x_j) > \varepsilon$ koşulunu sağlayan $i \geq 1$ ve $j \geq 1$ doğal sayıları için

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_j}^{\varphi_{i,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

ifadelerinin toplamıdır. $\alpha_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$) fonksiyonlarının monoton azalan oldukları göz önüne alınırsa (3.182) toplamı için

$$\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_i}^{\varphi_{i,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - 1 \right] = \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_1) > \varepsilon}} \sum_{\substack{i \geq 1 \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_i}^{\varphi_{i,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - 1 \right] \quad (3.183)$$

yazılabilir. $\varphi_{i,j}(\varepsilon)$ nun (3.171) deki ifadesinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_{\substack{i \geq 1 \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} \int_{x_i}^{\varphi_{i,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx &= \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_1) > \varepsilon}} \left[\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + \dots \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_{i_0}}^{\varphi_{j,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \right] \\ &= \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_1) > \varepsilon}} \int_{x_1}^{\varphi_{j,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \end{aligned} \quad (3.184)$$

elde edilir. Burada i_0 , $x_{i_0} < \varphi_j(\varepsilon) \leq x_{i_0+1}$ koşulunu sağlayan bir doğal sayıdır. $\alpha_j(x_1) > \varepsilon$ koşulunu sağlayan $j \in \mathbb{N}$ için (3.166) ve (3.167) den $\varphi_j(\varepsilon) \geq x_1$ elde edilir. $\varphi_j(\varepsilon) \geq x_1$ koşulunu sağlayan $j \in \mathbb{N}$ için yardımcı teorem 3.2.1 den $\alpha_j(x_1) > \varepsilon$ elde edilir. Bu durum göz önüne alınarak (3.184) ten

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_{\substack{i \geq 1 \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} \int_{x_i}^{\varphi_{i,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx &= \sum_{\varphi_j(\varepsilon) \geq x_1} \int_{x_1}^{\varphi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \\ &= \sum_{\varphi_j(\varepsilon) \geq x_1} \int_0^{\varphi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - \sum_{\varphi_j(\varepsilon) \geq x_1} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \\ &= \sum_{j=1}^{I_\varepsilon} \int_0^{\varphi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - \sum_{\varphi_j(\varepsilon) < x_1} \int_0^{\varphi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - \sum_{\varphi_j(\varepsilon) \geq x_1} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - \sum_j \int_0^{\varphi_{0,j}(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \\
&\geq \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - \sum_{\alpha_j(0) \geq \varepsilon} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{\alpha_1(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \\
&\geq \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - \text{const} \int_0^\delta \sqrt{\alpha_1(x) - \varepsilon} dx \sum_{\alpha_j(0) \geq \varepsilon} 1 \\
&= \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - \text{const} l_\varepsilon \int_0^\delta \sqrt{\alpha_1(x) - \varepsilon} dx
\end{aligned} \tag{3.185}$$

bulunur.

$\alpha_j(x_1) > \varepsilon$ koşulunu sağlayan sabit bir $j \geq 1$ için

$$\sum_{\substack{i \geq 1 \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} 1 = \max \{i : \alpha_j(x_i) > \varepsilon\} \tag{3.186}$$

dir. $\max \{i : \alpha_j(x_i) > \varepsilon\} = m(j, \varepsilon)$ olsun. $\alpha_j(x_{m(j, \varepsilon)}) > \varepsilon$ olduğundan yine (3.166) ve (3.167) den

$$x_{m(j, \varepsilon)} \leq \psi_j(\varepsilon)$$

elde edilir. Öte yandan $m(j, \varepsilon) = \frac{x_{m(j, \varepsilon)}}{\delta}$ olduğundan

$$m(j, \varepsilon) \leq \frac{\psi_j(\varepsilon)}{\delta}$$

ya da

$$\sum_{\substack{i \geq 1 \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} 1 \leq \frac{\psi_j(\varepsilon)}{\delta}$$

dır. Bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\sum_j \sum_{\substack{i \geq 1 \\ \alpha_j(x_i) > \varepsilon}} 1 < \sum_j \frac{\psi_j(\varepsilon)}{\delta} < \sum_{\alpha_j(0) > \varepsilon} \frac{\psi_j(\varepsilon)}{\delta} < \frac{\psi_1(\varepsilon)}{\delta} \sum_{\alpha_j(0) > \varepsilon} 1 = \delta^{-1} \psi_1(\varepsilon) l_\varepsilon \quad (3.187)$$

bulunur. (3.181), (3.183), (3.185) ve (3.187) den

$$N_1(\varepsilon) > \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - \text{const.} \cdot l_\varepsilon \int_0^\delta \sqrt{\alpha_1(x) - \varepsilon} dx - \delta^{-1} \psi_1(\varepsilon) l_\varepsilon \quad (3.188)$$

elde edilir. Teorem 3.2.6 dan ve (3.134) ve (3.188) bağıntılarından

$$N(\varepsilon) > \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx - \text{const.} \cdot l_\varepsilon \int_0^\delta \sqrt{\alpha_1(x)} dx - \text{const.} \cdot l_\varepsilon \psi_1^k(\varepsilon) \quad (3.189)$$

bulunur. $\square$

$L_{(2)i}$ ve $L_{i(2)}$ operatörlerinin $-\varepsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin sayısı sırasıyla $n_{(2)i}$ ve $n_{i(2)}$ olsun.

Teorem 3.2.13 : 1. – 6. koşulları sağlandığı takdirde ε nun küçük değerleri için

$$n_{(2)i} < \sum_j \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + 1 \right] \quad (i = 2, 3, \dots, M)$$

dir.

İspat: Teorem 3.2.10 gereğince $L_{i(2)}$ operatörünün özdeğerleri

$$p(x_{i-1}) \left(\frac{(n-1)\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \alpha_j(x_{i-1}) \quad (n=1, 2, \dots; j=1, 2, \dots)$$

şeklindedir. Dolayısıyla $n_{i(2)}$

$$p(x_{i-1}) \frac{(n-1)^2 \pi^2}{(x_i - x_{i-1})^2} - \alpha_j(x_{i-1}) < -\varepsilon \quad (3.190)$$

eşitsizliğini sağlayan (n, j) ($n, j \in \mathbb{N}$) ikililerinin sayısı olup

$$n_{i(2)} < \sum_j \left[\frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_j(x_{i-1}) - \varepsilon}{p(x_{i-1})}} + 1 \right] \quad (3.191)$$

dir. $\alpha_j(x)$ ($j=1,2,\dots$) fonksiyonlarının azalan ve $p(x)$ fonksiyonunun azalmayan olduğu göz önüne alınırsa

$$\delta \sqrt{\frac{\alpha_j(x_{i-1}) - \varepsilon}{p(x_{i-1})}} = \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x_{i-1}) - \varepsilon}{p(x_{i-1})}} dx < \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \quad (i=2,3,\dots) \quad (3.192)$$

elde edilir. (3.191) ve (3.192) den

$$n_{i(2)} < \sum_j \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + 1 \right] \quad (i=2,3,\dots) \quad (3.193)$$

bulunur. Teorem 3.2.8 gereğince $L_{(2)i} > L_{i(2)}$ dir. Bu durumda (Smirnov, 1964) den

$$n_{(2)i} \leq n_{i(2)} \quad (i=1,2,\dots) \quad (3.194)$$

olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla

$$n_{(2)i} < \sum_j \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + 1 \right] \quad (i=2,3,\dots) \quad (3.195)$$

dir. $\square$

Teorem 3.2.14 : 1. – 6. koşulları sağlandığı takdirde ε nun küçük değerleri için

$$N_2(\varepsilon) < n_{(2)1} + \pi^{-1} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + l_\varepsilon \delta^{-1} \psi_1(\varepsilon)$$

dir.

İspat : R. Courant'ın varyasyon prensiplerinden dolayı (Courant ve Hilbert, 1970)

$$N_2(\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^M n_{(2)i}$$

dir. Teorem 3.2.13 ten ve bu eşitsizlikten

$$N_2(\varepsilon) < n_{(2)1} + \sum_{i=2}^M \sum_j \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + 1 \right] \quad (3.196)$$

elde edilir. (3.196) eşitsizliğinde yer alan

$$\sum_{i=2}^M \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_{i-1}) > \varepsilon}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + 1 \right] \quad (3.197)$$

toplamı $\alpha_j(x_{i-1}) > \varepsilon$ koşulunu sağlayan $i \geq 2$ ve $j \geq 1$ doğal sayıları için

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + 1 \quad (i = 2, 3, \dots; j = 1, 2, \dots) \quad (3.198)$$

ifadelerinin toplamıdır. $\alpha_j(x)$ ($j=1, 2, \dots$) fonksiyonlarının monoton azalan oldukları göz önüne alınırsa (3.197) toplamı için

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^M \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_{i-1}) > \varepsilon}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + 1 \right] &= \sum_j \sum_{\substack{i \geq 2 \\ \alpha_j(x_1) > \varepsilon, \alpha_j(x_{i-1}) > \varepsilon}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + 1 \right] \\ &= \sum_j \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + \dots + \frac{1}{\pi} \int_{x_{i_0-1}}^{x_{i_0}} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + i_0 \right] \end{aligned} \quad (3.199)$$

elde edilir. Burada i_0

$\alpha_j(x_{i_0}) > \varepsilon$, $\alpha_j(x_{i_0+1}) \leq \varepsilon$ koşullarını sağlayan doğal sayıdır. (3.166) ve (3.167) den

$$x_{i_0} \leq \psi_j(\varepsilon) \quad (3.200)$$

bulunur. Öte yandan $i_0 = \frac{x_{i_0}}{\delta}$ olduğu göz önüne alınırsa (3.196) ve (3.199) dan

$$\begin{aligned} N_2(\varepsilon) &< n_{(2)1} + \sum_{\substack{j \\ \alpha_j(x_1) > \varepsilon}} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + \frac{\psi_j(\varepsilon)}{\delta} \right] \\ &\leq n_{(2)1} + \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + \frac{\psi_j(\varepsilon)}{\delta} \right] \end{aligned} \quad (3.201)$$

elde edilir. $\psi_j(\varepsilon) \leq \psi_1(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots, l_\varepsilon$) olduğu göz önüne alınırsa son bağıntıdan

$$N_2(\varepsilon) < n_{(2)1} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + l_\varepsilon \frac{\psi_1(\varepsilon)}{\delta} \quad (3.202)$$

bulunur. $\square$

Teorem 3.2.15: 1. – 6. koşulları sağlandığı takdirde ε nun küçük değerleri için

$$N(\varepsilon) < \pi^{-1} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + \text{const. } l_\varepsilon \int_0^{\delta} \sqrt{\alpha_1(x)} dx + \text{const. } l_\varepsilon \psi_1^k(\varepsilon)$$

dır.

İspat: (3.202) eşitsizliğinde $n_{(2)1}$ ile $L_2(0, \delta; H)$ uzayında (3.80) ifadesi ve $y'(0) = y'(\delta) = 0$ sınır koşulları ile oluşturulan $L_{(2)1}$ operatörünün $-\varepsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin sayısı gösterilmiştir. $[0, \delta]$ aralığını uzunlukları

$$\delta_1 = \frac{\delta_0}{\left[\delta_0 \psi_1^{2k-1}(\varepsilon) \right] + 1} \quad (\delta_0 = \delta)$$

olan parçalara bölelim. Teorem 3.2.14 ün ispatına benzer şekilde

$$n_{(2)1} < n_{(2)1}^{(1)} + \pi^{-1} \sum_{\psi_j(\varepsilon) < \delta_0} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + \pi^{-1} \sum_{\psi_j(\varepsilon) \geq \delta_0} \int_0^{\delta_0} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + l_\varepsilon \delta_1^{-1} \delta_0 \quad (3.203)$$

olduğu gösterilebilir. Burada $n_{(2)1}^{(1)}$ ile $L_2(0, \delta_1; H)$ uzayında (3.80) ifadesi ve $y'(0) = y'(\delta_1) = 0$ sınır koşulları ile oluşturulan $L_{(2)1}^{(1)}$ operatörünün $-\varepsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin sayısı gösterilmiştir. (3.203) den

$$n_{(2)1} < n_{(2)1}^{(1)} + \text{const. } l_\varepsilon \int_0^{\delta_0} \sqrt{\alpha_1(x)} dx + l_\varepsilon \delta_1^{-1} \delta_0 \quad (3.204)$$

elde edilir. (3.204) eşitsizliği

$$\delta_m = \frac{\delta_{m-1}}{\left[\delta_{m-1} \psi_1^{(m+1)k-1}(\varepsilon) \right] + 1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.205)$$

olmak üzere $L_2(0, \delta_m; H)$ ($m = 1, 2, \dots$) uzayında (3.80) ifadesi ve $y'(0) = y'(\delta_m) = 0$ sınır koşulları ile oluşturulan $L_{(2)1}^{(m)}$ operatörlerinin $-\varepsilon$ dan küçük olan özdeğerlerinin $n_{(2)1}^{(m)}$

sayısına uygulanırsa

$$n_{(2)l}^{(m)} \leq n_{(2)l}^{(m+1)} + \text{const. } l_\varepsilon \int_0^{\delta_m} \sqrt{\alpha_1(x)} dx + l_\varepsilon \delta_{m+1}^{-1} \delta_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.206)$$

elde edilir. $\delta_{-1} = \psi_1(\varepsilon)$ olmak üzere (3.205) formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{m-1}}{\delta_m} &= \left[\delta_{m-1} \psi_1^{(m+1)k-1}(\varepsilon) \right] + 1 \leq \delta_{m-1} \psi_1^{(m+1)k-1}(\varepsilon) + 1 \\ &= \left[\frac{\delta_{m-2}}{\delta_{m-2} \psi_1^{mk-1}(\varepsilon)} \right] + 1 \leq \psi_1^{(m+1)k-1}(\varepsilon) + 1 \\ &< \frac{\delta_{m-2} \psi_1^{(m+1)k-1}(\varepsilon)}{\delta_{m-2} \psi_1^{mk-1}(\varepsilon)} + 1 = \psi_1^k(\varepsilon) + 1 \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.207)$$

elde edilir. Buradan ε un $\psi_1^k(\varepsilon) > 2$ eşitsizliğini sağlayan değerleri için

$$\frac{\delta_{m-1}}{\delta_m} < 2 \psi_1^k(\varepsilon) \quad (3.208)$$

bulunur. (3.206) ve (3.208) den

$$n_{(2)l}^{(m)} \leq n_{(2)l}^{(m+1)} + \text{const. } l_\varepsilon \int_0^{\delta_m} \sqrt{\alpha_1(x)} dx + 2 l_\varepsilon \psi_1^k(\varepsilon) \quad (3.209)$$

elde edilir. $i=1$ için (3.191) ifadesinde δ yerine δ_{m+1} yazıp (3.194) eşitsizliğini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} n_{(2)l}^{(m+1)} &< \sum_{\alpha_j(0) > \varepsilon} \left[\frac{\delta_{m+1}}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_j(0) - \varepsilon}{p(0)}} + 1 \right] \\ &< \sum_{\alpha_j(0) \geq \varepsilon} \left[\pi^{-1} \delta_{m+1} \sqrt{\frac{\alpha_1(0)}{p(0)}} + 1 \right] < \text{const. } J_\varepsilon (\delta_{m+1} + 1) \end{aligned} \quad (3.210)$$

bulunur. (3.205) ten $m_0 \geq \frac{1}{k} - 2$ koşulunu sağlayan bir $m_0 \in \mathbb{N}$ sabiti için

$$\delta_{m_0+1} \leq 1 \quad (3.211)$$

elde edilir. (3.210) ve (3.211) den

$$n_{(2)1}^{(m_0+1)} < \text{const } t. l_\varepsilon \quad (3.212)$$

bulunur. (3.202), (3.204), (3.206), (3.209) ve (3.212) den

$$N_2(\varepsilon) \leq \pi^{-1} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + l_\varepsilon \delta^{-1} \psi_1(\varepsilon) + \text{const } t. l_\varepsilon \sum_{m=0}^{m_0} \int_0^{\delta_\varepsilon} \sqrt{\alpha_1(x)} dx + \text{const } t. l_\varepsilon \psi_1^k(\varepsilon) \quad (3.213)$$

elde edilir. Teorem 3.2.7 den ve (3.134), (3.213) bağıntılarından yararlanarak

$$N(\varepsilon) \leq \pi^{-1} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx + \text{const } t. l_\varepsilon \int_0^{\delta_\varepsilon} \sqrt{\alpha_1(x)} dx + \text{const } t. l_\varepsilon \psi_1^k(\varepsilon) \quad (3.214)$$

bulunur. $\square$

3.3 L Operatörünün Negatif Özdeğerlerinin Sayısı İçin Asimtotik Formüller

Bu kısımda bölüm 3.2 de elde edilen sonuçlardan yararlanarak $L_2(0, \infty; H)$ uzayında

$$l(y) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşulu ile oluşturulan kendine eş L operatörünün $-\varepsilon$ dan ($\varepsilon > 0$) küçük olan özdeğerlerinin $N(\varepsilon)$ sayısı için $\varepsilon \rightarrow 0$ iken asimtotik formüller bulacağız. Önce $\alpha_1(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulu sağladığını varsayalım:

7) $k_0, (0, 2)$ aralığına ait olan bir sabit olmak üzere her $\eta > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_1(x) x^{k_0 - \eta} = \lim_{x \rightarrow \infty} [\alpha_1(x) x^{k_0 + \eta}]^{-1} = 0$$

dır. $\square$

Bir $m \in (0, \infty)$ sabiti için $\sum_{j=1}^{\infty} [\alpha_j(0)]^m$ serisinin yakınsak olduğunu varsayalım. O zaman

$$\text{const} \geq \sum_{\alpha_j(0) \geq \varepsilon} [\alpha_j(0)]^m \geq \sum_{\alpha_j(0) \geq \varepsilon} \varepsilon^m = \varepsilon^m l_\varepsilon$$

dır. Bu bağıntıdan

$$l_\varepsilon \leq \text{const.} \varepsilon^{-m} \quad (3.215)$$

bulunur.

Teorem 3.3.1 : 1.– 7. koşullarının sağlandığını varsayalım. Eğer ek olarak

$$0 < m < \frac{(2 - k_0)^2}{8k_0 - 2k_0^2}$$

koşulunu sağlayan bir m sabiti için $\sum_{j=1}^{\infty} [\alpha_j(0)]^m$ serisi yakınsak ise $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$N(\varepsilon) = \pi^{-1} [1 + O(\varepsilon^{t_0})] \sum_j \int_{\alpha_j(x) \geq \varepsilon} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx$$

asimtotik formülü sağlanır. Burada t_0 pozitif bir sabittir.

İspat: Teorem 3.2.12 ve teorem 3.2.15 den ε nun ($\varepsilon > 0$) küçük değerleri için

$$\left| N(\varepsilon) - \pi^{-1} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \right| < \text{const} \left[l_\varepsilon \int_0^\delta \sqrt{\alpha_1(x)} dx + l_\varepsilon \psi_1^k(\varepsilon) \right] \quad (3.216)$$

bulunur. $\alpha_1(x)$ fonksiyonu azalan olduğundan $[0, \psi_1(2\varepsilon)]$ aralığında

$$\alpha_1(x) \geq \alpha_1(\psi_1(2\varepsilon)) = 2\varepsilon$$

dır. Bu bağıntıdan ve $p(x)$ fonksiyonunun 4. koşulunu sağlamasından yararlanarak

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx &> \int_0^{\psi_1(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx > \int_0^{\psi_1(2\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \\ &> \sqrt{\varepsilon} \int_0^{\psi_1(2\varepsilon)} \sqrt{\frac{1}{p(x)}} dx > \sqrt{c_2^{-1} \varepsilon} \psi_1(2\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.217)$$

elde edilir. $\alpha_1(x)$ fonksiyonunun 7. koşulunu sağladığı ve $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_1(\varepsilon) = \infty$ olduğu göz önüne

alınırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\alpha_1(\psi_1(2\varepsilon))(\psi_1(2\varepsilon))^{k_0+\eta}]^{-1} = 0$$

dır. Buradan ε nun küçük değerleri için

$$\psi_1(2\varepsilon) > \varepsilon^{\frac{1}{k_0+\eta}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (3.217) de göz önüne alınırsa

$$\sum_{j=1}^{l_+} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx > c_3 \varepsilon^{\frac{k_0+\eta-2}{2(k_0+\eta)}} \quad (3.218)$$

bulunur. (3.216) eşitsizliğinin ikinci tarafında yer alan $\int_0^\delta \sqrt{\alpha_1(x)} dx$ integralini sınırlandıralım.

$\alpha_1(x)$ fonksiyonu 7. koşulunu sağladığından

$$\alpha_1(x) \leq c_4 x^{\eta-k_0} \quad (\eta < k_0; 0 < x < \infty) \quad (3.219)$$

olacak şekilde bir c_4 sabiti vardır. Dolayısıyla

$$\int_0^\delta \sqrt{\alpha_1(x)} dx \leq \sqrt{c_4} \int_0^\delta \sqrt{x^{\eta-k_0}} dx \leq c_5 \delta^{\frac{1}{2}(2-k_0+\eta)} \quad (3.220)$$

dır. $\delta = \psi_1(\varepsilon)([\psi_1(\varepsilon)] + 1)^{-1}$ eşitliğinden

$$\delta < \psi_1^{1-k}(\varepsilon) \quad (3.221)$$

elde edilir. (3.219) da $x = \psi_1(\varepsilon)$ alınırsa

$$\alpha_1(\psi_1(\varepsilon)) \leq c_4 \psi_1^{\eta-k_0}(\varepsilon) \quad (\eta < k_0)$$

ya da

$$\psi_1(\varepsilon) \leq c_6 \varepsilon^{\frac{1}{k_0-\eta}} \quad (3.222)$$

bulunur. (3.220), (3.221) ve (3.222) den

$$\int_0^\delta \sqrt{\alpha_1(x)} dx < c_7 \varepsilon^{\frac{(1-k)(2-k_0+\eta)}{2(k_0-\eta)}} \quad (c_7 > 0) \quad (3.223)$$

elde edilir. (3.215), (3.222) ve (3.223) den

$$I_{\varepsilon} \int_0^{\delta} \sqrt{\alpha_1(x)} dx < c_8 \varepsilon^{-m - \frac{(1-k)(2-k_0+\eta)}{2(k_0-\eta)}}, \quad (3.224)$$

$$I_{\varepsilon} \psi_1^k(\varepsilon) \leq c_8 \varepsilon^{\frac{m(k_0-\eta)+k}{k_0-\eta}} \quad (3.225)$$

bulunur. (3.215), (3.224) ve (3.225) den

$$\frac{I_{\varepsilon} \int_0^{\delta} \sqrt{\alpha_1(x)} dx}{\sum_{j=1}^{I_{\varepsilon} \psi_j(\varepsilon)} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx} < c_9 \varepsilon^{-m - \frac{(1-k)(2-k_0+\eta)}{2(k_0-\eta)} + \frac{2-k_0-\eta}{2(k_0+\eta)}} \quad (3.226)$$

$$\frac{I_{\varepsilon} \psi_1^k(\varepsilon)}{\sum_{j=1}^{I_{\varepsilon} \psi_j(\varepsilon)} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx} < c_9 \varepsilon^{\frac{m(k_0-\eta)+k}{k_0-\eta} + \frac{2-k_0-\eta}{2(k_0+\eta)}} \quad (3.227)$$

bulunur. Her $t > 0$ için $0 < \eta < \omega$ iken

$$-m - \frac{(1-k)(2-k_0+\eta)}{2(k_0-\eta)} + \frac{2-k_0-\eta}{2(k_0+\eta)} > \frac{2k - kk_0 - 2mk_0}{2k_0} - t \quad (3.228)$$

$$-\frac{m(k_0-\eta)+k}{k_0-\eta} + \frac{2-k_0-\eta}{2(k_0+\eta)} > \frac{2-k_0-2mk_0-2k}{2k_0} - t \quad (3.229)$$

olacak şekilde bir $\omega = \omega(t) > 0$ sayısı vardır. Buraya kadar yapılan işlemlerde k , $(0,1)$ aralığına ait olan sabit bir sayıydı. Burada

$$k = \frac{(2-k_0)^2 + 2mk_0^2}{4(2-k_0)}, \quad t = t_0 = \frac{(2-k_0)^2 - 8mk_0 + 2mk_0^2}{16k_0}$$

alınırsa (3.228) ve (3.229) dan

$$-m - \frac{(1-k)(2-k_0+\eta)}{2(k_0-\eta)} + \frac{2-k_0-\eta}{2(k_0+\eta)} > \frac{(2-k_0)^2 - 8mk_0 + 2mk_0^2}{8k_0} - t_0$$

$$= \frac{(2-k_0)^2 - 8mk_0 + 2mk_0^2}{16k_0} = t_0 \quad (3.230)$$

$$-\frac{m(k_0 - \eta) + k}{k_0 - \eta} + \frac{2 - k_0 - \eta}{2(k_0 + \eta)} > \frac{(2-k_0)^2 - 8mk_0 + 2mk_0^2}{8k_0 - 4k_0^2} - t_0 > t_0 \quad (3.231)$$

elde edilir. m sayısı

$$0 < m < \frac{(2-k_0)^2}{8k_0 - 2k_0^2}$$

koşulunu sağladığından $k \in (0,1)$ ve $t_0 > 0$ dir. (3.226), (3.227), (3.230) ve (3.231) den

$$\frac{l_\varepsilon \int_0^\delta \sqrt{\alpha_1(x)} dx}{\sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx} < c_9 \varepsilon^{t_0} \quad (3.232)$$

$$\frac{l_\varepsilon \psi_1^k(\varepsilon)}{\sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx} < c_9 \varepsilon^{t_0} \quad (3.233)$$

bulunur. (3.216), (3.232) ve (3.233) den ε un küçük değerleri için

$$\left| \frac{N(\varepsilon)}{\pi^{-1} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx} - 1 \right| < c_{10} \varepsilon^{t_0} \quad (3.234)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$\frac{N(\varepsilon)}{\pi^{-1} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx} - 1 = O(\varepsilon^{t_0})$$

şeklinde yazılır. Son bağıntıdan $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$N(\varepsilon) = \pi^{-1} [1 + O(\varepsilon'^0)] \sum_j \int_{\alpha_j(x) \geq \varepsilon} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx$$

asimtotik formülü elde edilir. $\square$

$\ln_n x$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ile $\ln_0 x = x$, $\ln_n x = \ln(\ln_{n-1} x)$ şeklindeki fonksiyonları gösterelim ve $\alpha_1(x) = \|Q(x)\|$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulu sağladığını varsayalım:

8. Öyle bir $\xi > 0$ sayısı ve n doğal sayısı vardır ki $\alpha_1(x) - (\ln_n x)^{-\xi}$ fonksiyonu bir $[a, \infty)$ ($a > 0$) aralığında negatif değerli değildir ve monoton artmayandır.

Yardımcı Teorem 3.3.1 : x in büyük değerleri için

$$\ln_n \left(\frac{x}{\ln x} \right) < \ln_n x - \ln^{1-n} x \quad (3.235)$$

dir.

İspat : $n = 0, 1$ değerleri için (3.235) eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir. $n \geq 2$ değerleri için (3.235) eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım yöntemi ile ispatlayacağız.

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} \ln_2 \left(\frac{x}{\ln x} \right) &= \ln \left(\ln \frac{x}{\ln x} \right) = \ln(\ln x - \ln(\ln x)) \\ &= \ln \left((\ln x) \left(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x} \right) \right) = \ln_2 x + \ln x \left(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x} \right) \end{aligned} \quad (3.236)$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln_2 x}{\ln x} = 0$ olduğundan $x \rightarrow \infty$ iken $\ln \left(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x} \right) \sim -\frac{\ln_2 x}{\ln x}$ dir. Buradan x in büyük değerleri için

$$\ln \left(1 - \frac{\ln_2 x}{\ln x} \right) < -\frac{\ln_2 x}{2 \ln x} \quad (3.237)$$

bulunur. (3.236) dan ve (3.237) den

$$\ln_2 \left(\frac{x}{\ln x} \right) < \ln_2 x - \frac{\ln_2 x}{2 \ln x} < \ln_2 x - \ln^{-1} x \quad (3.238)$$

ya da

$$\ln_2 \left(\frac{x}{\ln x} \right) < \ln_2 x - \ln^{-1} x \quad (3.239)$$

elde edilir. Böylece $n = 2$ için (3.235) eşitsizliğinin sağlandığını göstermiş olduk. Bu kez de $n = m$ ($m \geq 2$) için (3.235) in sağlandığını varsayalım. Yani x in büyük değerleri için

$$\ln_m \left(\frac{x}{\ln x} \right) < \ln_m x - \ln^{1-m} x \quad (3.240)$$

olsun. Bu durumda (3.235) in $n = m+1$ için de sağlandığını göstermek gerek. x in büyük değerleri için (3.240) eşitsizliği sağlandığından

$$\begin{aligned} \ln_{m+1} \left(\frac{x}{\ln x} \right) &= \ln \left(\ln_m \left(\frac{x}{\ln x} \right) \right) < \ln \left(\ln_m x - \ln^{1-m} x \right) \\ &= \ln \left((\ln_m x) (1 - \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x) \right) = \ln_{m+1} x + \ln (1 - \ln_m^{-1} x \cdot \ln^{1-m} x) \end{aligned} \quad (3.241)$$

olur. Yukarıdakine benzer şekilde x in büyük değerleri için

$$\ln (1 - \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x) < -\frac{1}{2} \ln_m^{-1} x \cdot \ln^{1-m} x$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir. Bu eşitsizlik (3.241) de göz önüne alınırsa,

$$\ln_{m+1} \left(\frac{x}{\ln x} \right) < \ln_{m+1} x - \frac{1}{2} \ln_m^{-1} x \ln^{1-m} x \quad (3.242)$$

bulunur. x in büyük değerleri için

$$\frac{\ln x}{2 \ln_m x} > 1, \quad (m \geq 2) \quad (3.243)$$

olduğundan, (3.242) den

$$\ln_{m+1} \left(\frac{x}{\ln x} \right) < \ln_{m+1} x - \ln^{-m} x$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 3.3.2 : $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1., 2., 3. ve 8. koşullarını sağlıyorsa ε nun küçük pozitif değerleri için

$$\alpha_1\left(\frac{\psi_1(\varepsilon)}{\ln \psi_1(\varepsilon)}\right) - \varepsilon > (\ln \psi_1(\varepsilon))^{-(\xi+1)(n+1)} \quad (3.244)$$

dir.

İspat : k bir doğal sayı ($k \geq 1$) olmak üzere yardımcı teorem 3.3.1. yardımıyla x in büyük değerleri için

$$\ln_n^k\left(\frac{x}{\ln x}\right) < (\ln_n x - \ln^{1-n} x)^k \leq \ln_n^k x - (\ln x)^{k(1-n)}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \ln_n^{-k}\left(\frac{x}{\ln x}\right) - \ln_n^{-k} x &> \frac{1}{\ln_n^k x - (\ln x)^{k(1-n)}} - \ln_n^{-k} x \\ &= \frac{1}{\ln_n^k x \cdot (\ln x)^{k(n-1)} (\ln_n^k x - \ln^{k(1-n)} x)} \\ &> \frac{1}{\ln_n^k x \ln^{k(1-n)} x \cdot \ln_n^k x} > (\ln x)^{-k(n+1)} \end{aligned} \quad (3.245)$$

elde edilir.

Varsayım gereği $\alpha_1(x) - \ln_n^{-\xi} x$ ($\xi > 0$) fonksiyonu bir $[a, \infty)$ ($a > 0$) aralığında monoton artmayandır. Bu durumda her bir $k_1 > \xi$ sayısı için $\alpha_1(x) - \ln_n^{-k_1} x$ fonksiyonunun bir $[b, \infty)$ ($b > 0$) aralığında monoton azalan fonksiyon olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\alpha_1(x) - \ln_n^{-k_1} x \text{ fonksiyonunu}$$

$$u = \alpha_1(x) - \ln_n^{-\xi} x$$

ve

$$v = \ln_n^{-\xi} x - \ln_n^{-k_1} x$$

olmak üzere

$$\alpha_1(x) - \ln_n^{-k_1} x = u(x) + v(x) \quad (3.246)$$

şeklinde gösterelim. $v(x)$ fonksiyonu bir $[b, \infty)$ ($b > 0$) aralığında monoton azalandır.

Gerçekten

$$\begin{aligned} v'(x) &= \left(\ln_n^{-\xi} x - \ln_n^{-k_1} x \right)' \\ &= -\xi \ln_n^{-\xi-1} x (\ln_n x)' + k_1 \cdot \ln_n^{-k_1-1} x (\ln_n x)' \\ &= (\ln_n x)' \left[\frac{k_1}{\ln_n^{k_1+1} x} - \frac{\xi}{\ln_n^{\xi+1} x} \right] \\ &= (\ln_n x)' \frac{k_1}{\ln_n^{k_1+1} x} \left[1 - \frac{\xi}{k_1 \cdot \ln_n^{\xi-k_1} x} \right] \\ &= (\ln_n x)' \frac{k_1}{\ln_n^{k_1+1} x} \left[1 - \frac{\xi \ln_n^{k_1-\xi} x}{k_1} \right] \end{aligned} \quad (3.247)$$

dir. $k_1 > \xi$ ve x in büyük değerleri için $(\ln_n x)' > 0$ olduğundan (3.247) den bir $[b, \infty)$ ($b > a$) aralığında $v'(x) < 0$ olduğu elde edilir. Böylece $v(x)$ fonksiyonunun $[b, \infty)$ aralığında monoton azalan olduğu ispatlanmış olur. Öte yandan $u(x)$ fonksiyonu $[b, \infty)$ aralığında monoton artmayan olduğundan, (3.246) dan $\alpha_1(x) - \ln_n^{-k_1} x$ fonksiyonunun bir $[b, \infty)$ aralığında monoton azalan olduğu ortaya çıkar. (3.245) de $k = \lceil \xi \rceil + 1$ alalım. Yukarıdaki açıklamalardan

$\alpha_1(x) - \ln_n^{-k} x$ fonksiyonunun bir $[b, \infty)$ ($b \geq a$) aralığında monoton azalan olduğu bulunur.

Bu nedenle x in büyük değerleri için

$$\alpha_1\left(\frac{x}{\ln x}\right) - \left(\ln_n\left(\frac{x}{\ln x}\right)\right)^{-k} > \alpha_1(x) - \ln_n^{-k} x \quad (3.248)$$

dır. (3.245) ve (3.248) den

$$\alpha_1\left(\frac{x}{\ln x}\right) - \alpha_1(x) > \left(\ln_n\left(\frac{x}{\ln x}\right)\right)^{-k} - \ln_n^{-k} x > (\ln x)^{-k(n+1)} \quad (3.249)$$

elde edilir. Varsayım gereği $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_1(x) = 0$ olduğundan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi_1(\varepsilon) = \infty$$

dur. Bu nedenle (3.249) da ε küçük bir pozitif sayı olmak üzere $x = \psi_1(\varepsilon)$ alınabilir.

$$\alpha_1\left(\frac{\psi_1(\varepsilon)}{\ln \psi_1(\varepsilon)}\right) - \alpha_1(\psi_1(\varepsilon)) > (\ln \psi_1(\varepsilon))^{-k(n+1)}.$$

$k = \lfloor \xi \rfloor + 1 \leq \xi + 1$ olduğundan,

$$\alpha_1\left(\frac{\psi_1(\varepsilon)}{\ln \psi_1(\varepsilon)}\right) - \varepsilon > (\ln \psi_1(\varepsilon))^{-(\xi+1)(n+1)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 3.3.2 : 1. – 6., 8. koşulları sağlanıyor ve bir $m \in (0, \infty)$ sabiti için $\sum_{j=1}^{\infty} [\alpha_j(0)]^m$ serisi

yakınsak ise $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$N(\varepsilon) = \pi^{-1} \left[1 + O(e^{-\varepsilon^{-\beta}}) \right] \sum_j \int_{\alpha_j(x) \geq \varepsilon} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx$$

asimtotik formülü sağlanır. Burada β pozitif bir sabittir.

İspat: Teorem 3.2.12 ve teorem 3.2.15 den yararlanarak ε nun küçük pozitif değerleri için

$$\left| N(\varepsilon) - \pi^{-1} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \right| < \text{const } [l_\varepsilon \delta + l_\varepsilon \psi_1^{-k}(\varepsilon)]$$

elde edilir. Burada $k = \frac{1}{2}$ alınır ve (3.134) formülü göz önüne alınırsa

$$\left| N(\varepsilon) - \pi^{-1} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \right| < \text{const } l_\varepsilon \sqrt{\psi_1(\varepsilon)} \quad (3.250)$$

bulunur. Bu eşitsizliğin birinci tarafındaki toplamı üstten sınırlandırılalım.

$$f(\varepsilon) = \psi_1(\varepsilon) [\ln \psi_1(\varepsilon)]^{-1}$$

olsun. $Q(x)$ operatör fonksiyonunun 2. ve $p(x)$ fonksiyonunun da 4., 6. koşullarını sağlamasından yararlanarak

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{I_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx &> \int_0^{\psi_1(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_1(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx > \int_{\frac{f(\varepsilon)}{2}}^{f(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_1(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \\ &> \sqrt{c_2}^{-1} \int_{\frac{f(\varepsilon)}{2}}^{f(\varepsilon)} \sqrt{\alpha_1(x) - \varepsilon} dx > \frac{f(\varepsilon)}{2\sqrt{c_2}} \sqrt{\alpha_1(f(\varepsilon)) - \varepsilon} \end{aligned} \quad (3.251)$$

elde edilir. Yardımcı teorem 3.3.2 den ve (3.251) den

$$\sum_{j=1}^{I_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx > \frac{\psi_1(\varepsilon)}{2\sqrt{c_2} \ln \psi_1(\varepsilon)} (\ln \psi_1(\varepsilon))^{\frac{1}{2}(\xi+1)(n+1)} > c_{11} \psi_1^{3/4}(\varepsilon) \quad (3.252)$$

bulunur. (3.250) ve (3.252) den

$$\left| \frac{N(\varepsilon)}{\pi^{-1} \sum_{j=1}^{I_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx} - 1 \right| < c_{11} I_\varepsilon \psi_1^{-1/4}(\varepsilon) \quad (3.253)$$

bulunur. $\alpha_1(x)$ fonksiyonu 8. koşulunu sağladığından ε nun küçük pozitif değerleri için

$$\varepsilon = \alpha_1(\psi_1(\varepsilon)) \geq (\ln \psi_1(\varepsilon))^{-\xi}$$

dir. Buradan

$$\psi_1(\varepsilon) > e^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad (3.254)$$

elde edilir. (3.215), (3.253) ve (3.254) den

$$\left| \frac{N(\varepsilon)}{\pi^{-1} \sum_{j=1}^{l_\varepsilon} \int_0^{\psi_j(\varepsilon)} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx} - 1 \right| < c_{13} \varepsilon^{-m} e^{-\frac{1}{4} \varepsilon^{-\frac{1}{4}}} < e^{-\varepsilon^{-\beta}}$$

bulunur. Bu eşitsizlikten $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$N(\varepsilon) = \pi^{-1} \left[1 + O(e^{-\varepsilon^{-\beta}}) \right] \sum_j \int_{\alpha_j(x) \geq \varepsilon} \sqrt{\frac{\alpha_j(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx$$

asimtotik formülü elde edilir. $\square$

3.4 Örnekler

Bu kısımda teorem 3.3.1 ve teorem 3.3.2 nin koşullarını sağlayan $Q(x)$ operatör fonksiyonuna ve $p(x)$ skaler fonksiyonuna örnekler vereceğiz.

1) Önce teorem 3.3.1 in koşullarını sağlayan $Q(x)$ operatör fonksiyonuna bir örnek verelim.

$\{e_n\}_1^\infty$ H uzayında ortonormal bir taban olmak üzere her $x \in [0, \infty)$ için $Q(x) : H \rightarrow H$

$$Q(x)f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx + n^8} (f, e_n) e_n \quad (f \in H)$$

operatörünü göz önüne alalım. 1. koşulunun sağlandığı yani her $x \in [0, \infty)$ için $Q(x) : H \rightarrow H$ in tam sürekli kendine eş ve pozitif bir operatör olduğu açıktır. 2. koşulunun sağlandığını yani her $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in [0, \infty)$) ve sıfırdan farklı her $f \in H$ için $((Q(x_1) - Q(x_2))f, f) > 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} ((Q(x_1) - Q(x_2))f, f) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{nx_1 + n^8} - \frac{1}{nx_2 + n^8} \right] |(f, e_n)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x_2 - x_1)}{(nx_1 + n^8)(nx_2 + n^8)} |(f, e_n)|^2 \end{aligned} \quad (3.255)$$

dir. $f \neq 0$ olduğundan $(f, e_i) \neq 0$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Dolayısıyla (3.255) den

$$((Q(x_1) - Q(x_2))f, f) \geq \frac{i(x_2 - x_1)}{(ix_1 + i^8)(ix_2 + i^8)} |(f, e_i)|^2 > 0$$

bulunur. 3. koşulunun sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} \|[Q(x + \Delta x) - Q(x)]f\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Delta x}{(nx + n^8)(nx + n\Delta x + n^8)} (f, e_n) e_n \right\|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (\Delta x)^2}{(nx + n^8)^2 (nx + n\Delta x + n^8)^2} |(f, e_n)|^2 \\ &\leq (\Delta x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 = |\Delta x|^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\|Q(x + \Delta x) - Q(x)\| \leq |\Delta x|$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten $Q(x)$ operatör fonksiyonunun $B(H)$ uzayındaki norma göre sürekli olduğu görülmektedir. Ayrıca

$$\|Q(x)\| = \frac{1}{x+1}$$

olduğundan $\lim_{x \rightarrow \infty} \|Q(x)\| = 0$ dir. $Q(x)$ in $k_0 = 1$ için 7. koşulunu sağladığı açıktır. Öyle ki

$$\alpha_1(x) = \|Q(x)\| = \frac{1}{x+1}$$

olduğundan her $\eta > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_1(x) x^{1-\eta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\eta}}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\alpha_1(x) x^{1+\eta}]^{-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^{1+\eta}} = 0$$

dir.

$$0 < m < \frac{(2 - k_0)^2}{8k_0 - 2k_0^2} = \frac{1}{6}$$

koşulunu sağlayan $m = \frac{1}{7}$ sabiti için $\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(0)]^m = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{8}{7}}$ serisi yakınsaktır. Böylece teorem 3.3.1 in $Q(x)$ ile ilgili tüm koşullarının sağlandığını göstermiş olduk.

2) Hem teorem 3.3.1 de hem de teorem 3.3.2 de $p(x)$ fonksiyonunun aynı 4., 5. ve 6. koşullarını sağlaması gerektiği görülmektedir.

$$p(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}; \quad 0 \leq x < \infty \quad \text{olsun.}$$

$$p'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \geq 0; \quad 0 \leq x < \infty$$

$p'(x) \leq 1$ ve $\frac{1}{2} \leq p(x) < 1$ dir. Buradan $p(x)$ fonksiyonunun 4., 5. ve 6. koşullarını sağladığı görülmektedir.

3) Bu kez teorem 3.3.2 nin koşullarını sağlayan $Q(x)$ operatör fonksiyonuna bir örnek verelim. a ,

$$a > e^3 \text{ ve } \ln x > (\ln \ln x)^2; \quad a \leq x < \infty \quad (3.256)$$

koşullarını sağlayan bir sabit olmak üzere

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{2}{\ln \ln a} - \frac{x}{a \ln \ln a}, & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{\ln \ln x}, & a \leq x < \infty \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $\{e_n\}_1^\infty$ H uzayında ortonormal bir taban olmak üzere her $x \in [0, \infty)$ için $Q(x): H \rightarrow H$

$$Q(x)f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(x) n^{-2} (f, e_n) e_n$$

operatörünü göz önüne alalım. Her $x \in [0, \infty)$ için $Q(x): H \rightarrow H$ tam sürekli kendine eş ve pozitif bir operatör olduğundan 1. koşulu sağlanır. $\alpha(x)$ ($0 \leq x < \infty$) fonksiyonunun azalan olmasından $Q(x)$ operatör fonksiyonunun azalan olduğu yani 2. koşulunun sağlandığı elde

edilir. Ayrıca $\alpha(x)$ fonksiyonunun sürekli olmasından ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ eşitliğinden 3. koşulunun sağlandığı elde edilir. $n = 1$ ve $\xi = 1$ değerleri için 8. koşulunun sağlandığını gösterelim. $x \in [a, \infty)$ iken

$$\begin{aligned} \left[\alpha(x) - \frac{1}{\ln x} \right]' &= \left(\frac{1}{\ln \ln x} - \frac{1}{\ln x} \right)' = -\frac{\frac{1}{x \ln x}}{(\ln \ln x)^2} + \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{1}{x \ln x} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln \ln x)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.257)$$

dir. (3.256) ve (3.257) den

$$\left[\alpha(x) - \frac{1}{\ln x} \right]' < 0, \quad (a \leq x < \infty)$$

bulunur. Dolayısıyla $\alpha(x) - (\ln x)^{-1}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında azalandır. Ayrıca $a > e^3$, $\alpha_1(x) = \alpha(x)$ olduğunu göz önüne alarak ve (3.256) bağıntısından yararlanarak

$$\alpha_1(x) - \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln \ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln x - \ln \ln x}{\ln x \cdot \ln \ln x} > 0$$

elde edilir. Böylece $n = 1$ ve $\xi = 1$ değerleri için 8. koşulunun sağlandığını göstermiş olduk.

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere $L_2(0, \infty; H)$ Hilbert uzayında

$$l(y) = -(p(x)y'(x))' - Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve $\alpha \in (-\infty, \infty)$ bir sabit olmak üzere

$$\cos \alpha \cdot y(0) + \sin \alpha \cdot y'(0) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan bir simetrik operatörün L kapanışının kendine eş olduğu, bu kendine eş operatörün alttan yarı sınırlı olduğu, spektrumunun negatif kısmının ayrık olduğu ispatlanmış ve $-\varepsilon$ dan ($\varepsilon > 0$) küçük olan özdeğerlerin $N(\varepsilon)$ sayısı için $\varepsilon \rightarrow 0$ iken asimtotik formüller bulunmuştur. ly nin ifadesinde yer alan $p(x)$ skaler fonksiyonunun ve $Q(x)$ operatör fonksiyonunun belirli koşulları sağladıkları varsayılmıştır

Arlinson, G.L. (1994), "Hilbert Uzayında Sonsuz Operatör Kapanışın Doğrulanması", *Harikada*, DAN Rusl, V. 117, No. 1 (R)

Ayık, H., (1995), "Sonsuz Boyutlu Verilmiş İleri Mertebe ve İkinci Türevli Hilbert Uzayında Operatörlerin Özdeğerlerinin Sayısının Asimtotik İfadesi", *Yüksek Matematik, Çanakkale Mustafa Kemal Atatürk Dergi*

Bergman, M. (1978), "Operator Kapanış ve Birinci Mertebe ve İkinci Türevli Hilbert Uzaylarında Asimtotik İfadesi", *Fonksiyonel Analiz ve Uygulamalar*, *Yüksek Matematik*, 1978, 1-10 (R)

Cobbler, J.C. and Krein, M.G. (1972), "On the Spectrum of a Self-Adjoint Operator", *Transactions of the American Mathematical Society*, 167, 1-10

Courant, R. and Hilbert, E. (1953), *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Interscience Publishers, New York

Glazman, I.M. (1971), "On the Spectrum of a Self-Adjoint Operator", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34, 1-10

Glazman, I.M. (1972), "On the Spectrum of a Self-Adjoint Operator", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34, 1-10

Glazman, I.M. (1973), "On the Spectrum of a Self-Adjoint Operator", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34, 1-10

Glazman, I.M. (1974), "On the Spectrum of a Self-Adjoint Operator", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34, 1-10

Glazman, I.M. (1975), "On the Spectrum of a Self-Adjoint Operator", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34, 1-10

KAYNAKLAR

- Adıgüzelov, E.E., (1980), "Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Operatör Probleminin Spektrumunun Negatif Kısımının Asimtotik Davranışı Hakkında", İzv. An Az. SSR, Seriya fiz.-tekn. i mat. nauk, No:6, 8-12. (R)*
- Adıgüzelov, E.E., Bakşi, Ö. and Bayramov, A.M., (2002), "The Asymptotic Behaviour of The Negative Part of The Spectrum of Sturm-Liouville Operator with The Operator Coefficient which Has Singularity", International Journal of Differential Equations and Applications, vol. 6, No: 3, 315-329.
- Adıgüzelov, E.E., Bairamoglu, M. and Maksudov, F.G., (1993), "On Asymptotics of Spectrum and Trace of High Order Differential Operator with Operator Coefficients", Doğa Turkish Journal of Mathematics, vol. 17, number 2, 113-128.
- Adıgüzelov, E.E. ve Oer, Z., (2002), "Yarı Eksende Verilmiş Sturm-Liouville Operatörünün Negatif Özdeğerlerinin Toplamının Asimtotik İfadesi", YTÜ Dergisi 2002-1, 26-35.
- Aslanov, G.İ., (1994), "Hilbert Uzayında Sınırsız Operatör Katsayılı Diferansiyel Denklemler Hakkında", DAN Rosii, V. 337, No: 1 (R)
- Avcı, H., (1998), "Sonsuz Bölgede Verilmiş İkinci Mertebeden Eliptik Tipteki Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerlerinin Sayısının Asimtotik İfadesi", YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
- Bayramoğlu, M., (1971), "Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı", Fonksiyonel Analiz ve Uygulamaları, Sbornik, Bakü: Bilim, 144-146. (R)
- Cohberg, I.C. and Krein, M.G., (1969), "Introduction to the Theory of Linear Non-Selfadjoint Operators", Translation of Mathematical Monographs volume 18, Amer. Math. Soc. , Providence, R.I.
- Courant, R. and Hilbert, D., (1970), Methods of Mathematical Physics, vol. 1, New York.
- Erugin, N.P., (1979), Kniga dlya čteniya po obşemu kursu differentsialnıkh uravneniy, İzd. Nauka i Teknika, Minsk, 7475.
- Glazman, I.M., (1965), "Direct Methods Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators", Jerusalem, 1965.
- Gorbaçuk, M.A. and Gorbaçuk, V.I., (1984), Diferansiyel Operatör Denklemler için Sınır Değer Problemleri, Kiev, Nauka Dumka, 2835.
- Hüseynov, V.G. and Maksudov, F.G., (1978). "Yarı Eksende Verilmiş Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin Özdeğerlerinin Sayısının Asimtotik Davranışı", Dokl. AN Az. SSR, No:5. (R)
- Kirillov, A.A., (1976), Elementary Theory of Representations, Springer Verlag, New York.
- Kostyuchenko, A.G. and Levitan, B.M., (1967), "Asymptotic Behaviour of the Eigenvalue of

* : R, kaynağın Rusça olduğunu gösterir.

the Sturm-Liouville Operator Problem", *Funct. Analysis Appl.* 1, 75-83.

Lysternik, L.A. and Sobolev, V.I., (1955), *Elements of Functional Analysis*, (English translation), Fredrick Ungar New York.

Smirnov, V.I., (1964), *A Cours of Higher Mathematics*, vol. 5, Pergamon Pres, New York.

Skaçek, B.Y., (1963), "Bir Boyutlu Diferansiyel Operatörlerin Spektrumunun Negatif Kısımının Asimtotu", *Prikl. metod reşeniya differens. uravneniy*, Kiev, 96-109. (R)

Yafaev, D.R., (1970), "Schrödinger Operatör Denkleminin Negatif Spektrumu Hakkında", *Matem. zametki*, 1970, 7, No:6. (R)

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 20.12.1973

Doğum yeri Kelkit

Lise 1987-1990 Erzincan Lisesi

Lisans 1991-1997 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 1998-2001 Mimar Sinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Doktora 2001-2006 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik. Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

1998- Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü

