

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MODÜLLER VE ASAL ALT MODÜLLERİ

Yüksek Matematikçi Kürşat Hakan ORAL

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 01.09.2010
Tez Danışmanı : Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN (YTÜ)
İkinci Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ünsal TEKİR (MÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mustafa BAYRAM (FÜ)
Doç. Dr. Meral TOSUN (GSÜ)
Prof. Dr. İrfan ŞİAP (YTÜ)
Prof. Dr. Mustafa SİVRİ (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER	ii
SİMGE LİSTESİ	iii
KISALTMA LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. MODÜLLERDE TEK TÜRLÜ ÇARPANLARA AYIRMA	3
2.1 Halkalarda Çarpanlara Ayırma	3
2.2 Modüllerde Çarpanlara Ayırma	5
2.3 Tek Türü Çarpanlara Ayırma Modüllerinde Asal Alt Modüller	13
2.4 Zayıf Asal Elemanlar ve Zayıf Asal Alt Modüller	17
2.5 Zayıf Tek Türü Çarpanlara Ayrılabilen Modüller	20
3. DERECELENDİRİLMİŞ MODÜLLERİN ASAL VE ASALIMSİ ALT MODÜLLERİ	23
3.1 Derecelendirilmiş Halkalar	23
3.2 Derecelendirilmiş Modüller	28
3.3 Derecelendirilmiş Modüllerin Asal Alt Modülleri	31
3.4 Derecelendirilmiş Asal Alt Modüller	38
3.5 Derecelendirilmiş Asalımsı Alt Modüller	47
4. SONUÇ	51
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGE LİSTESİ

R	Halka
M	Modül
Π	Çarpım sembolü
Σ	Toplam sembolü
$\oplus$	Direkt toplam sembolü
$\setminus$	Fark sembolü
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$ $	Bölme sembolü
$\sim$	İki elemanın ilgililiği
R_g	halkanın g . dereceden alt grubu
I_g	idealin g . dereceden alt grubu
M_g	modülün g . dereceden alt grubu
N_g	alt modülün g . dereceden alt grubu
a_g	elemanın g . dereceden homojen elemanı

KISALTMA LİSTESİ

$U(R)$	R halkasının birimsel elemanlarının kümesi
$TÇB$	Tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge
$TÇM$	Tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül
gcd	En büyük ortak bölen
lcm	En küçük ortak kat
$w-TÇM$	Zayıf tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge
$G(R)$	G-derecelendirilmiş R halkası
$h(R)$	R nin homojen elemanlarının kümesi
$h(M)$	M nin homojen elemanlarının kümesi
$m-rad(N)$	N nin derecelendirilmiş radikali

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında bilgi ve birikimleri ile bana destek olan, yaptığım çalışmaları gerçekleştirebilmem için gerekli bütün imkanları ellerinden geldiğince önüme sunan, akademik gelişimimde büyük katkıları olan değerli danışman hocalarım Prof. Dr. A.Göksel AĞARGÜN ve Doç. Dr. Ünsal TEKİR'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, hocalarım Prof. Dr. Mustafa BAYRAM ve Doç. Dr. Meral TOSUN'a tez çalışmasının değerlendirilmesinde ve geçen sürede bana verdikleri desteklerden dolayı teşekkür ederim. Tez çalışmam sırasında karşılaştığım Fransızca makaleleri çevirme konusunda bana yardımcı olan Türk Dili ve Edebiyatı Bölümü Araştırma Görevlilerinden Banu Öztürk hanımefendiye, tez yazımı ve kontrolleri esnasında yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Ayşen N. Özkirişçi hanımefendiye teşekkürlerimi sunarım. Yıldız Teknik Üniversitesi çalışanlarına ve tez süresince bana destek olan mesai arkadaşlarıma ayrıca teşekkür ederim.

Son olarak eğitim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda bana destek olan annem ve babam başta olmak üzere eşime, oğluma, bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan anneannem ile dedeme ve bütün aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Biz bu çalışmamızın ilk kısmında modül yapısı üzerinde zayıf asal eleman tanımını yaptık. Zayıf asal elemanlarının özelliklerini inceledikten sonra zayıf asal idealler ile arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Daha sonra da bu zayıf asal elemanlar ile çarpanlara ayırma yapacağız. Bu çarpanlarına ayrılışı da zayıf tek türlü çarpanlarına ayrılış olarak adlandıracağız.

Çalışmamızın ikinci kısmında ise derecelendirilmiş modüllerin derecelendirilmiş asal ve asalımsı alt modüllerini inceledik. Daha sonra da bu derecelendirilmiş alt modülleri çarpımsal derecelendirilmiş modüllerde karakterize ettik.

ABSTRACT

MODULES AND ITS PRIME SUBMODULES

In this work firstly we give the definition of weakly prime element of a module. We investigate weakly prime elements and after this we give some correspondence between weakly elements and weakly prime submodules of a module. Further we define a new factorization of module elements with weakly prime elements, which will be called weakly unique factorization.

In the second part of this work, we investigate graded prime and graded primary submodules of a graded module. After this we characterized such submodules in a multiplication graded module.

1. GİRİŞ

Tek türlü çarpanlara ayırma konusu ilk olarak halka yapısı üzerinde incelenmiştir. Bu konuda birçok çalışma yapılmış ve hala yapılmaktadır. Bu çalışmalar önceleri tamlık bölgesi olan halka yapısında yapılmış ve daha sonraları tamlık bölgesi olamayan halka yapıları üzerinde devam etmiştir. Buna karşın çarpanlara ayırma konusu modül yapısı üzerinde çok fazla incelenmemiştir. Biz de bu düşünceyle modüller üzerinde çarpanlara ayırma konusu üzerinde çalıştık. Tamlık bölgesinin karşılığı olan burulmalı modüllerde çarpanlara ayrılma özelliklerini inceledik. Burulmalı modüllerde çarpanlara ayırma konusu ilk olarak Fransız matematikçi Anne-Marie Nicolas tarafından Seminaire Dubrell-Pisot da 1967, no 10 da “Modules Factoriels” adlı çalışmasıyla yapılmıştır. Bu çalışması daha sonra 1971 yılında Bulletin des Sciences Mathematiques’in 95. sayısında 33-52 numaralı sayfalarında yayınlanmıştır. Modül elemanlarını, halkanın bir takım indirgenemez elemanları ile modülün bir indirgenemez elemanının çarpımı şeklinde çarpanlarına ayrılmasını incelemiştir. Bu çalışmadan sonra 1974 yılında yine aynı dergide Nicolas’ın konuyla ilgili ikinci makalesi yayınlandı. Daha sonraki yıllarda Costa, Lu ve son yıllarda Ağargün, Anderson ile Leon’un bu konuda yayınları bulunmaktadır. Bizim yaptığımız çalışma da burulmalı modüller üzerinde tanımlanan zayıf asal elemanlar yardımı ile çarpanlara ayırma ile ilgilidir.

Çalışmamızın ikinci bölümü ise derecelendirilmiş modüller üzerinedir. Bu kısımda da derecelendirilmiş modüllerin derecelendirilmiş asal alt modülleri ile derecelendirilmiş asalımsı alt modüllerini inceledik ve karakterize ettik. Derecelendirilmiş modüller üzerine pek çok yazar çalışmıştır. Bunlardan bazıları, Escoriza, Torrecillas, Nastasescu, Atani, Farzalipour, Refai, Al-Zoubi v.s. dir. Çalışmamızda, Escoriza ve Torrecillas’ın faydalandığımız makaleleri Çarpımsal derecelendirilmiş halka ve modülleri karakterize ettikleri makalelerdir. Bu makalelerde çarpımsal derecelendirilmiş modüller ve halkalar incelenmiştir. Refai ve Al-Zoubi (2004) de yaptıkları çalışmada derecelendirilmiş halkaların derecelendirilmiş asalımsı idealleri incelemişler ve derecelendirilmiş idealler için derecelendirilmiş asalımsı ayrışımı incelemişlerdir. Atani (2006) makalesinde derecelendirilmiş modüllerin derecelendirilmiş asal alt modülleri üzerinde çalışmış ve birtakım sonuçlar bulmuştur. Daha sonraları Atani ve Farzalipour’un (2006) da yaptıkları makalede derecelendirilmiş modüllerin derecelendirilmiş asalımsı alt modülleri incelemişlerdir. Bu çalışmada ayrıca derecelendirilmiş alt modüller için derecelendirilmiş asalımsı ayrışımı incelemişlerdir. Bu iki yazarı (2007) deki makalelerinde ise yaptıkları

Çalışmayı biraz daha genişletmişlerdir ve buna ek olarak derecelendirilmiş maksimal alt modülleri incelemişlerdir.

2. MODÜLLERDE TEK TüRLÜ ÇARPANLARA AYIRMA

Bu bölümde bir burulmalı modül yapısı üzerinde çarpanlara ayırma konusunu inceleyeceğiz. Bu konudaki ilk çalışmayı Nicolas, 1966-67 yıllarında Dubrell-Pisot seminerlerindeki sunumuyla gerçekleştirmiştir. Bu çalışması daha sonra 1971 yılında Bulletin des Sciences Mathematiques'in 95.sayısında 33-52 numaralı sayfalarında yayınlanmıştır. Modül elemanlarını, halkanın birtakım indirgenemez elemanları ile modülün bir indirgenemez elemanının çarpımı şeklinde çarpanlarına ayrılmasını incelemiştir. Bu çalışmadan sonra 1974 yılında yine aynı dergide Nicolas'ın konuyla ilgili ikinci makalesi yayınlandı. Bu makalede çarpanlarına ayrılma konusunu polinom modüllerine genişletmiştir. Daha sonraki yıllarda Costa, yaptığı çalışmada herhangi bir burulmalı modülün çarpanlarına ayrılabilen modülün içine gömülmesini incelemiştir. Lu, 1977 yılında yaptığı çalışmada daha önce yapılan çalışmaları toparlamış ve modüllerde çarpanlara ayırma yapılırken modülün elemanlarında tanımlanan asal, indirgenemez elemanları ile asal alt modüller arasındaki bağlantılar vermiştir. Son yıllarda Anderson ile Leon'un bu konuda bir yayınları bulunmaktadır. Bu yayınlarında daha önce halkalar için yaptıkları bazı tanımları modüllere genişletmişlerdir. Bizim yaptığımız çalışma da burulmalı modüller üzerinde tanımlanan zayıf asal elemanlar yardımı ile çarpanlara ayırma ile ilgilidir.

2.1. Halkalarda Çarpanlara Ayırma

Halkalarda çarpanlara ayırma konusu uzun yıllardır cebir ile ilgilenen akademisyenleri meşgul etmiştir. Bu çalışmalar tamlik bölgesi üzerinde başlamış ve daha sonraki yıllarda sıfır bölünli halkalar üzerinde devam etmiştir. Biz burada sadece bir hatırlatma olması açısından tamlik bölgesi üzerindeki tanımları verilecektir. Bu bölümü oluştururken kaynak olarak (Sharp, 2000), (Ağargün ve diğerleri, 2002) ve (Sharpe, 1987) kitapları kullanılmıştır.

Bu çalışma boyunca aldığımız bütün halkalar değişmeli ve birimli olacak, aldığımız bütün modüller de sıfırdan farklı burulmalı modül olacaktır. R bir halka olmak üzere $U(R)$ ile halkanın bütün birimsel elemanlarının kümesini göstereceğiz.

Tanım 2.1.1: R bir halka, $a, b \in R$ ve $p \in R$ sıfırdan farklı, birimsel olmayan bir eleman olsun.

(i) $ax = b$ olacak şekilde bir $x \in R$ var ise a, b yi böler denir ve $a|b$ ile gösterilir. Ayrıca $a|b$ ve $b|a$ ise a ile b ilgilidir denir ve $a \sim b$ ile gösterilir.

(ii) $p = ab$ iken a veya b birimsel oluyor ise p ye indirgenemez eleman denir.

(iii) $p \mid ab$ iken $p \mid a$ veya $p \mid b$ oluyor ise p ye asal eleman denir.

Not : (1) Tanım 2.1.1(i) de tanımlanan bölme bağıntısının yansıma, geçişme özellikleri olduğu halde simetri özelliği genel olarak yoktur. Örneğin Tam sayılar halkasında $2 \mid 4$ olduğu halde $4, 2$ yi bölmez. Dolayısıyla bölme bağıntısı bir denklik bağıntısı değildir.

(2) R bir halka olmak üzere, $u \in U(R)$ dir ancak ve ancak $u \mid 1$ dir.

(3) Bölme bağıntısı bir denklik bağıntısı olmamasına rağmen “ $\sim$ ” (ilgililik) bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

(4) R bir halka olmak üzere, p bir indirgenemez eleman olsun. Bu durumda her $u \in U(R)$ için up elemanı da indirgenemez elemandır.

(5) R bir tamlık bölgesi olmak üzere, p bir asal eleman olsun. Bu durumda her $u \in U(R)$ için up elemanı da asal elemandır.

Örnek 2.1.2: $R = \mathbb{Z}_6$ halkasını alırsak eğer, $\bar{2}$ elemanı asal eleman olduğu halde indirgenemez bir eleman değildir.

Teorem 2.1.3: R bir tamlık bölgesi olsun. R nin her asal elemanı indirgenemezdir.

İspat : R bir tamlık bölgesi ve $p \in R$ asal elemanı olsun. $a, b \in R$ için $p = ab$ olduğunu kabul edelim. R birimli bir halka olduğundan $p \mid ab$ ve böylece $p \mid a$ veya $p \mid b$ elde edilir. $p \mid a$ olursa en az bir $r \in R$ için $a = pr$ bulunur. Yukarıdaki eşitlikte yerine konulduğunda $1_R = rb$ ve böylece $b \in R$ birimsel bulunmuş olur. Aynı şekilde $p \mid b$ alındığında da $a \in R$ birimsel eleman olarak bulunmuş olur.

Tanım 2.1.4: R bir tamlık bölgesi olsun. Aşağıdakiler ifadeler doğru ise R ye tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge (TÇB) denir.

(i) her sıfırdan farklı ve birimsel olmayan $a \in R$ nin, $b_1, b_2, \dots, b_k \in R$ indirgenemez elemanlar olmak üzere $a = b_1 b_2 \dots b_k$ ayrışımı vardır.

(ii) $b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_t \in R$ indirgenemez elemanlar olmak üzere $a \in R$ nin iki farklı ayrışımı $a = b_1 b_2 \dots b_k = c_1 c_2 \dots c_t$ olsun. Bu durumda $k = t$ ve uygun dizilişten sonra $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ için $b_i \sim c_i$ dir.

Örnek 2.1.5:

- (i) $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası bir TÇB dir.
- (ii) Her esas ideal bölgesi bir TÇB dir.
- (iii) $\mathbb{Z}[x]$ polinomlar halkası bir TÇB dir.

2.2. Modüllerde Çarpanlara Ayırma

Bu bölümde, Anne-Marie Nicolas ve Chin-Pi Lu'nun yaptıkları çalışmalardan faydalanarak modül yapısı üzerinde çarpanlara ayırma tanımlanacak ve özellikleri incelenecektir. Bu bölümde alacağımız bütün modüller burulmalı olarak kabul edilecektir. Bir R -modül M ye burulmalı denir eğer $r \in R, m \in M$ için $rm = 0$ iken $r = 0$ veya $m = 0$ oluyor ise.

Tanım 2.2.1: (Lu, 1977) R bir halka ve M bir burulmalı R -modül olsun. $d \in R$ ve $m, m' \in M$ olmak üzere,

- (i) $m' = rm$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ var ise m elemanı m' elemanını bölüyor denir ve $m | m'$ ile gösterilir. Bu durumda m ye aynı zamanda m' nün bir böleni ya da çarpanı denir.
- (ii) m elemanı m' elemanını bölüyor ve m' elemanı m elemanını bölüyor ise m ile m' ye ilgili elemanlar denir ve $m \sim m'$ ile gösterilir.
- (iii) $m = dm_0$ olacak şekilde bir $m_0 \in M$ elemanı var ise d elemanı m elemanını bölüyor denir ve $d | m$ ile gösterilir.

Burada özel olarak m elemanı m' elemanını böldüğü halde m' elemanı m elemanını bölmüyor ise m ye m' nün öz çarpanı denir.

Önerme 2.2.2: (Lu, 1977) R bir halka ve M bir burulmalı R -modül olsun. $m, m' \in M$ olmak üzere $m \sim m'$ olması için gerek ve yeter koşul $m' = um$ olacak şekilde bir $u \in U(R)$ var olmasıdır.

İspat : $m, m' \in M$ olmak üzere $m \sim m'$ olsun. $m | m'$ ve $m' | m$ olduğundan $a, b \in R$ için $m' = am$ ve $m = bm'$ olur. Buradan da $m' = am = abm'$ ve böylece M burulmalı R -modül olduğundan $ab = 1_R$ bulunur. Yani $a \in U(R)$ olur. Tersine $m' = um$ olacak şekilde bir $u \in U(R)$ var ise $m = u^{-1}m'$ elde edilir. Bu da $m | m'$ ve $m' | m$ demek olur ki buradan da $m \sim m'$ elde edilir.

Tanım 2.2.3: (Nicolas, 1967) R bir halka, M bir burulmalı R -modül ve $0 \neq m \in M$ olsun.

(i) $a \in R$ ve $m' \in M$ için,

$$m = am' \text{ iken } a \in U(R)$$

oluyor ise $0 \neq m \in M$ elemanına “indirgenemez” eleman denir.

(ii) $0 \neq a \in R$ ve $m' \in M$ için,

$$m \mid am' \text{ olduğunda } m \mid m'$$

oluyor ise $0 \neq m \in M$ elemanına “ilkel” eleman denir.

(iii) $a \in R$, $m \in M$ ve $p \in R$ indirgenemez eleman olsun. Eğer,

$$p \mid am \text{ olduğunda } p \mid a \text{ veya } p \mid m$$

oluyor ise p ye “ M de asal” eleman denir.

Önerme 2.2.4: (Nicolas, 1967) M bir burulmalı R -modül olsun. $0 \neq m \in M$ indirgenemez eleman olması için gerek ve yeter koşul m nin M de öz çarpanının olmamasıdır.

İspat : $0 \neq m \in M$ indirgenemez eleman ve $m' \in M$ için $m' \mid m$ olsun. Bu durumda bir $0 \neq a \in R$ için $m = am'$ olur. m indirgenemez olduğundan $a \in U(R)$ olur. Böylece $m' = a^{-1}m$ olur ve böylece $m \mid m'$ ve $m' \mid m$ elde edilir. Bu da $m' \in M$ nin öz çarpan olmaması demektir. İfadenin ters gerektirmesini ispatlamak için m nin M de öz çarpanı olmadığını kabul edelim. $a \in R$ ve $m' \in M$ için, $m = am'$ olduğunu kabul edelim. Buradan $m' \mid m$ dir ve $m' \in M$, m nin has böleni olamayacağından $m \mid m'$ dir. Yani bir $b \in R$ için $m' = bm$ dir. Buradan da $m = am' = abm$ olur ki M bir burulmalı R -modül olduğundan $ab = 1_R$ ve böylece $a \in U(R)$ bulunmuş olur.

Önerme 2.2.5: (Nicolas, 1967) M bir burulmalı R -modül olsun. M deki her ilkel eleman indirgenemez elemandır.

İspat : Kabul edelim ki $m \in M$ bir ilkel eleman ve $a \in R$, $m' \in M$ için $m = am'$ olsun. R birimli bir halka olduğundan $m \mid am'$ dür. $m \in M$ ilkel eleman olduğundan, $m \mid m'$ dir. En az bir $b \in R$ için $m' = bm$ olur. Buradan,

$$m = am' = abm$$

elde edilir. M burulmalı modül olduğundan $ab = 1_R$ ve böylece $a \in U(R)$ bulunmuş olur.

Tanım 2.2.6: (Lu, 1977) M bir R -modül ve N de alt modülü olsun. Eğer her $a \in R$ için

$$aM \cap N = aN$$

oluyor ise N ye pür alt modül denir.

Önerme 2.2.7: (Lu, 1977) M bir burulmalı R -modül ve $m \in M$ sıfırdan farklı bir eleman olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) m ilkel elemandır.
- (ii) M nin devirli alt modülü Rm pür alt modüldür.
- (iii) Her $x \in M$ için ya $Rx \cap Rm = 0$ ya da $Rx \subseteq Rm$ dir.

İspat :

(i) $\Rightarrow$ (ii) $a \in R$ ve $m \in M$ ilkel eleman olsun. Kabul edelim ki $x \in aM \cap Rm$ olsun. O zaman $m' \in M$ ve $r \in R$ için,

$$x = am' = rm$$

olur. Buradan $m | am'$ elde edilir ve m ilkel eleman olduğundan $m | m'$ olur. En az bir $r' \in R$ vardır öyle ki $m' = r'm$ ve böylece $x = am' = ar'm \in aRm$ bulunur. Ters kapsamayı göstermek için $y \in aRm$ alalım. En az bir $r \in R$ vardır öyle ki $y = arm$ dir. Buradan da $y \in aM$ ve $y \in Rm$ bulunmuş olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) M nin devirli alt modülü Rm pür alt modül olsun. $Rx \cap Rm \neq 0$ olacak şekilde bir $x \in M$ alalım. Bu durumda en az bir $y \in Rx \cap Rm$ vardır öyle ki bir $r' \in R$ elemanı için $y = r'x$ olur. Rm pür alt modül olduğundan $r'M \cap Rm = r'Rm$ dir. Böylece $y = r'x \in r'M \cap Rm = r'Rm$ elde edilir. Buradan da en az bir $r^* \in R$ için $y = r'x = r'r^*m$, yani $x = r^*m$ bulunur. Sonuç olarak $Rx \subseteq Rm$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Her $x \in M$ için ya $Rx \cap Rm = 0$ ya da $Rx \subseteq Rm$ olsun. Bir $a \in R$ ve $m' \in M$ için $m | am'$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, en az bir $r \in R$ vardır öyle ki $am' = rm$ dir. Yani, $Rm' \cap Rm \neq 0$ olur ve böylece $Rm' \subseteq Rm$ elde edilir. En az bir $s \in R$ için $m' = sm$ bulunur ki bu da m nin ilkel eleman olması demektir.

Sonuç 2.2.8: (Lu, 1977) M bir burulmalı R -modül ve $m, m' \in M$ ilkel elemanlar olsunlar. m ile m' ilgili olmaması için gerek ve yeter koşul $Rm' \cap Rm = 0$ olmasıdır.

İspat : $m, m' \in M$ ilkel elemanları ilgili olmasınlar. m ve m' ilkel olduğundan Önerme 2.2.7 den $Rm' \cap Rm = 0$ olur. Aksi halde ilgili olurlardı. Tersini için $Rm' \cap Rm = 0$ olduğundan m' ve m ilgili değildir.

Tanım 2.2.9: (Nicolas, 1967) Bir tamlık bölgesi R üzerindeki bir burulmalı M modülü için aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa M ye tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül (TÇM) denir :

(TÇM 1) Sıfırdan farklı her $x \in M$ elemanı, $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanları R de ve m elemanı M de indirgenemez olmak üzere $x = a_1 a_2 \dots a_n m$ şeklinde bir indirgenemez çarpanlarına ayrılışa sahiptir.

(TÇM 2) x elemanının iki farklı indirgenemez çarpanlarına ayrılışı $x = a_1 a_2 \dots a_n m = b_1 b_2 \dots b_k m'$ ise $n = k$, M de $m \sim m'$ ve her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için b_i lerin sırası düşünülmeksizin R de $a_i \sim b_i$ dir.

Önerme 2.2.10: (Nicolas, 1967) M bir burulmalı R -modül olsun. M bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül ise R bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgedir.

İspat : M bir burulmalı R -modül olsun. Bu durumda R bir tamlık bölgesidir. $r \in R$ alalım. Bu durumda bir $m \in M$ indirgenemez eleman olmak üzere kabulümüzden dolayı rm nin tek türlü bir çarpanlarına ayrılışı vardır. Bu ayrılış uygun şekilde düzenlendiğinde $r_1 \dots r_k m$ şeklinde yazılabilir. M burulmalı modül olduğundan da $r = r_1 \dots r_k$ şeklinde r nin bir çarpanlarına ayrılışı bulunur. Bu yazılış da M bir TÇM olduğundan tek türüdür. Sonuç olarak R bir TÇB bulunmuş olur.

Önerme 2.2.11: (Nicolas, 1967) M bir burulmalı R -modül ve R bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olsun. M , devirli alt modüller için artan zincir koşulunu sağlıyor ise M de (TÇM 1) sağlanır.

İspat : Kabul edelim ki $m \in M$ nin indirgenemez ayrışımı olmasın. Bu durumda oluşturduğumuz, $\{Rm \mid m \neq r_1 \dots r_k n, n \text{ indirgenemez}\}$ kümesinin kabulümüzden dolayı en az bir maksimal elemanı vardır. Diyelim ki bu eleman Rx olsun. O zaman $x \in M$ indirgenemez olamaz dolayısıyla tersinir olamayan bir $r \in R$ ve $y \in M$ için $x = ry$ elde edilir. Buradan $Rx \subset Ry$ olduğundan $y \in M$ nin bir indirgenemez ayrışımı vardır. Yani $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ indirgenemez elemanları ve $z \in M$ indirgenemez elemanı için $y = a_1 a_2 \dots a_n z$ dir. R bir TÇB olduğundan $b_1, b_2, \dots, b_k \in R$ indirgenemez elemanları vardır öyle ki $r = b_1 b_2 \dots b_k$ dir. Buradan da $x = ry = b_1 b_2 \dots b_k a_1 a_2 \dots a_n z$ bulunmuş olur. Böylece bir indirgenemez ayrışım bulmuş oluruz ve istenen elde edilmiş olur.

Tanım 2.2.12: (Lu, 1977) M bir burulmalı R -modül, $a \in R$ ve $m \in M$ olsun.

1) Bir $d \in R$ elemanı a ile m nin en büyük ortak bölenidir (ebob), eğer

(i) R de $d | a$ ve M de $d | m$ ve

(ii) R de $c | a$ ve M de $c | m$ olacak şekilde bir $c \in R$ elemanı olduğunda c , d nin bir bölenidir.

Bu durumda d elemanı (a, m) veya $ebob\{a, m\}$ ile gösterilir.

2) Bir $m^* \in M$ elemanı a ile m nin en küçük ortak katıdır (ekok), eğer

(i) M de sırasıyla $a | m^*$ ve $m | m^*$ ve

(ii) M de $a | w$ ve $m | w$ olacak şekilde bir $w \in M$ elemanı var ise m^* , w elemanının bir çarpanı olur.

Bu durumda m^* , $[a, m]$ veya $ekok\{a, m\}$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.13: (Lu, 1977) M bir R tamlık bölgesi üzerinde bir modül, $m, m^* \in M$ ve $a \in R$ olsun. Şu halde;

(i) $m^* \sim ekok\{a, m\}$ olması için gerek ve yeter koşul $aM \cap Rm = Rm^*$ olmasıdır.

(ii) p , R nin bir indirgenemez elemanı ve $ekok\{a, m\}$, M de var olsun. Eğer p, m yi bölmez ise $pM \cap Rm = Rpm$ dir.

İspat :

(i) $m^* \sim ekok\{a, m\}$ olduğunu kabul edelim, bu durumda en az bir birimsel eleman $u \in R$ için $um^* = ekok\{a, m\}$ olur. Burada tanımdan $a | um^*$ ve $m | um^*$ elde edilir. Böylece $m^* \in aM \cap Rm$, yani $Rm^* \subseteq aM \cap Rm$ bulunur. Ters kapsamayı göstermek için de bir $x \in aM \cap Rm$ alalım. Bu durumda $x = an = bm$ olacak şekilde $n \in M$, $b \in R$ elemanları vardır. Yani $a | x$ ve $m | x$ olur. En küçük ortak kat tanımından $m^* | x$ olur ki bu da $x \in Rm^*$ demek olur. Böylece ters kapsama da gösterilmiş olur ve $aM \cap Rm = Rm^*$ ifadesi elde edilmiş olur. Şimdi de $aM \cap Rm = Rm^*$ olduğunu kabul edelim. $x = ekok\{a, m\}$ olsun. $aM \cap Rm = Rm^*$ olduğundan $a | m^*$ ve $m | m^*$ elde edilir. $x = ekok\{a, m\}$ olduğundan da $x \in aM \cap Rm = Rm^*$ ve böylece $m^* | x$ bulunmuş olur.

(ii) $m^* = \text{ekok}\{p, m\}$ olsun. Bu durumda bazı sıfırdan farklı $a, b \in R$ ve $m_0 \in M$ için $0 \neq m^* = am = pm_0$ ve $pm = bm^*$ dir. $p = ab$ dir ve böylece $m = bm_0$ olur. p, m yi bölmesin ve $b|m$ olduğundan p, b ile ilgili değildir elde edilir. Böylece $p \sim a$ ve b birimseldir, yani $m^* \sim pm$ olduğu için (i) den $pM \cap Rm = Rpm$ olduğu görülür.

Önerme 2.2.14: (Lu, 1977) M bir R , GCD-bölgesi üzerinde bir modül olsun öyle ki her $a \in R$ ve $m \in M$ için $\text{ebob}\{a, m\} = (a, m)$ mevcut olsun. Bu durumda bir $b \in R$ için;

$$(i) ((a, b), m) = (a, (b, m)),$$

$$(ii) (ba, bm) = (b(a, m)),$$

$$(iii) a|bm \text{ ve } (a, m) = I \text{ ise } a|b$$

durumları sağlanır.

Teorem 2.2.15: (Lu, 1977) M , bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olan R üzerinde (TÇM 1) şartını sağlayan bir modül olsun. Şu halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) M modülü R üzerinde tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüldür.

(ii) M nin her indirgenemez elemanı ilkeldir.

(iii) Herhangi $a \in R$ ve $m \in M$ ikilisi için $\text{ebob}\{a, m\}$ R de mevcuttur.

(iv) Herhangi $a \in R$ ve $m \in M$ ikilisi için $\text{ekok}\{a, m\}$ M de mevcuttur, yani $aM \cap Rm$ alt modülü devirlidir.

(v) R nin her p indirgenemez elemanı M de asaldır.

(vi) R nin a ve b elemanları $aM \subseteq bM$ şeklinde ise $a|b$ dir ve her $a, b \in R$ ikilisi için bir $c \in R$ mevcuttur öyle ki $aM \cap bM = cM$ dir.

İspat : (i) $\Leftrightarrow$ (ii) M modülü R üzerinde TÇM ve $m \in M$ indirgenemez eleman olsun. Kabul edelim ki $a \in R$ ve $m' \in M$ için $m|am'$ olsun. Bu durumda en az bir $r \in R$ için $rm = am'$ olur. M , TÇM olduğundan öyle $r_1, r_2, \dots, r_k, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_t \in R$ ve $m'' \in M$ indirgenemez elemanları vardır ki $r_1 r_2 \dots r_k m = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_t m''$ elde edilir ve (TÇM 2) den de $m \sim m''$ bulunur. Buradan da $m|m''$ yani $m|m'$ bulunmuş olur. Yani $m \in M$ bir ilkel elemandır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $m = 0$ ise her $a \in R$ için $\text{ebob}\{a, m\} \sim a$ dır. $b \in R$ ve m_0 elemanı M nin bir indirgenemez elemanı olmak üzere $m = bm_0 \neq 0$ ise $\text{ebob}\{a, m\} \sim \text{ebob}\{a, b\} = d \in R$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilmiş olur. d nin a ile m nin ortak böleni olduğu açıktır. d' nün a ile m nin bir başka ortak böleni olduğunu kabul edelim ve bazı $m' \in M$ için $m = bm_0 = d'm'$ yazalım. Bu durumda m_0 ilkel ve $d = \text{ebob}\{a, b\}$ olduğundan $d' | b$ yani $d' | d$ dir. Sonuç olarak $d \sim \text{ebob}\{a, m\}$ elde edilir ve (iii) bulunmuş olur.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $a = 0$ ise her $m \in M$ için $\text{ekok}\{a, m\} \sim 0$ dır. Herhangi $0 \neq a \in R$ ve $m \in M$ ikilisi için $d \sim \text{ebob}\{a, m\}$ olsun. Şu halde $\text{ebob}\{a', m'\} \sim 1$ olacak şekilde bazı $a' \in R$ ve $m' \in M$ elemanları için Önerme 2.2.14, (ii) den $a = da'$ ve $m = dm'$ dür. Buradan da Önerme 2.2.14, (iii) yardımıyla $m^* = a'm$ nin $\text{ekok}\{a, m\}$ olduğu gösterilir.

(iv) $\Rightarrow$ (v): $a \in R$ ve $m \in M$ için p elemanı R nin $p | am$ olacak şekilde bir indirgenemez elemanı olsun. p, m yi bölmez ise Önerme 2.2.13, (ii) den $am \in pM \cap Rm = Rpm$ dir. Böylece $p | a$ olduğu, dolayısıyla (v) in doğruluğu görülmüş olur.

(v) $\Rightarrow$ (vi): R nin a ve b elemanları $aM \subseteq bM$ şeklinde olsun. Eğer $b = 0$ ise $a = 0$ dır yani $b | a$ dır. $b \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde herhangi bir $m_0 \in M$ indirgenemez elemanı için $b | am_0$ dır ve buradan b nin her p asal çarpanı için $p | am_0$ dır. (v) ten b nin her p asal çarpanı için $p | a$ dır, dolayısıyla $b | a$ dır.

Eğer $a = 0$ ve $b = 0$ ise $c = 0$ olduğu açıktır. $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olduğunu kabul edelim ve $c \sim \text{ekok}\{a, b\}$ ve $d \sim \text{ebob}\{a, b\}$ olsun. Şu halde $aM \cap bM \supseteq cM$ ve $a' = a | d$ ve $b' = b | d$ olmak üzere $c = a'b = ab'$ dür. Eğer sıfırdan farklı w elemanı M nin $w = am = bm' \in aM \cap bM$ şeklindeki bir elemanı ise $a'm = b'm'$ dür. $a' | b'm'$ ve $(a', b') \sim 1$ olduğundan (i) deki ispata benzer şekilde $a' | m'$ elde edilir. Sonuç olarak $c = a'b$, $w = bm'$ nü böler. Böylece $aM \cap bM \subseteq cM$ dir ve istenen sağlanır.

(vi) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i): Bazı $a, b \in R$ ve $m' \in M$ için m elemanı M nin $am' = bm$ olacak şekilde bir indirgenemez elemanı ise bazı $c \in R$ elemanı için (vi) den $am' = bm \in aM \cap bM = cM$ dir ve (vi) den $b | c$ ve $a | c$ dir. m indirgenemez olduğundan $b \sim c$ dir, buradan $a | b$ ve $m | m'$ dür. Yani m ilkeldir. Dolayısıyla (ii) doğrulanır ve (ii) $\Rightarrow$ (i), (a) şikkındadır. Böylece Teorem 2.2.15 in ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 2.2.16: (Lu, 1977) Bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olan R üzerindeki her Rm burulmalı devirli modülü bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüldür ve bu modülün her ilkel elemanı m ile ilgilidir.

İspat : İlk önce $m \in Rm$ nin indirgenemez bir eleman olduğunu gösterelim. $m = am^*$ olacak şekilde $a \in R$ ve $m^* \in Rm$ olsun. $m^* \in Rm$ olduğundan en az bir $r \in R$ için $m^* = rm$ dir. Bir önceki eşitlikte yerine yazarsak, $m = am^* = arm$ bulunur ve böylece $a \in R$ birimsel olarak bulunmuş olur. Şimdi herhangi bir $n \in Rm$ alalım. Bu durumda en az bir $r \in R$ için $n = rm$ olur. R bir TÇB olduğundan $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ indirgenemez elemanları için $r = a_1 a_2 \dots a_n$ ve buradan da $n = rm = a_1 a_2 \dots a_n m$ bulunduğundan Rm de (TÇM 1) sağlanır. M burulmalı modül olduğundan da (TÇM 2) sağlanır ve böylece Rm bir TÇM modül olarak elde edilir. Şimdi de Rm de bir ilkel eleman olan $x \in Rm$ alalım. Bu durumda $m|x$ ve R birimli olduğundan $x|m$ elde edilir. Böylece $m \sim x$ olur.

Sonuç 2.2.17: (Lu, 1977) Her vektör uzayı bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüldür ve sıfırdan farklı her elemanı ilkeldir.

Sonuç 2.2.18: (Lu, 1977) K , bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olan R nin kesir cismi ve M modülü K nin bir R -alt modülü olsun. Şu halde M bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül olması için gerek ve yeter koşul M modülünün devirli olmasıdır. Dolayısıyla R nin bir ideali R üzerinde bir TÇB olması için gerek ve yeter koşul bu idealin temel ideal olmasıdır.

İspat: M nin herhangi sıfırdan farklı $x = \frac{a}{b}$ ve $y = \frac{c}{d}$ eleman çifti için $0 \neq bcx = ady \in Rx \cap Ry$ dir. Sonuç 2.2.8 e göre M , bir ilkel eleman tarafından üretilen en fazla bir devirli alt modüle sahiptir. Dolayısıyla tek bir tane indirgenemez elemanı olmuş olur. Buradan da M bir devirli modül elde edilir. Tersini için de M yi devirli kabul edelim. Bu durumda R tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğundan M de tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül elde edilmiş olur.

Sonuç 2.2.19: (Lu, 1977) Bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olan R üzerindeki bir M tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modülün her N pür alt modülü de tek türlü çarpanlarına ayrılabilen R -modüldür. N nin bütün indirgenemez elemanları aynı zamanda M de indirgenemezdir.

İspat: N alt modülünün (TÇM 1) şartını sağladığı açıktır. Herhangi $a \in R$, $m \in M$ ve bazı $x \in M$ için N pür alt modül olduğundan

$$aN \cap Rm = (aM \cap N) \cap Rm = (aM \cap Rm) \cap N = Rx \cap N = Rx$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.2.15, (iv) ten N bir TÇM dir. $N \subseteq M$ olduğundan N nin bütün indirgenemez elemanları aynı zamanda M de indirgenemez elemandır.

Sonuç 2.2.20: (Lu, 1977) $\{M_i | i \in I\}$ ailesi bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olan R üzerinde modüllerin ailesi olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $\prod_{i \in I} M_i$, R üzerinde TÇM dir.

(ii) $\oplus_{i \in I} M_i$, R üzerinde TÇM dir.

(iii) Her M_i , R üzerinde TÇM dir.

İspat: Burada $M_i \leq \oplus_{i \in I} M_i \leq \prod_{i \in I} M_i$ alt modülleri pür olduğundan Sonuç 2.2.19 dan

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) olduğu görülür. Şimdi de (iii) ün varlığını kabul edelim ve $\prod_{i \in I} M_i = M$ olsun. Bazı $a_i \in R$ ve bir $m_i' \in M_i$ indirgenemez elemanı için $m_i = a_i m_i'$ olmak üzere $m = (m_i)_{i \in I} \in M$ ise m elemanının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $\{a_i | i \in I\}$ kümesinin R de en büyük ortak böleninin olmamasıdır. Böylece M nin (TÇM 1) koşulunu sağladığını görebiliriz. p elemanı bazı $a \in R$ ve $m = (m_i)_{i \in I} \in M$ için M de $p | am$ olacak şekilde R nin bir indirgenemez elemanı olsun. Şu halde her i için M_i de $p | am_i$ dir. Eğer R de p, a yı bölmez ise Teorem 2.2.15, (v) ten her i için M_i de $p | m_i$ olduğu görülür, çünkü her M_i faktöriyeldir. Sonuç olarak $p | m$ ve böylece yine Teorem 2.2.15, (v) ten $\prod_{i \in I} M_i = M$ faktöriyeldir. Dolayısıyla (iii) $\Rightarrow$ (i) sağlanmış olur.

Sonuç 2.2.21: (Lu, 1977) Bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge üzerindeki her serbest modül tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüldür.

2.3. Tek Türlü Çarpanlara Ayırma Modüllerinde Asal Alt Modüller

Bu bölümde, Chin-Pi Lu'nun yaptığı çalışmadan faydalananarak modül elemanları ile bu elemanların ürettikleri alt modüller arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Ayrıca asal alt modülleri de karakterize edeceğiz.

Tanım 2.3.1: (Lu, 1977) Bir R halkası üzerinde bir M modülünün N has alt modülü olsun.

(i) $(N :_R M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$ kümesi R de bir idealidir.

(ii) Eğer $x \in M$ ve $a \in R$ için $ax \in N$ iken $x \in N$ veya $a \in (N :_R M)$ oluyorsa N ye asal alt modül denir.

Örnek 2.3.2: (Lu,1977)

(i) Bir R halkasının her P asal ideali R -modül R nin asal alt modülüdür.

(ii) Her burulmalı modülün (0) alt modülü asal alt modüldür.

(iii) $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}[x]$ olmak üzere $N = (2\mathbb{Z})[x]$ olsun. Bu durumda $(N :_R M) = 2\mathbb{Z}$ olur ve N alt modülü M de asal alt modül olur.

Sonuç 2.3.3: (Lu, 1977) N bir R -modül M nin asal alt modülü ise $(N :_R M)$ ideali de R nin bir asal idealidir.

İspat : N alt modülü M de asal alt modül ve $a, b \in R$ için $ab \in (N :_R M)$ olsun. Kabul edelim ki $b \notin (N :_R M)$ olsun. Bu durumda en az bir $m \in M$ için $bm \notin N$ fakat $abm \in N$ dir. Buradan da N asal olduğundan $a \in (N :_R M)$ elde edilir.

Sonuç 2.3.4: (Lu, 1977) Bir modülün her maksimal alt modülü asal alt modüldür.

İspat : M bir R -modül ve N bir maksimal alt modül olsun. $m \in M$ ve $r \in R$ için $rm \in N$ olsun. Kabul edelim ki $m \notin N$ olsun. Bu durumda $M = N + (m)$ dir. Her $x \in M$ için $n \in N$ ve $a \in R$ vardır öyle ki $x = n + am$ dir ve böylece $rx = r(n + am) = rn + ram \in N$ elde edilir. Yani $r \in (N :_R M)$ bulunmuş olur.

Sonuç 2.3.5: (Lu, 1977) Bir M modülünün N has alt modülünün pür olması için gerek ve yeter koşul N nin asal alt modül ve $(N :_R M) = (0)$ olmasıdır.

İspat : N , M modülünün bir has pür alt modülü olsun. $r \in (N :_R M)$ ise $rM \subseteq N$ dir ve böylece $rM = rM \cap N = rN$ bulunur. M burulmalı modül olduğundan da $r = 0$ elde edilir. Şimdi de $m \in M$ ve $r \in R$ için $rm \in N$ olsun. Kabul edelim ki $m \notin N$ olsun. Bu durumda $rm \in rM \cap N = rN$ bulunur ve M burulmalı modül olduğundan da $r = 0 \in (N :_R M)$ elde edilir. Ters gerektirmeyi göstermek için $r \in R$ alalım. $rM \cap N \supseteq rN$ olduğu açıktır. Ters kapsama için $0 \neq x \in rM \cap N$ olsun. Bu durumda $x = rm = n$ olacak şekilde $m \in M$ ve $n \in N$ vardır. $rm \in N$ ve N asal alt modül olduğundan $r \in (N :_R M)$ veya $m \in N$ dir. Kabulümüzden $r \neq 0$ olduğundan $m \in N$ bulunur ve böylece $rm \in rN$ olur.

Sonuç 2.3.6: (Lu, 1977) M bir serbest R -modül ise R nin her P asal ideali için PM alt modülü M de asaldır ve $(PM : M) = P$ dir.

Önerme 2.3.7: (Lu, 1977) M bir R tamlık bölgesi üzerinde modül ve $Rm \neq M$ olacak şekilde $m \in M$ olsun. O halde m nin ilkel olması için gerek ve yeter koşul Rm nin asal alt modül ve $(Rm : M) = (0)$ olmasıdır.

İspat : $m \in M$ bir ilkel eleman ve $0 \neq r \in R$, $x \in M$ için $rx \in Rm$ olsun. Bu durumda $m \mid rx$ ve m ilkel olduğundan $m \mid x$ bulunur. Yani $x \in Rm$ olur. $r = 0$ ise de $r \in (Rm : M)$ olur. Şimdi de $r \in (Rm : M)$ alalım. Bu durumda her $x \in M$ için $rx \in Rm$ olur. $x \in M \setminus Rm$ olarak seçersek $m \mid x$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $r = 0$ ve böylece $(Rm : M) = (0)$ bulunmuş olur. Tersini için de Rm nin asal alt modül ve $(Rm : M) = (0)$ olduğunu kabul edelim. $0 \neq r \in R$, $x \in M$ için $m \mid rx$ olsun. O zaman $rx \in Rm$ olur. Burada $0 \neq r \in R$ ve $(Rm : M) = (0)$ olduğundan $x \in Rm$ ve böylece $m \mid x$ bulunur.

Önerme 2.3.8: (Lu, 1977) M bir R tamlık bölgesi üzerinde, her birimsel olmayan $p \in R$ elemanı için $pM \neq M$ olmak üzere bir modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) p elemanı M de asaldır.

(ii) pM alt modülü M de asaldır ve $(pM : M) = (p)$ dir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) p elemanı M de asal olsun. $r \in R$, $x \in M$ için $rx \in pM$ olsun. Bu durumda $p \mid rx$ olur ve böylece tanımdan $p \mid r$ veya $p \mid x$ elde edilir. $p \mid r$ ise $r \in (p) \subseteq (pM :_R M)$ olur. $p \mid x$ ise $x \in pM$ elde edilir. Şimdi de $(pM : M) = (p)$ olduğunu gösterelim. $(p) \subseteq (pM :_R M)$ olduğu açıktır. Ters kapsamayı göstermek için de $a \in (pM : M)$ alalım. Bu durumda $aM \subseteq pM$ dir. Özel olarak $m \in M \setminus pM$ aldığımızda $am \in pM$ olduğundan $p \mid a$ bulunur. Yani $a \in (p)$ bulunmuş olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) pM alt modülü M de asal ve $(pM : M) = (p)$ olsun. Bu durumda $p \in R$ indirgenemez eleman olur. $r \in R$, $x \in M$ için $p \mid rx$ olsun. Buradan $rx \in pM$ olur. pM asal alt modül olduğundan $x \in pM$ veya $r \in (pM : M) = (p)$ elde edilir. Bu da $p \mid x$ veya $p \mid r$ demek olur, yani p elemanı M de asaldır.

Teorem 2.3.9: (Lu, 1977) M bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır,

(i) $Rm \neq M$ şeklindeki her $m \in M$ indirgenemez elemanı için Rm asal alt modüldür ve $(Rm : M) = (0)$ dir.

(ii) Her $p \in R$ indirgenemez elemanı için pM asal alt modüldür ve $(pM : M) = (p)$ dir.

Sonuç 2.3.10: (Lu, 1977) M bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde Rx devirli modülü ve m de x ile ilgili olmayacak şekilde $m \in M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) Rm asal alt modüldür.

(ii) Bazı $p \in R$ indirgenemez elemanı için $m \sim px$ dir.

(iii) Bazı $p \in R$ indirgenemez elemanı için $Rm = pM$ dir.

Teorem 2.3.11: (Lu, 1977) S bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R nin çarpımsal kapalı alt kümesi ve $0 \notin S$ olsun. Eğer M bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen R -modül ise M_s kesir modülü de bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen R_s -modüldür.

İspat: M nin her indirgenemez elemanı M_s de de indirgenemez olduğundan M_s , (TÇM 1) koşulunu sağlar. P, R_s nin indirgenemez elemanlarını temsil eden bir sistem olsun. Her temsili R den $P \subseteq R$ olacak şekilde seçebiliriz. M modülü R üzerinde TÇM olduğundan Teorem 2.2.15 (v) ten her P nin her p elemanı M de asaldır. Ayrıca her $s \in S$ için p, s yi bölmez. Bu özellikleri P nin elemanlarına uygularsak her $p \in P$ nin R_s -modül M_s de asal olduğunu ispatlayabiliriz. Böylece Teorem 2.2.15 (v) ten M_s bir TÇM R_s -modüldür.

Teorem 2.3.12: M bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde (TÇM 1) koşulunu sağlayan bir modül olsun. S, R nin çarpımsal kapalı kümesi ve M de asal olan elemanların bir ailesi olan P' ile üretilsin. Eğer R_s -modül M_s tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül ise R -modül M de tek türlü çarpanlara ayrılabilen modüldür.

İspat: P ve P'' sırasıyla R ve R_s nin indirgenemez elemanlarının temsil sistemleri olsun. O halde $P = P' \cup P''$ dür. Teorem 2.2.15 (v) e göre R nin her indirgenemez elemanının M de asal oluşunu göstermek yeterlidir. Bu ifadenin her $p \in P'$ için doğruluğu açıktır. Kabul edelim ki, bazı $m \in M$ için $p \in P''$ ve M de $p | am$ olsun. M_s bir TÇM olduğundan R_s de $p | a$ ve M_s de $p | m$ dir. Her $s \in S$ için R de $(s, p) = 1$ ve $s \in S$ nin her indirgenemez

çarpanının M de asal olduğunu kullanarak R de $p|a$ veya M de $p|m$ olduğunu ispatlayabiliriz. Böylece P'' nün, dolayısıyla P nin her p elemanı R -modül M de asaldır.

Önerme 2.3.13: (Lu, 1977) R temel idealler için artan zincir koşulunu sağlayan bir tamlık bölgesi olsun ve M bir R -modül olsun. Eğer M devirli alt modüller için artan zincir koşulunu sağlıyorsa, herhangi bir I kümesi için hem $R[x_i | i \in I]$ -modül $M[x_i | i \in I]$, hem de $R[[x_i | i \in I]]$ -modül $M[[x_i | i \in I]]$ artan zincir koşulunu sağlar.

Teorem 2.3.14: (Lu, 1977) M bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül ise $R[x]$ -modül $M[x]$ de tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül olur.

İspat: $S = R - \{0\}$ ve K , R nin bölüm cismi olsun. Teorem 2.3.11 ve Önerme 2.3.13 ü kullanarak, (TÇM 1) koşulunu sağlayan $(R[x])_s = K[x]$ temel ideal bölgesi üzerinde $(M[x])_s = M_s[x]$ modülü bir TÇM dir. Dolayısıyla $M_s[x]$, TÇM olup bunun sonucunda da Teorem 2.3.12 den $M[x]$ modülü $R[x]$ üzerinde TÇM dir.

Sonuç 2.3.15: (Lu, 1977) M bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül ise herhangi bir I indeks kümesi için $M[x_i | i \in I]$ modülü $R[x_i | i \in I]$ üzerinde tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül olur.

2.4. Zayıf Asal Elemanlar ve Zayıf Asal Alt Modüller

Bu bölümde, bir modülün zayıf asal elemanlarını tanımlayacağız. Bu elemanların ürettikleri alt modüllerin zayıf asal alt modül olduklarını göstereceğiz. Daha sonra da zayıf asal alt modülleri karakterize edeceğiz.

Tanım 2.4.1: M bir burulmalı R -modül olsun. $0 \neq m \in M$ elemanı $a, b \in R$ ve $m' \in M$ olmak üzere,

$$m | abm' \text{ ise } m | am' \text{ veya } m | bm'$$

koşulu sağlanıyorsa $m \in M$ ye zayıf asal (z-asal) eleman denir.

Burada not edelim ki, $m \in M$ zayıf asal (z-asal) eleman ise her $r \in U(R)$ elemanı için rm elemanı da bir zayıf asal elemandır.

Önerme 2.4.2: M bir burulmalı R -modül olsun. M modülünün her ilkel elemanı aynı zamanda z-asal elemandır.

İspat : $m \in M$ bir ilkel eleman olsun. $a, b \in R$ ve $m' \in M$ olmak üzere, $m \mid abm'$ olduğunu kabul edelim. m ilkel olduğundan, $m \mid m'$ dir. Sonuç olarak $m \mid am'$ ve $m \mid bm'$ bulunmuş olur.

Örnek 2.4.3: R bir değişmeli ve birimli halka olmak üzere $M = R[x]$ bir R -modül olsun. Bu durumda $x \in M$ bir z-asal (ilkel, indirgenemez) elemandır.

Örnek 2.4.4: $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}[x]$ bir R -modül olsun. Bu durumda $2x \in M$ bir z-asal eleman olduğu halde ne ilkel ne de indirgenemez elemandır.

Teorem 2.4.5: R , tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge ve M devirli Rx modülü olsun. $m \in M$ elemanı $x \in M$ ile ilgili olmasın. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $m \in M$, z-asal elemandır.
- (ii) Bir indirgenemez $p \in R$ elemanı için $m \sim px$ dir.
- (iii) Bir indirgenemez $p \in R$ elemanı için $Rm = pM$ dir.

İspat : (i) $\Rightarrow$ (ii) $m \in M$, z-asal elemanı olsun. Burada $m \in M = Rx$ olduğundan en az bir $r \in R$ için $m = rx$ olur. R , tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olduğundan $r = p_1 p_2 \dots p_k$ olacak şekilde $p_i \in R$ indirgenemez elemanları vardır. $m \in M$, z-asal eleman olduğundan bir $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $m \mid p_i x$ dir. Böylece $m \sim p_i x$ elde edilmiş olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Bir indirgenemez $p \in R$ elemanı için $m \sim px$ olsun. Bu durumda en az bir $u \in U(R)$ vardır öyle ki $m = upx = pux \in pRx = pM$. Eğer $n \in M$ için $pn \in pM$ alınırsa bir $s \in R$ için, $pn = psx = spx = su^{-1}m \in Rm$ elde edilir. Böylece $Rm = pM$ bulunmuş olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Bir indirgenemez $p \in R$ elemanı için $Rm = pM$ olsun. $n \in M$ ve $a, b \in R$ için $m \mid abn$ olduğunu kabul edelim. En az bir $r \in R$ için $rm = abn$ dir. $Rm = pM$ ve $M = Rx$ olduğundan bazı $m' \in M$ ve $r', r'' \in R$ için $abn = abr'x$ ve $rm = pm' = pr''x$ bulunur. Yani $abr' = pr''$ ve $p \mid abr'$ elde edilir. Buradan $p \mid a$ veya $p \mid b$ veya $p \mid r'$ bulunur. Buradan da $m \in M$, z-asal elemandır.

Tanım 2.4.6: M bir R -modül ve N de alt modülü olsun. Eğer $a, b \in R$ ve $k \in M$ için,

$$abk \in N \text{ ise } ak \in N \text{ veya } bk \in N$$

koşulu sağlanıyorsa N ye zayıf asal alt modül (z-asal alt modül) denir.

Teorem 2.4.7: M bir R -modül ve N de alt modülü olsun. N bir zayıf asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul M nin bir K alt modülü ve $a, b \in R$ için $abK \subseteq N$ koşulu sağlandığında ya $aK \subseteq N$ ya da $bK \subseteq N$ olmasıdır.

İspat : Kabul edelim ki N bir zayıf asal alt modül olsun. Bazı $a, b \in R$ ve M nin bir K alt modülü için $abK \subseteq N$ olsun. Bu durumda her $k \in K$ için $abk \in N$ olur ve N bir zayıf asal alt modül olduğundan $ak \in N$ veya $bk \in N$ bulunur. Buradan da $aK \subseteq N$ veya $bK \subseteq N$ olur, eğer olmasaydı öyle $k_1, k_2 \in K$ elemanları bulunurdu ki $ak_1 \in N$ olduğu halde $bk_1 \notin N$ ve $bk_2 \in N$ olduğu halde $ak_2 \notin N$ durumları sağlanırdı. Burada $k_1 + k_2 \in K$ elemanını aldığımızda $ab(k_1 + k_2) \in N$ olur. N bir zayıf asal alt modül olduğundan $a(k_1 + k_2) \in N$ veya $b(k_1 + k_2) \in N$ elde edilir. Buradan da her iki durum için çelişki oluşur. Ters gerektirmeyi göstermek için $a, b \in R$ ve $k \in M$ elemanları $abk \in N$ yı sağlasın. O zaman $ab(k) \subseteq N$ olur. Kabulümüzden $a(k) \subseteq N$ veya $b(k) \subseteq N$ elde edilir. Sonuç olarak $ak \in N$ veya $bk \in N$ bulunur.

Teorem 2.4.8: M bir R -modül olsun. O zaman $m \in M$ elemanı z-asal olması için gerek ve yeter koşul Rm, M nin z-asal alt modülü olmasıdır.

İspat : Kabul edelim ki $m \in M$ elemanı z-asal eleman ve $a, b \in R$ ve $k \in M$ için $abk \in Rm$ olsun. Bu durumda $m | abk$ olur. m elemanı z-asal olduğundan $m | ak$ veya $m | bk$ dir. Bu da $ak \in Rm$ veya $bk \in Rm$ demek olur. Şimdi de ters tarafı göstermek için Rm, M nin z-asal alt modülü olduğunu kabul edelim. $a, b \in R$ ve $m' \in M$ için $m | abm'$ olsun. $abm' \in Rm$ ve Rm z-asal alt modül olduğundan $am' \in Rm$ veya $bm' \in Rm$ dir. Buradan da $m | am'$ veya $m | bm'$ bulunur.

2.5. Zayıf Tek Türlü Çarpanlara Ayrılabilen Modüller

Tanım 2.5.1: Değişmeli ve birimli R halkası üzerindeki bir burulmalı modül M ye zayıf tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül (z-TÇM) denir, eğer aşağıdaki koşullar sağlanır ise:

(z- TÇM 1) Sıfırdan farklı her $x \in M$ elemanının z-ayrılığı vardır, yani $x = a_1 \dots a_t m$ olacak şekilde R de $a_1, \dots, a_t$ indirgenemez elemanları ve M de m z-asal elemanı vardır.

(z- TÇM 2) Eğer $x = a_1 \dots a_t m = b_1 \dots b_l m^*$, $x \in M$ nin iki farklı z-ayrılımı ise $t = l$, her $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ için $a_i \sim b_i$ ve $m \sim m^*$ olur.

Teorem 2.5.2: M , bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde modül ve (z-TÇM 1) i sağlasın. O zaman M bir z-tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her z-asal elemanı aynı zamanda ilkel eleman olmasıdır.

İspat : M bir z-TÇM ve $m \in M$ bir z-asal eleman olsun. Kabul edelim ki $a, b \in R$ ve $m' \in M$ için $m \mid abm'$ olsun. O zaman en az bir $r \in R$ için $rm = abm'$ olur. M bir z-TÇM ve R bir TÇB olduğundan R de indirgenemez olan $r_1, \dots, r_k, a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_n$ elemanları ve M de bir z-asal olan m^* elemanı vardır öyle ki $r = r_1 \dots r_k$, $a = a_1 \dots a_t$, $b = b_1 \dots b_l$ ve $m' = c_1 \dots c_n m^*$ dir. Buradan da $r_1 \dots r_k m = a_1 \dots a_t b_1 \dots b_l c_1 \dots c_n m^*$ elde edilir. M bir z-TÇM olduğundan teklikten $k = t + l + n$ olur ve uygun dizilişten sonra $r_i \sim a_i, r_j \sim b_j, r_s \sim c_s$ ve $m \sim m^*$ bulunur. Uygun bir $r^* \in U(R)$ için $m^* = r^* m$ bulunur. Böylece $m' = c_1 \dots c_n m^* = c_1 \dots c_n r^* m$ elde edilir ki buradan da istendiği şekilde $m \mid am'$ veya $m \mid bm'$ bulunur. Şimdi de ters gerektirmeyi gösterelim. Bunun için de M deki her z-asal elemanın ilkel eleman olduğunu ve $x \in M$ nin $x = a_1 \dots a_t m = b_1 \dots b_l m^*$ şeklinde iki z-ayrışımı olduğunu kabul edelim. $m \mid b_1 \dots b_l m^*$ ve $m^* \mid a_1 \dots a_t m$ bulunur. m ve m^* z-asal elemanlar olduğundan $m \mid m^*$ ve $m^* \mid m$ elde edilir, yani en az bir $r^* \in U(R)$ için $m = r^* m^*$ olur. Buradan da $a_1 \dots a_t r^* m^* = b_1 \dots b_l m^*$ ve böylece $r^* a_1 \dots a_t = b_1 \dots b_l$ bulunmuş olur. R halkası TÇB olduğundan da istenen elde edilir.

Sonuç 2.5.3: M bir R -modül olsun. M bir z-tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül ise M bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen modüldür.

İspat : Teorem 2.5.2 ve Teorem 2.2.15 den sonuç hemen elde edilir.

Sonuç 2.5.4: Her vektör uzayı bir z-tek türlü çarpanlara ayrılabilen modüldür.

Teorem 2.5.5: M , bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde modül ve (z-TÇM 1) i sağlasın. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) M deki her w-asal elemanın ilkel elemandır.
- (ii) Herhangi $a \in R$ ve $m \in M$ için R de $ebob\{a, m\}$ vardır.
- (iii) Herhangi $a \in R$ ve $m \in M$ için M de $ekok\{a, m\}$ vardır, yani $aM \cap Rm$ alt modülü devirlidir.
- (iv) R nin her indirgenemez p elemanı M de asal elemandır.

Sonuç 2.5.6: R bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge ve R_m , (z-TÇM 1) koşulunu sağlayan bir devirli R -modül olsun. O zaman R_m bir z-tek türlü çarpanlara ayrılabilen modüldür.

Sonuç 2.5.7: M , bir esas ideal bölgesi olan R üzerinde modül olsun. O zaman M bir z-tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül olması için gerek ve yeter koşul M , (z-TÇM 1) koşulunu sağlamasıdır.

Sonuç 2.5.8: R bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge ve M bir z-tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül olsun. M nin her pür alt modülü bir z-tek türlü çarpanlara ayrılabilen modüldür.

Teorem 2.5.9: M , bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde bir z-tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül ve her $p \in R \setminus U(R)$ için $pM \neq M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) p , M de asal bir elemandır.

(ii) pM , $(pM :_R M) = (p)$ koşulunu sağlayan M nin bir z-asal alt modülüdür.

İspat : (i) $\Rightarrow$ (ii) $p \in R$, M de asal bir eleman ve $a, b \in R$, $k \in M$ elemanları için $abk \in pM$ olsun. R bir TÇB ve $p \in R$, M de asal eleman ve $p|abk$ olduğundan $p|a$ veya $p|b$ veya $p|k$ elde edilir. Böylece pM alt modülü bir z-asal alt modül olur. İkinci kısım için $(pM :_R M) \supseteq (p)$ olduğu açıktır, şimdi ters kapsama için $r \in (pM :_R M)$ alalım. Burada en az bir $m \in M \setminus pM$ vardır ve $rm \in pM$ dir. Burada $p|rm$ bulunur ki p , M de asal eleman olduğundan $p|r$ elde edilir. Yani $r \in (p)$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Kabul edelim ki pM , $(pM :_R M) = (p)$ koşulunu sağlayan M nin bir z-asal alt modül olsun. İlk önce $p \in R$ nin indirgenemez eleman olduğunu gösterelim. Bunun için de $a, b \in R$ için $p = ab$ alalım. Bu durumda $abM \subseteq pM$ dir ve pM z-asal alt modül olduğundan $aM \subseteq pM$ veya $bM \subseteq pM$ olur. Buradan da $a \in (pM :_R M) = (p)$ veya $b \in (pM :_R M) = (p)$ bulunur. O zaman bu durumda ya a ya da b birimsel eleman olur. Şimdi de $a \in R$ ve $m \in M$ için $p|am$ olsun. En az bir $m^* \in M$ için $pm^* = am$ bulunur. M bir z-TÇM olduğundan da $p|a$ veya $p|am$ elde edilir. Yani $p \in R$, M de asal bir elemandır.

Teorem 2.5.10: R bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge ve $\{M_i | i \in I\}$ kümesi R -modüllerin kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\prod_{i \in I} M_i$, R üzerinde bir z-TÇM dir.

(ii) $\bigoplus_{i \in I} M_i$, R üzerinde bir z-TÇM dir.

(iii) Her $i \in I$ için M_i , R üzerinde bir z-TÇM dir.

Sonuç 2.5.11: Tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi üzerindeki her modül bir z-TÇM dir.

Sonuç 2.5.12: R bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge ve S de çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $0 \notin S$ ve M , R üzerinde bir z-TÇM ise M_S de R_S üzerinde bir z-TÇM dir.

3. DERECELENDİRİLMİŞ MODÜLLERİN ASAL VE ASALIMSİ ALT MODÜLLERİ

Çalışmamızın ikinci bölümünde ise derecelendirilmiş modüller üzerinedir. Bu kısımda da derecelendirilmiş modüllerin derecelendirilmiş asal alt modülleri ile derecelendirilmiş asalımsı alt modüllerini inceledik ve karakterize ettik. Derecelendirilmiş modüller üzerine pek çok yazar çalışmıştır. Bunlardan bazıları, Escoriza, Torrecillas, Nastasescu, Atani, Farzalipour, v.s. dir. Çalışmamızda bize yön veren Escoriza ve Torrecillas'ın Çarpımsal derecelendirilmiş halka ve modülleri karakterize ettikleri makaleler ve S.E.Atani'nin derecelendirilmiş asal alt modüller ile ilgili yaptığı makalelerdir. Bu bölümde vereceğimiz temel tanımlar için Nastasescu (1982) nun "Graded Ring Theory" ve Nastasescu ile Von Oystaeyen (2004) ün "Methods of Graded Rings" adlı kitapları kullanılmıştır.

3.1. Derecelendirilmiş Halkalar

Tanım 3.1.1: G , birimi e olan bir grup ve R bir halka olsun. R nin $g \in G$ ile indekslenmiş R_g toplamsal alt grupları olmak üzere,

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

ve her $g, h \in G$ için,

$$R_g R_h \subseteq R_{gh}$$

oluyorsa R ye bir G -derecelendirilmiş halka (ya da kısaca derecelendirilmiş halka) denir ve $G(R)$ ile gösterilir. R_g nin elemanları g . dereceden homojen eleman olarak adlandırılır ve tüm homojen elemanların kümesi $h(R)$ ile gösterilir, yani

$$h(R) = \bigcup_{g \in G} R_g$$

dir.

Burada not edelim ki, direkt toplamın özelliğinden, her bir $a \in R$, tüm terimleri sıfırdan farklı olacak şekildeki tek türlü yazılan sonlu

$$a = \sum_{g \in G} a_g$$

toplamından oluşur. Buradaki a_g elemanları a nın R_g deki g -bileşeni olarak adlandırılır.

Ayrıca her $g \in G$ için $0_R = 0 \in R_g$ dir.

Örnek 3.1.2: R bir halka olmak üzere $R[x]$ polinom halkası bir $\mathbb{Z}$ -derecelendirilmiş halkadır. Her $i \in \mathbb{Z}$ için,

$$R_i = Rx^i \text{ eger } i > 0$$

$$R_i = R \text{ eger } i = 0$$

$$R_i = 0 \text{ eger } i < 0$$

alt gruplarını alırsak $R[x] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ olarak yazılır ve $i, j \in \mathbb{Z}$ için,

$$R_i R_j = (Rx^i)(Rx^j) = Rx^{i+j} = R_{i+j}$$

olduğundan $R[x]$ halkası bir derecelendirilmiş halka olur.

Tanım 3.1.3: (Atani ve Farzalipour, 2006) R bir derecelendirilmiş halka ve $a, b \in h(R)$ olsun. $ab = 0$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R ye derecelendirilmiş tamlık bölgesi denir.

Örnek 3.1.4: R bir tamlık bölgesi olmak üzere $R[x]$ bir derecelendirilmiş tamlık bölgesidir.

Teorem 3.1.5: R bir derecelendirilmiş halka olsun. $1_R, e$. dereceden homojendir.

İspat : $1_R \in R_e$ olduğunu göstereceğiz. Bir $a \in G$ için $1_R \in R_a$ olduğunu kabul edelim. Her $g \in G$, $x_g \in R$ için $1_R x_g = x_g$ olduğundan $R_a R_g \subseteq R_g$ elde edilir. Dolayısıyla $ag = g$ bulunur ve buradan $a = e$ elde edilir.

Sonuç 3.1.6: R_e, R derecelendirilmiş halkasının bir alt halkasıdır.

İspat : R_e, R derecelendirilmiş halkasının bir alt grubudur. Çarpmaya göre kapalı olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Derecelendirilmiş halka koşullarından $R_e R_e \subseteq R_e$ olduğundan R_e, R nin alt halkası olur.

Tanım 3.1.7: R bir derecelendirilmiş halka ve $I \subseteq R$ bir ideali olsun. Eğer her $g \in G$ için

$$I_g = I \cap R_g$$

olmak üzere,

$$I = \bigoplus_{g \in G} I_g$$

oluyorsa I ya R nin bir derecelendirilmiş ideali denir. Bu durumda I_g , I nin g -bileşeni olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.8: R bir derecelendirilmiş halka ve p bir has ideali olsun. $a, b \in h(R)$ olmak üzere $ab \in p$ olması $a \in p$ veya $b \in p$ olmasını gerektiriyorsa p ye bir derecelendirilmiş asal ideal denir.

Teorem 3.1.9: R bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi p bir derecelendirilmiş ideali olsun. p , R nin derecelendirilmiş asal ideal olması için gerek ve yeter koşul R/p nin derecelendirilmiş tamlık bölgesi olmasıdır.

İspat : p , R nin derecelendirilmiş asal ideali olsun. $\bar{a}, \bar{b} \in h(R/p)$ için $\bar{a}\bar{b} = 0$ olsun. Bu durumda $ab \in p$ elde edilir ve böylece $a \in p$ veya $b \in p$ bulunur. Yani $\bar{a} = 0$ veya $\bar{b} = 0$ olur. Ters olarak R/p derecelendirilmiş tamlık bölgesi ve $a, b \in h(R)$ olmak üzere $ab \in p$ olsun. Buradan $\bar{a}\bar{b} = 0$ ve böylece $\bar{a}\bar{b} = 0$ bulunur. R/p derecelendirilmiş tamlık bölgesi olduğundan $\bar{a} = 0$ veya $\bar{b} = 0$ olur. Yani $a \in p$ veya $b \in p$ dir.

Tanım 3.1.10: (Atani ve Farzalipour, 2006) R bir derecelendirilmiş halka olsun. Eğer her $0 \neq a \in h(R)$ elemanı için $ab = 1_R$ olacak şekilde bir $b \in h(R)$ elemanı var ise R derecelendirilmiş halkasına derecelendirilmiş cisim denir.

Örnek 3.1.11: k bir cisim ise $\mathbb{Z}$ -derecelendirilmiş cisimdir.

Örnek 3.1.12: k bir cisim olmak üzere $R = k \oplus k$ bir $\mathbb{Z}_2$ -derecelendirilmiş cisimdir. Burada $R_0 = k \oplus 0$ ve $R_1 = 0 \oplus k$ olmak üzere

$$R = R_0 \oplus R_1$$

ve

$$h(R) = \{(a_0, 0) \mid a_0 \in R_0\} \cup \{(0, a_1) \mid a_1 \in R_1\}$$

dir. $R_1 R_1 \subseteq R_{1+1} = R_0$ olduğundan $(0, a_1)(0, b_1) = (a_1 b_1, 0)$ elde edilir. Dolayısıyla $R = k \oplus k$ bir $\mathbb{Z}_2$ -derecelendirilmiş cisimdir.

Önerme 3.1.13: R , sıfırdan farklı bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi olsun. R sonlu ise R bir derecelendirilmiş cisimdir.

İspat : R sonlu olduğundan, $h(R)$ de sonludur. Bir $a \in h(R)$ alalım. En az bir $g \in G$ için $a \in R_g$ olduğundan $a^2 \in R_{gg} = R_{g^2} \subseteq h(R)$ dir. Aynı yolla devam edersek her $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in R_{g^n} \subseteq h(R)$ dir. $h(R)$ sonlu olduğundan, bir $k > n$ doğal sayısı için $a^k = a^n$ olmalıdır. Buradan da $a^n(a^{k-n} - 1_R) = 0_R$ bulunur ve böylece R bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi olduğundan $aa^{k-n-1} = 1_R$ elde edilir. Yani $a \in h(R)$ bir birimsel eleman olmuş olur.

Teorem 3.1.14: R , sıfırdan farklı bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi olsun. R bir derecelendirilmiş cisim olması için gerek ve yeter koşul R nin her derecelendirilmiş idealinin asal olmasıdır.

İspat : R bir derecelendirilmiş cisim ve I da derecelendirilmiş ideali olsun. Kabul edelim ki $a, b \in h(R)$ olmak üzere $ab \in I$ olsun. $ab \in h(R)$ olduğundan en az bir $x \in I \cap h(R)$ için $ab = x$ olur. $a \in h(R)$ ve R bir derecelendirilmiş cisim olduğundan $a = xb^{-1} \in I$ elde edilir. Yani I bir derecelendirilmiş asal idealdir. Şimdi de tersini kabul edelim, yani R nin her derecelendirilmiş ideali asal olsun. $0 \neq a \in h(R)$ elemanını alalım. O zaman $a^2 \in h(R)$ olduğundan (a^2) ideali bir derecelendirilmiş asal idealdir. Dolayısıyla $a \in (a^2)$ ve böylece bir $r \in h(R)$ için $a = ra^2$ elde edilir. R bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi olduğundan $ra = 1_R$ bulunur. Sonuç olarak R bir derecelendirilmiş cisim olur.

Teorem 3.1.15: (Atani ve Farzalipour, 2006) R , sıfırdan farklı bir derecelendirilmiş halka ve P de derecelendirilmiş ideali olsun. Aşağıdakiler ifadeler sağlanır:

- (i) R nin her I öz derecelendirilmiş idealini kapsayan en az bir Q derecelendirilmiş maksimal ideali vardır.
- (ii) P , R nin derecelendirilmiş maksimal ideali olması için gerek yeter koşul R/P nin bir derecelendirilmiş cisim olmasıdır.

İspat : (i) I, R nin derecelendirilmiş bir öz ideali olsun. Bu durumda R nin I yı kapsayan en az bir maksimal ideali vardır. Bu maksimal ideal $\mathfrak{M}$ olsun. $I \subseteq \mathfrak{M}$ olduğundan $\mathfrak{M}$ ideali I idealinin bütün homojen elemanlarını kapsar. Burada $\mathfrak{M}^*$ kümesini $\mathfrak{M}$ nin bütün homojen elemanlarının ürettiği ideal olarak tanımlayalım. Bu durumda $\mathfrak{M}^*$ ideali maksimal derecelendirilmiş ideal olur.

(ii) P , R nin derecelendirilmiş maksimal ideali olsun. $a+P \in h\left(\frac{R}{P}\right)$ olarak alalım. Bu durumda $a \in h(R)-P$ elde edilir. P , maksimal olduğundan $P+(a)=R$ bulunur. Buradan da $a+P \in h\left(\frac{R}{P}\right)$ birimsel eleman elde edilir. Tersinin ispatı için de $\frac{R}{P}$ nin derecelendirilmiş cisim olsun. Kabul edelim ki Q , R nin $P \subset Q \subseteq R$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş ideali olsun. Bu durumda en az bir $x \in h(Q)-P$ vardır ve $x+P \in h\left(\frac{R}{P}\right)$ için en az bir $y+P \in h\left(\frac{R}{P}\right)$ vardır öyle ki $xy+P=1+P$ olur. Buradan da $xy-1 \in P \subset Q$ ve böylece $1 \in Q=R$ elde edilir. Yani P , R nin derecelendirilmiş maksimal ideali olmuş olur.

Sonuç 3.1.16: (Atani ve Farzalipour, 2006) R , sıfırdan farklı bir derecelendirilmiş halka olsun. R bir derecelendirilmiş cisim olması için gerek ve yeter koşul R nin tam iki tane derecelendirilmiş ideali olmasıdır.

İspat : Teorem 3.1.15 uygulandığında hemen elde edilir.

Tanım 3.1.17: (Refai ve Al-Zoubi, 2004) R bir derecelendirilmiş halka ve p bir has ideali olsun. $a, b \in h(R)$ olmak üzere $ab \in p$ olması $a \in p$ veya bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $b^k \in p$ olmasını gerektiriyorsa p ye bir derecelendirilmiş asalımsı ideal denir.

Tanım 3.1.18: (Refai ve Al-Zoubi, 2004) R bir derecelendirilmiş halka ve I bir derecelendirilmiş ideali olsun.

$$\sqrt{I} = \left\{ x \in R \mid \text{her } g \in G \text{ için bir } n_g \in \mathbb{Z}^+ \text{ vardır öyle ki } x_g^{n_g} \in I \right\}$$

derecelendirilmiş idealine I nin derecelendirilmiş radikalı denir.

Teorem 3.1.19: (Refai ve Al-Zoubi, 2004) R bir derecelendirilmiş halka ve I bir derecelendirilmiş asalımsı ideali olsun. O zaman $\sqrt{I}$ bir derecelendirilmiş asal idealdir.

İspat : $a, b \in h(R)$ için $ab \in \sqrt{I}$ ve $b \notin \sqrt{I}$ olsun. En az bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(ab)^n = a^n b^n \in I$ dir. $b \notin \sqrt{I}$ olduğundan $b^n \notin \sqrt{I}$ olur. Böylece $a^n \in I$ elde edilir. Yani $a \in \sqrt{I}$ bulunmuş olur. Böylece $\sqrt{I}$ derecelendirilmiş asal ideal olmuş olur.

3.2. Derecelendirilmiş Modüller

Tanım 3.2.1: R bir derecelendirilmiş halka ve M bir R -modül olsun. M nin alt gruplarının bir ailesi $\{M_g\}_{g \in G}$ olmak üzere her $g, h \in G$ için,

$$M = \bigoplus_{g \in G} M_g$$

ve

$$R_g M_h \subseteq M_{gh}$$

oluyorsa M ye G -derecelendirilmiş R -modül (veya derecelendirilmiş R -modül) denir. Burada $R_g M_h$ kümesi, $r_g \in R_g$ ve $m_h \in M_h$ olmak üzere $r_g m_h$ elemanlarının sonlu toplamlarından oluşan M nin toplamsal alt grubudur. M nin tüm homojen elemanlarının kümesi $h(M)$ ile gösterilir ve

$$h(M) = \bigcup_{g \in G} M_g$$

dir.

Örnek 3.2.2: R bir derecelendirilmiş halka ve M bir R -modül olsun. $M[x]$ bir derecelendirilmiş $R[x]$ -modüldür. Çünkü,

$$R[x] = \bigoplus_{i \geq 0} Rx^i = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$$

ve

$$M[x] = \bigoplus_{i \geq 0} Mx^i = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$$

şeklinde yazılırsa

$$R_i M_j = (Rx^i)(Mx^j) = (RM)x^{i+j} = M_{i+j}$$

olduğu görülür.

Önerme 3.2.3: (Escoriza ve Torrecillas, 1998) $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül ise her $g \in G$ için M nin M_g alt grubu bir R_e -modüldür.

İspat : Her $g \in G$ için M_g , M nin alt grubu ve $R_e M_g \subseteq M_{eg} = M_g$ olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.2.4: $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül ve N , M nin bir alt modülü olsun. Her $g \in G$ için,

$$N_g = N \cap M_g$$

olmak üzere,

$$N = \bigoplus_{g \in G} N_g$$

oluyorsa N ye M nin bir derecelendirilmiş alt modülü denir. Ayrıca N_g , N nin g -bileşeni olarak adlandırılır.

Önerme 3.2.5: (Nastasescu, 1982) R bir derecelendirilmiş halka, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül ve N , M nin bir derecelendirilmiş alt modülü olsun. Her $g \in G$ için,

$$\left(\frac{M}{N} \right)_g = \left(\frac{M_g + N}{N} \right)$$

olarak alınırsa $\frac{M}{N}$ bölüm modülü bir G -derecelendirilmiş R -modül olmuş olur.

İspat : Burada

$$\bigoplus_{g \in G} \left(\frac{M}{N} \right)_g = \bigoplus_{g \in G} \left(\frac{M_g + N}{N} \right) = \left(\frac{\bigoplus_{g \in G} M_g + N}{N} \right) = \frac{\bigoplus_{g \in G} M_g}{N} = \frac{M}{N}$$

ve

$$R_g \left(\frac{M}{N} \right)_h = R_g \left(\frac{M_h + N}{N} \right) = \left(\frac{R_g M_h + R_g N + N}{N} \right) \subseteq \frac{M_{gh} + N}{N} = \left(\frac{M}{N} \right)_{gh}$$

olduğundan $\frac{M}{N}$ bölüm modülü bir G -derecelendirilmiş R -modül olmuş olur.

Tanım 3.2.6: (Nastasescu, 1982) M ve M' derecelendirilmiş R -modüller olsun.

$$f : M \rightarrow M'$$

fonksiyonu bir R -modül homomorfizması ve $\sigma \in G$ olmak üzere her $\tau \in G$ için,

$$f(M_\tau) \subseteq M'_{\tau\sigma}$$

koşulunu sağlıyorsa f ye σ . dereceden derecelendirilmiş homomorfizma denir.

Teorem 3.2.7: (Escoriza ve Torrecillas, 1998) $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül ve N , M nin bir derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu durumda $(N :_R M)$ ideali de derecelendirilmiş idealdir.

İspat: Her $g \in G$ için,

$$(N :_R M)_g = (N :_R M) \cap R_g \subseteq (N :_R M)$$

dir. Buradan $\bigoplus_{g \in G} (N :_R M)_g \subseteq (N :_R M)$ elde edilir. Ters kapsama için $a = \sum_{g \in G} a_g \in (N :_R M)$ alalım. Her $g \in G$ için $a_g M \subseteq N$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Genelliği bozmadan $i = 1, 2, \dots, t$ için $a_{g_i} \neq 0$ ve $g \notin \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ için $a_g = 0$ olmak üzere $a = \sum_{i=1}^t a_{g_i}$ alabiliriz. $a \in (N :_R M)$ olduğundan $\sum_{i=1}^t a_{g_i} M \subseteq N$ elde edilir. Aynı şekilde her $m \in M$ alındığında, $j = 1, 2, \dots, n$ için $m_{h_j} \neq 0$ olacak şekilde $m = \sum_{j=1}^n m_{h_j}$ yazılabilir. Bu durumda her j için $a m_{h_j} \in N$ bulunur. Buradan da $\sum_{i=1}^t a_{g_i} m_{h_j} = a m_{h_j}$ elde edilir. N bir derecelendirilmiş alt modül olduğundan $a_{g_i} m_{h_j} \in N$ bulunur. Ve böylece istenen $a_{g_i} M \subseteq N$ ifadesi elde edilmiş olur.

Tanım 3.2.8: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş halka, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül olsun.

- (i) $am = 0$ koşulunu sağlayan $a \in R_e$, $m \in M_g$ için $m = 0$ veya $a = 0$ oluyorsa M_g ye bir g -burulmalı R_e -modül denir.
- (ii) $am = 0$ koşulunu sağlayan $a \in h(R)$, $m \in M$ için $m = 0$ veya $a = 0$ oluyorsa M ye bir derecelendirilmiş burulmalı R -modül denir.

Teorem 3.2.9: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş halka, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül olsun. M bir derecelendirilmiş burulmalı R -modül ise M_g bir g -burulmalı R_e -modüldür.

İspat : M bir burulmalı R -modül ve $a \in R_e$, $m \in M_g$ için $am = 0$ olsun. $a \in h(R)$, $m \in M$ ve M derecelendirilmiş burulmalı R -modül olduğundan $m = 0$ veya $a = 0$ olur.

Önerme 3.2.10: R bir derecelendirilmiş halka, M derecelendirilmiş bir R -modül olsun. R derecelendirilmiş cisim ise M derecelendirilmiş burulmalı modüldür.

İspat : R derecelendirilmiş cisim ve $a \in h(R)$, $m \in M$ için $am = 0$ olsun. $ab = 1_R$ olacak şekilde bir $b \in h(R)$ vardır. Buradan da $m = (ba)m = b(am) = b \cdot 0 = 0$ elde edilir. Böylece M derecelendirilmiş burulmalı modül olur.

3.3. Derecelendirilmiş Modüllerin Asal Alt Modülleri

Tanım 3.3.1: (Atani ve Farzalipour, 2007) R bir derecelendirilmiş halka, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül ve N , M nin bir derecelendirilmiş alt modülü olsun.

(i) $N_g \neq M_g$ olmak üzere $am \in N_g$ koşulunu sağlayan her $a \in R_e$, $m \in M_g$ için,

$$m \in N_g \text{ veya } a \in (N_g :_{R_e} M_g)$$

oluyorsa N_g ye g -asal alt modül denir.

(ii) $N \neq M$ olmak üzere $am \in N$ koşulunu sağlayan her $a \in h(R)$, $m \in h(M)$ için,

$$m \in N \text{ veya } a \in (N :_R M)$$

oluyorsa N ye derecelendirilmiş asal alt modül denir.

Teorem 3.3.2: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş halka, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül ve N , M nin bir derecelendirilmiş alt modülü olsun. N , M nin dereceli asal alt modülü ise N_g de M_g nin g -asal alt modülüdür.

İspat : N , M nin derecelendirilmiş asal alt modülü ve $g \in G$ olsun. $a \in R_e$, $m \in M_g$ için $am \in N_g$ olsun. $N_g \subseteq N$ olduğu için $m \in N$ veya $a \in (N :_R M)$ bulunur. Eğer $m \in N$ ise $m \in N_g$ olur. Eğer $a \in (N :_R M)$ ise $aM_g \subseteq aM \subseteq N$ olur. Buradan da $a \in R_e$ olduğundan $a \in (N_g :_{R_e} M_g)$ elde edilir. Sonuç olarak N_g , M_g nin g -asal alt modülü olarak bulunmuş olur.

Tanım 3.3.3: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş halka, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül olsun.

$$T(M) = \{m \in M \mid 0 \neq r \in h(R) \text{ için } rm = 0\}$$

olarak tanımlansın.

Teorem 3.3.4: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül ise $T(M)$ bir derecelendirilmiş alt modüldür.

İspat : İspatı yaparken önce $T(M)$ nin R nin bir alt modülü olduğunu gösterelim, sonra da derecelendirilmiş olduğunu gösterelim. Bunun için de $m_1, m_2 \in T(M)$ ve $r \in R$ alalım. Bu durumda sıfırdan farklı öyle $r_1, r_2 \in h(R)$ vardır ki $r_1 m_1 = 0$ ve $r_2 m_2 = 0$ dır. Buradan da $r_1 r_2 (m_1 - m_2) = r_2 (r_1 m_1) - r_1 (r_2 m_2) = 0 - 0 = 0$ elde edilir. R bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi olduğundan $r_1 r_2 \neq 0$ ve böylece $m_1 - m_2 \in T(M)$ bulunmuş olur. Aynı şekilde $r_1 (r m_1) = r (r_1 m_1) = 0$ olduğundan da $r m_1 \in T(M)$ elde edilmiş olur. Yani $T(M)$ bir alt modüldür. Şimdi de derecelendirilmiş alt modül olduğunu gösterelim. Göstermemiz gereken ifade $T(M) = \bigoplus_{g \in G} (T(M) \cap M_g)$ dir. $T(M) \supseteq \bigoplus_{g \in G} (T(M) \cap M_g)$ olduğu açıktır, şimdi de ters kapsamayı gösterelim. $m \in T(M)$ olarak alalım. M derecelendirilmiş modül ve $m \in M$ olduğundan m tek türlü olarak $m = \sum_{g \in G} m_g$ yazılır. Bu durumda her $g \in G$ için $m_g \in T(M)$ olduğu gösterilirse istenen sonuç elde edilmiş olur. Genelliği bozmadan $i = 1, 2, \dots, t$ için $m_{g_i} \neq 0$ ve $g \notin \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ için $m_g = 0$ olmak üzere $m = \sum_{i=1}^t m_{g_i}$ alabiliriz. $m \in T(M)$ olduğundan en az bir sıfırdan farklı $r \in h(R)$ için $rm = 0$ dır ve böylece $rm_{g_1} = rm_{g_2} = \dots = rm_{g_t} = 0$ bulunmuş olur. Sonuç olarak istendiği şekilde $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ için $m_{g_i} \in T(M)$ elde edilmiş olur.

Teorem 3.3.5: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ bir derecelendirilmiş R -modül olsun. $T(M) \neq M$ ise $T(M)$, M nin bir derecelendirilmiş asal alt modülüdür.

İspat : Kabul edelim ki $a \in h(R)$ ve $m \in h(M)$ için $am \in T(M)$ ve $a \notin (T(M) :_R M)$ olsun. $a \notin (T(M) :_R M)$ olduğundan $a \neq 0$ dır. Ayrıca bazı $g, h \in G$ için $a \in R_g$ ve $m \in M_h$ dır. $am \in T(M)$ olduğundan sıfırdan farklı bir $b \in h(R)$, $b \in R_l$ olsun, için $abm = 0$ olur. Eğer $am = 0$ ise $m \in T(M)$ olur ki bu aradığımız durumdur. Aksini kabul edelim, yani $am \neq 0$ olsun. Bu durumda da R bir derecelendirilmiş tamlık bölgesi olduğundan $0 \neq ab \in R_{gt} \subseteq h(R)$ için $abm = 0$ olmuş olur ki bu da $m \in T(M)$ demek olur. Yani iki durumda istenen elde edilmiş olur. Böylece $T(M)$ bir derecelendirilmiş asal alt modül olarak bulunmuş olur.

Yardımcı Teorem 3.3.6: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş R -modül ve N, M nin bir derecelendirilmiş R -alt modülü ve $g \in G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) N_g, M_g nin bir asal alt modülüdür
- (ii) I, R_e nin bir ideali ve B, M_g nin bir alt modülü olsun. $IB \subseteq N_g$ olduğunda $I \subseteq (N_g :_{R_e} M_g)$ veya $B \subseteq N_g$ olur.

İspat : (i) $\Rightarrow$ (ii) Kabul edelim ki N_g, M_g nin bir asal alt modülü olsun. I, R_e nin bir ideali ve B, M_g nin bir alt modülü olmak üzere $IB \subseteq N_g$ ve $x \in B \setminus N_g$ olsun. $a \in I$ alalım, bu durumda $ax \in N_g$ olur. N_g asal olduğundan $a \in (N_g :_{R_e} M_g)$ elde edilir. Sonuç olarak $I \subseteq (N_g :_{R_e} M_g)$ bulunmuş olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Koşulun gerçekleştiğini kabul edelim. $c \in R_e$ ve $y \in M_g$ için $cy \in N_g$ olduğunu kabul edelim. $I = Rc$ ve $B = Ry$ olarak aldığımızda $IB \subseteq N_g$ olur. Kabulümüzden $I \subseteq (N_g :_{R_e} M_g)$ veya $B \subseteq N_g$ bulunur. Yani $c \in (N_g :_{R_e} M_g)$ veya $y \in N_g$ bulunmuş olur. Sonuç olarak N_g asal alt modül olmuş olur.

Önerme 3.3.7: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş R -modül ve N, M nin bir derecelendirilmiş asal alt modülü ve $g \in G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) $(N_g :_{R_e} M_g), R_e$ nin bir asal idealidir.

(ii) $(N :_R M)$, R nin derecelendirilmiş asal idealidir.

İspat : (i) Teorem 3.3.2 den N_g, M_g nin asal alt modülüdür ve böylece $(N_g :_{R_e} M_g) \neq R_e$ dir. $a, b \in R_e$ için $ab \in (N_g :_{R_e} M_g)$ olsun. O zaman $abM_g \subseteq N_g$ olur. Kabul edelim ki $b \notin (N_g :_{R_e} M_g)$ olsun. Bu durumda en az bir $n \in M_g$ için $bn \notin N_g$ olur. Fakat $abn \in N_g$ dir. N_g asal alt modül olduğundan $a \in (N_g :_{R_e} M_g)$ elde edilir.

(ii) N, M nin bir derecelendirilmiş asal alt modülü olduğundan $(N :_R M) \neq R$ dir. $c, d \in h(R)$ için $cd \in (N :_R M)$ olsun. O zaman $cdM \subseteq N$ olur. Eğer $dM \subseteq N$ ise istenen sonuç $d \in (N :_R M)$ elde edilir. Tersini kabul edelim, yani en az bir $m \in M$ için $dm \notin N$ olsun. M derecelendirilmiş modül olduğundan en az bir $h \in G$ için $dm_h \notin N$ olur. N derecelendirilmiş alt modül ve $cdm \in N$ olduğundan $cdm_h \in N$ elde edilir. N derecelendirilmiş asal alt modül olduğundan da $c \in (N :_R M)$ bulunmuş olur.

Not : Yukarıdaki önermede $(N :_R M)$ derecelendirilmiş ideali R nin derecelendirilmiş asal ideali iken N derecelendirilmiş alt modülü M nin derecelendirilmiş asal R -alt modülü olmayabilir.

Örnek 3.3.8: $R = \mathbb{Z} = R_0$ bir $\mathbb{Z}$ -derecelendirilmiş halka ve $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$ -derecelendirilmiş R -modül olsun. $N = 4\mathbb{Z} \times \{0\}$ derecelendirilmiş alt modülünü ele alalım. Bu durumda $(N :_R M) = \{r \in \mathbb{Z} \mid r(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \subseteq N\} = 0$ ideali R de derecelendirilmiş asal idealdir ancak $2(2, 0) \in N$ iken $2 \notin (N :_R M)$ ve $(2, 0) \notin N$ olduğundan, N derecelendirilmiş alt modülü M de derecelendirilmiş asal alt modül değildir.

Yardımcı Teorem 3.3.9: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş halka, M bir derecelendirilmiş R -modül ve N ile K , M nin $K \subseteq N$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş alt modülleri olsun. Bu durumda N, M nin bir derecelendirilmiş asal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul N/K alt modülü, derecelendirilmiş R -modül M/K nin bir derecelendirilmiş asal alt modülü olmasıdır.

İspat : N, M nin bir derecelendirilmiş asal alt modülü olsun. O zaman $N/K \neq M/K$ dir. $a \in h(R)$ ve $m+K \in h(M/K)$ için $a(m+K) \in N/K$ olsun. $m+K \in h(M/K)$ olduğundan $m \in h(M)$ dir ve böylece $am \in N$ olduğundan $a \in (N :_R M)$ veya $m \in N$ dir. Buradan da $a \in (N/K :_R M/K)$ veya $m+K \in N/K$ elde edilir. Tersine olarak $N/K, M/K$ nin bir derecelendirilmiş asal alt modülü ve $a \in h(R), m \in h(M)$ için $am \in N$ olsun. Bu durumda $a(m+K) = (am+K) \in N/K$ elde edilir ve N/K asal olduğundan $a \in (N/K :_R M/K)$ veya $m+K \in N/K$ bulunur. Buradan da $a \in (N :_R M)$ veya $m \in N$ bulunur.

Teorem 3.3.10: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş R -modül ve N ve K, M nin $K+N \neq M$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş asal alt modülleri olsun. O zaman $K+N$ de M nin derecelendirilmiş asal alt modülüdür.

İspat : N ve K, M nin $K+N \neq M$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş asal alt modülleri olsun. $K \cap N \subseteq N$ ve $N \subseteq K+N$ dir. Bir önceki yardımcı teoremden $N/(K \cap N)$ de derecelendirilmiş asal alt modüldür. İzomorfizma teoreminden $(K+N)/N \cong N/(K \cap N)$ elde edilir ve böylece $(K+N)/N$ de bir derecelendirilmiş asal alt modül olur. Yine bir önceki yardımcı teoremden derecelendirilmiş alt modül $K+N$ asal olarak bulunmuş olur.

Teorem 3.3.11: (Atani, 2006) R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş R -modül ve N, M nin bir derecelendirilmiş alt modülü ve $g \in G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) N_g, M_g nin bir asal alt modülüdür ancak ve ancak $(N_g :_{R_g} M_g) = P_g, R_g$ nin bir asal idealidir ve M_g/N_g bir derecelendirilmiş g -burulmalı R_g/P_g -modüldür.

(ii) N, M nin bir derecelendirilmiş asal alt modülüdür ancak ve ancak $(N :_R M) = P, R$ nin bir derecelendirilmiş asal idealidir ve M/N bir derecelendirilmiş g -burulmalı R/P -modüldür.

İspat : (i) Kabul edelim ki N_g, M_g nin bir asal alt modülü olsun. Bu durumda Önerme 3.3.7 den $(N_g :_{R_e} M_g) = P_g$, R_e nin bir asal idealidir ve M_g / N_g bir derecelendirilmiş R_e / P_g - modüldür. $a \in R_e$ ve $m \in M_g$ olmak üzere $(a + P_g)(m + N_g) = 0 + N_g$ olsun. Bu durumda $am \in N_g$ olur ve böylece $a \in (N_g :_{R_e} M_g) = P_g$ veya $m \in N_g$ bulunur. Yani $a + P_g = 0 + P_g$ veya $m + N_g = 0 + N_g$ bulunmuş olur ve böylece M_g / N_g bir derecelendirilmiş g -burulmalı R/P -modül olarak bulunmuş olur. Tersine, $(N_g :_{R_e} M_g) = P_g$, R_e nin bir asal idealidir ve M_g / N_g bir derecelendirilmiş g -burulmalı R_e / P_g -modülü olsun. $(N_g :_{R_e} M_g) = P_g \neq R_e$ olduğundan $N_g \neq M_g$ dir. $b \in R_e$ ve $t \in M_g$ iken $bt \in N_g$ olsun. O zaman $(b + P_g)(t + N_g) = bt + N_g = N_g$ bulunur ve M_g / N_g bir derecelendirilmiş g -burulmalı R/P -modül olduğundan $b \in P_g$ veya $t \in N_g$ elde edilir.

(ii) N, M nin bir derecelendirilmiş asal alt modülü olsun. O zaman Önerme 3.3.7 den $(N :_R M) = P$ bir derecelendirilmiş asal ideal olarak elde edilir ve M/N bir derecelendirilmiş R/P -modüldür. $r + P \in h(R/P)$ ve $n + N \in h(M/N)$ için $(r + P)(n + N) = 0 + N$ olsun. O zaman $rn \in N$ elde edilir ve N, M nin bir derecelendirilmiş asal alt modülü olduğundan $r \in P$ veya $n \in N$ bulunmuş olur. Buradan da $r + P = 0 + P$ veya $n + N = 0 + N$ bulunmuş olur. Tersine, $(N :_R M) = P$, R nin bir derecelendirilmiş asal idealidir ve M/N bir derecelendirilmiş g -burulmalı R/P -modülü olsun. $N \neq M$ olduğu açıktır. $a \in h(R)$ ve $m \in M/K$ için $am \in N$ olsun. Bu durumda $(a + P)(m + N) = 0 + N$ olur. Kabulümüzden $a \in P$ veya $m \in N$ elde edilir ve böylece N bir derecelendirilmiş asal alt modül olur.

Teorem 3.3.12: (Atani ve Farzalipour, 2006) R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş R -modül ve N, M nin bir derecelendirilmiş alt modülü olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

(i) Eğer $(N :_R M) = P$, R nin derecelendirilmiş maksimal ideali ise N, M nin derecelendirilmiş asal alt modülüdür.

(ii) Eğer Q , R nin $QM \neq M$ koşulunu sağlayan derecelendirilmiş maksimal ideali ise QM derecelendirilmiş asal alt modüldür.

İspat : (i) $(N :_R M) = P$, R nin derecelendirilmiş maksimal ideal olduğundan R/P derecelendirilmiş cisim olur ve buradan da M/N bir derecelendirilmiş burulmalı R/P -modül olur. Bir önceki teoremden de N derecelendirilmiş asal alt modül elde edilir.

(ii) $QM \neq M$ olduğundan $Q \subseteq (QM :_R M)$ dir ve böylece $Q = (QM :_R M)$ bulunur. (i) şikkından da istenen elde edilir.

Tanım 3.3.13: (Atani ve Farzalipour, 2006) Bir M derecelendirilmiş modülün sadece iki tane $(0$ ve $M)$ derecelendirilmiş alt modülü var ise M ye derecelendirilmiş basit modül denir.

Tanım 3.3.14: (Atani ve Farzalipour, 2006) R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. Bir $r \in h(R)$ ye M üzerinde derecelendirilmiş sıfır bölen denir eğer $rm = 0$ koşulunu sağlayacak bir $0 \neq m \in M$ var ise.

Önerme 3.3.15: (Atani ve Farzalipour, 2006) R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş basit R -modül olsun. M üzerinde derecelendirilmiş sıfır bölenlerin hepsi aynı zamanda M nin bir sıfırlayıcısıdır.

İspat : $r \in h(R)$, M üzerinde derecelendirilmiş sıfır bölen olsun. Bu durumda en az bir $0 \neq m \in h(M)$ için $rm = 0$ dır. M derecelendirilmiş basit modül olduğundan $Rm = M$ dir. Buradan da

$$rM = r(Rm) = (Rr)m = R(rm) = 0$$

elde edilir ve böylece $r \in h(R)$, M nin bir sıfırlayıcısıdır.

Teorem 3.3.16: (Atani ve Farzalipour, 2006) R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. Bu durumda M nin her derecelendirilmiş maksimal alt modülü bir derecelendirilmiş asal alt modüldür.

İspat : N , M nin her derecelendirilmiş maksimal alt modülü olsun. Kabul edelim $r \in h(R)$ ve $m \in h(M) \setminus N$ için $rm \in N$ olsun. $0 \neq (m + N) \in h(M/N)$ ve $r(m + N) = 0$ olduğundan

$r, M/N$ derecelendirilmiş modülü üzerinde bir derecelendirilmiş sıfır bölendir. Bir önceki önermeden de $r \in (N :_R M)$ elde edilir. Yani N bir derecelendirilmiş asal alt modüldür.

3.4. Derecelendirilmiş Asal Alt Modüller

Tanım 3.4.1: R bir G -derecelendirilmiş halka, M bir derecelendirilmiş R -modül ve N de M nin derecelendirilmiş bir R -alt modülü olsun. $N \neq M$ olmak üzere $am \in N$ koşulunu sağlayan her $a \in h(R)$, $m \in h(M)$ için $m \in N$ veya $a \in (N :_R M)$ oluyorsa N ye derecelendirilmiş asal alt modül denir.

Bir sonraki örneğimizde N derecelendirilmiş alt modülü asal olmadığı halde $(N :_R M)$ derecelendirilmiş ideali asal olan bir derecelendirilmiş alt modüle örnek vereceğiz.

Örnek 3.4.2: $R = \mathbb{Z} = R_0$ bir $\mathbb{Z}$ - derecelendirilmiş halka ve $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$ -derecelendirilmiş R -modül olsun. Burada $M_0 = (\mathbb{Z} \times \{0\})$ ve $M_1 = (\{0\} \times \mathbb{Z})$ olarak alınmıştır. Bu durumda $N = 4\mathbb{Z} \times \{0\}$ bir derecelendirilmiş alt modüldür. $(N :_R M) = 0$ ideali Yardımcı Teorem 3.2.7 den derecelendirilmiş bir idealdir ve bu ideal derecelendirilmiş bir asal idealdir. Fakat $2 \in h(R)$ ve $(2, 0) \in h(M)$ için $2(2, 0) \in N$ olduğu halde $(2, 0) \notin N$ ve $2 \notin (N :_R M)$ dir.

Teorem 3.4.3: R bir G - derecelendirilmiş halka, M bir derecelendirilmiş R -modül ve N de M nin derecelendirilmiş bir R -alt modülü olsun. Bu durumda N bir derecelendirilmiş asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $IV \subseteq N$ koşulunu sağlayan her derecelendirilmiş ideal I ve derecelendirilmiş alt modül V için $V \subseteq N$ veya $I \subseteq (N :_R M)$ olmasıdır.

İspat : Kabul edelim ki N bir derecelendirilmiş asal alt modül, I bir derecelendirilmiş ideal ve V bir derecelendirilmiş alt modül olmak üzere $IV \subseteq N$ olsun. $I \not\subseteq (N :_R M)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda en az bir $g \in G$ için $a_g \in I_g \setminus (N :_R M)$ vardır öyle ki her $v_h \in V_h$ ve $h \in G$ için $a_g v_h \in N$ dir. N derecelendirilmiş asal alt modül olduğundan $v_h \in N$ elde edilir. Yani $V \subseteq N$ bulunur.

Ters tarafın ispatı için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim. $a \in h(R)$, $m \in h(M)$ için $am \in N$ olsun. Bu durumda $(a)(m) \subseteq N$ elde edilir. $a \in h(R)$ ve $m \in h(M)$ olduğundan

Teorem 3.2.7 den (a) ideali bir derecelendirilmiş ideal ve (m) alt modülü de bir derecelendirilmiş alt modüldür. Kabulümüzden $(m) \subseteq N$ veya $(a) \subseteq (N :_R M)$ bulunur. Buradan da $m \in N$ veya $a \in (N :_R M)$ elde edilmiş olur.

Önerme 3.4.4: R bir G - derecelendirilmiş halka, M bir derecelendirilmiş R -modül ve N de M nin derecelendirilmiş bir R -alt modülü olsun. Bu durumda N derecelendirilmiş asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $N \subset K \subseteq M$ koşulunu sağlayan her derecelendirilmiş alt modül K için $(N :_R K) = (N :_R M)$ olur.

İspat : Kabul edelim ki N bir derecelendirilmiş asal alt modül ve K da $N \subset K \subseteq M$ koşulunu sağlayan M nin bir derecelendirilmiş alt modülü olsun. Burada $rK \subseteq rM \subseteq N$ olduğundan $(N :_R M) \subseteq (N :_R K)$ elde edilir. Şimdi de ters kapsamayı gösterelim. $g \in G$ için $r_g \in (N :_R K)_g$ olarak alalım. Bu durumda en az bir $n \in h(M)$ vardır öyle ki $n \in K \setminus N$ iken $r_g n \in N$ dir. N derecelendirilmiş asal alt modül olduğundan $r_g \in (N :_R M)$ elde edilir. Böylece $(N :_R K) = (N :_R M)$ bulunmuş olur.

Ters tarafın ispatı için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani N bir derecelendirilmiş alt modül olmak üzere $N \subset K \subseteq M$ koşulunu sağlayan her derecelendirilmiş alt modül K için $(N :_R K) = (N :_R M)$ olsun. Kabul edelim ki $r \in h(R)$ ve $n \in h(M) \setminus N$ için $rn \in N$ olsun. Bu durumda $K = N + (n)$ alırsak, $N \subset K \subseteq M$ kapsaması sağlanmış olur. Kabulümüzden dolayı $(N :_R K) = (N :_R M)$ elde edilir ve böylece $r \in (N :_R M)$ bulunur.

Tanım 3.4.5: (Escoriza ve Torrecillas, 1998) Derecelendirilmiş R -modül M nin herhangi bir derecelendirilmiş alt modülü N için $N = IM$ olacak şekilde R nin bir derecelendirilmiş ideali I bulunabiliyor ise M ye çarpımsal derecelendirilmiş modül denir.

Teorem 3.4.6: Çarpımsal derecelendirilmiş modülün her homomorfik görüntüsü de çarpımsal derecelendirilmiş modül olur.

İspat : M çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ve $f : M \rightarrow M'$ bir derecelendirilmiş homomorfizma olsun. $K = f(M)$ olmak üzere N , K derecelendirilmiş modülünün bir derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu durumda $f^{-1}(N) = IM$ olacak şekilde R nin derecelendirilmiş ideali I vardır. Böylece $N = f(IM) = If(M) = IK$ elde edilmiş olur.

Sonuç 3.4.7: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ve N de M nin derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu durumda M/N de çarpımsal derecelendirilmiş modül olur.

Teorem 3.4.8: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül olsun. N , M nin derecelendirilmiş asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $(N :_R M)$ ideali, R nin bir derecelendirilmiş asal ideali olmasıdır.

İspat : N , M nin derecelendirilmiş asal alt modülü olsun. İspatın bu kısmı Önerme 3.3.7 de ispat edilmiştir.

N , M nin derecelendirilmiş alt modülü için $(N :_R M)$ ideali R nin bir derecelendirilmiş asal ideali olsun. Kabul edelim ki I derecelendirilmiş ideali ve V derecelendirilmiş alt modülü için $IV \subseteq N$ olsun. M çarpımsal derecelendirilmiş modül olduğundan en az bir derecelendirilmiş ideali J vardır öyle ki $V = JM$ dir. Böylece $N \supseteq IV = IJM$ bulunur. Bu da $IJ \subseteq (N :_R M)$ demektir. $(N :_R M)$ derecelendirilmiş asal ideal olduğundan $I \subseteq (N :_R M)$ veya $J \subseteq (N :_R M)$ dir. Yani ya $I \subseteq (N :_R M)$ veya $V = JM \subseteq N$ bulunmuş olur. Sonuç olarak Teorem 3.4.3 den N yi derecelendirilmiş asal alt modül elde etmiş oluruz.

Tanım 3.4.9: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül, $N = IM$ ve $K = JM$ de I ve J derecelendirilmiş idealler olmak üzere M nin derecelendirilmiş alt modülleri olsunlar. Bu iki derecelendirilmiş alt modülün çarpımını NK ile göstereceğiz ve $(IJ)M$ olarak tanımlayacağız.

Aynı şekilde derecelendirilmiş modülün iki homojen elemanının çarpımını da ürettikleri derecelendirilmiş alt modüllerin çarpımı olarak tanımlayacağız. Yani, m ve m' iki homojen eleman iken (m) ve (m') iki derecelendirilmiş alt modül olur ve $(m) = IM$, $(m') = JM$ olacak şekilde R derecelendirilmiş halkasının I ve J derecelendirilmiş idealleri vardır. Böylece $mm' = (IJ)M$ olarak elde edilir.

Teorem 3.4.10: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül, $N = IM$ ve $K = JM$ de I ve J derecelendirilmiş idealler olmak üzere M nin derecelendirilmiş alt modülleri olsunlar. Bu durumda derecelendirilmiş alt modüllerin çarpımları derecelendirilmiş ideallerinden bağımsızdır.

İspat : M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modülü için N ve K iki farklı derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu iki derecelendirilmiş alt modülü için $N = I_1M = I_2M$

ve $K = J_1M = J_2M$ olacak şekilde iki farklı gösterimi olsun, burada I_1, I_2, J_1 ve J_2 idealleri R nin derecelendirilmiş idealleridir. Bu durumda $NK = (I_1M)(J_1M) = (I_1J_1)M = I_1(J_1M) = I_1(J_2M) = J_2(I_1M) = J_2(I_2M) = (I_2J_2)M$ elde edilir.

Tanım 3.4.11: R bir G -derecelendirilmiş halka ve M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül olsun. Sıfırdan farklı bir homojen a elemanı için $ab = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in h(M)$ elemanı var ise $a \in h(M)$ ye derecelendirilmiş sıfır bölen denir.

Yani, $a \in h(M)$ bir derecelendirilmiş sıfır bölen ise bir $0 \neq b \in h(M)$ elemanı için, $(a) = IM$ ve $(b) = JM$ olmak üzere $0 = ab = (IJ)M$ elde edilir. Sonuç olarak $IJ \subseteq Ann(M)$ bulunmuş olur.

Teorem 3.4.12: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ve N , M nin derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu durumda N derecelendirilmiş asal alt modül olması için gerek yeter koşul M nin $AB \subseteq N$ koşulunu sağlayan A, B derecelendirilmiş alt modülleri için $A \subseteq N$ veya $B \subseteq N$ olmasıdır.

İspat : N , M nin derecelendirilmiş asal alt modülü ve A, B derecelendirilmiş alt modülleri için $AB \subseteq N$ koşulu sağlanıyor olsun. Bu durumda R nin $A = IM$ ve $B = JM$ olacak şekilde I ve J derecelendirilmiş idealleri vardır. Buradan $AB = (IM)(JM) = (IJ)M \subseteq N$ ve böylece $IJ \subseteq (N :_R M)$ elde edilir. Önerme 3.3.7 den $(N :_R M)$ derecelendirilmiş ideali asaldır. Buradan da $I \subseteq (N :_R M)$ veya $J \subseteq (N :_R M)$ ve böylece $A = IM \subseteq N$ veya $B = JM \subseteq N$ bulunur. Tersini göstermek için $r \in h(R)$ ve $m \in h(M)$ için $rm \in N$ olsun. Bu durumda derecelendirilmiş $I = (r)$ ideali ve derecelendirilmiş $K = (m)$ alt modülü için $IK \subseteq N$ elde edilir. M çarpımsal olduğundan R nin bir derecelendirilmiş J ideali için $K = JM$ dir. Buradan da $IK = I(JM) = (IJ)M = (IM)(JM) \subseteq N$ elde edilir. Kabulümüzden de $IM \subseteq N$ veya $JM \subseteq N$ ve böylece $r \in I \subseteq (N :_R M)$ veya $m \in K \subseteq N$ bulunmuş olur.

Sonuç 3.4.13: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ve N , M nin derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu durumda N derecelendirilmiş asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $ab \subseteq N$ koşulunu sağlayan $a, b \in h(M)$ için $a \in N$ veya $b \in N$ olmasıdır.

İspat : N derecelendirilmiş asal alt modül ve $a, b \in h(M)$ için $ab \subseteq N$ olsun. Bu durumda $(a)(b) \subseteq N$ olduğundan Teorem 3.4.12 den $(a) \subseteq N$ veya $(b) \subseteq N$ elde edilir. Buradan da $a \in N$ veya $b \in N$ elde edilir. Tersine olarak $ab \subseteq N$ koşulunu sağlayan $a, b \in h(M)$ için $a \in N$ veya $b \in N$ olsun. $r \in h(R)$ ve $m \in h(M)$ için $rm \in N$ ve $r \notin (N :_R M)$ olsun. O zaman en az bir $x \in M$ için $rx \notin N$ dir. Bu durumda $rx \cdot m \subseteq N$ elde edilir ve böylece $m \in N$ bulunmuş olur.

Teorem 3.4.14: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ve N , M nin derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu durumda N derecelendirilmiş asal alt modüldür ancak ve ancak M/N derecelendirilmiş modülünün dereceli sıfır bölenei yoktur.

İspat : N derecelendirilmiş asal alt modülü ve $\bar{a}, \bar{b} \in h(M/N)$ için $\bar{a}\bar{b} = 0$ olsun. $\left(\bar{a}\right), \left(\bar{b}\right)$ derecelendirilmiş alt modüller ve M çarpımsal derecelendirilmiş modül olduğundan $\left(\bar{a}\right) = I(M/N)$ ve $\left(\bar{b}\right) = J(M/N)$ olacak şekilde R nin I, J derecelendirilmiş idealleri vardır. Böylece $(IJ)(M/N) = \bar{0}$ elde edilmiş olur. Buradan da $(IJ)M \subseteq N$ bulunur. N , derecelendirilmiş asal alt modülü olduğundan $I \subseteq (N :_R M)$ veya $J \subseteq (N :_R M)$ bulunur. Yani $IM \subseteq N$ veya $JM \subseteq N$ dir. Bu da $\bar{a} = 0$ veya $\bar{b} = 0$ demektir. Tersini ispat için M/N derecelendirilmiş modülünün derecelendirilmiş sıfır böleneinin olmadığını ve $a, b \in h(M)$ için $ab \in N$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\bar{a}\bar{b} = 0$ olur. Kabulümüzden $\bar{a} = 0$ veya $\bar{b} = 0$ elde edilir, yani $a \in N$ veya $b \in N$ dir.

Tanım 3.4.15: (Escoriza ve Torrecillas, 2000) M bir derecelendirilmiş R -modül olsun.

(i) R nin bir P derecelendirilmiş asal ideali için,

$$T_P(M) = \{m \in M \mid \exists c \in h(R) - P \text{ için } cm = 0\}$$

kümesini tanımlayalım. Eğer $M = T_P(M)$ ise M ye derecelendirilmiş P -burulmalı modülü denir.

(ii) P , $G(R)$ de bir derecelendirilmiş asal ideal olsun. Eğer $x \in h(M)$ ve $c \in h(R) - P$ elemanları için $cM \subseteq Rx$ koşulunu sağlıyor ise M ye derecelendirilmiş P -devirli denir.

(iii) Eğer $aM = 0$ koşulu $a \in h(R)$ elemanı için $a = 0$ oluyorsa M ye sadık denir.

(iv) M modülünün bir m elemanının sıfırlayıcısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\text{ann}(m) = (0 :_R m) = \{r \in h(R) \mid rm = 0\}.$$

Burada not edelim ki, $T_p(M)$ kümesi M nin bir derecelendirilmiş R -alt modülüdür.

Teorem 3.4.16: (Escoriza ve Torrecillas, 2000) M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. Bu durumda M bir çarpımsal derecelendirilmiş modüldür ancak ve ancak $G(R)$ nin her P derecelendirilmiş asal ideali için M ya derecelendirilmiş P -burulmalı ya da derecelendirilmiş P -devirli modüldür.

İspat : Kabul edelim ki M bir derecelendirilmiş R -modül ve P derecelendirilmiş asal ideal olsun. İlk önce $PM = M$ durumunu inceleyelim. Bir $m \in h(M)$ için Rm derecelendirilmiş alt modülünü düşünelim. Bu durumda, M derecelendirilmiş modül olduğundan R nin bir I derecelendirilmiş ideali için $Rm = IM = IPM = mP$ bulunur. Yani, en az bir $c \in h(R) \setminus P$ için $cm = 0$ dır ve böylece M derecelendirilmiş P -burulmalı olur. Şimdi de $PM \neq M$ durumunu inceleyelim. En az bir $x \in h(M) \setminus PM$ vardır ve Rx alt modülü derecelendirilmiştir. Dolayısıyla $Rx = BM$ olacak şekilde R nin bir B derecelendirilmiş ideali vardır. $B \subseteq P$ ise $x \in BM \subseteq PM$ olacağından bir çelişki elde edilir, dolayısıyla $B \not\subseteq P$ olmak zorundadır. En azından bir $c \in h(B) \setminus P$ vardır ve $cM \subseteq BM = Rx$ bulunmuş olur. Yani M derecelendirilmiş P -devirli modüldür.

Şimdi de ters gerektirmeyi gösterelim. N, M nin derecelendirilmiş alt modülü ve $A = (N :_R M)$ olsun. Bir $n \in h(N)$ için $K = (MA :_R Rn)$ ideali R nin bir derecelendirilmiş idealdir. Kabul edelim ki $K \neq R$ olsun. O zaman R nin K yı kapsayan en az bir tane P derecelendirilmiş maksimal ideali vardır. Eğer M derecelendirilmiş P -burulmalı ise en az bir $c \in h(R) \setminus P$ vardır öyle ki $cn = 0$ dır. Bu da $c \in K \setminus P$ demek olur ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüzden M derecelendirilmiş P -devirli modüldür. O zaman $cM \subseteq Rx$ olacak şekilde $x \in h(M)$ ve $c \in h(R) \setminus P$ elemanları vardır. Burada Rx , kendisi devirli ve x homojen olduğundan çarpımsal derecelendirilmiş modüldür. Burada $cN = Jx$ olacak şekilde $J = (cN :_R Rx)$ ideali vardır. Bu ideal $cJM = JcM \subseteq xJ \subseteq N$ koşulunu sağlar ve böylece $cJ \subseteq A$ bulunur. $c^2n \in c^2N = Jcx \subseteq AM$ olduğundan $c^2 \in K \subseteq P$ olur ki bu da bir çelişkidir.

Yani $K = R$ olur, buradan da $R = (AM :_R N)$ elde edilir. Sonuç olarak $N \subseteq (N :_R M)M$ bulunur, ters kapsama her zaman doğru olduğundan M bir çarpımsal derecelendirilmiş modül olmuş olur.

Teorem 3.4.17: M bir sadık derecelendirilmiş R -modül olsun. O zaman M bir çarpımsal derecelendirilmiş modül olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır:

$$(i) \ G(R) \text{ nin } I_\lambda \text{ idealleri için } \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda M) = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \right) M \text{ dir.}$$

(ii) M nin bir derecelendirilmiş alt modülü N olsun. $N \subset AM$ koşulunu sağlayan $G(R)$ nin her A derecelendirilmiş ideali için en az bir B derecelendirilmiş ideali vardır $G(R)$ nin, öyle ki $B \subset A$ ve $N \subseteq BM$ koşulları sağlanır.

İspat : İfadedeki iki koşulun sağlandığını kabul edelim. M nin bir derecelendirilmiş alt modülü N ve $S = \{I : I, G(R) \text{ nin bir derecelendirilmiş ideali ve } N \subseteq IM\}$ olsun. Bu küme boş kümeden farklıdır, çünkü $R \in S$ dir. $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ kümesi S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun, bu durumda (i) deki kabulümüzden $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \in S$ olur. S kümesi ters kapsamaya göre parçalı sıralı küme olduğundan Zorn Yardımcı Teoremini kullanırsak, S nin bir minimal elemanı A vardır. O zaman $N \subseteq AM$ dir. $N \neq AM$ olduğunu kabul edelim. (ii) ifadesini kabul ettiğimizden $G(R)$ nin en az bir derecelendirilmiş B ideali vardır, öyle ki $B \subset A$ ve $N \subseteq BM$ koşulları sağlanır. Bu durumda $B \in S$ olur ki bu A nın seçimi ile çelişir. Yani $N = AM$ elde edilmiş olur ki bu da M nin çarpımsal derecelendirilmiş modül olması demek olur.

İspatın diğer tarafı için $G(R)$ nin derecelendirilmiş ideallerinden oluşan boş kümeden farklı bir $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ailesini alalım ve $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ olsun. $IM \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda M)$ olduğu kolayca görülür. Ters kapsama için de $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda M)$ ve $K = \{r \in h(R) : rx \in IM\}$ olsun. Kabul edelim ki $K \neq R$ olsun. Bu durumda $G(R)$ nin $K \subseteq P$ koşulunu sağlayan en az bir P derecelendirilmiş maksimal ideali vardır. Burada $x \notin T_p(M)$ bulunur. Eğer böyle olmasaydı, yani $x \in T_p(M)$ olsaydı en az bir $c \in h(R) \setminus P$ için $cx = 0 \in IM$ vardır. Bu da $c \in K \subseteq P$ demek olur ki bu da bir çelişkidir. Böylece M bir derecelendirilmiş P -devirli bulunur. Yani $cM \subseteq Rm$ olacak

şekilde $m \in h(M)$ ve $c \in h(R) \setminus P$ elemanları vardır. Buradan

$$cx \in c \left[\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda M) \right] = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (cI_\lambda M) \text{ ve böylece } cx \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda cM) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda Rm) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda m) \text{ bulunur.}$$

Her $\lambda \in \Lambda$ için $cx = a_\lambda m$ olacak şekilde en az bir $a_\lambda \in I_\lambda$ vardır. Seçilen bir $\alpha \in \Lambda$ ve her $\lambda \in \Lambda$ için $a_\alpha m = a_\lambda m$ bulunur. Buradan da $(a_\alpha - a_\lambda)m = 0$ olur. Şimdi,

$$c(a_\alpha - a_\lambda)M = (a_\alpha - a_\lambda)cM \subseteq (a_\alpha - a_\lambda)Rm = 0$$

ve M derecelendirilmiş sadık modül olduğundan $c(a_\alpha - a_\lambda) = 0$ bulunur. Buradan da $ca_\alpha = ca_\lambda \in I_\lambda$ ve böylece $ca_\alpha \in I_\lambda$ olur. Yani $c^2x = ca_\lambda m = ca_\alpha m \in IM$ olur. Buradan da $c^2 \in K \subseteq P$ ve böylece $c \in P$ bulunur. Yani $K = R$ ve buradan $x \in IM$ bulunmuş olur. Şimdi de M nin bir derecelendirilmiş alt modülü N yi ve R nin bir derecelendirilmiş ideali A yı, $N \subset AM$ olacak şekilde alalım. Bu durumda en az bir C derecelendirilmiş ideali vardır öyle ki $N = CM$ dir. Burada $B = A \cap C$ alınırsa $B \subset A$ ve

$$BM = (A \cap C)M = AM \cap CM = N$$

elde edilir.

Teorem 3.4.18: M bir sadık derecelendirilmiş R -modül ve P , $G(R)$ nin bir derecelendirilmiş asal ideali olsun. Eğer bazı $a \in h(R)$, $m \in h(M)$ için $am \in PM$ iken $a \in P$ veya $m \in PM$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $m \in h(M)$ ve $a \in h(R)$ için $am \in PM$ ve $a \notin P$ olsun. $K = \{r \in h(R) \mid rx \in PM\}$ kümesini göz önüne alalım. Kabul edelim ki $K \neq R$ olsun, bu durumda $G(R)$ nin $K \subseteq Q$ koşulunu sağlayan en az bir derecelendirilmiş maksimal ideali Q vardır. Burada $x \notin T_Q(M)$ bulunur. Eğer böyle olmasaydı, yani $x \in T_Q(M)$ olsaydı en az bir $c \in h(R) \setminus Q$ için $cx = 0 \in PM$ vardır. Bu da $c \in K \subseteq Q$ demek olur ki bu da bir çelişkidir. M çarpımsal derecelendirilmiş modül olduğundan M bir derecelendirilmiş Q -devirli modüldür. Yani en az bir $c \in h(R) \setminus Q$ için $cM \subseteq Rm$ olur. Bu durumda $cm^* = sm$ ve $cam^* = pm$ olacak şekilde $m^* \in M$, $s \in R$ elemanları bulunabilir. Burada $asm = cam^* = pm$ ifadesinden $(as - p)m = 0$ elde edilir. Böylece $c(ann(m))M = 0$ olur. M sadık olduğundan

$c(\text{ann}(m)) = 0$ bulunur. Buradan $cas = cp \in P$ ve böylece $s \in P$ elde edilir. Böylece $cm^* = sm \in PM$ ve buradan $c \in K$ bulunur. Bu da bir çelişkidir.

Sonuç 3.4.19: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ve N , bir çarpımsal derecelendirilmiş alt modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) N bir derecelendirilmiş asal alt modüldür.

(ii) $(N :_R M)$, $G(R)$ nin bir derecelendirilmiş asal idealidir.

(iii) $N = PM$ olacak şekilde $G(R)$ nin $\text{ann}(M) \subseteq P$ koşulunu sağlayan bir P derecelendirilmiş asal ideali vardır.

İspat : (i) $\Rightarrow$ (ii) Önerme 3.3.7 de ispatı verilmişti.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) İstenen P derecelendirilmiş ideali olarak $(N :_R M)$ seçilirse, $\text{ann}(M) \subseteq (N :_R M)$ koşulu da sağlandığından (iii) nin tüm şartları sağlanmış olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $N = PM$ olacak şekilde $G(R)$ nin $\text{ann}(M) \subseteq P$ koşulunu sağlayan bir P derecelendirilmiş asal idealini alalım. Bu durumda M bir sadık derecelendirilmiş $R/\text{ann}(M)$ -modülü olur. Bir önceki yardımcı teoremi kullanırsak N bir derecelendirilmiş asal alt modül olur.

Tanım 3.4.20: M bir derecelendirilmiş R -modül ve N de derecelendirilmiş alt modülü olsun. N nin derecelendirilmiş radikali, $M - \text{rad}(N)$ ile gösterilir, N yi kapsayan derecelendirilmiş asal alt modüllerin kesişimi olarak tanımlanmaktadır. Eğer N yi kapsayan derecelendirilmiş asal alt modülü yok ise $M - \text{rad}(N) = M$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.4.21: M bir derecelendirilmiş R -modül ve N de derecelendirilmiş alt modülü olsun. Eğer $A = (N :_R M)$ ise $M - \text{rad}(N) = (\sqrt{A})M$ dir.

İspat : Genelliği bozmadan M yi sadık çarpımsal derecelendirilmiş R -modülü olarak alalım. $G(R)$ nin A yi kapsayan bütün derecelendirilmiş asal ideallerinin kümesini $\wp$ ile gösterelim. Eğer $B = \sqrt{A}$ ise $B = \bigcap_{P \in \wp} P$ dir ve böylece Teorem 3.4.18 den $BM = \bigcap_{P \in \wp} (PM)$

elde edilir. Şimdi $P \in \wp$ alalım. Eğer $M = PM$ ise $M - \text{rad}(N) \subseteq PM$ dir. Eğer $M \neq PM$ ise $N = AM \subseteq PM$ ifadesinden sonuçtan $M - \text{rad}(N) \subseteq PM$ elde edilir. Her iki durumda da

$M - rad(N) \subseteq BM$ bulunur. Ters kapsama için, N yi kapsayan bir derecelendirilmiş asal alt modül K olsun. Sonuçtan $K = QM$ olacak şekilde $G(R)$ nin $A \subseteq Q$ koşulunu sağlayan bir Q dereceli asal ideali vardır. $AM = N \subseteq QM = K \neq M$ olduğundan $A \subseteq Q$ dir. Yardımcı teoremden $B \subseteq Q$ dur. Yani $BM \subseteq K$ ve böylece $BM \subseteq M - rad(N)$ dir. Böylece $M - rad(N) = BM$ elde edilmiş olur.

3.5. Derecelendirilmiş Asalımsı Alt Modüller

Tanım 3.5.1: R bir G - derecelendirilmiş halka, M bir derecelendirilmiş R -modül ve N de M nin derecelendirilmiş bir R -alt modülü olsun. $N \neq M$ olmak üzere $am \in N$ koşulunu sağlayan her $a \in h(R), m \in h(M)$ için,

$$m \in N \text{ veya bir } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } a^k \in (N :_R M)$$

oluyorsa N ye derecelendirilmiş asalımsı alt modül denir.

Teorem 3.5.2: R bir G - derecelendirilmiş halka, M bir derecelendirilmiş R -modül ve N de M nin derecelendirilmiş bir R -alt modülü olsun. Bu durumda N bir derecelendirilmiş asalımsı alt modül olması için gerek ve yeter koşul $IV \subseteq N$ koşulunu sağlayan her derecelendirilmiş ideal I ve derecelendirilmiş alt modül V için $V \subseteq N$ veya bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $I^k \subseteq (N :_R M)$ olmasıdır.

İspat : Kabul edelim ki N bir derecelendirilmiş asalımsı alt modül, I bir derecelendirilmiş ideal ve V bir derecelendirilmiş alt modül olmak üzere $IV \subseteq N$ olsun. Kabul edelim ki $V \not\subseteq N$ ve her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $I^k \not\subseteq (N :_R M)$ olsun. Bu durumda öyle $a \in I^n \setminus (N :_R M)$ ve $v \in V \setminus N$ elemanları vardır ki $av \in N$ dir. Fakat N bir derecelendirilmiş asalımsı alt modül olduğundan bu bir çelişkidir.

Tersinin ispatı için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim. $a \in h(R), m \in h(M)$ için $am \in N$ olsun. Bu durumda $(a)(m) \subseteq N$ elde edilir. $a \in h(R)$ ve $m \in h(M)$ olduğundan Teorem 3.2.7 den (a) ideali bir derecelendirilmiş ideal ve (m) alt modülü de bir derecelendirilmiş alt modüldür. Kabulümüzden $(m) \subseteq N$ veya bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $(a)^k \subseteq (N :_R M)$ bulunur. Buradan da $m \in N$ veya $a^k \in (N :_R M)$ elde edilmiş olur. Yani N bir derecelendirilmiş asalımsı alt modül olmuş olur.

Teorem 3.5.3: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül olsun. N , M nin derecelendirilmiş asalımsı alt modül olması için gerek ve yeter koşul $(N :_R M)$ ideali R nin bir dereceli asalımsı ideali olmasıdır.

İspat : N , M nin derecelendirilmiş asalımsı alt modülü olsun. $a, b \in h(R)$ için $ab \in (N :_R M)$ olsun. Her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $a^k \notin (N :_R M)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda en az bir homojen eleman $m \in M - N$ için $a(bm) \in N$ dir. N derecelendirilmiş asal alt modül olduğundan $bm \in N$ bulunur. Aynı şekilde $m \notin N$ olduğundan bir $t \in \mathbb{Z}^+$ için $b^t \in (N :_R M)$ elde edilir.

N , M nin derecelendirilmiş alt modülü için $(N :_R M)$ ideali R nin bir derecelendirilmiş asalımsı ideali olsun. Kabul edelim ki I derecelendirilmiş ideali ve V derecelendirilmiş alt modülü için $IV \subseteq N$ olsun. M çarpımsal derecelendirilmiş modül olduğundan en az bir derecelendirilmiş ideali J vardır öyle ki $V = JM$ dir. Böylece $N \supseteq IV = IJM$ bulunur. Bu da $IJ \subseteq (N :_R M)$ demektir. $(N :_R M)$ derecelendirilmiş asalımsı ideal olduğundan bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $I^k \subseteq (N :_R M)$ veya $J \subseteq (N :_R M)$ dir. Yani ya $I^k \subseteq (N :_R M)$ veya $V = JM \subseteq N$ bulunmuş olur. Sonuç olarak Teorem 3.5.2 den N yi derecelendirilmiş asalımsı alt modül elde etmiş olduk.

Teorem 3.5.4: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ve N , M nin derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu durumda N derecelendirilmiş asalımsı alt modül olması için gerek ve yeter koşul M nin $AB \subseteq N$ koşulunu sağlayan A, B derecelendirilmiş alt modülleri için $A \subseteq N$ veya bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $B^k \subseteq N$ olmasıdır.

İspat : N , M nin derecelendirilmiş asalımsı alt modülü ve A, B derecelendirilmiş alt modülleri için $AB \subseteq N$ koşulu sağlanıyor olsun. Kabul edelim ki, I ve J derecelendirilmiş idealleri için $A = IM$ ve $B = JM$ olsun. Buradan $(IJ)M \subseteq N$ ve böylece $IJ \subseteq (N :_R M)$ bulunur. Teorem 3.5.3 den $I \subseteq (N :_R M)$ veya bir pozitif tam sayı n için $J^n \subseteq (N :_R M)$ elde edilir. Buradan da $A = IM \subseteq N$ veya $B^n = J^n M \subseteq N$ bulunmuş olur. Kabul edelim ki $AB \subseteq N$ koşulunu sağlayan A, B derecelendirilmiş alt modülleri için $A \subseteq N$ veya bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $B^k \subseteq N$ olsun. Bir I derecelendirilmiş ideal ve K derecelendirilmiş alt modül için $IK \subseteq N$ ve $K \not\subseteq N$ olsun. M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül olduğundan bir derecelendirilmiş ideal J için $K = JM$ dir. Buradan da $(IM)(JM) = (IJ)M = IK \subseteq N$ elde

edilir. Kabulümüzden de bir pozitif tamsayı n için $I^n M = (IM)^n \subseteq N$ ve buradan $I^n \subseteq (N :_R M)$ bulunmuş olur.

Sonuç 3.5.5: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ve N , M nin derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu durumda N derecelendirilmiş asalımsı alt modül olması için gerek ve yeter koşul $ab \subseteq N$ koşulunu sağlayan $a, b \in h(M)$ için $a \in N$ veya bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $b^k \subseteq N$ olmasıdır.

İspat : N derecelendirilmiş asal alt modül ve $a, b \in h(M)$ için $ab \subseteq N$ olsun. Bu durumda $(a)(b) \subseteq N$ olduğundan Teorem 3.5.4 den $(a) \subseteq N$ veya bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $(b)^k \subseteq N$ elde edilir. Buradan da $a \in N$ veya $b^k \subseteq N$ elde edilir. Tersine olarak $ab \subseteq N$ koşulunu sağlayan $a, b \in h(M)$ için $a \in N$ veya bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $b^k \subseteq N$ olsun. $r \in h(R)$ ve $m \in h(M)$ için $rm \in N$ ve her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $r^k \notin (N :_R M)$ olsun. O zaman en az bir $x \in M$ için $r^k x \notin N$ dir. Bu durumda $rx \cdot m \subseteq N$ elde edilir ve böylece $m \in N$ bulunmuş olur.

Tanım 3.5.6: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül olsun. $m \in h(M)$ olmak üzere bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $m^k = 0$ oluyor ise m ye derecelendirilmiş nilpotent eleman denir.

Teorem 3.5.7: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ve N , M nin derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu durumda N derecelendirilmiş asalımsı alt modül olması için gerek ve yeter koşul M/N derecelendirilmiş modülünün her derecelendirilmiş sıfır böleni derecelendirilmiş nilpotent eleman olmasıdır.

İspat : N derecelendirilmiş asalımsı alt modül olsun. Bu durumda $M/N \neq 0$ dir. Kabul edelim ki $\bar{a} = a + N \in M/N$ elemanı derecelendirilmiş sıfır bölen olsun. Böylece en az bir homojen $\bar{0} \neq \bar{b} = b + N \in M/N$ elemanı için $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ olur. Buradan $ab \subseteq N$ elde edilir. $b \notin N$ ve N derecelendirilmiş asalımsı alt modül olduğundan Sonuç 3.5.5 den en az bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $a^k \subseteq N$ bulunur. Yani $\bar{a}^k = \bar{0}$ bulunmuş olur.

Tersini ispat için M/N derecelendirilmiş modülünün derecelendirilmiş sıfır bölenlerinin hepsinin derecelendirilmiş nilpotent eleman olduğunu kabul edelim. Kabul edelim ki $a, b \in h(M)$ için $ab \subseteq N$ ve $b \notin N$ olsun. Buradan $\bar{a}\bar{b} = (a + N)(b + N) = 0 + N = \bar{0}$ olur.

$\bar{b} = b + N \neq 0 + N = \bar{0}$ olduğundan, kabulümüzden bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\bar{a}^k = (a + N)^k = a^k + N = \bar{0}$ elde edilir. Sonuç olarak $a^k \subseteq N$ elde edilmiş olur.

Teorem 3.5.8: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ve N, M nin derecelendirilmiş alt modülü olsun. Bu durumda N derecelendirilmiş asalımsı alt modül ise $M - rad(N)$ derecelendirilmiş asal alt modülüdür.

İspat : Kabul edelim ki N bir derecelendirilmiş asalımsı alt modül olsun. Bu durumda $G(R)$ nin $(N :_R M)$ derecelendirilmiş ideali asalımsı bir idealdir ve böylece $\sqrt{(N :_R M)}$ ideali Teorem 3.1.19 dan derecelendirilmiş asal idealdir. Burada sırasıyla Teorem 3.4.18 ve Sonuç 3.4.19 kullanılırsa $M - rad(N)$ alt modülünün derecelendirilmiş asal alt modül olduğu gösterilmiş olur.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında önce burulmalı modüller üzerinde çarpanlara ayırma konusu incelenmiş ve daha sonra da derecelendirilmiş modüller üzerinde derecelendirilmiş asal ve asalımsı alt modüller incelenmiştir.

Birinci kısımda modüller üzerinde zayıf asal elemanlar tanımlanarak, modülün elemanlarının zayıf asal elemanlara ayrışımı incelenmiştir. Sonuç olarak burulmalı modüllerde indirgenemez ayrışım ile zayıf asal ayrışım denk bulunmuştur. İleriki çalışmalarda alınacak modüllerde burulmalı olma özelliği kaldırıldığında bu denkliğin kalkacağı düşünülmektedir.

Çalışmamızın ikinci bölümünde derecelendirilmiş modüllerin derecelendirilmiş asal alt modülleri ve derecelendirilmiş asalımsı alt modülleri karakterize ettik. Özel olarak da bu alt modülleri çarpımsal derecelendirilmiş modüllerde inceledik. Bu konuyla ilgili ileride yapılabilecek çalışmalar olarak derecelendirilmiş modüller için Cohen Teoremi, Temel İdeal Teoremi olabilir.

KAYNAKLAR

- Ağargün, A. G., Anderson, D. D. ve Valdes-Leon, S., (2001), “Factorization in Commutative Rings with Zero Divisors, III”, *Rocky Mountain J.Math.*, 31(1): 1-21.
- Ağargün, A. G., Aygör, N., Ersoy, B. A. ve Alan, M., (2002), *Cebir II*, Yıldız Teknik Üniversitesi Vakfı Yayınları, İstanbul.
- Ameri, R., (2003), “On the Prime Submodules of Multiplication Modules ”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 27: 1715-1724.
- Anderson, D. D. ve Valdes-Leon, S., (1997), “Factorization in Commutative Rings with Zero Divisors, II”, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, Dekker, 189.
- Atani, S. E., (2006), “On Graded Prime Submodules”, *Chiang Mai J. Sci.*, 33(1): 3-7.
- Atani, S. E. ve Farzilipour, F. (2006), “Notes on the Graded Prime Submodules”, *International Mathematical Forum*, 1(38): 1871-1880.
- Atani, S. E. ve Farzilipour, F., (2007), “On Graded Secondary Modules”, *Turk. J. Math.*, 31: 371-378.
- Costa, D. L., (1976), “Unique Factorization in Modules and Symmetric Algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 224(2): 267-280.
- El-Bast, Z. ve Smith, P. F., (1988), “Multiplication Modules”, *Communications in Algebra*, 16(4): 755-779.
- Escoriza, J. ve Torrecillas, B., (1998), “Multiplication Objects in Commutative Grothendieck Categories”, *Communications in Algebra*, 26(6): 1867-1883.
- Escoriza, J. ve Torrecillas, B., (1999), “Multiplication Rings and Graded Rings”, *Communications in Algebra*, 27(12): 6213-6232.
- Escoriza, J. ve Torrecillas, B., (2000), “Multiplication Graded Rings”, *Algebra and Number Theory*, 208: 127-136.
- Nastasescu, C., (1982), *Graded Ring Theory*, North-Holland, Amsterdam.
- Nastasescu, C. ve Von Oystaeyen, F., (2004), *Methods of Graded Rings*, *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin.
- Nicolas, A. M., (1967), “Modules Factorials”, *Seminaire Dubreil-Pisot*, 20(10): 1-12.
- Nicolas, A. M., (1974), “Extensions Factorielles”, *Seminaire Dubreil*, 27(15): 1-8.
- Lu, C. P., (1977), “Factorial Modules”, *Rocky Mountain Journal of Math.*, 7(1): 125-140.
- Refai, M. ve Al-Zoubi, K., (2004), “On Graded Primary Ideals”, *Turk. J. Math.*, 28: 217-229.
- Sharp R.Y., (2000), *Steps in Commutative Algebra*, *London Mathematical Society Students* 51, Cambridge University Press, Cambridge.
- Sharpe D.W., (1987), *Rings and Factorization*, Cambridge University Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	29.07.1978	
Doğum Yeri	Münih / ALMANYA	
Lise	1991-1994	Çankaya Anadolu Lisesi
Lisans	1995-2000	Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2003-2005	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı
Doktora	2005-...	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı
Çalıştığı Kurumlar	2002-2004 2005- ...	Özel Eğitim Kurumunda Öğretmenlik Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi A.B.D Araştırma Görevlisi