

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**VİSKOELASTİK ANİZOTROP DAİRESEL SİLİNDİRLERİN ÜÇ BOYUTLU
STABİLİTE PROBLEMLERİ**

ŞERİFE KARAKAYA

**DOKTORA TEZİ
FBE MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SURKAY D. AKBAROV**

İSTANBUL, 2011

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, viskoelastik anizotrop malzemeden hazırlanmış dairesel silindirlerin stabilitesinin incelenmesi; elde edilen sonuçlar kullanılarak yaklaşıklık teorisinin, yaklaşıklık mertebesinin belirlenmesi; giriş malzemesi parametrelerinin, kritik zaman değerlerine etkisinin incelenmesi; araştırmalarda karşılaşılan integro diferansiyel denklemler takımının çözüm yönteminin geliştirilmesi amaçlanmıştır.

Bu konuda şimdiye kadar yapılan ve literatürde karşılaşılan araştırmalar, zamandan bağımsız malzemelerden üretilen yapı elemanları için yapılmıştır. İlk olarak bu tez kapsamında viskoelastik malzemeden hazırlanmış girişler için araştırma yapılmıştır. Bu durum ise, kısmi türevli integro diferansiyel denklemler takımı için bazı yeni sınır değer problemlerinin incelenmesini gerekli kılmıştır.

Çalışma konusunu öneren ve çalışmalarım esnasında katkılarını sakınmayan, Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'a teşekkür ederim.

Sevgili aileme ve arkadaşlarıma, benim için yaptıklarından dolayı ayrıca minnettarım.

Ağustos, 2011

Şerife KARAKAYA

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ.....	VII
ÇİZELGE LİSTESİ	IX
ÖZET	XII
ABSTRACT	XIV
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Bulgular	4
BÖLÜM 2	
VİSKOELASTİK KOMPOZİT MALZEMEDEN YAPILMIŞ DAİRESEL KATI SİLİNDİRİN STABİLİTE KAYBININ ÜÇ BOYUTLU ANALİZİ	5
2.1 Problemin Formülasyonu.....	5
2.2 Çözüm Yöntemi	9
2.3 Üç Boyutlu Silindirik Kirişin Stabilitate Kaybının Yaklaşık Denklemleri.....	22
2.3.1 Bernoulli Kiriş Teorisi	22
2.3.2 Üçüncü Mertebe Geliştirilmiş Kiriş Teorisi	25
2.4 Sayısal Sonuçlar ve Yorumlanması.....	27
BÖLÜM 3	
VİSKOELASTİK KOMPOZİT MALZEMEDEN YAPILMIŞ İÇİ BOŞ DAİRESEL SİLİNDİRİN GLOBAL STABİLİTE KAYBININ ÜÇ BOYUTLU ANALİZİ	39
3.1 Problemin Formülasyonu.....	39
3.2 Çözüm Yöntemi	41
3.3 Üç Boyutlu Silindirik Kirişin Stabilitate Kaybının Yaklaşık Denklemleri.....	54
3.3.1 Bernoulli Kiriş Teorisi	54
3.3.2 Üçüncü Mertebe Geliştirilmiş Kiriş Teorisi	57

3.4	Sayısal Sonuçlar ve Yorumlanması.....	59
BÖLÜM 4		
VİSKOELASTİK KOMPOZİT MALZEMEDEN YAPILMIŞ İÇİ BOŞ DAİRESEL SİLİNDİRİN YEREL STABİLİTE KAYBININ ÜÇ BOYUTLU ANALİZİ		74
4.1	Problemin Formülasyonu.....	74
4.2	Çözüm Yöntemi.....	77
4.3	Üç Boyutlu Silindirik Kirişin Stabilitate Kaybının Yaklaşık Denklemleri.....	86
4.3.1	Kirchoff-Love Kabuk Teorisi	86
4.3.2	Üçüncü Mertebe Geliştirilmiş Kabuk Teorisi	90
4.4	Sayısal Sonuçlar ve Yorumlanması.....	92
BÖLÜM 5		
SONUÇ VE ÖNERİLER		1089
KAYNAKLAR.....		112
ÖZGEÇMİŞ.....		115

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1	Ele alınan silindirin geometrisi 6
Şekil 2. 2	$\omega = 0.5, \pi R / \ell = 0.1$ ve $E^{(2)} / E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, β reolojik parametrelerinin değişik değerleri için, p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}, t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağıntıların grafiği 34
Şekil 2. 3	Şekil 2.2'de verilen grafiklerin, kesişme noktasından sonra ortaya çıkan bölümleri 34
Şekil 2. 4	$\beta = -0.3, \pi R / \ell = 0.1$ ve $E^{(2)} / E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, ω reolojik parametresinin değişik değerleri için oluşturulan, p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}, t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağıntıların grafiği 35
Şekil 3. 1	Ele alınan içi boş silindirin geometrisi 39
Şekil 3. 2	$h/R^+ = 0.3$ (a) ve $h/R^+ = 0.5$ (b) olması durumunda, β reolojik parametrelerinin değişik değerleri için, p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}, t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağıntıların grafiği 69
Şekil 3. 3	Şekil 3.2'de verilen grafiklerin, kesişme noktasından sonra ortaya çıkan bölümleri 70
Şekil 3. 4	$h/R^+ = 0.3$ (a) ve $h/R^+ = 0.5$ (b) olması durumunda, ω reolojik parametresinin değişik değerleri için oluşturulan, p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}, t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağıntıların grafiği 71
Şekil 4. 1	Ele alınan içi boş silindirin geometrisi 74
Şekil 4. 2	$h/R = 0.1$ (a) ve $h/R = 0.2$ (b) olduğu durumlarda, λ parametresinin çeşitli değerleri için p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}, t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağımlılıkların grafiği 100
Şekil 4. 3	$h/R = 0.1$ (a) ve $h/R = 0.2$ (b) olduğu durumlarda, p' basınç kuvveti ile $t'_{3D.cr.}$ arasındaki bağımlılıklara, β reolojik parametresinin etkisi 102
Şekil 4. 4	$h/R = 0.1$ (a) ve $h/R = 0.2$ (b) olduğu durumlardaki kesişme noktasından sonra, Şekil 2'de ortaya çıkan grafiklerin bölümleri 103
Şekil 4. 5	$E^{(2)} / E_0^{(1)} = 10$ (a) olduğu durumda p' basınç kuvveti ile $t'_{3D.cr.}$ arasındaki bağımlılıklara, β reolojik parametresinin etkisi; (b) kesişme noktasından sonra ortaya çıkan bölümler 104
Şekil 4. 6	ω reolojik parametresinin değişik değerleri için bulunan p' basınç

kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ile $t'_{3D.cr.}$ arasındaki bağımlılıkların grafığı	105
---	-----

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2. 1	$E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $p'_{3D.c.0.}$, $p'_{R.c.0.}$ ve $p'_{E.c.0.}$ değerleri 30
Çizelge 2. 2	$\omega = 0.5$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $p'_{3D.c.\infty.}$, $p'_{R.c.\infty.}$ ve $p'_{E.c.\infty.}$ değerleri 30
Çizelge 2. 3	$\omega = 1.0$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $p'_{3D.c.\infty.}$, $p'_{R.c.\infty.}$ ve $p'_{E.c.\infty.}$ değerleri 31
Çizelge 2. 4	$\omega = 2.0$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $p'_{3D.c.\infty.}$, $p'_{R.c.\infty.}$ ve $p'_{E.c.\infty.}$ değerleri 31
Çizelge 2. 5	$\rho = 0.1$, $\omega = 0.5$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, p' ve β' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $t'_{3D.cr.}$ (üst sınır) ve $t'_{Rf.cr.}$ (alt sınır) değerleri 32
Çizelge 2. 6	$\rho = 0.2$, $\omega = 0.5$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, p' ve β' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $t'_{3D.cr.}$ (üst sınır) ve $t'_{Rf.cr.}$ (alt sınır) değerleri 33
Çizelge 2. 7	$\rho = 0.3$, $\omega = 0.5$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, p' ve β' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $t'_{3D.cr.}$ (üst sınır) ve $t'_{Rf.cr.}$ (alt sınır) değerleri 33
Çizelge 2. 8	$\rho = 0.1$, $\omega = 0.5$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 10$ olması durumunda, p' ve β' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $t'_{3D.cr.}$ (üst sınır) ve $t'_{Rf.cr.}$ (alt sınır) değerleri 36
Çizelge 2. 9	$\rho = 0.1$, $\omega = 0.5$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, p' ve β' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $t'_{cdm.cr.}$ (üst sınır) ve $t'_{3D.cr.}$ (alt sınır) değerleri 37
Çizelge 3. 1	$h/R^+ = 0.3$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D.c.0.}$, $p'_{R.c.0.}$ ve $p'_{E.c.0.}$ değerleri 61
Çizelge 3. 2	$h/R^+ = 0.5$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D.c.0.}$, $p'_{R.c.0.}$ ve $p'_{E.c.0.}$ değerleri 61
Çizelge 3. 3	$h/R^+ = 0.8$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin değişik değerleri

	için elde edilen $p'_{3D,c,0}$, $p'_{R,c,0}$ ve $p'_{E,c,0}$ değerleri	62
Çizelge 3. 4	$h/R^+ = 0.3$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ 'nun değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri.....	62
Çizelge 3. 5	$h/R^+ = 0.5$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ 'nun değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri	63
Çizelge 3. 6	$h/R^+ = 0.8$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ 'nun değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri.....	63
Çizelge 3. 7	$P'_{3D,c,0} \left(= p'_{3D,c,0} \pi \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \left((R^+)^2 - (R^-)^2 \right) \right)$ boyutsuz toplam kritik bir kuvvet olmak üzere, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R^+ = 0.5$ olması durumunda elde edilen $P'_{3D,c,0} \times 10^2$ değerleri	64
Çizelge 3. 8	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ ve $h/R^+ = 0.5$ olması durumunda, $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri üzerine, ω reolojik parametresinin etkisi	65
Çizelge 3. 9	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\rho = 0.2$ ve $\omega = 0.5$ iken, $h/R^+ = 0.3$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D,cr.}$ (üst sayı) ve $t'_{Rf,cr.}$ (payda) değerleri	66
Çizelge 3. 10	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\rho = 0.2$ ve $\omega = 0.5$ iken, $h/R^+ = 0.5$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D,cr.}$ (üst sayı) ve $t'_{Rf,cr.}$ (payda) değerleri	66
Çizelge 3. 11	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\rho = 0.2$ ve $\omega = 0.5$ iken, $h/R^+ = 0.8$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D,cr.}$ (üst sayı) ve $t'_{Rf,cr.}$ (payda) değerleri	67
Çizelge 3. 12	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R^+ = 0.5$ ve $\omega = 0.5$ iken, $\rho = 0.1$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D,cr.}$ (üst sayı) ve $t'_{Rf,cr.}$ (payda) değerleri	67
Çizelge 3. 13	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R^+ = 0.5$ ve $\omega = 0.5$ iken, $\rho = 0.3$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D,cr.}$ (üst sayı) ve $t'_{Rf,cr.}$ (payda) değerleri	68
Çizelge 3. 14	$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R^+ = 0.5$ ve $\omega = 0.5$ iken, $\rho = 0.1$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D,cr.}$ (üst sayı) ve $t'_{cdm,cr.}$ (payda) değerleri	73
Çizelge 4. 1	$E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve h/R 'nin çeşitli değerleri için elde edilen $p'_{3D,c,0}$, $p'_{R,c,0}$ ve $p'_{E,c,0}$ 'in değerleri	94
Çizelge 4. 2	$\omega = 0.5$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve h/R 'nin çeşitli değerleri için elde edilen $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri	95
Çizelge 4. 3	$\omega = 1.0$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve h/R 'nin çeşitli değerleri için	

	elde edilen $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri	96
Çizelge 4. 4	$\omega = 2.0$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve h/R 'nin çeşitli değerleri için elde edilen $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri	97
Çizelge 4. 5	$\beta = -0.3$ ve $\omega = 1.0$ iken, $h/R = 0.1$ olduğu durumda, λ parametresinin çeşitli değerleri için elde edilen $t'_{3D,cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf,cr.}$ (payda) değerleri	99
Çizelge 4. 6	$\beta = -0.3$ ve $\omega = 1.0$ iken, $h/R = 0.2$ olduğu durumlarda, λ parametresinin çeşitli değerleri için elde edilen $t'_{3D,cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf,cr.}$ (payda) değerleri	105
Çizelge 4. 7	$\lambda = 4.0$, $\beta = -0.3$, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R = 0.2$ ve $\omega = 1.0$ olduğu durumlarda p' 'nün çeşitli değerleri için elde edilen $t'_{3D,cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf,cr.}$ (payda) değer leri	106

VİSKOELASTİK ANİZOTROP DAİRESEL SİLİNDİRLERİN ÜÇ BOYUTLU STABİLİTE PROBLEMLERİ

Şerife KARAKAYA

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV

Üç Boyutlu yaklaşım, viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış hem dairesel katı silindirin stabilite kaybının incelenmesinde hem içi boş dairesel silindirin global stabilite kaybının araştırılmasında hem de içi boş dairesel silindirin simetrik yerel stabilite kaybının araştırılmasında kullanılmıştır. Bu yaklaşım, birinci durumda, anizotrop cisimler için viskoelastisite teorisinin, üç boyutlu geometrik olarak doğrusal olmayan, alan denklemleri çerçevesinde, silindire ait başlangıçtaki sonsuz küçük sapmalarının gelişiminin araştırılmasına; ikinci durumda, anizotrop cisimler için viskoelastisite teorisinin, üç boyutlu geometrik olarak doğrusal olmayan, alan denklemleri çerçevesinde, silindire ait başlangıçtaki sonsuz küçük global sapmanın gelişiminin araştırılmasına; son durumda ise, anizotrop cisimler için viskoelastisite teorisinin, üç boyutlu geometrik olarak doğrusal olmayan, alan denklemleri kapsamı içinde içi boş dairesel silindirlerin önceki dönel simetrik sonsuz küçük yerel sapmalarının gelişimlerinin incelenmesine dayandırılmaktadır. Kritik kuvvet ve kritik zaman için sayısal sonuçlar sunulmuş ve tartışılmıştır. Üç boyutlu yaklaşım kullanılarak elde edilen sonuçların önemini göstermek için, bu sonuçlar, çeşitli yaklaşık kiriş teorileri uygulanarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Üç boyutlu yaklaşım ile bulunan sonuçların doğruluğunu ölçmek ve kıyaslamak için, aynı problem çeşitli yaklaşık kabuk teorileri kullanarak da çözülmüştür. Silindirik malzemenin viskoelastik özellikleri, kesirli üstel operatörle tanımlanmıştır. Sayısal sonuçlar ve bunların tartışılması, silindirin tek yönlü lifli kompozit malzemeden yapıldığı durumlar için verilmiştir. Özellikle, dış basınç kuvvetinin değeri, $t = \infty$ da elde edilen kritik basınç kuvvetine yakınsa, üç boyut

yaklaşımı kullanılarak elde edilen kritik zamanlar ile üçüncü mertebeden geliştirilmiş giriş teorileri kullanılarak elde edilen kritik zamanlar arasındaki farkın daha da ihmal edilemez olduğu ispatlanmıştır. Yine, dış basınç kuvvetinin değeri, $t = \infty$ da elde edilen kritik basınç kuvvetine yakınsa, üç boyut yaklaşımı kullanılarak elde edilen kritik zamanlar ile üçüncü mertebeden geliştirilmiş kabuk teorileri kullanılarak elde edilen kritik zamanlar arasındaki farkın daha da ihmal edilemez olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kritik kuvvet, kritik zaman, başlangıç sapma kriteri, stabilite kaybı, viskoelastik kompozit malzeme, viskoelastik kompozit silindir, viskoelastik kompozit içi boş silindir, dairesel içi boş silindir, silindirik kabuk

**THREE-DIMENSIONAL STABILITY LOSS PROBLEMS FOR CIRCULAR
ANISOTROPIC VISCOELASTIC CYLINDERS**

Şerife KARAKAYA

Department of Mathematic

Ph.D. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV

The 3D approach was employed for investigations of the stability loss of the solid circular cylinder made from viscoelastic composite material, for investigations of the global stability loss of the hollow circular cylinder made from viscoelastic composite materials and for investigations of the symmetric local stability loss of the circular hollow cylinder made from the viscoelastic composite materials. This approach is based on investigations of the evolution of the initial infinitesimal imperfections of the cylinder within the scope of 3D geometrically nonlinear field equations of the theory of viscoelasticity for anisotropic bodies. This approach is based on the investigations of the evolution of the initial infinitesimal global imperfection of the cylinder within the scope of 3D geometrically nonlinear field equations of the theory of the viscoelasticity for anisotropic bodies. This approach is based on investigations of the development of the initial rotationally symmetric infinitesimal local imperfections of the circular hollow cylinder within the scope of 3D geometrically nonlinear field equations of the theory of viscoelasticity for anisotropic bodies. The numerical results of the critical forces and critical time are presented and discussed. To illustrate the importance of the results obtained using the 3D approach, these results are compared with the corresponding ones obtained by employing various approximate beam theories. For comparison and estimation of the accuracy of the results given by the 3D approach, the same problem is also solved by using various approximate shell theories. The viscoelasticity

properties of the cylinder's material are described by the fractional-exponential operator. The numerical results and their discussion are presented for the case where the cylinder is made of a uni-directional fibrous viscoelastic composite material. In particular, it is established that the difference between the critical times obtained by employing 3D and third order refined beam theories and by employing 3D and third order refined shell theories becomes more non-negligible if the values of the external compressive force are close to the critical compressive force which is obtained at $t = \infty$ (t denotes a time).

Key words: Critical force, critical time, initial imperfection criterion, stability loss, viscoelastic composite material, viscoelastic composite cylinder, viscoelastic composite hollow cylinder, circular hollow cylinder, cylindrical shell

1.1 Literatür Özeti

Birçok durumda kompozit malzemeden üretilmiş yapı elemanlarının stabilite kaybı problemlerinin incelenmesi, Green vd. (1952), Biot (1965), Guz vd. (1999) tarafından önerilen, deforme olabilen katı cisim mekaniğinin kesin nonlinear denklemlerinden lineerleştirme işlemi kullanılarak elde edilen denklemlerden ve bağıntılardan meydana gelen Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi'nin (LEÜBST) uygulanmasını gerekli kılar. Bazı araştırmacılar, LEÜBST yerine "Genel Stabilite Teorisi" notasyonunu kullanmışlardır (Green vd. (1952), Biezeno ve Hencky (1929), Southwell (1913) gibi).

Tarihsel açıdan LEÜBST denklemleri ilk olarak Southwell (1913) tarafından, fiziksel koşul kullanılarak ve öngerilme durumu homojen varsayılarak elde edilmiştir. Daha sonra LEÜBST denklemleri, Biezeno ve Hencky (1929) tarafından fiziksel şartların kullanımıyla, homojen olmayan ön-kritik gerilme durumu için elde edilmiştir. Lineerleştirme işlemi kullanılarak, elastisite teorisinin nonlinear denklemlerinden ve bağıntılarından LEÜBST'nin denklemlerinin ve bağıntılarının çıkarılışı, Biot (1965) ve Guz (1999) tarafından verilmiştir.

LEÜBST'nin gelişmesine asıl katkılar ve onun, kompozit malzemeden üretilen yapı elemanlarına uygulanışı, 20. yüzyılın ikinci yarısında olmuştur. İlgili araştırmaların ayrıntılı bir şekilde incelenmesi, Babich vd. (2001), Babich ve Guz (2002) makalelerinde verilmektedir. Bu, sözü edilen araştırmadan ve daha birçok çalışmadan anlaşılacağı üzere LEÜBST'nin, 21. yüzyıl başlamadan önce, başta zamandan bağımsız malzemeden üretilen yapı elemanlarının stabilite kaybı problemleri olmak üzere, uygulamalar

yapılmıştır. Genelde statik yük altında, mekanik özellikleri zamana bağlı malzemeden üretilen yapı elemanlarının stabilite kaybı problemlerinin incelenmesinde, Euler yaklaşımının uygun olmadığı bilinir. Bu sebeple, bu tür problemlerin incelenmesi için Guz (1999) tarafından, “Dinamik İnceleme Metodu” önerilmiştir. Bu yöntemin uygulanışında, aranan değerlerin $\exp(i\Omega t)$ çarpanı ile verildiği ve göz önüne alınan probleme ait kritik parametrelerin de $\text{Im } \Omega = 0$ koşulu altında belirlendiği unutulmamalıdır. Bununla beraber, dinamik inceleme yönteminin LEÜBST çerçevesinde uygulanışında, zamana bağımlı malzemeler için LEÜBST’nin denklemlerinin katsayılarının da t ’ye (zamana) bağlı olması ve bu nedenle bir çok durumda LEÜBST çerçevesinde aranan değerlerin, $\exp(i\Omega t)$ çarpanlı gösterilmesinin imkansızlığı gibi başka zorluklar ortaya çıkar. Bu, konuyla ilgilenen araştırmacılarca da bilindiğinden, bu güne kadar LEÜBST çerçevesinde, zamana bağlı durumdaki stabilite kaybı problemleri hakkında, dinamik inceleme yönteminin kullanıldığı bir araştırma ortaya konmamıştır. Daha sonra Guz (1999), bu tür problemleri incelediği monografisinde, Gerard ve Gilbert (1958) tarafından önerilen, “Kritik Deformasyon Yöntemi”ni önermiştir. Buna göre elastik stabilite probleminin sonuçları kullanılarak, göz önüne alınan viskoelastik cisim için, kritik zaman belirlenir. Kritik deformasyon yöntemi çok yakınsar ve ön-kritik gerilme durumunun homojen olması halinde de uygulanabilir.

Zamana bağlı malzemeden üretilen yapı elemanlarının stabilite kaybının araştırılmasında sık sık kullanılan ve çok güvenilen bir yaklaşım, sabit dış kuvvetler altında, yapı elemanlarının başlangıçtaki çok küçük sapmalarının, zamanın akışı ile büyümesine dayandırılan ve Hoff (1954) tarafından önerilen yaklaşımdır. LEÜBST çerçevesinde, başlangıçtaki çok küçük sapmaların büyümesine dayandırılan yaklaşım, ancak 20. yüzyıl sonlarında ortaya atılmıştır. Böyle bir yaklaşım, ilk olarak, dış basınç kuvveti etkisinde tek yönlü lifli kompozitlerin stabilite kaybının (burkulma) araştırılması için Akbarov vd. (1997, 1999) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmalarda, burkulma parametrelerinin (kritik kuvvet ve kritik zaman değerleri) belirlenmesinde, liflere veya katmanlara çok küçük başlangıç sapmaları verilmesi halinde, bu sapmaların dış basınç kuvveti etkisinde büyüyerek sonsuza gitmesi durumu, burkulma kriteri olarak

alınmıştır. Akbarov vd. (1997, 1999) tarafından yayınlanan bu makalede elde edilen sonuçlar, Akbarov ve Guz (2000) tarafından sunulan monografide detaylandırılmıştır.

Akbarov ve Kosker (2001, 2004) tarafından yayınlanan makalelerde, yukarıda sözü edilen yaklaşım, viskoelastik matris içerisindeki bir lif eğilmesinin (burkulmasının) incelenmesinde kullanılmıştır. İki eksenli basınç etkisi altındaki çok katlı tabaka ile örtülü viskoelastik yarı uzayın üç boyutlu yüzeysel stabilitesine ait çalışma, Akbarov ve Tekercioglu (2007) tarafından yapılmıştır. Aynı zamanda, Akbarov ve Mamedov (2009, 2011) tarafından yayınlanan makalelerde, dış bükey silindirik yüzeye yakın bir lifin üç boyutlu stabilite kaybı incelenmiştir. Lifi içeren silindirin malzemesi, viskoelastik olarak alınmıştır.

Lineer viskoelastik malzemedan yapılmış yapı elemanlarının stabilite kaybı problemlerine ait yukarıda bahsedilen üç boyutlu yaklaşımın diğer uygulamaları, Akbarov (1998), Akbarov ve Yahnioglu (2001) makalelerinin konusudur. Bu makalelerde, basit şekilde güçlendirilmiş ve sıkıştırılmış (Akbarov ve Yahnioglu (2001)) viskoelastik kompozit şeritin stabilite kaybı çalışıldığını belirtmek gerekir. Yukarıda bahsedilen son iki makalede, (Akbarov vd. (2001)) tarafından gerçekleştirilmiş araştırmalar, dikdörtgen kalın plağın üç boyutlu burkulma problemi için geliştirilmiştir. Dikdörtgen plağın karşılıklı iki kenarı basit mesnetli, fakat diğer iki kenarının ankastre mesnetli olduğu kabul edilmiştir.

Bir viskoelastik kompozit dairesel plak için dönel simetrik stabilite kaybı problemi, Kutuk, Akbarov ve Yahnioglu (2003) tarafından sunulan makalesinde incelenmiştir. Bütün kenarları ankastre mesnetli dörtgen plağa ait burkulma problemi, Selim ve Akbarov (2003) tarafından araştırılmıştır. Viskoelastik kompozit malzemedan yapılmış halka şeklinde dairesel bir disk ve dönen kalın bir diskin stabilite kaybı analizi, Yahnioglu ve Akbarov (2002) tarafından gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, Kutuk (2009) tarafından iki eksenli basınç kuvveti altında, basit mesnetli viskoelastik dörtgen plağın burkulmasının detaylı analizi verilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Yukarıda anlatılanlardan anlaşılacağı üzere, viskoelastik kompozit plakların üç boyutlu stabilite kaybına ait literatürdeki mevcut tüm çalışmalar, yukarıda belirtilmiştir. Neticede, yapı elemanlarının birçoğunda kullanılan viskoelastik silindirlere ait üç boyutlu stabilite kaybı problemleri ile ilgili literatürde herhangi bir araştırma mevcut değildir. Sunulan bu tez kapsamında, bu alandaki ilk girişim üstlenilmiş ve Akbarov (1998) tarafından önerilen yaklaşımla, viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış dairesel katı silindirin üç boyutlu stabilite kaybının incelenmesi için, viskoelastik kompozit malzemeden üretilmiş içi boş dairesel silindirlerin üç boyutlu global stabilite kaybının incelenmesi için ve son olarak da eksenel basınç altında viskoelastik kompozit malzemeden üretilmiş içi boş dairesel silindirlerin üç boyutlu simetrik yerel stabilite kaybının incelenmesi için belirtilen yaklaşım geliştirilmiştir. Yaklaşık kiriş teorileri kullanılarak aynı problemler, ayrıca çözülmüş ve elde edilen sonuçlar, üç boyutlu yaklaşım çerçevesinde tezde verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

1.3 Bulgular

Yapı elemanlarıyla ilgili ve LEÜBST kapsamında şu ana kadar gerçekleştirilmiş bütün araştırmaların kısa bir özeti yukarıda verilmiştir. Yukarıda bahsedilen makalelerde, Kirchhoff-Love ve Kromm (1955) hipotezine dayandırılan, yaklaşık plaka teorileriyle elde edilen sonuçların da verildiğine dikkat edilmelidir. Uygun sonuçların karşılaştırılması, elastik stabilite kaybı problemleri için, üç boyutlu yaklaşım kapsamında bulunan sonuçlar ile Kromm (1955) tarafından verilen üçüncü mertebe geliştirilmiş plak teorisini kullanarak elde edilen sonuçlar arasındaki farkın yüzde 5-6'dan daha fazla olmadığını göstermiştir. Bununla birlikte, üç boyutlu yaklaşım kapsamında bulunan kritik zamanla, yukarıda bahsedilen geliştirilmiş plak teorisini kullanarak elde edilen kritik zaman arasındaki fark, daha fazla olabilmektedir. Sonuç olarak, zamana bağlı malzemeden yapılmış yapı elemanlarının stabilite kaybı problemlerinin araştırılmasında, üç boyutlu yaklaşımın uygulanmasının gerekliliği, elastik kompozit malzemeden yapılmış olanların incelemesinde üç boyutlu yaklaşımın uygulanmasının gerekliliğinden çok daha fazladır.

**VİSKOELASTİK KOMPOZİT MALZEMEDEN YAPILMIŞ DAİRESEL KATI
SİLİNDİRİN STABİLİTE KAYBININ ÜÇ BOYUTLU ANALİZİ****2.1 Problemin Formülasyonu**

Doğal durumda bir başlangıç sapması (eğintisi) olan bir silindiri dikkate alalım ve $O\theta z$ cinsinden Lagrange koordinatları ve $Ox_1x_2x_3$ Kartezyen koordinat sistemi ile bu silindirin noktalarının konumunu belirleyelim (Şekil 2.1). Dikkat çekilen başlangıç eğintisi, silindirin orta çizgisinin aşağıdaki denklemi ile verilir:

$$x_3 = t_3; \quad x_1 = A \sin\left(\frac{\pi}{\ell} t_3\right); \quad x_2 = 0 \quad (2.1)$$

Burada t_3 bir parametre ve $t_3 \in (0, \ell)$ 'dir. A , başlangıç eğintisinin genliğidir.

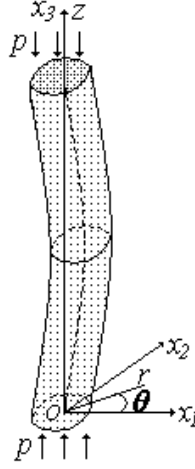
Silindirlerin en kesitlerinin, silindirin orta çizgisinin teğet vektörüne dik olan düzlem üzerinde olduğu ve bu kesitlerin sabit R yarıçaplı bir daire olduğu kabul edilmektedir.

Ayrıca, Akbarov (1998) ve Akbarov ve Yahnioğlu (2001) makalelerindeki gibi $A \ll \ell$ şartı kabul edilir ve bu küçük parametre aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\varepsilon = \frac{A}{\ell}, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1. \quad (2.2)$$

Silindir malzemesinin viskoelastik transversal izotrop olduğu ve $Ox_3(Oz)$ eksenini ile çakışan simetri eksenine sahip olduğu kabul edilmektedir. Yukarıdaki kabullerde, Oz eksenini doğrultusunda silindirin uçlarına etki eden, yoğunluğu p olan, düzgün yayılı,

normal basınç kuvvetleri etkisinde silindirin başlangıçta sahip olduğu çok küçük eğintisinin gelişimi araştırılmıştır.



Şekil 2.1 Ele alınan silindirin geometrisi

Bu araştırma, aşağıda verilen alan denklemleri yardımıyla yapılır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial t_{r\theta}}{r\partial\theta} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(t_{rr} - t_{\theta\theta}) &= 0, \quad \frac{\partial t_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial t_{\theta\theta}}{r\partial\theta} + \frac{2}{r}t_{\theta r} + \frac{\partial t_{\theta z}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial t_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial t_{z\theta}}{r\partial\theta} + \frac{1}{r}t_{zr} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3_1)$$

$$t_{rr} = \sigma_{rr} \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \sigma_{r\theta} \left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \sigma_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z},$$

$$t_{r\theta} = \sigma_{rr} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \sigma_{r\theta} \left(1 + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \sigma_{rz} \frac{\partial u_\theta}{\partial z},$$

$$t_{rz} = \sigma_{rr} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \sigma_{r\theta} \frac{\partial u_z}{r\partial\theta} + \sigma_{rz} \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad t_{\theta r} = \sigma_{\theta r} \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \sigma_{\theta\theta} \left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \sigma_{\theta z} \frac{\partial u_r}{\partial z},$$

$$t_{\theta\theta} = \sigma_{\theta r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta} \left(1 + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \sigma_{\theta z} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad t_{\theta z} = \sigma_{\theta r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta} \frac{\partial u_z}{r\partial\theta} + \sigma_{\theta z} \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right),$$

$$t_{zr} = \sigma_{zr} \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \sigma_{z\theta} \left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \sigma_{zz} \frac{\partial u_r}{\partial z},$$

$$t_{z\theta} = \sigma_{zr} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \sigma_{z\theta} \left(1 + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \sigma_{zz} \frac{\partial u_\theta}{\partial z},$$

$$t_{zz} = \sigma_{zr} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \sigma_{z\theta} \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + \sigma_{zz} \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad (2.3_2)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right\},$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \left(\frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \right\},$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2 \right\},$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \left(\frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\},$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (2.3_3)$$

Burada, (2.3₁) denklemleri t_{rr} , $t_{\theta\theta}$, t_{zz} , $t_{r\theta}$, $t_{\theta r}$, $t_{z\theta}$, $t_{\theta z}$, t_{zr} ve t_{rz} simetrik olmayan Kirchhoff gerilme tensörü bileşenleri cinsinden denge denklemleridir; (2.3₂) denklemleri simetrik olmayan Kirchhoff gerilme tensörünün bileşenleri ile silindirik koordinatlarda verilen gerilme tensörünün bileşenleri arasındaki ilişkiyi gösterir. Green şekil değiştirme tensörü ve yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri arasındaki nonlineer ilişki ise (2.3₃) ile gösterilmiştir.

Silindirik koordinat takımı cinsinden silindirik malzemenin bünye denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= A_{11}^* \varepsilon_{rr} + A_{12}^* \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}; \quad \sigma_{\theta\theta} = A_{12}^* \varepsilon_{rr} + A_{11}^* \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}; \\ \sigma_{zz} &= A_{13}^* \varepsilon_{rr} + A_{13}^* \varepsilon_{\theta\theta} + A_{33}^* \varepsilon_{zz}; \quad \sigma_{r\theta} = (A_{11}^* - A_{22}^*) \varepsilon_{r\theta}; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{rz} = 2G^* \varepsilon_{rz}; \quad \sigma_{\theta z} = 2G^* \varepsilon_{\theta z},$$

Burada A_{ij}^* ve G^* aşağıdaki operatörlerdir:

$$\begin{Bmatrix} A_{ij}^* \\ G^* \end{Bmatrix} \phi(t) = \begin{Bmatrix} A_{ij0} \\ G_0 \end{Bmatrix} \phi(t) + \int_0^t \begin{Bmatrix} A_{ij1}(t-\tau) \\ G_1(t-\tau) \end{Bmatrix} \phi(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

Burada A_{ij0} ve G_0 , elastik sabitlerin anlık değerleridir ve $A_{ij1}(t)$ ve $G_1(t)$ silindirik malzemenin kalıtsal özelliklerini belirleyen, verilen fonksiyonlardır.

Silindirin S yanal yüzeyinde aşağıda verilen koşulların sağladığı kabul edilmektedir:

$$\begin{aligned} t_{rr}|_S n_r + t_{r\theta}|_S n_\theta + t_{rz}|_S n_z &= 0, \quad t_{\theta r}|_S n_r + t_{\theta\theta}|_S n_\theta + t_{\theta z}|_S n_z = 0, \\ t_{zr}|_S n_r + t_{z\theta}|_S n_\theta + t_{zz}|_S n_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Doğal durumda silindirin üst ve alt yüzeylerine ait birim normal vektörleri

$$\begin{aligned} \vec{n}_0 &= \frac{-\vec{k} - \varepsilon\pi\vec{i}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2\pi^2}} \quad (\text{alt uç düzlem için}) \\ \vec{n}_l &= \frac{\vec{k} - \varepsilon\pi\vec{i}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2\pi^2}} \quad (\text{üst uç düzlem için}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

dir. Silindirin Üst (alt) yüzeyleri $S_\ell (S_0)$ ile gösterilir ve bu yüzeylerdeki kuvvetler ile ilgili koşullar aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$t_{zr}|_{S_0} n_{01} + t_{z\theta}|_{S_0} n_{02} + t_{zz}|_{S_0} n_{03} = p, \quad t_{zr}|_{S_\ell} n_{\ell 1} + t_{z\theta}|_{S_\ell} n_{\ell 2} + t_{zz}|_{S_\ell} n_{\ell 3} = -p \quad (2.8)$$

Burada $n_{0j} (n_{\ell j})$, (2.7)'de tanımlanmış birim normal vektörün bileşenleridir. Yer değiştirmeler için sınır koşulları aşağıda tartışılacaktır.

(2.3), (2.4), (2.6), (2.7) ve (2.8)'de bilinen notasyonlar kullanılmıştır.

Böylece, ele alınan problemin formülasyonu bitirilmiştir. Buna göre ele alınan problem, p basınç kuvvetinin sabit bir değeri için zaman ilerlerken (silindir malzemesinin viskoelastik olduğu durum için) veya p basınç kuvveti ile (silindir malzemesinin elastik olduğu durum için), lifin sonsuz küçük başlangıç sapmasının gelişiminin, (2.3), (2.4) ve (2.5) alan denklemleri ve (2.6) ve (2.8) sınır koşulları çerçevesinde incelenmesine dönüştürülür.

2.2 Çözüm Yöntemi

Şimdi yukarıdaki bölümde formüle edilmiş problemin çözüm metodunu ele alalım. Çözüm yöntemi aşağıda kısaca özetlenmiştir. Sınır formu pertürbasyon teknikği kullanılarak, (2.3) ve (2.5) lineer olmayan integro diferansiyel denklemleri için ele alınan sınır değer problemi, lineer integro diferansiyel denklem sistemine karşı gelen sınır değer problemleri serisine indirgenir. Daha sonra belirtilen her bir seri sınır değer problemine, Laplace dönüşümü ve konvolusyon teoremi uygulanarak Laplace uzayındaki uygun sınır değer problemi serisine indirgenir. Dönüşüm parametresinin belirli her değeri için lineer problemler, değişkenlerine ayırma yöntemi yardımıyla çözülmüş ve sonuçta Schapery (1966) sayısal ters dönüşüm metodu uygulanarak aranan değerler belirlenmiştir. Dikkat edilmelidir ki, silindir malzemesinin elastik olması durumunda, (2.5) operatörleri mekanik sabitlerle yer değiştirir. Bundan dolayı integro diferansiyel denklemler yerine, diferansiyel denklemler elde edilir ve bu denklemlere karşı gelen problemler, Laplace dönüşümü uygulamaksızın yukarıdaki işlemlerin tekrarlanması ile incelenecektir.

Yukarıda özetlenen çözüm ve problemin formülasyonuna göre, ilk olarak silindirin S yanal yüzeyinin denklemi elde edilir. Silindirin kesit koşullarına göre bu yüzeyin koordinatlarının aşağıdaki denklemleri sağlamaktadır:

$$\varepsilon f'(t_3)(x_{10} - \varepsilon f(t_3)) + x_{30} - t_3 = 0, \quad x_{20}^2 + (x_{30} - t_3)^2 + (x_{10} - \varepsilon f(t_3))^2 = R^2. \quad (2.9)$$

Burada, $f(t_3) = \ell \sin(\pi t_3 / \ell)$, $f'(t_3) = \pi \cos(\pi t_3 / \ell)$; x_{10} , x_{20} , x_{30} , S yüzeyinin koordinatlarıdır. Dikkat edilmelidir ki, (2.9)'daki ilk denklem, t_3 parametresinin sabit değerine karşı gelen noktadaki silindirin orta çizgisine teğet vektöre dik düzlemin denklemidir, fakat (2.9)'daki ikinci denklem bahsedilen düzlemde ortaya çıkan silindirin kesiti olan dairenin denklemidir.

$x_{10} = r \cos \theta$ ve $x_{20} = r \sin \theta$ bağıntılarını kullanarak, $Or\theta z$ silindirik koordinat sisteminde S yüzeyinin aşağıdaki denklemleri elde edilir:

$$r^\pm = r^\pm(\theta, t_3, \varepsilon) = \varepsilon f(t_3) \cos \theta \frac{1 + \varepsilon^2 (f'(t_3))^2}{1 + \varepsilon^2 (f'(t_3))^2 \cos^2 \theta} +$$

$$\left\{ \frac{\left(R^\pm\right)^2 - \varepsilon^2 \left(f(t_3)\right)^2 \left(1 + \varepsilon^2 \left(f'(t_3)\right)^2\right)}{1 + \varepsilon^2 \left(f'(t_3)\right)^2 \cos^2 \theta} + \varepsilon^2 \left(f(t_3)\right)^2 \cos^2 \theta \frac{\left(1 + \varepsilon^2 \left(f'(t_3)\right)^2\right)^2}{\left(1 + \varepsilon^2 \left(f'(t_3)\right)^2 \cos^2 \theta\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$z^\pm = t_3 - \varepsilon f'(t_3) \left(r^\pm(\theta, t_3, \varepsilon) - \varepsilon f(t_3)\right), \quad f'(t_3) = \frac{df(t_3)}{dt_3} \quad (2.10)$$

(2.2) kabulünü ve $\left(\varepsilon f'(t_3)\right)^2 \ll 1$ şartını kullanarak ve bazı matematiksel işlemler sonucunda aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$r = R + \varepsilon f(t_3) \cos \theta + O(\varepsilon^2), \quad z = t_3 - \varepsilon R f'(t_3) \cos \theta + O(\varepsilon^2),$$

$$n_r = \left(1 - \varepsilon^2 \left(R^\pm f''(t_3) - \frac{f(t_3)}{R^\pm}\right)^2 + O(\varepsilon^3)\right),$$

$$n_\theta = \left(\varepsilon \frac{f(t_3)}{R^\pm} \sin \theta + O(\varepsilon^2)\right), \quad n_z = \left(-\varepsilon f'(t_3) \cos \theta + O(\varepsilon^2)\right) \quad (2.11)$$

Burada n_r, n_θ, n_z, S yüzeyine ait birim normal vektörün fiziksel bileşenleridir.

Silindirin sınırlarına meyilli alt ve üst uçları üzerine bulunan düzlemin denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$x_3 = -\varepsilon \pi x_1 \text{ (alt uç için)} \quad x_3 = \varepsilon \pi x_1 + \ell \text{ (üst uç için)}. \quad (2.12)$$

(2.7) denklemine göre bu sınırlara normal vektörlerin bileşenlerinin ifadesini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$n_{01} = n_{\ell 1} = -\varepsilon \pi \left(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon \pi)^2 + O((\varepsilon \pi)^4)\right), \quad n_{03} = -\left(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon \pi)^2 + O((\varepsilon \pi)^4)\right),$$

$$n_{\ell 3} = \left(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon \pi)^2 + O((\varepsilon \pi)^4)\right) \quad (2.13)$$

Sınır pertürbasyonu tekniği işlemlerine göre, Akbarov (1998) ve Akbarov ve Yahnioglu (2001) ve diğer çalışmalarda olduğu gibi, pertürbasyon metodu formunda sınırları çalışarak, ele alınan problemi çözmeye çalışıyoruz. Bu maksatla bilinmeyenler, ε cinsinden, (2.14) seri formunda sunulmuştur.

$$\{\sigma_{(ij)}; \varepsilon_{(ij)}; u_{(i)}\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \{\sigma_{(ij)}^{(q)}; \varepsilon_{(ij)}^{(q)}; u_{(i)}^{(q)}\}, \quad (ij) = rr; r\theta; rz; \theta z; \theta\theta; zz, \quad (i) = r; \theta; z. \quad (2.14)$$

(2.14), (2.3)'de yerine yazılarak her bir yaklaşım için seri denklemler takımı elde edilir.

(2.11) kullanılarak, $\{r_0 = R_0; z_0 = t_3\}$ noktasının görüntüsü cinsinden seri şeklinde her yaklaşımın (2.14) değerlerini genişletebiliriz.

(2.6)'daki sınır şartlarında bulunan son ifadeler yerine yazılarak ve (2.11)'de verilen n_r , n_θ ve n_z ifadeleri kullanılarak, (2.14) denklemindeki her bir yaklaşım için $\{r = R; z = t_3\}$ noktasında sağlanan sınır şartları elde edilir.

(2.6) şartının, $\{r_0 = R_0; z_0 = t_3\}$ noktasında sağlanan aynıysıyla değiştirildiği koşul ve (2.3) denkleminin geçerli olduğu sıfırıncı yaklaşım için kanıttır.

Gerilme tansörünün bileşenlerinin lineer olmayan parçalarının, lineer olan parçalarına göre çok küçük ve ihmal edilebilir olduklarını kabul ediyoruz. Bu kabule göre, sıfırıncı yaklaşım için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(0)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(0)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)}) &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{r \partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r}^{(0)} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(0)}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(0)}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{zr}^{(0)} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(0)}}{\partial z} &= 0, \\ \varepsilon_{rr}^{(0)} = \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(0)}}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta^{(0)}}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(0)}}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(0)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(0)} = \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.15)$$

ve sınır şartları

$$\sigma_{rr}^{(0)} \Big|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} \Big|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(0)} \Big|_{r=R} = 0 \quad (2.16)$$

Ayrıca, (2.7), (2.8) ve (2.13)'den sıfırıncı yaklaşım için alt v üst yüzeylerdeki sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{zz}^{(0)}(r, \theta, 0) = \sigma_{zz}^{(0)}(r, \theta, \ell) = -p, \quad (2.17)$$

(2.17) sınır şartına göre elde edilen matematiksel işlemin aşağıdaki gibi verildiğine dikkat ediniz.

Sonraki yaklaşımlar için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{rr}^{(q)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(q)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(q)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(q)} - \sigma_{\theta\theta}^{(q)}) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_r^{(q)}}{\partial z^2} = \\
& \underline{-\frac{\partial S_{rr}^{(q-1)}}{\partial r} - \frac{\partial S_{r\theta}^{(q-1)}}{r \partial \theta} - \frac{\partial S_{rz}^{(q-1)}}{\partial z} - \frac{1}{r} (S_{rr}^{(q-1)} - S_{\theta\theta}^{(q-1)})}, \\
& \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(q)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(q)}}{r \partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r}^{(q)} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(q)}}{\partial z} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(q)}}{\partial z^2} = \underline{-\frac{\partial S_{\theta r}^{(q-1)}}{\partial r} - \frac{\partial S_{\theta\theta}^{(q-1)}}{r \partial \theta} - \frac{2}{r} S_{\theta r}^{(q-1)} - \frac{\partial S_{\theta z}^{(q-1)}}{\partial z}}, \\
& \frac{\partial \sigma_{rz}^{(q)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(q)}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{zr}^{(q)} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(q)}}{\partial z} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_z^{(q)}}{\partial z^2} = \underline{-\frac{\partial S_{rz}^{(q-1)}}{\partial r} - \frac{\partial S_{\theta z}^{(q-1)}}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} S_{zr}^{(q-1)} - \frac{\partial S_{zz}^{(q-1)}}{\partial z}}. \\
& S_{rr}^{(q-1)} = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{rr}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{r\theta}^{(k)} \left(\frac{\partial u_r^{(q-k)}}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta^{(q-k)}}{r} \right) + \sigma_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
& S_{r\theta}^{(q-1)} = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{rr}^{(k)} \frac{\partial u_\theta^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{r\theta}^{(k)} \left(\frac{\partial u_\theta^{(q-k)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(q-k)}}{r} \right) + \sigma_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_\theta^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
& S_{rz}^{(q-1)} = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{rr}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{r\theta}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{r \partial \theta} + \sigma_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
& S_{\theta r}^{(q-1)} = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{\theta r}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \left(\frac{\partial u_r^{(q-k)}}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta^{(q-k)}}{r} \right) + \sigma_{\theta z}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
& S_{\theta\theta}^{(q-1)} = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{\theta r}^{(k)} \frac{\partial u_\theta^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \left(\frac{\partial u_\theta^{(q-k)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(q-k)}}{r} \right) + \sigma_{\theta z}^{(k)} \frac{\partial u_\theta^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
& S_{\theta z}^{(q-1)} = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{\theta r}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{r \partial \theta} + \sigma_{\theta z}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
& S_{zz}^{(q-1)} = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{z\theta}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{r \partial \theta} + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
& S_{zr}^{(q-1)} = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{zr}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{z\theta}^{(k)} \left(\frac{\partial u_r^{(q-k)}}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta^{(q-k)}}{r} \right) + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{z\theta}^{(q-1)} &= \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{zr}^{(k)} \frac{\partial u_{\theta}^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{z\theta}^{(k)} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(q-k)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(q-k)}}{r} \right) + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial u_{\theta}^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
\varepsilon_{rr}^{(q)} &= \frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial r} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_{\theta}^{(q-k)}}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial r} \right) \right\}, \\
\varepsilon_{r\theta}^{(q)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(q)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(q)}}{r \partial \theta} - \frac{u_{\theta}^{(q)}}{r} \right) + \\
&\quad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial \theta} - u_{\theta}^{(q-k)} \right) + \frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(q-k)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(q-k)}}{r} \right) + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial \theta} \right\}, \\
\varepsilon_{rz}^{(q)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(q)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_{\theta}^{(q-k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
\varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} &= \frac{\partial u_{\theta}^{(q)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(q)}}{r} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - u_{\theta}^{(k)} \right) \left(\frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial \theta} - u_{\theta}^{(q-k)} \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + u_r^{(k)} \right) \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(q-k)}}{\partial \theta} + u_r^{(q-k)} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial \theta} \right) \right\}, \\
\varepsilon_{\theta z}^{(q)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(q)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{(q)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial \theta} - u_{\theta}^{(q-k)} \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(q-k)}}{\partial \theta} + u_r^{(q-k)} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
\varepsilon_{zz}^{(q)} &= \frac{\partial u_z^{(q)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(q-k)}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right) \right\}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

(2.18) denklemindeki altı çizili terimler birinci yaklaşım için sıfıra eşittir. Karşı gelen, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi (LEÜBST) (Guz (1999)) denklemleri ile çakışan altı çizili terimler olmadan, (2.18) denklemi doğrudan sağlama ile gösterilebilir. Lineerlikten dolayı, (2.4) bünye denklemleri her bir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanır, yani

$$\sigma_{rr}^{(q)} = A_{11}^* \varepsilon_{rr}^{(q)} + A_{12}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{(q)}; \sigma_{\theta\theta}^{(q)} = A_{12}^* \varepsilon_{rr}^{(q)} + A_{11}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{(q)};$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(q)} &= A_{13}^* \varepsilon_{rr}^{(q)} + A_{13}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} + A_{33}^* \varepsilon_{zz}^{(q)}; \sigma_{r\theta}^{(q)} = (A_{11}^* - A_{22}^*) \varepsilon_{r\theta}^{(q)}; \\ \sigma_{rz}^{(q)} &= 2G^* \varepsilon_{rz}^{(q)}; \sigma_{\theta z}^{(q)} = 2G^* \varepsilon_{\theta z}^{(q)}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Şimdi birinci yaklaşım için, silindirin yanal yüzeyi üzerinde verilen sınır şartları, gerilme tensörünün fiziksel bileşenleri cinsinden

$$\sigma_{(ir)}^{(1)} + f_1 \frac{\partial \sigma_{(ir)}^{(0)}}{\partial r} + \varphi_1 \frac{\partial \sigma_{(ir)}^{(0)}}{\partial z} + \gamma_\theta \sigma_{(i)\theta}^{(0)} + \gamma_z \sigma_{(i)z}^{(0)} = 0 \quad (2.20)$$

ile verilir. Burada $(i) = r, \theta, z$ dir. (2.20)'de (i) 'yi, r, θ ve z ile değiştirerek ele alınan yaklaşımdaki temas koşullarının açık formu elde edilir. Ayrıca (2.20)'de aşağıdaki notasyon kullanılmıştır:

$$\begin{aligned}\gamma_z &= -f'(t_3) \cos(\theta), \quad f_1 = f(t_3) \cos(\theta), \quad \varphi_1 = -Rf'(t_3) \cos(\theta), \\ \gamma_\theta &= \frac{f(t_3)}{R} \sin(\theta), \quad f'(t_3) = \frac{df(t_3)}{dt_3}, \quad f''(t_3) = \frac{d^2 f(t_3)}{dt_3^2}.\end{aligned}\quad (2.21)$$

(2.8) sınır şartları, $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat sistemi için yeniden yazılırsa,

$$\sigma_{3n} \left(\delta_n^j + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_0} n_{0j} = p; \quad \sigma_{3n} \left(\delta_n^j + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_\ell} n_{\ell j} = -p \quad (2.22)$$

olur. Burada δ_n^j , Kronecker sembolüdür. (2.22)'de kullanılan diğer notasyonlar bilinen notasyonlardır.

(2.12) ve (2.13) denklemlerine göre, (2.22) koşullarından aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\begin{aligned}\sigma_{3n} \left(\delta_n^j + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_0} n_{0j} &= \sigma_{3n}(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t) \left(\delta_n^1 + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_n} \right) n_{01} + \\ \sigma_{3n}(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t) \left(\delta_n^3 + \frac{\partial u_3(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_n} \right) n_{03} &= -p \\ \sigma_{3n} \left(\delta_n^j + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_\ell} n_{\ell j} &= \sigma_{3n}(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t) \left(\delta_n^1 + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_n} \right) n_{\ell 1} +\end{aligned}$$

$$\sigma_{3n}(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t) \left(\delta_n^3 + \frac{\partial u_3(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_n} \right) n_{\ell 3} = p. \quad (2.23)$$

Aşağıdaki açılımları kullanarak:

$$\begin{aligned} \sigma_{in}(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t) &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{in}^{(q)}(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t) = \sigma_{in}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t) + \\ &\varepsilon \left(\sigma_{in}^{(1)}(x_1, x_2, 0, t) + (-\pi x_1) \frac{\partial \sigma_{in}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3} \right) + O((\varepsilon\pi)^2); \\ \frac{\partial u_m(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_j} &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \frac{\partial u_m^{(q)}(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_m^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_j} + \\ &\varepsilon \left(\frac{\partial u_m^{(1)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_j} + (-\pi x_1) \frac{\partial^2 u_m^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3 \partial x_j} \right) + O((\varepsilon\pi)^2); \\ \sigma_{in}(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t) &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{in}^{(q)}(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t) = \sigma_{in}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t) + \\ &\varepsilon \left(\sigma_{in}^{(1)}(x_1, x_2, \ell, t) + (\pi x_1) \frac{\partial \sigma_{in}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_3} \right) + O((\varepsilon\pi)^2); \\ \frac{\partial u_m(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_j} &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \frac{\partial u_m^{(q)}(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_m^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_j} + \\ &\varepsilon \left(\frac{\partial u_m^{(1)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_j} + (\pi x_1) \frac{\partial^2 u_m^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_3 \partial x_j} \right) + O((\varepsilon\pi)^2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

(2.22)'deki sınır koşulları için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} &\left\{ -\sigma_{3k}^{(0)} \left(\delta_k^3 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_k} \right) + \varepsilon \left[-\pi \sigma_{3k}^{(0)} \left(\delta_k^1 + \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_k} \right) - \sigma_{3k}^{(0)} \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_k} - \pi x_1 \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_3 \partial x_k} \right) - \right. \right. \\ &\left. \left(\sigma_{3k}^{(1)} - \pi x_1 \frac{\partial \sigma_{3k}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \left(\delta_k^3 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_k} \right) \right] + O(\varepsilon^2) \Big\}_{(x_1, x_2, 0)} = p \end{aligned}$$

$$\left\{ \sigma_{3k}^{(0)} \left(\delta_k^3 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_k} \right) + \varepsilon \left[\pi \sigma_{3k}^{(0)} \left(\delta_k^1 + \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_k} \right) + \sigma_{3k}^{(0)} \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_k} + \pi x_1 \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_3 \partial x_k} \right) + \right. \right.$$

$$\left\{ \sigma_{3k}^{(1)} + \pi x_1 \frac{\partial \sigma_{3k}^{(0)}}{\partial x_k} \right\} \left(\delta_3^k + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_k} \right) + O(\varepsilon^2) \Big|_{(x_1, x_2, \ell)} = -p. \quad (2.25)$$

Benzer tarzda, silindirin sınırlarındaki $u_{(i)}$ yerdeğiştirme vektörünün fiziksel bileşenleri için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$u_{(i)}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t) + \varepsilon \left(u_{(i)}^{(1)}(x_1, x_2, 0, t) + (-\pi x_1) \frac{\partial u_{(i)}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3} \right) + O((\varepsilon \pi)^2) = 0,$$

$$u_{(i)}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t) + \varepsilon \left(u_{(i)}^{(1)}(x_1, x_2, \ell, t) + (\pi x_1) \frac{\partial u_{(i)}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_3} \right) + O((\varepsilon \pi)^2) = 0,$$

$$(i) = r, \theta, z \quad (2.26)$$

$(i) = r, \theta$ için (2.26) ifadesinde ε^q 'nin katsayılarının ayrı ayrı sıfıra eşit olduğu kabul edilir. Sonuçta, bu kabule göre u_r ve u_θ yerdeğiştirmeleri için birinci ve sonraki yaklaşımlara ait sınır koşulları elde edilir.

$(\delta_k^3 + \partial u_3^{(0)} / \partial x_k) \approx \delta_k^3$, $(\delta_k^1 + \partial u_1^{(0)} / \partial x_k) \approx \delta_k^1$ kabulü ve (2.23) ve (2.26) açılımları dikkate alınarak, (2.22) koşulundan sıfırıncı ve birinci yaklaşımlar için gerilmeler için aşağıdaki sınır şartları elde edilir:

Sıfırıncı yaklaşım için:

$$\sigma_{33}^{(0)}(x_1, x_2, 0) = \sigma_{33}^{(0)}(x_1, x_2, \ell) - p, \quad (2.27)$$

Birinci yaklaşım için:

$$\pi \sigma_{31}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t) + \sigma_{3k}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t) \left(\frac{\partial u_3^{(1)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_k} - \pi x_1 \frac{\partial^2 u_3^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3 \partial x_k} \right) +$$

$$\left(\sigma_{33}^{(1)}(x_1, x_2, 0, t) - \pi x_1 \frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3} \right) = 0,$$

$$\pi \sigma_{31}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t) + \sigma_{3k}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t) \left(\frac{\partial u_3^{(1)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_k} + \pi x_1 \frac{\partial^2 u_3^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_3 \partial x_k} \right) +$$

$$\left(\sigma_{33}^{(1)}(x_1, x_2, \ell, t) + \pi x_1 \frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (2.28)$$

olur. Böylece, $Or\theta z$ silindirik koordinat sisteminde, (2.27) koşulu yeniden yazılarak, (2.17) koşulu elde edilir. (2.15), (2.16) ve (2.17)'ye göre, sıfırıncı yaklaşıma ait değerler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{zz}^{(0)} = -p, \sigma_{(ij)}^{(0)} = 0, \text{ for } (ij) \neq zz. \quad (2.29)$$

(2.29)'dan sıfırıncı yaklaşımda, yer değiştirme vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibi sunulabileceği açığa çıkar:

$$u_r^{(0)} = a(t)r + a_0, u_\theta^{(0)} = b_0, u_z^{(0)} = c(t)z + c_0. \quad (2.30)$$

Burada a_0 , b_0 ve c_0 sabitler, $a(t)$ ve $c(t)$ fonksiyonlar, t de zamandır. $a(t)$ ve $c(t)$ fonksiyonları, (2.19) ve (2.29) denklemlerinden kolayca belirlenebilir.

Şimdi de, birinci yaklaşıma ait değerlerin belirlenmesi işini ele alalım. (2.29) ifadesini dikkate alarak, bu yaklaşım için (2.18) denkleminde aşağıdaki alan denklemleri elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} &= 0. \\ \varepsilon_{rr}^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}, \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(1)}}{r}, \varepsilon_{zz}^{(1)} = \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}, \varepsilon_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(1)}}{r} \right), \\ \varepsilon_{\theta z}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{r \partial \theta} \right), \varepsilon_{zr}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Silindirin yan yüzeyi üzerindeki aşağıdaki koşullar, (2.20) ve (2.29)'dan elde edilir:

$$\sigma_{rr}^{(1)}(R, \theta, t_3, t) = 0, \sigma_{r\theta}^{(1)}(R, \theta, t_3, t) = 0, \sigma_{rz}^{(1)}(R, \theta, t_3, t) = 2\pi \sigma_{zz}^{(0)} \cos(\alpha z) \cos \theta. \quad (2.32)$$

(2.26) ve (2.28) denklemlerine göre, birinci yaklaşım için sınır şartı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(1)}(r, \theta, 0, t) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial u_z^{(1)}(r, \theta, 0, t)}{\partial z} &= 0, \quad u_r^{(1)}(r, \theta, 0, t) = 0, \quad u_\theta^{(1)}(r, \theta, 0, t) = 0, \\ \sigma_{zz}^{(1)}(r, \theta, \ell, t) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial u_z^{(1)}(r, \theta, \ell, t)}{\partial z} &= 0, \quad u_r^{(1)}(r, \theta, \ell, t) = 0, \quad u_\theta^{(1)}(r, \theta, \ell, t) = 0.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Böylece, (2.31), (2.19) ve (2.5) denklemleri ve (2.32) ve (2.33) sınır koşulları, birinci yaklaşıma ait değerlerin belirlenebilmesi için, problemin formülasyonu tamamlanır. Bu problemin çözümü için Laplace dönüşümü

$$\bar{\Psi} = \int_0^\infty \Psi(t) e^{-st} dt \quad (2.34)$$

uygulanır. Birinci yaklaşıma ait bütün bağıntı ve denklemlerde, s parametresi, $s > 0$ olacak şekildedir. (2.31) denkleminde dönüşüm yapıldıktan sonra, (2.19) bünye denklemleri, aşağıdaki denklemlere dönüştürülürken, (2.32) $(\sigma_{zz}^{(0)})$ ile $\sigma_{zz}^{(0)}/s$ 'ın yerleri değiştirilmelidir ve (2.33) sınır koşulları, aranan büyüklüklere karşı gelen Laplace dönüşümleri için geçerlidir:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{rr}^{(1)} &= \bar{A}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{12}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}; \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} = \bar{A}_{12}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}; \\ \bar{\sigma}_{zz}^{(1)} &= \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{33}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}; \quad \bar{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = (\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{22}^*) \bar{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)}; \\ \bar{\sigma}_{rz}^{(1)} &= 2\bar{G}^* \bar{\varepsilon}_{rz}^{(1)}; \quad \bar{\sigma}_{\theta z}^{(1)} = 2\bar{G}^* \bar{\varepsilon}_{\theta z}^{(1)}.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Burada

$$\begin{Bmatrix} \bar{A}_{ij}^* \\ \bar{G}^* \end{Bmatrix} \bar{\phi}(s) = \begin{Bmatrix} A_{ij0} \\ G_0 \end{Bmatrix} \bar{\phi}(s) + \begin{Bmatrix} \bar{A}_{ij1}(s) \\ \bar{G}_1(s) \end{Bmatrix} \bar{\phi}(s) \quad (2.36)$$

dir. Yukarıda dikkat çekildiği gibi, (2.31) - (2.36) denklemleri, LEÜBST'nin ilgili denklemleri ile çakışmaktadır. Bundan dolayı, Guz (1999) tarafından verilen monografiye göre elde edilen denklem sistemini çözmek için, silindirik koordinat sisteminde verilen aşağıdaki gösterimler kullanılabilir:

$$\begin{aligned}\bar{u}_r^{(1)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi, \quad \bar{u}_\theta^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi, \\ \bar{u}_z^{(1)} &= (\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*)^{-1} \left(\bar{A}_{11}^* \Delta_1 + (\bar{G}^* + \sigma_{zz}^{(0)}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

(2.37)'de ψ ve χ fonksiyonları, aşağıdaki denklemlerden belirlenir:

$$\left(\Delta_1 + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0, \quad \left(\Delta_1 + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1 + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi = 0. \quad (2.38)$$

Burada

$$\begin{aligned}\xi_1^2 &= \frac{2\bar{G}^*}{\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*}, \quad \xi_{2,3}^2 = c \pm \left(c^2 - \frac{(\bar{A}_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)})(\bar{G}^* + \sigma_{zz}^{(0)})}{\bar{A}_{11}^* \bar{G}^*} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ 2\bar{A}_{11}^* \bar{G}^* c &= \bar{A}_{11}^* (\bar{A}_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)}) + \bar{G}^* (\bar{G}^* + \sigma_{zz}^{(0)}) - (\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*)^2\end{aligned}\quad (2.39)$$

dir. (2.32) ve (2.33) koşullarının sağ taraflarındaki ifadeleri alarak, (2.38) denkleminin çözümü, aşağıdaki gibi bulunur:

$$\psi = B_1 I_1(\xi_1 \alpha r) \sin(\alpha z) \sin \theta, \quad \chi = [B_2 I_1(\xi_2 \alpha r) + B_3 I_1(\xi_3 \alpha r)] \cos(\alpha z) \cos \theta. \quad (2.40)$$

Burada $I_1(x)$, sadece sanal argüman için birinci mertebeden Bessel fonksiyonu ve B_1 , B_2 ve B_3 bilinmeyen sabitlerdir.

Bu çözümler, (2.37) ve (2.35) bağıntılarında yerlerine yazılarak, aranan değerlerin Laplace dönüşümü için, aşağıdaki ifadeleri elde edilir:

$$\begin{aligned}\bar{u}_r^{(1)} &= \left[B_1 \frac{1}{r} I_1(\xi_1 \alpha r) + B_2 \xi_2^2 \alpha^2 I_1'(\xi_2 \alpha r) + B_3 \xi_3^2 \alpha^2 I_1'(\xi_3 \alpha r) \right] \sin(\alpha z) \cos \theta, \\ \bar{u}_\theta^{(1)} &= \left[-B_1 \xi_1 \alpha I_1'(\xi_1 \alpha r) - \frac{\alpha}{r} B_2 I_1(\xi_2 \alpha r) - \frac{\alpha}{r} B_3 I_1(\xi_3 \alpha r) \right] \sin(\alpha z) \sin \theta, \\ \bar{u}_z^{(1)} &= [B_2 D_2 \alpha^2 I_1(\xi_2 \alpha r) + B_3 D_3 \alpha^2 I_1(\xi_3 \alpha r)] \cos(\alpha z) \cos \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \frac{\bar{A}_{11}^* \xi_2^2 - \bar{G}^* - \sigma_{zz}^{(0)}}{\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*}, \quad D_3 = \frac{\bar{A}_{11}^* \xi_3^2 - \bar{G}^* - \sigma_{zz}^{(0)}}{\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*} \\
\bar{\sigma}_{rr}^{(1)} &= \left\{ B_1 \left[-(\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \frac{1}{r^2} I_1(\xi_1 \alpha r) + (\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \frac{\xi_1 \alpha}{r} I_1'(\xi_1 \alpha r) \right] + \right. \\
&B_2 \left[\bar{A}_{11}^* \alpha^3 \xi_2^2 I_1''(\xi_2 \alpha r) + \bar{A}_{12}^* \left(\frac{-\alpha}{r^2} I_1(\xi_2 \alpha r) + \frac{\xi_2 \alpha^2}{r} I_1'(\xi_2 \alpha r) \right) - \bar{A}_{13}^* D_2 \alpha^3 I_1(\xi_2 \alpha r) \right] + \\
&B_3 \left[\bar{A}_{11}^* \alpha^3 \xi_3^2 I_1''(\xi_3 \alpha r) + \bar{A}_{12}^* \left(\frac{-\alpha}{r^2} I_1(\xi_3 \alpha r) + \frac{\xi_3 \alpha^2}{r} I_1'(\xi_3 \alpha r) \right) - \bar{A}_{13}^* D_3 \alpha^3 I_1(\xi_3 \alpha r) \right] \left. \right\} \sin(\alpha z) \cos \theta \\
\bar{\sigma}_{r\theta}^{(1)} &= \left\{ B_1 \left[\frac{1}{2} (\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \left(-\xi_1^2 \alpha^2 I_1''(\xi_1 \alpha r) - \frac{1}{r^2} I_1(\xi_1 \alpha r) + \frac{\xi_1 \alpha}{r} I_1'(\xi_1 \alpha r) \right) \right] + \right. \\
&B_2 \left[(\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \left(\frac{\alpha}{r^2} I_1(\xi_2 \alpha r) - \frac{\xi_2 \alpha^2}{r} I_1'(\xi_2 \alpha r) \right) \right] + \\
&B_3 \left[(\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \left(\frac{\alpha}{r^2} I_1(\xi_3 \alpha r) - \frac{\xi_3 \alpha^2}{r} I_1'(\xi_3 \alpha r) \right) \right] \left. \right\} \sin(\alpha z) \sin \theta ; \\
\bar{\sigma}_{rz}^{(1)} &= \left\{ B_1 \bar{G}^* \frac{\alpha}{r} I_1(\xi_1 \alpha r) + B_2 \bar{G}^* \alpha^3 \xi_2 I_1'(\xi_2 \alpha r) (1 + D_2) + \right. \\
&B_3 \bar{G}^* \alpha^3 \xi_3 I_1'(\xi_3 \alpha r) (1 + D_3) \left. \right\} \cos(\alpha z) \cos \theta ; \\
\bar{\sigma}_{zz}^{(1)} &= \left\{ B_2 \left[\bar{A}_{13}^* \left(\xi_2^2 \alpha^3 I_1''(\xi_2 \alpha r) - \frac{\alpha}{r^2} I_1(\xi_2 \alpha r) + \frac{\alpha^2 \xi_2}{r} I_1'(\xi_2 \alpha r) \right) - \bar{A}_{33}^* D_2 \alpha^3 I_1(\xi_2 \alpha r) \right] + \right. \\
&B_3 \left[\bar{A}_{13}^* \left(\xi_3^2 \alpha^3 I_1''(\xi_3 \alpha r) - \frac{\alpha}{r^2} I_1(\xi_3 \alpha r) + \frac{\alpha^2 \xi_3}{r} I_1'(\xi_3 \alpha r) \right) - \bar{A}_{33}^* D_3 \alpha^3 I_1(\xi_3 \alpha r) \right] \left. \right\} \sin(\alpha z) \cos \theta. \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Burada $I'(x) = dI(x)/dx$, $I''(x) = d^2I(x)/dx^2$ notasyonu kullanılmıştır. Üzerinde düşünülen problemde, (2.41) çözümü, (2.33) sınır şartını otomatik olarak sağlar. B_1 , B_2 ve B_3 bilinmeyenlerini sırasıyla $\alpha^2 B_1 (= C_1)$, $\alpha^3 B_2 (= C_2)$ ve $\alpha^3 B_3 (= C_3)$ ile yer değiştirerek, bu bilinmeyenlerin belirlenmesi için, (2.32) sınır şartından aşağıdaki cebirsel denklem elde edilir:

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(1)}(R, \theta, t_3, t) = 0 \Rightarrow C_1 a_{11}(\alpha R) + C_2 a_{12}(\alpha R) + C_3 a_{13}(\alpha R) = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{r\theta}^{(1)}(R, \theta, t_3, t) = 0 \Rightarrow C_1 a_{21}(\alpha R) + C_2 a_{22}(\alpha R) + C_3 a_{23}(\alpha R) = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^{(1)}(R, \theta, t_3, t) = 2\pi\sigma_{zz}^{(0)} \frac{1}{s} \Rightarrow C_1 a_{31}(\alpha R) + C_2 a_{32}(\alpha R) + C_3 a_{33}(\alpha R) = 2\pi\sigma_{zz}^{(0)} \frac{1}{s}. \quad (2.42)$$

(2.42)'de a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) katsayılarına ait ifadeler, (2.41) denkleminde kolaylıkla elde edilebilir. Böylece, yukarıda belirtilen yaklaşımla, birinci yaklaşıma ait değerlerin Laplace dönüşümü tamamen belirlenir. (2.14)'deki ikinci ve sonraki yaklaşımların değerlerinin Laplace dönüşümleri, hesaplamalarda bazı değişiklikler dikkate alınmak suretiyle, birinci yaklaşımın değerleri gibi belirlenebilir. Bununla birlikte, Akbarov (1998), Akbarov vd. (1997), Akbarov ve Yahnioğlu (2001)'nin çalışmalarında gösterildiği gibi, stabilite kaybı problemleri için, sadece sıfıncı ve birinci yaklaşımı göz önüne almak yeterlidir, çünkü ikinci ve sonraki yaklaşımların hesabı, kritik parametrelerin değerlerini değiştirmez. Aranılan değerlerin orijinali, Schapery(1966)'nin önerdiği yöntem ile belirlenir. Örneğin buna göre, $u_r^{(1)}(r, \theta, t_3, t)$ yer değiştirmesinin orijinali, aşağıdaki ifade yardımıyla belirlenir:

$$u_r^{(1)}(r, \theta, t_3, t) \approx \left(s\bar{u}_r^{(1)}(r, \theta, t_3, s) \right) \Big|_{s=1/(2t)}. \quad (2.43)$$

Şimdi de stabilite kaybı kriteri olarak

$$t \rightarrow t_{cr.} \text{ iken (veya elastik durumda } p \rightarrow p_{cr.} \text{ iken)} \max_{\substack{t_3 \in (0, \ell) \\ r \in (0, R) \\ \theta \in (0, 2\pi)}} |u_r^{(1)}(r, \theta, t_3, t)| \rightarrow \infty \quad (2.44)$$

seçilir. Böylece, kritik zaman değerleri ya da kritik kuvvet değerleri, (2.44) başlangıç sapma kriterinden belirlenmiş olur.

2.3 Üç Boyutlu Silindirik Kirişin Stabilite Kaybının Yaklaşık Denklemleri

2.3.1 Bernoulli Kiriş Teorisi

Silindirin yer değiştirmelerinin aşağıdakiler gibi olması halinde, göz önüne alınan durum için silindirik kirişin yaklaşık stabilite kaybı denklemleri, Bernoulli hipotezi kullanılarak (2.31) - (2.36) denklemlerinden türetilebilir:

$$u_r^{(1)} = u_r^{(1)}(\theta, z, t) = w(z) \cos \theta, u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(1)}(\theta, z, t) = -w(z) \sin \theta,$$

$$u_z^{(1)} = u_z^{(1)}(r, \theta, z, t) = -r \frac{dw(z)}{dz} \cos \theta \quad (2.45)$$

(2.45) ifadesi yazılırken, silindirin orta çizgisindeki uzamanın, $-r dw(z)/dz \cos \theta$ terimine göre çok küçük ve dolayısıyla de ihmal edilebilir olduğu varsayılmıştır.

Böylece, (2.31) ve (2.45)'e göre,

$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = -r \cos \theta \frac{d^2 w(z)}{dz^2}, \quad \varepsilon_{(ij)}^{(1)} = 0 \quad \text{for } (ij) \neq zz, \quad \sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0,$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = E_3^* \varepsilon_{zz}^{(1)} = -r \cos \theta E_3^* \frac{d^2 w(z)}{dz^2} \quad (2.46)$$

elde edilir. Burada, E_3^* bir operatör ve $E_3^* \phi(t) = E_{30} \phi(t) + \int_0^t E_{31}(t-\tau) \phi(\tau) d\tau$ 'dir.

Burada, E_{30} , silindir malzemesinin Oz eksenı yönünde elastisite modulünün anlık değeri ve $E_{31}(t)$, bu malzemenin gevşemesini belirleyen bir fonksiyondur.

Farzedelim ki,

$$\sigma_{rz}^{(1)} \neq 0, \quad \sigma_{\theta z}^{(1)} \neq 0 \quad (2.47)$$

olsun. (2.46) ve (2.47) bağıntıları dikkate alınarak, (2.31)'den aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial z} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} \cos \theta = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{\partial z} - \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} \sin \theta = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(1)} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^3 w}{dz^3} (-r \cos \theta) = 0. \quad (2.48)$$

(2.48)'deki denklemlerin ifadeleri kullanılarak, aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\sigma_{rz}^{(1)} = s_{rz}^{(1)} \cos \theta, \quad \sigma_{\theta z}^{(1)} = s_{\theta z}^{(1)} \sin \theta, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = s_{zz}^{(1)} \cos \theta. \quad (2.49)$$

Bunlara göre, (2.48) ve (2.49)'dan aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{ds_{rz}^{(1)}}{dz} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} = 0, \quad \frac{ds_{\theta z}^{(1)}}{dz} - \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} = 0. \quad (2.50)$$

(2.48)'deki son denklemi $r^2 \cos \theta$ ile çarparak ve $[0, R]$ aralığında r 'ye göre ve $[0, 2\pi]$ aralığında θ 'ya göre integre ederek, aşağıdaki dönüşümler yazılabilir:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{\partial \theta} r^2 \cos \theta dr d\theta = \pi \int_0^R s_{rz}^{(1)} r dr; \quad \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(1)} r^2 \cos \theta dr d\theta = \pi \int_0^R s_{rz}^{(1)} r dr;$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} r^2 \cos \theta dr d\theta = \pi \int_0^R \frac{ds_{rz}^{(1)}}{dr} r^2 dr = \pi \left[\int_0^R \frac{d}{dr} (s_{rz}^{(1)} r^2) dr - 2 \int_0^R s_{rz}^{(1)} r dr \right] =$$

$$\pi s_{rz}^{(1)} \Big|_{r=R} R^2 - 2\pi \int_0^R s_{rz}^{(1)} r dr = \pi \sigma_{zz}^{(0)} R^2 \cos(\alpha z) - 2\pi \int_0^R s_{rz}^{(1)} r dr,$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} r^2 \cos \theta dr d\theta = \pi \int_0^R E_3^* \frac{d^3 w}{dz^3} (-r^3) dr = -\frac{\pi R^4}{4} E_3^* \frac{d^3 w}{dz^3} = -J E_3^* \frac{d^3 w}{dz^3},$$

$$J = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (2.51)$$

Burada, (2.32)'deki son şart, yani

$$\sigma_{rz}^{(1)}(R, \theta, t_3, t) = 2\pi \sigma_{zz}^{(0)} \cos(\alpha z) \cos \theta, \Rightarrow s_{rz}^{(1)} \Big|_{r=R} = 2\pi \sigma_{zz}^{(0)} \cos(\alpha z)$$

koşulu kullanılmıştır. Böylece, (2.51)'de verilen hesaplamalar, (2.50) denklemi ve

$|\sigma_{zz}^{(0)}| \ll |E_3^*|$ olduğu dikkate alınarak, (2.48)'deki son denklemden, $w(z)$

yerdeğiştirmesi için, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-E_3^* J \frac{d^4 w}{dz^4} + \pi R^2 \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} = R^2 \alpha \sigma_{zz}^{(0)} \sin(\alpha z). \quad (2.52)$$

(2.45) ve (2.46) ifadelerini, (2.33) sınır şartlarına uygulayarak ve uç kesit alanları üzerinde integre ederek, yaklaşık Bernoulli yaklaşımı için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$w|_{z=0;\ell} = 0, \quad \left. \frac{d^2 w}{dz^2} \right|_{z=0;\ell} = 0. \quad (2.53)$$

Böylece, $P = -\pi R^2 \sigma_{zz}^{(0)}$ notasyonu kullanılarak, başlangıç sapma kriteri kapsamında Euler kritik kuvvetinden elde edilmiş olan Bernoulli kirişinin klasik stabilite kaybı denklemi elde edilir.

(2.52) ve (2.53) sınır değer probleminin çözümü için bu denklemlere, (2.34) Laplace dönüşümü uygulanır. $E_3^* d^4 w / dz^4$ teriminin dönüşümü için konvolusyon teoremi kullanılarak, aynı denklem ve $\bar{w}$ için yazılan sınır şartları elde edilir. Örneğin bu dönüşümden sonra, (2.52) denkleminin yerine aşağıdaki denklem bulunur:

$$-\bar{E}_3^* J \frac{d^4 \bar{w}}{dz^4} + \pi R^2 \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 \bar{w}}{dz^2} = \frac{1}{s} R^2 \alpha \sigma_{zz}^{(0)} \sin(\alpha z). \quad (2.54)$$

(2.53) sınır şartına göre, (2.54) denkleminin çözüm aşağıdaki gibi seçilir.

$$\bar{w} = \bar{A}(s) \sin \alpha z. \quad (2.55)$$

(2.54)'de, (2.55)'i yerine yazarak ve bazı matematiksel hesaplamalar yaparak, $\bar{A}(s)$ bilinmeyeni için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\bar{A}(s) = -\frac{P\ell}{s\pi^2} \left[P - \frac{\pi^2 \bar{E}_3^* J}{\ell^2} \right]^{-1}, \quad P = -\pi R^2 \sigma_{zz}^{(0)}. \quad (2.56)$$

Schapery (1966) tarafından verilen yöntem kullanılarak, $\bar{A}(s)$ 'nin gerçek değeri aşağıdaki gibi belirlenir:

$$A(t) = \left(s\bar{A}(s) \right) \Big|_{s=(1/(2t))}. \quad (2.57)$$

Silindir malzemesinin elastik olması durumunda, (2.56)'dan aşağıdaki ifade elde edilir:

$$A = -\frac{P\ell}{\pi^2} \left[P - \frac{\pi^2 E_3 J}{\ell^2} \right]^{-1}. \quad (2.58)$$

(2.44)'e göre Bernoulli kirişi için, stabilite kaybı kriteri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$t \rightarrow t_{cr}$ iken $A(t) \rightarrow \infty$ (silindir malzemesinin viskoelastik olması durumunda)

$P \rightarrow P_{cr}$ iken $A \rightarrow \infty$ (silindir malzemesinin elastik olması durumunda) (2.59)

Euler kritik kuvveti ile çakışan kritik kuvvet için, (2.58) ve (2.59)'dan aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$P_{Eu.cr} = \frac{\pi^2 E_3 J}{\ell^2}. \quad (2.60)$$

2.3.2 Üçüncü Mertebe Geliştirilmiş Kiriş Teorisi

$u_r^{(1)}$ ve $u_\theta^{(1)}$ yerdeğiştirmeleri (2.45)'deki gibi, fakat $u_z^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin aşağıdaki gibi verildiğini kabul ederek, üçüncü mertebe geliştirilmiş kiriş teorisi olarak, silindirik kiriş için Krom (1955) tarafından verilen teorinin biraz değişikliğini kullandık.

$$u_z^{(1)} = u_z^{(1)}(r, \theta, z, t) = -r \frac{dw(z)}{dz} \cos \theta + \frac{1}{4} \left(R^2 r \cos \theta - \frac{1}{3} r^3 \cos^3 \theta \right) \varphi(z) \quad (2.61)$$

$u_r^{(1)}$, $u_\theta^{(1)}$ ve $u_z^{(1)}$ 'yi, (2.31) denkleminde yerlerine yazılarak, aşağıda verilen şekil değiştirme ve gerilme ifadeleri elde edilir.

$$\varepsilon_{rz}^{(1)} = \frac{1}{8} R^2 \cos \theta \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \theta \right) \varphi(z), \quad \varepsilon_{\theta z}^{(1)} = -\frac{1}{8} R^2 \sin \theta \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \theta \right) \varphi(z),$$

$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = -r \cos \theta \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \frac{1}{4} \left(R^2 r \cos \theta - \frac{r^3 \cos \theta}{3} \right) \frac{d\varphi}{dz}, \quad \varepsilon_{rr}^{(1)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \varepsilon_{r\theta}^{(1)} = 0,$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(1)} = 2G^* \varepsilon_{rz}^{(1)} = G^* \frac{1}{4} R^2 \cos \theta \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \theta \right) \varphi(z),$$

$$\sigma_{\theta z}^{(1)} = 2G^* \varepsilon_{\theta z}^{(1)} = -G^* \frac{1}{4} R^2 \sin \theta \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \theta \right) \varphi(z),$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = E_3^* \varepsilon_{zz}^{(1)} = E_3^* \left(-r \cos \theta \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \frac{1}{4} \left(R^2 r \cos \theta - \frac{r^3 \cos \theta}{3} \right) \frac{d\varphi}{dz} \right). \quad (2.62)$$

(2.62)'de verilen ifadelerden, göz önüne alınan durum için, (2.48) ve (2.49) denklemlerinin de sağlandığı ortaya çıkar. Laplace dönüşümü önce (2.48), (2.49) ve (2.62) denklemlerine uygulanır ve integrasyon işlemi önceki durumlardaki gibi yapılarak, $\bar{w}(z, s)$ fonksiyonu için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$-E_3^* J \left[1 + \frac{32}{27} \frac{\sigma_{zz}^{(0)}}{G^*} \right] \frac{d^4 \bar{w}(z, s)}{dz^4} + \pi R^2 \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 \bar{w}(z, s)}{dz^2} = \frac{\alpha R^2}{s} \sigma_{zz}^{(0)} \sin \alpha z. \quad (2.63)$$

$(1 + \sigma_{zz}^{(0)} / E_3^*) \approx 1$ kabulü, (2.63) denklemini elde ederken de göz önünde bulundurulduğuna dikkat edilmelidir. Böylece, (2.53)'de takdim edilen ifade kullanılarak, (2.63)'den $\bar{A}(s)$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\bar{A}(s) = -\frac{P\ell}{s\pi^2} \left[P \left(1 + \frac{8}{27} \frac{E_3^*}{G^*} \left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^2 \right) - \frac{\pi^2 E_3^* J}{\ell^2} \right]^{-1}, \quad P = -\pi R^2 \sigma_{zz}^{(0)}. \quad (2.64)$$

(2.57)'deki yöntem kullanılarak $A(t)$ fonksiyonu belirlenir. Kritik parametrelerin değerlerinin belirlenmesi için, (2.59) ifadesi de kullanılabilir. Silindir malzemesinin elastik olması durumu için, (2.64) denkleminde, A bilinmeyeni için, aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$A = -\frac{P\ell}{\pi^2} \left[P \left(1 + \frac{8}{27} \frac{E_3^*}{G^*} \left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^2 \right) - \frac{\pi^2 E_3^* J}{\ell^2} \right]^{-1}. \quad (2.65)$$

(2.65)'den, silindirin malzemesinin elastik olduğu durum için, kritik kuvvetin aşağıdaki gibi ifadesi çıkarılabilir.

$$P_{cr.} = \frac{\pi^2 E_3 J}{\ell^2} \left(1 + \frac{8}{27} \frac{E_3^*}{G^*} \left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^2 \right)^{-1}. \quad (2.66)$$

2.4 Sayısal Sonuçlar ve Yorumlanması

Silindirin, viskoelastik tek tönü lifli kompozit malzemedan yapıldığını ve liflerin Oz eksenini boyunca yöneldiği kabul edilmektedir. Bu kısımda, matris ve liflere ait büyüklükler sırasıyla, (1) ve (2) üst indisleri ile gösterilecektir. Lif malzemesinin, $E^{(2)}$

Young modülü, $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(2)}$ Lamé sabitleri ve $\nu^{(2)}$ Poisson katsayılı elastik, fakat matrisin malzemesinin, aşağıdaki operatörlerle tanımlanan lineer viskoelastik olduğu varsayılmıştır.

$$\begin{aligned} E^{*(1)}\varphi &= E_0^{(1)} \left[\varphi(t) - \omega_0 \Pi_\beta^*(-\omega_0 - \omega_\infty)\varphi \right], \\ \nu^{*(1)}\varphi &= \nu_0^{(1)} \left[\varphi(t) + \frac{1-2\nu_0^{(1)}}{2\nu_0^{(1)}} \omega_0 \Pi_\beta^*(-\omega_0 - \omega_\infty)\varphi \right], \\ \mu^{*(1)}\varphi &= \mu_0^{(1)} \left[\varphi(t) - \frac{3}{2(1+\nu_0^{(1)})} \omega_0 \Pi_\beta^*(-\frac{3}{2(1+\nu_0^{(1)})} \omega_0 - \omega_\infty)\varphi \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Burada, $E_0^{(1)}$, $\nu_0^{(1)}$, sırasıyla, Young modülü ve Poisson katsayısının anlık değerleridir; $\lambda_0^{(1)}$, $\mu_0^{(1)}$, sırasıyla, Lamé sabitlerinin anlık değerleridir. β , ω_0 ve ω_∞ , matris malzemesinin reolojik değerleri; Π_β^* , 1977'de Rabotnov tarafından tanımlanan, kesirli üstel, Rabotnov operatörüdür ve bu operatör

$$\Pi_\beta^*(x)\varphi = \int_0^t \Pi_\beta(x, t-\tau) d\tau \quad (2.68)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\Pi_\beta(x, t) = t^\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^{n(1+\beta)}}{\Gamma((1+n)(1+\beta))}, \quad -1 < \beta < 0 \quad (2.69)$$

dir. (2.69)'daki $\Gamma(x)$, Gamma fonksiyondur.

Boyutsuz $\omega(=\omega_\infty/\omega_0)$ reolojik parametresini ve boyutsuz $t' (= \omega_0^{1/(1+\beta)} t)$ zamanını tanımlıyoruz ve $\nu^{(2)} = \nu_0^{(1)} = 0.3$, $\eta^{(2)} = 0.5$ kabul ediyoruz. Burada $\eta^{(2)}$, göz önüne alınan kompozitteki lifin hacim yoğunluğudur. Sürekli yaklaşım kapsamında, bu kompozitin, izotropi eksen Oz eksenine ile çıkan, homojen transversal izotrop olarak alınabileceği bilinir. Christensen (1979) ve diğer birçoklarına göre, bir kompozit malzemenin mekanik sabitlerini, efektif mekanik özelliklerine göre, tekabül eden Laplace dönüşümü ile yer değiştirerek, efektif operatörlerin Laplace dönüşümünü belirleriz. Bundan dolayı (2.35) bünye denklemlerinin Laplace dönüşümünde $\bar{A}_{ij}^*$ ve $\bar{G}^*$

'nin yerine, bu ifadeleri yazabiliriz. Göz önüne alınan kompozit malzeme için $\bar{A}_{ij}^*$ ve $\bar{G}^*$ ifadeleri, aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{33}^* &= \bar{E}_3^* + 4(\bar{\nu}_{31}^*)^2 \bar{K}_{21}^*, \quad \bar{A}_{13}^* = 2\bar{\nu}_{31}^* \bar{K}_{12}^*, \quad \bar{A}_{11}^* = \bar{\mu}_{12}^* + \bar{K}_{12}^*, \quad \bar{A}_{12}^* = -\bar{\mu}_{12}^* + \bar{K}_{12}^*, \\ \bar{G}^* &= \bar{\mu}^{(1)} \frac{\mu^{(2)}(1+\eta^{(2)}) + \bar{\mu}^{(1)}(1-\eta^{(2)})}{\mu^{(2)}(1-\eta^{(2)}) + \bar{\mu}^{(1)}(1+\eta^{(2)})}.\end{aligned}\quad (2.70)$$

Burada,

$$\begin{aligned}\bar{K}_{12}^* &= \bar{K}^{(1)} + \frac{1}{3}\bar{\mu}^{(1)} + \eta^{(2)} \left[\left(\frac{1}{3}(\mu^{(2)} - \bar{\mu}^{(1)}) + K^{(2)} - \bar{K}^{(1)} \right)^{-1} + \frac{(1-\eta^{(2)})}{\bar{K}^{(1)} + \frac{4}{3}\bar{\mu}^{(1)}} \right]^{-1}, \\ \bar{E}_3^* &= \eta^{(2)} E^{(2)} + (1-\eta^{(2)}) \bar{E}^{(1)} + \frac{4\eta^{(2)}(1-\eta^{(2)})(\nu^{(2)} - \bar{\nu}^{(1)})^2 \bar{\mu}^{(1)}}{(1-\eta^{(2)})\bar{\mu}^{(1)}(K^{(2)} + \mu^{(2)}/3)^{-1} + \eta^{(2)}\bar{\mu}^{(1)}(\bar{K}^{(1)} + \bar{\mu}^{(1)}/3)^{-1}}, \\ \bar{\nu}_{31}^* &= \eta^{(2)} \nu^{(2)} + (1-\eta^{(2)}) \bar{\nu}^{(1)} + \frac{4\eta^{(2)}(1-\eta^{(2)})(\nu^{(2)} - \bar{\nu}^{(1)}) [\bar{\mu}^{(1)}(\bar{K}^{(1)} + \bar{\mu}^{(1)}/3)^{-1} - \bar{\mu}^{(1)}(K^{(2)} + \mu^{(2)}/3)^{-1}]}{(1-\eta^{(2)})\bar{\mu}^{(1)}(K^{(2)} + \mu^{(2)}/3)^{-1} + \eta^{(2)}\bar{\mu}^{(1)}(\bar{K}^{(1)} + \bar{\mu}^{(1)}/3)^{-1}}, \\ \bar{\mu}_{12}^* &= \bar{\mu}^{(1)} \left\{ 1 + \eta^{(2)} \left[\frac{\bar{\mu}^{(1)}}{\mu^{(2)} - \bar{\mu}^{(1)}} + \frac{\bar{K}^{(1)} + 7\bar{\mu}^{(1)}/3}{\bar{K}^{(1)} + 8\bar{\mu}^{(1)}/3} \right]^{-1} \right\}.\end{aligned}\quad (2.71)$$

Burada aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır:

$$\begin{aligned}\bar{K}^{(1)} &= \frac{\bar{E}^{(1)}}{3(1-2\bar{\nu}^{(1)})}, \quad \bar{K}^{(2)} = \frac{\bar{E}^{(2)}}{3(1-2\nu^{(2)})}, \quad \bar{G}^{(2)} = \frac{\bar{E}^{(2)}}{2(1+\bar{\nu}^{(2)})}, \\ \bar{E}^{(2)} &= \frac{E^{(2)}}{s}, \quad \bar{\nu}^{(2)} = \frac{\nu^{(2)}}{s}, \\ \bar{E}^{*(1)} &= E_0^{(1)} [1 - \bar{\Pi}_\beta(-\omega)], \quad \bar{\nu}^{*(1)} = \nu_0^{(1)} \left[1 + \frac{1-2\nu_0^{(1)}}{2\nu_0^{(1)}} \bar{\Pi}(-\omega) \right], \\ \bar{\mu}^{*(1)} &= \mu_0^{(1)} \left[1 - \frac{3}{2(1+\nu_0^{(1)})} \Pi_\beta(-\frac{3}{2(1+\nu_0^{(1)})} - \omega) \right], \quad \bar{\Pi}_\beta(-x) = \frac{1}{s(s^{1+\beta} + x)}.\end{aligned}\quad (2.72)$$

Böylece, yukarıda verileler çerçevesinde, sayısal sonuçları dikkate alalım ve ilk olarak $t' = 0$ ve $t' = \infty$ için, elastik stabilite kaybını inceleyelim; çünkü silindirin viskoelastik stabilite kaybında dış basınç kuvvetinin p yoğunluğu aşağıdaki eşitsizliği sağlamalıdır:

$$p_{cr,\infty} < p < p_{cr,0}. \quad (2.73)$$

Burada, $p_{cr,0}$ ($p_{cr,\infty}$), $t' = 0$ ($t' = \infty$) 'da elde edilen kritik kuvvettir.

Bernoulli kiriş teorisi, LEÜBST ve üçüncü merteye geliştirilmiş kiriş teorisi kapsamında elde edilen sonuçları karşılaştıralım. $p'_{3D,c,0}$ ($= p_{3D,cr,0} / E_0^{(1)}$) ve $p'_{3D,c,\infty}$ ($= p_{3D,cr,\infty} / E_0^{(1)}$), LEÜBST kullanılarak elde edilen boyutsuz kuvvetlerin kritik yoğunluk değerlerini gösterelim. Burada ve aşağıda 0 ve ∞ alt indisleri, sırasıyla $t' = 0$ ve $t' = \infty$ 'da hesaplanan kuvvetlerin kritik değerlerini gösterir. (2.60) ve (2.66) denklemlerine göre, Bernoulli kiriş teorisi ($p'_{E,c,0}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ ile gösterilir) ve üçüncü merteye geliştirilmiş kiriş teorisi ($p'_{R,c,0}$ ve $p'_{R,c,\infty}$ ile gösterilir) kapsamında elde edilen basınç kuvvetlerin yoğunluğuna tekabül eden kritik değerler, aşağıdaki ifadelerin kullanımı ile hesaplanabilir:

$$p'_{E,c,0} = \frac{E_{30}}{4E_0^{(1)}} \left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^2, \quad p'_{R,c,0} = \frac{E_{30}}{4E_0^{(1)}} \left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^2 \left(1 + \frac{8}{27} \frac{E_{30}}{G_0} \right)^{-1},$$

$$p'_{E,c,\infty} = \frac{E_{3\infty}}{4E_0^{(1)}} \left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^2, \quad p'_{R,c,\infty} = \frac{E_{3\infty}}{4E_0^{(1)}} \left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^2 \left(1 + \frac{8}{27} \frac{E_{3\infty}}{G_\infty} \right)^{-1}. \quad (2.74)$$

Burada $E_{30} = \bar{E}_3|_{s=0}$, $E_{3\infty} = \bar{E}_3^*|_{s=0}$, $G_0 = \bar{G}^*|_{s=\infty}$ ve $G_\infty = \bar{G}^*|_{s=0}$ dir.

Ayrıca, $\rho (= \pi R / \ell)$ parametresini tanımlıyoruz ve $\rho = 0.1, 0.2$ ve 0.3 olduğu durumları göz önüne alıyoruz. Çizelge 2.1, $p'_{3D,c,0}$, $p'_{R,c,0}$ ve $p'_{E,c,0}$ değerlerini gösterir.

Çizelge 2.1 $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ 'nun çeşitli değerleri için elde edilen, $p'_{3D.c.0}$, $p'_{R.c.0}$ ve $p'_{E.c.0}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D.c.0}$	$p'_{R.c.0}$	$p'_{E.c.0}$	$p'_{3D.c.0}$	$p'_{R.c.0}$	$p'_{E.c.0}$	$p'_{3D.c.0}$	$p'_{R.c.0}$	$p'_{E.c.0}$
1	0.00247	0.00248	0.00250	0.00963	0.00970	0.01000	0.0207	0.02104	0.02249
5	0.00740	0.00741	0.00750	0.0284	0.02867	0.03000	0.0603	0.06114	0.06750
10	0.01340	0.01351	0.01375	0.0510	0.05135	0.05500	0.1055	0.10668	0.12375
20	0.02540	0.02547	0.02615	0.0931	0.09358	0.10500	0.1841	0.18536	0.23625
30	0.03709	0.03714	0.03875	0.1317	0.13211	0.15500	0.2501	0.25095	0.34875

Çizelge 2.2, Çizelge 2.3 ve Çizelge 2.4 ise sırasıyla $\omega=0.5$, 1.0 ve 2.0 altında hesaplanan $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{R.c.\infty}$ ve $p'_{E.c.\infty}$ değerlerini göstermektedir.

Çizelge 2.2 $\omega = 0.5$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ 'nun çeşitli değerleri için elde edilen $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{R.c.\infty}$ ve $p'_{E.c.\infty}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D.c.\infty}$	$p'_{R.c.\infty}$	$p'_{E.c.\infty}$	$p'_{3D.c.\infty}$	$p'_{R.c.\infty}$	$p'_{E.c.\infty}$	$p'_{3D.c.\infty}$	$p'_{R.c.\infty}$	$p'_{E.c.\infty}$
1	0.00163	0.00163	0.00166	0.00611	0.00614	0.00667	0.01248	0.01258	0.01501
5	0.00621	0.00622	0.00666	0.02073	0.02073	0.02667	0.03661	0.03649	0.06001
10	0.01138	0.01137	0.01291	0.03368	0.03353	0.05167	0.05307	0.05244	0.11626
20	0.02018	0.02013	0.02541	0.05016	0.04959	0.10167	0.06963	0.06802	0.22876
30	0.02740	0.02728	0.03791	0.06026	0.05925	0.15167	0.07812	0.07567	0.34126

Çizelge 2.3 $\omega = 1.0$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{R.c.\infty}$ ve $p'_{E.c.\infty}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D.c.\infty}$	$p'_{R.c.\infty}$	$p'_{E.c.\infty}$	$p'_{3D.c.\infty}$	$p'_{R.c.\infty}$	$p'_{E.c.\infty}$	$p'_{3D.c.\infty}$	$p'_{R.c.\infty}$	$p'_{E.c.\infty}$
1	0.00184	0.00185	0.00187	0.00709	0.00713	0.00750	0.01494	0.01511	0.01689
5	0.00664	0.00665	0.00687	0.02411	0.02420	0.02750	0.04711	0.04734	0.06189
10	0.01235	0.01236	0.01312	0.04207	0.04212	0.05250	0.07606	0.07598	0.11814
20	0.02295	0.02294	0.02562	0.07007	0.06984	0.10250	0.11348	0.11239	0.23064
30	0.03256	0.03252	0.03812	0.09091	0.09031	0.15250	0.13671	0.13458	0.34314

Çizelge 2.4 $\omega = 2.0$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin çeşitli değerleri için elde edilen $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{R.c.\infty}$ ve $p'_{E.c.\infty}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D.c.\infty}$	$p'_{R.c.\infty}$	$p'_{E.c.\infty}$	$p'_{3D.c.\infty}$	$p'_{R.c.\infty}$	$p'_{E.c.\infty}$	$p'_{3D.c.\infty}$	$p'_{R.c.\infty}$	$p'_{E.c.\infty}$
1	0.00206	0.00206	0.00208	0.00796	0.00801	0.00833	0.01698	0.01720	0.01876
5	0.00692	0.00693	0.00708	0.02560	0.02614	0.02833	0.05315	0.05363	0.06376
10	0.01285	0.01287	0.01333	0.04645	0.04666	0.05333	0.09021	0.09064	0.12001
20	0.02421	0.02429	0.02583	0.08161	0.08168	0.10333	0.14589	0.14563	0.23251
30	0.03495	0.03495	0.03833	0.11077	0.11059	0.15333	0.18577	0.18445	0.34501

Bu değerler $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin değişik değerleri için elde edilmiştir. Bu sonuçlardan, $p'_{R.c.0}$ ($p'_{R.c.\infty}$) değerlerinin, karşı gelen $p'_{3D.c.0}$ ($p'_{3D.c.\infty}$) değerlerine çok yakın olduğu ve aralarındaki farkın da önemsiz olduğu anlaşılmaktadır. Bununla birlikte, $p'_{E.c.0}$ ($p'_{E.c.\infty}$) değerleri, bu değerlere karşı gelen $p'_{3D.c.0}$ ($p'_{3D.c.\infty}$) değerlerinden daha büyüktür ve aralarındaki fark $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ büyüdükçe artmaktadır.

Sonuçta, göz önüne alınan elastik silindirin stabilite kaybı problemlerine ait yukarıda verilen sonuçlara göre üçüncü merteye geliştirilmiş kiriş teorisi, LEÜBST kullanılarak elde edilen sonuçlara yeterince yakın sonuçlar vermektedir.

Şimdi, silindir malzemesinin viskoelastik olduğu durumu göz önüne alalım ve $t'_{cr.}$ kritik zamanını inceleyelim. LEÜBST ile verilen $t'_{cr.}$ değerlerini karşılaştırmak için, eşzamanlı olarak $[p'_{E.c.\infty}, p'_{E.c.0}]$, $[p'_{R.c.\infty}, p'_{R.c.0}]$ ve $[p'_{3D.c.\infty}, p'_{3D.c.0}]$ aralıklarına düşen $p' (= p / E_0^{(1)})$ değerlerini seçmeliyiz. Bununla birlikte, Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.4'deki verilerden anlaşılacağı üzere, bir çok durumda, $p' (= p / E_0^{(1)})$ 'un bu tür genel değerleri, sadece $[p'_{R.c.\infty}, p'_{R.c.0}]$ ve $[p'_{3D.c.\infty}, p'_{3D.c.0}]$ aralıkları için mevcuttur. Bu sebeple, biz sadece, LEÜBST kullanılarak elde edilen kritik zamanla ($t'_{3D.cr.}$ ile gösterilir), üçüncü merteye geliştirilmiş kiriş teorisi kullanılarak elde edilen kritik zamanı ($t'_{Rf.cr.}$ ile gösterilir) karşılaştıracğız.

Böylece, $\omega = 0.5$, $E^{(2)} / E_0^{(1)} = 5$ altında p' ve β 'nın farklı değerleri için, sırasıyla $\rho = 0.1, 0.2$ ve 0.3 durumları için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ ve $t'_{Rf.cr.}$ değerlerinin gösterildiğı Çizelge 2.5 - Çizelge 2.7'deki verileri göz önüne alalım.

Çizelge 2.5 $\rho = 0.1$, $\omega = 0.5$ ve $E^{(2)} / E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, p' ve β 'nın çeşitli değerleri için elde edilen, $t'_{3D.cr.}$ (üst sınır) ve $t'_{Rf.cr.}$ (alt sınır) değerleri

β	$p' \times 10^2$								
	0.637	0.650	0.660	0.670	0.680	0.690	0.700	0.710	0.720
	$t'_{3D.cr.} / t'_{Rf.cr.}$								
-0.3	$\frac{10.59}{11.24}$	$\frac{3.341}{3.508}$	$\frac{1.726}{1.810}$	$\frac{0.967}{1.015}$	$\frac{0.561}{0.590}$	$\frac{0.328}{0.346}$	$\frac{0.187}{0.199}$	$\frac{0.100}{0.108}$	$\frac{0.046}{0.051}$
-0.5	$\frac{35.92}{39.06}$	$\frac{7.143}{7.648}$	$\frac{2.835}{3.030}$	$\frac{1.259}{1.347}$	$\frac{0.588}{0.631}$	$\frac{0.277}{0.299}$	$\frac{0.126}{0.138}$	$\frac{0.052}{0.058}$	$\frac{0.018}{0.020}$
-0.7	$\frac{620.9}{713.9}$	$\frac{42.05}{47.13}$	$\frac{9.015}{10.07}$	$\frac{2.331}{2.609}$	$\frac{0.655}{0.738}$	$\frac{0.187}{0.212}$	$\frac{0.050}{0.058}$	$\frac{0.011}{0.014}$	$\frac{0.0019}{0.0025}$

Çizelge 2.6 $\rho = 0.2$, $\omega = 0.5$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, p' ve β 'nın çeşitli değerleri için elde edilen, $t'_{3D.cr.}$ (üst sınır) ve $t'_{Rf.cr.}$ (alt sınır) değerleri

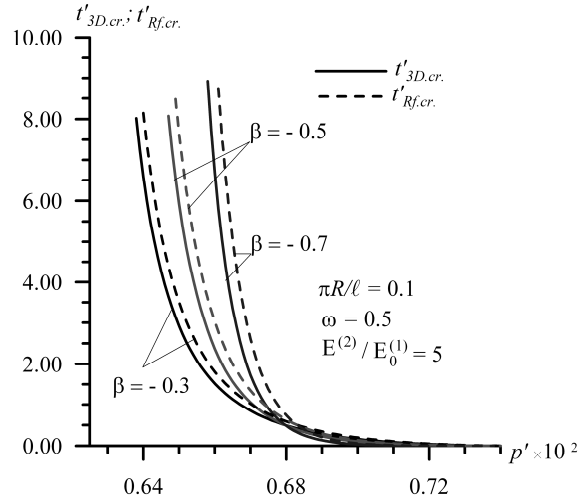
β	$p' \times 10^2$								
	2.250	2.300	2.350	2.400	2.450	2.500	2.550	2.600	2.650
	$t'_{3D.cr.}/t'_{Rf.cr.}$								
-0.3	$\frac{5.704}{5.998}$	$\frac{3.465}{3.660}$	$\frac{2.227}{2.366}$	$\frac{1.475}{1.578}$	$\frac{0.990}{1.068}$	$\frac{0.664}{0.724}$	$\frac{0.439}{0.486}$	$\frac{0.282}{0.318}$	$\frac{0.173}{0.200}$
-0.5	$\frac{15.10}{16.20}$	$\frac{7.517}{8.117}$	$\frac{4.049}{4.408}$	$\frac{2.275}{2.501}$	$\frac{1.301}{1.447}$	$\frac{0.743}{0.840}$	$\frac{0.417}{0.480}$	$\frac{0.225}{0.266}$	$\frac{0.113}{0.139}$
-0.7	$\frac{146.4}{165.7}$	$\frac{45.79}{52.04}$	$\frac{16.33}{18.81}$	$\frac{6.247}{7.315}$	$\frac{2.462}{2.941}$	$\frac{0.969}{1.187}$	$\frac{0.370}{0.468}$	$\frac{0.132}{0.174}$	$\frac{0.042}{0.059}$

Çizelge 2.7 $\rho = 0.3$, $\omega = 0.5$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, p' ve β 'nın çeşitli değerleri için elde edilen, $t'_{3D.cr.}$ (üst sınır) ve $t'_{Rf.cr.}$ (alt sınır) değerleri

β	$p' \times 10^2$								
	4.100	4.200	4.300	4.400	4.500	4.600	4.700	4.800	4.900
	$t'_{3D.cr.}/t'_{Rf.cr.}$								
-0.3	$\frac{8.151}{8.208}$	$\frac{5.634}{5.730}$	$\frac{4.074}{4.178}$	$\frac{3.035}{3.137}$	$\frac{2.308}{2.403}$	$\frac{1.779}{1.866}$	$\frac{1.383}{1.462}$	$\frac{1.080}{1.151}$	$\frac{0.843}{0.908}$
-0.5	$\frac{24.89}{25.13}$	$\frac{14.84}{15.20}$	$\frac{9.428}{9.769}$	$\frac{6.246}{6.541}$	$\frac{4.257}{4.504}$	$\frac{2.957}{3.161}$	$\frac{2.078}{2.247}$	$\frac{1.469}{1.608}$	$\frac{1.040}{1.153}$
-0.7	$\frac{336.9}{342.4}$	$\frac{142.3}{148.0}$	$\frac{66.80}{70.87}$	$\frac{33.62}{36.31}$	$\frac{17.74}{19.50}$	$\frac{9.670}{10.81}$	$\frac{5.373}{6.119}$	$\frac{3.015}{3.504}$	$\frac{1.695}{2.013}$

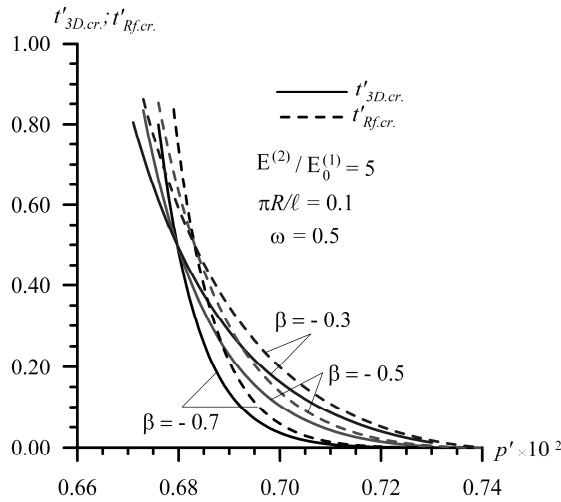
Ayrıca, kritik zamanla ilgili sonuçların daha açık gösterilebilmesi için $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ ve p' arasındaki bağıntıların Şekil 2.2'deki grafiği, $\rho = 0.1$, $\omega = 0.5$ durumunda, β 'nın farklı değerleri için verilmiştir. Şekil 2.2'de verilen sonuçlardan ve burada verilmeyen diğer

sayısal sonuçlardan, β 'nın farklı değerleri için oluşturulan bağıntıların analiz edildiği grafiğin, genel bir arakesit noktasına sahip olduğu sonucu çıkmaktadır.



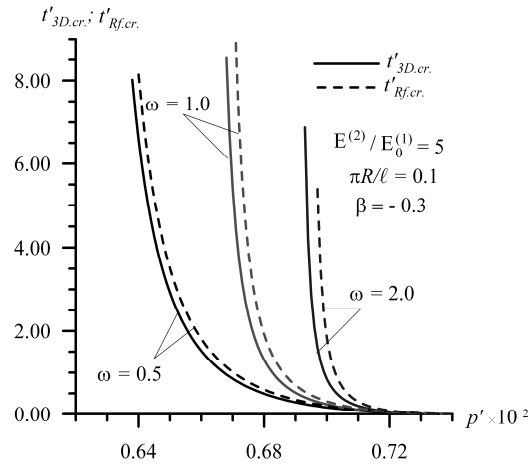
Şekil 2.2 $\omega = 0.5$, $\pi R / \ell = 0.1$ ve $E^{(2)} / E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, β reolojik parametrelerinin değişik değerleri için, p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağıntıların grafiği

β 'nın mutlak değerlerindeki artım, bu arakesit noktasından önce (sonra), kritik zaman değerlerinde artmaya (azalmaya) sebep olur. Şekil 2.3, bahsedilen arakesit noktasından sonra görünen grafiğin parçalarını göstermektedir.



Şekil 2.3 Şekil 2.2'de verilen grafiklerin, kesişme noktasından sonra ortaya çıkan bölümleri

β parametresinin matris malzemesinin reolojik parametrelerinden biri olduğuna ve deformasyonun başlangıcı civarında, yani, $t' = 0$ 'ın yakın komşuluğunda, bu viskoelastik malzemenin mekanik davranışını tanımladığına dikkat ediniz. Fakat diğer boyutsuz ω , reolojik parametresi, $t' = \infty$ civarında, matris malzemesinin mekanik özelliklerini tanımlar. Böylelikle, $E_{\infty}^{(1)}$ ($\nu_{\infty}^{(1)}$)'nin değerleri, ω ile artar (azalır). İyi bilinen mekanik kabullere göre, $p'_{cr,\infty}$ değerlerinin, ω ile artması gerektiği tahmin edilebilir. Bu tahmin, Çizelge 2.2 ve Çizelge 2.4'deki veri ile kanıtlanmaktadır. Ayrıca, ω parametresinin, $t'_{3D,cr.}$, $t'_{Rf,cr.}$ ve p' arasındaki bağıntıya ait grafikler üzerindeki etkisi, Şekil 2.4'de verilen grafikte verilmiştir.



Şekil 2.4 $\beta = -0.3$, $\pi R / \ell = 0.1$ ve $E^{(2)} / E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, ω reolojik parametresinin değişik değerleri için oluşturulan, p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D,cr.}$, $t'_{Rf,cr.}$ arasındaki bağıntıların grafiği

Çizelge 2.5 ve Çizelge 2.7'de verilen sonuçlar analiz edildiğinde, $E^{(2)} / E_0^{(1)} = 5$, $\omega = 0.5$, $\rho = 0.1$, 0.2 ve 0.3 olması durumunda, $t'_{Rf,cr.}$ değerlerinin, buna karşı gelen $t'_{3D,cr.}$ değerlerinden daha büyük olduğu görülür. $t'_{Rf,cr.}$ ve $t'_{3D,cr.}$ arasındaki fark, sadece ω ve β reolojik parametrelerine bağlı değil, aynı zamanda aşağıdaki bağıntılardan tahmin edilebileceği gibi, p' dış basınç kuvvetlerinin yoğunluğunun değerlerine de bağlıdır:

$$\begin{aligned} t'_{3D,cr.} \rightarrow 0 \text{ iken } p' &\rightarrow p'_{3D,c.0}; & t'_{3D,cr.} \rightarrow \infty \text{ iken } p' &\rightarrow p'_{3D,c.\infty}, \\ t'_{Rf,cr.} \rightarrow 0 \text{ iken } p' &\rightarrow p'_{R,c.0}; & t'_{Rf,cr.} \rightarrow \infty \text{ iken } p' &\rightarrow p'_{R,c.\infty} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Çizelge 2.5 ve Çizelge 2.7’de verilen sonuçlar ve burada verilmemiş diğer birçok sonuçlar, hem $p'_{3D.c.0}$ ve $p'_{R.c.0}$ arasındaki farkın, hem de $p'_{3D.c.\infty}$ ve $p'_{R.c.\infty}$ arasındaki farkın anlamsız olduğunu, gerçek $t'_{3D.cr.}$ ve $t'_{Rf.cr.}$ değerleri arasında anlamlı bir farka sebep olduğunu gösterir. Bu durumda $p'_{3D.c.0} > p'_{R.c.0}$ ($p'_{3D.c.0} < p'_{R.c.0}$) ise, bu takdirde $p'_{3D.c.0}$ veya $p'_{R.c.0}$ ‘ye yakın p' değeri için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ değerleri, karşı gelen $t'_{Rf.cr.}$ değerlerinden daha büyüktür (küçüktür). Ayrıca $p'_{3D.c.\infty} > p'_{R.c.\infty}$ ($p'_{3D.c.\infty} < p'_{R.c.\infty}$) ise, o vakit $p'_{3D.c.\infty}$ veya $p'_{R.c.\infty}$ ‘ye yakın p' için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ değerleri, bu değerlere karşı gelen $t'_{Rf.cr.}$ değerlerinden daha büyüktür (küçüktür). Çizelge 2.5 ve Çizelge 2.7’de, $p'_{3D.c.0} < p'_{R.c.0}$ ve $p'_{3D.c.\infty} < p'_{R.c.\infty}$ durumlarına karşı gelen sonuçlar verilmiştir. Dolayısıyla, bu çizelgelerde göz önüne alınan tüm durumlarda, $t'_{3D.cr.}$ değerleri, karşı gelen $t'_{Rf.cr.}$ değerlerinden daha küçüktür. Ele alınan sayısal sonuçlar, daha önce anlatılan durumlarla ilgili, yani $p'_{3D.c.0} < p'_{R.c.0}$ ve $p'_{3D.c.\infty} > p'_{R.c.\infty}$ durumuyla ilgilidir. Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2’de verilen sonuçlar, örneğin $\rho = 0.1$, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 10$ ve $\omega = 0.5$ durumunda, bu eşitsizlikleri sağlayan $p'_{3D.c.0}$, $p'_{R.c.0}$, $p'_{3D.c.\infty}$ ve $p'_{R.c.\infty}$ değerlerini gösterir. Bahsedilen durum için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ ve $t'_{Rf.cr.}$ ‘e ait değerler, Çizelge 2.8’de verilmiştir.

Çizelge 2.8 $\rho = 0.1$, $\omega = 0.5$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 10$ olması durumunda, p' ve β ‘nın çeşitli değerleri için elde edilen, $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf.cr.}$ (payda) değerleri

β	$p' \times 10^2$								
	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23
	$t'_{3D.cr.}/t'_{Rf.cr.}$								
-0.3	$\frac{73.51}{68.95}$	$\frac{27.39}{26.73}$	$\frac{14.47}{14.35}$	$\frac{8.865}{8.869}$	$\frac{5.881}{5.920}$	$\frac{4.094}{4.141}$	$\frac{2.937}{2.984}$	$\frac{2.148}{2.191}$	$\frac{1.588}{1.627}$
-0.5	$\frac{541.1}{494.7}$	$\frac{135.8}{131.34}$	$\frac{55.61}{54.96}$	$\frac{28.00}{28.02}$	$\frac{15.76}{15.91}$	$\frac{9.493}{9.648}$	$\frac{5.964}{6.098}$	$\frac{3.849}{3.958}$	$\frac{2.522}{2.608}$

Sonuç olarak, yukarıdaki tartışmaya göre, aşağıdaki bağıntılar ortaya çıkmalıdır:

$$p'_{3D.c.0} \text{ veya } p'_{R.c.0} \text{ 'nin değerlerine yakın olan } p' \text{ için } t'_{3D.cr.} > t'_{Rf.cr.}$$

$$p'_{3D.c.\infty} \text{ veya } p'_{R.c.\infty} \text{ 'nin değerlerine yakın olan } p' \text{ için } t'_{3D.cr.} < t'_{Rf.cr.} . \quad (2.76)$$

Çizelge 2.8'de verilen sonuçların incelemesi, (2.76) güvenilirlik bağıntılarını ortaya koymaktadır. 1958'de, Gerard ve Gilbert tarafından verilen kritik deformasyon yöntemi kullanılarak hesaplanan değerlere karşı gelen ve bu doktora tezinde geliştirilen yaklaşım ile elde edilen $t'_{3D.cr.}$ değerleri karşılaştırılmıştır. Bu yöntemle göre, viskoelastik silindirin kritik deformasyonuna karşı gelen uygun büyüklükler, elastik silindirin kritik deformasyonuna eşit olarak kabul edilmiştir. Sonuçta bu kabulü kullanarak, elastik silindir için kritik deformasyon, LEÜBST kapsamında belirlenmiştir. Göz önüne alınan durumda, sözü edilen kritik deformasyonun $p'_{3D.c.0}$ 'e karşı geldiğine dikkat edilmelidir. Bu tanıma göre, $p'_{3D.c.0} = p / E_3^*$ bağıntısını kullanarak, kritik zaman, p 'nin seçilen değerleri için belirlenmiştir. Boyutsuz kritik zaman değerleri ($t'_{cdm.cr.}$ ile gösterilmiştir), Çizelge 2.9'da verilen kritik deformasyon metodu kullanılarak belirlenmiştir.

Çizelge 2.9 $\rho = 0.1$, $\omega = 0.5$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ olması durumunda, p' ve β 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $t'_{cdm.cr.}$ (pay) ve $t'_{3D.cr.}$ (payda) değerleri

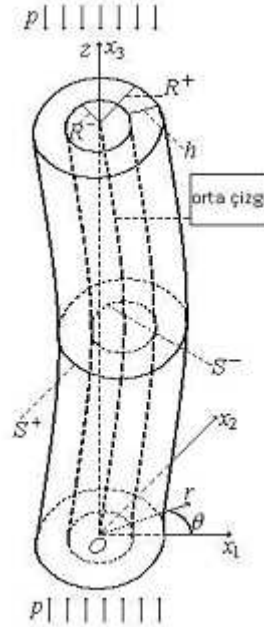
β	$p' \times 10^2$						
	0.660	0.670	0.680	0.690	0.700	0.710	0.720
	$t'_{cdm.cr.} / t'_{3D.cr.}$						
-0.3	$\frac{52.77}{1.726}$	$\frac{52.77}{0.967}$	$\frac{1.179}{0.561}$	$\frac{0.532}{0.328}$	$\frac{0.262}{0.187}$	$\frac{0.127}{0.100}$	$\frac{0.055}{0.046}$
-0.5	$\frac{340.2}{2.835}$	$\frac{7.577}{1.259}$	$\frac{1.662}{0.588}$	$\frac{0.545}{0.277}$	$\frac{0.202}{0.126}$	$\frac{0.074}{0.052}$	$\frac{0.023}{0.018}$
-0.7	$\frac{26326}{9.015}$	$\frac{46.40}{2.331}$	$\frac{3.701}{0.655}$	$\frac{0.578}{0.187}$	$\frac{0.110}{0.050}$	$\frac{0.020}{0.011}$	$\frac{0.0029}{0.0019}$

Bu değerler $\rho=0.1$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=5$ ve $\omega=0.5$ durumu için hesaplanmıştır. Aynı zamanda, bu çizelgede, $t'_{3D.cr.}$ 'ye karşı gelen değerler de verilmiştir. $t'_{3D.cr.}$ değerlerine karşı gelen $t'_{cdm.cr.}$ değerleri ile karşılaştırılması neticesinde, viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış silindirin stabilite kaybı için, kritik zamanın belirlenmesinde, kritik deformasyon metodunun kabul edilmez olduğu görülmüştür.

VİSKOELASTİK KOMPOZİT MALZEMEDEN YAPILMIŞ İÇİ BOŞ DAİRESEL SİLİNDİRİN GLOBAL STABİLİTE KAYBININ ÜÇ BOYUTLU ANALİZİ

3.1 Problemin Formülasyonu

Doğal halde bir global başlangıç sapması (eğintisi) olan bir içi boş silindir ele alınmaktadır ve $Or\theta z$ silindirik koordinat sistemi cinsinden, Lagrange koordinatlarını ve $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat sistemini kullanarak, bu silindirin noktalarının konumunu belirliyoruz (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Ele alınan içi boş silindirin geometrisi

Belirtilen global başlangıç eğintisi, içi boş silindirin “orta çizgisi”nin aşağıdaki denklemi ile verilir:

$$x_3 = t_3; \quad x_1 = A \sin\left(\frac{\pi}{\ell} t_3\right); \quad x_2 = 0. \quad (3.1)$$

Burada t_3 bir parametredir ve $t_3 \in (0, \ell)$. A , başlangıç eğintisinin genliğidir.

Silindirlerin en kesitlerinin, orta çizgisinin teğet vektörüne dik olan düzlem üzerinde olduğunu ve iç ve dış yarıçapları sırasıyla R^- ve R^+ sabitleri olan, kapalı dairesel bir halka olduğunu varsayıyoruz. Ayrıca, Akbarov (1998) ve Akbarov ve Yahnioglu (2001)'nin makalelerinde belirtildiği gibi, $A \ll l$ olduğunu varsayıyoruz ve bu küçük parametreyi aşağıdaki gibi tanımlıyoruz:

$$\varepsilon = \frac{A}{\ell}, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1. \quad (3.2)$$

Silindir malzemesinin, simetri eksenini $Ox_3 (Oz)$ eksenine ile kesişen, viskoelastik transversal izotrop olduğunu varsayıyoruz. Yukarıda belirtilen varsayımlar dahilinde, Oz eksenine doğrultusunda silindir uçlarına etki eden ve yoğunluğu p olan, düzgün yayılı normal basınç kuvvetleriyle, silindirin yüklü olması durumunda, silindirin sonsuz küçük başlangıç global sapmasının gelişimini araştırıyoruz.

Ele alınan durumda da (2.3) – (2.5) alan denklemleri geçerlidir.

Silindirin, $S^\pm$ yanal yüzeylerinde aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım.

$$\begin{aligned} t_{rr}|_{S^\pm} n_r^\pm + t_{r\theta}|_{S^\pm} n_\theta^\pm + t_{rz}|_{S^\pm} n_z^\pm &= 0, \quad t_{\theta r}|_{S^\pm} n_r^\pm + t_{\theta\theta}|_{S^\pm} n_\theta^\pm + t_{\theta z}|_{S^\pm} n_z^\pm = 0, \\ t_{zr}|_{S^\pm} n_r^\pm + t_{z\theta}|_{S^\pm} n_\theta^\pm + t_{zz}|_{S^\pm} n_z^\pm &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Burada n_r^+ , n_θ^+ ve n_z^+ (n_r^- , n_θ^- ve n_z^-), içi boş silindirin dış (iç) S^+ (S^-) yanal yüzeyine ait normal birim vektörün bileşenleridir.

Doğal halde, silindirin üst ve alt uçları aşağıdaki normal birim vektörlerle tanımlı düzlemler üzerindedir.

$$\vec{n}_0 = \frac{-\vec{k} - \varepsilon\pi\vec{i}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2\pi^2}} \quad (\text{alt uç düzlem için}),$$

$$\vec{n}_l = \frac{\vec{k} - \varepsilon \pi \vec{i}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \pi^2}} \quad (\text{üst uç düzlem için}). \quad (3.4)$$

Silindirin üst (alt) uç en kesitini $S_\ell (S_0)$ ile gösterelim ve bu uç kesitlerdeki kuvvetler için koşulları aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\begin{aligned} t_{zr}|_{S_0} n_{01} + t_{z\theta}|_{S_0} n_{02} + t_{zz}|_{S_0} n_{03} &= p, \\ t_{zr}|_{S_\ell} n_{\ell 1} + t_{z\theta}|_{S_\ell} n_{\ell 2} + t_{zz}|_{S_\ell} n_{\ell 3} &= -p. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Burada $n_{0j} (n_{\ell j})$, (3.4)'de tanımlanan normal birim vektörlerin bir bileşenidir. Yerdeğıştirmeler için sınır şartları aşağıda tartışılacaktır.

(2.3), (2.4), (3.3), (3.4) ve (3.5)'de bilinen notasyonlar kullanılmıştır.

Böylece, düşünölen problemin formölasyonu bitirilmiş ve bu formölasyona göre, p basınç kuvvetinin sabit bir değeri için bulunan zamanla (silindir malzemesinin viskoelastik olduğu durum için) veya p basınç kuvveti ile (silindir malzemesinin elastik olduğu durum için), silindirin sonsuz küçük başlangıç global sapmasının gelişiminin, (2.3), (2.4) ve (2.5) alan denklemleri ve (3.3) ve (3.5) sınır koşulları çerçevesinde incelenmesine gelinmiştir.

3.2 Çözüm Yöntemi

Şimdi önceki bölümde formüle edilmiş olan problemin çözüm yöntemini ele alalım. Kullanmayı düşündüğümüz yöntem, kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir. Sınır formu pertürbasyon tekniğı kullanılarak, (2.3) - (2.5) nonlinear integro-diferansiyel denklemleri için ele alınan sınır değeri problemi, lineer integro-diferansiyel denklem sistemine karşı gelen seri-sınır değeri problemine indirgenmiştir. (2.5)'deki operatörlerin ifadesi ve konvolüsyon teoremi yardımıyla, bu seri-sınır değeri problemlerinin, zamana göre Laplace dönüşümü yapılarak, Laplace uzayında lineer diferansiyel denklem sistemine karşı gelen, seri-sınır değeri problemine indirgenir. Bu parametrenin her bir sabit değeri için lineer problemler, değışkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak çözülmüş ve sonuç olarak, Schapery (1966) Sayısal Ters Dönüşüm

Yöntemi uygulanarak aranan değerler belirlenmiştir. Silindirin malzemesinin elastik olduğu durum için (2.5)'deki operatörler, mekanik sabitlerle değiştirilir ve dolayısıyla integro-diferansiyel denklemler yerine, diferansiyel denklemler elde edilir. Belirtilen durumda ele alınan problemler yukarıdaki işlemler çerçevesinde ancak, Laplace dönüşümü kullanılmaksızın incelenmiştir. Yukarıda özetlenen işlemler çerçevesinde, ilk olarak silindirin iç ve dış (S^+ ve S^-) yanal yüzeylerine ait denklemler elde edilir. Silindir kesitinin koşullarına göre, bu yüzeylerin koordinatlarının, aşağıdaki denklemleri sağladığı kabul edilmektedir.

$$\begin{aligned} \varepsilon f'(t_3)(x_{10}^\pm - \varepsilon f(t_3)) + x_{30}^\pm - t_3 &= 0, \\ (x_{20}^\pm)^2 + (x_{30}^\pm - t_3)^2 + (x_{10}^\pm - \varepsilon f(t_3))^2 &= (R^\pm)^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Burada, $f(t_3) = \ell \sin(\pi t_3 / \ell)$, $f'(t_3) = \pi \cos(\pi t_3 / \ell)$; $x_{10}^\pm$, $x_{20}^\pm$ ve $x_{30}^\pm$, $S^\pm$ yüzeyinin koordinatlarıdır. (3.6)'daki ilk denklem, t_3 parametresinin sabit değerine karşılık gelen noktada, silindirin orta çizgisine teğet olan vektöre dik düzlemin denklemdir. Ancak, (3.6)'daki ikinci denklem, bahsedilen düzlemde ortaya çıkan içi boş silindirin kesiti yönünde olan R^+ ve R^- yarıçaplı dış ve iç dairelerin denklemdir. Ayrıca $h = R^+ - R^-$ kalınlığının, silindir boyunca sabit olduğunu varsayıyoruz (Şekil 3.1.).

$x_{10}^\pm = r^\pm \cos \theta$ ve $x_{20}^\pm = r^\pm \sin \theta$ ilişkilerini kullanarak, $Or\theta z$ silindirik koordinat sisteminde, $S^\pm$ yüzeyi için aşağıdaki denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned} r^\pm &= r^\pm(\theta, t_3, \varepsilon) = \varepsilon f(t_3) \cos \theta \frac{1 + \varepsilon^2 (f'(t_3))^2}{1 + \varepsilon^2 (f'(t_3))^2 \cos^2 \theta} + \\ &\left\{ \frac{(R^\pm)^2 - \varepsilon^2 (f(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (f'(t_3))^2)}{1 + \varepsilon^2 (f'(t_3))^2 \cos^2 \theta} + \varepsilon^2 (f(t_3))^2 \cos^2 \theta \frac{(1 + \varepsilon^2 (f'(t_3))^2)^2}{(1 + \varepsilon^2 (f'(t_3))^2 \cos^2 \theta)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ z^\pm &= t_3 - \varepsilon f'(t_3)(r^\pm(\theta, t_3, \varepsilon) - \varepsilon f(t_3)), \quad f'(t_3) = \frac{df(t_3)}{dt_3}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.2) kabulünü ve $(\varepsilon f'(t_3))^2 \ll 1$ şartını kullanarak, bazı matematik işlemler sonucunda aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} r^\pm &= R^\pm + \varepsilon f(t_3) \cos \theta + O(\varepsilon^2), \quad z^\pm = t_3 - \varepsilon R^\pm f'(t_3) \cos \theta + O(\varepsilon^2), \\ n_r^\pm &= \pm \left(1 - \varepsilon^2 \left(R^\pm f''(t_3) - \frac{f(t_3)}{R^\pm} \right)^2 + O(\varepsilon^3) \right), \\ n_\theta^\pm &= \pm \left(\varepsilon \frac{f(t_3)}{R^\pm} \sin \theta + O(\varepsilon^2) \right), \quad n_z^\pm = \pm \left(-\varepsilon f'(t_3) \cos \theta + O(\varepsilon^2) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Burada $n_r^\pm$, $n_\theta^\pm$ ve $n_z^\pm$, S yüzeyine ait normal birim vektörün fiziksel bileşenleridir.

Şimdi silindirin alt ve üst eğimli uçlarının üzerinde bulunduğu düzlemin denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} x_3 &= -\varepsilon \pi x_1 \quad (\text{alt uç için}) \\ x_3 &= \varepsilon \pi x_1 + \ell \quad (\text{üst uç için}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.4) denklemine göre, bu uçların normal vektörlerinin bileşenlerinin ifadesi

$$\begin{aligned} n_{01} &= n_{\ell 1} = -\varepsilon \pi \left(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon \pi)^2 + O((\varepsilon \pi)^4) \right), \quad n_{03} = -\left(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon \pi)^2 + O((\varepsilon \pi)^4) \right), \\ n_{\ell 3} &= \left(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon \pi)^2 + O((\varepsilon \pi)^4) \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

olur. Sınır pertürbasyonu yöntemi işlemlerine göre, Akbarov (1998), Akbarov ve Yahnioglu (2001) ve diğer birçok çalışmalarda olduğu gibi, ele alınan problemi, sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılarak çözülecektir. Bu maksatla bilinmeyenler, ε cinsinden, (2.14) seri formunda temsil edilir.

(2.14) denklemi, (2.3) denkleminde yerine yazılarak, (2.14)'deki her bir yaklaşım için seri denklemler takımı elde edilir. (3.8) denklemi kullanılarak, (2.14) yaklaşımının her bir değeri $\{r = R^+; z_0 = t_3\}$ ve $\{r = R^-; z_0 = t_3\}$ noktaları civarında seriye açılır. Bu son ifadeler, (3.3)'daki sınır koşullarında yerlerine yazılır ve (3.8)'deki $n_r^\pm$, $n_\theta^\pm$ ve $n_z^\pm$ ifadeleri kullanılarak, bazı matematiksel dönüştürme işlemi yapıldıktan sonra, (2.14)

denklemindeki her bir yaklaşım için, $\{r = R^+; z_0 = t_3\}$ (S^+ dış yüzeyi için) ve $\{r = R^-; z_0 = t_3\}$ (S^- dış yüzeyi için)'da sağlanan sınır şartları elde edilir. Sıfıncı yaklaşım için, (2.3) denkleminin geçerli olduğu ve (3.3) koşulunun da $\{r = R^+; z_0 = t_3\}$ ve $\{r = R^-; z_0 = t_3\}$ noktalarında sağlanan koşullar ile değiştirildiği açıktır. Gerilme tensörü bileşenlerinin doğrusal olmayan kısımlarının çok küçük olduğu ve lineer kısımlarına kıyasla, ihmal edilebilir oldukları varsayılmaktadır. Bu varsayıma göre, sıfıncı yaklaşım için, aşağıdaki denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(0)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(0)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)}) &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{r \partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r}^{(0)} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(0)}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(0)}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{zr}^{(0)} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(0)}}{\partial z} &= 0, \\ \varepsilon_{rr}^{(0)} = \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(0)}}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta^{(0)}}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(0)}}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(0)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(0)} = \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ve sınır koşulları

$$\sigma_{rr}^{(0)} \Big|_{r=R^\pm} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} \Big|_{r=R^\pm} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(0)} \Big|_{r=R^\pm} = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir.

Ayrıca, (3.4), (3.5) ve (3.10)'den, sıfıncı yaklaşım için, aşağıdaki sınır koşulları

$$\sigma_{zz}^{(0)}(r, \theta, 0) = \sigma_{zz}^{(0)}(r, \theta, \ell) = -p \quad (3.13)$$

bulunur. (3.13) sınır koşulunun elde edildiği matematiksel işlem aşağıda verilmiştir.

Son varsayım dikkate alındığında, sonraki yaklaşımlar için, (2.18) ve (2.19) denklemleri elde edilir:

Şimdi ise, gerilme tensörünün fiziksel bileşenleri cinsinden, birinci yaklaşım için silindirin yanal yüzeyi üzerinde verilen sınır koşulları için

$$\sigma_{(ir)}^{(1)} \Big|_{(r=R^\pm, z=t_3)} + f_1 \frac{\partial \sigma_{(ir)}^{(0)}}{\partial r} \Big|_{(r=R^\pm, z=t_3)} + \varphi_1^\pm \frac{\partial \sigma_{(ir)}^{(0)}}{\partial z} \Big|_{(r=R^\pm, z=t_3)} +$$

$$\gamma_\theta^\pm \sigma_{(i)\theta}^{(0)} \Big|_{(r=R^\pm, z=t_3)} + \gamma_z^\pm \sigma_{(i)z}^{(0)} \Big|_{(r=R^\pm, z=t_3)} = 0 \quad (3.14)$$

bulunur. Burada $(i) = r, \theta, z$ 'dir. (3.14) denkleminde r, θ ve z ile (i) ifadesinin yerlerini değiştirerek, ele alınan yaklaşımdaki bağ koşullarına karşı gelen açık form elde edilir. Ayrıca, (3.14) denkleminde aşağıdaki notasyon kullanılmıştır.

$$\gamma_z^\pm = \pm (-f'(t_3) \cos(\theta)), \quad f_1 = f(t_3) \cos(\theta), \quad \varphi_1^\pm = -R^\pm f'(t_3) \cos(\theta),$$

$$\gamma_\theta^\pm = \pm \frac{f(t_3)}{R^\pm} \sin(\theta), \quad f'(t_3) = \frac{df(t_3)}{dt_3}, \quad f''(t_3) = \frac{d^2 f(t_3)}{dt_3^2}. \quad (3.15)$$

(3.5) sınır koşullarının sağlanıp sağlanmadığının kolayca incelenebilmesi için, bu koşullar, $Ox_1x_2x_3$ Kartezyen koordinat sisteminde yeniden yazılır:

$$\sigma_{3n} \left(\delta_n^j + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_0} n_{0j} = p; \quad \sigma_{3n} \left(\delta_n^j + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_\ell} n_{\ell j} = -p. \quad (3.16)$$

Burada δ_n^j , Kronecker sembolüdür, (3.16)'de kullanılan diğer notasyonlar gelenekseldir.

(3.12) ve (3.13) denklemlerine göre, (3.16) koşullarından aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\sigma_{3n} \left(\delta_n^j + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_0} n_{0j} = \sigma_{3n}(x_1, x_2, -\varepsilon \pi x_1, t) \left(\delta_n^1 + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, -\varepsilon \pi x_1, t)}{\partial x_n} \right) n_{01} +$$

$$\sigma_{3n}(x_1, x_2, -\varepsilon \pi x_1, t) \left(\delta_n^3 + \frac{\partial u_3(x_1, x_2, -\varepsilon \pi x_1, t)}{\partial x_n} \right) n_{03} = -p,$$

$$\sigma_{3n} \left(\delta_n^j + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_\ell} n_{\ell j} = \sigma_{3n}(x_1, x_2, \ell + \varepsilon \pi x_1, t) \left(\delta_n^1 + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, \ell + \varepsilon \pi x_1, t)}{\partial x_n} \right) n_{\ell 1} +$$

$$\sigma_{3n}(x_1, x_2, \ell + \varepsilon \pi x_1, t) \left(\delta_n^3 + \frac{\partial u_3(x_1, x_2, \ell + \varepsilon \pi x_1, t)}{\partial x_n} \right) n_{\ell 3} = p. \quad (3.17)$$

Aşağıdaki açılımları kullanarak,

$$\begin{aligned}
\sigma_{in}(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t) &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{in}^{(q)}(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t) = \sigma_{in}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t) + \\
\varepsilon \left(\sigma_{in}^{(1)}(x_1, x_2, 0, t) + (-\pi x_1) \frac{\partial \sigma_{in}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3} \right) &+ O\left((\varepsilon\pi)^2\right), \\
\frac{\partial u_m(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_j} &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \frac{\partial u_m^{(q)}(x_1, x_2, -\varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_m^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_j} + \\
\varepsilon \left(\frac{\partial u_m^{(1)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_j} + (-\pi x_1) \frac{\partial^2 u_m^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3 \partial x_j} \right) &+ O\left((\varepsilon\pi)^2\right), \\
\sigma_{in}(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t) &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{in}^{(q)}(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t) = \sigma_{in}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t) + \\
\varepsilon \left(\sigma_{in}^{(1)}(x_1, x_2, \ell, t) + (\pi x_1) \frac{\partial \sigma_{in}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_3} \right) &+ O\left((\varepsilon\pi)^2\right), \\
\frac{\partial u_m(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_j} &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \frac{\partial u_m^{(q)}(x_1, x_2, \ell + \varepsilon\pi x_1, t)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_m^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_j} + \\
\varepsilon \left(\frac{\partial u_m^{(1)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_j} + (\pi x_1) \frac{\partial^2 u_m^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_3 \partial x_j} \right) &+ O\left((\varepsilon\pi)^2\right). \tag{3.18}
\end{aligned}$$

(3.16)'deki sınır koşulları için, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\left\{ -\sigma_{3k}^{(0)} \left(\delta_k^3 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_k} \right) + \varepsilon \left[-\pi \sigma_{3k}^{(0)} \left(\delta_k^1 + \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_k} \right) - \sigma_{3k}^{(0)} \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_k} - \pi x_1 \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_3 \partial x_k} \right) - \right. \right. \\
&\left. \left. \left(\sigma_{3k}^{(1)} - \pi x_1 \frac{\partial \sigma_{3k}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \left(\delta_3^k + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_k} \right) \right] + O(\varepsilon^2) \right\}_{(x_1, x_2, 0)} = p, \\
&\left\{ \sigma_{3k}^{(0)} \left(\delta_k^3 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_k} \right) + \varepsilon \left[\pi \sigma_{3k}^{(0)} \left(\delta_k^1 + \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_k} \right) + \sigma_{3k}^{(0)} \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_k} + \pi x_1 \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_3 \partial x_k} \right) + \right. \right. \\
&\left. \left. \left(\sigma_{3k}^{(1)} + \pi x_1 \frac{\partial \sigma_{3k}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \left(\delta_3^k + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_k} \right) \right] + O(\varepsilon^2) \right\}_{(x_1, x_2, \ell)} = -p. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde, silindirin uçlarındaki yerdeğiştirme vektörünün $u_{(i)}$ fiziksel bileşenleri için, aşağıdaki açılımlar yazılabilir.

$$u_{(i)}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t) + \varepsilon \left(u_{(i)}^{(1)}(x_1, x_2, 0, t) + (-\pi x_1) \frac{\partial u_{(i)}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3} \right) + O\left((\varepsilon \pi)^2\right) = 0,$$

$$u_{(i)}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t) + \varepsilon \left(u_{(i)}^{(1)}(x_1, x_2, \ell, t) + (\pi x_1) \frac{\partial u_{(i)}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_3} \right) + O\left((\varepsilon \pi)^2\right) = 0,$$

$$(i) = r, \theta, z. \quad (3.20)$$

$(i) = r; \theta$ için (3.20) açılımındaki ε^q katsayısının sıfıra eşit olduğu varsayılmıştır. Sonuç olarak, bu varsayıma göre u_r ve u_θ yerdeğiştirmelerinin, birinci ve sonraki yaklaşımlar için, sınır koşulları bulunmuş olur.

$(\delta_k^3 + \partial u_3^{(0)} / \partial x_k) \approx \delta_k^3$, $(\delta_k^1 + \partial u_1^{(0)} / \partial x_k) \approx \delta_k^1$ kabulü ile (3.17) ve (3.20) açılımlarını dikkate alarak, sıfırncı ve birinci yaklaşımlar için (3.16) koşulundan, gerilmeler için aşağıdaki sınır koşulları elde edilir.

Sıfırncı yaklaşım için:

$$\sigma_{33}^{(0)}(x_1, x_2, 0) = \sigma_{33}^{(0)}(x_1, x_2, \ell) - p \quad (3.21)$$

Birinci yaklaşım için:

$$\begin{aligned} & \pi \sigma_{31}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t) + \sigma_{3k}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t) \left(\frac{\partial u_3^{(1)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_k} - \pi x_1 \frac{\partial^2 u_3^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3 \partial x_k} \right) + \\ & \left(\sigma_{33}^{(1)}(x_1, x_2, 0, t) - \pi x_1 \frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}(x_1, x_2, 0, t)}{\partial x_3} \right) = 0, \\ & \pi \sigma_{31}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t) + \sigma_{3k}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t) \left(\frac{\partial u_3^{(1)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_k} + \pi x_1 \frac{\partial^2 u_3^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_3 \partial x_k} \right) + \\ & \left(\sigma_{33}^{(1)}(x_1, x_2, \ell, t) + \pi x_1 \frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}(x_1, x_2, \ell, t)}{\partial x_3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Böylece, (3.21) koşulu $Or\theta z$ silindirik koordinat sisteminde yeniden yazılarak, (3.13) koşulu elde edilir.

(3.11), (3.12) ve (3.13)'ye göre, sıfıncı yaklaşım ile ilgili değerler aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$\sigma_{zz}^{(0)} = -p, \sigma_{(ij)}^{(0)} = 0, \text{ for } (ij) \neq zz. \quad (3.23)$$

(3.23) koşulundan, sıfıncı yaklaşımda yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibi alınabileceği çıkarılabilir:

$$u_r^{(0)} = a(t)r + a_0, u_\theta^{(0)} = b_0, u_z^{(0)} = c(t)z + c_0. \quad (3.24)$$

Burada a_0 , b_0 ve c_0 , sabitler; $a(t)$ ve $c(t)$, fonksiyonlar; t ise zamandır. $a(t)$ ve $c(t)$ fonksiyonları, (2.19) ve (3.23) denklemlerinden kolaylıkla belirlenebilir.

Aşağıda birinci yaklaşımla ilgili değerlerin belirlenmesi ele alınmıştır. (3.23) ifadesi dikkate alınarak, aşağıdaki alan denklemleri bu yaklaşım için, (2.18) denkleminde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} &= 0. \\ \epsilon_{rr}^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}, \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(1)}}{r}, \epsilon_{zz}^{(1)} = \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}, \epsilon_{r\theta}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(1)}}{r} \right), \\ \epsilon_{\theta z}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{r \partial \theta} \right), \epsilon_{zr}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Silindirin yanal yüzeyi üzerindeki aşağıdaki koşullar, (3.14) ve (3.23)'dan elde edilir.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)}(R^\pm, \theta, t_3, t) &= 0, \sigma_{r\theta}^{(1)}(R^\pm, \theta, t_3, t) = 0, \\ \sigma_{rz}^{(1)}(R^\pm, \theta, t_3, t) &= \pm \pi \sigma_{zz}^{(0)} \cos(\alpha z) \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

(3.20) ve (3.22) denklemlerine göre, birinci yaklaşım için sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(1)}(r, \theta, 0, t) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial u_z^{(1)}(r, \theta, 0, t)}{\partial z} &= 0, \quad u_r^{(1)}(r, \theta, 0, t) = 0, \quad u_\theta^{(1)}(r, \theta, 0, t) = 0 \\ \sigma_{zz}^{(1)}(r, \theta, \ell, t) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial u_z^{(1)}(r, \theta, \ell, t)}{\partial z} &= 0, \quad u_r^{(1)}(r, \theta, \ell, t) = 0, \quad u_\theta^{(1)}(r, \theta, \ell, t) = 0\end{aligned}\quad (3.27)$$

Böylece, (3.25), (2.19) ve (2.5) denklemleri ile (3.26) ve (3.27) koşulları, birinci yaklaşımın değerlerinin tespiti için problem formülasyonunu tamamlar. Bu problemin çözümü için Laplace dönüşümü

$$\bar{\Psi} = \int_0^\infty \Psi(t) e^{-st} dt \quad (3.28)$$

uygulanır. Birinci yaklaşıma ait bütün bağıntı ve denklemlerde, s parametresi, $s > 0$ olacak şekildedir. (3.25) denklemine bu şekilde bir uygulama yapıldıktan sonra, (2.19) bünye denklemleri aşağıdaki denklemlere dönüştürülürken, (3.26) ($\sigma_{zz}^{(0)}$ ile $\sigma_{zz}^{(0)}/s$ 'ın yerleri değiştirilmelidir) ve (2.33) sınır koşulları, aranan büyüklüklere karşı gelen Laplace dönüşümleri için geçerlidir:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{rr}^{(1)} &= \bar{A}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{12}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}; \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} = \bar{A}_{12}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}; \\ \bar{\sigma}_{zz}^{(1)} &= \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{33}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}; \quad \bar{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = (\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{22}^*) \bar{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)}; \\ \bar{\sigma}_{rz}^{(1)} &= 2\bar{G}^* \bar{\varepsilon}_{rz}^{(1)}; \quad \bar{\sigma}_{\theta z}^{(1)} = 2\bar{G}^* \bar{\varepsilon}_{\theta z}^{(1)}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Burada

$$\begin{Bmatrix} \bar{A}_{ij}^* \\ \bar{G}^* \end{Bmatrix} \bar{\phi}(s) = \begin{Bmatrix} A_{ij0} \\ G_0 \end{Bmatrix} \bar{\phi}(s) + \begin{Bmatrix} \bar{A}_{ij1}(s) \\ \bar{G}_1(s) \end{Bmatrix} \bar{\phi}(s) \quad (3.30)$$

dir. Yukarıda da belirtildiği gibi, (3.25) - (3.30) denklemleri LEÜBST'nin ilgili denklemleriyle çakışmaktadır.

(3.26) ve (3.27) koşullarının sağ tarafındaki ifadeleri göz önüne alarak, (2.37) – (2.39) denklemlerinin çözümünü aşağıdaki gibi buluruz.

$$\begin{aligned}\psi &= (B_1 I_1(\xi_1 \alpha r) + B_4 K_1(\xi_1 \alpha r)) \sin(\alpha z) \sin \theta, \\ \chi &= [B_2 I_1(\xi_2 \alpha r) + B_3 I_1(\xi_3 \alpha r) + B_5 K_1(\xi_2 \alpha r) + B_6 K_1(\xi_3 \alpha r)] \cos(\alpha z) \cos \theta\end{aligned}\quad (3.31)$$

Burada $I_1(x)$ sadece sanal argümanın birinci mertebeden Bessel fonksiyonu ve $K_1(x)$ birinci mertebeden Macdonald fonksiyonu, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ve B_6 ise bilinmeyen sabitlerdir.

(2.37) ve (3.29) bağıntılarında, bu çözümleri yerlerine yazarsak, aranan değerlerin Laplace dönüşümü için aşağıdaki ifadeleri buluruz.

$$\begin{aligned}\bar{u}_r^{(1)} &= \left[B_1 \frac{1}{r} I_1(\xi_1 \alpha r) + B_2 \xi_2 \alpha^2 I_1'(\xi_2 \alpha r) + B_3 \xi_3 \alpha^2 I_1'(\xi_3 \alpha r) + \right. \\ &\quad \left. B_4 \frac{1}{r} K_1(\xi_1 \alpha r) + B_5 \xi_2 \alpha^2 K_1'(\xi_2 \alpha r) + B_6 \xi_3 \alpha^2 K_1'(\xi_3 \alpha r) \right] \sin(\alpha z) \cos \theta, \\ \bar{u}_\theta^{(1)} &= \left[-B_1 \xi_1 \alpha I_1'(\xi_1 \alpha r) - \frac{\alpha}{r} B_2 I_1(\xi_2 \alpha r) - \frac{\alpha}{r} B_3 I_1(\xi_3 \alpha r) - \right. \\ &\quad \left. B_4 \xi_1 \alpha K_1'(\xi_1 \alpha r) - \frac{\alpha}{r} B_5 K_1(\xi_2 \alpha r) - \frac{\alpha}{r} B_6 K_1(\xi_3 \alpha r) \right] \sin(\alpha z) \sin \theta, \\ \bar{u}_z^{(1)} &= [B_2 D_2 \alpha^2 I_1(\xi_2 \alpha r) + B_3 D_2 \alpha^2 I_1(\xi_3 \alpha r) + \\ &\quad B_5 D_2 \alpha^2 K_1(\xi_2 \alpha r) + B_6 D_3 \alpha^2 K_1(\xi_3 \alpha r)] \sin(\alpha z) \cos \theta, \\ D_2 &= \frac{\bar{A}_{11}^* \xi_2^2 - \bar{G}^* - \sigma_{zz}^{(0)}}{\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*}, \quad D_3 = \frac{\bar{A}_{11}^* \xi_3^2 - \bar{G}^* - \sigma_{zz}^{(0)}}{\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*}, \\ \bar{\sigma}_{rr}^{(1)} &= \left\{ B_1 \left[-(\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \frac{1}{r^2} I_1(\xi_1 \alpha r) + (\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \frac{\xi_1 \alpha}{r} I_1'(\xi_1 \alpha r) \right] + \right. \\ &\quad B_2 \left[\bar{A}_{11}^* \alpha^3 \xi_2^2 I_1''(\xi_2 \alpha r) + \bar{A}_{12}^* \left(\frac{-\alpha}{r^2} I_1(\xi_2 \alpha r) + \frac{\xi_2 \alpha^2}{r} I_1'(\xi_2 \alpha r) \right) - \bar{A}_{13}^* D_2 \alpha^3 I_1(\xi_2 \alpha r) \right] + \\ &\quad B_3 \left[\bar{A}_{11}^* \alpha^3 \xi_3^2 I_1''(\xi_3 \alpha r) + \bar{A}_{12}^* \left(\frac{-\alpha}{r^2} I_1(\xi_3 \alpha r) + \frac{\xi_3 \alpha^2}{r} I_1'(\xi_3 \alpha r) \right) - \bar{A}_{13}^* D_3 \alpha^3 I_1(\xi_3 \alpha r) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_4 \left[-(\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \frac{1}{r^2} K_1(\xi_1 \alpha r) + (\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \frac{\xi_1 \alpha}{r} K_1'(\xi_1 \alpha r) \right] + \\
& B_5 \left[\bar{A}_{11}^* \alpha^3 \xi_2^2 K_1''(\xi_2 \alpha r) + \bar{A}_{12}^* \left(\frac{-\alpha}{r^2} K_1(\xi_2 \alpha r) + \frac{\xi_2 \alpha^2}{r} K_1'(\xi_2 \alpha r) \right) - \bar{A}_{13}^* D_2 \alpha^3 K_1(\xi_2 \alpha r) \right] + \\
& B_6 \left[\bar{A}_{11}^* \alpha^3 \xi_3^2 K_1''(\xi_3 \alpha r) + \bar{A}_{12}^* \left(\frac{-\alpha}{r^2} K_1(\xi_3 \alpha r) + \frac{\xi_3 \alpha^2}{r} K_1'(\xi_3 \alpha r) \right) - \bar{A}_{13}^* D_3 \alpha^3 K_1(\xi_3 \alpha r) \right] \Bigg\} \sin(\alpha z) \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \left\{ B_1 \left[\frac{1}{2} (\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \left(-\xi_1^2 \alpha^2 I_1''(\xi_1 \alpha r) - \frac{1}{r^2} I_1(\xi_1 \alpha r) + \frac{\xi_1 \alpha}{r} I_1'(\xi_1 \alpha r) \right) \right] + \right.$$

$$\left. B_2 \left[(\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \left(\frac{\alpha}{r^2} I_1(\xi_2 \alpha r) - \xi_2 \frac{\alpha^2}{r} I_1'(\xi_2 \alpha r) \right) \right] + \right.$$

$$\left. B_3 \left[(\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \left(\frac{\alpha}{r^2} I_1(\xi_3 \alpha r) - \xi_3 \frac{\alpha^2}{r} I_1'(\xi_3 \alpha r) \right) \right] + \right.$$

$$\left. B_4 \left[\frac{1}{2} (\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \left(-\xi_1^2 \alpha^2 K_1'(\xi_1 \alpha r) - \frac{1}{r^2} K_1(\xi_1 \alpha r) + \frac{\xi_1 \alpha}{r} K_1'(\xi_1 \alpha r) \right) \right] + \right.$$

$$\left. B_5 \left[(\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \left(\frac{\alpha}{r^2} K_1(\xi_2 \alpha r) - \xi_2 \frac{\alpha^2}{r} K_1'(\xi_2 \alpha r) \right) \right] + \right.$$

$$\left. B_6 \left[(\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \left(\frac{\alpha}{r^2} K_1(\xi_3 \alpha r) - \xi_3 \frac{\alpha^2}{r} K_1'(\xi_3 \alpha r) \right) \right] \right\} \sin(\alpha z) \sin \theta,$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^{(1)} = \left\{ B_1 \bar{G}^* \frac{\alpha}{r} I_1(\xi_1 \alpha r) + B_2 \bar{G}^* \alpha^3 \xi_2 I_1'(\xi_2 \alpha r) (1 + D_2) + B_3 \bar{G}^* \alpha^3 \xi_3 I_1'(\xi_3 \alpha r) (1 + D_3) \right.$$

$$\left. B_4 \bar{G}^* \frac{\alpha}{r} K_1(\xi_1 \alpha r) + B_5 \bar{G}^* \alpha^3 \xi_2 K_1'(\xi_2 \alpha r) (1 + D_2) + \right.$$

$$\left. B_6 \bar{G}^* \alpha^3 \xi_3 K_1'(\xi_3 \alpha r) (1 + D_3) \right\} \cos(\alpha z) \cos \theta;$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(1)} = \left\{ B_2 \left[\bar{A}_{13}^* \left(\xi_2^2 \alpha^3 I_1'(\xi_2 \alpha r) - \frac{\alpha}{r^2} I_1(\xi_2 \alpha r) + \frac{\alpha^2 \xi_2}{r} I_1'(\xi_2 \alpha r) \right) - \bar{A}_{33}^* D_2 \alpha^3 I_1(\xi_2 \alpha r) \right] + \right.$$

$$\left. B_3 \left[\bar{A}_{13}^* \left(\xi_3^2 \alpha^3 I_1'(\xi_3 \alpha r) - \frac{\alpha}{r^2} I_1(\xi_3 \alpha r) + \frac{\alpha^2 \xi_3}{r} I_1'(\xi_3 \alpha r) \right) - \bar{A}_{33}^* D_3 \alpha^3 I_1(\xi_3 \alpha r) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& B_5 \left[\bar{A}_{13}^* \left(\xi_2^2 \alpha^3 K_1''(\xi_2 \alpha r) - \frac{\alpha}{r^2} K_1(\xi_2 \alpha r) + \frac{\alpha^2 \xi_2}{r} K_1'(\xi_2 \alpha r) \right) - \bar{A}_{33}^* D_2 \alpha^3 K_1(\xi_2 \alpha r) \right] + \\
& B_6 \left[\bar{A}_{13}^* \left(\xi_3^2 \alpha^3 K_1''(\xi_3 \alpha r) - \frac{\alpha}{r^2} K_1(\xi_3 \alpha r) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\alpha^2 \xi_3}{r} K_1'(\xi_3 \alpha r) \right) - \bar{A}_{33}^* D_3 \alpha^3 K_1(\xi_3 \alpha r) \right] \Bigg\} \sin(\alpha z) \cos \theta. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Burada $I'(x) = dI(x)/dx$, $I''(x) = d^2I(x)/dx^2$, $K'(x) = dK(x)/dx$ ve $K''(x) = d^2K(x)/dx^2$ notasyonu kullanılmıştır. Üzerinde düşünülen problemin (3.32) çözümü, (3.27) sınır koşulunu otomatik olarak sağlar. B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 ve B_6 bilinmeyenlerinin sırasıyla $\alpha^2 B_1 (= C_1)$, $\alpha^3 B_2 (= C_2)$, $\alpha^3 B_3 (= C_3)$, $\alpha^2 B_4 (= C_4)$, $\alpha^3 B_5 (= C_5)$ ve $\alpha^3 B_6 (= C_6)$ ifadeleriyle yerlerini değiştirerek, bu bilinmeyenleri belirlenmesi için, (3.26) sınır koşulundan, aşağıdaki cebirsel denklemi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rr}^{(1)}(R^+, \theta, t_3, t) = 0 & \Rightarrow C_1 a_{11}(\alpha R^+) + C_2 a_{12}(\alpha R^+) + C_3 a_{13}(\alpha R^+) + \\
C_4 a_{14}(\alpha R^+) + C_5 a_{15}(\alpha R^+) + C_6 a_{16}(\alpha R^+) &= 0, \\
\bar{\sigma}_{r\theta}^{(1)}(R^+, \theta, t_3, t) = 0 & \Rightarrow C_1 a_{21}(\alpha R^+) + C_2 a_{22}(\alpha R^+) + C_3 a_{23}(\alpha R^+) + \\
C_4 a_{24}(\alpha R^+) + C_5 a_{25}(\alpha R^+) + C_6 a_{26}(\alpha R^+) &= 0, \\
\bar{\sigma}_{rz}^{(1)}(R^+, \theta, t_3, t) = \pi \sigma_{zz}^{(0)} \frac{1}{s} & \Rightarrow C_1 a_{31}(\alpha R^+) + C_2 a_{32}(\alpha R^+) + C_3 a_{33}(\alpha R^+) + \\
C_4 a_{34}(\alpha R^+) + C_5 a_{35}(\alpha R^+) + C_6 a_{36}(\alpha R^+) &= \pi \sigma_{zz}^{(0)} \frac{1}{s}, \\
\bar{\sigma}_{rr}^{(1)}(R^-, \theta, t_3, t) = 0 & \Rightarrow C_1 a_{11}(\alpha R^-) + C_2 a_{12}(\alpha R^-) + C_3 a_{13}(\alpha R^-) + \\
C_4 a_{14}(\alpha R^-) + C_5 a_{15}(\alpha R^-) + C_6 a_{16}(\alpha R^-) &= 0, \\
\bar{\sigma}_{r\theta}^{(1)}(R^-, \theta, t_3, t) = 0 & \Rightarrow C_1 a_{21}(\alpha R^-) + C_2 a_{22}(\alpha R^-) + C_3 a_{23}(\alpha R^-) + \\
C_4 a_{24}(\alpha R^-) + C_5 a_{25}(\alpha R^-) + C_6 a_{26}(\alpha R^-) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{rz}^{(1)}(R^-, \theta, t_3, t) &= -\pi \sigma_{zz}^{(0)} \frac{1}{s} 0 \Rightarrow C_1 a_{31}(\alpha R^-) + C_2 a_{32}(\alpha R^-) + C_3 a_{33}(\alpha R^-) + \\ &C_4 a_{34}(\alpha R^-) + C_5 a_{35}(\alpha R^-) + C_6 a_{36}(\alpha R^-) = -\pi \sigma_{zz}^{(0)} \frac{1}{s}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) katsayılarına ait ifadeler, (3.32) denkleminde kolaylıkla elde edilebilir.

Böylelikle, birinci yaklaşıma ait değerlerin Laplace dönüşümü tamamen belirlenmiş olur. (2.14)'deki ikinci ve sonraki yaklaşımların değerlerinin Laplace dönüşümü de, hesaplamalarda, görünen değişiklikler dikkate alınarak, birinci yaklaşımın değerleri gibi belirlenebilir. Bununla birlikte, Akbarov (1998), Akbarov vd. (1997), Akbarov ve Yahnioglu (2001)'nin çalışmalarında gösterildiği gibi, stabilite kaybı problemleri için, sadece sıfırıncı ve birinci yaklaşımın dikkate alınması yeterlidir, çünkü ikinci ve sonraki yaklaşımların hesaplanması, kritik parametrelerin değerlerini değiştirmez.

Aranan değerlerin gerçek değeri, Schapery (1966) tarafından geliştirilen yöntem kullanılarak belirlenir. Örneğin buna göre, $u_r^{(1)}(r, \theta, t_3, t)$ yerdeğiştirmesinin gerçek değeri, aşağıdaki ifade yardımıyla belirlenir

$$u_r^{(1)}(r, \theta, t_3, t) \approx \left(s \bar{u}_r^{(1)}(r, \theta, t_3, s) \right) \Big|_{s=1/(2t)}.\quad (3.34)$$

Şimdi de stabilite kaybı kriterinin seçilmesini dikkate alalım. Sunulan araştırmada, bu mevzu, stabilite kaybı altında anlaşılabilecek olup, burada

$$t \rightarrow t_{cr.} \text{ (veya elastik durum için } p \rightarrow p_{cr.} \text{) iken } \max_{\substack{t_3 \in (0, \ell) \\ r \in (0, R) \\ \theta \in (0, 2\pi)}} |u_r^{(1)}(r, \theta, t_3, t)| \rightarrow \infty.\quad (3.35)$$

Böylelikle, kritik zaman değerleri ya da kritik kuvvet değerleri, (3.35)'deki başlangıç sapma kriterinden belirlenmiş olur.

3.3 Üç Boyutlu Silindirik Kirişin Stabilité Kaybının Yaklaşık Denklemleri

3.3.1 Bernoulli Kiriş Teorisi

Aşağıdaki şekilde sunulan silindirin yerdeğıştirmesine ait Bernoulli hipotezi kullanılarak (3.25) - (3.30) denklemlerinden bu şartlar altında, göz önüne alınan silindirik kiriş için yaklaşık stabilité kaybı denklemleri türetilir. Değerlendirilen durum için, silindir kirişine ait yaklaşık stabilité kaybı denklemleri, silindirin yer değıştirmelerinin aşağıda sunulan Bernoulli varsayımı kullanılarak, (3.25) - (3.30) nolu denklemlerden çıkarılabilir.

$$u_r^{(1)} = u_r^{(1)}(\theta, z, t) = w(z) \cos \theta, u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(1)}(\theta, z, t) = -w(z) \sin \theta,$$

$$u_z^{(1)} = u_z^{(1)}(r, \theta, z, t) = -r \frac{dw(z)}{dz} \cos \theta \quad (3.36)$$

(3.36) ifadesi yazılırken, silindirin orta çizgisindeki uzamanın $-r dw(z)/dz \cos \theta$ terimi bağlamında çok az olduğu ve dikkate alınmadığı varsayılır. Dolayısıyla, (3.25) ve (3.36)'e göre aşağıdakileri elde ettik:

$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = -r \cos \theta \frac{d^2 w(z)}{dz^2}, \quad \varepsilon_{(ij)}^{(1)} = 0 \quad \text{for } (ij) \neq zz, \quad \sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0,$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = E_3^* \varepsilon_{zz}^{(1)} = -r \cos \theta E_3^* \frac{d^2 w(z)}{dz^2} \quad (3.37)$$

burada E_3^* operatördün ve E_{30} 'un silindir malzemesinin Oz eksenini yönündeki

elastisite modülüsünün anlık değeri $E_3^* \phi(t) = E_{30} \phi(t) + \int_0^t E_{31}(t-\tau) \phi(\tau) d\tau$; $E_{31}(t)$ de

bu malzemenin relaksasyonunu belirleyen bir fonksiyondur.

Varsayalım ki,

$$\sigma_{rz}^{(1)} \neq 0, \quad \sigma_{\theta z}^{(1)} \neq 0 \quad (3.38)$$

(3.37) ve (3.38) nolu ilişkileri dikkate alarak, (3.25)'den aşağıdaki denklemi elde ettik.

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial z} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} \cos \theta = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{\partial z} - \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} \sin \theta = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(1)} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^3 w}{dz^3} (-r \cos \theta) = 0 \quad (3.39)$$

(3.39)'deki denklemlerdeki ifadeleri kullanarak, aşağıdaki sunumları yazabiliriz.

$$\sigma_{rz}^{(1)} = s_{rz}^{(1)} \cos \theta, \quad \sigma_{\theta z}^{(1)} = s_{\theta z}^{(1)} \sin \theta, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = s_{zz}^{(1)} \cos \theta \quad (3.40)$$

Yukarıdaki sunumlara göre, (3.39) ve (3.40)'dan aşağıdaki denklemleri elde ettik.

$$\frac{ds_{rz}^{(1)}}{dz} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} = 0, \quad \frac{ds_{\theta z}^{(1)}}{dz} - \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \quad (3.41)$$

Son denklemi (3.39), $(r^2 \cos \theta)$ ile çarpıp r bağlamında $[R^+, R^-]$ aralığında ve θ bağlamında $[0, 2\pi]$ aralığında integralini alarak, aşağıdaki dönüştürmeleri yazabiliriz.

$$\int_{R^-}^{R^+} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{\partial \theta} r^2 \cos \theta dr d\theta = \pi \int_{R^-}^{R^+} s_{rz}^{(1)} r dr; \quad \int_{R^-}^{R^+} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(1)} r^2 \cos \theta dr d\theta = \pi \int_{R^-}^{R^+} s_{rz}^{(1)} r dr;$$

$$\int_{R^-}^{R^+} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} r^2 \cos \theta dr d\theta = \pi \int_{R^-}^{R^+} \frac{ds_{rz}^{(1)}}{dr} r^2 dr = \pi \left[\int_{R^-}^{R^+} \frac{d}{dr} (s_{rz}^{(1)} r^2) dr - 2 \int_{R^-}^{R^+} s_{rz}^{(1)} r dr \right] =$$

$$\pi s_{rz}^{(1)} \Big|_{r=R^+} (R^+)^2 - \pi s_{rz}^{(1)} \Big|_{r=R^-} (R^-)^2 - 2\pi \int_{R^-}^{R^+} s_{rz}^{(1)} r dr =$$

$$\pi \sigma_{zz}^{(0)} \left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right) \cos(\alpha z) - 2\pi \int_{R^-}^{R^+} s_{rz}^{(1)} r dr,$$

$$\int_{R^-}^{R^+} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} r^2 \cos \theta dr d\theta = \pi \int_{R^-}^{R^+} E_3^* \frac{d^3 w}{dz^3} (-r^3) dr = -\frac{\pi \left((R^+)^4 - (R^-)^4 \right)}{4} E_3^* \frac{d^3 w}{dz^3} = -J E_3^* \frac{d^3 w}{dz^3},$$

$$J = \frac{\pi \left((R^+)^4 - (R^-)^4 \right)}{4}. \quad (3.42)$$

Burada,

$$\sigma_{rz}^{(1)}(R^+, \theta, t_3, t) = 2\pi \sigma_{zz}^{(0)} \cos(\alpha z) \cos \theta, \Rightarrow s_{rz}^{(1)} \Big|_{r=R^+} = 2\pi \sigma_{zz}^{(0)} \cos(\alpha z),$$

$$\sigma_{rz}^{(1)}(R^-, \theta, t_3, t) = 2\pi \sigma_{zz}^{(0)} \cos(\alpha z) \cos \theta, \Rightarrow s_{rz}^{(1)} \Big|_{r=R^-} = -2\pi \sigma_{zz}^{(0)} \cos(\alpha z)$$

Dir ve (3.26)'da verilen şartlar kullanılmıştır. Buradan, (3.42) dönüştürmesi ve (3.41) ilişkisi dikkate alınarak, (3.39)'deki son denklemden $w(z)$ yer değiştirmesi için aşağıdaki denklem bulunur.

$$-\left(E_3^* + \sigma_{zz}^{(0)}\right) J \frac{d^4 w}{dz^4} + \pi \left(\left(R^+\right)^2 - \left(R^-\right)^2 \right) \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} = \left(\left(R^+\right)^2 - \left(R^-\right)^2 \right) \alpha \sigma_{zz}^{(0)} \sin(\alpha z). \quad (3.43)$$

(3.36) ve (3.37) ifadeleri, (3.27) de kullanılarak ve uç kesit alanları üzerinde integrasyonu yapılarak yaklaşık Bernoulli yaklaşımı için aşağıdakiler bulunur.

$$w|_{z=0;\ell} = 0, \quad \left. \frac{d^2 w}{dz^2} \right|_{z=0;\ell} = 0. \quad (3.44)$$

Gerçek durumlar için $|\sigma_{zz}^{(0)}| \ll |E_3^*|$ eşitsizliğinin ortaya çıktığı ve bu eşitsizlik dikkate alındığında, $\sigma_{zz}^{(0)}$ 'in denklem (3.43)'nin ilk teriminde dikkate alınmayabileceği açıktır.

$P = -\pi^2 \left(\left(R^+\right)^2 - \left(R^-\right)^2 \right) \sigma_{zz}^{(0)}$ notasyonu kullanarak bu dikkate almama durumundan sonra, başlangıç eğinti kriteri kapsamında Euler kritik kuvvetinin elde edildiği klasik stabilite kaybı denklemi elde edilir.

Sınır değer probleminin (3.43) ve (3.44) çözümü için, bu denklemlere (3.28) Laplace dönüşümü uygulanmıştır. $E_3^* d^4 w/dz^4$ teriminin dönüştürülmesi için konvolüsyon teoremi kullanılarak, $\bar{w}$ için yazılan aynı denklem ve uç şartları bulunur. Örneğin, bu dönüştürmeden sonra, denklem (3.43) yerine aşağıdaki denklem elde edilir.

$$-\bar{E}_3^* J \frac{d^4 \bar{w}}{dz^4} - P \frac{d^2 \bar{w}}{dz^2} = -\frac{1}{s\pi} \alpha P \sin(\alpha z). \quad (3.45)$$

Silindirin alt ve üst uçlarındaki yüzeylerde (3.44) sınır şartlarına göre, (3.45) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$\bar{w} = \bar{A}(s) \sin \alpha z. \quad (3.46)$$

(3.46) nolu denklemi (3.45) ile değiştirip bazı matematiksel işlemler yapılarak, $\bar{A}(s)$ bilinmeyeni için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\bar{A}(s) = -\frac{P\ell}{s\pi^2} \left[P - \frac{\pi^2 \bar{E}_3 J}{\ell^2} \right]^{-1}. \quad (3.47)$$

Schapery(1966) yöntemini kullanarak, $\bar{A}(s)$ 'nın aslı aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$A(t) = \left(s\bar{A}(s) \right) \Big|_{s=(1/(2t))}. \quad (3.48)$$

Silindir malzemesinin elastik olduğu durumlar için, (3.47) denkleminde aşağıdaki ifade elde edilir.

$$A = -\frac{P\ell}{\pi^2} \left[P - \frac{\pi^2 E_3 J}{\ell^2} \right]^{-1}. \quad (3.49)$$

(3.35)'e göre, Bernoulli kirişi için stabilite kaybı kriteri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$t \rightarrow t_{cr}$ iken $A(t) \rightarrow \infty$ (silindir malzemesinin viskoelastik olduğu durum için),

$P \rightarrow P_{cr}$ iken $A \rightarrow \infty$ (silindir malzemesinin elastik olduğu durum için) . (3.50)

Aşağıdaki ifade Euler kritik kuvveti ile kesişen kritik kuvvet için (3.49) ve (3.50) nolu denklemlerden anlaşılmaktadır.

$$P_{Eu.cr} = \frac{\pi^2 E_3 J}{\ell^2}. \quad (3.51)$$

3.3.2 Üçüncü Mertebe Geliştirilmiş Kiriş Teorisi

Üçüncü mertebe geliştirilmiş kiriş teorisi için teorinin, silindirik kiriş için Kromm (1955) tarafından geliştirilen ve $u_r^{(1)}$ ve $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirmelerinin (3.36)'deki gibi sunulduğu ancak $u_z^{(1)}$ yer değiştirmesinin aşağıdaki gibi verildiği hali kullanılmıştır.

$$u_z^{(1)} = u_z^{(1)}(r, \theta, z, t) = -r \frac{dw(z)}{dz} \cos \theta + \frac{1}{4} \left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right) r \cos \theta - \frac{1}{3} r^3 \cos^3 \theta \Big) \varphi(z). \quad (3.52)$$

$u_r^{(1)}$, $u_\theta^{(1)}$ ve $u_z^{(1)}$ ifadelerini (3.25) denklemlerinde yerine yazılarak, gerilmeler ve şekil değiştirmeler için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{rz}^{(1)} &= \frac{1}{8} \left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right) \cos \theta \left(1 - \frac{r^2}{\left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right)} \cos^2 \theta \right) \varphi(z), \\
\mathcal{E}_{\theta z}^{(1)} &= -\frac{1}{8} \left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right) \sin \theta \left(1 - \frac{r^2}{\left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right)} \cos^2 \theta \right) \varphi(z), \\
\mathcal{E}_{zz}^{(1)} &= -r \cos \theta \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \frac{1}{4} \left(\left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right) r \cos \theta - \frac{r^3 \cos \theta}{3} \right) \frac{d\varphi}{dz}, \\
\mathcal{E}_{rr}^{(1)} &= \mathcal{E}_{\theta\theta}^{(1)} = \mathcal{E}_{r\theta}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0, \\
\sigma_{rz}^{(1)} &= 2G^* \mathcal{E}_{rz}^{(1)} = G^* \frac{1}{4} \left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right) \cos \theta \left(1 - \frac{r^2}{\left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right)} \cos^2 \theta \right) \varphi(z), \\
\sigma_{\theta z}^{(1)} &= 2G^* \mathcal{E}_{\theta z}^{(1)} = -G^* \frac{1}{4} \left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right) \sin \theta \left(1 - \frac{r^2}{\left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right)} \cos^2 \theta \right) \varphi(z), \\
\sigma_{zz}^{(1)} &= E_3^* \mathcal{E}_{zz}^{(1)} = E_3^* \left(-r \cos \theta \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \frac{1}{4} \left(\left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right) r \cos \theta - \frac{r^3 \cos \theta}{3} \right) \frac{d\varphi}{dz} \right). \quad (3.53)
\end{aligned}$$

(3.53)'de verilen ifadelerden, (3.39) ve (3.40) denklemlerinin geçerli olduğu görülür. Öncelikle, (3.39), (3.40) ve (3.53) nolu denklemlere Laplace dönüşümü uygulanır ve önceki durumda yapılan integrasyon işlemi tekrarlanarak, (3.39) nolu denklemden $\bar{w}(z, s)$ fonksiyonu için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
E_3^* J \left[-1 - \frac{\sigma_{zz}^{(0)}}{E_3^*} - \frac{4}{3} \frac{\Re \sigma_{zz}^{(0)}}{\left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right)} G^* \left(1 + \frac{\sigma_{zz}^{(0)}}{E_3^*} \right) \right] \frac{d^4 \bar{w}(z, s)}{dz^4} + \\
\pi \left((R^+)^2 - (R^-)^2 \right) \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 \bar{w}(z, s)}{dz^2} = \frac{\alpha \pi \left((R^+)^2 - (R^-)^2 \right)}{s} \sigma_{zz}^{(0)} \sin \alpha z \quad (3.54)
\end{aligned}$$

burada

$$\Re = \left((R^+)^2 + (R^-)^2 \right) - \frac{(R^+)^6 - (R^-)^6}{9 \left((R^+)^4 - (R^-)^4 \right)} \quad (3.55)$$

dir. Böylece, (3.44) sınır koşulu ve

$$1 - \frac{\sigma_{zz}^{(0)}}{E_3^*} - \frac{4}{3} \frac{\Re \sigma_{zz}^{(0)}}{((R^+)^2 + (R^-)^2) G^*} \left(1 + \frac{\sigma_{zz}^{(0)}}{E_3^*} \right) \approx 1 - \frac{4}{3} \frac{\Re \sigma_{zz}^{(0)}}{((R^+)^2 + (R^-)^2) G^*}$$

kabulü kullanılarak, (3.54) nolu denklemden $\bar{A}(s)$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\bar{A}(s) = -\frac{P\ell}{s\pi^2} \left[P \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\bar{E}_3^* \Re \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2}{\bar{G}^*} \right) - \frac{\pi^2 \bar{E}_3^* J}{\ell^2} \right]^{-1}. \quad (3.56)$$

Burada, önceki durumda olduğu gibi, $P = -\pi^2 ((R^+)^2 - (R^-)^2) \sigma_{zz}^{(0)}$ notasyonu kullanılmıştır.

(3.48)'de verilen eşitlik kullanılarak $A(t)$ fonksiyonu belirlenir. Kritik parametrelerin değerlerinin belirlenmesi için, (3.50) nolu ifade de kullanılabilir. Aşağıdaki ifade, silindir malzemesinin elastik olduğu durumda bilinmeyen A için (3.56) nolu denklemden yazılabilir.

$$A = -\frac{P\ell}{s\pi^2} \left[P \left(1 + \frac{1}{3} \frac{E_3 \Re \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2}{G} \right) - \frac{\pi^2 E_3 J}{\ell^2} \right]^{-1}. \quad (3.57)$$

(3.57) nolu denklemden, silindir malzemesinin elastik olduğu durumda elde edilen kritik kuvvet için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$P = \frac{\pi^2 E_3 J}{\ell^2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{E_3 \Re \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2}{G} \right)^{-1}. \quad (3.58)$$

3.4 Sayısal Sonuçlar ve Yorumlanması

Silindir malzemesi (2.4) kısmındaki gibi kabul edilir. Böylece, yukarıdaki hazırlık çerçevesinde, sayısal sonuçlar incelenmiş ve ilk olarak $t' = 0$ ve $t' = \infty$ için ele alınan silindirin elastik stabilite kaybına ait sayısal sonuçlar verilmiştir. Çünkü silindirin viskoelastik stabilite kaybında,

$$p = \sigma_{zz}^{(0)} = P \left[\pi \left((R^+)^2 - (R^-)^2 \right) \right]^{-1} \quad (3.59)$$

dış basınç kuvvetinin yoğunluğu aşağıdaki eşitsizliği sağlamalıdır:

$$p_{cr,\infty} < p < p_{cr,0} \quad . \quad (3.60)$$

Burada $p_{cr,0} (p_{cr,\infty})$, $t' = 0 (t' = \infty)$ 'da elde edilen kritik kuvvettir.

LEÜBST kapsamında elde edilen sonuçlar ile, Bernoulli kiriş teorisi kapsamında ve üçüncü mertebe geliştirilmiş kiriş teorisi kapsamında elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. $p'_{3D,c,0} (= p_{3D,cr,0} / E_0^{(1)})$ ve $p'_{3D,c,\infty} (= p_{3D,cr,\infty} / E_0^{(1)})$ ile, LEÜBST kullanılarak elde edilen boyutsuz kuvvetlerin yoğunluğunun kritik değerleri temsil edilmiştir. Bu kısımda alt indis 0 ve ∞ kuvvetlerin kritik değerlerinin sırasıyla $t' = 0$ ve $t' = \infty$ için hesaplandığını belirtmektedir. (3.51) ve (3.58) nolu denklemlere göre, Bernoulli kiriş teorisi kapsamında elde edilen kritik değerler ($p'_{E,c,0}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ ile ifade edilen) ve üçüncü mertebe kiriş teorisi kapsamında elde edilen kritik değerler ($p'_{R,c,0}$ ve $p'_{R,c,\infty}$ ile ifade edilen) aşağıdaki ifadeler kullanılarak hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} p'_{E,c,0} &= \frac{E_{30}}{4E_0^{(1)}} \left[\left(\frac{\pi R^+}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{\pi R^-}{\ell} \right)^2 \right], \quad p'_{E,c,\infty} = \frac{E_{3\infty}}{4E_0^{(1)}} \left[\left(\frac{\pi R^+}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{\pi R^-}{\ell} \right)^2 \right], \\ p'_{R,c,0} &= \frac{E_{30}}{4E_0^{(1)}} \left[\left(\frac{\pi R^+}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{\pi R^-}{\ell} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{1}{3} \frac{E_{30} \Re \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2}{G_0} \right)^{-1}, \\ p'_{R,c,\infty} &= \frac{E_{3\infty}}{4E_0^{(1)}} \left[\left(\frac{\pi R^+}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{\pi R^-}{\ell} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{1}{3} \frac{E_{3\infty} \Re \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2}{G_\infty} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.61)$$

burada $E_{30} = \bar{E}_3^*|_{s=\infty}$, $E_{3\infty} = \bar{E}_3^*|_{s=0}$, $G_0 = \bar{G}^*|_{s=\infty}$ ve $G_\infty = \bar{G}^*|_{s=0}$.

$\rho = \pi R^+ / \ell$ parametresi için, $\rho = 0.1, 0.2$ ve 0.3 olarak seçilmiştir.

$p'_{3D,c,0}$, $p'_{R,c,0}$ ve $p'_{E,c,0}$ değerleri sırasıyla $h/R^+ = 0.3, 0.5$ ve 0.8 olan durumlarda $E^{(2)} / E_0^{(1)}$ 'nin çeşitli değerleri için Çizelge 3.1, Çizelge 3.2 ve Çizelge 3.3'de verilmiştir.

Çizelge 3.1 $h/R^+ = 0.3$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D.c.0}$, $p'_{R.c.0}$ ve $p'_{E.c.0}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D.c.0}$	$p'_{R.c.0}$	$p'_{E.c.0}$	$p'_{3D.c.0}$	$p'_{R.c.0}$	$p'_{E.c.0}$	$p'_{3D.c.0}$	$p'_{R.c.0}$	$p'_{E.c.0}$
1	0.00365	0.00368	0.00372	0.01380	0.01422	0.01489	0.02848	0.03030	0.03352
5	0.01085	0.01098	0.01174	0.04005	0.04175	0.04469	0.07992	0.08675	0.10057
10	0.01962	0.01994	0.02048	0.06975	0.07390	0.08194	0.13265	0.14281	0.18438
20	0.03640	0.03736	0.03911	0.12077	0.13182	0.15645	0.21206	0.24784	0.35201
30	0.05225	0.05414	0.05773	0.16302	0.18254	0.23094	0.26907	0.32544	0.51963

Çizelge 3.2 $h/R^+ = 0.5$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ' 'nin değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D.c.0}$, $p'_{R.c.0}$ ve $p'_{E.c.0}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D.c.0}$	$p'_{R.c.0}$	$p'_{E.c.0}$	$p'_{3D.c.0}$	$p'_{R.c.0}$	$p'_{E.c.0}$	$p'_{3D.c.0}$	$p'_{R.c.0}$	$p'_{E.c.0}$
1	0.00307	0.00309	0.00312	0.01177	0.01202	0.01250	0.02474	0.02584	0.0281
5	0.00917	0.00923	0.00937	0.03444	0.03541	0.03749	0.07046	0.07449	0.00843
10	0.01663	0.01680	0.01718	0.06069	0.06303	0.06874	0.11941	0.12848	0.15468
20	0.03106	0.03158	0.03281	0.10734	0.11358	0.13125	0.19748	0.21875	0.29531
30	0.04489	0.04590	0.04843	0.14757	0.15870	0.19375	0.25715	0.29122	0.43593

Çizelge 3.3 $h/R^+ = 0.8$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ 'nun değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D,c,0}$, $p'_{R,c,0}$ ve $p'_{E,c,0}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D,c,\infty}$	$p'_{R,c,\infty}$	$p'_{E,c,\infty}$	$p'_{3D,c,\infty}$	$p'_{R,c,\infty}$	$p'_{E,c,\infty}$	$p'_{3D,c,\infty}$	$p'_{R,c,\infty}$	$p'_{E,c,\infty}$
1	0.00257	0.00257	0.00259	0.00998	0.01007	0.01039	0.02139	0.02181	0.02339
5	0.00768	0.00770	0.00779	0.02945	0.02976	0.03119	0.06199	0.06331	0.07019
10	0.01399	0.01403	0.01429	0.05261	0.05324	0.05719	0.10776	0.11027	0.12869
20	0.02634	0.02645	0.02729	0.09548	0.09684	0.10919	0.18600	0.19094	0.24569
30	0.03835	0.03855	0.04029	0.13418	0.13649	0.16119	0.25048	0.25775	0.36299

$E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\omega = 0.5$ olduğu durumda elde edilen $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri ve sırasıyla $h/R^+ = 0.3$, 0.5 ve 0.8 için, Çizelge 3.4, Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6'da verilmiştir.

Çizelge 3.4 $h/R^+ = 0.3$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ 'nun değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D,c,\infty}$	$p'_{R,c,\infty}$	$p'_{E,c,\infty}$	$p'_{3D,c,\infty}$	$p'_{R,c,\infty}$	$p'_{E,c,\infty}$	$p'_{3D,c,\infty}$	$p'_{R,c,\infty}$	$p'_{E,c,\infty}$
1	0.00236	0.00240	0.00248	0.00823	0.00878	0.00994	0.01529	0.01727	0.02237
5	0.00847	0.00895	0.00935	0.02363	0.02762	0.03974	0.03545	0.04501	0.08942
10	0.01454	0.01597	0.01924	0.03378	0.04211	0.07699	0.04507	0.06050	0.17323
20	0.02331	0.02701	0.03787	0.04380	0.05808	0.15149	0.05319	0.07381	0.34086
30	0.02935	0.03537	0.05649	0.04896	0.06670	0.22599	0.05731	0.07978	0.50848

Çizelge 3.5 $h/R^+ = 0.5$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ 'nun değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D.c,\infty}$, $p'_{R.c,\infty}$ ve $p'_{E.c,\infty}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D.c,\infty}$	$p'_{R.c,\infty}$	$p'_{E.c,\infty}$	$p'_{3D.c,\infty}$	$p'_{R.c,\infty}$	$p'_{E.c,\infty}$	$p'_{3D.c,\infty}$	$p'_{R.c,\infty}$	$p'_{E.c,\infty}$
1	0.00200	0.00202	0.00208	0.00720	0.00751	0.00834	0.01390	0.01506	0.01876
5	0.00738	0.00763	0.00833	0.02208	0.02442	0.03334	0.03524	0.04118	0.07501
10	0.01300	0.01377	0.01614	0.03313	0.03823	0.06459	0.04713	0.05696	0.14533
20	0.02167	0.02380	0.03177	0.04527	0.05433	0.12709	0.05834	0.07126	0.28595
30	0.02807	0.03165	0.04739	0.05212	0.06343	0.18959	0.06443	0.07791	0.42658

Çizelge 3.6 $h/R^+ = 0.8$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ 'nun değişik değerleri için elde edilen $p'_{3D.c,\infty}$, $p'_{R.c,\infty}$ ve $p'_{E.c,\infty}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D.c,\infty}$	$p'_{R.c,\infty}$	$p'_{E.c,\infty}$	$p'_{3D.c,\infty}$	$p'_{R.c,\infty}$	$p'_{E.c,\infty}$	$p'_{3D.c,\infty}$	$p'_{R.c,\infty}$	$p'_{E.c,\infty}$
1	0.00169	0.00169	0.00173	0.00629	0.00636	0.00694	0.01270	0.01299	0.01561
5	0.00640	0.00645	0.00693	0.02090	0.02135	0.02774	0.03616	0.03730	0.06241
10	0.01164	0.01172	0.01345	0.03342	0.03433	0.05374	0.05154	0.05323	0.12091
20	0.02038	0.02074	0.02643	0.04887	0.05041	0.10574	0.06684	0.06858	0.02379
30	0.02741	0.02801	0.03943	0.05819	0.05998	0.15774	0.07482	0.07605	0.35491

Bu sonuçlardan değerlendirilen tüm durumlar için aşağıdaki ilişkilerin meydana geldiği görülmektedir.

$$p'_{3D.c,0} < p'_{R.c,0} < p'_{E.c,0}, \quad p'_{3D.c,\infty} < p'_{R.c,\infty} < p'_{E.c,\infty},$$

$$|p'_{E.c,0} - p'_{3D.c,0}| > |p'_{E.c,0} - p'_{R.c,0}|, \quad |p'_{E.c,\infty} - p'_{3D.c,\infty}| > |p'_{E.c,\infty} - p'_{R.c,\infty}|. \quad (3.62)$$

Ayrıca, bu sonuçlardan (3.62)'de verilen fark değerlerinin $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve ρ ile arttığı tespit edilmiştir. Ancak, h/R^+ değerlerindeki azalma kritik kuvvetlerin aşağıdaki boyutsuz yoğunluğunun artmasına neden olur. Toplam boyutsuz kuvvet için

$$P' = \frac{P}{E_0^{(1)}} \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 = p' \pi \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \left((R^+)^2 - (R^-)^2 \right) \quad (3.63)$$

yazılabilir. Bu durumda, h/R^+ değerlerindeki azalma P' kritik değerlerindeki azalmaya neden olmuş olmalıdır. Bu, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ olan durumlarda $P'_{3D.c.0}$ değerlerini gösteren Çizelge 3.7'deki verilerle kanıtlanmıştır.

Çizelge 3.7 $P'_{3D.c.0} \left(= p'_{3D.c.0} \pi \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \left((R^+)^2 - (R^-)^2 \right) \right)$ boyutsuz toplam kritik kuvvet olmak üzere, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R^+ = 0.5$ olması durumunda elde edilen $P'_{3D.c.0} \times 10^2$ değerleri

$\rho = \frac{\pi R^+}{\ell}$	h / R^+						
	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.2	0.256	0.297	0.324	0.341	0.350	0.355	0.357
0.3	1.152	1.354	1.494	1.587	1.647	1.682	1.701

$p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{R.c.\infty}$ ve $p'_{E.c.\infty}$ değerleri boyutsuz reolojik parametre ω 'ye bağlıdır. Çizelge 3.4 ve Çizelge 3.6'da, $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{R.c.\infty}$ ve $p'_{E.c.\infty}$ 'nin değerleri $\omega = 0.5$ olacak şekilde verilmiştir. ω parametresinin $t' = \infty$ 'deki matris malzemesinin mekanik özelliklerini karakterize ettiğine dikkat edilmelidir. $E_\infty^{(1)} \left(\nu_\infty^{(1)} \right)$ 'nin değerleri ω ile artar (azalır). İlgili mekanik görüşlere göre $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{R.c.\infty}$ ve $p'_{E.c.\infty}$ 'nin değerleri ω ile artmalıdır. Örnek olarak, Çizelge 3.8'de $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{R.c.\infty}$ ve $p'_{E.c.\infty}$ değerleri $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ ve $h/R^+ = 0.5$ kapsamında ω ve ρ 'nin muhtelif değerleri için verilmiştir. Bu sonuçlar yukarıda belirtilen mekanik görüşleri teyit etmektedir.

Çizelge 3.8 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ ve $h/R^+ = 0.5$ olması durumunda, $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri üzerine, ω reolojik parametresinin etkisi

ω	$\rho = \pi R / \ell$								
	0.1			0.2			0.3		
	$p'_{3D,c,\infty}$	$p'_{R,c,\infty}$	$p'_{E,c,\infty}$	$p'_{3D,c,\infty}$	$p'_{R,c,\infty}$	$p'_{E,c,\infty}$	$p'_{3D,c,\infty}$	$p'_{R,c,\infty}$	$p'_{E,c,\infty}$
0.5	0.00738	0.00763	0.00833	0.02208	0.02442	0.03334	0.03524	0.04118	0.07501
1	0.00809	0.00837	0.00859	0.02756	0.02928	0.03438	0.04991	0.05559	0.07736
2	0.00852	0.00862	0.00885	0.03067	0.03199	0.03542	0.05927	0.06423	0.07970

Yukarıdaki sonuçlardan $E^{(2)}/E_0^{(1)} \leq 5$, $h/R^+ \geq 0.5$ ve $\rho \leq 0.2$ ilişkilerinin üç boyutlu yaklaşım ve üçüncü mertebe geliştirilmiş kiriş teorisi çerçevesinde elde edilen sonuçlar arasındaki farkı eşzamanlı olarak sağlayan elastik stabilite kaybı problemlerinin %5-6'dan fazla olmadığı anlaşılmaktadır.

Şimdi ise, silindir malzemesinin viskoelastik olduğu durum ele alınarak kritik zaman analiz edilecektir. LEÜBST tarafından verilen kritik zaman değerlerini yaklaşık kiriş teorilerinin verdiği değerlerle karşılaştırmak için, eşzamanlı olarak $[p'_{E,c,\infty}, p'_{E,c,0}]$, $[p'_{R,c,\infty}, p'_{R,c,0}]$ ve $[p'_{3D,c,\infty}, p'_{3D,c,0}]$ aralığına düşen $p' (= p / E_0^{(1)})$ değerleri seçilmelidir. Bununla birlikte, Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.6'daki verilere uygun olarak, bir çok durumda $p' (= p / E_0^{(1)})$ 'in bu ortak değerleri sadece $[p'_{R,c,\infty}, p'_{R,c,0}]$ ve $[p'_{3D,c,\infty}, p'_{3D,c,0}]$ aralıkları için mevcuttur. Bu nedenle, sadece LEÜBST kullanılarak elde edilen kritik zamanı ($t'_{3D,cr.}$ ile ifade edilen) üçüncü mertebe geliştirilmiş kiriş teorisi kullanılarak elde edilen zamanla ($t'_{Rf,cr.}$ ile ifade edilen) karşılaştırılacaktır.

Dolayısıyla, Çizelge 3.9, Çizelge 3.10 ve Çizelge 3.11'de verilen ve $t'_{3D,cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf,cr.}$ (payda) değerleri $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\rho = 0.2$ ve $\omega = 0.5$ için sırasıyla $h/R^+ = 0.3, 0.5$ ve 0.8 ile reolojik parametrenin çeşitli değerleri için verilmiştir.

Çizelge 3.9 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\rho = 0.2$ ve $\omega = 0.5$ iken, $h/R^+ = 0.3$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf.cr.}$ (payda) değerleri

β	$p' \times 10^2$								
	2.80	2.90	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60
	$t'_{3D.cr.}/t'_{Rf.cr.}$								
-0.3	$\frac{4.088}{179.1}$	$\frac{2.688}{24.79}$	$\frac{1.835}{10.03}$	$\frac{1.277}{5.306}$	$\frac{0.895}{3.153}$	$\frac{0.625}{1.988}$	$\frac{0.430}{1.289}$	$\frac{0.287}{0.843}$	$\frac{0.182}{0.546}$
-0.5	$\frac{9.475}{1883.}$	$\frac{5.269}{118.1}$	$\frac{3.087}{33.30}$	$\frac{1.859}{13.64}$	$\frac{1.130}{6.587}$	$\frac{0.684}{3.453}$	$\frac{0.405}{1.883}$	$\frac{0.230}{1.039}$	$\frac{0.122}{0.566}$
-0.7	$\frac{67.35}{\sim O(10^6)}$	$\frac{25.33}{4516.}$	$\frac{10.39}{123.7}$	$\frac{4.463}{123.7}$	$\frac{1.948}{36.74}$	$\frac{0.843}{12.52}$	$\frac{0.351}{4.561}$	$\frac{0.137}{1.692}$	$\frac{0.047}{0.614}$

Çizelge 3.10 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\rho = 0.2$ ve $\omega = 0.5$ iken, $h/R^+ = 0.5$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf.cr.}$ (payda) değerleri

β	$p' \times 10^2$								
	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00	3.10	3.20	3.30
	$t'_{3D.cr.}/t'_{Rf.cr.}$								
-0.3	$\frac{5.348}{65.03}$	$\frac{2.969}{13.23}$	$\frac{1.773}{5.511}$	$\frac{1.092}{2.827}$	$\frac{0.673}{1.579}$	$\frac{0.405}{0.907}$	$\frac{0.231}{0.516}$	$\frac{0.117}{0.280}$	$\frac{0.046}{0.135}$
-0.5	$\frac{13.80}{455.8}$	$\frac{6.056}{49.07}$	$\frac{2.943}{14.39}$	$\frac{1.492}{5.653}$	$\frac{0.759}{2.501}$	$\frac{0.373}{1.152}$	$\frac{0.169}{0.523}$	$\frac{0.065}{0.222}$	$\frac{0.017}{0.080}$
-0.7	$\frac{126.0}{42853}$	$\frac{31.94}{1044}$	$\frac{9.596}{135.1}$	$\frac{3.095}{28.48}$	$\frac{1.003}{7.316}$	$\frac{0.307}{2.009}$	$\frac{0.082}{0.539}$	$\frac{0.016}{0.129}$	$\frac{0.0019}{0.0239}$

Çizelge 3.11 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\rho = 0.2$ ve $\omega = 0.5$ iken, $h/R^+ = 0.8$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf.cr.}$ (payda) değerleri

β	$p' \times 10^2$								
	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50
	$t'_{3D.cr.}/t'_{Rf.cr.}$								
-0.3	$\frac{8.358}{14.29}$	$\frac{5.023}{7.609}$	$\frac{3.249}{4.605}$	$\frac{2.192}{2.984}$	$\frac{1.513}{2.010}$	$\frac{1.056}{1.382}$	$\frac{0.738}{0.959}$	$\frac{0.511}{0.664}$	$\frac{0.347}{0.454}$
-0.5	$\frac{25.78}{54.64}$	$\frac{12.64}{22.61}$	$\frac{6.870}{11.19}$	$\frac{3.959}{6.098}$	$\frac{2.357}{3.507}$	$\frac{1.425}{2.076}$	$\frac{0.862}{1.244}$	$\frac{0.515}{0.744}$	$\frac{0.299}{0.437}$
-0.7	$\frac{357.2}{1249.}$	$\frac{108.8}{287.0}$	$\frac{39.41}{88.93}$	$\frac{15.73}{32.31}$	$\frac{6.631}{12.85}$	$\frac{2.866}{5.366}$	$\frac{1.240}{2.286}$	$\frac{0.526}{0.970}$	$\frac{0.213}{0.400}$

Geometrik parametre ρ 'nun değişiminin kritik zamana etkisinin gösterilmesi için, $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf.cr.}$ (payda) değerleri de sırasıyla $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R^+ = 0.5$ altında $\rho = 0.1$ ve 0.3 durumlarında sırasıyla, Çizelge 3.12 ve Çizelge 3.13'de verilmiştir.

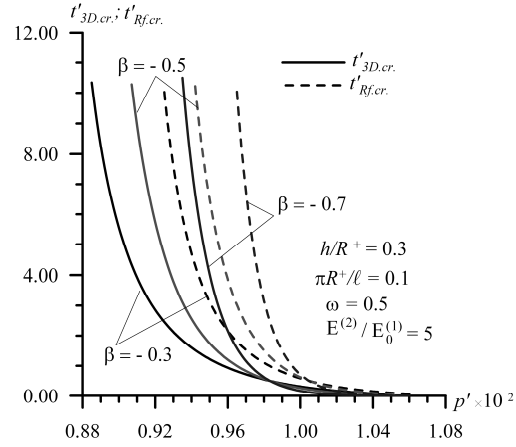
Çizelge 3.12 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R^+ = 0.5$ ve $\omega = 0.5$ iken, $\rho = 0.1$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf.cr.}$ (payda) değerleri

β	$p' \times 10^2$								
	0.780	0.790	0.800	0.810	0.820	0.830	0.840	0.850	0.860
	$t'_{3D.cr.}/t'_{Rf.cr.}$								
-0.3	$\frac{4.431}{17.61}$	$\frac{2.837}{7.614}$	$\frac{1.898}{4.133}$	$\frac{1.302}{2.486}$	$\frac{0.906}{1.582}$	$\frac{0.634}{1.039}$	$\frac{0.443}{0.694}$	$\frac{0.306}{0.466}$	$\frac{0.207}{0.311}$
-0.5	$\frac{10.60}{71.94}$	$\frac{5.682}{22.63}$	$\frac{3.236}{9.622}$	$\frac{1.910}{4.722}$	$\frac{1.150}{2.507}$	$\frac{0.698}{1.392}$	$\frac{0.4227}{0.791}$	$\frac{0.251}{0.453}$	$\frac{0.145}{0.257}$
-0.7	$\frac{81.29}{1975}$	$\frac{28.72}{287.4}$	$\frac{11.23}{69.10}$	$\frac{4.671}{21.10}$	$\frac{2.006}{7.348}$	$\frac{0.872}{2.757}$	$\frac{0.377}{1.075}$	$\frac{0.1592}{0.4246}$	$\frac{0.0641}{0.1653}$

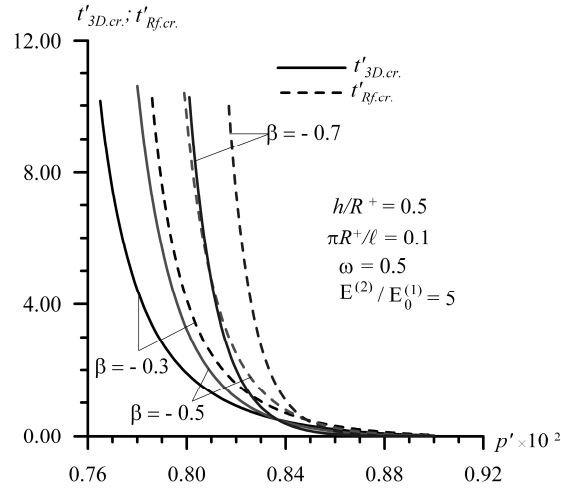
Çizelge 3.13 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R^+ = 0.5$ ve $\omega = 0.5$ iken, $\rho = 0.3$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf.cr.}$ (payda) değerleri

β	$p' \times 10^2$								
	4.20	4.30	4.40	4.50	4.60	4.70	4.80	4.90	5.00
	$t'_{3D.cr.}/t'_{Rf.cr.}$								
-0.3	$\frac{6.338}{172.9}$	$\frac{4.963}{52.91}$	$\frac{3.972}{27.07}$	$\frac{3.232}{16.76}$	$\frac{2.663}{11.47}$	$\frac{2.216}{8.344}$	$\frac{1.858}{6.320}$	$\frac{1.567}{4.927}$	$\frac{1.327}{3.923}$
-0.5	$\frac{17.50}{1792.8}$	$\frac{12.43}{341.5}$	$\frac{9.100}{133.6}$	$\frac{6.819}{68.34}$	$\frac{5.201}{40.17}$	$\frac{4.021}{25.72}$	$\frac{3.142}{17.43}$	$\frac{2.475}{12.30}$	$\frac{1.961}{8.944}$
-0.7	$\frac{187.3}{\sim O(10^7)}$	$\frac{105.8}{26493}$	$\frac{62.97}{5548.}$	$\frac{38.92}{1813.}$	$\frac{24.78}{748.1}$	$\frac{16.14}{355.8}$	$\frac{10.70}{186.1}$	$\frac{7.191}{104.1}$	$\frac{4.879}{61.18}$

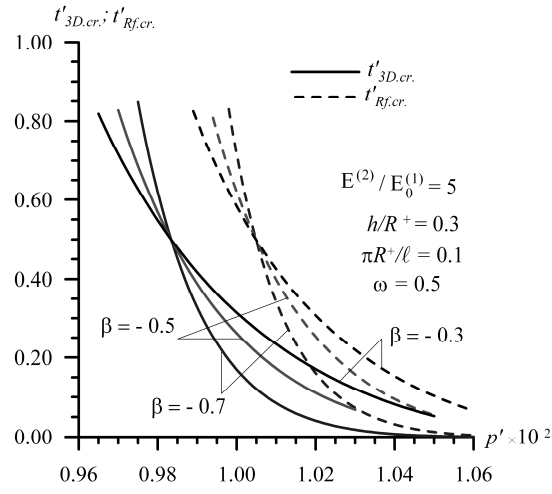
Yukarıdaki sonuçlardan $t'_{Rf.cr.}$ değerlerinin $t'_{3D.cr.}$ ten büyük olduğu anlaşılmaktadır. p' 'nin $p'_{3D.c.\infty}$ 'nin değerlerine (ya da $p'_{Rf.c.\infty}$ değerlerine) yakın olduğu durumlarda, $t'_{3D.cr.}$ ve $t'_{Rf.cr.}$ arasındaki fark daha önemsiz hale gelmektedir. Yukarıda verilen sonuçlar reolojik parametre β 'nin $t'_{3D.cr.}$ ve $t'_{Rf.cr.}$ değerleri üzerindeki etkisini de göstermektedir. Bu etki Şekil 3.2'de, $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ ve p' arasındaki bağımlılıkların grafikleri $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\omega = 0.5$ altında $h/R^+ = 0.3$ (Şekil 3.2(a)) ve $h/R^+ = 0.5$ (Şekil 3.2 (b)) olduğu durumlar için β 'nin çeşitli değerleri için verilmiştir. Şekil 3.2'de verilen sonuçlardan ve buradan verilmeyen diğer sayısal sonuçlardan, farklı β değerleri için incelenen bağımlılıkların grafiklerinin ortak bir kesişme noktasının olduğu anlaşılmaktadır. Bu kesişme noktasından önce (sonra), β 'nin mutlak değerlerindeki artış kritik zamanın değerlerinin artmasına (azalmasına) neden olmaktadır. Kesişme noktasından sonra görünen grafiklerin kısımları $h/R^+ = 0.3$ (Şekil 3.3 (a)) ve $h/R^+ = 0.5$ (Şekil Şekil 3.3 (b)) durumlarında Şekil 3.3'de gösterilmiştir.



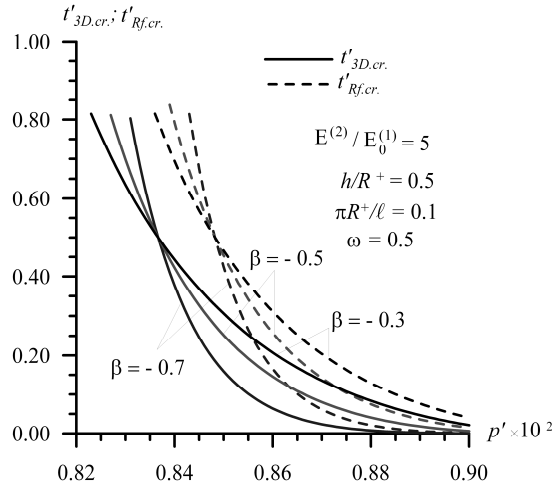
Şekil 3.2 (a) $h/R^+ = 0.3$ olması durumunda, β reolojik parametrelerinin değişik değerleri için, p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağıntıların grafiği



Şekil 3.2 (b) $h/R^+ = 0.5$ olması durumunda, β reolojik parametrelerinin değişik değerleri için, p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağıntıların grafiği



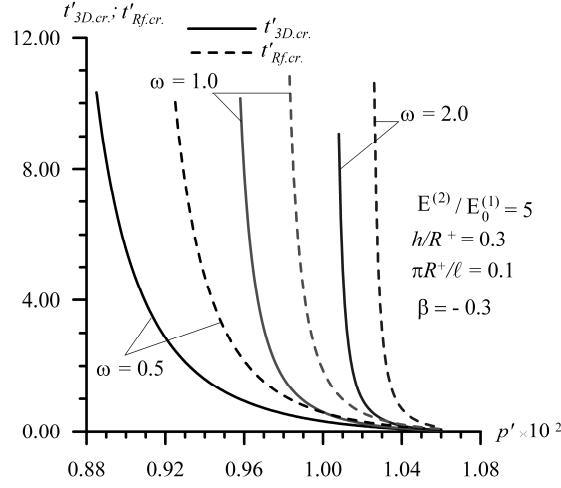
(a)



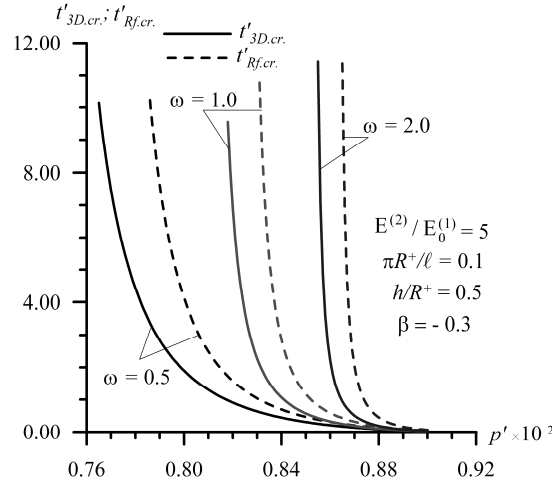
(b)

Şekil 3.3 Şekil 3.2'de verilen grafiklerin, kesişme noktasından sonra ortaya çıkan bölümleri

Boyutsuz reolojik parametre ω 'nin, $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ ve p' arasındaki bağımlılıklarına etkileri, Şekil 3.4'de $E^{(2)} / E_0^{(1)} = 5$, $\rho = 0.1$ ve $\beta = -0.3$ iken, $h / R^+ = 0.3$ (Şekil 3.4 (a)) ve $h / R^+ = 0.5$ (Şekil 3.4 (b)) için verilmiştir.



Şekil 3.4 (a) $h/R^+ = 0.3$ olması durumunda, ω reolojik parametresinin değişik değerleri için oluşturulan, p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağıntıların grafiği



Şekil 3.4 (b) $h/R^+ = 0.5$ olması durumunda, ω reolojik parametresinin değişik değerleri için oluşturulan, p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağıntıların grafiği

Bu grafiklerin karakteri $p'_{3D.c.\infty}$ ve $p'_{R.c.\infty}$ 'nin ω ile değerlerinin artması ile açıklanabilir. Dolayısıyla, p' 'nin ortak değerleri için $t'_{3D.cr.}$ ve $t'_{Rf.cr.}$ 'nin değerleri ω ile birlikte artar. Aynı zamanda, kritik zamanın değerleri sadece reolojik parametrelerin değerlerine değil aynı zamanda dış basınç kuvveti p' 'nin yoğunluğunun değerlerine de bağlıdır. Bu durumda, tahmin edilebileceği gibi, aşağıdaki ilişkiler sağlanır.

$$\begin{aligned} p' \rightarrow p'_{3D.c.0} \text{ iken } t'_{3D.cr.} \rightarrow 0, \quad p' \rightarrow p'_{3D.c.\infty} \text{ iken } t'_{3D.cr.} \rightarrow \infty, \\ p' \rightarrow p'_{R.c.0} \text{ iken } t'_{Rf.cr.} \rightarrow 0, \quad p' \rightarrow p'_{R.c.\infty} \text{ iken } t'_{Rf.cr.} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.64)$$

$t'_{3D.cr.}$ 'nin değerleri, Gerard ve Gilbert (1958) tarafından kritik deformasyon yönteminin kullanılmasıyla hesaplanan ilgili değerlerle karşılaştırılmıştır. Bu yönetime göre, viskoelastik içi boş silindirin kritik deformasyonunun ilgili elastik silindirin kritik deformasyonuna eşit olduğu varsayılmıştır. Bu varsayım kullanılarak, elastik silindir için kritik deformasyon LEÜBST kapsamında belirlenmiştir. Değerlendirilen durumda belirtilen kritik deformasyon $p'_{3D.c.0}$ 'a tekabül etmektedir.

Bu tespite göre, $p'_{3D.c.0} = p/E_3^*$ ilişkisi kullanılarak, p 'nin seçilen değerleri için kritik zaman belirlemiştir. Boyutsuz kritik zamanın ($t'_{cdm.cr.}$ ile ifade edilen) kritik deformasyon yöntemi kullanılarak belirlenen değerleri Çizelge 3.14'de verilmiştir.

Çizelge 3.14 $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R^+ = 0.5$ ve $\omega = 0.5$ iken, $\rho = 0.1$ olması durumunda, β reolojik parametresinin değişik değerleri için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{cdm.cr.}$ (payda) değerleri

β	$p' \times 10^2$				
	0.820	0.830	0.840	0.850	0.860
	$t'_{3D.cr.}/t'_{cdm.cr.}$				
-0.3	$\frac{0.906}{21.44}$	$\frac{0.634}{3.587}$	$\frac{0.443}{1.434}$	$\frac{0.306}{0.722}$	$\frac{0.207}{0.399}$
-0.5	$\frac{1.150}{96.45}$	$\frac{0.698}{7.891}$	$\frac{0.4227}{2.186}$	$\frac{0.251}{0.837}$	$\frac{0.145}{0.364}$
-0.7	$\frac{2.006}{3220.}$	$\frac{0.872}{49.65}$	$\frac{0.377}{5.845}$	$\frac{0.159}{1.181}$	$\frac{0.0641}{0.2955}$

Bu değerler, $\rho = 0.1$, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $H(=h/\ell) = 0.5$ ve $\omega = 0.5$ olan durumda, muhtelif β değerleri için hesaplanmıştır. Aynı zamanda, bu çizelgede $t'_{3D.cr.}$ (pay) için uygun değerler de gösterilmiştir. $t'_{cdm.cr.}$ değerlerinin, $t'_{3D.cr.}$ 'nin uygun değerleri ile karşılaştırılması kritik deformasyon yönteminin viskoelastik kompozit malzemeden yapılan içi boş silindirin stabilite kaybı için kritik zamanın belirlenmesi için kabul edilebilir olmadığını göstermektedir.

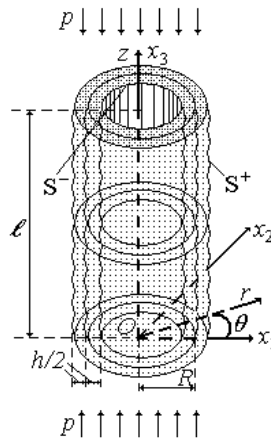
VİSKOELASTİK KOMPOZİT MALZEMEDEN YAPILMIŞ İÇİ BOŞ DAİRESEL SİLİNDİRİN YEREL STABİLİTE KAYBININ ÜÇ BOYUTLU ANALİZİ

4.1 Problemin Formülasyonu

Doğal halde yani, başlangıçta dairesel sonsuz simetrik kusuru olan içi boş bir silindir ile bu silindirin noktalarının konumu silindirik $Or\theta z$ 'deki Lagrange koordinatları ve $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat sistemi ile gösterilmiştir (Şekil 4.1). Silindirin belirtilen başlangıç sapması, aşağıda verilen orta yüzeyinin denklemiyle temsil edilmiş olup

$$r = r_0(t_3) = R + L \sin(\alpha m t_3); \quad \alpha = \pi/\ell, \quad (4.1)$$

bu denklemde $t_3, t_3 \in (0, \ell)$ olmak üzere bir parametre, L ise başlangıçtaki sapmanın genliği ve m ise, başlangıçtaki sapmanın periyodunun yarı uzunluk sayısını göstermektedir.



Şekil 4.1 Ele alınan içi boş silindirin geometrisi

Silindir duvarlarının kalınlığının silindir boyunca sabit ve h 'ye eşit olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, Akbarov (1998) ve Akbarov ve Yahnioglu (2001)'nin makalelerinde belirtildiği gibi, $L \ll l$ olduğu ve aşağıdaki gibi küçük bir parametreyi ortaya koyduğu varsayılmıştır.

$$\varepsilon = \frac{L}{\ell}, \quad 0 \leq \varepsilon \ll \left(\frac{1}{m\pi} \right). \quad (4.2)$$

Silindir malzemesinin, simetri eksenini $Ox_3(Oz)$ eksenini ile kesişen, viskoelastik transversal izotrop olduğu kabul edilmiştir. Yukarıda belirtilen varsayımlar dahilinde, silindirin, yoğunluğu p olan düzgün yayılı normal basınç kuvvetiyle yüklenmesi ve bu kuvvetlerin silindirin uçları üzerinde Oz eksenini doğrultusunda etki etmesi durumları için silindirin sonsuz küçük döngüsel simetrik başlangıç sapmasının zamanla gelişimi incelenmiştir.

Bu inceleme aşağıdaki alan denklemleri kapsamında yapılmıştır:

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(t_{rr} - t_{\theta\theta}) = 0, \quad \frac{\partial t_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}t_{zr} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (4.3_1)$$

$$t_{rr} = \sigma_{rr} \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \sigma_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad t_{rz} = \sigma_{rr} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \sigma_{rz} \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right),$$

$$t_{\theta\theta} = \sigma_{\theta r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta} \left(1 + \frac{u_r}{r} \right), \quad t_{zr} = \sigma_{zr} \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \sigma_{zz} \frac{\partial u_r}{\partial z},$$

$$t_{zz} = \sigma_{zr} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \sigma_{zz} \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \quad (4.3_2)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right\}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_r}{r} \right)^2, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (4.3_3)$$

Burada (4.3₁) denklemi, simetrik olmayan Kirchoff gerilme tensörünün t_{rr} , $t_{\theta\theta}$, t_{zz} , t_{zr} ve t_{rz} fiziksel bileşenleri cinsinden denge denklemini temsil etmektedir. (4.3₂)

denklemleri, simetrik olmayan Kirchhoff gerilme tensörünün fiziksel bileşenleri ile silindirik koordinat sistemindeki gerilme tensörünün fiziksel bileşenleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Green gerilme tensörünün ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, ε_{zz} , ε_{zr} ve ε_{rz} fiziksel bileşenleri ile u_r ve u_z yer değiştirme vektörünün fiziksel bileşenleri arasındaki nonlineer ilişki ise (4.3) denkleminde gösterilmiştir.

Silindirik koordinat sisteminde, silindirik malzemesinin bünye denklemleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= A_{11}^* \varepsilon_{rr} + A_{12}^* \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}; \sigma_{\theta\theta} = A_{12}^* \varepsilon_{rr} + A_{11}^* \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}; \\ \sigma_{zz} &= A_{13}^* \varepsilon_{rr} + A_{13}^* \varepsilon_{\theta\theta} + A_{33}^* \varepsilon_{zz}; \sigma_{rz} = 2G^* \varepsilon_{rz}; \sigma_{\theta z} = 2G^* \varepsilon_{\theta z},\end{aligned}\quad (4.4)$$

burada A_{ij}^* ve G^* , aşağıdaki operatörlerdir:

$$\begin{Bmatrix} A_{ij}^* \\ G^* \end{Bmatrix} \phi(t) = \begin{Bmatrix} A_{ij0} \\ G_0 \end{Bmatrix} \phi(t) + \int_0^t \begin{Bmatrix} A_{ij1}(t-\tau) \\ G_1(t-\tau) \end{Bmatrix} \phi(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Burada, A_{ij0} ve G_0 elastik sabitlerin anlık değerleridir; $A_{ij1}(t)$ ve $G_1(t)$ ise silindir malzemesinin kalıtsal özelliklerini belirleyen fonksiyonlardır.

İç boş silindirin S^- ve S^+ iç ve dış yüzeylerini sırasıyla (Şekil 4.1) ile göstererek bu yüzeyler üzerinde koşullar aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$t_{rr}|_{S^\pm} n_r^\pm + t_{rz}|_{S^\pm} n_z^\pm = 0, \quad t_{zr}|_{S^\pm} n_r^\pm + t_{zz}|_{S^\pm} n_z^\pm = 0 \quad (4.6)$$

Burada n_r^+ ve n_z^+ (n_r^- ve n_z^-), iç boş silindirin S^+ (S^-) dış (iç) yanal yüzeylerin birim normal vektörlerin bileşenleridir.

İlave olarak, silindirin uçlarında, aşağıda yazılan koşulların sağlandığı kabul edilmiştir.

$$t_{zz}|_{z=0} = -p, \quad t_{zz}|_{z=\ell} = -p. \quad (4.7)$$

Yer değiştirmeler için, uç (sınır) şartları aşağıda ifade edilmiştir.

Dolayısıyla düşünülen problemin formülasyonu bitmiştir. Bu formülasyondan sonra, p dış basınç kuvvetinin sabit bir değeri için zaman ilerlerken (silindir malzemesinin

viskoelastik olduğu durum için) ya da p basınç kuvveti için (silindir malzemesinin elastik olduğu durum için) lifin sonsuz küçük başlangıç sapmasının gelişiminin, (4.3), (4.4) ve (4.5) alan denklemleri ve (4.6) ile (4.7) sınır şartı çerçevesinde incelenmesi problemine indirgenir.

4.2 Çözüm Yöntemi

Şimdi önceki bölümde formüle edilen problemin çözüm yöntemi aşağıda özetlenmiştir. Sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılarak, nonlinear integro-diferansiyel denklemler (4.3), (4.4) ve (4.5) için düşünülen sınır değer problemi, ilgili lineer integro-diferansiyel denklemler için seri-sınır değer problemlerine indirgenmiştir. Hem (4.5) operatörleri hem de konvolüsyon teoreminin yardımıyla, zamana göre Laplace dönüşümü kullanılarak, elde edilen problemler serisi, Laplace uzayında lineer diferansiyel denklemler içeren sınır değer problemleri serisine indirgenir. Bu parametrenin her bir sabit değeri için, lineer problemler değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak çözülür ve sonuç olarak Schapery (1966) sayısal ters dönüşüm yöntemi uygulanarak aranan değerler belirlenir. Silindirin malzemesinin elastik olduğu durum için, (4.5) operatörlerinin mekanik sabitlerle değiştirildiği ve dolayısıyla integro-diferansiyel denklemler yerine, diferansiyel denklemler elde edildiği ve bu denklemlerle ilgili problemlerin de yukarıdaki işlem çerçevesinde, Laplace dönüşümü kullanılmadan, incelendiği dikkatlerden kaçırılmamalıdır.

Yukarıda özet halinde verilen işleme ve problem formülasyonuna göre, ilk olarak silindirin iç ve dış yanal yüzeyleri (S^+ ve S^-) için denklemler elde edilir. Silindirin sabit kalınlığı şartına göre, bu yüzeylerin koordinatlarının, aynı zamanda aşağıdaki denklemleri de sağlayacağı açıktır.

$$z^\pm - t_3 = -\frac{dr_0}{dt_3}(r^\pm - r_0(t_3)), \quad (z^\pm - t_3)^2 + (r^\pm - r_0(t_3))^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2. \quad (4.8)$$

Burada $z^\pm$ ve $r^\pm$, $S^\pm$ yüzeyinin koordinatlarıdır. (4.8)'deki ilk denklemin silindirin orta çizgisinin t_3 parametresinin sabit değerine karşılık gelen noktadaki teğet vektöre dik

olan düzlemin denklemi olduğunu; ancak (4.8)'daki ikinci denklem silindirik duvarının kalınlığının silindirik boyunca sabit kaldığını gösterir. Burada

$$r^{\pm} = r_0 \pm \frac{h}{2} \left(1 + \left(\frac{dr_0}{dt_3} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad z^{\pm} = t_3 \mp \frac{dr_0}{dt_3} \frac{h}{2} \left(1 + \left(\frac{dr_0}{dt_3} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

dir. (4.2) varsayımı ve $(dr_0/dt_3)^2 \ll 1$ kabulü kullanılarak, bazı matematik işlemler neticesinde aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$r^{\pm} = R \pm \frac{h}{2} + \varepsilon \ell \sin(\alpha m t_3) \mp \frac{h}{4} \varepsilon^2 m^2 \pi^2 \cos^2(\alpha m t_3) + O(\varepsilon^4),$$

$$z^{\pm} = t_3 \mp \varepsilon \frac{h}{2} \pi m \cos(\alpha m t_3) \pm \varepsilon^3 \frac{h}{4} (\pi m \cos(\alpha m t_3))^3 + O(\varepsilon^5),$$

$$n_r^{\pm} = \pm \frac{dz^{\pm}}{dt_3} (V(t_3))^{-1}, \quad n_z^{\pm} = \mp \frac{dr^{\pm}}{dt_3} (V(t_3))^{-1}, \quad V(t_3) = \left(\left(\frac{dz^{\pm}}{dt_3} \right)^2 + \left(\frac{dr^{\pm}}{dt_3} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$n_r^{\pm} = \pm 1 + O(\varepsilon^2), \quad n_z^{\pm} = \mp \varepsilon m \pi \cos(\alpha m t_3) + O(\varepsilon^3) \quad (4.10)$$

burada $n_r^{\pm}$ ve $n_z^{\pm}$, $S^{\pm}$ yüzeyinin birim normal vektörünün fiziksel bileşenleridir.

Sınır pertürbasyonu yöntemine göre, Akbarov (1998), Akbarov ve Yahnioglu (2001) ve diğer birçok çalışmalarında olduğu gibi, ele alınan problem sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılarak çözülecektir. Bu amaçla bilinmeyenler, ε cinsinden (4.11) seri formunda temsil edilmiştir.

$$\{\sigma_{rr}; \sigma_{\theta\theta}; \sigma_{rz}; \sigma_{zz}; \varepsilon_{rr}; \varepsilon_{\theta\theta}; \varepsilon_{rz}; \varepsilon_{zz}; u_r; u_z\} =$$

$$\sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{rr}^{(q)}; \sigma_{\theta\theta}^{(q)}; \sigma_{rz}^{(q)}; \sigma_{zz}^{(q)}; \varepsilon_{rr}^{(q)}; \varepsilon_{\theta\theta}^{(q)}; \varepsilon_{rz}^{(q)}; \varepsilon_{zz}^{(q)}; u_r^{(q)}; u_z^{(q)} \right\}. \quad (4.11)$$

(4.11) denklemi, (4.3) denkleminde göz önüne alınır ve her bir yaklaşım için denklemler takımı elde edilir. (4.10) denklemi kullanılarak, (4.14)'deki her bir yaklaşımın değeri $\{r = R + h/2; z_0 = t_3\}$ ve $\{r = R - h/2; z_0 = t_3\}$ noktalarının civarında seriye açılır. Bu son ifadeler, (4.6) sınır şartlarında yerlerine yazılıp, (4.10)'da verilen $n_r^{\pm}$ ve $n_z^{\pm}$ ifadeleri de kullanılarak, bazı matematiksel işlemler sonucunda, (4.11) denklemindeki her bir

yaklaşım için, $\{r = R + h/2; z_0 = t_3\}$ (S^+ dış yüzeyi için) ve $\{r = R - h/2; z_0 = t_3\}$ (S^- dış yüzey için)'da aynı şekilde sağlanan sınır şartları elde edilir. Sıfırıncı yaklaşım için, (4.3) denkleminin geçerli olduğu ve (4.6) şartının $\{r = R + h/2; z_0 = t_3\}$ ve $\{r = R - h/2; z_0 = t_3\}$ noktalarında sağlananın aynısı ile değiştirildiği açıktır. Gerilme tensörü bileşenlerinin nonlineer kısımlarının çok küçük olduğunu ve lineer kısımlarına kıyasla ihmal edilmiştir. Bu varsayıma göre sıfırıncı yaklaşım için, aşağıdaki denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(0)}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)}) &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz}^{(0)} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(0)}}{\partial z} = 0, \\ \varepsilon_{rr}^{(0)} = \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{rz}^{(0)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial r}\right), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{u_r^{(0)}}{r}, \quad \varepsilon_{zz}^{(0)} = \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.12)$$

ve sınır koşulları

$$\sigma_{rr}^{(0)}\Big|_{r=R\pm h/2} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(0)}\Big|_{r=R\pm h/2} = 0 \quad (4.13)$$

elde edilir.

Ayrıca sıfırıncı yaklaşım için, (4.7)'den aşağıdaki sınır şartları bulunur:

$$\sigma_{zz}^{(0)}(r, \theta, 0) = \sigma_{zz}^{(0)}(r, \theta, \ell) = -p. \quad (4.14)$$

Son varsayım dikkate alındığında, sonraki yaklaşımlar için aşağıdaki denklemler sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(q)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(q)}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr}^{(q)} - \sigma_{\theta\theta}^{(q)}) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_r^{(q)}}{\partial z^2} &= -\frac{\partial S_{rr}^{(q-1)}}{\partial r} - \frac{\partial S_{rz}^{(q-1)}}{\partial z} - \frac{1}{r}(S_{rr}^{(q-1)} - S_{\theta\theta}^{(q-1)}), \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(q)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz}^{(q)} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(q)}}{\partial z} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_z^{(q)}}{\partial z^2} &= -\frac{\partial S_{rz}^{(q-1)}}{\partial r} - \frac{1}{r}S_{zz}^{(q-1)} - \frac{\partial S_{zz}^{(q-1)}}{\partial z}, \\ S_{rr}^{(q-1)} &= \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{rr}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \quad S_{rz}^{(q-1)} = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{rr}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\ S_{\theta\theta}^{(q-1)} &= \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \frac{u_r^{(q-k)}}{r} \right\}, \quad S_{zz}^{(q-1)} = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{zr}^{(q-1)} &= \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sigma_{zr}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial r} + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
\varepsilon_{rr}^{(q)} &= \frac{\partial u_r^q}{\partial r} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial r} \right) \right\}, \\
\varepsilon_{rz}^{(q)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(q)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right\}, \\
\varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} &= \frac{u_r^{(q)}}{r} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{1}{r^2} u_r^{(k)} u_r^{(q-k)} \right\}, \\
\varepsilon_{zz}^{(q)} &= \frac{\partial u_z^{(q)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(q-k)}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(q-k)}}{\partial z} \right) \right\}. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Ele alınan problem için, (4.15) denkleminde altı çizili terimler birinci yaklaşım için sıfıra eşittir. Doğrudan sağlama için, (4.15) denkleminde altı çizili terimler olmadan, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilité Teorisi'nin (LEÜBST) denklemleriyle karşılaştığı (Guz (1999)) kanıtlanmıştır. Lineerlik nedeniyle, (4.4) bünye denklemleri, her yaklaşım tarafından ayrı ayrı sağlanır, yani,

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(q)} &= A_{11}^* \varepsilon_{rr}^{(q)} + A_{12}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{(q)}; \sigma_{\theta\theta}^{(q)} = A_{12}^* \varepsilon_{rr}^{(q)} + A_{11}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{(q)}; \\
\sigma_{zz}^{(q)} &= A_{13}^* \varepsilon_{rr}^{(q)} + A_{13}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} + A_{33}^* \varepsilon_{zz}^{(q)}; \sigma_{rz}^{(q)} = 2G^* \varepsilon_{rz}^{(q)} \tag{4.16}
\end{aligned}$$

dir. Gerilme tensörünün fiziksel bileşenleri cinsinden, birinci yaklaşım için silindirin yanal yüzeyi üzerinde verilen sınır şartları için de

$$\sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=R \pm h/2} = 0, \sigma_{rz}^{(1)} \Big|_{r=R \pm h/2} = \sigma_{zz}^{(0)} m \pi \cos(\alpha m t_3) \tag{4.17}$$

yazılabilir. (4.10) ve (4.11) ifadelerine göre, (4.7) denkleminde birinci yaklaşım için aşağıdaki sınır koşulları elde edilir:

$$\sigma_{zz}^{(1)} \Big|_{t_3=0; \ell} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \Big|_{t_3=0; \ell} = 0. \tag{4.18}$$

Buna ilaveten,

$$u_r^{(1)} \Big|_{t_3=0; \ell} = 0 \quad (4.19)$$

olduğu varsayılmıştır. (4.12), (4.13) ve (4.14)'e göre, sıfıncı yaklaşımla ilgili değerler aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$(ij) \neq zz \text{ için } \sigma_{zz}^{(0)} = -p, \quad \sigma_{(ij)}^{(0)} = 0. \quad (4.20)$$

(4.20) şartından sıfıncı yaklaşımda, yer değiştirme vektörü bileşenlerinin aşağıdaki gibi seçilebileceği görülür:

$$u_r^{(0)} = a(t)r + a_0, \quad u_z^{(0)} = c(t)z + c_0. \quad (4.21)$$

Burada a_0 ve c_0 sabitler, $a(t)$ ve $c(t)$ fonksiyonlar, t ise zamandır. $a(t)$ ve $c(t)$ fonksiyonları (4.12), (4.16) ve (4.21) denklemlerinden kolaylıkla belirlenebilir.

Birinci yaklaşımla ilgili değerlerin belirlenmesi için de, (4.20) ifadesi dikkate alınarak, aşağıdaki alan denklemleri bu yaklaşım için, (4.15) denkleminde elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \varepsilon_{rr}^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{u_r^{(1)}}{r}, \quad \varepsilon_{zz}^{(1)} = \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zr}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

(4.16) ve (4.22) denklemleri, (4.17), (4.18) ve (4.19) koşulları kapsamında çözülecektir.

Bu amaçla,

$$\bar{\psi} = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-st} dt \quad (4.23)$$

Laplace dönüşümü, $s > 0$ bir parametere olmak üzere, birinci yaklaşımın tüm denklemlerine ve bağıntılarına uygulanır. Bu uygulama sonrasında, $(\sigma_{zz}^{(0)})$ 'nin $\sigma_{zz}^{(0)}/s$ ile değiştirilmesi gereken) sınır şartları (4.17) ve denklem (4.16) ilgili aranan büyüklüklerin Laplace dönüşümleri için geçerli olup, (4.16) bünye denklemleri

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rr}^{(1)} &= \bar{A}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{12}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}; \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} = \bar{A}_{12}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}; \\
\bar{\sigma}_{zz}^{(1)} &= \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{33}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}; \bar{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = (\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{22}^*) \bar{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)}; \\
\bar{\sigma}_{rz}^{(1)} &= 2\bar{G}^* \bar{\varepsilon}_{rz}^{(1)}; \bar{\sigma}_{\theta z}^{(1)} = 2\bar{G}^* \bar{\varepsilon}_{\theta z}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

olur. Burada

$$\begin{Bmatrix} \bar{A}_{ij}^* \\ \bar{G}^* \end{Bmatrix} \bar{\phi}(s) = \begin{Bmatrix} \bar{A}_{ij0} \\ \bar{G}_0 \end{Bmatrix} \bar{\phi}(s) + \begin{Bmatrix} \bar{A}_{ij1}(s) \\ \bar{G}_1(s) \end{Bmatrix} \bar{\phi}(s) \tag{4.25}$$

dir. Yukarıda da belirtildiği gibi, (4.22), (4.24) ve (4.25) denklemleri, LEÜBST'nin ilgili denklemleriyle çakışmaktadır. Dolayısıyla, elde edilen denklem sistemlerini çözmek için Guz (1999) tarafından geliştirilen, silindirik koordinat sisteminde aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_r^{(1)} &= -\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi, \quad \bar{u}_z^{(1)} = (\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*)^{-1} \left(\bar{A}_{11}^* \Delta_1 + (\bar{G}^* + \sigma_{zz}^{(0)}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi, \\
\Delta_1 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} .
\end{aligned} \tag{4.26}$$

χ fonksiyonu aşağıdaki denklemlerden belirlenir:

$$\left(\Delta_1 + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1 + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi = 0 . \tag{4.27}$$

Burada

$$\begin{aligned}
\xi_{2,3}^2 &= c \pm \left(c^2 - \frac{(\bar{A}_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)})(\bar{G}^* + \sigma_{zz}^{(0)})}{\bar{A}_{11}^* \bar{G}^*} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
2\bar{A}_{11}^* \bar{G}^* c &= \bar{A}_{11}^* (\bar{A}_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)}) + \bar{G}^{*2} - (\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*)^2
\end{aligned} \tag{4.28}$$

(4.17) ve (4.18) kullanılarak, (4.27) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\chi = [B_1 I_0(\xi_2 \alpha m r) + B_2 K_0(\xi_2 \alpha m r) + B_3 I_0(\xi_3 \alpha m r) + B_4 K_0(\xi_3 \alpha m r)] \cos(\alpha m z) . \tag{4.29}$$

Burada, $I_0(x)$ sadece sanal argümanlı sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonu ve $K_0(x)$ sıfırıncı mertebeden Macdonald fonksiyonu, ve B_1 , B_2 , B_3 ve B_4 değerleri ise, s dönüşüm parametresine bağlı olan bilinmeyen sabitlerdir.

Bu çözümler, (4.22), (4.24) ve (4.22) bağıntıları ile değiştirildiğinde, aranan değerlerin Laplace dönüşümü için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}\bar{u}_r^{(1)} &= \left[B_1 \xi_2 (\alpha m)^2 I_0'(\xi_2 \alpha m r) + B_3 \xi_3 (\alpha m)^2 I_0'(\xi_3 \alpha m r) + \right. \\ &\quad \left. B_2 \xi_2 (\alpha m)^2 K_0'(\xi_2 \alpha m r) + B_4 \xi_3 (\alpha m)^2 K_0'(\xi_3 \alpha m r) \right] \sin(\alpha m z), \\ \bar{u}_z^{(1)} &= \left[B_1 D_2 (\alpha m)^2 I_0(\xi_2 \alpha m r) + B_3 D_3 (\alpha m)^2 I_0(\xi_3 \alpha m r) + \right. \\ &\quad \left. B_2 D_2 (\alpha m)^2 K_0(\xi_2 \alpha m r) + B_4 D_3 (\alpha m)^2 K_0(\xi_3 \alpha m r) \right] \sin(\alpha m z), \\ D_2 &= \frac{\bar{A}_{11}^* \xi_2^2 - \bar{G}^* - \sigma_{zz}^{(0)}}{\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*}, \quad D_3 = \frac{\bar{A}_{11}^* \xi_3^2 - \bar{G}^* - \sigma_{zz}^{(0)}}{\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*}, \\ \bar{\sigma}_{rr}^{(1)} &= \left\{ B_1 \left[\bar{A}_{11}^* (\alpha m)^3 \xi_2^2 I_0'(\xi_2 \alpha m r) + \bar{A}_{12}^* \frac{\xi_2 (\alpha m)^2}{r} I_0'(\xi_2 \alpha m r) + \right. \right. \\ &\quad \left. \bar{A}_{13}^* D_2 (\alpha m)^3 I_0(\xi_2 \alpha m r) \right] + B_3 \left[\bar{A}_{11}^* (\alpha m)^3 \xi_3^2 I_0'(\xi_3 \alpha m r) + \bar{A}_{12}^* \frac{\xi_3 (\alpha m)^2}{r} I_0'(\xi_3 \alpha m r) + \right. \\ &\quad \left. \bar{A}_{13}^* D_3 (\alpha m)^3 I_0(\xi_3 \alpha m r) \right] + B_2 \left[\bar{A}_{11}^* (\alpha m)^3 \xi_2^2 K_0'(\xi_2 \alpha m r) + \bar{A}_{12}^* \frac{\xi_2 (\alpha m)^2}{r} K_0'(\xi_2 \alpha m r) + \right. \\ &\quad \left. \bar{A}_{13}^* D_2 (\alpha m)^3 K_0(\xi_2 \alpha m r) \right] + B_4 \left[\bar{A}_{11}^* (\alpha m)^3 \xi_3^2 K_0'(\xi_3 \alpha m r) + \bar{A}_{12}^* \frac{\xi_3 (\alpha m)^2}{r} K_0'(\xi_3 \alpha m r) + \right. \\ &\quad \left. \bar{A}_{13}^* D_3 (\alpha m)^3 K_0(\xi_3 \alpha m r) \right] \Big\} \sin(\alpha m z); \\ \bar{\sigma}_{rz}^{(1)} &= \left\{ B_1 \bar{G}^* (\alpha m)^3 \xi_2 I_0'(\xi_2 \alpha m r) (1 + D_2) + B_3 \bar{G}^* (\alpha m)^3 \xi_3 I_0'(\xi_3 \alpha m r) (1 + D_3) + \right. \\ &\quad \left. B_2 \bar{G}^* (\alpha m)^3 \xi_2 K_0'(\xi_2 \alpha m r) (1 + D_2) + B_4 \bar{G}^* (\alpha m)^3 \xi_3 K_0'(\xi_3 \alpha m r) (1 + D_3) \right\} \cos(\alpha m z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{zz}^{(1)} = & \left\{ B_1 \left[\bar{A}_{13}^* \left(\xi_2^2 (\alpha m)^3 I_0''(\xi_2 \alpha m r) + \frac{(\alpha m)^2 \xi_2}{r} I_0'(\xi_2 \alpha m r) \right) - \right. \right. \\
& \left. \bar{A}_{33}^* D_2 (\alpha m)^3 I_0(\xi_2 \alpha m r) \right] + B_3 \left[\bar{A}_{13}^* \left(\xi_3^2 (\alpha m)^3 I_0'(\xi_3 \alpha m r) + \frac{(\alpha m)^2 \xi_3}{r} I_0'(\xi_3 \alpha m r) \right) - \right. \\
& \left. - \bar{A}_{33}^* D (\alpha m)^3 I_0(\xi_3 \alpha m r) \right] + B_2 \left[\bar{A}_{13}^* \left(\xi_2^2 (\alpha m)^3 K_0''(\xi_2 \alpha m r) + \right. \right. \\
& \left. \frac{(\alpha m)^2 \xi_2}{r} K_0'(\xi_2 \alpha m r) \right) - \bar{A}_{33}^* D_2 (\alpha m)^3 K_0(\xi_2 \alpha m r) \right] + B_4 \left[\bar{A}_{13}^* \left(\xi_3^2 (\alpha m)^3 K_0''(\xi_3 \alpha m r) - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(\alpha m)^2 \xi_3}{r} K_0'(\xi_3 \alpha m r) \right) - \bar{A}_{33}^* D (\alpha m)^3 K_0(\xi_3 \alpha m r) \right] \Bigg\} \sin(\alpha m z) . \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Burada, $I_0'(x) = dI_0(x)/dx$, $I_0''(x) = d^2 I_0(x)/dx^2$, $K_0'(x) = dK_0(x)/dx$ ve $K_0''(x) = d^2 K_0(x)/dx^2$ notasyonu kullanılmıştır. Ele alınan problemin (4.30)'daki çözümü, (4.18) ve (4.19) sınır şartlarını kendiliğinden sağlamaktadır. B_1 , B_2 , B_3 ve B_4 bilinmeyenlerini sırasıyla $(\alpha m)^3 B_i$ ($= C_i$), ($i=1,2,3,4$) ile değiştirerek, bu bilinmeyenleri tespit etmek için, (4.17) sınır şartından aşağıdaki cebirsel denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rr}^{(1)}(R^+, t_3, t) = 0 & \Rightarrow C_1 a_{11}(\alpha m R^+) + C_2 a_{12}(\alpha m R^+) + C_3 a_{13}(\alpha m R^+) + C_4 a_{14}(\alpha R^+) = 0, \\
\bar{\sigma}_{rz}^{(1)}(R^+, t_3, t) = 2\pi m \sigma_{zz}^{(0)} \frac{1}{s} & \Rightarrow C_1 a_{31}(\alpha m R^+) + C_2 a_{32}(\alpha R^+) + C_3 a_{33}(\alpha m R^+) + \\
C_4 a_{34}(\alpha m R^+) & = 2\pi m \sigma_{zz}^{(0)} \frac{1}{s}, \\
\bar{\sigma}_{rr}^{(1)}(R^-, t_3, t) = 0 & \Rightarrow C_1 a_{11}(\alpha m R^-) + C_2 a_{12}(\alpha m R^-) + C_3 a_{13}(\alpha m R^-) + C_4 a_{14}(\alpha m R^-) = 0, \\
\bar{\sigma}_{rz}^{(1)}(R^-, t_3, t) = 2\pi m \sigma_{zz}^{(0)} \frac{1}{s} & \Rightarrow C_1 a_{31}(\alpha m R^-) + C_2 a_{32}(\alpha R^-) + C_3 a_{33}(\alpha m R^-) + \\
C_4 a_{34}(\alpha m R^-) & = 2\pi m \sigma_{zz}^{(0)} \frac{1}{s}. \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Burada, $R^+ = R + h/2$ ve $R^- = R - h/2$ 'dir. (4.31) denklemindeki ifadelerin katsayıları, (4.30)'daki bağıntıdan kolaylıkla yazılabilir.

Böylece, yukarıda belirtilen birinci yaklaşımla ilgili değerlerin Laplace dönüşümleri tam olarak belirlenir. (4.11)'deki ikinci ve sonraki yaklaşımların değerlerinin Laplace dönüşümleri de bariz değişiklikler dikkate alınmak suretiyle, birinci yaklaşım gibi belirlenebilir. Bununla birlikte, Akbarov (1998), Akbarov vd. (1997), Akbarov ve Yahnioglu (2001)'nin çalışmalarında gösterildiği gibi, stabilite kaybı problemleri için, sadece sıfırıncı ve birinci yaklaşımın dikkate alınması yeterlidir, çünkü ikinci ve sonraki yaklaşımın hesaplanması kritik parametrelerin değerlerini değiştirmemektedir.

Aranan değerlerin orijinali, Schapery (1966) tarafından geliştirilen yöntem kullanılarak örneğin, $u_r^{(1)}(r, t_3, t)$ yerdeğiştirmesinin gerçek değeri,

$$u_r^{(1)}(r, t_3, t) \approx \left(s\bar{u}_r^{(1)}(r, t_3, s) \right) \Big|_{s=1/(2t)} \quad (4.32)$$

olarak bulunur. Aşağıda, stabilite kaybı kriteri;

$$t \rightarrow t_{cr.} \text{ iken (veya elastik durumda } p \rightarrow p_{cr.} \text{ iken)} \max_{\substack{t_3 \in (0, \ell) \\ r \in (0, R)}} |u_r^{(1)}(r, t_3, t)| \rightarrow \infty \quad (4.33)$$

olarak verilmiştir. Böylece, kritik zaman değerleri ya da kritik kuvvet değerleri başlangıç eğinti kriterinden (4.33) belirlenmiştir.

4.3 Silindirik Kabuğun Stabilite Kaybının Yaklaşık Denklemleri

4.3.1 Kirchoff-Love Kabuk Teorisi

Bu bölümde ele alınan, içi boş silindirik kabuk için yaklaşık stabilite kaybı denklemleri, silindirin yer değiştirmelerinin Kirchoff-Love varsayımı kullanılarak, (4.17) - (4.24) nolu denklemlerden çıkarılabilir. Yani,

$$u_r^{(1)} = w(z), \quad u_z^{(1)} = r' \frac{dw(z)}{dz}, \quad r' = R - r \quad (4.34)$$

olur. (4.34) ifadesinden hareketle, Oz eksenı yönünde, silindirin orta yüzeyindeki yer değiştirmesinin $-r'dw(z)/dz$ terimine göre çok az olduğu ve dikkate alınmadığı varsayılmıştır. Dolayısıyla, (4.12), (4.16) ve (4.34)'e göre

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} &= \frac{w(z)}{r}, \quad \varepsilon_{zz}^{(1)} = r' \frac{d^2 w(z)}{dz^2}, \quad \varepsilon_{rr}^{(1)} = \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)} = 0, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= A_{11}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{(1)}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = A_{13}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + A_{33}^* \varepsilon_{zz}^{(1)}\end{aligned}\quad (4.35)$$

Elde edilir. Varsayalım ki,

$$\sigma_{rz}^{(1)} \neq 0 \quad (4.36)$$

olsun. (4.35) ve (4.36) nolu bağıntıları dikkate alarak, (4.22)'den aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{d^2 w}{dz^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(1)} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} = 0. \quad (4.37)$$

(4.37) denklemindeki ifadeler kullanılarak, aşağıdakiler yazılabilir:

Aşağıdaki ifadeleri kullanarak,

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = A_{11}^* \frac{w(z)}{r} + A_{13}^* r' \frac{d^2 w(z)}{dz^2}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = A_{13}^* \frac{w(z)}{r} + A_{33}^* r' \frac{d^2 w(z)}{dz^2} \quad (4.38)$$

ve (4.37)'deki ilk denklemi $(1-r'/R)dr'$ ile çarpıp ve $[-h/2, +h/2]$ aralığında integrali alınarak aşağıdaki ilişkiler elde edilir.

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial z} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) dr' = \frac{h}{R^2} A_{11}^* w - \sigma_{zz}^{(0)} h \frac{d^2 w}{dz^2}. \quad (4.39)$$

(4.37)'deki ikinci denklem $(1-r'/R)dr'$ ile çarpılıp bunun yanında $[-h/2, +h/2]$ aralığında integrali alınarak ve (4.38) bağıntısı dikkate alınarak, aşağıdaki denklem bulunur.

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r' dr' + \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{1}{R-r'} \sigma_{rz}^{(1)} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r' dr' +$$

$$\frac{A_{33}^* h^3}{12} \frac{d^3 w}{dz^3} + \frac{\sigma_{zz}^{(0)} h^3}{12} \frac{d^3 w}{dz^3} = 0 . \quad (4.40)$$

Aşağıdaki matematik işlemler yapılır.

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r' dr' + \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{1}{R - r'} \sigma_{rz}^{(1)} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r' dr' = \\ & - \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial (\sigma_{rz}^{(1)} r')}{\partial r} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r' dr' + \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{rz}^{(1)} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) dr' + \frac{1}{R} \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{rz}^{(1)} r' dr' = \\ & - \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial (\sigma_{rz}^{(1)} r')}{\partial r} dr' + \frac{1}{R} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial (\sigma_{rz}^{(1)} r')}{\partial r} r' dr' + \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{rz}^{(1)} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) dr' + \frac{1}{R} \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{rz}^{(1)} r' dr' = \\ & - (\sigma_{rz}^{(1)} r') \Big|_{-h/2}^{+h/2} + \frac{1}{R} (\sigma_{rz}^{(1)} r'^2) \Big|_{-h/2}^{+h/2} + \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{rz}^{(1)} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) dr' = \\ & \sigma_{zz}^{(0)} h \left(\frac{h}{2R} - 1 \right) m \pi \cos(\alpha m z) + \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{rz}^{(1)} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) dr' . \end{aligned} \quad (4.41)$$

(4.41) nolu denklemi (4.41) ile değiştirerek, (4.39) ilişkisi ve $\sigma_{zz}^{(0)} = -p$ dikkate alınarak ve $A_{33}^* 1 - p \approx A_{33}^*$ olduğu varsayılarak, Kirchhoff–Love hipotezi kapsamında silindirin stabilite kaybı için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{h^2}{12} A_{33}^* \frac{d^4 w}{dz^4} + p \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{A_{11}^*}{R^2} w = -\alpha m p \left(\frac{h}{2R} - 1 \right) \sin(\alpha m z) . \quad (4.42)$$

(4.34) ve (4.35)'e göre, (4.18) ve (4.19)'dan $w(z)$ yer değiştirmesi için aşağıdaki sınır koşulları elde edilir.

$$w(z) \Big|_{z=0; \ell} = 0, \quad \frac{d^2 w(z)}{dz^2} \Big|_{z=0; \ell} = 0 . \quad (4.43)$$

Eğer silindir malzemesinin izotrop olduğu kabul edilirse, o halde A_{33}^* ve A_{11}^* yerine $E^* / (1 - (\nu^*)^2)$ yazılmalıdır. Silindirin malzemesinin izotrop ve elastik olduğu durumlarda, (4.42) denklemi aşağıdakine dönüşür.

$$\frac{T}{h} \frac{d^4 w}{dz^4} + p \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{E}{R^2 (1-\nu^2)} w = -\alpha m p \left(\frac{h}{2R} - 1 \right) \sin(\alpha m z) . \quad (4.44)$$

Burada $T = h^3 E / (12(1-\nu^2))$, E ve ν silindir malzemesinin elastisite modülü ve Poisson katsayısıdır ve E^* ile ν^* ise ilgili operatörlerdir.

(4.44) denklemindeki $E / (R^2 (1-\nu^2))$ terimini E / R^2 ile değiştirirsek, bu denklemin sol tarafı, kabukların stabilite kaybı ile ilgili kitapların pek çoğunda verilen, iyi bilinen klasik olanla örtüşmektedir (bakınız, örneğin Volmir (1969) tarafından yazılan kitap). Sonuç olarak içi boş dairesel silindirin üç boyutlu stabilite kaybı (4.17)-(4.24) denklemlerinden Kirchhoff–Love hipotezi kapsamında silindirik kabuğun stabilite kaybı denklemini, yukarıda tanımlanan süreçle elde etmek bu denklemin katsayılarının ifadesinde yukarıdaki tür düzeltmeleri verir.

(4.42) denkleminin çözümü, bu denkleme (4.23) Laplace dönüşümü uygulanarak bulunur. Laplace dönüşümü için konvolüsyon teoremine göre, (4.42) denklemini aşağıdaki denkleme dönüştür.

$$\frac{h^2}{12} \bar{A}_{33}^* \frac{d^4 \bar{w}}{dz^4} + p \frac{d^2 \bar{w}}{dz^2} + \frac{\bar{A}_{11}^*}{R^2} \bar{w} = -\frac{1}{s} \alpha m p \left(\frac{h}{2R} - 1 \right) \sin(\alpha m z) . \quad (4.45)$$

(4.43) sınır şartı ve (4.45) denkleminin sağ tarafındaki ifade ele alınarak, (4.45) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi seçilir.

$$\bar{w} = \bar{A}(s) \sin \alpha z . \quad (4.46)$$

(4.46) denklemini, (4.45) denklemini ile değiştirilip, bazı matematiksel hesaplamalar da yapılarak, $\bar{A}(s)$ bilinmeyenini için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\bar{A}(s) = \frac{-\ell p \left(\frac{h}{2R} - 1 \right)}{m \pi s \left[\frac{A_{33}^*}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^4 - p \lambda^2 + A_{11}^* \right]} . \quad (4.47)$$

Burada, $\lambda = \pi m R / \ell$ 'dir.

Schapery (1966) yöntemi kullanılarak, $\bar{A}(s)$ 'nin gerçek değeri aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$A(t) = \left(s\bar{A}(s) \right) \Big|_{s=(1/(2t))} . \quad (4.48)$$

Silindir malzemesinin elastik olduğu durumlar için, (4.47) denkleminden kritik kuvvetin değerlerinin belirlenmesi için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$p_{cr.} = \frac{A_{11}}{\lambda^2} + \frac{A_{33}}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^2 . \quad (4.49)$$

$dp_{cr.}/d(\lambda^2) = 0$ bağıntısından, minimum kritik kuvvet, aşağıdaki şartlarda elde edilebileceği görülür.

$$\lambda \approx \sqrt[4]{12 \frac{A_{11}}{A_{33}}} \sqrt{\frac{R}{h}} \Rightarrow m \approx \frac{\ell}{\pi \sqrt{Rh}} \sqrt[4]{12 \frac{A_{11}}{A_{33}}} . \quad (4.50)$$

Silindirin malzemesinin izotrop olduğu durumlar için, (4.50) denkleminden aşağıda verilen ilişkiler yazılabilir.

$$\lambda \approx \sqrt[4]{12} \sqrt{\frac{R}{h}} \Rightarrow m \approx \frac{\ell}{\pi \sqrt{Rh}} \sqrt[4]{12} . \quad (4.51)$$

$\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}$ ile $\sqrt[4]{12}$ değiştirilerek, (4.51)'de verilen bağıntılarda, (4.51) ifadesinin ilgili kitap ve makalelerde geçen mukabil bağıntıları bulunur.

Genel durumlarda, yani silindirin malzemesinin viskoelastik enine izotrop olduğu durumlarda, (4.33)'e göre kritik parametrelerin değerleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} t \rightarrow t_{cr} \text{ iken } A(t) &\rightarrow \infty \text{ (silindir malzemesinin viskoelastik olduğu durum için),} \\ p \rightarrow p_{cr} \text{ iken } A &\rightarrow \infty \text{ (silindir malzemesinin elastik olduğu durum için) .} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Kritik zamanın veya kritik kuvvetin minimum olduğu durum için λ parametresinin değerleri, ilgili sayısal sonuçların doğrudan incelenmesi ile belirlenecektir.

4.3.2 Üçüncü Mertebe Geliştirilmiş Kabuk Teorisi

Üçüncü mertebe geliştirilmiş kabuk teorisi olarak, teorinin silindir kabuğu için Kromm (1955) tarafından geliştirilen ve $u_r^{(1)}$ yer değiştirmesinin (4.34)'deki gibi verildiği ancak $u_z^{(1)}$ yer değiştirmesinin aşağıdaki gibi alındığı hali kullanılmıştır.

$$u_z^{(1)} = r' \frac{dw(z)}{dz} + \left(\frac{h^2}{4} r' - \frac{1}{3} r'^3 \right) \varphi(z), \quad r' = R - r. \quad (4.53)$$

$u_r^{(1)}$ ve $u_z^{(1)}$ ifadeleri (4.22) ve (4.16) denklemlerinde yerine yazılarak, gerilmeler ve şekil değiştirmeler için ifadeler aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(1)} &= 0, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{w(z)}{r}, \quad \varepsilon_{zz}^{(1)} = r' \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \left(\frac{h^2}{4} r' - \frac{r'^3}{3} \right) \frac{d\varphi}{dz}, \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - r'^2 \right) \varphi(z), \\ \sigma_{rr}^{(1)} &= 0, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = A_{11}^* \frac{w}{r} + A_{13}^* \left(r' \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \left(\frac{h^2}{4} r' - \frac{r'^3}{3} \right) \frac{d\varphi}{dz} \right), \\ \sigma_{zz}^{(1)} &= A_{13}^* \frac{w}{r} + A_{33}^* \left(r' \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \left(\frac{h^2}{4} r' - \frac{r'^3}{3} \right) \frac{d\varphi}{dz} \right), \quad \sigma_{rz}^{(1)} = -G^* \left(\frac{h^2}{4} - r'^2 \right) \varphi(z). \end{aligned} \quad (4.54)$$

(4.54)'de verilen ifadelerden (4.37) denklemlerinin ele alınan durum için de geçerli olduğu anlaşılmaktadır.

Önceki alt bölümde olduğu gibi, (4.37)'deki ilk denklem $(1 - r'/R) dr'$ ile çarpılarak ve $[-h/2, +h/2]$ aralığında integrali alınarak ve (4.54) ilişkisi de dikkate alınarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial z} \left(1 - \frac{r'}{R} \right) dr' &= -G^* \frac{h^3}{6} \frac{d\varphi(z)}{dz}, \quad - \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \left(1 - \frac{r'}{R} \right) dr' = -\frac{h}{R^2} A_{11} w(z), \\ \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{zz}^{(1)} \frac{d^2 w}{dz^2} \left(1 - \frac{r'}{R} \right) dr' &= \sigma_{zz}^{(0)} h \frac{d^2 w}{dz^2}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Böylece (4.55) integrali alındıktan sonra (4.37)'deki ilk denklem, aşağıdakine dönüşür:

$$-G^* \frac{h^3}{6} \frac{d\varphi(z)}{dz} - \frac{h}{R^2} A_{11} w(z) + \sigma_{zz}^{(0)} h \frac{d^2 w}{dz^2} = 0. \quad (4.56)$$

(4.37)'deki ikinci denklem $(1-r'/R)dr'$ ile çarpılarak ve $[-h/2, +h/2]$ aralığında integrali alınarak ve aşağıda verilen ilişkiler de dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r' dr' + \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{1}{R-r'} \sigma_{rz}^{(1)} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r' dr' = \\ & \sigma_{zz}^{(0)} h \left(\frac{h}{2R} - 1 \right) m\pi \cos(\alpha m z) - \frac{h^3}{6} G^* \varphi(z), \\ & \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r' dr' = A_{33}^* \frac{h^3}{12} \frac{d^3 w}{dz^3} + A_{33}^* \frac{h^5}{60} \frac{d^2 \varphi}{dz^2}, \\ & \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{zz}^{(0)} \left[r' \frac{d^3 w}{dz^3} + \left(\frac{h^2}{4} r' - \frac{r'^3}{3} \right) \frac{d\varphi}{dz} \right] r' \left(1 - \frac{r'}{R}\right) dr' = \sigma_{zz}^{(0)} \left[\frac{h^3}{12} \frac{d^3 w}{dz^3} + \frac{h^5}{60} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

(4.37)'de belirtilen ikinci denklem, aşağıdakine dönüştürülmüştür.

$$\begin{aligned} & -\frac{h^3}{6} G^* \varphi + \left(A_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)} \right) \frac{h^3}{12} \frac{d^3 w}{dz^3} + \left(A_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)} \right) \frac{h^5}{60} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \\ & -h \left(\frac{h}{2R} - 1 \right) m\pi \sigma_{zz}^{(0)} \cos(\alpha m z) . \end{aligned} \quad (4.58)$$

Böylece, (4.57) and (4.58)'den, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left[\left(A_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)} \right) \frac{h^2}{12} + \left(\frac{A_{33}^*}{G^*} + \frac{\sigma_{zz}^{(0)}}{G^*} \right) \frac{\sigma_{zz}^{(0)} h^2}{10} \right] \frac{d^4 w}{dz^4} + \\ & \left[-\sigma_{zz}^{(0)} - \left(\frac{A_{33}^*}{G^*} + \frac{\sigma_{zz}^{(0)}}{G^*} \right) \frac{A_{11}^* h^2}{10R^2} \right] \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{A_{11}^*}{R} w = \pi \alpha m^2 \left(\frac{h}{2R} - 1 \right) \sigma_{zz}^{(0)} \sin(\alpha m z) . \end{aligned} \quad (4.59)$$

(4.43) uç şartı, (4.59) denklemini için de geçerlidir. Önceki alt bölümde olduğu gibi, Laplace dönüşümü (4.23)'ü, (4.59) denkleminde (4.46) ifadeleri kullanılır ve $\sigma_{zz}^{(0)} = -p$ eşitliği göz önüne alınarak, $\bar{A}(s)$ bilinmeyeni için aşağıdaki ifade elde edilir.

Silindir malzemesinin elastik olduğu durumlarda ve $(A_{33}/G - p/G) p/10 \approx (A_{33}/G) p/10$ varsayımı kapsamında dış basınç kuvvetinin kritik değerlerinin hesaplanması için kullanılan denklemden aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\bar{A}(s) = \frac{-\ell p \left(\frac{h}{2R} - 1 \right)}{m\pi s \left[A_{11}^* - \left[p - \left(\frac{A_{33}^*}{G^*} - \frac{p}{G^*} \right) \frac{A_{11}^*}{10} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \lambda^2 + \left[\frac{A_{33}^*}{12} - \left(\frac{A_{33}^*}{G^*} - \frac{p}{G^*} \right) \frac{p}{10} \right] \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^4 \right]} . \quad (4.60)$$

Silindirin malzemesinin elastik olduğu durumlarda ve $(A_{33}/G - p/G) p/10 \approx (A_{33}/G) p/10$ varsayımı kapsamında, dış basınç kuvvetinin kritik değerlerinin hesaplanması için kullanılan denklemden aşağıdaki ifade elde edilir:

$$p_{cr} = \frac{A_{11} + A_{11} \frac{A_{33}}{10G} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^2 + \frac{A_{33}}{12} \lambda^4}{\left[1 + \frac{A_{11}}{10G} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \lambda^2 + \frac{A_{33}}{10G} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^4} . \quad (4.61)$$

4.4 Sayısal Sonuçlar ve Yorumlanması

Silindirin malzemesi, (2.4) kısmında kabul edildiği gibidir. Böylece, yukarıdaki hazırlık çerçevesinde, sayısal sonuçları ilk olarak $t' = 0$ ve $t' = \infty$ için elastik stabilite kaybı incelenecektir, çünkü silindirin viskoelastik stabilite kaybında, p dış basınç kuvvetinin yoğunluğu aşağıdaki eşitsizliği sağlamalıdır.

$$p_{cr,\infty} < p < p_{cr,0} . \quad (4.62)$$

Burada, $p_{cr,0} (p_{cr,\infty})$, $t' = 0 (t' = \infty)$ 'da elde edilen kritik kuvvettir.

LEÜBST kapsamında elde edilen sonuçlar, Bernoulli kiriş teorisi kapsamında ve üçüncü mertebe geliştirilmiş kiriş teorisi kapsamında elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

$p'_{3D,c,0} (= p_{3D,cr,0} / E_0^{(1)})$ ve $p'_{3D,c,\infty} (= p_{3D,cr,\infty} / E_0^{(1)})$ işaretlemeleri, LEÜBST kullanılarak elde edilen boyutsuz kuvvetlerin yoğunluğunun kritik değerleri ifade edilmiştir. Bu kısımda 0 ve ∞ alt indisleri sırasıyla, kuvvetlerin kritik değerlerinin $t' = 0$ ve $t' = \infty$ 'da hesaplandığını belirtmektedir. (4.60) ve (2.72) nolu denklemlere göre, Kirchoff-Love kabuk teorisi ($p'_{K,c,0}$ ve $p'_{K,c,\infty}$ ile ifade edilen) kapsamında basınç kuvvetlerin yoğunluğunun ilgili kritik değerleri elde edilen ilgili sonuçlarla ve üçüncü mertebe kiriş

teorisi kapsamında ($p'_{R.c.0}$ ve $p'_{R.c.\infty}$ ile ifade edilen) aşağıdaki ifadeler kullanılarak hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
 p'_{K.c.0} &= \frac{p_{K.c.0}}{E_0^{(1)}} = \frac{A_{110}}{\lambda^2 E_0^{(1)}} + \frac{A_{330}}{12 E_0^{(1)}} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^2, \quad p'_{K.c.\infty} = \frac{p_{K.c.\infty}}{E_0^{(1)}} = \frac{A_{11\infty}}{\lambda^2 E_0^{(1)}} + \frac{A_{33\infty}}{12 E_0^{(1)}} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^2, \\
 p'_{R.c.0} &= \frac{p_{R.c.0}}{E_0^{(1)}} = \frac{A_{110} + A_{110} \frac{A_{330}}{10G_0} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^2 + \frac{A_{330}}{12} \lambda^4}{E_0^{(1)} \left[1 + \frac{A_{110}}{10G_0} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \lambda^2 + \frac{A_{330}}{10G_0} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^4}, \\
 p'_{R.c.\infty} &= \frac{p_{R.c.\infty}}{E_0^{(1)}} = \frac{A_{11\infty} + A_{11\infty} \frac{A_{33\infty}}{10G_\infty} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^2 + \frac{A_{33\infty}}{12} \lambda^4}{E_0^{(1)} \left[1 + \frac{A_{11\infty}}{10G_\infty} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \lambda^2 + \frac{A_{33\infty}}{10G_\infty} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^4}. \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

Burada, $A_{110} = \bar{A}_{11}^*|_{s=\infty}$, $A_{330} = \bar{A}_{33}^*|_{s=\infty}$, $A_{11\infty} = \bar{A}_{11}^*|_{s=0}$, $A_{33\infty} = \bar{A}_{33}^*|_{s=0}$, $G_0 = \bar{G}^*|_{s=\infty}$ ve $G_\infty = \bar{G}^*|_{s=0}$ 'dır. Böylece, ele aldığımız problem için h/R , $\lambda = \pi m R / \ell$, $E^{(2)} / E_0^{(1)}$, ω ve β boyutsuz parametreleri kullanılmıştır. Sayısal inceleme altında, kuvvetlerin kritik değerleri λ parametresi ile ilgili olarak minimize edilmişlerdir. Çizelge 4.1, çeşitli $E^{(2)} / E_0^{(1)}$ ve h/R için $p'_{3D.c.0}$, $p'_{R.c.0}$ ve $p'_{K.c.0}$ minimize edilmiş değerlerini göstermektedir. $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{R.c.\infty}$ ve $p'_{K.c.\infty}$ 'ye uyan değerler sırasıyla $\omega = 0.5$, 1 ve 2 olduğu durumlar için elde edilenler Çizelge 4.2, Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.4 verilmiştir. Aşağıdaki Çizelgelerde λ parametresinin kritik kuvvetlerin minimum olduğu durumlardaki değerleri gösterilmiştir.

Çizelge 4.1 $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve h/R 'nin çeşitli değerleri için elde edilen, $p'_{3D.c.0}$, $p'_{R.c.0}$ ve

$p'_{E.c.0}$ 'ın değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$p'_{3D.c.0} \times 10^2$	$p'_{R.c.0} \times 10^2$	$p'_{E.c.0} \times 10^2$
$h/R = 0.01$			
1	0.6000 ($\lambda = 18.2$)	0.7678 ($\lambda = 18.7$)	0.7772 ($\lambda = 18.6$)
5	1.2816 ($\lambda = 15.8$)	1.6471 ($\lambda = 16.7$)	1.6688 ($\lambda = 16.6$)
10	1.7868 ($\lambda = 13.9$)	2.2674 ($\lambda = 15.0$)	2.3019 ($\lambda = 14.9$)
$h/R = 0.05$			
1	2.8996 ($\lambda = 8.40$)	3.6540 ($\lambda = 8.60$)	3.8860 ($\lambda = 8.30$)
5	6.2111 ($\lambda = 7.20$)	7.8134 ($\lambda = 7.70$)	8.3442 ($\lambda = 7.40$)
10	8.6517 ($\lambda = 6.40$)	10.660 ($\lambda = 6.90$)	11.510 ($\lambda = 6.70$)
$h/R = 0.10$			
1	5.5644 ($\lambda = 6.10$)	6.8662 ($\lambda = 6.30$)	7.7721 ($\lambda = 5.90$)
5	11.958 ($\lambda = 5.30$)	14.618 ($\lambda = 5.60$)	16.691 ($\lambda = 5.30$)
10	16.634 ($\lambda = 4.70$)	19.765 ($\lambda = 5.10$)	23.019 ($\lambda = 4.70$)
$h/R = 0.20$			
1	10.286 ($\lambda = 4.60$)	12.095 ($\lambda = 4.70$)	15.546 ($\lambda = 4.20$)
5	22.226 ($\lambda = 4.00$)	25.571 ($\lambda = 4.20$)	33.377 ($\lambda = 3.70$)
10	30.798 ($\lambda = 3.60$)	33.950 ($\lambda = 3.90$)	46.047 ($\lambda = 3.30$)

Çizelge 4.2 $\omega = 0.5$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve h/R 'nin çeşitli değerleri için

elde edilen, $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$p'_{3D,c,\infty} \times 10^2$	$p'_{R,c,\infty} \times 10^2$	$p'_{E,c,\infty} \times 10^2$
$h/R = 0.01$			
1	0.2152 ($\lambda = 13.8$)	0.5824 ($\lambda = 18.1$)	0.6058 ($\lambda = 17.8$)
5	0.4394 ($\lambda = 10.1$)	1.2282 ($\lambda = 15.7$)	1.3196 ($\lambda = 15.2$)
10	0.6111 ($\lambda = 8.60$)	1.6472 ($\lambda = 14.1$)	1.8134 ($\lambda = 13.5$)
$h/R = 0.05$			
1	1.0364 ($\lambda = 6.40$)	2.4858 ($\lambda = 8.80$)	3.0296 ($\lambda = 7.90$)
5	2.0815 ($\lambda = 4.80$)	4.6327 ($\lambda = 8.10$)	6.5982 ($\lambda = 6.80$)
10	2.8442 ($\lambda = 4.10$)	5.7009 ($\lambda = 7.30$)	9.0670 ($\lambda = 6.00$)
$h/R = 0.10$			
1	1.9788 ($\lambda = 4.70$)	4.0983 ($\lambda = 6.80$)	6.0590 ($\lambda = 5.60$)
5	3.8823 ($\lambda = 3.60$)	6.7360 ($\lambda = 6.70$)	13.196 ($\lambda = 4.80$)
10	5.1728 ($\lambda = 3.30$)	7.6903 ($\lambda = 6.50$)	18.137 ($\lambda = 4.30$)
$h/R = 0.20$			
1	3.6140 ($\lambda = 3.60$)	5.7877 ($\lambda = 5.60$)	12.118 ($\lambda = 4.00$)
5	6.7019 ($\lambda = 3.10$)	8.2085 ($\lambda = 5.90$)	26.393 ($\lambda = 3.40$)
10	8.3779 ($\lambda = 3.10$)	8.8134 ($\lambda = 5.90$)	36.268 ($\lambda = 3.00$)

Çizelge 4.3 $\omega = 1.0$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve h/R ’nin çeşitli değerleri için

elde edilen , $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$p'_{3D,c,\infty} \times 10^2$	$p'_{R,c,\infty} \times 10^2$	$p'_{E,c,\infty} \times 10^2$
$h / R = 0.01$			
1	0.3279 ($\lambda = 15.8$)	0.6277 ($\lambda = 18.2$)	0.6437 ($\lambda = 18.6$)
5	0.6627 ($\lambda = 12.1$)	1.3315 ($\lambda = 15.7$)	1.3786 ($\lambda = 15.4$)
10	0.9202 ($\lambda = 10.4$)	1.8103 ($\lambda = 14.0$)	1.8938 ($\lambda = 13.7$)
$h / R = 0.05$			
1	1.5824 ($\lambda = 7.30$)	2.8637 ($\lambda = 8.50$)	3.2106 ($\lambda = 8.00$)
5	3.1809 ($\lambda = 5.60$)	5.7933 ($\lambda = 7.50$)	6.8929 ($\lambda = 6.90$)
10	4.3762 ($\lambda = 4.90$)	7.5643 ($\lambda = 6.90$)	9.4694 ($\lambda = 6.10$)
$h / R = 0.10$			
1	3.0307 ($\lambda = 5.30$)	5.1058 ($\lambda = 6.30$)	6.4214 ($\lambda = 5.70$)
5	6.0469 ($\lambda = 4.20$)	9.7688 ($\lambda = 5.80$)	13.786 ($\lambda = 4.90$)
10	8.2102 ($\lambda = 3.70$)	12.191 ($\lambda = 5.40$)	18.940 ($\lambda = 4.30$)
$h / R = 0.20$			
1	5.5785 ($\lambda = 4.00$)	8.1647 ($\lambda = 5.00$)	12.842 ($\lambda = 4.00$)
5	10.914 ($\lambda = 3.30$)	14.270 ($\lambda = 4.70$)	27.582 ($\lambda = 3.40$)
10	14.368 ($\lambda = 3.10$)	16.706 ($\lambda = 4.60$)	37.885 ($\lambda = 3.10$)

Çizelge 4.4 $\omega = 2.0$ olması durumunda, $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve h/R 'nin çeşitli değerleri için

elde edilen $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{E,c,\infty}$ değerleri

$\frac{E^{(2)}}{E_0^{(1)}}$	$p'_{3D,c,\infty} \times 10^2$	$p'_{R,c,\infty} \times 10^2$	$p'_{E,c,\infty} \times 10^2$
$h/R = 0.01$			
1	0.4328 ($\lambda = 17.1$)	0.6742 ($\lambda = 18.3$)	0.6856 ($\lambda = 18.2$)
5	0.8792 ($\lambda = 13.6$)	1.4268 ($\lambda = 15.9$)	1.4584 ($\lambda = 15.8$)
10	1.2205 ($\lambda = 11.8$)	1.9500 ($\lambda = 14.2$)	2.0042 ($\lambda = 14.0$)
$h/R = 0.05$			
1	2.0893 ($\lambda = 7.80$)	3.1496 ($\lambda = 8.50$)	3.4285 ($\lambda = 8.10$)
5	4.2441 ($\lambda = 6.30$)	6.5321 ($\lambda = 7.40$)	7.2930 ($\lambda = 7.00$)
10	5.8615 ($\lambda = 5.50$)	8.7338 ($\lambda = 6.70$)	10.021 ($\lambda = 6.30$)
$h/R = 0.10$			
1	4.0036 ($\lambda = 5.70$)	5.7811 ($\lambda = 6.20$)	6.8577 ($\lambda = 5.80$)
5	8.1269 ($\lambda = 4.60$)	11.699 ($\lambda = 5.60$)	14.585 ($\lambda = 5.00$)
10	11.146 ($\lambda = 4.10$)	15.240 ($\lambda = 5.10$)	20.0458 ($\lambda = 4.40$)
$h/R = 0.20$			
1	7.3781 ($\lambda = 4.30$)	9.7425 ($\lambda = 4.80$)	13.715 ($\lambda = 4.10$)
5	14.928 ($\lambda = 3.50$)	18.875 ($\lambda = 4.30$)	29.172 ($\lambda = 3.50$)
10	20.129 ($\lambda = 3.20$)	23.526 ($\lambda = 4.10$)	40.098 ($\lambda = 3.10$)

ω parametresinin viskoelastik matrisin mekanik davranışlarını, $t' = \infty$ çevresinde karakterize ettiği belirtilmelidir. Sonuç olarak ω 'nin değerlerindeki bir artış, $E_{\infty}^{(1)} (\nu_{\infty}^{(1)})$ değerlerindeki bir artışa (düşüşe) karşılık gelmektedir. Bu yüzden $p'_{3D,c,\infty}$, $p'_{R,c,\infty}$ ve $p'_{K,c,\infty}$ değerleri ω ile artar.

Yukarıdaki sayısal sonuçlardan,

$$p'_{3D,c,0} < p'_{R,c,0} < p'_{K,c,0}, \quad p'_{3D,c,\infty} < p'_{R,c,\infty} < p'_{K,c,\infty} \quad (4.64)$$

problem parametrelerinin ele alınan bütün değerleri için sağlandığı görülür. $p'_{3D,c,0} (p'_{3D,c,\infty})$ değerleri ve $p'_{R,c,0} (p'_{R,c,\infty})$ değerleri arasındaki fark ile, $p'_{R,c,0} (p'_{R,c,\infty})$ ve $p'_{K,c,0} (p'_{K,c,\infty})$ değerleri arasındaki fark, hem $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ve h/R parametrelerine hem de, ω reolojik parametresine bağlıdır.

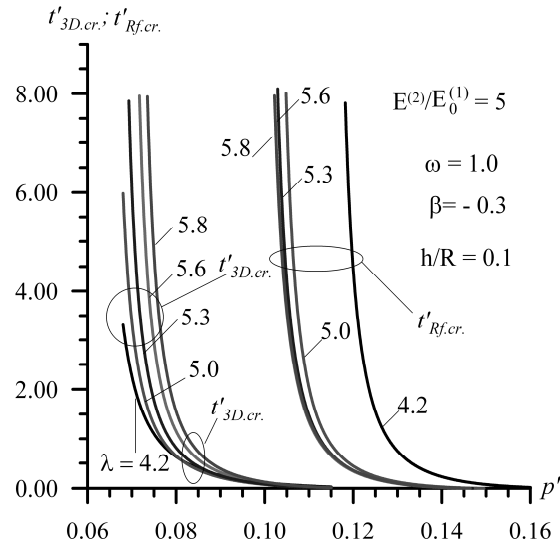
Silindir malzemesinin viskoelastik olduğu durum ele alınarak, kritik zamanı analiz edebilmek maksadıyla, LEÜBST tarafından verilen kritik zaman değerlerini yaklaşık kabuk teorilerinin verdiği değerlerle karşılaştırmak için, eşzamanlı olarak $[p'_{E,c,\infty}, p'_{E,c,0}]$, $[p'_{R,c,\infty}, p'_{R,c,0}]$ ve $[p'_{3D,c,\infty}, p'_{3D,c,0}]$ aralığına düşen $p' (= p / E_0^{(1)})$ değerleri seçilmiştir. Bununla birlikte, Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.4'de verilen verilere uygun olarak, bir çok durumda $p' (= p / E_0^{(1)})$ 'in bu ortak değerleri sadece $[p'_{R,c,\infty}, p'_{R,c,0}]$ ve $[p'_{3D,c,\infty}, p'_{3D,c,0}]$ aralıkları için mevcuttur. Bu nedenle, sadece LEÜBST kullanılarak elde edilen kritik zaman ($t'_{3D,cr.}$ ile ifade edilen), üçüncü mertebe geliştirilmiş kabuk teorisi kullanılarak elde edilen zamanla ($t'_{Rf,cr.}$ ile ifade edilen) karşılaştırılacaktır. İnceleme için $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\omega = 1$ ve $\beta = -0.3$ olduğu durum seçilmiştir. Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6, λ 'nin farklı değerleri için sırasıyla $h/R = 0.1$ ve 0.2 olduğu durumlar için $t'_{3D,cr.}$ (Pay) and $t'_{Rf,cr.}$ (payda) değerlerini göstermektedir. $p'_{3D,c,0} (p'_{R,c,\infty})$ değerleri minimum olduğunda λ 'nin değeri $\lambda_{m,0} (\lambda_{m,\infty})$ iken λ 'nin seçilmiş değerlerinin $[\lambda_{m,0}, \lambda_{m,\infty}]$ aralığında olduğunu belirtmek gerekir. LEÜBST kapsamında elde edilen kritik değerler ile geliştirilmiş kabuk teorisi kapsamında elde edilen değerler arasındaki farkın incelenebilmesi için, $d_{p,0} = p'_{R,c,0} / p'_{3D,c,0}$ ve $d_{p,\infty} = p'_{R,c,\infty} / p'_{3D,c,\infty}$ parametreleri

kullanılmıştır. Buna ilaveten, LEÜBST ve geliştirilmiş kabuk teorisi kapsamında elde edilen kritik zamanlar arasındaki farkı değerlendirmek için, $d_t = t'_{Rf.cr.}/t'_{3D.cr.}$ parametresi verilmiştir. Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.3'deki sayısal sonuçlardan $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\omega = 1$ altında sırasıyla $h/R = 0.1$ ve 0.2 olduğu durumlarda $d_{p,0} \approx 1.22$ ve 1.15 ($d_{p,\infty} \approx 1.61$ and 1.30) olduğu anlaşılmıştır. Buna karşın, Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6, d_t 'nin değerlerinin 10^5 'den büyük olabileceğini gösterir. Sonuç olarak pek çok durumda özellikle $p' (= p/E_0^{(1)})$ 'nin değerlerinin $p'_{3D,c,0}$ veya $p'_{3D,c,\infty}$ değerlerine yakın olduğunda ele alınan silindirin stabilite kaybını incelemek için bu çalışmada geliştirilen üç boyutlu yaklaşımı kullanmak gereklidir.

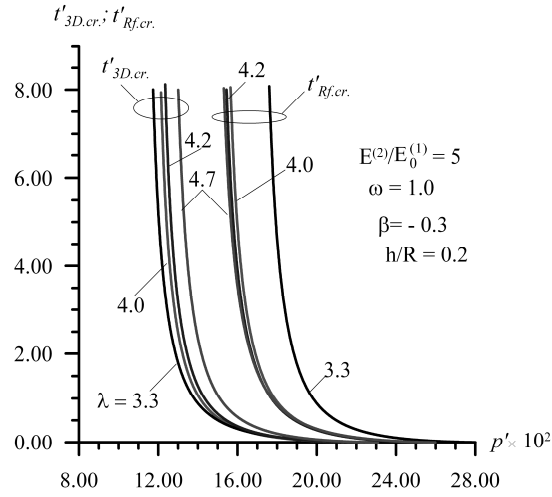
Çizelge 4.5 $\beta = -0.3$ ve $\omega = 1.0$ iken, $h/R = 0.1$ olduğu durumda, λ parametresinin çeşitli değerleri için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf.cr.}$ (payda) değerleri

λ	$p' \times 10^2$								
	11.5	11.6	11.7	11.8	11.9	12.0	12.1	12.2	12.3
	$t'_{3D.cr.}/t'_{Rf.cr.}$								
4.2	$\frac{0.027}{64.33}$	$\frac{0.024}{23.88}$	$\frac{0.021}{13.08}$	$\frac{0.018}{8.427}$	$\frac{0.016}{5.936}$	$\frac{0.014}{4.426}$	$\frac{0.011}{3.431}$	$\frac{0.010}{2.736}$	$\frac{0.008}{2.230}$
5.3	$\frac{0.006}{0.688}$	$\frac{0.004}{0.600}$	$\frac{0.002}{0.525}$	$\frac{0.001}{0.461}$	$\frac{O(10^{-4})}{0.405}$	$\frac{O(10^{-4})}{0.357}$	$\frac{O(10^{-5})}{0.315}$	$\frac{O(10^{-5})}{0.278}$	$\frac{O(10^{-6})}{0.245}$
5.6	$\frac{0.008}{0.649}$	$\frac{0.006}{0.568}$	$\frac{0.004}{0.499}$	$\frac{0.002}{0.439}$	$\frac{0.001}{0.387}$	$\frac{O(10^{-5})}{0.341}$	$\frac{O(10^{-5})}{0.301}$	$\frac{O(10^{-6})}{0.266}$	$\frac{O(10^{-6})}{0.235}$

$t'_{3D.cr.}$ ve $t'_{Rf.cr.}$ arasındaki farkı Şekil 4.2'de daha da açık anlatmak için, $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ ve p' arasındaki bağımlılıkların grafikleri, $\omega = 1$ ve $\beta = -0.3$ altında $h/R = 0.1$ (Şekil 4.2 (a)) ve 0.2 (Şekil 4.2 (b)) olduğu durumlar için λ parametresinin çeşitli değerleri için verilmiştir.



Şekil 4.2 (a) $h/R = 0.1$ olduğu durumlarda, λ parametresinin çeşitli değerleri için p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağımlılıkların grafiği

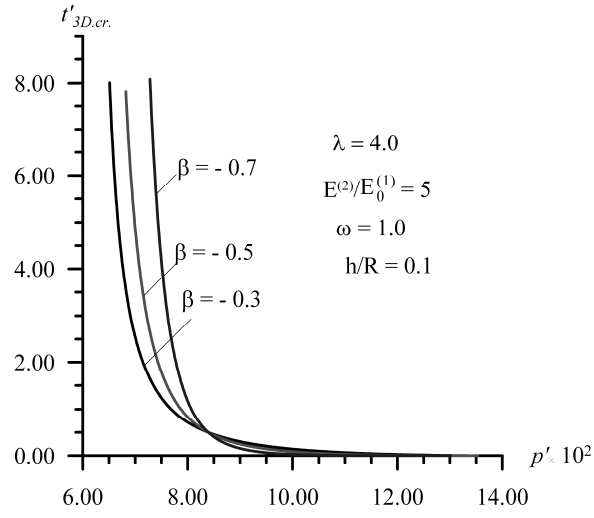


Şekil 4.2 (b) $h/R = 0.2$ olduğu durumlarda, λ parametresinin çeşitli değerleri için p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ve $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ arasındaki bağımlılıkların grafiği

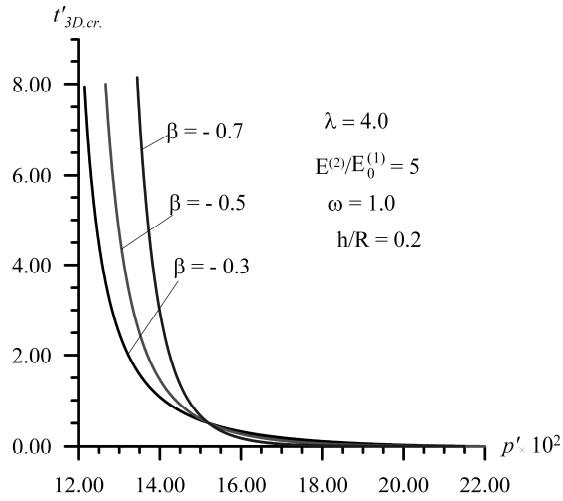
Bu grafiklerden anlaşıldığı üzere, tahmin edilebileceği gibi aşağıdaki ilişkiler ortaya çıkmıştır:

$$\begin{aligned} p' \rightarrow p'_{3D,c,\infty} \quad t'_{3D,cr.} \rightarrow 0 \text{ iken } p' \rightarrow p'_{3D,c,0}, \quad t'_{3D,cr.} \rightarrow \infty, \\ p' \rightarrow p'_{R,c,\infty} \quad t'_{Rf,cr.} \rightarrow 0 \text{ iken } p' \rightarrow p'_{R,c,0}, \quad t'_{Rf,cr.} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.65)$$

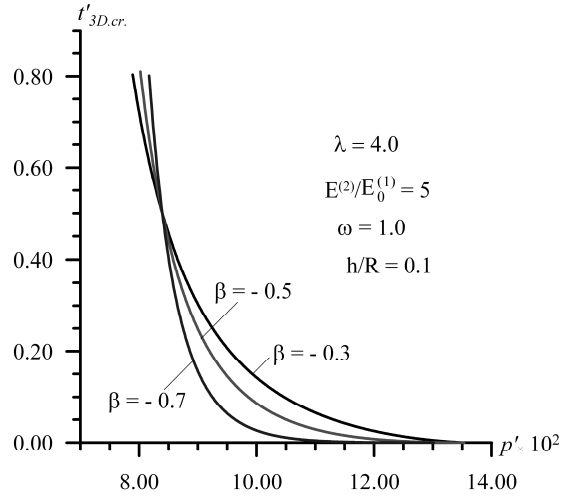
$t'_{3D,cr.}$ değerlerine, β reolojik parametresinin etkisi ele alınsın. $t'_{3D,cr.}$ ve p' arasındaki bağımlılıkların grafiği $\omega = 1$ ve $\lambda = 4$ altından $h/R = 0.1$ (Şekil 4.2 (a)) ve 0.2 (Şekil 4.2 (b)) olan durumlar için Şekil 4.3'de verilmiştir. Şekil 4.3'de verilen sonuçlardan (ve burada verilmeyen diğer sayısal sonuçlardan) çeşitli β için oluşturulan ve analiz edilen bağımlılıkların grafiğinin ortak bir kesişme noktası olduğu anlaşılmıştır. Bu kesişim noktasından önce (sonra) β değerlerindeki artış $t'_{3D,cr.}$ değerlerinde bir artışa (azalmaya) neden olmuştur. Kesişme noktasından sonra ortaya çıkan grafiğin bölümleri $\omega = 1$ ve $\lambda = 4$ altında $h/R = 0.1$ (Şekil 4.4 (a)) ve 0.2 (Şekil 4.4 (b)) olan durumlar için Şekil 4.4'de gösterilmiştir.



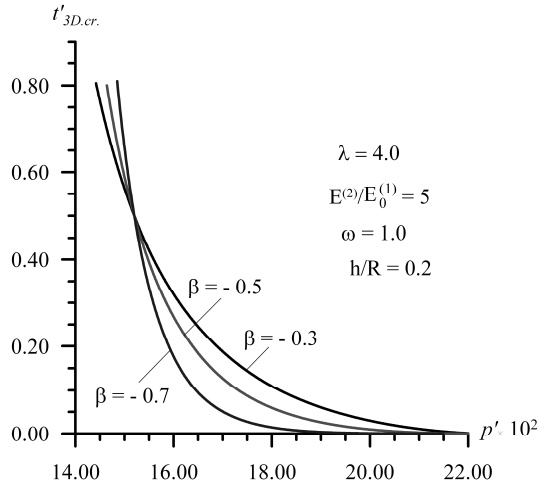
Şekil 4.3 (a) $h/R = 0.1$ olduğu durumlarda, p' basınç kuvveti ile $t'_{3D.cr.}$ arasındaki bağımlılıklara, β reolojik parametresinin etkisi



Şekil 4.3 (b) $h/R = 0.2$ olduğu durumlarda, p' basınç kuvveti ile $t'_{3D.cr.}$ arasındaki bağımlılıklara, β reolojik parametresinin etkisi

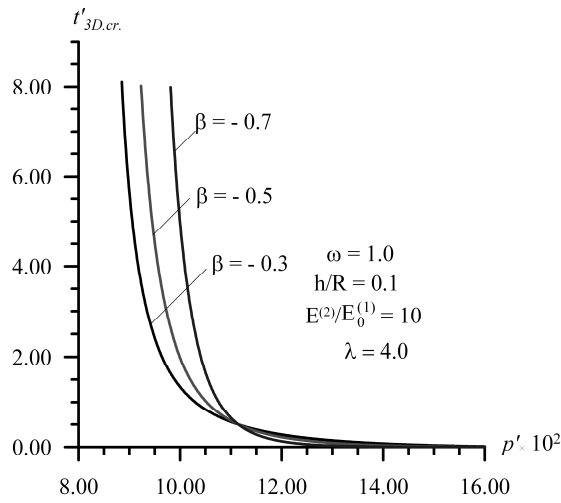


Şekil 4.4 (a) $h/R = 0.1$ olduğu durumlardaki kesişme noktasından sonra, Şekil 4.2’de ortaya çıkan grafiklerin bölümleri

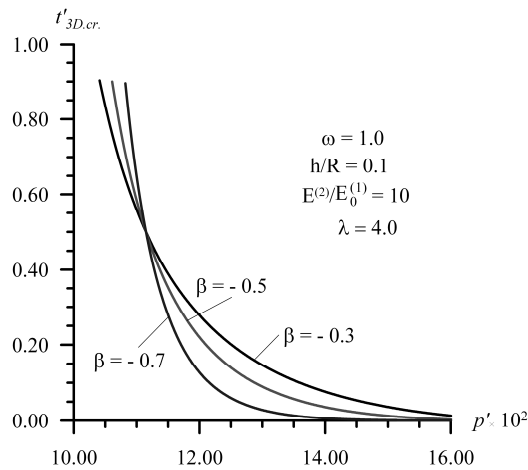


Şekil 4.4 (b) $h/R = 0.2$ olduğu durumlardaki kesişme noktasından sonra, Şekil 2’de ortaya çıkan grafiklerin bölümleri

Şekil 4.3 ve Şekil 4.4’de gösterilen sonuçlar, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ olduğu durumlar için elde edilmiştir. β reolojik parametresinin $t'_{3D.cr.}$ değerlerine etkilerine benzer sonuçlar, diğer $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ değerleri için de elde edilmiştir. Bir örnek olarak Şekil 4.5, $\omega = 1$, $\lambda = 4$ ve $h/R = 0.1$ altında $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 10$ için elde edilen grafikleri göstermektedir. Bahsedilen ortak kesişim noktasında ortaya çıkan bu grafiklerin bölümleri, sırasıyla Şekil 4.5 (a) ve Şekil 4.5 (b)’de verilmiştir.

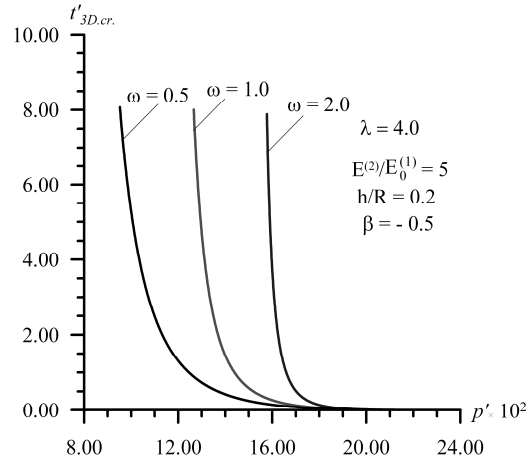


Şekil 4.5 (a) $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 10$ olduğu durumda p' basınç kuvveti ile $t'_{3D.cr.}$ arasındaki bağımlılıklara, β reolojik parametresinin etkisi



Şekil 4.5 (b) kesişme noktasından sonra ortaya çıkan bölümler

Şimdi ω reolojik parametresinin $t'_{3D.cr.}$ ve p' arasındaki bağımlılıkla ilgili grafiklerin davranışlarını nasıl etkilediği ele alınsın. $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R = 0.2$ ve $\beta = -0.5$ olduğu durumlarda, ω parametresinin çeşitli değerlerine karşılık gelen grafikler Şekil 4.6'da gösterilmiştir. Bu grafiklerin özelliği $p'_{3D.c.\infty}$ ile ω değerlerindeki artışla açıklanabilir. Bu yüzden ortak p' için (ω seçilen değerlerine göre) $t'_{3D.cr.}$ değerleri, ω ile artmaktadır.



Şekil 4.6 ω reolojik parametresinin değişik değerleri için bulunan p' basınç kuvvetinin boyutsuz yoğunluğu ile $t'_{3D.cr.}$ arasındaki bağımlılıkların grafiği

Çizelge 4.6 $\beta = -0.3$ ve $\omega = 1.0$ iken, $h/R = 0.2$ olduğu durumlarda, λ parametresinin çeşitli değerleri için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf.cr.}$ (payda) değerleri

λ	$p' \times 10^2$								
	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0
	$t'_{3D.cr.}/t'_{Rf.cr.}$								
4.0	$\frac{0.561}{44.65}$	$\frac{0.421}{10.50}$	$\frac{0.320}{4.895}$	$\frac{0.244}{2.847}$	$\frac{0.187}{1.847}$	$\frac{0.143}{1.276}$	$\frac{0.109}{0.918}$	$\frac{0.082}{0.678}$	$\frac{0.060}{0.510}$
4.2	$\frac{0.651}{20.54}$	$\frac{0.484}{7.404}$	$\frac{0.365}{3.902}$	$\frac{0.278}{2.406}$	$\frac{0.212}{1.615}$	$\frac{0.162}{1.141}$	$\frac{0.123}{0.834}$	$\frac{0.092}{0.623}$	$\frac{0.068}{0.473}$
4.7	$\frac{1.075}{13.87}$	$\frac{0.778}{6.164}$	$\frac{0.578}{3.532}$	$\frac{0.436}{2.284}$	$\frac{0.333}{1.583}$	$\frac{0.255}{1.146}$	$\frac{0.196}{0.855}$	$\frac{0.150}{0.650}$	$\frac{0.114}{0.501}$

$t'_{3D.cr.}$ 'nin değerleri, Gerard ve Gilbert (1958) tarafından önerilen kritik deformasyon yönteminin kullanılmasıyla hesaplanan uygun değerlerle karşılaştırılması Çizelge 4.7'de verilmiştir. Bu yöntemle göre, viskoelastik içi boş silindirin kritik deformasyonunun, uygun elastik silindirin kritik deformasyonuna eşit olduğu varsayılmıştır. Bu varsayım kullanılarak, elastik silindir için kritik deformasyon LEÜBST kapsamında belirlenir. Değerlendirilen durumda belirtilen kritik deformasyon, $p'_{3D.c.0}$ 'a tekabül etmektedir.

Bu tespite göre, $p'_{3D.c.0} = p/E_3^*$ ilişkisi kullanılarak, p 'nin seçilen değerleri için kritik zaman belirlemiştir. Boyutsuz kritik zamanın ($t'_{cdm.cr.}$ ile ifade edilen) kritik deformasyon yöntemi kullanılarak belirlenen değerleri Çizelge 4.7'de verilmiştir.

Çizelge 4.7 $\lambda = 4.0$, $\beta = -0.3$, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $h/R = 0.2$ ve $\omega = 1.0$ olduğu durumlarda p' 'nün çeşitli değerleri için elde edilen $t'_{3D.cr.}$ (pay) ve $t'_{Rf.cr.}$ (payda) değerleri

$p' \times 10^2$						
20.4	20.5	20.6	20.7	20.8	20.9	21.0
$t'_{3D.cr.}/t'_{cdm.cr.}$						
$\frac{0.0210}{118.48}$	$\frac{0.0190}{8.4127}$	$\frac{0.0172}{3.2494}$	$\frac{0.0155}{1.7368}$	$\frac{0.0138}{1.0685}$	$\frac{0.0122}{0.7095}$	$\frac{0.0108}{0.4931}$

Yukarıdaki sonuçlardan ele alınan durumlar için $t'_{Rf.cr.}$ değerlerinin $t'_{3D.cr.}$ den büyük olduğu anlaşılmaktadır. p' 'nin $p'_{3D.c.\infty}$ 'nin değerlerine (ya da $p'_{Rf.c.\infty}$ değerlerine) yakın olduğu durumlarda $t'_{3D.cr.}$ ve $t'_{Rf.cr.}$ arasındaki fark daha önemsiz hale gelmektedir. Yukarıda verilen sonuçlar reolojik parametre β 'nin $t'_{3D.cr.}$ ve $t'_{Rf.cr.}$ değerleri üzerindeki etkisini de göstermektedir. Bu etkiyi Şekil 4.2'de daha da açık anlatmak için $t'_{3D.cr.}$, $t'_{Rf.cr.}$ ve p' arasındaki bağımlılıkların grafikleri $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\omega = 0.5$ altında $h/R^+ = 0.3$ (Şekil 4.2 (a)) ve $h/R^+ = 0.5$ (Şekil 4.2 (b)) olduğu durumlar için β 'nin çeşitli değerleri için verilmiştir. Şekil 4.2'de verilen sonuçlardan ve buradan verilmeyen diğer sayısal

sonuçlardan çeşitli β için yapılandırılan incelenen bağımlılıkların grafiklerinin ortak bir kesişme noktasının olduğu anlaşılmaktadır. Bu kesişme noktasından önce (sonra), β 'nin mutlak değerlerindeki artış kritik zamanın değerlerinin artmasına (azalmasına) neden olmaktadır. Kesişme noktasından sonra görünen grafiklerin kısımları $h / R^+ = 0.3$ (Şekil 4.3 (a)) ve $h / R^+ = 0.5$ (Şekil 4.3 (b)) durumlarında Şekil 4.3'de gösterilmiştir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Viskoelastik transversal izotrop cisimler teorisinin üç boyutlu geometrik nonlinear alan denklemleri kapsamında yapılan bu tez çalışmasında, viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış katı silindirin ve yine viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış içi boş silindirin üç boyutlu stabilite kaybı analizleri için yaklaşım geliştirilmiştir. Katı silindirin, sonsuz küçük bir başlangıç sapmasına sahip olduğu varsayılmıştır. Aynı zamanda içi boş silindir olması durumunda ise, sonsuz küçük bir global başlangıç sapmasına sahip olduğu ve silindir eksenine göre simetrik olan sonsuz küçük bir başlangıç sapmasına sahip olduğu varsayılmıştır. Kabul edilen bu üç varsayımın her biri için de, belirtilen bu çok küçük sapmaların artmaya başladığı ve sonsuza gittiği zaman değeri, viskoelastik problemler için kritik zaman olarak alınmıştır. Karşı gelen nonlinear sınır değer problemini çözmek için, sınır-formu pertürbasyon yöntemi ve küçük parametre yöntemi eş zamanlı olarak kullanılmıştır. Bu uygulamaların bir sonucu olarak, bahsedilen non-linear problemin (nonlinear sınır-değer problemi) çözümü, lineer seri problemlerinin çözümüne indirgenmiştir. Birinci ve sonraki yaklaşımlara ait denklemlerin ve bağıntıların, iyi bilinen LEÜBST'nin denklemleri ve bağıntıları ile karşılaştığı, doğrudan sağlama ile ispatlanabilir. Stabilite kaybı problemlerinin incelenmesinde, sadece sıfıncı ve birinci yaklaşımları kullanmanın yeterli olduğu görüşünün, Akbarov'un daha önceki bir çalışmasına dayandırıldığına dikkat edilmelidir. Viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış katı silindirin sonsuz küçük bir başlangıç sapmasına sahip olaması ve yine viskoelastik kompozit malzemeden yapılan içi boş silindirin de sonsuz küçük bir global başlangıç sapmasına sahip olması durumlarında, ortalama-integrasyon işlemi kullanılarak, Bernoulli ve üçüncü mertebe geliştirilmiş giriş

teorileri kapsamındaki yaklaşık stabilite kaybı denklemlerinden, sözü edilen birinci yaklaşımlara ait denklemler ve bağıntılar türetilmiştir. Viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış içi boş silindirin, silindir eksenine göre simetrik olan sonsuz küçük bir başlangıç sapmasına sahip olması durumunda ise, ortalama-integrasyon işlemi kullanılarak, Kirchhoff-Love ve üçüncü mertebe geliştirilmiş kabuk teorileri kapsamındaki yaklaşık stabilite kaybı denklemlerinden, sözü edilen birinci yaklaşımlara ait denklemler ve bağıntılar türetilmiştir. Nihai sayısal sonuçlar, silindirin viskoelastik matris ve silindir boyunca uzanan tek boyutlu elastik liflerden oluşan viskoelastik kompozitten yapıldığı durum için, Laplace dönüşümü ve değişkenlerine ayırma yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. İlk olarak, silindirin $t = 0$ ve $t = \infty$ 'daki elastik stabilite kaybına ait sayısal sonuçlar dikkate alınmıştır. Viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış katı silindirin sonsuz küçük bir başlangıç sapmasına sahip olması ve yine viskoelastik kompozit malzemeden yapılan içi boş silindirin de sonsuz küçük bir global başlangıç sapmasına sahip olması durumlarında, üçüncü mertebeden geliştirilmiş kiriş teorisi kapsamında elde edilen kritik kuvvetlerin, üç boyutlu yaklaşım kapsamında elde edilen mukabil sonuçlara çok yakın olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte, viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış katı silindirin sonsuz küçük bir başlangıç sapmasına sahip olması durumunda, üç boyutlu yaklaşım kapsamında elde edilen kritik zaman, üçüncü mertebe geliştirilmiş kiriş teorisi kapsamında elde edilen mukabil kritik zaman değerlerinden anlamlı olarak daha büyük veya daha küçük olabiliyorken, viskoelastik kompozit malzemeden yapılan içi boş silindirin sonsuz küçük bir global başlangıç sapmasına sahip olması durumunda ise, üç boyutlu yaklaşım kapsamında elde edilen kritik zaman, üçüncü mertebe geliştirilmiş kiriş teorisi kapsamında elde edilen mukabil kritik zaman değerlerinden önemli ölçüde daha küçüktür. Viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış içi boş silindirin, silindir eksenine göre simetrik olan sonsuz küçük bir başlangıç sapmasına sahip olması durumunda ise, üçüncü mertebeden geliştirilmiş kabuk teorisi kapsamında elde edilen kritik kuvvetlerin LEÜBST kapsamında elde edilen kritik kuvvetlere oranının, 1.61'den daha fazla olmadığı fakat üçüncü mertebeden geliştirilmiş kabuk teorisi kapsamında elde edilen kritik zamanın, LEÜBST kapsamında elde edilen kritik zamana oranının, problem parametrelerinin değişim aralığı dikkate alındığında, belki 100'den bile fazla olabileceği

ispatlanmıştır. Eğer dış basınç kuvvetinin değerleri, $t = \infty$ 'da ulaşılan kritik basınç kuvvetine yakınsa, üç boyutlu yaklaşım ve üçüncü mertebe geliştirilmiş kiriş teorileri (viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış katı silindirin sonsuz küçük bir başlangıç sapmasına sahip olması durumunda) veya üçüncü mertebe geliştirilmiş kabuk teorileri (viskoelastik kompozit malzemeden yapılan içi boş silindirin de sonsuz küçük bir global başlangıç sapmasına sahip olması ya da viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış içi boş silindirin, silindir eksenine göre simetrik olan sonsuz küçük bir başlangıç sapmasına sahip olması durumunda) kullanılarak elde edilen kritik zamanlar arasındaki fark daha da ihmal edilemez olur. Son söz olarak, viskoelastik kompozitlerden yapılmış silindirlerin stabilite kaybının incelenmesi için, birçok durumda, bu çalışmada geliştirilmiş olan üç boyutlu yaklaşımın kullanılması gereklidir.

- [1] Akbarov, S.D., (1998). "On the three dimensional stability loss problems of elements of constructions fabricated from the viscoelastic composite materials", *Mechanics of Composite Materials*, 34(6): 537–544.
- [2] Akbarov, S.D., (2007). "Three-dimensional instability problems for viscoelastic composite materials and structural members", *International Applied Mechanics*, 43(10): 1069–1089.
- [3] Akbarov, S.D. ve Guz, A.N., (2000). *Mechanics of curved composites*, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London.
- [4] Akbarov, S.D., Cilli, A. ve Guz, A.N., (1999). "The theoretical strength limit in compression of viscoelastic layered composite materials", *Composites, Part B: Engineering*, 30: 365–472.
- [5] Akbarov, S.D. ve Kosker, R., (2001). "Lif buckling in a viscoelastic matrix", *Mechanics of Composite Materials*, 37 (1): 299–306.
- [6] Akbarov, S.D. ve Kosker, R., (2004). "Internal stability loss of two neighboring lifs in a viscoelastic matrix", *International Journal of Engineering Science*, 42: 1847–1873.
- [7] Akbarov, S.D. ve Mamedov, A.R., (2009). "On the solution method for problems related to the micro-mechanics of a periodically curved lif near a convex cylindrical surface", *Computer modeling in Engineering and Sciences*, 42(3): 257–296.
- [8] Akbarov, S.D. ve Mamedov, A.R., (2011). "Stability loss of the micro-lif in the elastic and viscoelastic matrix near the free convex cylindrical surface", *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 30: 167–182.
- [9] Akbarov, S.D. ve Tekercioglu, R., (2007). "Surface undulation of the viscoelastic half-space covered with stack of layers in bi-axial compression", *International Journal of Mechanical Sciences*, 49: 778–789.
- [10] Akbarov, S.D., Sisman, T. ve Yahnioglu, N., (1997). "On the fracture of the unidirectional composites in compression", *International Journal of Engineering Science*, 35(12/13): 1115–1136.
- [11] Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., (2001). "A method of investigation of the general theory of stability problems of structural elements fabricated from

- the viscoelastic composite materials”, *Composites, Part B: Engineering*, 30: 475–482.
- [12] Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Kutug, Z., (2001). “On the three-dimensional stability loss problem of the viscoelastic composite plate”, *International Journal of Engineering Science*, 39: 1443–1457.
 - [13] Babich, I.Yu., Guz, A.N. ve Chechov, V.N., (2001). “The three-dimensional theory stability of fibrous and laminated materials”, *International Applied Mechanics*, 37(9): 1103–1141.
 - [14] Babich, I.Yu. ve Guz, A.N., (2002). “Stability of composite structural members (three-dimensional formulation)”, *International Applied Mechanics*, 38(9): 1048–1075.
 - [15] Biezeno, C.B. ve Hencky, H., (1929). On the general theory of elastic stability, *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Amsterdam, 32: 444–456.
 - [16] Biot, M.A., (1965). *Mechanics of incremental deformations*, Wiley, New York.
 - [17] Christensen, R.M., (1979). *Mechanics of composite materials*, Wiley, New York.
 - [18] Green, A.E., Rivlin, R.S. ve Shield, R.T., (1952). “General theory of small elastic deformations superimposed on finite elastic deformations”, *Proceedings of the Royal Society, A* 211(1104), 128–154.
 - [19] Guz, A.N., (1999). *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies*, Springer-Verlag, Berlin Heideberg.
 - [20] Gerard, F. ve Gilbert, A.A., (1958). “Critical strain approach to creep buckling of plates and shells”, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 25(7): 429–438.
 - [21] Hoff, N.J., (1954). “Buckling and stability”, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 58(1).
 - [22] Kromm, A., (1955). “Über die Randguer Krafte bei Gestutzten Platten”, *ZAMM*, 35: 231–241.
 - [23] Kutug, Z., (2009). “On the three-dimensional undulation instability of a rectangular viscoelastic composite plate in biaxial compression”, *Mechanics of Composite Materials*, 45(1): 65–76.
 - [24] Kutug, Z., Yahnioglu, N. ve Akbarov, S.D., (2003). “The loss of stability analyses of an elastic and viscoelastic composite circular plate in the framework of the three-dimensional linearized theory”, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 22: 243–256.
 - [25] Rabotnov, Yu.N., (1977). *Elements of hereditary mechanics of solid bodies*, Nauka, Moscow (in Russian).
 - [26] Selim, S. ve Akbarov, S.D., (2003). “FEM analyses of the three-dimensional buckling problem for a clamped thick rectangular plate made of a viscoelastic composite”, *Mechanics of Composite Materials*, 39 (6): 299–306.

- [27] Schapery, R.A., (1966). "Approximate methods of transform inversion for viscoelastic a stress analysis", Proceedings of the U. S. National Congress of Applied Mechanics, published by ASME, 4: 1075–1085.
- [28] Southwell, R.V., (1913). "On the general theory of elastic stability", Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Serial A, 213: 187–244.
- [29] Volmir, A.C., (1963). Stability the Systems of Elasticity, Physico Math issue, Moscow.
- [30] Yahnioglu, N. ve Akbarov, S.D., (2002). "Stability loss analyses of the elastic and viscoelastic composite rotating thick circular plate in the framework of the three-dimensional linearized theory of stability", International Journal of Mechanical Sciences, 44(6): 1225–1244.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Şerife KARAKAYA
Doğum Tarihi ve Yeri : 01.01.1965 Kargı
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : karakaya@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Mertebe	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	1994
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	1990
Lise	-	Bağcılar Lisesi	1983

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010	Yıldız Teknik Üniversitesi	Arş. Gör.
2005	“	“
2002	“	“

YAYINLARI

Makale

1. S. KARAKAYA **“ON THE STABILITY LOSS OF THE CIRCULAR CYLINDER MADE FROM VISCOELASTIC COMPOSITE MATERIAL”, Journal of Engineering and Natural Sciences, Issue 30, Pages 1-19, 2012.**

2. Surkay D.
AKBAROV, S.
KARAKAYA **“3D ANALYSES OF THE STABILITY LOSS OF THE CIRCULAR SOLID CYLINDER MADE FROM VISCOELASTIC COMPOSITE MATERIAL”, CMC-Computers Materials & Continua, Volume 22, Issue 1, Pages 1-38, Mar 2011.**