

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DEĞİŞMEZ ALT UZAY PROBLEMİ

Yüksek Matematikçi Pınar ALBAYRAK

**FBE Matematik Ana Bilim Dalında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 06 Mart 2009
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ömer GÖK (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER (İTİCÜ)
: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM (FÜ)
: Doç. Dr. Emanullah HİZEL (İTÜ)
: Doç. Dr. Fatih TAŞÇI (YTÜ)

İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	3
3. DEĞİŞMEZ ALT UZAY PROBLEMİ	8
4. POZİTİF OPERATÖRLER İÇİN DEĞİŞMEZ ALTUZAY TEOREMLERİ	12
5. ARKADAŞCA ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER VE DEĞİŞMEZ ALT UZAYLARI	17
6. AYRIŞTIRILABİLİRLİK	26
7. SIKIŞTIRMALI AYRIŞTIRILABİLİRLİK	30
8. SONUÇLAR	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	36

SİMGE LİSTESİ

E	Banach latisi
E^+	E 'nin pozitif konisi
E_u	u elemanı ile üretilen esas ideal
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
x^+	x 'in pozitif kısmı
x^-	x 'in negatif kısmı
$ x $	x 'in mutlak değeri
$\ x\ $	x 'in normu
$L(X)$	X uzayından X uzayına tanımlı sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\overline{E}$	E kümesinin kapanışı
A^d	A kümesinin ayrık tümleyeni
N_B	Sıfır ideal
AM-uzayı	Soyut M uzay
AL-uzayı	Soyut L uzay
Boy X	X uzayının boyutu
Çek T	T operatörünün çekirdeği
Rang (T)	T operatörünün görüntü kümesi
$O_T(x)$	x 'in T -yörünge uzayı
N_λ	Özdeğer uzayı
Z_T	T operatörünün yerel yarı nilpotent olduğu noktalar kümesi
İlat(Γ)	$L(E)$ 'nin Γ alt kümesine ait olan tüm kapalı değişmez ideallerin koleksiyonu
Lat(Γ)	$L(X)$ 'in Γ alt kümesine ait olan tüm kapalı değişmez alt uzayların koleksiyonu
Γ^c	Γ 'nın değişmelileri kümesi
$\{T\}_+^c$	T operatörünün pozitif komutantı
$\hat{T}$	T operatörünün X/M 'ye sıkıştırması
S^{-1}	S operatörünün tersi
$\sum$	Toplam simgesi
$[x, y]$	Sıralı aralık
$x > 0$	x kesin pozitif
X	Banach uzayı
C	Kompleks sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamam sırasında bana yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Ömer Gök'e ve çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na teşekkür ederim.

ÖZET

“Bir X Banach uzayı üzerinde tanımlı $T : X \rightarrow X$ sürekli lineer operatörü aşıkâr olmayan bir kapalı değişmez alt uzaya sahip midir?” sorusu değişmez alt uzay problemi olarak adlandırılır. Değişmez alt uzay problemine ilişkin pek az olumlu sonuç bilinmektedir.

Bu çalışmada, bir E Banach latisi üzerinde tanımlı arkadaşça zayıf kompakt operatörler ve bu operatörlerin değişmez alt uzayları incelendi. Ayrıca, E bir Banach latisi olmak üzere E 'den E 'ye sürekli lineer operatörlerin uzayı $L(E)$ 'de operatörlerin bir koleksiyonunun değişmez bıraktığı aşıkâr olmayan kapalı değişmez idealler üzerinde duruldu.

Son olarak da Banach latislerinde sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirlik konusu incelenerek, her arkadaşça zayıf kompakt, yarı nilpotent operatörün sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Değişmez alt uzay, Banach latis, arkadaşça zayıf kompakt operatör, sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirlik, kapalı ideal.

ABSTRACT

THE INVARIANT SUBSPACE PROBLEM

The invariant subspace problem is the following question: "Does a continuous linear operator $T: X \rightarrow X$ on a Banach space X have a non-trivial closed invariant subspace?". Very few positive results are known about it.

In this study, it was introduced the definition of weakly compact-friendly operators and investigated the invariant subspaces of weakly compact-friendly operators. Also, it was studied on closed ideals which are invariant under a collection of operators in space $L(E)$ of continuous linear operators from a Banach lattice E into itself.

Finally, it was studied on compressionally decomposability on Banach lattices and showed that every quasinilpotent, weakly compact-friendly operator is compressionally decomposable.

Keywords: Invariant subspace, Banach lattice, weakly compact-friendly operator, compressionally decomposability, closed ideal

1.GİRİŞ

X bir Banach uzayı, $T : X \rightarrow X$ sürekli lineer operatör, V de X 'in bir alt uzayı olmak üzere $T(V) \subseteq V$ ise V 'ye T -değişmez alt uzay veya T tarafından değişmez bırakılan alt uzay denir. Ayrıca, eğer T operatörü ile değişmeli olan her $S \in L(X)$ operatörü için $S(V) \subseteq V$ oluyorsa V 'ye T -hiperdeğişmez alt uzay veya T 'nin değişmelileri (komutantları) tarafından değişmez bırakılan alt uzay denir.

“Bir X Banach uzayı üzerinde tanımlı $T : X \rightarrow X$ sürekli lineer operatörü aşikâr olmayan bir kapalı değişmez alt uzaya sahip midir?” sorusu değişmez alt uzay problemi olarak adlandırılır.

Değişmez alt uzay problemine ilişkin pek az olumlu sonuç bilinmektedir:

1954'te Aronszajn ve Smith, kompakt operatörlerin aşikâr olmayan kapalı değişmez alt uzaylara sahip olduğunu ispatladı.

1966'da Bernstein ve Robinson, polinomca kompakt operatörlerin aşikâr olmayan kapalı değişmez alt uzaylara sahip olduğunu gösterdi.

1973'te Lomonosov, sıfırdan farklı bir kompakt operatörle değişmeli olan her sürekli operatörün aşikâr olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip olduğunu göstererek değişmez alt uzay probleminde büyük bir gelişmeye imza attı.

Enflo (1975), ayrılabilir bir Banach uzayı üzerinde tanımlı sınırlı lineer operatörü aşikâr olmayan kapalı alt uzaysız gösteren ilk kişidir ve değişmez alt uzay probleminin genel formülasyonuna olumsuz bir cevap vermiştir.

1985'de Read, l_1 üzerinde aşikâr olmayan kapalı alt uzaysız bir sınırlı lineer operatör oluşturdu.

Bu çalışmada, arkadaşça zayıf kompakt operatörler ve bu operatörlerin değişmez alt uzayları incelendi.

Ayrıca, E bir Banach latisi olmak üzere E 'den E 'ye sürekli lineer operatörlerin uzayı $L(E)$ 'de operatörlerin bir koleksiyonunun değişmez bıraktığı aşikâr olmayan kapalı değişmez idealler üzerinde duruldu.

Son olarak da, Banach latislerinde sıkıştırılabilirlik konusu incelenerek, her arkadaşça zayıf kompakt yarı nilpotent operatörün sıkıştırılabilir olduğu gösterildi.

Bu çalışmada geçen tüm operatörler aksi belirtilmediği sürece sürekli lineer operatörlerdir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullandığımız kavramların tanımlarını, teoremleri ve önermeleri vereceğiz.

Tanım 2.1: E bir sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için $\sup\{x, y\} \in E$ ve $\inf\{x, y\} \in E$ ise E 'ye bir vektör latisi veya Riesz uzayı denir. $\sup\{x, y\} = x \vee y$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde de gösterilir.

$E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ kümesine E 'nin pozitif konisi denir.

Tanım 2.2: E bir Riesz uzayı olsun. Bir $x \in E$ elemanı için,

i) x 'in mutlak değeri $|x| = \sup\{x, -x\} = x \vee (-x)$

ii) x 'in pozitif kısmı $x^+ = x \vee 0$

iii) x 'in negatif kısmı $x^- = (-x) \vee 0$

olarak tanımlanır. Ayrıca $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$ eşitlikleri de sağlanır.

Tanım 2.3: E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ve y elemanlarına ayrık elemanlar denir.

Tanım 2.4: E bir Riesz uzayı, $A \subset E$ olsun. A kümesinin ayrık tümleyeni $A^d = \{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } |x| \wedge |y| = 0\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.5: E bir Riesz uzayı, $x, y \in E$ ve $x \leq y$ olsun. $[x, y]$ sıralı aralığı $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesi olarak tanımlanır.

Tanım 2.6: E bir Riesz uzayı, $A \subset E$ olsun. $A \subset [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ varsa A kümesine sıralı sınırlı küme denir.

Tanım 2.7: E bir Riesz uzayı, $A \subset E$ olsun. $|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ iken $x \in A$ oluyor ise A ya solid (katı) küme denir.

Tanım 2.8: E bir Riesz uzayı, $A \subset E$ olsun. A kümesi solid alt uzay ise A 'ya ideal denir.

Tanım 2.9: Her $0 \leq u \in E$ için $E_u = \{x \in E : |x| \leq \lambda u, \exists \lambda > 0\}$ kümesine u ile üretilmiş esas ideal denir. Pozitif bir $u \in E$ için $\overline{E_u} = E$ ise u 'ya yarı iç nokta denir.

Tanım 2.10: $(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, $(E, \|\cdot\|, \leq)$ sıralı vektör uzayı olsun. $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa E 'ye Banach latisi denir.

Tanım 2.11: E bir Banach latisi olsun. $x \wedge y = 0$ koşulunu sağlayan her $x, y \in E^+$ için $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ oluyorsa E ye soyut L -uzay veya AL -uzayı denir.

Örneğin, l_1 uzayı bir AL -uzayıdır.

Tanım 2.12: E bir Banach latisi olsun. $x \wedge y = 0$ koşulunu sağlayan her $x, y \in E^+$ için $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyorsa E ye soyut M -uzay veya AM -uzayı denir.

Örneğin, $C(K)$ uzayı bir AM -uzayıdır.

Tanım 2.13: E bir Banach latisi, $T: E \rightarrow E$ bir operatör olsun. $x \geq 0$ iken $Tx \geq 0$ ise T operatörüne pozitif operatör denir. Bir Banach latis üzerinde tanımlı her pozitif operatör süreklidir.

Tanım 2.14: X Banach uzayı olmak üzere, X 'ten X 'e tüm sürekli lineer operatörlerin kümesi $L(X) = \{T \mid T: X \rightarrow X \text{ sürekli, lineer operatör}\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.15: E Banach latisi, $T: E \rightarrow E$ bir operatör, $B: E \rightarrow E$ pozitif operatör olsun.

Her $x \in E$ için $|T(x)| \leq B(|x|)$ ise T operatörü B tarafından kısıtlanıyor (domine ediliyor) veya B operatörü T operatörünü kısıtlıyor (domine ediyor) denir ve kısaca $T \prec B$ şeklinde gösterilir.

Pozitif bir operatör tarafından kısıtlanan operatör süreklidir.

Ayrıca, $x \geq 0$ ise $0 \leq T \leq B$ dir.

Tanım 2.16: X bir Banach uzayı, $T : X \rightarrow X$ bir operatör olsun. $T^c = \{S \in L(X) : TS = ST\}$ kümesine T operatörünün komutantlarının (değişmelilerinin) kümesi denir.

Lemma 2.17: Bir $u > 0$ yarı iç noktalı E Banach latisi için aşağıdaki özellikler sağlanır:

I) Her $0 \neq y \in E_u$ elemanı için öyle bir $V : E \rightarrow E$ operatörü vardır ki V operatörü y elemanını sıfırdan farklı pozitif bir elemana taşır ve V operatörü birim operatör tarafından domine edilir; yani,

$$V(y) > 0 \text{ ve her } x \in E \text{ için } |V(x)| \leq |x| \quad (2.1)$$

dır.

II) $0 \leq v \leq u$ koşulunu sağlayan her v elemanı için öyle bir $U : E \rightarrow E$ operatörü vardır ki U operatörü u elemanını v elemanına taşır ve U operatörü birim operatör tarafından domine edilir; yani,

$$U(u) = v \text{ ve her } x \in E \text{ için } |U(x)| \leq |x| \quad (2.2)$$

dir.

Tanım 2.18: $V \subset X$ ve $V \neq \{0\}$, X ise V 'ye aşikâr olmayan altuzay denir.

Tanım 2.19: $T : X \rightarrow Y$ bir operatör, X ve Y normlu uzaylar olsun. X 'deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\{Tx_n\}$ dizisinin Y 'de yakınsak bir alt dizisi varsa T 'ye kompakt operatör denir.

Örnek 2.20: Her $j=1,2,\dots$ için $n_j = \varphi_j / j$ olmak üzere $y = (n_j) = Tx$ olarak tanımlanmış $T : l_2 \rightarrow l_2$ operatörünün kompakt olduğunu gösterelim.

Açıkça, T lineerdir. $x = (\varphi_j) \in l_2$ ise $y = (n_j) \in l_2$ dir.

$T_n x = \left(\varphi_1, \frac{\varphi_2}{2}, \frac{\varphi_3}{3}, \dots, \frac{\varphi_n}{n}, \dots, 0, 0, \dots \right)$ ile $T_n : l_2 \rightarrow l_2$ operatörünü tanımlayalım. T_n operatörü

lineer, sınırlı ve $\text{boy}(T_n(l_2)) < \infty$ olduğundan kompakttır.

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |n_j|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |\phi_j|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\phi_j|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}$$

ifadesinin $\|x\| = 1$ koşulunu sağlayan tüm x 'ler üzerinden supremumunu alırsak

$\|(T - T_n)\| \leq \frac{1}{(n+1)}$ elde ederiz. Bu durumda, $T_n \rightarrow T$ ve T_n operatörü kompakt olduğundan T operatörü de kompakttır.

Tanım 2.21: $T : X \rightarrow Y$ bir operatör, X ve Y normlu uzaylar olsun. X 'deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\{Tx_n\}$ dizisinin Y 'de zayıf yakınsak bir alt dizisi varsa T 'ye zayıf kompakt operatör denir.

Örnek 2.22: $\{y_1, y_2, \dots\}$ bir Y Banach uzayının sayılabilir rölatif zayıf kompakt alt kümesi olsun. $T(\lambda_1, \lambda_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$ olarak tanımlanan $T : l_1 \rightarrow Y$ operatörünün zayıf kompakt olduğunu gösterelim.

$\{y_1, y_2, \dots\}$ rölatif zayıf kompakt olduğundan norm sınırlıdır. Bu durumda her $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} \in l_1$ dizisi için $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$ serisi Y Banach uzayında norm yakınsaktır.

Dolayısıyla, T iyi tanımlı sınırlı lineer operatördür. Bundan dolayı, Abramovich ve Aliprantis'e (2002) göre T operatörü zayıf kompakttır.

Teorem 2.23: Bir E Banach latisi üzerinde tanımlı $B : E \rightarrow E$ pozitif operatörü bir zayıf kompakt operatör tarafından domine ediliyorsa B^2 de zayıf kompakt operatördür (Aliprantis ve Burkinshaw., 1985).

Teorem 2.24: Bir E Banach latisi üzerinde tanımlı $B : E \rightarrow E$ pozitif operatörü bir kompakt operatör tarafından domine ediliyorsa B^3 de kompakt operatördür (Aliprantis vd., 1985).

Teorem 2.25: AM- veya AL-uzayında tanımlı bir pozitif operatör zayıf kompakt ise bu operatörün karesi kompakt operatördür (Aliprantis vd., 1985).

Tanım 2.26: Birim operatörün bir katı olmayan operatöre skaler olmayan operator denir.

Tanım 2.27: Bir Riesz uzayı üzerinde tanımlı latiş seminormu p olsun. $x_\alpha \downarrow 0$ iken $p(x_\alpha) \downarrow 0$ sağlanıyorsa p seminormuna sıralı sürekli denir. Bir E Banach latisi üzerindeki norm sıralı sürekli ise E , sıralı sürekli norma sahiptir denir.

Tanım 2.28: Kısmi sıralı iki küme arasında tanımlı bir f fonksiyonu, bire-bir, örten ve sıralamayı koruyan bir fonksiyon ise f 'e sıralı izomorfizma adı verilir.

3. DEĞİŞMEZ ALT UZAY PROBLEMİ

X bir Banach uzayı, $T : X \rightarrow X$ sürekli lineer operatör olsun. V , X 'in bir alt uzayı olmak üzere $T(V) \subseteq V$ ise V ye T -değişmez alt uzay veya T tarafından değişmez bırakılan alt uzay denir. Ayrıca, eğer her $S \in T^\circ$ için $S(V) \subseteq V$ oluyorsa V 'ye T -hiperdeğişmez alt uzay veya T 'nin değişmelileri (komutantları) tarafından değişmez bırakılan alt uzay denir.

“Bir X Banach uzayı üzerinde tanımlı $T : X \rightarrow X$ sürekli lineer operatörü aşikâr olmayan bir kapalı değişmez alt uzaya sahip midir?” sorusu değişmez alt uzay problemi olarak bilinmektedir.

Bu bölümde bazı temel değişmez alt uzay teoremlerine yer vereceğiz.

Teorem 3.1: X Banach uzayı ve $1 < \text{Boy}X < \infty$ olmak üzere $0 \neq T : X \rightarrow X$ sınırlı lineer operatör ise T 'nin kapalı değişmez alt uzayı vardır.

Teorem 3.2: X Banach uzayı ve $T : X \rightarrow X$ sınırlı bir operatör ise $\text{Çek}T = \{x \in X : Tx = 0\}$ ve T 'nin görüntü kümesi $\text{Rang}(T)$, T -hiperdeğişmez alt uzaylardır (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

İspat: $S \in L(X)$ olmak üzere $ST = TS$ olsun. $Tx = 0$ ise $T(Sx) = S(Tx) = 0$ olduğundan $S(\text{Çek}T) \subseteq \text{Çek}T$ elde ederiz. Yani $\text{Çek}T$ kümesi T -hiperdeğişmez alt uzaydır.

Diğer yandan, $x \in X$ ise $S(Tx) = T(Sx)$ eşitliğinden $S(T(X)) \subseteq T(X)$ elde ederiz ki bu da $\text{Rang}(T)$ 'nin T -hiperdeğişmez alt uzay olduğunu kanıtlar.

Tanım 3.3: X Banach uzayı, $x \in X$ ve $T : X \rightarrow X$ bir operatör olsun. $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$ kümesine x 'in T altındaki yörüngesi (veya T -yörüngesi) denir. x 'in T -yörünge uzayı x 'in T -yörüngeleriyle üretilen uzaydır ve $O_T(x)$ ile gösterilir. Her $x \neq 0$ için $O_T(x) \neq \emptyset$ dır. Eğer $\overline{O_T(x)} = X$ ise x vektörüne devirli (veya T -devirli) denir.

T 'nin her yörüngesi T altında değişmez kalır. Ayrıca, $\overline{O_T(x)} \neq X$ ($x \neq 0$) ise $\overline{O_T(x)}$ aşikâr olmayan kapalı T -değişmez alt uzaydır.

Tanım 3.4: X Banach uzayı, $T: X \rightarrow X$ sınırlı operatör, λ da T 'nin bir özdeğeri olsun. $N_\lambda = \{x \in X: Tx = \lambda x\}$ kümesine T 'nin özdeğer uzayı denir.

Özdeğer uzayı en basit değişmez alt uzayıdır.

Tanım 3.5: E bir Banach latisi, $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ katsayıları negatif olmayan bir polinom ve $B: E \rightarrow E$ bir pozitif operatör olsun.

Her $x \in E$ için $|T(x)| \leq P(B)|x|$ ise T operatörü B operatörü tarafından polinomca kısıtlanıyor denir.

Teorem 3.6: J , bir E Banach latisinin ideali olsun. J , bir $B: E \rightarrow E$ pozitif operatörü altında değişmez kalıyorsa, B tarafından polinomca kısıtlanan her T operatörü altında da değişmez kalır (Abramovich vd., 1994).

İspat: $p(t)$, katsayıları negatif olmayan bir polinom olsun. Ayrıca T operatörü $p(B)$ tarafından kısıtlansın. Bu durumda, $x \in J$ olmak üzere $|Tx| \leq p(B)(|x|) \in J$ eşitsizliği sağlanır. J ideal olduğundan $Tx \in J$ dir. Yani J ideali T -değişmez idealdir.

Teorem 3.7: E bir Banach latisi, $B: E \rightarrow E$ bir pozitif operatör, J de B operatörü altında değişmez kalan aşıkâr olmayan kapalı ideal olsun. Bu durumda, J ideali B altında değişmez kalan aşıkâr olmayan bir esas ideali kapsar (Abramovich vd., 1994).

İspat: Genelliği bozmadan $\|B\| < 1$ seçebiliriz. $0 < w \in J$ ve $u = \sum_{n=0}^{\infty} B^n(w)$ olsun. J ideali B -değişmez kapalı ideal olduğundan $u \in J$ dir. $u \in J$ ve $u > 0$ olduğundan $\overline{E_u} \subseteq J$ ve $E_u \neq \{0\}$ dir. $|x| \leq \lambda u$ koşulunu sağlayan bir $x \in E$ elemanını göz önüne alalım. Bu durumda,

$$|Bx| \leq B(|x|) \leq \lambda B(u) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1}(w) \leq \lambda u \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlanır. Yani $Bx \in E_u$ dur ve dolayısıyla $E_u \subseteq J$ esas ideali B -değişmezdir.

Tanım 3.8: E bir Banach latisi olsun. $B : E \rightarrow E$ pozitif operatörü için $N_B = \{x \in E : B(x) = 0\}$ kümesine sıfır ideal denir. N_B , B ile değişmeli her pozitif operatör altında değişmez kalır. Ayrıca $B=0$ olması ancak ve ancak $N_B = E$ olması ile mümkündür.

Tanım 3.9: E bir Banach latisi, $B : E \rightarrow E$ bir pozitif operatör olsun. $x > 0$ iken $Bx > 0$ sağlanıyorsa B operatörüne kesin pozitifdir denir.

Bir B pozitif operatörünün kesin pozitif olması için gerek ve yeter koşul $N_B = \{0\}$ olmasıdır.

Tanım 3.10: X bir Banach uzayı, $T : X \rightarrow X$ bir operatör olsun. Her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0$ oluyorsa T operatörüne yarı nilpotent denir.

Eğer bir $x_0 \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x_0\|^{1/n} = 0$ oluyorsa bu durumda T operatörü x_0 da yerel yarı nilpotenttir denir.

T'nin yerel yarı nilpotent olduğu noktalar kümesi Z_T ile gösterelim.

$$Z_T = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0\} \text{ dir.}$$

$Z_T \neq \{ \}$ dir; çünkü en azından $0 \in Z_T$ dir.

Teorem 3.11: X bir Banach uzayı, $T : X \rightarrow X$ bir operatör olsun. Bu durumda Z_T , T-hiperdeğişmez alt uzaydır (Abramovich vd., 1994).

İspat: Açık bir şekilde, her λ skaleri için, $x \in Z_T$ iken $\lambda x \in Z_T$ dir. $x, y \in Z_T$, $\varepsilon > 0$ olsun.

Bu durumda, öyle bir n_0 sayısı vardır ki her $n \geq n_0$ için $\|T^n x\| < \varepsilon^n$ ve $\|T^n y\| < \varepsilon^n$ eşitsizlikleri

ve dolayısıyla $\|T^n (x + y)\|^{1/n} < (\|T^n x\| + \|T^n y\|)^{1/n} < 2\varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Bundan dolayı $x + y \in Z_T$ dir; yani Z_T vektör alt uzayıdır.

$x_0 \in Z_T$ olsun ve $S : X \rightarrow X$ operatörü $TS=ST$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda,

$$\left\|T^n(Sx_0)\right\|^{1/n} = \left\|S(T^n x_0)\right\|^{1/n} \leq \|S\|^{1/n} \left\|T^n x_0\right\|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.2)$$

olduğundan $Sx_0 \in Z_T$ dir. Dolayısıyla Z_T , T-hiperdeğişmez alt uzaydır.

4. POZİTİF OPERATÖRLER İÇİN DEĞİŞMEZ ALTUZAY TEOREMLERİ

Bu bölümde bir Banach latisi üzerinde tanımlı pozitif operatörler için bazı önemli değişmez alt uzay teoremleri incelenecektir.

Teorem 4.1: E bir Banach latisi, $0 \leq B : E \rightarrow E$ bir operatör olsun. Eğer bir $0 \leq S : E \rightarrow E$ operatörü

$$1) SB = BS$$

$$2) x_0 > 0 \text{ için } S \text{ operatörü yerel yarı nilpotent yani } \lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n x_0\|^{1/n} = 0$$

$$3) K \text{ kompakt operatör olmak üzere } |K(x)| \leq S|x|$$

şartlarını sağlıyorsa B 'nin aşıkâr olmayan kapalı değişmez alt uzayı vardır. Ayrıca bu alt uzayı E 'deki bir esas idealin kapanışından seçebiliriz (Abramovich vd., 1994).

İspat: B , S ve x_0 teoremdeki şartları sağlasınlar. Ayrıca sıfırdan farklı K kompakt operatörü S operatörü tarafından kısıtlansın; yani $\forall x \in E$ için $|K(x)| \leq S|x|$ eşitsizliği sağlansın. B operatörü sürekli olduğundan $\|B\| \leq 1$ alabiliriz. Bu durumda, $A = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$ serisi E üzerinde B ve S operatörleri ile değişmeli olan pozitif bir operatörü tanımlar.

Her $x > 0$ elemanı için $J[x]$ ile Ax tarafından üretilen esas ideali tanımlayalım:

$$J[x] = \{y \in E : |y| \leq \lambda Ax, \exists \lambda > 0\} \quad (4.1)$$

$x \in J[x]$ olduğundan $J[x]$ kümesi sıfırdan farklıdır. Ayrıca, $J[x]$ ideali B -değişmezdir. Gerçekten; eğer $y \in J[x]$ ise bazı $\lambda > 0$ için $|y| \leq \lambda Ax$ dir ve bundan dolayı

$$|By| \leq B|y| \leq \lambda B(Ax) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} B^n x \leq \lambda Ax \quad (4.2)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $By \in J[x]$ dir. Dolayısıyla $\overline{J[x]}$ kümesi sıfırdan farklı kapalı B -değişmez idealdir.

Bazı $x > 0$ için $\overline{J[x]} \neq E$ olduğunu gösterirsek ispatımız tamamlanmış olacak. Bunu kanıtlamak için tersine her $x > 0$ elemanı için

$$\overline{J[x]} = E \quad (4.3)$$

olduğunu kabul edelim.

Genelliği bozmadan $Kx_0 \neq 0$ kabul edebiliriz. Bunun doğruluğunu görmek için $J[x_0]$ idealini düşünelim. Eğer her $0 < y \in J[x_0]$ için $K(y) = 0$ olsaydı $J[x_0]$ üzerinde $K=0$ olurdu. Bu durumda (4.3)'ten $K=0$ elde edilirdi ki bu da K operatörünün sıfırdan farklı olmasıyla çelişirdi. Dolayısıyla, bazı $0 < y_0 \in J[x_0]$ için $K(y_0) \neq 0$ sağlanır. S operatörü x_0 da yerel yarı nilpotent olduğundan ve bazı k sayısı için $0 < y_0 \leq kAx_0$ eşitsizliği sağlandığından S operatörü y_0 noktasında da yerel yarı nilpotenttir. Bundan dolayı x_0 ile y_0 in yerini değiştirerek $Kx_0 \neq 0$ yazabiliriz.

Genelliği bozmadan, $\|K\| = 1$ olduğunu varsayalım. Uygun bir $a > 1$ sayısı için x_0 yerine ax_0 yazalım ve $\|x_0\| > 1$ ve $\|Kx_0\| > 1$ kabul edelim. $U = \{z \in E : \|x_0 - z\| \leq 1\}$ kümesi $x_0 > 0$ merkezli kapalı birim yuvar olsun. x_0 elemanını seçimimizden dolayı

$$0 \notin U \text{ ve } 0 \notin \overline{K(U)} \quad (4.4)$$

olur. (4.3)'den, her $x \neq 0$ için $\overline{J[x]} = E$ dir. Bundan dolayı, her $y \in E^+$ için pozitif vektörlerin $\{y \wedge nA(|x|)\}$ dizisi norm yakınsaktır ve dahası $\lim_{n \rightarrow \infty} (y \wedge nA(|x|)) = y$ dir. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Özel olarak, her $x \neq 0$ için öyle bir n sayısı vardır ki $\|x_0 - x_0 \wedge nA(|x|)\| < 1$ eşitsizliği sağlanır. $z \rightarrow x_0 \wedge nA(|z|)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, her n için $\{z : \|x_0 - x_0 \wedge nA(|z|)\| < 1\}$ kümesi açıktır. $0 \notin \overline{K(U)}$ olduğundan, önceki ifadelere göre

$$\overline{K(U)} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in E : \|x_0 - x_0 \wedge nA(|z|)\| < 1\} \quad (4.5)$$

dir.

$\{z : \|x_0 - x_0 \wedge nA(|z|)\| < 1\}$ kümesi, n artarken artan olduğundan, $\overline{K(U)}$ 'nin kompaktlığından bazı m sayısı için

$$\overline{K(U)} \subseteq \{z \in E : \|x_0 - x_0 \wedge mA(|z|)\| < 1\} \quad (4.6)$$

sağlanır. Diğer bir deyişle; öyle bir sabit sayısı vardır ki, $x \in \overline{K(U)}$ iken $x_0 \wedge mA(|x|) \in U$ dir.

$x_1 = x_0 \wedge mA(|Kx_0|) \in U$ olsun. $K(x_1) \in K(U)$ olduğundan, aynı şekilde $x_2 = x_0 \wedge mA(|Kx_1|) \in U$ dir. Bu şekilde devam edersek, U içinde $x_{n+1} = x_0 \wedge mA(|Kx_n|)$ ile tanımlı bir $\{x_n\}$ dizisi elde ederiz.

Her n sayısı için $0 \leq x_n \leq m^n A^n S^n(x_0)$ eşitsizliğinin sağlandığını tümevarımla gösterelim. $n=1$ için $x_1 = x_0 \wedge mA(|Kx_0|) \leq mA(Sx_0)$ dir. n için $0 \leq x_n \leq m^n A^n S^n(x_0)$ sağlansın, ve eşitsizliğin $n+1$ içinde doğru olduğunu gösterelim:

$$0 \leq x_{n+1} = x_0 \wedge mA(|Kx_n|) \leq mA(|Kx_n|) \leq mA(Sx_n) \leq m^{n+1} A^{n+1} S^{n+1}(x_0) \quad (4.7)$$

Bundan dolayı, her n için $\|x_n\| \leq m^n \|A\|^n \|S^n x_0\|$ dir ve böylece $\|x_n\|^{1/n} \leq m \|A\| \|S^n x_0\|^{1/n}$ elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n x_0\|^{1/n} = 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^{1/n} = 0$ dir. Sonuç olarak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ dir.

$\{x_n\} \subset U$ olduğundan, (4.4)'ün tersine $0 \in \overline{U} = U$ sağlanır. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Teorem 4.2: $B: E \rightarrow E$ ve $S: E \rightarrow E$ sıfırdan farklı değişmeli pozitif operatörler olsun. Bu operatörlerden biri sıfırdan farklı pozitif vektörde yerel yarı nilpotent ve diğeri bir kompakt operatörü kısıtlıyor ise B ve S operatörlerinin ortak değişmez bıraktığı bir aşikâr olmayan kapalı ideal vardır (Abramovich vd., 1994).

İspat: S operatörü bir x_0 noktasında yerel yarı nilpotent olsun ve B operatörü sıfırdan farklı bir K operatörünü kısıtlasın. Eğer S operatörü kesin pozitif bir operatör değilse bu durumda N_S sıfır ideali aradığımız ortak kapalı değişmez alt uzaydır. Bundan dolayı, S operatörü kesin pozitif olsun. Genelliği bozmadan $\|B+S\| < 1$ kabul edebiliriz.

$A = \sum_{n=0}^{\infty} (B+S)^n$ serisini ve Ax_0 ile üretilen $J = \{y \in E : |y| \leq \lambda Ax_0, \exists \lambda > 0\}$ idealini tanımlayalım. Açık bir şekilde bu ideal $(B+S)$ -değişmez idealdir. $0 \leq B$ ve $S \leq S+B$ eşitsizlikleri sağlandığından Teorem 3.6'a göre J ideali hem B hem de S altında değişmez kalır.

Eğer $\bar{J} \neq E$ ise, bu durumda $\bar{J}$ ideali B ve S operatörleri altında değişmez kalan aşikâr olmayan kapalı bir idealdir.

Bundan dolayı, $\bar{J} = E$ durumunu düşünelim. Bu durumda, $K \neq 0$ olduğundan öyle bir $0 < y_0 \in J$ elemanı vardır ki $K(y_0) \neq 0$ dır. Açıkça, S operatörü y_0 'da yerel yarı nilpotenttir.

$|Ky_0| \leq B(y_0) \in J$ olduğundan Lemma 2.17' den dolayı öyle bir $V : E \rightarrow E$ operatörü vardır ki

$$VK(y_0) > 0 \text{ ve her } x \in E \text{ için } |V(x)| \leq |x| \quad (4.8)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Şimdi de, SVK kompakt operatörünü ele alalım. S operatörü kesin pozitif olduğundan $SVK(y_0) > 0$ dır ve dolayısıyla SVK operatörü sıfırdan farklıdır. Ayrıca,

$$|SVK(x)| \leq S|VK(x)| \leq S(|K(x)|) \leq SB(|x|) \quad (4.9)$$

eşitsizliği sağlanır; yani, SB operatörü sıfırdan farklı kompakt SVK operatörünü kısıtlar. Ayrıca SB operatörü y_0 da yerel yarı nilpotenttir ve $S+B$ pozitif operatörü ile değişmelidir. Bu durumda, Teorem 4.1 gereğince aşikâr olmayan bir kapalı $(S+B)$ -değişmez ideal vardır. Açıkça, bu ideal hem B hem de S operatörü altında değişmez kalır.

Sonuç: E Banach latisi, $B:E \rightarrow E$ pozitif bir operatör olsun. B operatörü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) B operatörü sıfırdan farklı pozitif bir vektörde yarı nilpotenttir.
- ii) B 'nin bazı kuvvetleri sıfırdan farklı bir kompakt operatörü kısıtlar.

Bu durumda, B operatörünün aşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır (Abramovich vd., 1994).

5. ARKADAŞÇA ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER VE DEĞİŞMEZ ALT UZAYLARI

Bu bölümde arkadaşça zayıf kompakt operatörler ve bu operatörlerin değişmez alt uzayları incelenmiştir.

Tanım 5.1: E Banach latisi, $B : E \rightarrow E$ pozitif bir operatör olsun. $R, C, K : E \rightarrow E$ sıfırdan farklı, R ve K pozitif ve ayrıca K operatörü zayıf kompakt operatör olmak üzere

$$1) RB=BR$$

$$2) \forall x \in E \text{ için } |C(x)| \leq R(|x|)$$

$$3) \forall x \in E \text{ için } |C(x)| \leq K(|x|)$$

şartları sağlanıyorsa B operatörüne arkadaşça zayıf kompakt operatör denir.

Her zayıf kompakt operatör arkadaşça zayıf kompakttır.

Önerme 5.2: E Banach latisi, $B : E \rightarrow E$ arkadaşça zayıf kompakt operatör ve $S : E \rightarrow E$ sıralı izomorfizma olsun. Bu durumda, SBS^{-1} operatörü de arkadaşça zayıf kompakt operatördür, (Gök ve Albayrak, 2009a).

İspat: Bir $T : E \rightarrow E$ operatörü ve terslenebilir bir $S : E \rightarrow E$ operatörü için STS^{-1} operatörünü T_s ile gösterelim. R ve K pozitif ve ayrıca K zayıf kompakt operatör olmak üzere, $R, T, K : E \rightarrow E$ operatörleri aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$RB = BR, \quad R \succ T, \quad \text{ve} \quad K \succ T \quad (5.1)$$

Bu durumda her $S : E \rightarrow E$ sıralı izomorfizması için R_s ve K_s pozitifdir, ayrıca K_s zayıf kompakttır ve

$$R_s B_s = B_s R_s, \quad R_s \succ T_s, \quad \text{ve} \quad K_s \succ T_s \quad (5.2)$$

koşulları sağlanır. Yani $B_s = SBS^{-1}$ operatörü arkadaşça zayıf kompakt operatördür.

Teorem 5.3: $B : E \rightarrow E$ bir Banach latisi üzerinde tanımlı skaler olmayan pozitif bir operatör olsun. Eğer B bir K kompakt operatörüyle değişmeli ise bu durumda E 'nin aşikâr olmayan kapalı bir B -hiperdeğişmez alt uzayı vardır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 5.4: Bir E AL- veya AM-uzayı üzerinde tanımlı sıfırdan farklı pozitif arkadaşça zayıf kompakt $B : E \rightarrow E$ operatörü bir $x_0 > 0$ noktasında yerel yarı nilpotent ise B operatörünün aşikâr olmayan kapalı değişmez bir ideali vardır. Ayrıca, B ile değişmeli bir $T : E \rightarrow E$ pozitif operatörü varsa bu durumda T ve B 'nin ortak değişmez bıraktığı aşikâr olmayan kapalı bir ideal vardır (Gök ve Albayrak, 2009a).

İspat: $B : E \rightarrow E$ sıfırdan farklı pozitif arkadaşça zayıf kompakt operatör olsun. Ayrıca bu operatör $x_0 > 0$ noktasında yerel yarı nilpotent olsun.

R ve K pozitif ve ayrıca K zayıf kompakt olmak üzere, $R, C, K : E \rightarrow E$ operatörleri her $x \in E$ için aşağıdaki koşulları sağlayan operatörler olsun:

$$RB = BR, \quad C \prec R \quad \text{ve} \quad C \prec K \quad (5.3)$$

Genelliği bozmadan, $\|B + T\| < 1$ kabul edebiliriz. $A = \sum_{n=0}^{\infty} (B + T)^n$ olarak tanımlayalım.

A pozitif operatörü B ve T operatörleriyle değişmelidir ve ayrıca her $x \geq 0$ için $Ax \geq x$ şartını sağlar. $J[x]$; her $x > 0$ için Ax ile üretilen sıfırdan farklı esas ideal olsun. Yani,

$$J[x] = \{y \in E : |y| \leq \lambda Ax, \exists \lambda > 0\} \quad (5.4)$$

olsun.

Bazı $x > 0$ için Eğer $\overline{J[x]} \neq E$ ise, $\overline{J[x]}$ ideali aşikâr olmayan kapalı $(B + T)$ -değişmez idealdir. Dolayısıyla bu $\overline{J[x]}$ ideali, B ve T altında da değişmez kalır.

Bundan dolayı her $x > 0$ için

$$\overline{J[x]} = E \quad (5.5)$$

kabul edelim. Bu durumda her $x > 0$ için; Ax , E uzayının bir yarı iç noktasıdır.

$C \neq 0$ olduğundan, bir $x_1 > 0$ elemanı vardır ki $Cx_1 \neq 0$ sağlanır. $A|Cx_1|$ yarı iç nokta olduğundan ve $|Cx_1| \leq A|Cx_1|$ eşitsizliği sağlandığından, Lemma 2.17'den, bir $V_1 : E \rightarrow E$ operatörü vardır ki birim operatör tarafından domine edilir ve $x_2 = V_1 Cx_1 > 0$ şartını sağlar. $M_1 = V_1 C$ olsun. Bu durumda, M_1 hem R operatörü hem de zayıf kompakt K operatörü tarafından domine edilir.

$\overline{J[x_2]} = E$ ve $C \neq 0$ olduğundan, $0 < y \leq Ax_2$ ve $Cy \neq 0$ olacak şekilde bir y elemanı vardır. Ax_2 yarı iç nokta olduğundan, Lemma 2.17'den, bir $U : E \rightarrow E$ operatörü vardır ki birim operatör tarafından domine edilir ve $UAx_2 = y$ eşitliğini sağlar.

$A|Cy|$ yarı iç nokta olduğundan ve $|Cy| \leq A|Cy|$ eşitsizliği sağlandığından, Lemma 2.17'den, bir $V_2 : E \rightarrow E$ operatörü vardır ki birim operatör tarafından domine edilir ve $x_3 = V_2 Cy = V_2 CUAx_2 > 0$ şartını sağlar. $M_2 = V_2 CUA$ olsun. Bu durumda, M_2 , hem RA operatörü hem de zayıf kompakt KA operatörü tarafından domine edilir.

x_2 ile x_3 elemanlarını yer değiştirir ve önceki işlemleri tekrarlırsak, $M_3 x_3 > 0$ eşitsizliğini sağlayan bir $M_3 : E \rightarrow E$ operatörü elde ederiz; ki bu operatör hem RA operatörü hem de zayıf kompakt KA operatörü tarafından domine edilir.

$M_3 M_2 M_1 x_1 = M_3 x_3 > 0$ sağlandığından $M_3 M_2 M_1$ sıfırdan farklı bir operatördür. $|M_3 M_2 M_1(x)| \leq KAKAK(|x|)$ eşitsizliği sağlandığından ve $KAKAK$ pozitif kompakt operatör olduğundan Teorem 2.24'den dolayı $(M_3 M_2 M_1)^3$ pozitif kompakt operatördür.

Ayrıca her $x \in E$ için

$$|(M_3 M_2 M_1)^3(x)| \leq [(RARAR)^3 + T](|x|) \quad (5.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sıfırdan farklı pozitif $S = (RARAR)^3 + T$ operatörünü göz önüne alalım. B ve S operatörleri değişmeli, S operatörü sıfırdan farklı kompakt $(M_3M_2M_1)^3$ operatörünü domine ediyor ve B operatörü bir x_0 noktasında yerel yarı nilpotent olduğundan Teorem 4.2 gereği S ve B operatörlerinin aşikâr olmayan kapalı ortak bir değişmez ideali vardır. Bu ideal aynı zamanda B ve T altında da değişmez kalır.

Aşağıdaki teorem yerel yarı nilpotentliğinin gerekliliğini ortadan kaldırır.

Teorem 5.5: $B: E \rightarrow E$ bir AL- veya AM-uzayı üzerinde tanımlı pozitif operatör olsun. Eğer B, bir $K: E \rightarrow E$ zayıf kompakt pozitif operatörü tarafından domine edilen $R: E \rightarrow E$ pozitif operatörü ile değişmeli ise bu durumda B operatörünün aşikâr olmayan kapalı değişmez alt uzayı vardır. Dahası; B ile değişmeli olan operatörlerin herhangi bir ayrılabilir $\mathbb{F}$ ailesi için aşikâr olmayan kapalı B-değişmez ve $\mathbb{F}$ -değişmez bir alt uzay vardır (Gök ve Albayrak, 2009b).

İspat: $B: E \rightarrow E$ teoremdaki şartları sağlayan bir operatör, $R, K: E \rightarrow E$ pozitif operatörler ve ayrıca K zayıf kompakt olmak üzere $RB = BR$ ve $R \prec K$ olsun.

Açıkça, B arkadaşça zayıf kompakt operatördür. Bunu göstermek için R ve K'yı arkadaşça zayıf kompakt operatörünün tanımına uygun ve ayrıca $C = R$ almak yeterlidir. Eğer R aşikâr olmayan çekirdeğe sahipse bu durumda $\text{Çek}R$, R-hiperdeğişmez alt uzayıdır. Dolayısıyla $\text{Çek}R$, B-değişmez alt uzayıdır.

Bundan dolayı $\text{Çek}R = \{0\}$ kabul edelim. R kesin pozitif operatör olduğundan R^2 aşikâr olmayan bir operatördür. $0 \leq R \leq K$ şartı sağlandığı için Teorem 2.23'den R^2 zayıf kompakt operatördür.

Bu durumda Teorem 2.25'den dolayı R^4 kompakt operatördür. R^4 operatörü B ile değişmeli olduğundan, Teorem 5.3'den dolayı E'nin bir B-hiperdeğişmez alt uzayı vardır.

$\text{Çek}R$ 'nin aşikâr olmadığı durumda E'nin sadece R-hiperdeğişmez alt uzaya değil aşikâr olmayan kapalı B- ve $\mathbb{F}$ -değişmez bir alt uzaya da sahip olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olacak.

B ile değişmeli pozitif operatörlerin sayılabilir her yerde yoğun bir $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$ alt kümesini düşünelim. Kapalı $F \subset E$ alt uzayı her $n \in \mathbb{N}$ için T_n -değişmez ise aynı zamanda $\mathbb{F}$ -değişmezdir. $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n$ operatörü sınırlı olacak şekilde $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ailesi için $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitif sabitleri seçelim. Açıkça, T operatörü pozitifdir ve B operatörü ile değişmelidir. Genelliği bozmadan, $\|B + T\| < 1$ kabul edebiliriz. $A = \sum_{n=0}^{\infty} (B + T)^n$ olarak tanımlayalım. A pozitif operatörü B ve T operatörleriyle değişmelidir ve ayrıca her $x \geq 0$ için $Ax \geq x$ şartını sağlar. $J[x]$, her $x > 0$ için Ax ile üretilen sıfırdan farklı esas ideal olsun. Yani,

$$J[x] = \{y \in E : |y| \leq \lambda Ax, \exists \lambda > 0\} \quad (5.7)$$

olsun.

Bazı $x > 0$ için Eğer $\overline{J[x]} \neq E$ ise, $\overline{J[x]}$ ideali aşıkâr olmayan kapalı $(B + T)$ -değişmez idealdir. Ayrıca bu $\overline{J[x]}$ ideali, B ve tüm T_n altında ve dolayısıyla $\mathbb{F}$ koleksiyonu altında değişmez kalır.

Bundan dolayı her $x > 0$ için

$$\overline{J[x]} = E \quad (5.8)$$

kabul edelim. Bu durumda her $x > 0$ için; Ax , E uzayının bir yarı iç noktasıdır.

$C \neq 0$ olduğundan, bir $x_1 > 0$ elemanı vardır ki $Cx_1 \neq 0$ sağlanır. $A|Cx_1|$ yarı iç nokta olduğundan ve $|Cx_1| \leq A|Cx_1|$ eşitsizliği sağlandığından, Lemma 2.17'den, bir $V_1 : E \rightarrow E$ operatörü vardır ki birim operatör tarafından domine edilir ve $x_2 = V_1 Cx_1 > 0$ şartını sağlar. $M_1 = V_1 C$ olsun. Bu durumda, M_1 hem R operatörü hem de zayıf kompakt K operatörü tarafından domine edilir.

$\overline{J[x_2]} = E$ ve $C \neq 0$ olduğundan, $0 < y \leq Ax_2$ ve $Cy \neq 0$ olacak şekilde bir y elemanı vardır. Ax_2 yarı iç nokta olduğundan, Lemma 2.17'den, bir $U: E \rightarrow E$ operatörü vardır ki birim operatör tarafından domine edilir ve $UAx_2 = y$ eşitliğini sağlar.

$A|Cy|$ yarı iç nokta olduğundan ve $|Cy| \leq A|Cy|$ eşitsizliği sağlandığından, Lemma 2.17'den, bir $V_2: E \rightarrow E$ operatörü vardır ki birim operatör tarafından domine edilir ve $x_3 = V_2Cy = V_2CUAx_2 > 0$ şartını sağlar. $M_2 = V_2CUA$ olsun. Bu durumda, M_2 hem RA operatörü hem de zayıf kompakt KA operatörü tarafından domine edilir.

x_2 ile x_3 elemanlarını yer değiştirir ve önceki işlemleri tekrarlırsak, $M_3x_3 > 0$ eşitsizliğini sağlayan bir $M_3: E \rightarrow E$ operatörü elde ederiz; ki bu operatör hem RA operatörü hem de zayıf kompakt KA operatörü tarafından domine edilir.

$M_3M_2M_1x_1 = M_3x_3 > 0$ sağlandığından $M_3M_2M_1$ sıfırdan farklı bir operatördür. Ayrıca, her $x \in E$ için

$$|M_3M_2M_1(x)| \leq RARAR(|x|) \quad (5.9)$$

eşitsizliği sağlandığından $RARAR$ operatörü sıfırdan farklıdır. Ayrıca bu operatör B ile değişmelidir ve $RARAR \leq KAKAK$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 2.24'den dolayı $(RARAR)^3$ operatörü kompaktır. Ayrıca bu operatör B operatörü ile değişmelidir. Bu durumda Teorem 5.3'den dolayı, B 'nin aşıkâr olmayan kapalı hiperdeğişmez alt uzayı vardır.

Teorem 5.6: $B: E \rightarrow E$ bir AL- veya AM-uzayı üzerinde tanımlı arkadaşça zayıf kompakt operatör olsun. B ile değişmeli operatörlerin hiçbirisi sıfırdan farklı bir kompakt operatörü domine etmesin. Bu durumda B operatörünün aşıkâr olmayan kapalı değişmez bir ideali vardır. Dahası; B ile değişmeli olan operatörlerin herhangi bir ayrılabilir $\mathbb{F}$ ailesi için aşıkâr olmayan kapalı B -değişmez ve $\mathbb{F}$ -değişmez bir alt uzay vardır (Gök ve Albayrak, 2009b).

İspat: Bu teoremin ispatı önceki teoremin ispatının bir kısmını oluşturmaktadır. Ancak bazı temel farklar nedeniyle ispatı yapılacaktır. $B: E \rightarrow E$ pozitif operatörü teoremdeki şartları sağlasın. $R, C, K: E \rightarrow E$ sıfırdan farklı, R ve K pozitif ve K zayıf kompakt operatör olmak üzere her $x \in E$ için

$$RB = BR, \quad C \prec R \quad \text{ve} \quad C \prec K \quad (5.10)$$

olsun.

B ile değişmeli pozitif operatörlerin sayılabilir her yerde yoğun bir $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$ alt kümesini düşünelim. Önceki teoreme benzer olarak $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n$ pozitif operatörünü oluşturalım.

Genelliği bozmadan, $\|B+T\| < 1$ kabul edebiliriz. $A = \sum_{n=0}^{\infty} (B+T)^n$ olarak tanımlayalım. A pozitif operatörü B ve T operatörleriyle değişmelidir ve ayrıca her $x \geq 0$ için $Ax \geq x$ şartını sağlar. $J[x]$; her $x > 0$ için Ax ile üretilen sıfırdan farklı esas ideal olsun. Yani,

$$J[x] = \{y \in E : |y| \leq \lambda Ax, \exists \lambda > 0\} \quad (5.11)$$

olsun.

Bazı $x > 0$ için Eğer $\overline{J[x]} \neq E$ ise, $\overline{J[x]}$ ideali aşıkâr olmayan kapalı $(B+T)$ -değişmez idealdir. Ayrıca bu $\overline{J[x]}$ ideali, B ve tüm T_n altında ve dolayısıyla $\mathbb{F}$ koleksiyonu altında değişmez kalır.

Bundan dolayı her $x > 0$ için

$$\overline{J[x]} = E \quad (5.12)$$

kabul edelim. Bu durumda her $x > 0$ için; Ax , E uzayının bir yarı iç noktasıdır.

$C \neq 0$ olduğundan, bir $x_1 > 0$ elemanı vardır ki $Cx_1 \neq 0$ sağlanır.

$A|Cx_1|$ yarı iç nokta olduğundan ve $|Cx_1| \leq A|Cx_1|$ eşitsizliği sağlandığından, Lemma 2.17'den, bir $V_1 : E \rightarrow E$ operatörü vardır ki birim operatör tarafından domine edilir ve $x_2 = V_1 Cx_1 > 0$ şartını sağlar. $M_1 = V_1 C$ olsun. Bu durumda, M_1 hem R operatörü hem de zayıf kompakt K operatörü tarafından domine edilir.

$\overline{J[x_2]} = E$ ve $C \neq 0$ olduğundan, $0 < y \leq Ax_2$ ve $Cy \neq 0$ olacak şekilde bir y elemanı vardır. Ax_2 yarı iç nokta olduğundan, Lemma 2.17'den, bir $U : E \rightarrow E$ operatörü vardır ki birim operatör tarafından domine edilir ve $UAx_2 = y$ eşitliğini sağlar.

$A|Cy|$ yarı iç nokta olduğundan ve $|Cy| \leq A|Cy|$ eşitsizliği sağlandığından, Lemma 2.17'den, bir $V_2 : E \rightarrow E$ operatörü vardır ki birim operatör tarafından domine edilir ve $x_3 = V_2 Cy = V_2 CUAx_2 > 0$ şartını sağlar. $M_2 = V_2 CUA$ olsun Bu durumda, M_2 hem RA operatörü hem de zayıf kompakt KA operatörü tarafından domine edilir.

x_2 ile x_3 elemanlarını yer değiştirir ve önceki işlemleri tekrarlırsak, $M_3 x_3 > 0$ eşitsizliğini sağlayan bir $M_3 : E \rightarrow E$ operatörü elde ederiz; ki bu operatör hem RA operatörü hem de zayıf kompakt KA operatörü tarafından domine edilir.

$M_3 M_2 M_1 x_1 = M_3 x_3 > 0$ sağlandığından $M_3 M_2 M_1$ sıfırdan farklı bir operatördür. Ayrıca, her $x \in E$ için

$$|M_3 M_2 M_1(x)| \leq RARAR(|x|) \quad (5.13)$$

eşitsizliği sağlandığından $RARAR$ operatörü sıfırdan farklıdır. Ayrıca bu operatör B ile değişmelidir ve $RARAR \leq KAKAK$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 2.24'den dolayı $(RARAR)^3$ operatörü kompaktır. Ayrıca bu kompakt operatör B operatörü ile değişmelidir; ki bu da teoremimizde ki şarta aykırıdır.

Dolayısıyla her $x > 0$ için $\overline{J[x]} \neq E$ dir.

Yani, $J[x] = \{y \in E : |y| \leq \lambda Ax, \exists \lambda > 0\}$ ideali, aradığımız aşikâr olmayan kapalı B-değişmez ve $\mathbb{F}$ -değişmez idealdir.

6. AYRIŞTIRILABİLİRLİK

Bu bölümde E bir Banach latisi olmak üzere $L(E)$ 'ye ait operatörlerin bir koleksiyonunun değişmez bıraktığı aşikâr olmayan kapalı değişmez idealler üzerine çalışacağız.

Tanım 6.1: E bir Banach latis olmak üzere, $L(E)$ 'ye ait olan operatörlerin bir Γ alt kümesi için Γ 'daki tüm operatörlerle değişmez kalan aşikâr olmayan kapalı bir ideal varsa Γ 'ya ayrıştırılabilir denir, aksi takdirde ayrıştırılamaz olarak adlandırılır. $L(E)$ 'nin Γ alt kümesine ait olan tüm kapalı değişmez ideallerin koleksiyonu $Ilat(\Gamma)$ ile gösterilir.

X bir Banach uzayı ise Γ 'ya ait olan tüm kapalı değişmez alt uzayların koleksiyonu $Lat(\Gamma)$ ile gösterilir. Eğer $T \in L(X)$ iken $\Gamma = \{T\}$ ise Γ yerine T kullanacağız.

X bir Banach uzayı olmak üzere, $\Gamma^c = \{T \in L(X) : TS = ST, \forall S \in \Gamma\}$ kümesine Γ 'nın değişmelileri kümesi denir. Bir V alt uzayı Γ^c kümesindeki her operatör altında değişmez kalıyorsa V alt uzayı Γ -hiperdeğişmez olarak adlandırılır.

E bir Banach latisi olmak üzere, E 'deki pozitif bir T operatörü için E 'nin bir kapalı ideali, E 'nin T ile değişmeli olan tüm S pozitif operatörleri altında değişmez kalırsa p -hiperdeğişmez adını alır. E üzerinde bir pozitif operatörün pozitif komutantı $\{T\}_+^c$ ile gösterilir ve E 'ye ait, T ile değişmeli tüm S pozitif operatörlerinin koleksiyonudur.

Önerme 6.2: Bir E Banach latisinin herhangi bir J ideali için E 'den E/J 'ye giden kanonik dönüşüm pozitif ise E/J en iyi sıralaması altında bir vektör latisidir. Eğer J kapalı ise E/J Banach latisidir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 6.3: X bir Banach uzayı olsun. Eğer $T \in L(X)$ ve $M \in Lat(T)$ ise, o zaman T 'nin X/M 'ye sıkıştırması $\hat{T}$ ile gösterilir ve

$$\hat{T}(x + M) = Tx + M \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlanır. $\hat{T}$, X/M üzerinde iyi tanımlı bir operatördür.

Lemma 6.4: X bir Banach uzayı, $T \in L(X)$ ve $M \in \text{Lat}(T)$ olsun.

- (a) T pozitif ise, $\hat{T}$ da X/M üzerinde pozitiftir.
- (b) T yarı nilpotent ise, $\hat{T}$ da X/M üzerinde yarı nilpotent operatördür.
- (c) T kompakt ise, $\hat{T}$ da X/M üzerinde kompakt operatördür.
- (d) T zayıf kompakt ise, $\hat{T}$ da X/M üzerinde zayıf kompakt operatördür.

Lemma 6.5: E bir Banach latisi, $T, S \in L(E)$, $M \in \text{Ilat}(\{T, S\})$, $\hat{T}$ ve $\hat{S}$ de sırasıyla T ve S operatörlerinin E/M 'ye sıkıştırması olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (a) T, S 'yi domine eden bir pozitif operatörse $\hat{T}$ operatörü de $\hat{S}$ 'yi domine eder.
- (b) $S \leq T$ ise $\hat{S} \leq \hat{T}$ dır (Jahandideh, 1997).

Lemma 6.6: E bir Banach latisi, $T \in L(E)$ ve $M \in \text{Ilat}(T)$ olsun. T arkadaşça zayıf kompakt ise, $\hat{T}$ da E/M üzerinde arkadaşça zayıf kompakt operatördür.

İspat: $T \in L(E)$ arkadaşça zayıf kompakt operatör olduğundan, R, K pozitif ve K zayıf kompakt operatör olmak üzere her $x \in E$ için

$$RB = BR, \quad C \prec R \quad \text{ve} \quad C \prec K \quad (6.2)$$

şartlarını sağlayan sıfırdan farklı $R, C, K : E \rightarrow E$ operatörleri vardır.

$\hat{R}, \hat{C}, \hat{K}, \hat{T}$ sırasıyla R, C, K, T operatörlerinin E/M 'ye sıkıştırması olsun. R ve K pozitif olduğundan Lemma 6.4(a)'dan dolayı $\hat{R}, \hat{K}$ operatörleri pozitif operatörlerdir. K zayıf kompakt operatör olduğundan Lemma 6.4(d)'den dolayı $\hat{K}$ operatörü zayıf kompakt operatördür. $C \prec R$ ve $C \prec K$ olduğundan Lemma 6.5(a)'dan dolayı $\hat{C} \prec \hat{R}$ ve $\hat{C} \prec \hat{K}$ ifadeleri sağlanır. Ayrıca $RB = BR$ olduğundan $\hat{R}\hat{B} = \hat{B}\hat{R}$ eşitliği doğrudur. Dolayısıyla, $\hat{R}, \hat{K}$ pozitif ve $\hat{K}$ zayıf kompakt operatör olmak üzere, E/M üzerinde

$$\hat{R}\hat{B} = \hat{B}\hat{R}, \quad \hat{C} \prec \hat{R} \quad \text{ve} \quad \hat{C} \prec \hat{K} \quad (6.3)$$

şartlarını sağlayan sıfırdan farklı, $\hat{R}, \hat{C}, \hat{K}$ operatörleri vardır. Yani $\hat{T}$, E/M üzerinde arkadaşça zayıf kompakt operatördür.

Lemma 6.7: Eğer M , AL - veya AM -uzayı olan E 'nin bir kapalı ideali ise, M ve E/M sırasıyla AL - veya AM -uzaylarıdır (Schaefer, 1974).

Teorem 6.8: Bir Banach latisi üzerindeki her kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatör ayrıştırılabilir (Pagter, 1986).

Teorem 6.9: Bir Banach latisi üzerindeki her kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatörün aşıkâr olmayan bir p -hiperdeğişmez kapalı ideali vardır (Abramovich vd., 1992) .

Sonuç 6.10: E bir Banach latisi olsun. $S \in L(E)$ 'nin bir zayıf kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatör ve E 'nin bir AL - veya AM -uzayı olduğunu varsayalım. Bu durumda, S^2 bir aşıkâr olmayan p -hiperdeğişmez kapalı ideale sahiptir. Özellikle, T 'nin aşıkâr olmayan p -hiperdeğişmez kapalı bir ideali vardır (Schaefer, 1974).

İspat: Choi vd. (1993)'e göre T^2 kompakt operatördür. Teorem 6.9'dan ve $\{T\}^c \subseteq \{T^2\}^c$ kapsamından sonuca ulaşırız.

Teorem 6.11: E bir Banach latisi olsun. $S \in L(E)$ 'nin arkadaşça zayıf kompakt, yarı nilpotent bir operatör ve E 'nin bir AL - veya AM -uzayı olduğunu varsayalım. Bu durumda S ayrıştırılabilir.

İspat: Teorem 5.4'den S operatörünün aşıkâr olmayan kapalı değişmez bir ideali vardır. Dolayısıyla S ayrıştırılabilir.

Lemma 6.12: E bir Banach latisi; Λ , E üzerindeki pozitif operatörlerin bir değişmeli koleksiyonu ve T bir yarı nilpotent pozitif operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki her bir durum için Λ ayrıştırılabilir:

- (a) S kompakt ve $S \in \Lambda$.
- (b) E bir AM - veya AL -uzayı, S zayıf kompakt ve $S^2 \in \Lambda$.
- (c) E veya E' sıralı sürekli norma sahip, S bir kompakt operatör tarafından domine ediliyor, ve $S^2 \in \Lambda$.
- (d) E ve E' sıralı sürekli norma sahip, S bir kompakt operatör tarafından domine ediliyor, ve $S \in \Lambda$.
- (e) E veya E' sıralı sürekli norma sahip, S bir zayıf kompakt operatör tarafından domine ediliyor, ve $S^2 \in \Lambda$.

İspat:

(a) $\Lambda \subseteq \{S\}_+^c$ olduğundan ve Teorem 6.9'dan Λ ayrıştırılabilir.

(b) Choi vd. (1993)'e göre S^2 kompakt operatördür. Böylece (a)'dan dolayı Λ ayrıştırılabilir.

(c) Aliprantis ve Burkinshaw (1985)'e göre S^2 kompakt operatördür. Böylece (a)'dan dolayı Λ ayrıştırılabilir.

(d) Dodds ve Fremlin (1979)'a göre S kompakt operatördür. Böylece (a)'dan dolayı Λ ayrıştırılabilir.

(e) Wickstead (1981)'e göre S zayıf kompakt operatördür. Böylece (b)'den dolayı Λ ayrıştırılabilir.

7. SIKIŞTIRMALI AYRIŞTIRILABİLİRLİK

Bu bölümde amacımız sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirlik konusunu tanım ve önermelerle inceleyerek sonuçlar elde etmektir. Bir önceki bölümden hatırlayacağımız gibi Γ , E Banach latisi üzerindeki sürekli lineer operatörlerin bir koleksiyonu ve $\text{Ilat}(\Gamma)$ da $L(E)$ 'nin Γ alt kümesine ait olan tüm kapalı değişmez ideallerinin koleksiyonudur.

Tanım 7.1: E bir Banach latisi olsun. $L(E)$ 'nin bir Ω alt kümesi için $I \subseteq J$ koşulunu sağlayan herhangi $I, J \in \text{Ilat}(\Omega)$ idealleri için $\text{boy}(J/I) \geq 2$ ve Ω 'nın J/I 'ya kısıtlaması $\hat{\Omega}$ ayrıştırılabilir ise Ω sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirdir.

Önerme 7.2: E bir Banach latisi olsun. $S \in L(E)$ bir kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatör ise o zaman S ve $\Gamma = \{S\}_+^c$ sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirdir (Jahandideh, 1997).

İspat: Teorem 6.9'dan S ve Γ ayrıştırılabilirdir. $I \subseteq J$ ve $\dim(J/I) \geq 2$ koşullarını sağlayan $I, J \in \text{Ilat}(S)$ veya $\text{Ilat}(\Gamma)$ alalım. Lemma 6.4(a), Lemma 6.4(b) ve Lemma 6.4(c)'den $\hat{S}$ 'nin J/I üzerinde bir kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatör olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla Teorem 6.9'dan ve $\hat{\Gamma} = \{\hat{S}\}_+^c$ olduğundan $\hat{S}$ ve Γ 'nın J/I 'ya sıkıştırması olan $\hat{\Gamma}$ ayrıştırılabilirdir. Dolayısıyla S ve $\Gamma = \{S\}_+^c$ sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirdir.

Önerme 7.3: E bir Banach latisi olsun. E bir AM- veya AL-uzayı olmak üzere $S \in L(E)$ operatörü arkadaşça zayıf kompakt, yarı nilpotent operatör ise S operatörü sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirdir.

İspat: Teorem 6.11'den dolayı S operatörü ayrıştırılabilirdir. $I \subseteq J$ ve $\text{boy}(J/I) \geq 2$ koşullarını sağlayan $I, J \in \text{Ilat}(S)$ ideallerini göz önüne alalım. Lemma 6.4(a), Lemma 6.4(b) ve Lemma 6.6'dan dolayı $\hat{S}$, J/I üzerinde bir arkadaşça zayıf kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatördür. Bu durumda, Teorem 6.11'den dolayı $\hat{S}$ operatörü ayrıştırılabilirdir. Dolayısıyla, S sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirdir.

Önerme 7.4: E Banach latisi bir AM- veya AL-uzayı, $B \in L(E)$ yarı nilpotent, pozitif operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki her bir durum için B sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirdir:

- (a) B operatörü sıfırdan farklı pozitif zayıf kompakt operatörle değişmelidir.
- (b) B operatörü sıfırdan farklı pozitif bir zayıf kompakt operatörü domine ediyor.
- (c) B operatörü sıfırdan farklı pozitif bir zayıf kompakt operatör tarafından domine ediliyor.

İspat: $K_0 \in L(E)$ sıfırdan farklı pozitif zayıf kompakt operatör olsun.

(a) Açık bir şekilde B arkadaşça zayıf kompakt operatördür. Bunu görmek için arkadaşça zayıf kompakt operatörün tanımındaki R, C, K operatörlerini $R = C = K = K_0$ olarak seçmek yeterlidir. Bu durumda Önerme 7.3 gereği B operatörü sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir.

(b) Açık bir şekilde B arkadaşça zayıf kompakt operatördür. Bunu görmek için arkadaşça zayıf kompakt operatörün tanımındaki R, C, K operatörlerini $R=B$, $C = K_0$, $K = K_0$ olarak seçmek yeterlidir. Bu durumda Önerme 7.3 gereği B operatörü sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir.

(c) Açık bir şekilde B operatörü arkadaşça zayıf kompakt operatördür. Bunu görmek için arkadaşça zayıf kompakt operatörün tanımındaki R, C, K operatörlerini $R=B$, $C=B$, $K = K_0$ olarak seçmek yeterlidir. Bu durumda Önerme 7.3 gereği B operatörü sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir.

Önerme 7.5: E bir Banach latisi, $T \in L(E)$ sıfırdan farklı, yarı nilpotent, pozitif bir operatör olsun. Sıfırdan farklı kompakt $K \in L(E)$ operatörünü domine eden sıfırdan farklı bir $S \in \{T\}_+^c$ operatörü varsa $\{S, T\}$ sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir (Jahandideh, 1997).

İspat: T bir yarı nilpotent operatör olduğundan E’de öyle bir $x_0 > 0$ noktası vardır ki T operatörü x_0 ’da yarı nilpotenttir. Dolayısıyla $\{S, T\}$ ayrıştırılabilir (Abramovich vd. , 1994). $I, J \in \text{Ilat}(\{S, T\})$ olduğunu varsayalım. $I, J \in \text{Ilat}(K)$ olduğu açıktır ve Lemma 6.6(a)’dan S’nin J/I ’ya sıkıştırması olan $\hat{S}$ operatörü, K’nın J/I ’ya sıkıştırması olan $\hat{K}$ operatörünü domine eder. $\text{boy}(J/I) \geq 2$ için $\{\hat{S}, \hat{T}\}$ ayrıştırılabilir (Abramovich vd. , 1994). Bu yüzden $\{S, T\}$ sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir.

Önerme 7.6: E bir Banach latisi, $\Gamma \subseteq L(E)$ ve $T \in \Gamma$ bir sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir operatör olsun. T operatörü Γ ’nın tüm elemanlarını domine ediyorsa veya Γ ’nın elemanları pozitif operatörler ve T, Γ ’yı majorize ediyorsa Γ sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir (Jahandideh, 1997).

Sonuç 7.7: E bir Banach latisi, $\Gamma \subseteq L(E)$ ve $T \in \Gamma$ bir yarı nilpotent pozitif operatör olsun. T operatörü Γ 'nın tüm elemanlarını domine etsin veya Γ 'nın elemanları pozitif operatörler ve T , Γ 'yı majorize etsin. Bu durumda aşağıdaki durumların her biri için Γ sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir:

- (a) E bir AM-uzayının kapalı idealidir.
- (b) E bir AL-uzayı ve T zayıf kompaktır.
- (c) E herhangi bir Banach latisi ve T kompaktır.

8. SONUÇLAR

Bu çalışmada, arkadaşça zayıf kompakt operatörler ve bu operatörlerin değişmez alt uzayları incelendi.

Ayrıca, E bir Banach latisi olmak üzere E 'den E 'ye sürekli lineer operatörlerin uzayı $L(E)$ 'de operatörlerin bir koleksiyonunun değişmez bıraktığı aşikâr olmayan kapalı değişmez idealler üzerinde duruldu.

Son olarak da, Banach latislerinde sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirlik konusu incelenerek, her arkadaşça zayıf kompakt yarı nilpotent, pozitif operatörün sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir olduğu gösterildi.

KAYNAKLAR

- Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1992), "On The Spectral Radius of Positive Operators", *Math. Z.*, 211, 593-607.
- Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1994), "Invariant Subspaces for Positive Operators", *J. Func. Anal.*, 124, 95-111.
- Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1998), "The Invariant Subspace Problem: Some Recent Advances", *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* 29, 1-76.
- Abramovich, Y.A. ve Aliprantis, C.D. (2002), *An Invitation to Operator Theory*, American Mathematical Society.
- Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1980), "Positive Compact Operators on Banach Lattices", *Math. Z.*, 174, 289-298.
- Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1985), *Positive operators*, Academic Pres, New York/London.
- Aronszajn, N. ve Smith, K.T., (1954), "Invariant Subspaces of Completely Continuous Operators", *Ann. Of Math.*, 60, 345-350.
- Bernstein, A.R. ve Robinson, A., (1966), "Solution of an Invariant Subspace Problem of K.T. Smith and P.R. Halmos", *Pacific J. Math.*, 16, 421-431.
- Choi, M.D., Nordgen, E.A., Radjavi, H., Rosenthal, P. ve Zhong, Y., (1993), "Triangularizing Semigroups of Quasinilpotent Operators with Nonnegative Entries", *Indiana Univ. Math. J.*, 42, 15-25.
- De Pagter, B., (1986), "Irreducible Compact Operators", *Math. Z.*, 192, 149-153.
- Dodds, P.G. ve Fremlin, D.H., (1979), "Compact operators in Banach lattices", *Israel J. Math.*, 34, 287-320.
- Enflo, P., (1987), "On the Invariant Subspace Problem for Banach Spaces", *Acta. Math*, 158, 213-313.
- Gök, Ö. ve Albayrak, P., (2009), "On Weakly Compact-Friendly Operators", *International Journal of Pure and Applied Math.*, accepted.
- Gök, Ö. ve Albayrak, P., (2009), "On Invariant Subspaces of Weakly Compact-Friendly Operators", *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, Vol. 4, no:6, 259-266.
- Jahandideh, M.T., (1997), "On the Ideal-Trigularizability of Positive Operators on Banach Lattices", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125, No:9, 2661-2670.
- Kreyszig, E., (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley&Sons.
- Lomonosov, V.I., (1973), "Invariant Subspaces of the Family of Operators that Commute with a Completely Continuous Operator", *Funktsional Anal. i Prilozhen* 7, no. 3, 55-56.
- Read, C.J., (1985), "A Solution to the Invariant Subspace Problem on the Space l_1 ", *Bull. London Math. Soc.*, 17, 305-317.
- Ringrose, R.J., (1971), *Compact Non-Self-Adjoint Operators*, Princeton.
- Schaefer, H.H., (1974), *Banach Lattices and Positive Operators*, Berlin-New York, Springer Verlag.
- Sirotkin, G., (2002), *Compact Friendly Operators*, Ph.D. Thesis, Purdue University.

Wickstead, A.W., Extremal(1981), "Structure of Cones of Operators", Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 32 , 239-253.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 15.10.1980

Doğum yeri İstanbul

Lise 1993–1997 Nişantaşı Kız Lisesi

Lisans 1997–2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2001–2005 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurum

2001-Devam ediyor YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Araştırma Görevlisi