

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÖKLİT UZAYINDA HİPERYÜZEYLERİN
ASİMPOTOTİKLERİNİ KORUYAN DÖNÜŞÜMLER**

Matematikçi Yasemin ALAGÖZ

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 06 Mart 2009
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN (YTÜ)
: Doç. Dr. Uğur DURSUN (İTÜ)
: Prof. Dr. Aynur UYSAL (DOĞUŞ Ü)
: Doç. Dr. Ayşe KARA (İTÜ)

İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	ii
ÖNSÖZ	iii
ÖZET	vi
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ	1
2. BİR HİPERYÜZEYİN ASİMPOTİK ÇİZGİLERİNİN DENKLEMİ.....	2
3. BİR HİPERYÜZEYİN ASİMPOTİK ÇİZGİLERİNİ KORUYAN DÖNÜŞÜMLER	7
4. PROJEKTİF DÖNÜŞÜMÜN BİR KARAKTERİZASYONU	25
5. (Uras, F 1995)' DEKİ HATALAR VE DÜZELTMELER.....	32
6. SONUÇLAR	41
KAYNAKLAR.....	42
ÖZGEÇMİŞ.....	43

SİMGE LİSTESİ

I	Hiperyüzeyin 1. temel formu
II	Hiperyüzeyin 2. temel formu
$\mathbf{N}$	Hiperyüzeyin birim normal vektörü
$\mathbf{r}$	Hiperyüzeyin yer vektörü
S	Hiperyüzey
$\mathbf{T}$	Koordinat dönüşümü

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sırasında beni her konuda yönlendiren, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Ziya SOYUÇOK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmam sırasında yanımda olan ve bana varlıklarıyla güç veren eşim ve aileme teşekkür ediyorum.

ÖZET

Bu tezde, n -boyutlu Öklit uzayında hiperyüzeylerin asimptotiklerini koruyan, yani bir hiperyüzeyin asimptotiğini diğer bir hiperyüzeyin asimptotiğine dönüştüren dönüşümlerle ilgilendik. Öncelikle bu dönüşümlerin sağlaması gereken bir denklem sistemi elde ettik ve buna bir örnek olarak da projektif dönüşümün bu denklem sistemini sağladığını gösterdik. Daha sonra bu denklem sistemini sağlayan dönüşümleri araştırdık ve bu denklem sistemini sağlayan, projektif dönüşümden başka bir dönüşüm olmadığını gösterdik ve böylece projektif dönüşümün bir karakterizasyonunu elde ettik: n -boyutlu Öklit uzayında bir dönüşümün hiperyüzeylerin asimptotiklerini koruyabilmesi için gerek ve yeter koşul dönüşümün projektif dönüşüm olmasıdır. (Uras, F 1995) de 3-boyutlu Öklit uzayında benzer sonuçlar elde edilmiş fakat bu sonuçlar uzun hesaplamalar ve bazı hatalar içermektedir. Bu hatalar düzeltilmiş ve hesaplamalar daha kısa bir şekilde yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Projektif dönüşüm, hiperyüzeyler, asimptotik çizgiler.

ABSTRACT

THE TRANSFORMATIONS PRESERVING THE ASIMPTOTIC LINES OF HYPERSURFACES IN THE EUCLIDEAN SPACE

In this thesis, we consider the transformations that transform the asymptotic lines of a hypersurface to the asymptotic lines of other hypersurface preserving the asymptotic lines of hypersurfaces in n -dimensional Euclidean space. Firstly, we obtain a system of equations which must be satisfied by the transformation, and as an example we show that the projective transformation satisfies this system. After that we search the transformation which must satisfy this system. We show that only the projective transformation satisfies this system of equations, and we obtain the following characterization of the projective transformation: In n -dimensional Euclidean space, a transformation preserves the asymptotic lines of hypersurfaces if and only if it is the projective transformation. The similar results in 3-dimensional Euclidean space was obtained in (Uras, F 1995). But that paper contains very long calculations and some errors. Using our method we correct the errors in a short calculation.

Keywords: Projective transformation, hypersurfaces, asymptotic lines.

1. GİRİŞ

Öklit uzayında projektif dönüşüm bazı ilginç özelliklere sahiptir. Örneğin, Lovett (1895/96), projektif dönüşümün aşağıdaki karakterizasyonunu elde etmiştir: Bir dönüşümün projektif olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir doğruyu diğer bir doğruya dönüştürmesidir. 3-boyutlu Öklit uzayında, projektif dönüşüm sonsuz rijit bir yüzeyi diğer bir sonsuz rijit yüzeye dönüştürür, yani projektif dönüşüm sonsuz rijitliği korur (Efimov; Özkan ve Soyuçok, 1987). Projektif dönüşüm bir yüzeyin asimptotik çizgilerini de korur (Eisenhart, 1960). Uras (1995) bu problemin tersi ile ilgilenmiş ve 3-boyutlu Öklit uzayında asimptotik çizgileri koruyan dönüşümün bir projektif dönüşüm olduğunu göstermiştir. Fakat gözden kaçan bazı hatalardan dolayı bulunan dönüşüm özel bir projektif dönüşümdür. Bunun yanı sıra, çok uzun hesaplamalar olduğu için bu metodu kullanarak n-boyutlu Öklit uzayı için genelleştirme yapabilmek çok zor görünmektedir. Bu çalışmada n-boyutlu Öklit uzayında, hiperyüzeylerin asimptotiklerini koruyan, yani bir hiperyüzeyin asimptotiğini diğer bir hiperyüzeyin asimptotiğine dönüştüren dönüşümlerle ilgilendik ve bir dönüşümün hiperyüzeylerin asimptotiklerini koruması için gerek ve yeter koşulun dönüşümün projektif dönüşüm olması gerektiğini gösterdik. Böylece projektif dönüşümün yeni bir karakterizasyonunu elde ettik.

2. BİR HİPERYÜZEYİN ASİMPOTOTİK ÇİZGİLERİNİN DENKLEMİ

n-boyutlu Öklit uzayında lokal olarak bir hiperyüzeyi, uzayın metriği

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2 \quad (2.1)$$

olmak üzere,

$$\mathbf{r}(u^1, \dots, u^{n-1}) = (x^1(u^1, \dots, u^{n-1}), x^2(u^1, \dots, u^{n-1}), \dots, x^n(u^1, \dots, u^{n-1})) \quad (2.2)$$

denklemleriyle ifade edebiliriz.

$\mathbf{r}(u^1, u^2, \dots, u^{n-1})$, nin 3. mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olduğunu ve hiperyüzeyin $\mathbf{r}_{,1}, \mathbf{r}_{,2}, \dots, \mathbf{r}_{,n-1}$ teğet vektörlerinin lineer bağımsız vektörler olduğunu varsayacağız. Burada

$$\mathbf{r}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.3)$$

dır.

Hiperyüzeyin 1. ve 2. temel formu,

$$g_{ij} = \mathbf{r}_{,i} \cdot \mathbf{r}_{,j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.4)$$

$$L_{ij} = \mathbf{r}_{,ij} \cdot \mathbf{N} \quad (2.5)$$

olmak üzere

$$I = g_{ij} du^i du^j, II = L_{ij} du^i du^j \quad (2.6)$$

şeklindedir; $\mathbf{r}_{,ij}$

$$\mathbf{r}_{,ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} \quad (2.7)$$

ile tanımlanmaktadır.

Hiperyüzeyin birim normal vektörünü $\mathbf{N}$ ile göstereceğiz. Buna göre,

$$\mathbf{r}_{,i} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1 \quad (2.9)$$

dir.

Bir hiperyüzeyin asimptotiklerinin denklemi,

$$L_{ij} du^i du^j = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.10)$$

ile verilir (Weatherburn, 1963).

(2.2) hiperyüzeyi için

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{,1} &= (x_{,1}^1, x_{,1}^2, \dots, x_{,1}^n) \\ \mathbf{r}_{,2} &= (x_{,2}^1, x_{,2}^2, \dots, x_{,2}^n) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_{,n-1} &= (x_{,n-1}^1, x_{,n-1}^2, \dots, x_{,n-1}^n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

olduğundan (2.8) denklemi,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{,1}^1 & x_{,1}^2 & \dots & x_{,1}^n \\ x_{,2}^1 & x_{,2}^2 & \dots & x_{,2}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{,n-1}^1 & x_{,n-1}^2 & \dots & x_{,n-1}^n \end{bmatrix}, \quad \left(x_{,i}^k = \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \right) \quad (2.12)$$

ve

$$\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_n) \quad (2.13)$$

olmak üzere,

$$\mathbf{A} \mathbf{N}^T = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\mathbf{r}_{,i} = (x_{,i}^1, x_{,i}^2, \dots, x_{,i}^n), \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \text{ vektörleri lineer bağımsız olduğu için}$$

$$\Delta_n = \det \begin{bmatrix} x_{,1}^1 & x_{,1}^2 & \dots & x_{,1}^{n-1} \\ x_{,2}^1 & x_{,2}^2 & \dots & x_{,2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{,n-1}^1 & x_{,n-1}^2 & \dots & x_{,n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (2.15)$$

dır. Buna göre (2.14) denkleminin açık şekli

$$\begin{aligned} x_{,1}^1 N_1 + x_{,1}^2 N_2 + \dots + x_{,1}^{n-1} N_{n-1} + x_{,1}^n N_n &= 0 \\ x_{,2}^1 N_1 + x_{,2}^2 N_2 + \dots + x_{,2}^{n-1} N_{n-1} + x_{,2}^n N_n &= 0 \\ x_{,3}^1 N_1 + x_{,3}^2 N_2 + \dots + x_{,3}^{n-1} N_{n-1} + x_{,3}^n N_n &= 0 \\ &\vdots \\ x_{,n-1}^1 N_1 + x_{,n-1}^2 N_2 + \dots + x_{,n-1}^{n-1} N_{n-1} + x_{,n-1}^n N_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

dır. Bu denklem sistemini de

$$\begin{aligned} x_{,1}^1 N_1 + x_{,1}^2 N_2 + \dots + x_{,1}^{n-1} N_{n-1} &= -x_{,1}^n N_n \\ x_{,2}^1 N_1 + x_{,2}^2 N_2 + \dots + x_{,2}^{n-1} N_{n-1} &= -x_{,2}^n N_n \\ x_{,3}^1 N_1 + x_{,3}^2 N_2 + \dots + x_{,3}^{n-1} N_{n-1} &= -x_{,3}^n N_n \\ &\vdots \\ x_{,n-1}^1 N_1 + x_{,n-1}^2 N_2 + \dots + x_{,n-1}^{n-1} N_{n-1} &= -x_{,n-1}^n N_n \end{aligned} \quad (2.17)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu sistemi Cramer yöntemiyle çözersek

$$N_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_{,1}^n N_n & x_{,1}^2 & \dots & x_{,1}^{n-1} \\ -x_{,2}^n N_n & x_{,2}^2 & \dots & x_{,2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{,n-1}^n N_n & x_{,n-1}^2 & \dots & x_{,n-1}^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{,1}^1 & x_{,1}^2 & \dots & x_{,1}^{n-1} \\ x_{,2}^1 & x_{,2}^2 & \dots & x_{,2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{,n-1}^1 & x_{,n-1}^2 & \dots & x_{,n-1}^{n-1} \end{vmatrix}} = (-1)^{n-1} N_n \frac{\begin{vmatrix} x_{,1}^2 & \dots & x_{,1}^{n-1} & x_{,1}^n \\ x_{,2}^2 & \dots & x_{,2}^{n-1} & x_{,2}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{,n-1}^2 & \dots & x_{,n-1}^{n-1} & x_{,n-1}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{,1}^1 & x_{,1}^2 & \dots & x_{,1}^{n-1} \\ x_{,2}^1 & x_{,2}^2 & \dots & x_{,2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{,n-1}^1 & x_{,n-1}^2 & \dots & x_{,n-1}^{n-1} \end{vmatrix}} \quad (2.18)$$

yani,

$$N_1 = \frac{(-1)^{n-1} N_n \Delta_1}{\Delta_n} \quad (2.19)$$

bulunur. $N_2, N_3, \dots, N_{n-1}$ değerleri de

$$\begin{aligned}
 N_2 &= \frac{(-1)^{n-2} N_n \Delta_2}{\Delta_n} \\
 N_3 &= \frac{(-1)^{n-3} N_n \Delta_3}{\Delta_n} \\
 &\vdots \\
 N_{n-1} &= \frac{-N_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklinde yazılabilir. Burada Δ_i , $\mathbf{A}$ matrisinin i . sütunun atılmasıyla elde edilen matrisin determinantı, yani,

$$\Delta_i = \det \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^{i-1} & x_2^{i+1} & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{i-1} & x_{n-1}^{i+1} & \dots & x_{n-1}^n \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

dır.

$$k = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2} \tag{2.22}$$

olmak üzere (2.19) ve (2.20) den $\mathbf{N}$ birim normal vektörü

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} (\Delta_1, -\Delta_2, \dots, (-1)^{1+n} \Delta_n) \tag{2.23}$$

şeklinde elde edilir.

$$\mathbf{r}_{,ij} = (x_{,ij}^1, x_{,ij}^2, \dots, x_{,ij}^n) \tag{2.24}$$

yi ve bulduğumuz $\mathbf{N}$ birim normal vektörünü (2.5) denkleminde yerine yazarsak

$$L_{ij} = \frac{1}{k} [x_{,ij}^1 \Delta_1 + x_{,ij}^2 (-\Delta_2) + \dots + x_{,ij}^n (-1)^{1+n} \Delta_n] \tag{2.25}$$

elde ederiz. Burada

$$x_{,ij}^k = \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^i \partial u^j} \quad (2.26)$$

dır. Buna göre,

$$kL_{ij} = \det \begin{bmatrix} x_{,ij}^1 & x_{,ij}^2 & x_{,ij}^3 & \cdots & x_{,ij}^n \\ x_{,1}^1 & x_{,1}^2 & x_{,1}^3 & \cdots & x_{,1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{,n-1}^1 & x_{,n-1}^2 & x_{,n-1}^3 & \cdots & x_{,n-1}^n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

yazabiliriz.

Şimdi bir S hiperyüzeyi için parametreleri

$$u^1 = x^1, u^2 = x^2, \dots, u^{n-1} = x^{n-1} \quad (2.28)$$

şeklinde seçelim. Buna göre S hiperyüzeyinin denklemi

$$\mathbf{r}(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) = (x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})) \quad (2.29)$$

olur ve S hiperyüzeyi için (2.27) denklemi

$$kL_{ij} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{,ij}^n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{,1}^n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{,2}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{,n-1}^n \end{bmatrix} = (-1)^{1+n} x_{,ij}^n \quad (2.30)$$

halini alır.

Buna göre S hiperyüzeyinin asimptotiklerinin diferansiyel denklemi (2.10) denkleminde

$$x_{,ij}^n dx^i dx^j = 0 \quad (2.31)$$

olarak elde edilir.

3. BİR HİPERYÜZEYİN ASİMPOTOTİK ÇİZGİLERİNİ KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

Şimdi n - boyutlu Öklit uzayında

$$\mathbf{T}: y^a = y^a(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (a = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

koordinat dönüşümünü ele alalım. $\mathbf{T}$ 'nin bir koordinat dönüşümü olması için

$$\mathbf{T}_{,b} = \begin{bmatrix} y_{,b}^1 \\ y_{,b}^2 \\ \dots \\ y_{,b}^n \end{bmatrix}, \quad \left(a, b = 1, 2, \dots, n; \quad y_{,b}^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^b} \right) \quad (3.2)$$

nin elemanları sürekli ve

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & y_{,3}^1 & \dots & y_{,n}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & y_{,3}^2 & \dots & y_{,n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & y_{,3}^n & \dots & y_{,n}^n \end{vmatrix} = \det[\mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n}] = |\mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n}| \quad (3.3)$$

olmak üzere $\Delta \neq 0$ olmalıdır. $\mathbf{T}$ 'nin 3. mertebeden diferansiyellenebilir olduğunu varsayacağız.

Eğer $\mathbf{T}$ dönüşümü (2.29) denklemi ile verilen S hiperyüzeyine uygulanırsa

$$\mathbf{T}': y^a = y^a(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})), \quad (a = 1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

elde edilir. O halde $\mathbf{T}$ dönüşümü S hiperyüzeyini S^* hiperyüzeyine dönüştürür ve S^* hiperyüzeyinin denklemi,

$$\mathbf{r}^*(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) = (y^1(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})), \dots, y^n(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}))) \quad (3.5)$$

olur.

S hiperyüzeyinin asimptotiklerine S^* hiperyüzeyinin asimptotiklerini karşı getirmek istiyoruz.

Bunun için S^* hiperyüzeyinin asimptotiklerinin denklemini bulalım.

S^* hiperyüzeyi için öncelikle $\mathbf{r}_i^*$ ve $\mathbf{r}_{ij}^*$ değerlerini bulalım:

$$\mathbf{r}_i^* = (y_i^1 + y_{,n}^1 x_{,i}^n, y_i^2 + y_{,n}^2 x_{,i}^n, \dots, y_i^n + y_{,n}^n x_{,i}^n) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{r}_{ij}^* = (y_{ij}^1 + y_{,in}^1 x_{,j}^n + y_{,nj}^1 x_{,i}^n + y_{,nn}^1 x_{,i}^n x_{,j}^n + y_{,n}^1 x_{,ij}^n, \dots, y_{ij}^n + y_{,in}^n x_{,j}^n + y_{,nj}^n x_{,i}^n + y_{,nn}^n x_{,i}^n x_{,j}^n + y_{,n}^n x_{,ij}^n) \quad (3.7)$$

dır. Bu değerlerle, (3.4) ten

$$\mathbf{T}'_i = (y_i^1 + y_{,n}^1 x_{,i}^n, y_i^2 + y_{,n}^2 x_{,i}^n, y_i^3 + y_{,n}^3 x_{,i}^n, \dots, y_i^n + y_{,n}^n x_{,i}^n) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{T}'_{ij} = (y_{ij}^1 + y_{,in}^1 x_{,j}^n + y_{,nj}^1 x_{,i}^n + y_{,nn}^1 x_{,i}^n x_{,j}^n + y_{,n}^1 x_{,ij}^n, \dots, y_{ij}^n + y_{,in}^n x_{,j}^n + y_{,nj}^n x_{,i}^n + y_{,nn}^n x_{,i}^n x_{,j}^n + y_{,n}^n x_{,ij}^n) \quad (3.9)$$

elde edilir. Şimdi $k^* L_{ij}^*$ değerini hesaplayabiliriz. Buna göre S^* hiperyüzeyi için, (2.27) denkleminde

$$k^* L_{ij}^* = \begin{vmatrix} y_{ij}^1 + y_{,in}^1 x_{,j}^n + y_{,nj}^1 x_{,i}^n + y_{,nn}^1 x_{,i}^n x_{,j}^n + y_{,n}^1 x_{,ij}^n & \cdots & y_{ij}^n + y_{,in}^n x_{,j}^n + y_{,nj}^n x_{,i}^n + y_{,nn}^n x_{,i}^n x_{,j}^n + y_{,n}^n x_{,ij}^n \\ y_{,1}^1 + y_{,n}^1 x_{,1}^n & \cdots & y_{,1}^n + y_{,n}^n x_{,1}^n \\ y_{,2}^1 + y_{,n}^1 x_{,2}^n & \cdots & y_{,2}^n + y_{,n}^n x_{,2}^n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{,n-1}^1 + y_{,n}^1 x_{,n-1}^n & \cdots & y_{,n-1}^n + y_{,n}^n x_{,n-1}^n \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

bulunur. (3.10) un sağ yanını

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} y_{ij}^1 + y_{,in}^1 x_{,j}^n + y_{,nj}^1 x_{,i}^n + y_{,nn}^1 x_{,i}^n x_{,j}^n + y_{,n}^1 x_{,ij}^n & \cdots & y_{ij}^n + y_{,in}^n x_{,j}^n + y_{,nj}^n x_{,i}^n + y_{,nn}^n x_{,i}^n x_{,j}^n + y_{,n}^n x_{,ij}^n \\ y_{,1}^1 + y_{,n}^1 x_{,1}^n & \cdots & y_{,1}^n + y_{,n}^n x_{,1}^n \\ y_{,2}^1 + y_{,n}^1 x_{,2}^n & \cdots & y_{,2}^n + y_{,n}^n x_{,2}^n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{,n-1}^1 + y_{,n}^1 x_{,n-1}^n & \cdots & y_{,n-1}^n + y_{,n}^n x_{,n-1}^n \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

ile gösterirsek

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}^T| \quad (3.12)$$

olduğundan, (3.10)

$$k^* L_{ij}^* = |\mathbf{B}^T| \quad (3.13)$$

yani,

$$k^* L_{ij}^* = \begin{vmatrix} y_{ij}^1 + y_{in}^1 x_{ij}^n + y_{nj}^1 x_i^n + y_{nn}^1 x_i^n x_{ij}^n + y_{nn}^1 x_i^n x_{ij}^n + y_{nn}^1 x_{ij}^n & y_{ij}^1 + y_{in}^1 x_{ij}^n & \cdots & y_{ij}^1 + y_{in}^1 x_{ij}^n \\ y_{ij}^2 + y_{in}^2 x_{ij}^n + y_{nj}^2 x_i^n + y_{nn}^2 x_i^n x_{ij}^n + y_{nn}^2 x_{ij}^n & y_{ij}^2 + y_{in}^2 x_{ij}^n & \cdots & y_{ij}^2 + y_{in}^2 x_{ij}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{ij}^n + y_{in}^n x_{ij}^n + y_{nj}^n x_i^n + y_{nn}^n x_i^n x_{ij}^n + y_{nn}^n x_{ij}^n & y_{ij}^n + y_{in}^n x_{ij}^n & \cdots & y_{ij}^n + y_{in}^n x_{ij}^n \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

şeklinde yazabiliriz. Bunu da,

$$\mathbf{T}'_1 = \begin{bmatrix} y_{ij}^1 + y_{in}^1 x_{ij}^n \\ y_{ij}^2 + y_{in}^2 x_{ij}^n \\ \cdots \\ y_{ij}^{n-1} + y_{in}^{n-1} x_{ij}^n \\ y_{ij}^n + y_{in}^n x_{ij}^n \end{bmatrix}, \mathbf{T}'_2 = \begin{bmatrix} y_{ij}^1 + y_{in}^1 x_{ij}^n \\ y_{ij}^2 + y_{in}^2 x_{ij}^n \\ \cdots \\ y_{ij}^{n-1} + y_{in}^{n-1} x_{ij}^n \\ y_{ij}^n + y_{in}^n x_{ij}^n \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{T}'_{n-1} = \begin{bmatrix} y_{ij}^1 + y_{in}^1 x_{ij}^n \\ y_{ij}^2 + y_{in}^2 x_{ij}^n \\ \cdots \\ y_{ij}^{n-1} + y_{in}^{n-1} x_{ij}^n \\ y_{ij}^n + y_{in}^n x_{ij}^n \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

ve

$$\mathbf{T}'_{ij} = \begin{bmatrix} y_{ij}^1 + y_{in}^1 x_{ij}^n + y_{nj}^1 x_i^n + y_{nn}^1 x_i^n x_{ij}^n + y_{nn}^1 x_{ij}^n \\ y_{ij}^2 + y_{in}^2 x_{ij}^n + y_{nj}^2 x_i^n + y_{nn}^2 x_i^n x_{ij}^n + y_{nn}^2 x_{ij}^n \\ \cdots \\ y_{ij}^{n-1} + y_{in}^{n-1} x_{ij}^n + y_{nj}^{n-1} x_i^n + y_{nn}^{n-1} x_i^n x_{ij}^n + y_{nn}^{n-1} x_{ij}^n \\ y_{ij}^n + y_{in}^n x_{ij}^n + y_{nj}^n x_i^n + y_{nn}^n x_i^n x_{ij}^n + y_{nn}^n x_{ij}^n \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

olmak üzere, kısaca

$$k^* L_{ij}^* = \begin{vmatrix} \mathbf{T}'_1 & \mathbf{T}'_2 & \cdots & \mathbf{T}'_{n-1} & \mathbf{T}'_{ij} \end{vmatrix}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.17)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\mathbf{T}'_i = \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_n x_i^n, \quad \mathbf{T}'_{ij} = \mathbf{T}_{ij} + \mathbf{T}_{in} x_{ij}^n + \mathbf{T}_{nj} x_i^n + \mathbf{T}_{nn} x_i^n x_{ij}^n + \mathbf{T}_n x_{ij}^n \quad (3.18)$$

ve

$$\mathbf{T}_{,ij} = \begin{bmatrix} y_{,ij}^1 \\ y_{,ij}^2 \\ \dots \\ y_{,ij}^n \end{bmatrix}, \quad \left(y_{,ij}^a = \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^i \partial x^j} \right) \quad (3.19)$$

dır.

(3.17) denklem sistemini $i = j$ için aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} k^* L_{,ii}^* &= \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & \dots & y_{,n-1}^1 & y_{,ii}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & \dots & y_{,n-1}^2 & y_{,ii}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & \dots & y_{,n-1}^n & y_{,ii}^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{,n}^1 & y_{,2}^1 & \dots & y_{,n-1}^1 & y_{,ii}^1 \\ y_{,n}^2 & y_{,2}^2 & \dots & y_{,n-1}^2 & y_{,ii}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,n}^n & y_{,2}^n & \dots & y_{,n-1}^n & y_{,ii}^n \end{vmatrix} x_{,1}^n + \\ &\begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,n}^1 & \dots & y_{,n-1}^1 & y_{,ii}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,n}^2 & \dots & y_{,n-1}^2 & y_{,ii}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,1}^n & y_{,n}^n & \dots & y_{,n-1}^n & y_{,ii}^n \end{vmatrix} x_{,2}^n + \dots + \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & \dots & y_{,n}^1 & y_{,n-1}^1 & y_{,ii}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & \dots & y_{,n}^2 & y_{,n-1}^2 & y_{,ii}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & \dots & y_{,n}^n & y_{,n-1}^n & y_{,ii}^n \end{vmatrix} x_{,n-2}^n + \\ &\begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & \dots & y_{,n-2}^1 & y_{,n}^1 & y_{,ii}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & \dots & y_{,n-2}^2 & y_{,n}^2 & y_{,ii}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & \dots & y_{,n-2}^n & y_{,n}^n & y_{,ii}^n \end{vmatrix} x_{,n-1}^n + 2 \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & \dots & y_{,n-1}^1 & y_{,in}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & \dots & y_{,n-1}^2 & y_{,in}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & \dots & y_{,n-1}^n & y_{,in}^n \end{vmatrix} x_{,i}^n + \\ &2 \begin{vmatrix} y_{,n}^1 & y_{,2}^1 & \dots & y_{,n-1}^1 & y_{,in}^1 \\ y_{,n}^2 & y_{,2}^2 & \dots & y_{,n-1}^2 & y_{,in}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,n}^n & y_{,2}^n & \dots & y_{,n-1}^n & y_{,in}^n \end{vmatrix} x_{,i}^n x_{,1}^n + 2 \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,n}^1 & \dots & y_{,n-1}^1 & y_{,in}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,n}^2 & \dots & y_{,n-1}^2 & y_{,in}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,1}^n & y_{,n}^n & \dots & y_{,n-1}^n & y_{,in}^n \end{vmatrix} x_{,i}^n x_{,2}^n + \dots + \\ &2 \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & \dots & y_{,n}^1 & y_{,n-1}^1 & y_{,in}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & \dots & y_{,n}^2 & y_{,n-1}^2 & y_{,in}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & \dots & y_{,n}^n & y_{,n-1}^n & y_{,in}^n \end{vmatrix} x_{,i}^n x_{,n-2}^n + 2 \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & \dots & y_{,n-2}^1 & y_{,n}^1 & y_{,in}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & \dots & y_{,n-2}^2 & y_{,n}^2 & y_{,in}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & \dots & y_{,n-2}^n & y_{,n}^n & y_{,in}^n \end{vmatrix} x_{,i}^n x_{,n-1}^n + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & \cdots & y_{,n-1}^1 & y_{,nn}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & \cdots & y_{,n-1}^2 & y_{,nn}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & \cdots & y_{,n-1}^n & y_{,nn}^n \end{vmatrix} (x_{,i}^n)^2 + \begin{vmatrix} y_{,n}^1 & y_{,2}^1 & \cdots & y_{,n-1}^1 & y_{,nn}^1 \\ y_{,n}^2 & y_{,2}^2 & \cdots & y_{,n-1}^2 & y_{,nn}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{,n}^n & y_{,2}^n & \cdots & y_{,n-1}^n & y_{,nn}^n \end{vmatrix} (x_{,i}^n)^2 x_{,1}^n + \\
& \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,n}^1 & \cdots & y_{,n-1}^1 & y_{,nn}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,n}^2 & \cdots & y_{,n-1}^2 & y_{,nn}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{,1}^n & y_{,n}^n & \cdots & y_{,n-1}^n & y_{,nn}^n \end{vmatrix} (x_{,i}^n)^2 x_{,2}^n + \cdots + \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & \cdots & y_{,n}^1 & y_{,n-1}^1 & y_{,nn}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & \cdots & y_{,n}^2 & y_{,n-1}^2 & y_{,nn}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & \cdots & y_{,n}^n & y_{,n-1}^n & y_{,nn}^n \end{vmatrix} (x_{,i}^n)^2 x_{,n-2}^n + \\
& \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & \cdots & y_{,n-2}^1 & y_{,n}^1 & y_{,nn}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & \cdots & y_{,n-2}^2 & y_{,n}^2 & y_{,nn}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & \cdots & y_{,n-2}^n & y_{,n}^n & y_{,nn}^n \end{vmatrix} (x_{,i}^n)^2 x_{,n-1}^n + \begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,2}^1 & \cdots & y_{,n-1}^1 & y_{,n}^1 \\ y_{,1}^2 & y_{,2}^2 & \cdots & y_{,n-1}^2 & y_{,n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{,1}^n & y_{,2}^n & \cdots & y_{,n-1}^n & y_{,n}^n \end{vmatrix} x_{,ii}^n
\end{aligned}
\tag{3.20}$$

veya

$$\begin{aligned}
k^* L_{,ii} = & \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{vmatrix} x_{,1}^n + \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,n} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{vmatrix} x_{,2}^n + \cdots + \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{vmatrix} x_{,n-2}^n + \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-2} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,ii} \end{vmatrix} x_{,n-1}^n + 2 \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} x_{,i}^n + \\
& 2 \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} x_{,i}^n x_{,1}^n + 2 \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,n} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} x_{,i}^n x_{,2}^n + \cdots + \\
& 2 \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} x_{,i}^n x_{,n-2}^n + 2 \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-2} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} x_{,i}^n x_{,n-1}^n + \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} (x_{,i}^n)^2 + \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} (x_{,i}^n)^2 x_{,1}^n + \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,n} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} (x_{,i}^n)^2 x_{,2}^n + \cdots + \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} (x_{,i}^n)^2 x_{,n-2}^n + \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \cdots & \mathbf{T}_{,n-2} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} (x_{,i}^n)^2 x_{,n-1}^n + \Delta x_{,ii}^n
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

şeklinde gösterebiliriz. Aynı işlemleri $i \neq j$ için yaparsak, yani $k^* L_{,ij}^*$ yi hesaplarsak,

$$(3.22)$$

de ederiz. Bu sistemi de kısaca

$$\begin{aligned}
kL_{ij} = & \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,ij} \right| + \left| \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,ij} \right| X_{,1}^n + \\
& \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,ij} \right| X_{,2}^n + \dots + \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,ij} \right| X_{,n-2}^n + \\
& \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-2} \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,ij} \right| X_{,n-1}^n + \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,nj} \right| X_{,i}^n + \\
& \left| \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,nj} \right| X_{,i}^n X_{,1}^n + \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,nj} \right| X_{,i}^n X_{,2}^n + \dots + \\
& \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,nj} \right| X_{,i}^n X_{,n-2}^n + \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-2} \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,nj} \right| X_{,i}^n X_{,n-1}^n + \\
& \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,in} \right| X_{,j}^n + \left| \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,in} \right| X_{,j}^n X_{,1}^n + \\
& \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,in} \right| X_{,j}^n X_{,2}^n + \dots + \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,in} \right| X_{,j}^n X_{,n-2}^n + \\
& \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-2} \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,in} \right| X_{,j}^n X_{,n-1}^n + \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,nn} \right| X_{,i}^n X_{,j}^n + \\
& \left| \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,nn} \right| X_{,i}^n X_{,j}^n X_{,1}^n + \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,nn} \right| X_{,i}^n X_{,j}^n X_{,2}^n + \dots +
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \dots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} x_{,i}^n x_{,j}^n x_{,n-2}^n + \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \dots & \mathbf{T}_{,n-2} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} x_{,i}^n x_{,j}^n x_{,n-1}^n + \Delta x_{,ij}^n \quad (3.23)$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.21) denklemini,

$$\begin{aligned} k^* L_{,ii}^* &= \Delta_0(ii) + \Delta_1(ii) x_{,1}^n + \Delta_2(ii) x_{,2}^n + \dots + \Delta_{n-1}(ii) x_{,n-1}^n + \\ &2 \left[\Delta_0(in) + \Delta_1(in) x_{,1}^n + \Delta_2(in) x_{,2}^n + \dots + \Delta_{n-1}(in) x_{,n-1}^n \right] x_{,i}^n + \\ &\left[\Delta_0(nn) + \Delta_1(nn) x_{,1}^n + \Delta_2(nn) x_{,2}^n + \dots + \Delta_{n-1}(nn) x_{,n-1}^n \right] (x_{,i}^n)^2 + \\ &\Delta x_{,ii}^n \end{aligned} \quad (3.24)$$

ve (3.23) denklemini de

$$\begin{aligned} k^* L_{,ij}^* &= \Delta_0(ij) + \Delta_1(ij) x_{,1}^n + \Delta_2(ij) x_{,2}^n + \dots + \Delta_{n-1}(ij) x_{,n-1}^n + \\ &\left[\Delta_0(in) + \Delta_1(in) x_{,1}^n + \Delta_2(in) x_{,2}^n + \dots + \Delta_{n-1}(in) x_{,n-1}^n \right] x_{,j}^n + \\ &\left[\Delta_0(jn) + \Delta_1(jn) x_{,1}^n + \Delta_2(jn) x_{,2}^n + \dots + \Delta_{n-1}(jn) x_{,n-1}^n \right] x_{,i}^n \\ &\left[\Delta_0(nn) + \Delta_1(nn) x_{,1}^n + \Delta_2(nn) x_{,2}^n + \dots + \Delta_{n-1}(nn) x_{,n-1}^n \right] x_{,i}^n x_{,j}^n + \\ &\Delta x_{,ij}^n \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\Delta_0(ab)$, Δ determinantının n. sütununun yerine $\mathbf{T}_{,ab}$ nin konulmasıyla elde edilen determinanttır. $\Delta_k(ab)$ ise Δ determinantının n. sütununun yerine $\mathbf{T}_{,ab}$ ve k. sütununun yerine $\mathbf{T}_{,n}$ nin konulmasıyla elde edilen determinanttır.

Örneğin,

$$\Delta_2(44) = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,44} \end{vmatrix} \quad (3.26)$$

dır.

S^* hiperyüzeyinin asimptotik çizgilerinin denklemi, (2.10) denklemine göre

$$L_{,ij}^* dx^i dx^j = 0 \quad (3.27)$$

şeklindedir.

T dönüşümü ile S hiperyüzeyinin asimptotik çizgilerine S^* hiperyüzeyinin asimptotik çizgilerinin karşı gelmesini istiyoruz. O halde

$$L_{,ij}^* = tL_{,ij} \quad (3.28)$$

olmalıdır. Bu takdirde (3.27) denklemi (2.31) denklemine dönüşür ve koşulumuz, t

$x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ değişkenlerinin bir keyfi fonksiyonu olmak üzere

$$L_{,ij}^* = tx_{,ij}^n, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.29)$$

şeklini alır. Buna göre

$$L_{,ii}^* = tx_{,ii}^n \quad (3.30)$$

ve

$$L_{,ij}^* = tx_{,ij}^n, \quad (i \neq j) \quad (3.31)$$

dır.

(3.29) denklemi ile verdiğimiz koşulumuzun sağlanabilmesi için (3.24) ve (3.25) denklemlerinde

$$\Delta.X_{,ii}^n, \quad \Delta.X_{,ij}^n \quad (3.32)$$

ler hariç diğer katsayıların sıfır olması gerekir yani,

$$\begin{aligned} \Delta_1(nn) &= 0, \Delta_2(nn) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(nn) = 0, \\ \Delta_0(ii) &= 0, \Delta_1(ii) = 0, \dots, \Delta_{i-1}(ii) = 0, \Delta_{i+1}(ii) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(ii) = 0, \\ \Delta_1(in) &= 0, \Delta_2(in) = 0, \dots, \Delta_{i-1}(in) = 0, \Delta_{i+1}(in) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(in) = 0, \\ \Delta_i(ii) + 2\Delta_0(in) &= 0, \\ \Delta_0(nn) + 2\Delta_i(in) &= 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_0(ij) = 0, \Delta_1(ij) = 0, \dots, \Delta_{i-1}(ij) = 0, \Delta_{i+1}(ij) = 0, \dots, \Delta_{j-1}(ij) = 0, \Delta_{j+1}(ij) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(ij) = 0, \\
&\Delta_1(in) = 0, \Delta_2(in) = 0, \dots, \Delta_{i-1}(in) = 0, \Delta_{i+1}(in) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(in) = 0, \\
&\Delta_1(jn) = 0, \Delta_2(jn) = 0, \dots, \Delta_{j-1}(jn) = 0, \Delta_{j+1}(jn) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(jn) = 0, \\
&\Delta_1(nn) = 0, \Delta_2(nn) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(nn) = 0, \\
&\Delta_i(ij) + \Delta_0(jn) = 0, \\
&\Delta_j(ij) + \Delta_0(in) = 0, \\
&\Delta_0(nn) + \Delta_i(in) + \Delta_j(jn) = 0,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

olmalıdır. Yukarıda görüldüğü gibi (3.33) ve (3.34) de tekrarlanan denklem sistemleri vardır.

Bunları ayıqlarsak (3.33) ve (3.34) ü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
&1) \Delta_1(nn) = 0, \Delta_2(nn) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(nn) = 0, \\
&2) \Delta_0(ii) = 0, \Delta_1(ii) = 0, \dots, \Delta_{i-1}(ii) = 0, \Delta_{i+1}(ii) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(ii) = 0, \\
&3) \Delta_1(in) = 0, \Delta_2(in) = 0, \dots, \Delta_{i-1}(in) = 0, \Delta_{i+1}(in) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(in) = 0, \\
&4) \Delta_0(ij) = 0, \Delta_1(ij) = 0, \dots, \Delta_{i-1}(ij) = 0, \Delta_{i+1}(ij) = 0, \dots, \Delta_{j-1}(ij) = 0, \Delta_{j+1}(ij) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(ij) = 0, \\
&5) \Delta_i(ii) + 2\Delta_0(in) = 0, \\
&6) \Delta_0(nn) + 2\Delta_i(in) = 0, \\
&7) \Delta_i(ij) + \Delta_0(jn) = 0, \\
&8) \Delta_j(ij) + \Delta_0(in) = 0, \\
&9) \Delta_0(nn) + \Delta_i(in) + \Delta_j(jn) = 0.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Burada, önce

$$1) \Delta_1(nn) = 0, \Delta_2(nn) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(nn) = 0, \tag{3.36}$$

denklem sistemini çözelim. Bu sistemi

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} = 0 \\
&\begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} = 0 \\
&\begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,n} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} = 0 \\
&\vdots \\
&\begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,nn} \end{vmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{3.37}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemlerin her birinden $\mathbf{T}_{,nn}$, lineer bağımsız $\mathbf{T}_{,1}, \mathbf{T}_{,2}, \dots, \mathbf{T}_{,n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{,nn} &= a_1^1 \mathbf{T}_{,n} + a_2^1 \mathbf{T}_{,2} + a_3^1 \mathbf{T}_{,3} + \dots + a_{n-1}^1 \mathbf{T}_{,n-1} \\
 \mathbf{T}_{,nn} &= a_1^2 \mathbf{T}_{,1} + a_2^2 \mathbf{T}_{,n} + a_3^2 \mathbf{T}_{,3} + \dots + a_{n-1}^2 \mathbf{T}_{,n-1} \\
 \mathbf{T}_{,nn} &= a_1^3 \mathbf{T}_{,1} + a_2^3 \mathbf{T}_{,2} + a_3^3 \mathbf{T}_{,n} + \dots + a_{n-1}^3 \mathbf{T}_{,n-1} \\
 &\vdots \\
 \mathbf{T}_{,nn} &= a_1^{n-1} \mathbf{T}_{,1} + a_2^{n-1} \mathbf{T}_{,2} + a_3^{n-1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + a_{n-1}^{n-1} \mathbf{T}_{,n}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan da

$$\mathbf{T}_{,nn} = a_1^1 \mathbf{T}_{,n} \tag{3.39}$$

elde edilir.

$$a_1^1 = 2A_n \tag{3.40}$$

denirse

$$\mathbf{T}_{,nn} = 2A_n \mathbf{T}_{,n} \tag{3.41}$$

olur.

$$2)\Delta_0(ii)=0, \Delta_1(ii)=0, \dots, \Delta_{i-1}(ii)=0, \Delta_{i+1}(ii)=0, \dots, \Delta_{n-1}(ii)=0, \tag{3.42}$$

denklem sistemini de

$$\begin{aligned}
 &\left| \begin{array}{cccccc} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{array} \right| = 0 \\
 &\left| \begin{array}{cccccc} \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{array} \right| = 0 \\
 &\left| \begin{array}{cccccc} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{array} \right| = 0 \\
 &\left| \begin{array}{cccccc} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,n} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{array} \right| = 0 \\
 &\vdots \\
 &\left| \begin{array}{cccccccc} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,i} & \mathbf{T}_{,i+1} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{array} \right| = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,i-1} & \mathbf{T}_{,i} & \mathbf{T}_{,n} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{vmatrix} = 0 \\
& \quad \vdots \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{vmatrix} = 0 \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-2} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,ii} \end{vmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

şeklinde yazabiliriz.

Yine $\mathbf{T}_{,1}, \mathbf{T}_{,2}, \dots, \mathbf{T}_{,n}$ 'ler lineer bağımsız $\mathbf{T}_{,ii}$ lineer bağımlı olduğu için (3.43) deki her bir denklemde $\mathbf{T}_{,ii}$, lineer bağımsız $\mathbf{T}_{,1}, \mathbf{T}_{,2}, \dots, \mathbf{T}_{,n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{,ii} &= b_1^0 \mathbf{T}_{,1} + b_2^0 \mathbf{T}_{,2} + b_3^0 \mathbf{T}_{,3} + \dots + b_{n-1}^0 \mathbf{T}_{,n-1} \\
\mathbf{T}_{,ii} &= b_1^1 \mathbf{T}_{,n} + b_2^1 \mathbf{T}_{,2} + b_3^1 \mathbf{T}_{,3} + \dots + b_{n-1}^1 \mathbf{T}_{,n-1} \\
\mathbf{T}_{,ii} &= b_1^2 \mathbf{T}_{,1} + b_2^2 \mathbf{T}_{,n} + b_3^2 \mathbf{T}_{,3} + \dots + b_{n-1}^2 \mathbf{T}_{,n-1} \\
\mathbf{T}_{,ii} &= b_1^3 \mathbf{T}_{,1} + b_2^3 \mathbf{T}_{,2} + b_3^3 \mathbf{T}_{,n} + \dots + b_{n-1}^3 \mathbf{T}_{,n-1} \\
&\quad \vdots \\
\mathbf{T}_{,ii} &= b_1^{i-1} \mathbf{T}_{,1} + b_2^{i-1} \mathbf{T}_{,2} + b_3^{i-1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + b_{i-1}^{i-1} \mathbf{T}_{,n} + b_i^{i-1} \mathbf{T}_{,i} + b_{i+1}^{i-1} \mathbf{T}_{,i+1} + \dots + b_{n-1}^{i-1} \mathbf{T}_{,n-1} \\
\mathbf{T}_{,ii} &= b_1^{i+1} \mathbf{T}_{,1} + b_2^{i+1} \mathbf{T}_{,2} + b_3^{i+1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + b_{i-1}^{i+1} \mathbf{T}_{,i-1} + b_i^{i+1} \mathbf{T}_{,i} + b_{i+1}^{i+1} \mathbf{T}_{,n} + \dots + b_{n-1}^{i+1} \mathbf{T}_{,n-1} \\
&\quad \vdots \\
\mathbf{T}_{,ii} &= b_1^{n-1} \mathbf{T}_{,1} + b_2^{n-1} \mathbf{T}_{,2} + b_3^{n-1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + b_{n-1}^{n-1} \mathbf{T}_{,n}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistemin de çözümü

$$\mathbf{T}_{,ii} = b_i^0 \mathbf{T}_{,i} \tag{3.45}$$

şeklindedir. Burada da

$$b_i^0 = 2A_i \tag{3.46}$$

dersek

$$\mathbf{T}_{,ii} = 2A_i \mathbf{T}_{,i} \tag{3.47}$$

yazılabilir.

$$3) \Delta_1(in) = 0, \Delta_2(in) = 0, \dots, \Delta_{i-1}(in) = 0, \Delta_{i+1}(in) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(in) = 0, \tag{3.48}$$

denklem sistemini açık olarak

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} = 0 \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} = 0 \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,n} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} = 0 \\
& \quad \vdots \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,i} & \mathbf{T}_{,i+1} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} = 0 \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,i-1} & \mathbf{T}_{,i} & \mathbf{T}_{,n} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} = 0 \\
& \quad \vdots \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} = 0 \\
& \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-2} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemlerin her birinde $\mathbf{T}_{,in}$, lineer bağımsız $\mathbf{T}_{,1}, \mathbf{T}_{,2}, \dots, \mathbf{T}_{,n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{,in} &= c_1^1 \mathbf{T}_{,n} + c_2^1 \mathbf{T}_{,2} + c_3^1 \mathbf{T}_{,3} + \dots + c_{n-1}^1 \mathbf{T}_{,n-1} \\
\mathbf{T}_{,in} &= c_1^2 \mathbf{T}_{,1} + c_2^2 \mathbf{T}_{,n} + c_3^2 \mathbf{T}_{,3} + \dots + c_{n-1}^2 \mathbf{T}_{,n-1} \\
\mathbf{T}_{,in} &= c_1^3 \mathbf{T}_{,1} + c_2^3 \mathbf{T}_{,2} + c_3^3 \mathbf{T}_{,n} + \dots + c_{n-1}^3 \mathbf{T}_{,n-1} \\
& \quad \vdots \\
\mathbf{T}_{,in} &= c_1^{i-1} \mathbf{T}_{,1} + c_2^{i-1} \mathbf{T}_{,2} + c_3^{i-1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + c_{i-1}^{i-1} \mathbf{T}_{,n} + c_i^{i-1} \mathbf{T}_{,i} + c_{i+1}^{i-1} \mathbf{T}_{,i+1} + \dots + c_{n-1}^{i-1} \mathbf{T}_{,n-1} \\
\mathbf{T}_{,in} &= c_1^{i+1} \mathbf{T}_{,1} + c_2^{i+1} \mathbf{T}_{,2} + c_3^{i+1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + c_{i-1}^{i+1} \mathbf{T}_{,i-1} + c_i^{i+1} \mathbf{T}_{,i} + c_{i+1}^{i+1} \mathbf{T}_{,n} + \dots + c_{n-1}^{i+1} \mathbf{T}_{,n-1} \\
& \quad \vdots \\
\mathbf{T}_{,in} &= c_1^{n-1} \mathbf{T}_{,1} + c_2^{n-1} \mathbf{T}_{,2} + c_3^{n-1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + c_{n-1}^{n-1} \mathbf{T}_{,n}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistemden de

$$\mathbf{T}_{,in} = c_1^1 \mathbf{T}_{,n} + c_i^1 \mathbf{T}_{,i} \tag{3.51}$$

elde edilir.

$$5) \Delta_i(ii) + 2\Delta_0(in) = 0 \tag{3.52}$$

denklemini

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,i-1} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,i+1} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ii} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,in} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.53}$$

şeklinde ifade edebiliriz ve bu denklemde (3.47) yi ve (3.51) i kullanırsak, yani

$$\mathbf{T}_{,ii} = 2A_i \mathbf{T}_{,i} \quad (3.54)$$

ve

$$\mathbf{T}_{,in} = c_1^l \mathbf{T}_{,n} + c_i^l \mathbf{T}_{,i} \quad (3.55)$$

değerlerini yerine yazarsak

$$c_1^l = A_i \quad (3.56)$$

elde edilir.

$$6) \Delta_0 (nn) + 2\Delta_i (in) = 0 \quad (3.57)$$

denklemini de açık olarak

$$\left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \mathbf{T}_{,3} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,nn} \right| + 2 \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \mathbf{T}_{,3} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,i-1} \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,i+1} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,in} \right| = 0 \quad (3.58)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemde (3.41) ve (3.51) i yani,

$$\mathbf{T}_{,nn} = 2A_n \mathbf{T}_{,n} \quad (3.59)$$

ve

$$\mathbf{T}_{,in} = c_1^l \mathbf{T}_{,n} + c_i^l \mathbf{T}_{,i} \quad (3.60)$$

değerlerini yerine yazarsak.

$$c_i^l = A_n \quad (3.61)$$

elde edilir. O halde

$$\mathbf{T}_{,in} = c_1^l \mathbf{T}_{,n} + c_i^l \mathbf{T}_{,i} \quad (3.62)$$

denklemini

$$\mathbf{T}_{,in} = A_i \mathbf{T}_{,n} + A_n \mathbf{T}_{,i} \quad (3.63)$$

şeklindedir.

$$4) \Delta_0(ij) = 0, \Delta_1(ij) = 0, \dots, \Delta_{i-1}(ij) = 0, \Delta_{i+1}(ij) = 0, \dots, \Delta_{j-1}(ij) = 0, \Delta_{j+1}(ij) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(ij) = 0, \quad (3.64)$$

denklem sistemini

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ij} \end{vmatrix} = 0 \\ & \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ij} \end{vmatrix} = 0 \\ & \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ij} \end{vmatrix} = 0 \\ & \vdots \\ & \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,i} & \mathbf{T}_{,i+1} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ij} \end{vmatrix} = 0 \\ & \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,i-1} & \mathbf{T}_{,i} & \mathbf{T}_{,n} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ij} \end{vmatrix} = 0 \\ & \vdots \\ & \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,j} & \mathbf{T}_{,j+1} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ij} \end{vmatrix} = 0 \\ & \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,j-1} & \mathbf{T}_{,j} & \mathbf{T}_{,n} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ij} \end{vmatrix} = 0 \\ & \vdots \\ & \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ij} \end{vmatrix} = 0 \\ & \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-2} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,ij} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

şeklinde açık olarak yazabiliriz.

$\mathbf{T}_{,1}, \mathbf{T}_{,2}, \dots, \mathbf{T}_{,n}$ 'ler lineer bağımsız $\mathbf{T}_{,ij}$ lineer bağımlı olduğu için bu denklemlerin her birinde

$\mathbf{T}_{,ij}$ lineer bağımsız $\mathbf{T}_{,1}, \mathbf{T}_{,2}, \dots, \mathbf{T}_{,n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{,ij} &= d_1^0 \mathbf{T}_{,1} + d_2^0 \mathbf{T}_{,2} + d_3^0 \mathbf{T}_{,3} + \dots + d_{n-1}^0 \mathbf{T}_{,n-1} \\ \mathbf{T}_{,ij} &= d_1^1 \mathbf{T}_{,n} + d_2^1 \mathbf{T}_{,2} + d_3^1 \mathbf{T}_{,3} + \dots + d_{n-1}^1 \mathbf{T}_{,n-1} \\ \mathbf{T}_{,ij} &= d_1^2 \mathbf{T}_{,1} + d_2^2 \mathbf{T}_{,n} + d_3^2 \mathbf{T}_{,3} + \dots + d_{n-1}^2 \mathbf{T}_{,n-1} \\ \mathbf{T}_{,ij} &= d_1^3 \mathbf{T}_{,1} + d_2^3 \mathbf{T}_{,2} + d_3^3 \mathbf{T}_{,n} + \dots + d_{n-1}^3 \mathbf{T}_{,n-1} \\ &\vdots \\ \mathbf{T}_{,ij} &= d_1^{i-1} \mathbf{T}_{,1} + d_2^{i-1} \mathbf{T}_{,2} + d_3^{i-1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + d_{i-1}^{i-1} \mathbf{T}_{,n} + d_i^{i-1} \mathbf{T}_{,i} + d_{i+1}^{i-1} \mathbf{T}_{,i+1} + \dots + d_{n-1}^{i-1} \mathbf{T}_{,n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{,ij} &= d_1^{i+1} \mathbf{T}_{,1} + d_2^{i+1} \mathbf{T}_{,2} + d_3^{i+1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + d_{i-1}^{i+1} \mathbf{T}_{,i-1} + d_i^{i+1} \mathbf{T}_{,i} + d_{i+1}^{i+1} \mathbf{T}_{,n} + \dots + d_{n-1}^{i+1} \mathbf{T}_{,n-1} \\
&\vdots \\
\mathbf{T}_{,ij} &= d_1^{j-1} \mathbf{T}_{,1} + d_2^{j-1} \mathbf{T}_{,2} + d_3^{j-1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + d_{j-1}^{j-1} \mathbf{T}_{,n} + d_j^{j-1} \mathbf{T}_{,j} + d_{j+1}^{j-1} \mathbf{T}_{,j+1} + \dots + d_{n-1}^{j-1} \mathbf{T}_{,n-1} \\
\mathbf{T}_{,ij} &= d_1^{j+1} \mathbf{T}_{,1} + d_2^{j+1} \mathbf{T}_{,2} + d_3^{j+1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + d_{j-1}^{j+1} \mathbf{T}_{,j-1} + d_i^{j+1} \mathbf{T}_{,j} + d_{j+1}^{j+1} \mathbf{T}_{,n} + \dots + d_{n-1}^{j+1} \mathbf{T}_{,n-1} \\
&\vdots \\
\mathbf{T}_{,ij} &= d_1^{n-1} \mathbf{T}_{,1} + d_2^{n-1} \mathbf{T}_{,2} + d_3^{n-1} \mathbf{T}_{,3} + \dots + d_{n-1}^{n-1} \mathbf{T}_{,n}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu sistemden de

$$\mathbf{T}_{,ij} = d_i^0 \mathbf{T}_{,i} + d_j^0 \mathbf{T}_{,j} \tag{3.67}$$

elde edilir.

$$7) \Delta_i (ij) + \Delta_0 (jn) = 0 \tag{3.68}$$

yani,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,i-1} & \mathbf{T}_{,n} & \mathbf{T}_{,i+1} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,ij} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{,1} & \mathbf{T}_{,2} & \mathbf{T}_{,3} & \dots & \mathbf{T}_{,n-1} & \mathbf{T}_{,jn} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.69}$$

denkleminde

$$\mathbf{T}_{,jn} = A_j \mathbf{T}_{,n} + A_n \mathbf{T}_{,j} \tag{3.70}$$

ve

$$\mathbf{T}_{,ij} = d_i^0 \mathbf{T}_{,i} + d_j^0 \mathbf{T}_{,j} \tag{3.71}$$

değerlerini yerine yazarsak

$$d_i^0 = A_j \tag{3.72}$$

bulunur. Aynı şekilde

$$8) \Delta_j (ij) + \Delta_0 (in) = 0 \quad (3.73)$$

denkleminin açık ifadesi

$$\left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \mathbf{T}_{,3} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,j-1} \quad \mathbf{T}_{,n} \quad \mathbf{T}_{,j+1} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,ij} \right| + \left| \mathbf{T}_{,1} \quad \mathbf{T}_{,2} \quad \mathbf{T}_{,3} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{,n-1} \quad \mathbf{T}_{,in} \right| = 0 \quad (3.74)$$

yazılıp

$$\mathbf{T}_{,in} = A_i \mathbf{T}_{,n} + A_n \mathbf{T}_{,i} \quad (3.75)$$

ve

$$\mathbf{T}_{,ij} = d_i^0 \mathbf{T}_{,i} + d_j^0 \mathbf{T}_{,j} \quad (3.76)$$

değerleri bu denklemde yerine yazılırsa

$$d_j^0 = A_i \quad (3.77)$$

elde edilir. Yani,

$$\mathbf{T}_{,ij} = d_i^0 \mathbf{T}_{,i} + d_j^0 \mathbf{T}_{,j} \quad (3.78)$$

denklemini

$$\mathbf{T}_{,ij} = A_j \mathbf{T}_{,i} + A_i \mathbf{T}_{,j} \quad (3.79)$$

olarak bulunur.

Böylece (3.33) ve (3.34) denklemlerinden A_i keyfi fonksiyonlar olmak üzere,

$$\mathbf{T}_{,ii} = 2A_i \mathbf{T}_{,i} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{T}_{,nn} = 2A_n \mathbf{T}_{,n} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{T}_{,ij} = A_j \mathbf{T}_{,i} + A_i \mathbf{T}_{,j} \quad (3.82)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemleri de kısaca $(a, b = 1, 2, 3, \dots, n)$ olmak üzere

$$\mathbf{T}_{,ab} = A_b \mathbf{T}_{,a} + A_a \mathbf{T}_{,b} \quad (3.83)$$

şeklinde gösterebiliriz.

Böylece aşağıdaki teoremi elde etmiş oluyoruz.

3.1. Teorem: Bir $\mathbf{T}$ dönüşümünün, Öklit uzayında yerel olarak verilen bir hiperyüzeyin asimptotiklerini koruması için, dönüşümün $A_1, A_2, \dots, A_n$ 'ler keyfi fonksiyonlar olmak üzere,

$$\mathbf{T}_{,ab} = A_b \mathbf{T}_{,a} + A_a \mathbf{T}_{,b} \quad (3.84)$$

koşulunu sağlaması gerekir.

4. PROJEKTİF DÖNÜŞÜMÜN BİR KARAKTERİZASYONU

Şimdi projektif dönüşümün bir hiperyüzeyin asimptotiklerini koruyup korumadığını araştıralım.

Projektif dönüşüm C_p^m ve C_p 'ler sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned} y^1 &= \frac{C_0^1 + C_1^1 x^1 + \dots + C_n^1 x^n}{C_0 + C_1 x^1 + \dots + C_n x^n} = \frac{C_p^1 x^p}{C_p x^p}, \\ y^2 &= \frac{C_0^2 + C_1^2 x^1 + \dots + C_n^2 x^n}{C_0 + C_1 x^1 + \dots + C_n x^n} = \frac{C_p^2 x^p}{C_p x^p}, \\ &\vdots \\ y^n &= \frac{C_0^n + C_1^n x^1 + \dots + C_n^n x^n}{C_0 + C_1 x^1 + \dots + C_n x^n} = \frac{C_p^n x^p}{C_p x^p} \end{aligned} \quad (4.1)$$

veya

$$\mathbf{T}: y^a = \frac{C_0^a + C_1^a x^1 + \dots + C_n^a x^n}{C_0 + C_1 x^1 + \dots + C_n x^n} = \frac{C_p^a x^p}{C_p x^p}, \quad (a = 1, 2, \dots, n) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklem sistemini

$$\mathbf{T} = (y^1, y^2, \dots, y^n) = \left(\frac{C_p^1 x^p}{C_p x^p}, \frac{C_p^2 x^p}{C_p x^p}, \frac{C_p^3 x^p}{C_p x^p}, \dots, \frac{C_p^n x^p}{C_p x^p} \right) \quad (4.3)$$

şeklinde gösterebiliriz. $\mathbf{T}$ yi

$$\mathbf{T} = \left(\frac{C_0^1 + C_1^1 x^1 + \dots + C_n^1 x^n}{C_p x^p}, \frac{C_0^2 + C_1^2 x^1 + \dots + C_n^2 x^n}{C_p x^p}, \dots, \frac{C_0^n + C_1^n x^1 + \dots + C_n^n x^n}{C_p x^p} \right) \quad (4.4)$$

şeklinde veya

$$\mathbf{T} = \left(\frac{(C_0^1, C_0^2, \dots, C_0^n)}{C_p x^p} + \frac{(C_1^1, C_1^2, \dots, C_1^n) x^1}{C_p x^p} + \frac{(C_2^1, C_2^2, \dots, C_2^n) x^2}{C_p x^p} + \dots + \frac{(C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n) x^n}{C_p x^p} \right) \quad (4.5)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bunu da vektörel formda

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{C}_p x^p}{C_p x^p}, \quad (\mathbf{C}_p = (C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^n)) \quad (4.6)$$

şeklinde gösterebiliriz.

Şimdi $\mathbf{T}$ projektif dönüşümünün yukarıdaki teoremin koşullarını sağlayıp sağlamadığını araştıralım. Bunun için $\mathbf{T}_{,a}$, $\mathbf{T}_{,b}$ ve $\mathbf{T}_{,ab}$ türevlerini hesaplayalım:

$$\mathbf{T}_{,a} = \left(\frac{(C_p C_a^1 - C_a C_p^1) x^p}{(C_p x^p)^2}, \frac{(C_p C_a^2 - C_a C_p^2) x^p}{(C_p x^p)^2}, \dots, \frac{(C_p C_a^n - C_a C_p^n) x^p}{(C_p x^p)^2} \right) \quad (4.7)$$

veya

$$\mathbf{T}_{,a} = C_p \left(\frac{C_a^1}{(C_p x^p)^2}, \frac{C_a^2}{(C_p x^p)^2}, \dots, \frac{C_a^n}{(C_p x^p)^2} \right) x^p - C_a \left(\frac{C_p^1}{(C_p x^p)^2}, \frac{C_p^2}{(C_p x^p)^2}, \dots, \frac{C_p^n}{(C_p x^p)^2} \right) x^p \quad (4.8)$$

dır. Bunu da

$$\mathbf{T}_{,a} = \frac{(C_p C_a - C_a C_p) x^p}{(C_p x^p)^2} \quad (4.9)$$

olarak yazabiliriz. Buna göre

$$\mathbf{T}_{,b} = \frac{(C_p C_b - C_b C_p) x^p}{(C_p x^p)^2} \quad (4.10)$$

olur. $\mathbf{T}_{,ab}$ de

$$\mathbf{T}_{,ab} = \frac{-C_b (C_p C_a - C_a C_p) x^p - C_a (C_p C_b - C_b C_p) x^p}{(C_p x^p)^3} \quad (4.11)$$

şeklinde elde edilir. Elde ettiğimiz $\mathbf{T}_{,a}$, $\mathbf{T}_{,b}$ ve $\mathbf{T}_{,ab}$ değerleriyle

$$\mathbf{T}_{,ab} = \frac{-C_b}{C_p x^p} \mathbf{T}_{,a} + \frac{-C_a}{C_p x^p} \mathbf{T}_{,b} \quad (4.12)$$

olduğu görülür. Bulduğumuz bu denklemin

$$A_a = \frac{-C_a}{C_p x^p} \text{ ve } A_b = \frac{-C_b}{C_p x^p} \quad (4.13)$$

olmak üzere (3.84) şeklinde olduğu açıktır. Yani $\mathbf{T}$ projektif dönüşümü **3.1 Teorem**'inin koşullarını sağlar. O halde projektif dönüşüm bir hiperyüzeyin asimptotiklerini korur.

Şimdi şu soruyu sorabiliriz: Teoremin koşullarını sağlayan bir dönüşüm projektif midir? Tezimizin geri kalan kısmında bu sorunun cevabını araştıracağız.

Şimdi (3.84) denkleminin $\mathbf{T}_{,abc} = \mathbf{T}_{,acb}$ uygunluk denklemlerini ele alalım. (3.84) e göre

$$\mathbf{T}_{,ab} = A_b \mathbf{T}_{,a} + A_a \mathbf{T}_{,b} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{T}_{,ac} = A_c \mathbf{T}_{,a} + A_a \mathbf{T}_{,c} \quad (4.15)$$

olduğundan

$$\mathbf{T}_{,abc} = A_{a,c} \mathbf{T}_{,b} + A_a \mathbf{T}_{,bc} + A_{b,c} \mathbf{T}_{,a} + A_b \mathbf{T}_{,ac} \quad (4.16)$$

ve

$$\mathbf{T}_{,acb} = A_{a,b} \mathbf{T}_{,c} + A_a \mathbf{T}_{,cb} + A_{c,b} \mathbf{T}_{,a} + A_c \mathbf{T}_{,ab} \quad (4.17)$$

dır. Böylece $\mathbf{T}_{,abc} = \mathbf{T}_{,acb}$ 'den düzenleme yapılarak

$$(A_{b,c} - A_{c,b}) \mathbf{T}_{,a} + (A_{a,c} - A_a A_c) \mathbf{T}_{,b} + (A_a A_b - A_{a,b}) \mathbf{T}_{,c} = 0 \quad (4.18)$$

elde edilir. $\mathbf{T}_{,a}$, $\mathbf{T}_{,b}$ ve $\mathbf{T}_{,c}$ 'ler lineer bağımsız olduğu için katsayıları sıfır olmalıdır. Buradan

$$A_{a,b} = A_a A_b \quad (4.19)$$

bulunur.

$a = b$ için elde edilen

$$\frac{\partial A_a}{\partial x^a} = A_a^2 \quad (4.20)$$

denkleminin çözümünden $B^a = B^a(x^1, x^2, \dots, x^{a-1}, x^{a+1}, \dots, x^n)$ olmak üzere

$$\frac{1}{A_a} = -x^a + B^a \Rightarrow A_a = \frac{1}{-x^a + B^a} \quad (4.21)$$

bulunur. Buradan

$$A_b = \frac{1}{-x^b + B^b} \quad (4.22)$$

ve

$$A_{a,b} = -\frac{1}{(-x^a + B^a)^2} B_{,b}^a \quad (4.23)$$

elde edilir. Bulduğumuz $A_a, A_b, A_{a,b}$ (4.19) da yerine yazılırsa

$$B_{,b}^a = -\frac{-x^a + B^a}{-x^b + B^b} \quad (4.24)$$

bulunur. Türevle

$$B_{,bc}^a = 0 \quad (4.25)$$

elde edilir. Buna göre,

$$B^a = d_0^a + d_1^a x^1 + d_2^a x^2 + \dots + d_{a-1}^a x^{a-1} + d_{a+1}^a x^{a+1} + \dots + d_n^a x^n \quad (4.26)$$

şeklindedir. B^a nın bu değeriyle (4.21) den

$$A_a = \frac{1}{-x^a + d_0^a + d_1^a x^1 + d_2^a x^2 + \dots + d_{a-1}^a x^{a-1} + d_{a+1}^a x^{a+1} + \dots + d_n^a x^n} \quad (4.27)$$

veya

$$A_a = -\frac{C_a}{g} \quad (4.28)$$

elde edilir. Burada $g = C_p x^p$ olup $C_0, C_1, \dots, C_n$ ' ler sabitlerdir.

(3.84) de $a = b$ yazarsak

$$\mathbf{T}_{,aa} = A_a \mathbf{T}_{,a} + A_a \mathbf{T}_{,a} \quad (4.29)$$

buluruz, burada

$$A_a = -\frac{C_a}{g} \quad (4.30)$$

değerini yerine koyarsak

$$\mathbf{T}_{,aa} = -2 \frac{C_a}{g} \mathbf{T}_{,a} \quad (4.31)$$

buluruz.

(4.31) denkleminin çözümünden $\mathbf{f}_a = \mathbf{f}_a(x^1, x^2, \dots, x^{a-1}, x^{a+1}, \dots, x^n)$ olmak üzere

$$\mathbf{T}_{,a} = \frac{\mathbf{f}_a}{g^2} \quad (4.32)$$

elde edilir.

(3.84) de

$$A_a = -\frac{C_a}{g}, \quad A_b = -\frac{C_b}{g}$$

$$\mathbf{T}_{,a} = \frac{\mathbf{f}_a}{g^2}, \quad \mathbf{T}_{,b} = \frac{\mathbf{f}_b}{g^2} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{T}_{,ab} = \frac{g^2 \mathbf{f}_{a,b} - 2g C_b \mathbf{f}_a}{g^4}$$

ifadeleri yerine yazılırsa

$$\mathbf{f}_{a,b} = \frac{C_b \mathbf{f}_a - C_a \mathbf{f}_b}{g} \quad (4.34)$$

bulunur. Buradan türev alınarak $\mathbf{f}_{a,bc} = 0$ buluruz. Buradan da

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{C}_{aq} x^q \quad (4.35)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{C}_{ab}$ ler sabit ve $\mathbf{C}_{aa} = \mathbf{0}$ dır.

(4.32) denkleminde $\mathbf{f}_a$ değeri yerine yazılırsa

$$\mathbf{T}_{,a} = \frac{\mathbf{C}_{aq} x^q}{g^2} \quad (4.36)$$

olur. Türev alınarak

$$\mathbf{T}_{,ab} = \frac{\mathbf{C}_{ab} C_p x^p - 2\mathbf{C}_b \mathbf{C}_{aq} x^q}{g^3} \quad (4.37)$$

elde edilir.

Bulunan $\mathbf{T}_{,a}, \mathbf{T}_{,ab}$ ve

$$\mathbf{T}_{,b} = \frac{\mathbf{C}_{bq} x^q}{g^2} \quad (4.38)$$

değerleri (3.84) de yerine yazılırsa

$$C_q \mathbf{C}_{ab} = C_b \mathbf{C}_{aq} - C_a \mathbf{C}_{bq} \quad (4.39)$$

bulunur.

(4.36) denkleminin çözümü $\mathbf{h}_a = \mathbf{h}_a(x^1, x^2, \dots, x^{a-1}, x^{a+1}, \dots, x^n)$ olmak üzere

$$\mathbf{T} = -\frac{\mathbf{C}_{aq} x^q}{C_a g} + \mathbf{h}_a \quad (4.40)$$

şeklindedir.

(4.38) ve (4.40) dan

$$\mathbf{h}_{a,b} = \frac{C_q \mathbf{C}_{ab} - (C_b \mathbf{C}_{aq} - C_a \mathbf{C}_{bq})}{g^2} \quad (4.41)$$

bulunur. O halde (4.39) gereğince

$$\mathbf{h}_{a,b} = 0 \quad (4.42)$$

dır.

Böylece $\mathbf{e}_p$ ler sabitler olmak üzere

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{e}_p x^p}{C_p x^p} = \frac{\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 x^1 + \dots + \mathbf{e}_n x^n}{C_0 + C_1 x^1 + \dots + C_n x^n} \quad (4.43)$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

4.1. Teorem: Bir dönüşümün, Öklit uzayında yerel olarak verilmiş bir hiperyüzeyin asimptotik çizgilerini koruması için gerek ve yeter koşul, projektif dönüşüm olmasıdır.

5. (Uras, F 1995)' DEKİ HATALAR VE DÜZELTMELER

(Uras, F 1995) de 3-boyutlu Öklit uzayında bir yüzeyin asimptotiklerini koruyan dönüşümler ele alınmıştır. Fakat burada bazı hatalar yapılmıştır. Bu bölümde bunlar ele alınacak ve gerekli düzeltmeler yapılacaktır.

(Uras, F 1995) de sayfa 167 deki (2.6) denklemi x, y, z kartezyen koordinatlar olmak üzere

$$\alpha = \alpha(x, y, z), \quad \beta = \beta(x, y, z), \quad \gamma = \gamma(x, y, z) \quad \left(\frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(x, y, z)} \neq 0 \right) \quad (5.1)$$

genel bir dönüşüm denklemdir. Sayfa 170 deki (2.20) ile verilen denklemler

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &= X\alpha_x, & \alpha_{yy} &= Y\alpha_y, & \alpha_{zz} &= Z\alpha_z \\ \alpha_{xy} &= \frac{1}{2}(Y\alpha_x + X\alpha_y), & \alpha_{yz} &= \frac{1}{2}(Z\alpha_y + Y\alpha_z), & \alpha_{xz} &= \frac{1}{2}(X\alpha_z + Z\alpha_x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

çalışmamızda (3.84) denklemlerine karşı gelir. β ve γ için de benzer formüller geçerlidir.

(Uras, F 1995) de 3-boyutlu Öklit uzayında projektif dönüşüm,

$$D_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i, \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (5.3)$$

olmak üzere

$$\alpha = \frac{D_1}{D_0}, \quad \beta = \frac{D_2}{D_0}, \quad \gamma = \frac{D_3}{D_0} \quad (5.4)$$

şeklinde verilmiştir.

Afin dönüşüm, Projektif dönüşümde özel olarak $D_0 = 1$ alınarak elde edilen dönüşümdür.

Yani,

$$\alpha = D_1, \quad \beta = D_2, \quad \gamma = D_3 \quad (5.5)$$

dır.

(Uras, F 1995) deki (2.20) denklemlerinden, afin dönüşüm halinde

$$X = Y = Z = 0 \quad (5.6)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

(Uras, F 1995) de, sayfa 171 ve 172 deki (2.24) ve (2.28) denklemlerinden, sayfa 171 deki (2.23) denklemini

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_z} = A_1, \quad \frac{\alpha_y}{\alpha_z} = A_2 \quad (5.7)$$

şeklinde yazabiliriz. Aynı şekilde β ve γ fonksiyonları için de

$$\frac{\beta_x}{\beta_z} = B_1, \quad \frac{\beta_y}{\beta_z} = B_2, \quad \frac{\gamma_x}{\gamma_z} = C_1, \quad \frac{\gamma_y}{\gamma_z} = C_2 \quad (5.8)$$

yazılabilir. Burada $(A_i = A_i(\alpha), \quad B_i = B_i(\beta), \quad C_i = C_i(\gamma), \quad i = 1, 2)$ dır.

Asimptotikleri koruyan bir dönüşüm için $A_i(\alpha), B_i(\beta)$ ve $C_i(\gamma)$

$(A'_i \neq 0, B'_i \neq 0, C'_i \neq 0, i = 1, 2)$ fonksiyonları sayfa 173 deki (2.32) denklemlerini yani,

$$\begin{aligned} A'_2 X - A'_1 Y + (A_2 A'_1 - A_1 A'_2) Z &= 0 \\ B'_2 X - B'_1 Y + (B_2 B'_1 - B_1 B'_2) Z &= 0 \\ C'_2 X - C'_1 Y + (C_2 C'_1 - C_1 C'_2) Z &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

denklemlerini sağlamalıdır.

Bu denklem sisteminin katsayılar determinantının sıfırdan farklı olması halinde afın dönüşümü veren $X = Y = Z = 0$ elde edilir. O halde dönüşümün afın dönüşümden farklı olması için

$$\begin{vmatrix} A'_2 & -A'_1 & A_2 A'_1 - A_1 A'_2 \\ B'_2 & -B'_1 & B_2 B'_1 - B_1 B'_2 \\ C'_2 & -C'_1 & C_2 C'_1 - C_1 C'_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.10)$$

olmalıdır.

(Uras, F 1995) de, $A_i = A_i(\alpha), \quad B_i = B_i(\beta), \quad C_i = C_i(\gamma)$ olduğundan α, β, γ arasında (5.10)

ile belirli bir bağıntı bulunacağı, oysa bunların birbirinden bağımsız olduğu dikkate alınarak, öyle bir bağıntının olmaması gerektiği, bunun için de A_i , B_i , C_i 'ler den en az birinin sabit olması gerektiği belirtilmiş ve $A'_1 = 0$ alınarak hesaplamalara devam edilmiştir. Bu koşullar altında dönüşümün

$$\alpha = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}, \beta = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}, \gamma = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}. \quad (5.11)$$

şeklinde genel bir projektif dönüşüm olduğu sonucuna varılmıştır.

Fakat $A'_1 = 0$ alındığı için bulunan dönüşüm genel bir projektif dönüşüm değil, özel bir projektif dönüşümdür. Gerçekten, $A'_1 = 0$ koşulu altında (5.7) denkleminde

$$\alpha_x = C\alpha_z, \quad C = sbt \quad (5.12)$$

bulunur ve çözümünden

$$\alpha = \frac{Cc_1x + b_1y + c_1z + d_1}{Cc_0x + b_0y + c_0z + d_0} \quad (5.13)$$

elde edilir. Yani α , 8 tane keyfi sabite bağlı olması gerekirken 7 keyfi sabite bağlı bulunmuştur. Dolayısıyla dönüşüm genel bir projektif dönüşüm değil özel bir projektif dönüşümdür.

Yapılan hata, (Uras, F 1995) de genel halin (5.10) determinantının özdeş olarak sıfır olmasına karşı geldiğinin fark edilememiş olmasından kaynaklanmaktadır. Determinant özdeş olarak sıfırsa α, β, γ 'lar arasında bir bağıntı olmaz.

(5.10)

$$\frac{C'_1}{C'_2} \left(B_2 \frac{B'_1}{B'_2} - B_1 \right) - \frac{B'_1}{B'_2} \left(C_2 \frac{C'_1}{C'_2} - C_1 \right) + \frac{A'_1}{A'_2} \left(C_2 \frac{C'_1}{C'_2} - C_1 + B_1 - B_2 \frac{B'_1}{B'_2} \right) + \left(A_2 \frac{A'_1}{A'_2} - A_1 \right) \left(\frac{B'_1}{B'_2} - \frac{C'_1}{C'_2} \right) = 0 \quad (5.14)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıda vurguladığımız gibi (5.14) bir özdeşliktir. Bu özdeşliğin α ya göre türevi alınarak,

$$\frac{\left(A_2 \frac{A'_1}{A'_2} - A_1\right)'}{\left(\frac{A'_1}{A'_2}\right)'} = \frac{B_2 \frac{B'_1}{B'_2} - B_1 + C_1 - C_2 \frac{C'_1}{C'_2}}{\frac{B'_1}{B'_2} - \frac{C'_1}{C'_2}} = c_0 \quad (5.15)$$

elde edilir. Buradan da, bazı işlemlerden sonra, $(a_0, b_0, c_0 = \text{sbt})$ olmak üzere

$$A_2 \frac{A'_1}{A'_2} - A_1 = c_0 \frac{A'_1}{A'_2} + b_0 \quad (5.16)$$

$$B_2 \frac{B'_1}{B'_2} - B_1 = c_0 \frac{B'_1}{B'_2} + a_0 \quad (5.17)$$

$$C_0 \frac{C'_1}{C'_2} - C_1 = c_0 \frac{C'_1}{C'_2} + a_0 \quad (5.18)$$

elde edilir. Bu sonuçlar (5.14) denkleminde yerine konursa $A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2 \neq 0$ olmak üzere

$$(b_0 - a_0) \left(\frac{B'_1}{B'_2} - \frac{C'_1}{C'_2} \right) = 0 \quad (5.19)$$

bulunur. $\frac{B'_1}{B'_2} - \frac{C'_1}{C'_2} \neq 0$ olduğundan, buradan

$$a_0 = b_0 \quad (5.20)$$

bulunur. Bulduğumuz bu sonucu (5.16), (5.17), (5.18) denklemlerinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} A_2 A'_1 - A_1 A'_2 &= c_0 A'_1 + a_0 A'_2 \\ B_2 B'_1 - B_1 B'_2 &= c_0 B'_1 + a_0 B'_2 \\ C_2 C'_1 - C_1 C'_2 &= c_0 C'_1 + a_0 C'_2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

bağıntıları elde edilir.

(5.21) nin çözümünden $k, p, q = sbt$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_1 &= kA_2 - kc_0 - a_0 \\ B_1 &= pB_2 - pc_0 - a_0 \\ C_1 &= qA_2 - qc_0 - a_0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

bulunur. Bulunan bu değerler (5.10) denkleminde yerine yazılıp elde edilen determinant hesaplanırsa

$$X = \frac{-2a_0}{D}, \quad Y = \frac{-2b_0}{D}, \quad Z = \frac{-2c_0}{D} \quad (5.23)$$

bulunur. Bu denklem (Uras, F 1995) de sayfa 173 deki (2.33) denklemine karşı gelir.

Diğer taraftan (5.2) denklemlerinin uygunluk koşullarından olan,

$$\alpha_{xy} = \alpha_{yx} \quad (5.24)$$

den

$$a_0[\alpha_y(D_x - a_0) - \alpha_x(D_y - b_0)] + \alpha_x(b_0D_x - a_0D_y) = 0, \quad (5.25)$$

diğer uygunluk koşulu olan

$$\alpha_{yx} = \alpha_{xy} \quad (5.26)$$

den de

$$b_0[\alpha_y(D_x - a_0) - \alpha_x(D_y - b_0)] + \alpha_y(b_0D_x - a_0D_y) = 0, \quad (5.27)$$

bulunur. Bulduğumuz (5.25) denklemini $-b_0$ ile (5.27) denklemini de a_0 ile çarpıp toplanırsa

$$(b_0\alpha_x - a_0\alpha_y)(b_0D_x - a_0D_y) = 0 \quad (5.28)$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$\alpha_{yz} = \alpha_{zy} \quad (5.29)$$

den

$$b_0[\alpha_z(D_y - b_0) - \alpha_y(D_z - c_0)] + \alpha_y(c_0 D_y - b_0 D_z) = 0, \quad (5.30)$$

$$\alpha_{zzy} = \alpha_{zyz} \quad (5.31)$$

den de

$$c_0[\alpha_z(D_y - b_0) - \alpha_y(D_z - c_0)] + \alpha_z(c_0 D_y - b_0 D_z) = 0, \quad (5.32)$$

bulunur. (5.30) denklemini c_0 ile (5.32) denklemini de $-b_0$ ile çarpıp toplanırsa

$$(c_0 \alpha_y - b_0 \alpha_z)(c_0 D_y - b_0 D_z) = 0 \quad (5.33)$$

elde edilir. Son olarak,

$$\alpha_{xxz} = \alpha_{xzx} \quad (5.34)$$

denkleminde

$$a_0[\alpha_z(D_x - a_0) - \alpha_x(D_z - c_0)] + \alpha_x(c_0 D_x - a_0 D_z) = 0, \quad (5.35)$$

$$\alpha_{zzx} = \alpha_{zxx} \quad (5.36)$$

den de

$$c_0[\alpha_z(D_x - a_0) - \alpha_x(D_z - c_0)] + \alpha_z(c_0 D_x - a_0 D_z) = 0, \quad (5.37)$$

bulunur. (5.35) denklemini c_0 ile (5.37) denklemini de $-a_0$ ile çarpıp toplarsak

$$(c_0 \alpha_x - a_0 \alpha_z)(c_0 D_x - a_0 D_z) = 0 \quad (5.38)$$

elde edilir.

Böylece

$$(b_0 \alpha_x - a_0 \alpha_y)(b_0 D_x - a_0 D_y) = 0 \quad (5.39)$$

$$(c_0 \alpha_y - b_0 \alpha_z)(c_0 D_y - b_0 D_z) = 0 \quad (5.40)$$

$$(c_0\alpha_x - a_0\alpha_z)(c_0D_x - a_0D_z) = 0 \quad (5.41)$$

denklemlerini elde etmiş oluyoruz.

(5.12) nin (5.13) ile verilen özel bir projektif dönüşüme karşı geldiğini göstermiştik. Yani

$$(a_0\alpha_y - b_0\alpha_x) = (a_0\alpha_z - c_0\alpha_x) = (b_0\alpha_z - c_0\alpha_y) = 0, \quad (5.42)$$

koşulları özel bir projektif dönüşüme karşı gelir. Bu nedenle

$$(b_0D_x - a_0D_y) = (c_0D_y - b_0D_z) = (c_0D_x - a_0D_z) = 0 \quad (5.43)$$

ve

$$(a_0\alpha_y - b_0\alpha_x) \neq 0, \quad (a_0\alpha_z - c_0\alpha_x) \neq 0, \quad (b_0\alpha_z - c_0\alpha_y) \neq 0, \quad (5.44)$$

olduğunu varsayabiliriz. Bu takdirde

$$\frac{D_x}{D_y} = \frac{a_0}{b_0}, \quad \frac{D_y}{D_z} = \frac{b_0}{c_0}, \quad \frac{D_x}{D_z} = \frac{a_0}{c_0} \quad (5.45)$$

olur.

$$b_0D_x - a_0D_y = 0 \quad (5.46)$$

yi (5.25) de yerine yazarsak,

$$\alpha_y(D_x - a_0) - \alpha_x(D_y - b_0) = 0 \quad (5.47)$$

bulunur. Bu da (5.46) dan dolayı

$$(b_0\alpha_x - a_0\alpha_y)(D_x - a_0) = 0 \quad (5.48)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$b_0\alpha_x - a_0\alpha_y \neq 0 \quad (5.49)$$

olduğundan,

$$D_x = a_0 \quad (5.50)$$

elde edilir.

Aynı şekilde

$$c_0 D_y - b_0 D_z = 0 \quad (5.51)$$

(5.30) da yerine konursa

$$\alpha_y (D_z - c_0) - \alpha_z (D_y - b_0) = 0 \quad (5.52)$$

bulunur. Bunu da (5.51) den

$$(c_0 \alpha_y - b_0 \alpha_z) (D_y - b_0) = 0 \quad (5.53)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece

$$(c_0 \alpha_y - b_0 \alpha_z) \neq 0 \quad (5.54)$$

olduğundan,

$$D_y = b_0 \quad (5.55)$$

elde edilir.

Son olarak

$$c_0 D_x - a_0 D_z = 0 \quad (5.56)$$

yi (5.35) de yazılırsa,

$$\alpha_x (D_z - c_0) - \alpha_z (D_x - a_0) = 0 \quad (5.57)$$

bulunur. (5.56) dan da bu ifade

$$(c_0 \alpha_x - a_0 \alpha_z) (D_z - c_0) = 0 \quad (5.58)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$(c_0\alpha_x - a_0\alpha_z) \neq 0 \quad (5.59)$$

olduğundan

$$D_z = c_0 \quad (5.60)$$

bulunur.

Böylece

$$D_x = a_0, \quad D_y = b_0, \quad D_z = c_0 \quad (5.61)$$

bulunmuş olur. Bunun çözümünden

$$D = a_0x + b_0y + c_0z + d_0 \quad (5.62)$$

bulunur.

(Uras, F 1995) de sayfa 174 de $A_1' = 0$ ve $B_2'C_2' = 0$ koşullarına bağlı bulunan D ile, sayfa 175 de (2.41) ve (2.42) ile verilen projektif dönüşümün özel bir hali elde edilmiştir. Fakat bizim burada bulduğumuz (5.62) denklemi ile verilen D ise bir koşula bağlı olmadığından bunun sonucunda bulunan dönüşüm genel bir projektif dönüşümdür.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada n -boyutlu Öklit uzayında, hiperyüzeylerin asimptotiklerini koruyan, yani bir hiperyüzeyin asimptotiğini diğer bir hiperyüzeyin asimptotiğine dönüştüren dönüşümlerle ilgilendik ve bir dönüşümün hiperyüzeylerin asimptotiklerini koruması için gerek ve yeter koşulun dönüşümün projektif dönüşüm olması gerektiğini gösterdik. Böylece projektif dönüşümün yeni bir karakterizasyonunu elde ettik. Ayrıca (Uras, F 1995) deki hatalar düzeltilmiştir.

KAYNAKLAR

Efimov, N.V. , “Qualitative problems of the theory of deformation of surfaces”, American Mathematical Society, Translation no. 37, p.355.

Eisenhart, L. P. (1960), A Treatise on The Differantial Geometry of Curves and Surfaces, Dover Publications, Inc, New York p.202.

Lovett, E. O. (1895/96), “Note on the general projective transformation”, Ann. of Math, 10(1–6):5-16.

Özkan, M. A. and Soyuçok, Z (1987), “Transformations Preserving the Asymptotic and Darboux Directions of A Surface and Their Effects on the İnfinitesimal Bending”, İstanbul Tek. Üni. Bül. 40(3):497–512.

Uras, F. (1995), “On Transformation Preserving Asymptotic Lines of Surfaces in Three-Dimensional Euclidean Space”, Bulletin of the Technical University of Istanbul, 48(1):165–178.

Weatherburn, C. E. (1963), An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus, Cambridge University Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 01.12.1978

Doğum yeri Erzurum

Lise 1992–1996 Bakırköy İ.H.Lisesi

Lisans 1996–2000 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2000–2004 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurum

2001-Devam ediyor YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Araştırma Görevlisi