

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA KAPALI YÖRÜNGE
EĞRİSİNİN KUTUPSAL ATALET MOMENTİ İÇİN HOLDITCH-TİPİ
TEOREMLER**

MUTLU AKAR

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA KAPALI YÖRÜNGE
EĞRİSİNİN KUTUPSAL ATALET MOMENTİ İÇİN HOLDITCH-TİPİ
TEOREMLER**

Mutlu AKAR tarafından hazırlanan tez çalışması 22.11.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri Kuruoğlu
Bahçeşehir Üniversitesi

Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR
Bahçeşehir Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Bu alışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün 2010-01-03-DOP01 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Kinematik; kuvvet ve kütle kavramlarının hiç rol oynamadığı mekaniğin bir alt dalıdır. Bir diğer ifadeyle, kinematik sadece bir nokta veya bir sistemin (cismen) zamana bağlı meydana getirdiği yer değiştirmeleri inceler. Bu tezde düzlemsel kinematiğin özellikle geometriyi ilgilendiren kısmını inceleyeceğiz ve elde edilen verilerin geometrik sonuçlarını vereceğiz.

Bu çalışmada tamamen düzlemsel kinematik ele alınacaktır. Yani bir düzlem parçasının düzlemsel bir yüzey üzerindeki hareketini inceleyeceğiz.

Bu çalışmanın hazırlanmasında benden hiçbir yardımı esirgemeyen Saygıdeğer Hocam Sayın **Prof. Dr. Salim YÜCE'** ye, tez izleme komitesinde bulunan Sayın **Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU** ve Sayın **Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK** hocalarıma en içten duygularıyla sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli aileme ve çalışma arkadaşlarıma en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Eylül, 2012

Mutlu AKAR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT.....	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	2
1.2 Tezin Amacı	7
1.3 Orjinal Katkı.....	7
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	8
2.1 Afin Uzay ve İzometri	8
BÖLÜM 3	
1- PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKET	11
3.1 Türev Denklemleri.....	13
3.2 Hızlar ve Hızların Terkibi	14
3.3 Dönme Polü ve Pol Eğrileri	16
3.4 1- Parametrelî Düzlemsel Kapalı Hareket	19
3.4.1 Kapalı Hareket Eşnasında Yörünge Eğrisinin Alanı.....	20
3.4.2 Klasik Holditch Teoremi	22
3.5 Doğru Demetlerinin Zarflarına Ait Cauchy Formülleri	24
3.5.1 Kapalı Hareketlerde Doğru Zarf Eğrilerinin Çevresi	27
3.6 Kapalı Hareket Altında Yörünge Eğrisinin Kutupsal Atalet Momenti	30
3.7 Kutupsal Atalet Momenti için Holditch-Tipi Teorem.....	31
3.7.1 Yörünge Eğrisinin Kutupsal Atalet Momenti için Özel Durumlar .	34
3.7.2 Yörünge Eğrisinin Atalet Momenti ve Yörünge Alanı Arasındaki İlişkiler	38

3.8	Kutupsal Atalet Momenti için Holditch Tipi Teoremin Genelleştirilmeleri	40
-----	---	----

BÖLÜM 4

1-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKET	50
4.1 Türev Denklemleri.....	51
4.2 Hızlar ve Hızların Terkibi	52
4.3 Pol Noktaları ve Pol Eğrileri.....	53
4.4 1- Parametrelili Düzlemsel Kapalı Homotetik Hareket.....	57
4.4.1 Kapalı Homotetik Hareket Esnasında Yörünge Eğrisinin Alanı.....	57
4.4.2 Kapalı Düzlemsel Homotetik Hareketler için Holditch Teoremi ..	61
4.5 Kapalı Homotetik Hareketlerde Doğru Zarf Eğrilerinin Çevresi	62
4.6 Kapalı Homotetik Hareket Altında Yörünge Eğrisinin Alanı için Holditch-Tipi Teoremler.....	64
4.7 Kapalı Homotetik Hareket Altında Yörünge Eğrisinin Kutupsal Atalet Momenti	69
4.8 Holditch-Tipi Teorem ile Kutupsal Atalet Momentinin Hesaplanması	70

BÖLÜM 5

DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA KAPALI YÖRÜNGE EĞRİSİNİN KUTUPSAL ATALET MOMENTİ İÇİN HOLDITCH-TİPİ TEOREMLER.....	79
---	----

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER	87
KAYNAKLAR	88

EK-A

DÜZLEMSEL HAREKETLERİN MAPLE ÖRNEKLERİ	90
ÖZGEÇMİŞ	135

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3. 1 Bir parametrelili düzlemsel hareket	11
Şekil 3. 2 Başlangıç noktaları çakışık olan koordinat sistemleri	12
Şekil 3. 3 Hareketli ve sabit pol eğrileri	19
Şekil 3. 4 Holditch Halkası	22
Şekil 3. 5 Hareketli düzlemde Holditch Halkası	23
Şekil 3. 6 Doğrunun zarf eğrisi	26
Şekil 3. 7 Kapalı hareketlerde doğrunun zarf eğrisi	28
Şekil 3. 8 Doğrudaş üç nokta	31
Şekil 3. 9 Doğrudaş olmayan üç nokta	40
Şekil 3. 10 Başlangıç noktaları aynı koordinat sistemleri	43
Şekil 3. 11 Doğrudaş olmayan üç noktanın çizdiği farklı yörünge eğrileri	43
Şekil 3. 12 Doğrudaş olmayan üç noktanın çizdiği aynı yörünge eğrisi	46
Şekil 3. 13 Doğrudaş olmayan üç noktanın çizdiği farklı yörünge eğrilerinin genel hali	47
Şekil 3. 14 Farklı iki hareketteki farklı doğrudaş üç noktanın çizdiği yörünge eğrileri	48
Şekil 4. 1 Doğrudaş olmayan üç nokta ve farklı Q_i ($i = 1, 2, 3$) noktaları	74
Şekil 5. 1 Kapalı homotetik hareketlerde doğrunun zarf eğrisi	80

**DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA KAPALI YÖRÜNGE
EĞRİSİNİN KUTUPSAL ATALET MOMENTİ İÇİN HOLDITCH-TİPİ
TEOREMLER**

Mutlu AKAR

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

Holditch, H. [1], aşağıdaki önemli teoremi vermiştir:

Öklid düzleminde sabit $a+b$ uzunluklu bir $\mathbf{AB}$ doğru parçasının A ve B uç noktaları bir k ovali boyunca bir defa dolandığında; $\mathbf{AB}$ doğru parçası üzerinde tespit edilen bir X noktası ($|\mathbf{AX}|=a$, $|\mathbf{XB}|=b$) da genellikle konveks olması gerekmeyen kapalı bir k_x eğrisini çizer. Bu k ovali ile k_x eğrisi arasında kalan “Holditch Halkası”nın F yüzey alanı,

$$F = \pi ab$$

dir.

Blaschke, W., Müller H. R. [3], klasik Holditch Teoremi’nin aşağıdaki genelleştirilmesini vermiştir:

1-parametrelili ν dönme sayılı kapalı düzlemsel hareketler altında bir $\mathbf{AB}$ doğru parçasının $A=(0,0)$ ve $B=(a+b,0)$ uç noktaları sırasıyla k_A ve k_B kapalı eğrilerini çizdiğinde, A ve B noktaları ile doğruduş bir $X=(a,0)$ noktası ($|\mathbf{AX}|=a$ ve $|\mathbf{XB}|=b$)

da kapalı fakat genellikle konveks olması gerekmeyen bir k_X eğrisini çizer. A, B ve X noktalarının çizdiği eğrilerin yörünge alanları sırasıyla F_A, F_B ve F_X olmak üzere bu alanlar arasında

$$F_X = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} - \pi vab$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

Bu çalışmada, Yüce, S., Düldül, M. ve Kuruoğlu, N. [7] tarafından verilen 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler altında doğrudan olmayan üç noktanın kutupsal atalet momentleri için Holditch Tipi Teoremlerin homotetik hareketlerdeki karşılığı araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Holditch Teoremi, Homotetik Hareket, Kutupsal Atalet Momenti.

**HOLDITCH-TYPE THEOREMS FOR THE POLAR MOMENT OF INERTIA OF
THE CLOSED ORBIT CURVE UNDER PLANAR HOMOTHETIC MOTIONS**

Mutlu AKAR

Department of Mathematics

Ph.D Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

H. Holditch [1] have given the following important theorem in 1858:

If the endpoints A, B of a line segment $\mathbf{AB}$ with fixed length $a+b$ are rotated once along an oval (Eilinie) k in the Euclidean plane, then a given fixed point X ($|\mathbf{AX}|=a, |\mathbf{XB}|=b$) on line segment $\mathbf{AB}$ describes a closed, not necessarily convex, curve k_X . The area F of the *Holditch-Ring* bounded by the oval k and curve k_X is

$$F = \pi ab.$$

W. Blaschke and H. R. Müller [3] have given the following generalization of the classical Holditch Theorem:

Under 1-parameter closed planar motions with the rotation number ν , if the endpoints $A=(0,0)$ and $B=(a+b,0)$ on a line segment $\mathbf{AB}$ trace the closed orbit curves k_A and k_B , respectively, the point $X=(a,0)$ ($|\mathbf{AX}|=a$ and $|\mathbf{XB}|=b$) which is collinear with points A and B traces a closed, not necessarily convex, curve k_X . Let F_A, F_B and F_X be the orbit areas of the orbit curves k_A, k_B and k_X , respectively. Then, there is the equation

$$F_x = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} - \pi vab.$$

In this study, under the homothetic motions, we investigated the obtained results which Holditch-Type Theorems for the polar moments of inertia of three noncollinear points given by Yüce, S., Düldül, M. ve Kuruoğlu, N. [7].

Key words: Holditch Theorem, Homothetic Motion, Polar Moment of Inertia.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Mekanik, fiziğin bir alt dalı olarak hareket ve denge olaylarını inceleyen bilimdir. Mekanik üç bölüme ayrılabilir: Kinematik, Dinamik ve Statik.

Kinematik, maddesel sistemlerin geometrik özelliklerinin zamanla değişme şeklini inceleyen bilimdir. Kinematiğin oluşması ve bağımsız bir bilim olarak ele alınışı, bu bilimi kuran ve ona adını koyan Ampère (1775-1836) e aittir.

Kinematik, cisme etki eden kuvvetleri hiç göz önüne almadan sadece cismin nasıl hareket ettiğini, nasıl bir yol üzerinde gittiğini, herhangi bir andaki yerinin, hız ve ivmesinin ne olduğunu belirlemeye çalışır.

Dinamik, maddesel sistemlerin hareketlerini oluşturan ve değiştiren nedenleri yani kuvvetleri göz önüne alarak hareketi inceleyen bilimdir.

Kinematikteki temel büyüklükler uzunluk ve zamandır. Dinamikte ise uzunluk, zaman ve kütle olmak üzere üç tane temel büyüklük vardır. Böylece Kinematik, Geometri ile Dinamik arasında bulunan bir bilim olmaktadır.

Statik, hareket etmeyen nesnelerin üzerindeki kuvvet dengelerini konu alan bilim dalıdır.

1.1 Literatür Özeti

Holditch, H. [1], aşağıdaki önemli teoremi vermiştir:

Düzlemde sabit $a+b$ uzunluklu bir **AB** doğru parçasının A ve B uç noktaları bir k ovali boyunca bir defa dolandığında; **AB** doğru parçası üzerinde tespit edilen bir X noktası ($|AX|=a, |XB|=b$) da genellikle konveks olması gerekmeyen kapalı bir k_x eğrisini çizer. Bu k ovali ile k_x eğrisi arasında kalan “Holditch Halkası”nın F yüzey alanı,

$$F = \pi ab \quad (1.1)$$

dir. Burada F yüzey alanı, sadece X noktasının **AB** doğru parçasının uç noktalarına olan uzaklıklarına bağlı olup k ile k_x eğrilerinden ve hareketten bağımsızdır.

Bu klasik Holditch Teorem, daha sonra birçok bilim adamı tarafından farklı bakış açıları ile çalışılarak değişik metotlar ile genelleştirilmiştir.

Steiner, J. [2], 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler altında hareketli düzlemde alınan sabit bir $X = (x_1, x_2)$ noktasının sabit düzlemdeki çizdiği yörünge eğrisinin alanı için

$$F_x = F_o + \pi \nu (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2) \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilen “Steiner Alan Formülü”nü vermiştir. Burada F_o ; $O = (0,0)$ orijin noktasının yörünge alanı, ν ; hareketin dönme sayısı ve $S = (s_1, s_2)$ Steiner noktası; hareket esnasında sabit düzlemdeki hareketli pol eğrisinin ağırlık merkezidir.

1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketlerle ilgili yapılan çalışmalar, “Kinematik” ve “Hareket Geometrisi” ile uğraşan birçok bilim adamının büyük ölçüde ilgisini çektiğinden; “Steiner Alan Formülü” ve “Holditch Teoremi” üzerine pek çok çalışma yapılmıştır.

Blaschke, W., Müller H. R. [3]; Holditch Teoremi'nin aşağıdaki genelleştirilmesini vermiştir:

1-parametrelili ν dönme sayılı kapalı düzlemsel hareketler altında bir **AB** doğru parçasının $A=(0,0)$ ve $B=(a+b,0)$ uç noktaları, sırasıyla, k_A ve k_B kapalı eğrilerini çizdiğinde, A ve B noktaları ile doğrudan bir $X=(a,0)$ noktası ($|AX|=a$ ve $|XB|=b$) da kapalı fakat genellikle konveks olması gerekmeyen bir k_X eğrisini çizer. A, B ve X noktalarının çizdiği eğrilerin yörünge alanları, sırasıyla, F_A, F_B ve F_X olmak üzere, bu alanlar arasında

$$F_X = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} - \pi\nu ab \quad (1.3)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Özel olarak bu doğru parçası bir oval üzerinde bir defa dolandığında Klasik Holditch Teoremi elde edilir.

Hering, L. [9]; Holditch Teoremi'nin aşağıdaki genelleştirilmesini vermiştir:

1-parametrelili ν dönme sayılı kapalı düzlemsel hareketler altında **AB** doğru parçasının $A=(0,0), B=(a+b,0)$ uç noktaları, sırasıyla, k_A ve k_B kapalı eğrilerini çizdiğinde, A ve B noktaları ile doğrudan olmayan bir $X=(a,c)$ noktası da bir k_X kapalı eğrisini çizer. A, B ve X noktalarının çizdiği eğrilerin yörünge alanları, sırasıyla, F_A, F_B ve F_X olmak üzere bu alanlar arasında

$$F_X = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} + (c^2 - ab)\pi\nu - cL_{AB} \quad (1.4)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada L_{AB} , **AB** doğru parçasının zarf eğrisinin uzunluğudur. $c=0$ olması durumunda (1.3) denklemi elde edilir.

Pottmann, H., [10]; Holditch Teoremi'nin aşağıdaki genelleştirilmesini vermiştir:

1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler altında hareketli düzlemde alınan doğrudan olmayan A, B, C noktaları aynı F alanına sahip k eğrisini çizerlerse herhangi bir X noktası da F_X yörünge alanına sahip kapalı k_X eğrisini çizer. Bu durumda k ve k_X eğrilerinin yörünge alanları arasındaki fark

$$F - F_X = \pi v (r^2 - R^2) \quad (1.5)$$

dir. Burada R , X ve O noktaları arasındaki uzaklık, r de $\triangle ABC$ üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapıdır. Yine Pottmann [10] da hareketli düzlemdeki doğrudan olmayan $A=(0,0), B=(b,0), C=(c,d), X=(x,y)$ noktalarının çizmiş oldukları yörünge eğrilerinin alanları arasındaki ilişkiyi

$$F_X = \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{c-b}{bd}y\right)F_A + \left(\frac{x}{b} - \frac{cy}{bd}\right)F_B + \frac{y}{d}F_C + \left(x^2 + y^2 - bx - \frac{c^2 + d^2}{d}y + \frac{bc}{d}y\right)\pi v \quad (1.6)$$

bağıntısı ile vermiştir.

Pottmann, H., [11]; Holditch Teoremi'nin bir diğer genelleştirilmesini aşağıdaki şekilde vermiştir:

E_i / E' , ($i=1,2$) kat etme sayıları aynı v_i dönme sayılı 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler olsun. Eğer X_i, Y_i doğru parçalarının $X_i=(0,0)$ ve $Y_i=(\lambda_i(a+b),0)$ uç noktaları, sırasıyla, k_X ve k_Y yörünge eğrilerini çizerse $Z_i=(\lambda_i a,0)$ noktaları da F_i yörünge alanına sahip k_i yörünge eğrilerini belirler. F_i alanları arasındaki fark,

$$F_1 - F_2 = (v_2 \lambda_2^2 - v_1 \lambda_1^2) \pi ab \quad (1.7)$$

dir.

Homotetik düzlemsel hareketler ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Şimdi, tezimizde kullandığımız bazı önemli çalışmalar hakkında bilgi verelim:

Tutar, A. ve Kuruoğlu, N. [6] tarafından h homotetik oranlı ve T periyodlu kapalı homotetik hareketler ile ilgili çalışmalar temel teşkil eden; kapalı yörünge eğrisinin

$$F_X = F_O + h^2(t_0)\pi v(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2) + x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \quad (1.8)$$

denklemini ile ifade edilen “Steiner Alan Formülü”nü ve

$$F = h^2(t_0)\pi ab \quad (1.9)$$

ile verilen “Holditch Teoremi”nin kapalı homotetik hareketlere genelleştirilmesi verilmiştir. Burada $\exists t_0 \in [0, T]$ için $\oint h^2(t)d\varphi = h^2(t_0)\oint d\varphi = 2h^2(t_0)\pi v$ dir. Ayrıca μ_1 ve μ_2 hareketin sabitleridir. Yukarıdaki denklemlerde $h \equiv 1$ alınması durumunda sırası ile (1.2) ve (1.1) de verilen sonuçlar elde edilir.

Kuruoğlu, N. ve Yüce, S., [12]; Müller, H. R. [3], tarafından verilen çalışmanın homotetik hareketlerdeki karşılığını araştırmışlar ve

$$F_X = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} - h^2(t_0)\pi vab \quad (1.10)$$

sonucu elde edilmiştir. Yukarıdaki denklemde $h \equiv 1$ alınması durumunda (1.3) de verilen sonuç elde edilir.

Yüce, S. ve Kuruoğlu, N., [13]; Hering, L. [9] ve Pottmann, H., [10], tarafından verilen çalışmaların homotetik hareketlerdeki karşılığını araştırmışlar ve sırası ile,

$$F_X = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} + (c^2 - ab)h^2(t_0)\pi v - \frac{2h^2(t_0)\pi v c L_{AB}}{\lambda}, \quad (1.11)$$

$$F - F_x = h^2(t_0)\pi v(R^2 - r^2) \quad (1.12)$$

ve

$$F_x = \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{c-b}{bd}y\right)F_A + \left(\frac{x}{b} - \frac{cy}{bd}\right)F_B + \frac{y}{d}F_C + \left(x^2 + y^2 - bx - \frac{c^2 + d^2}{d}y + \frac{bc}{d}y\right)h^2(t_0)\pi v \quad (1.13)$$

sonuçları elde edilmiştir. Burada $\lambda = \oint h d\varphi$ dir. Yukarıdaki denklemlerde $h \equiv 1$ alınması durumunda, sırasıyla, (1.4), (1.5) ve (1.6) da verilen sonuçlar elde edilir.

Yüce, S. ve Kuruoğlu, N., [14]; Pottmann, H., [11], tarafından verilen çalışmanın homotetik hareketlerdeki karşılığını araştırmışlar ve

$$F_1 - F_2 = (v_2\lambda_2^2 - v_1\lambda_1^2)h^2(t_0)\pi vab \quad (1.14)$$

sonucu elde edilmiştir. Yukarıdaki denklemde $h \equiv 1$ alınması durumunda (1.7) de verilen sonuç bir özel durum olarak elde edilir.

Şimdi, hareket esnasında elde edilen yörünge eğrisinin atalet momenti ile ilgili Holditch Tipi teoremleri vereceğiz:

Müller, H. R. [5]; 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler altında hareketli düzlemde alınan sabit bir $X = (x_1, x_2)$ noktasının sabit düzlemde çizdiği kapalı yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentini hesaplamıştır. Ayrıca eşit kutupsal atalet momentine sahip hareketli düzlemin bütün sabit noktalarının merkezi “Steiner Noktası” olan bir çember üzerinde bulunduğu belirtilmiş ve Holditch Teoremi’ne benzer bir sonuç verilmiştir. Böylece [1], [3] deki çalışmaların kutupsal atalet momenti için

$$T = 2\pi ab, \quad (1.15)$$

$$T_x = T_O + 2\pi v(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2), \quad (1.16)$$

ve

$$T_x = \frac{aT_B + bT_A}{a+b} - 2\pi\nu ab \quad (1.17)$$

şeklinde karşılığı verilmiştir.

Düldül, M. ve Kuruoğlu, N. [8] ise Müller, H. R. [5] tarafından verilen çalışmanın homotetik hareketlerdeki karşılığını araştırmışlardır.

1.2 Tezin Amacı

Yüce, S., Düldül, M., Kuruoğlu, N. [7], 1978 yılında Müller, H. R. [5] tarafından verilen 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler altında sabit bir noktanın çizdiği kapalı yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentinin hesabı ve atalet momenti için Holditch Teoremini doğrudan olmayan üç nokta ve hareket eden iki düzlem için genelleştirmişlerdir.

Bu tez çalışmasının amacı; Yüce, S., Düldül, M., Kuruoğlu, N. [7] tarafından verilen 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler altında elde edilen sonuçların, homotetik hareketlerdeki karşılıklarını araştırmaktır.

1.3 Orjinal Katkı

Yüce, S., Düldül, M., Kuruoğlu, N. [7] tarafından verilen 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler altındaki sonuçların elde edilmesiyle kinematikteki birçok problemin çözümlenmesine olanak sağlayacaktır. Ayrıca, Ek A da Maple 15 de verilen programlama örneklerinde; klavyeden girilen bilgilere göre sonuçlar değiştirilip ve geliştirilebilir. Yani, bu örnekler tezi daha açıklayıcı hale getirmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde doktora tez çalışması için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1 Afin Uzay ve İzometri

Tanım 2.1 $A \neq \emptyset$ bir cümle ve V ; K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$f: A \times A \rightarrow V \\ (P, Q) \rightarrow f(P, Q)$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleşen bir **Afin Uzay** denir.

$$i. \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.2 V n -boyutlu reel vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V bir iç-çarpım uzayı ise A ya **Öklid Uzayı** denir ve E^n ile gösterilir.

Tanım 2.3 K cismi üzerinde iki vektör uzayı V_1 ve V_2 olsun. V_1 ve V_2 ile birleşen afin uzaylar A_1 ve A_2 olmak üzere $f : A_1 \rightarrow A_2$ dönüşümü $P, Q \in A_1$ için

$$\psi_p : V_1 \rightarrow V_2$$

$$\mathbf{PQ} \rightarrow \psi_p(\mathbf{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)}$$

şeklinde tanımlansın. Burada ψ_p dönüşümüne f ile birleşen dönüşüm adı verilir. Eğer ψ_p dönüşümü lineer ise f ye bir **Afin Dönüşüm** denir.

Tanım 2.4 E_1^n ve E_2^n , sırasıyla, V_1 ve V_2 n -boyutlu iç-çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsun. Bir

$$f : E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir **izometri** denir.

Tanım 2.5 f , n -boyutlu E^n Öklid uzayı üzerinde bir izometri olsun. E^n deki bir dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi; $A \in O(n)$, (yani $AA^T = A^T A = I_n$, $\det A = \pm 1$)

ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

formundadır. f ye E^n de bir **hareket** adı verilir. Eğer, $\det A = 1$ ise f hareketine **direkt hareket**, $\det A = -1$ ise **karşıt hareket** denir.

Tanım 2.6 E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi için $f(O) = O$ olacak şekilde bir $O \in E^n$ noktası varsa f ye O noktası etrafında E^n nin bir **dönmesi** adı verilir. Eğer hareket direkt hareket ise f ye **direkt dönme**, karşıt hareket ise **karşıt dönme** denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun.

$f : E^n \rightarrow E^n$ izometrisi O noktası etrafındaki bir dönme ise f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya,

$$x' = Ax$$

şeklindedir. Burada $A \in O(n)$ ve $x, x' \in \mathbb{R}^n_1$ dir.

Tanım 2.7 E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için $f(X) = X + t$ olacak şekilde bir tek $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in E^n$ noktası varsa f ye E^n in t ile belirtilen bir **ötelemesi** denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun.

$f : E^n \rightarrow E^n$ izometrisi $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ noktası ile belli olan bir öteleme olmak üzere, f nin dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$x' = x + t$$

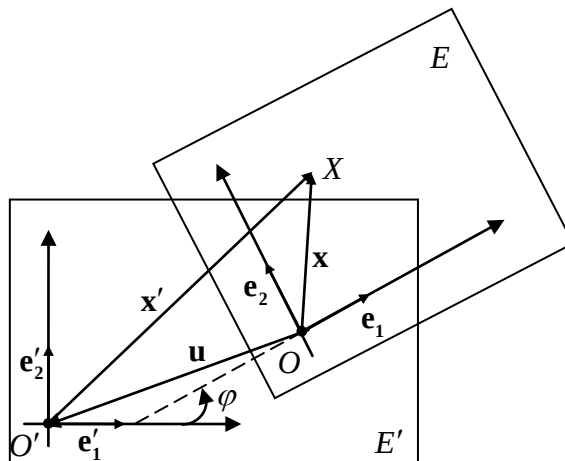
dir.

1- PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKET

$E = E' = E^2$ Öklid düzlemlerinde, sırasıyla, $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ve $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemlerini tespit edelim. Eğer $t \in I \subset \mathbb{R}$ için,

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(t)$$

ise bu takdirde $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ koordinat sisteminin, $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemine göre hareket ettiği kabul edilir. Bundan dolayı $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ koordinat sistemine hareketli koordinat sistemi, $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemine ise sabit koordinat sistemi denir. Dolayısıyla E düzlemi, E' düzlemi üzerinde hareket ediyor kabul edilir. $\mathbf{e}_1$ ile $\mathbf{e}'_1$ arasındaki açı φ olmak üzere φ ye **dönme açısı** denir. $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ hareketin **öteleme vektörü** olmak üzere:



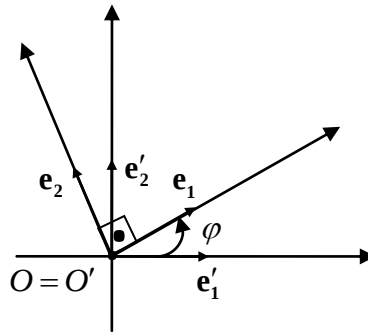
Şekil 3. 1 Bir parametrelî düzlemsel hareket

$$\mathbf{OO'} = \mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.1)$$

yazılabilir. Eğer,

$$u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \varphi = \varphi(t)$$

şeklinde reel bir t parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları iseler, E - düzleminin E' -düzlemine göre hareketine **1-parametrelî düzlemsel hareket** denir ve $B = E / E'$ ile gösterilir. Buradaki " t " parametresi genel olarak **zaman** parametresi olarak alınır.



Şekil 3. 2 Başlangıç noktaları çakışık olan koordinat sistemleri

$O = O'$ özel durumu için $\mathbf{e}_i$ ve $\mathbf{e}'_i$ ($i=1,2$) vektörleri arasında

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}'_1 + \sin \varphi \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}'_1 + \cos \varphi \mathbf{e}'_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitlikleri elde edilir, (Şekil 3.2).

Düzlemin bir X noktası, hem hareketli sistemdeki (x_1, x_2) koordinatları ve hem de sabit sistemdeki (x'_1, x'_2) koordinatları yardımıyla göz önüne alınabilir. Buna göre her iki sistemde, X noktasına ait konum vektörleri için

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O'X} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2$$

yazılabilir, (Şekil 3.1). Böylece

$$\mathbf{O'X} = \mathbf{O'O} + \mathbf{OX} = -\mathbf{OO'} + \mathbf{OX}$$

veya

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u} = (x_1 - u_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - u_2)\mathbf{e}_2 \quad (3.3)$$

vektörel denklemi elde edilir. Bu denkleme 1-parametrelî düzlemsel hareketin **vektörel denklemi** denir. Buradan,

$$x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 = (x_1 - u_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - u_2)\mathbf{e}_2$$

eşitliğinin $\mathbf{e}'_1$ ve $\mathbf{e}'_2$ ile iç-çarpımı sonucunda,

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - u_1)\cos\varphi - (x_2 - u_2)\sin\varphi \\ x'_2 = (x_1 - u_1)\sin\varphi + (x_2 - u_2)\cos\varphi \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi) + (-u_1 \cos\varphi + u_2 \sin\varphi) \\ x'_2 = (x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi) + (-u_1 \sin\varphi - u_2 \cos\varphi) \end{cases} \quad (3.4)$$

bulunur. Bu ifadeye $B = E / E'$ hareketinin **kartezyen denklemi** denir. Bu son eşitlik

$$\begin{cases} a_0 = a_0(t) = -u_1 \cos\varphi + u_2 \sin\varphi \\ b_0 = b_0(t) = -u_1 \sin\varphi - u_2 \cos\varphi \end{cases}$$

için

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = AX + C$$

şeklinde matris formunda yazılabilir.

3.1 Türev Denklemleri

Hareket esnasında bir $X \in E$ noktasının E ve E' -düzlemlerine göre hızlarını bulmak için önce hareketimizin türev denklemlerini elde edeceğiz. Bunun için (3.2)

denklemlerinin, $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ vektörlerini sabit kabul ederek, t zamanına göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \dot{\mathbf{e}}_1 = -\dot{\phi} \sin \phi \mathbf{e}'_1 + \dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}'_2 = \dot{\phi} (-\sin \phi \mathbf{e}'_1 + \cos \phi \mathbf{e}'_2)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}'_1 - \dot{\phi} \sin \phi \mathbf{e}'_2 = -\dot{\phi} (\cos \phi \mathbf{e}'_1 + \sin \phi \mathbf{e}'_2)$$

bulunur. Buradan kısaca

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\phi} \mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\phi} \mathbf{e}_1 \quad (3.5)$$

yazılabilir.

Benzer şekilde (3.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_1 \mathbf{e}_1 + u_1 \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{u}_2 \mathbf{e}_2 + u_2 \dot{\mathbf{e}}_2$$

elde edilir. $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ nın (3.5) deki değerleri burada yerlerine yazılırsa

$$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1 - u_2 \dot{\phi}) \mathbf{e}_1 + (\dot{u}_2 + u_1 \dot{\phi}) \mathbf{e}_2 \quad (3.6)$$

bulunur. (3.5) ve (3.6) denklemlerine $B = E / E'$ hareketinin **türev denklemleri** denir.

3.2 Hızlar ve Hızların Terkibi

E -düzlemi E' -düzlemine göre 1-parametrelili hareket yaparken, bir X noktası da hareketli E -düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Bu durumda, bu iki hareket esnasında X noktasının hızlarını araştıracağız.

Tanım 3.1 X noktasının E -düzleminde hareket ederken sahip olduğu hız vektörüne, yani X noktası E -deki yörüngesini çizirken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının **relatif (izafi) hızı** denir ve $\mathbf{V}_r$ ile gösterilir. Bu hız

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

denkleminde $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ yi sabit tutup türev alarak

$$\mathbf{V}_r = \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.7)$$

şeklinde bulunur. Eğer X noktası E -de sabit ise $\mathbf{V}_r$ relatif hızı sıfırdır.

Tanım 3.2 X noktasının E' -düzlemine göre sahip olduğu hız vektörüne X noktasının **mutlak hızı** denir ve $\mathbf{V}_a$ ile gösterilir. (3.3) denkleminin t ye göre türevini alırsak $\mathbf{V}_a$ için aşağıdaki ifade bulunur:

$$\mathbf{V}_a = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1)\mathbf{e}_1 + (x_1 - u_1)\dot{\mathbf{e}}_1 + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2)\mathbf{e}_2 + (x_2 - u_2)\dot{\mathbf{e}}_2.$$

Burada $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ nın (3.5) deki $\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\phi}\mathbf{e}_2$, $\dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\phi}\mathbf{e}_1$ değerleri yerine yazılırsa

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi}\}\mathbf{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi}\}\mathbf{e}_2 + \dot{x}_1\mathbf{e}_1 + \dot{x}_2\mathbf{e}_2$$

veya

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi}\}\mathbf{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi}\}\mathbf{e}_2 + \mathbf{V}_r$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{V}_f = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi}\}\mathbf{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi}\}\mathbf{e}_2 \quad (3.8)$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme hız vektörü** denir.

O halde hızların terkibine ait şu teorem verilebilir:

Teorem 3.3 $B = E/E'$; 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında E hareketli düzlemin herhangi bir $X \in E$ noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r \quad (3.9)$$

bağıntısı vardır.

Tanım 3.4 Dönme açısının $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ türevine B hareketinin **açısal hızı** denir.

Bundan sonra sırf öteleme hareketinden kaçınmak için $\dot{\phi} \neq 0$ kabul edeceğiz.

3.3 Dönme Polü ve Pol Eğrileri

Şimdi, B hareketinin her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktaları araştıralım:

Böyle noktalar, t anında, yalnız hareketli E -düzleminde değil aynı zamanda sabit E' -düzleminde de hareket etmeyen noktadır. O halde

$$\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$$

için (3.8) denkleminde

$$-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\varphi} = 0, \quad -\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\varphi} = 0$$

elde edilir. $\dot{\varphi} \neq 0$ olduğuna göre bu iki denklem her zaman tek türlü çözülebilir. Bu çözümler p_1 ve p_2 olmak üzere,

$$\begin{aligned} p_1 = x_1 &= u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\varphi}} = u_1 + \frac{du_2}{d\varphi} \\ p_2 = x_2 &= u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\varphi}} = u_2 - \frac{du_1}{d\varphi} \end{aligned} \tag{3.10}$$

bulunur.

Tanım 3.5

$$\mathbf{OP} = \mathbf{p} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2$$

yer vektörüne karşılık gelen $P = (p_1, p_2)$ noktasına, $B = E/E'$ hareketinin t anındaki **pol(kutup) noktası, dönme polü** veya **ani dönme merkezi** denir.

Bundan dolayı şu teorem verilebilir:

Teorem 3.6 Açısal hızı sıfır olmayan $B = E/E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında, her t anında sürüklenme hızı sıfır olan yani her iki düzlemde de sabit kalan bir tek nokta (pol noktası) vardır. $\square$

Şimdi, P pol noktası yardımı ile herhangi bir X noktasının $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hızını yeniden elde edelim:

Bunun için (3.10) denkleminde

$$\dot{u}_1 = (u_2 - p_2)\dot{\phi}, \quad \dot{u}_2 = -(u_1 - p_1)\dot{\phi}$$

ifadeleri hesaplanır ve (3.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mathbf{V}_f = \{-(x_2 - p_2)\mathbf{e}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{e}_2\}\dot{\phi} \quad (3.11)$$

elde edilir.

X noktasının sürüklenme hızının bu son ifadesi kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç ve teoremler verilebilir:

Sonuç 3.7 P polünden X noktasına giden

$$\mathbf{PX} = (x_1 - p_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - p_2)\mathbf{e}_2$$

pol ışını, $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hız vektörüne diktir; çünkü

$$\langle \mathbf{PX}, \mathbf{V}_f \rangle = -(x_2 - p_2)(x_1 - p_1) + (x_1 - p_1)(x_2 - p_2) = 0$$

dır. Yani pol ışını, hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

Sonuç 3.8 $\mathbf{V}_f$ vektörünün uzunluğu için şu bağıntı vardır:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_f\| &= \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2} |\dot{\phi}| \\ &= |\dot{\phi}| \|\mathbf{PX}\| \end{aligned}$$

Teorem 3.9 $B = E/E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında, hareketli E - düzleminin her X noktası, t anında P (pol noktası) merkezli ve $\dot{\phi}$ açısal hızlı bir ani dönme hareketi yapar.

Teorem 3.10 $B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareket; t anında, hareketli E - düzleminin P ani dönme polü etrafında $\dot{\phi}$ açısal hızı ile dönmesinden oluşur.

Teorem 3.11 $B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında, E -düzleminin X noktaları, E' -düzleminde yörünge normalleri P dönme polünden geçen yörüngeler çizerler.

Tanım 3.12 $B = E / E'$ hareketi esnasında, her t anında bir P dönme polü olacağından P pol noktası her iki E ve E' -düzlemlerinde çeşitli konumlarda bulunur. P noktasının hareketli E -düzlemindeki konumu genel olarak bir eğridir. Bu eğriye **hareketli pol eğrisi** denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının E' -düzlemindeki geometrik yerine ise **sabit pol eğrisi** denir ve (P') ile gösterilir. $\square$

Şimdi pol hızlarını, yani (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P noktasının hızlarının araştıralım:

$X = P$ dönme polü için $\mathbf{V}_t = \mathbf{0}$ olduğundan

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_r$$

bulunur.

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.13 $B = E / E'$ hareketi esnasında, E' -sabit ve E -hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları aynıdır. $\square$

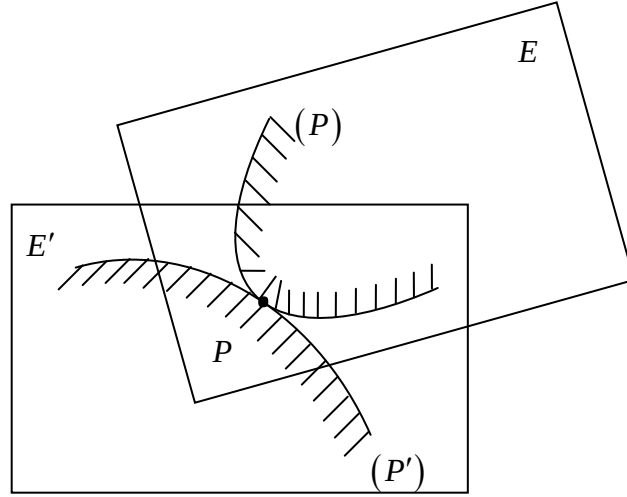
Bu teoremden dolayı, her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P ani dönme polünde birbirine teğettir ve

$$ds' = |\mathbf{V}_a| dt = |\mathbf{V}_r| dt = ds$$

olduğundan P dönme polü dt zaman aralığında her iki pol eğrisi üzerinde eşit uzaklıklar kat eder.

Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.14 $B = E / E'$ hareketi esnasında, 1- parametrelili düzlemsel $B = E / E'$ hareketinde E -düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' -sabit düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır (Şekil 3.3).



Şekil 3. 3 Hareketli ve sabit pol eğrileri

3.4 1- Parametrelili Düzlemsel Kapalı Hareket

$B = E / E'$ hareketi esnasında, $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ için

$$u_j(t+T) = u_j(t), \quad (j=1,2), \quad (3.12)$$

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu \quad (3.13)$$

bağıntıları sağlanacak şekilde $T > 0$ en küçük sayısı varsa $B = E / E'$ ye T **periyotlu** ve ν **dönme sayısı 1-parametrelili düzlemsel kapalı hareket** denir. Burada ν bir tam sayıdır ve E' -ye göre E -düzleminin ilk durumuna gelinceye kadar kaç tam devir yaptığını gösterir. Dolayısıyla ν dönme sayısı E -düzleminin T periyodu içinde etrafında döndüğü $2\pi\nu$ tam dönme açısına karşılık gelir.

$B = E / E'$ kapalı hareketi altında, E -düzleminde tespit edilmiş bir X noktası E' -düzleminde kapalı bir yörünge eğrisi çizer. Ayrıca E -düzleminin doğru veya eğrilerinin zarf yörüngeleri de E' -düzleminde kapalı eğrilerdir.

3.4.1 Kapalı Hareket Esnasında Yörünge Eğrisinin Alanı

$B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketler altında, sabit X noktasının E' -ye göre $\mathbf{dx}'$ değişimi X noktasının sürüklenme hızına karşılık gelir. O halde (3.11) denkleminde

$$\mathbf{dx}' = \{-(x_2 - p_2)\mathbf{e}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{e}_2\} d\varphi \quad (3.14)$$

yazılabilir. Şimdi, kapalı hareket esnasında E düzleminde sabit bir X noktasının çevrelediği yörünge yüzeyinin F_X yörünge alanını

$$F_X = \frac{1}{2} \oint (x'_1 dx'_2 - x'_2 dx'_1) = \frac{1}{2} \oint \det(\mathbf{x}', \mathbf{dx}') \quad (3.15)$$

Gauss alan formülünü kullanarak hesaplayacağız [4]:

Buradaki eğrisel integral; X noktasının yörünge eğrisi üzerinde alınacaktır.

(3.15) denkleminde $\mathbf{x}'$ ve $\mathbf{dx}'$ yerine, sırasıyla, (3.3) ve (3.14) denklemlerindeki değerleri yazılırsa

$$\det(\mathbf{x}', \mathbf{dx}') = \begin{vmatrix} x_1 - u_1 & -(x_2 - p_2) \\ x_2 - u_2 & x_1 - p_1 \end{vmatrix} d\varphi = \{x_1^2 + x_2^2 - x_1(p_1 + u_1) - x_2(p_2 + u_2) + (p_1 u_1 + p_2 u_2)\} d\varphi$$

elde edilir. (3.10) denkleminde u_1 ve u_2 değerleri çekilerek bu son denklemde yerlerine yazılırsa

$$\det(\mathbf{x}', \mathbf{dx}') = \left\{ x_1^2 + x_2^2 - x_1 \left(2p_1 - \frac{du_2}{d\varphi} \right) - x_2 \left(2p_2 + \frac{du_1}{d\varphi} \right) + (p_1 u_1 + p_2 u_2) \right\} d\varphi$$

bulunur. Bu ifade (3.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$2F_X = (x_1^2 + x_2^2) \oint d\varphi - 2x_1 \oint p_1 d\varphi - 2x_2 \oint p_2 d\varphi + \oint du_2 - \oint du_1 + 2F_O \quad (3.16)$$

elde edilir. Burada,

$$F_O = \frac{1}{2} \oint \begin{vmatrix} u_1 & -p_2 \\ u_2 & p_1 \end{vmatrix} d\varphi$$

$O=(0,0)$ orijin noktasının yörünge alanıdır. Ayrıca, (3.12) denkleminde $u_j(t)$ fonksiyonu periyodik olduğundan

$$\oint du_j = \int_0^T du_j = u_j \Big|_0^T = u_j(T) - u_j(0) = 0$$

ve (3.13) denkleminde

$$\oint d\varphi = \int_0^T d\varphi = 2\pi\nu$$

bulunur.

Şimdi, hareketli (P) pol eğrisinin $d\varphi$ kütle elementi ile örtüldüğünü kabul edelim.

(P) kapalı pol eğrisinin ağırlık merkezi $S=(s_1, s_2)$ olmak üzere S noktasına **Steiner noktası** denir ve $\nu \neq 0$ için

$$s_j = \frac{\oint p_j d\varphi}{\oint d\varphi} = \frac{1}{2\pi\nu} \oint p_j d\varphi \quad (3.17)$$

dir. Burada pay koordinat eksenlerine göre statik momenti, payda ise örtülmüş (P) pol eğrisinin bütün kütlelerini gösterir. O halde, bu son eşitlikler (3.16) denkleminde kullanılırsa

$$F_X = F_O + \pi\nu(x_1^2 + x_2^2 - 2s_1x_1 - 2s_2x_2) \quad (3.18)$$

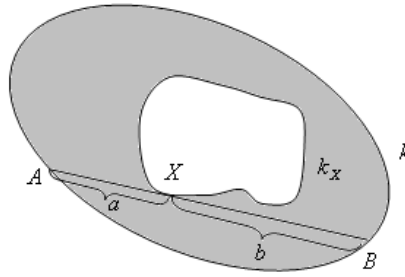
elde edilir. Bu eşitliğe X noktasının yörünge eğrisinin **Steiner alan formülü** denir.

Sonuç 3.15 $B=E/E'$ hareketi esnasında, aynı F_X alanına sahip olan E -hareketli düzleminin bütün sabit X noktaları, E -düzleminde merkezi S Steiner noktası olan bir çember üzerinde bulunurlar.

3.4.2 Klasik Holditch Teoremi

Bu alt bölümde, Holditch, H. [1] tarafından verilen Klasik Holditch teoremi verilecektir:

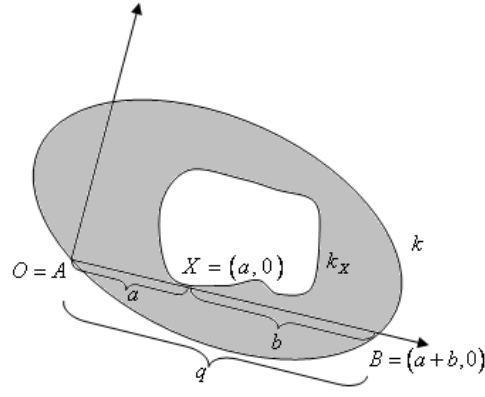
Teorem (Holditch Teoremi) 3.16 $B = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, sabit $a+b$ uzunluklu $\mathbf{AB}$ kirişinin A ve B uç noktaları E' -sabit düzlemindeki bir k ovalini tam bir defa ($\nu=1$) kat ettiğinde, (Şekil 3.4) $\mathbf{AB}$ kirişi üzerinde seçilen herhangi bir sabit X noktası da ($a=|AX|, b=|XB|$) genellikle konveks olmayan kapalı bir k_x eğrisi çizer. X noktasının çizdiği k_x kapalı eğrisi ile k ovali arasındaki bölgenin (Holditch Halkası) alanı sadece X noktasının doğru parçası üzerinde seçilişine bağlı olup eğrilerden ve hareketten bağımsızdır, [1].



Şekil 3. 4 Holditch Halkası

İspat.

$\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ dik koordinat sisteminin $\mathbf{e}_1$ eksenini $\mathbf{AB}$ doğrultusunda ve A noktasını da $A=O$ olacak şekilde seçelim (Şekil 3.5). Bu durumda $X=(a,0)$ ve $B=(a+b,0)$ yazılabilir.



Şekil 3. 5 Hareketli düzlemde Holditch Halkası

(3.18) denkleminde X ve B noktalarının yörünge alanları için

$$F_X = F_O + \pi(a^2 - 2as_1)$$

ve

$$F_B = F_O + \pi[(a+b)^2 - 2(a+b)s_1]$$

yazılabilir. Buradan,

$$\frac{aF_B + bF_A}{a+b} = F_O + a\pi(a+b-2s_1)$$

elde edilir. Ayrıca

$$F_A = F_O$$

olduğundan

$$\frac{aF_B + bF_A}{a+b} - \pi ab = F_X$$

bulunur. A ve B noktaları aynı k ovalini kat ettiğinden

$$F_A = F_B$$

olup

$$F_A - F_X = \pi ab \tag{3.19}$$

elde edilir, [1], (Bakınız, Ek-A Örnek 1).

3.5 Doğru Demetlerinin Zarflarına Ait Cauchy Formülleri

E^2 -düzleminde bir $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ dik koordinat sistemine göre bir g doğrusu

$$x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi = p, \quad p \in \mathbb{R}, \quad \psi \in [0, 2\pi) \quad (3.20)$$

Hesse formunda verilsin (Şekil 3.6). g doğrusunun normal vektörü

$$\mathbf{e}_1 \cos \psi + \mathbf{e}_2 \sin \psi \quad (3.21)$$

pozitif yönde $\frac{\pi}{2}$ açısı kadar döndürüldüğünde g doğrusu

$$-\mathbf{e}_1 \sin \psi + \mathbf{e}_2 \cos \psi \quad (3.22)$$

vektörünün doğrultusunda olur.

Bir $Y = (y_1, y_2)$ noktasının g doğrusuna uzaklığı,

$$a = p - y_1 \cos \psi - y_2 \sin \psi \quad (3.23)$$

ile hesaplanır.

p, ψ nin bir fonksiyonu ise her bir ψ değerine düzlemde bir doğru karşılık gelir.

Böylece ψ ye göre bir 1-parametrelili doğru demeti elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi &= p(\psi) \\ -x_1 \sin \psi + x_2 \cos \psi &= \dot{p}(\psi) = \frac{dp(\psi)}{d\psi} \end{aligned} \quad (3.24)$$

denklem sistemi x_1 ve x_2 ye göre çözülürse,

$$\begin{aligned} x_1 &= p \cos \psi - \dot{p} \sin \psi \\ x_2 &= p \sin \psi + \dot{p} \cos \psi \end{aligned} \quad (3.25)$$

bulunur. Böylece O başlangıç noktasından g ye inilen dikmenin ayağı

$F = (p \cos \psi, p \sin \psi)$ noktasıdır, [3], [16].

$X = (x_1, x_2); g$ doğrusu ve (g) zarf eğrisinin değme noktası olmak üzere (3.25)

denkleminde

$$d(F, X) = \|F\mathbf{X}\| = \dot{p} = \frac{dp}{d\psi} \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.25) denkleminin ψ ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(p + \ddot{p}) \sin \psi \\ \dot{x}_2 &= (p + \ddot{p}) \cos \psi \end{aligned} \quad (3.27)$$

bulunur. Böylece (g) zarf eğrisinin X noktasının $d\mathbf{x}$ değişimi için

$$d\mathbf{x} = (p + \ddot{p})(-\mathbf{e}_1 \sin \psi + \mathbf{e}_2 \cos \psi) d\psi \quad (3.28)$$

yazılabilir. Burada zarf eğrisinin yay elementi için

$$ds = (p + \ddot{p}) d\psi$$

elde edilir.

(g) zarfının X noktasındaki eğrilik yarıçapı

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \dot{s} = p + \ddot{p}$$

olarak bulunur. Böylece (g) zarfının uzunluğu (çevresi)

$$L = \oint (p + \ddot{p}) d\psi \quad (3.29)$$

elde edilir. $p = p(\psi)$ fonksiyonu (g) kapalı zarfı eğrisinin dayanak fonksiyonudur.

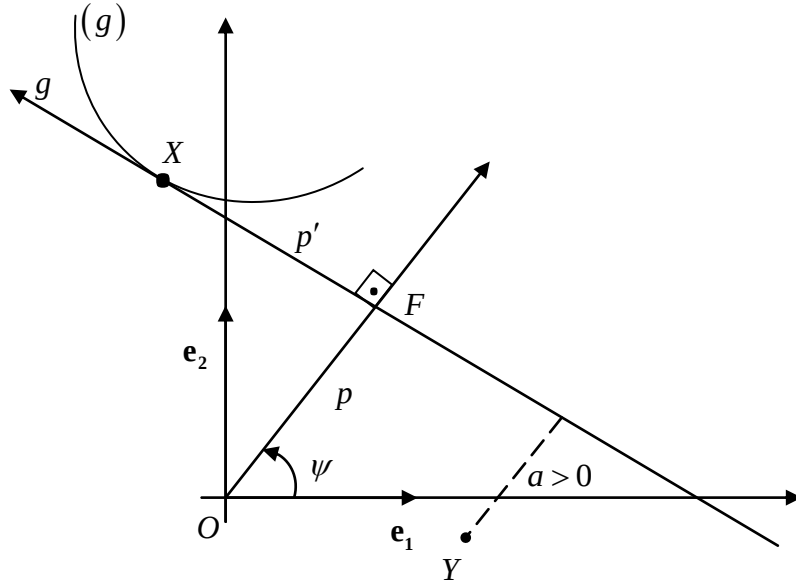
$p = p(\psi)$ fonksiyonunun ψ ye göre türevleri ise periyodik fonksiyonlardır. O halde $\ddot{p}$ periyodik olduğundan

$$\oint \ddot{p} d\psi = 0 \quad (3.30)$$

dır. Bundan dolayı, (g) zarf eğrisinin uzunluğu

$$L = \oint p d\psi \quad (3.31)$$

bulunur. Bu formüle g doğrusunun (g) kapalı zarf eğrisine ait **Cauchy çevre formülü** denir, [3].



Şekil 3. 6 Doğrunun zarf eğrisi

Şimdi, (g) kapalı zarf eğrisinin çevrelediği yüzey alanını bulalım: (3.25) ve (3.27) denklemlerinden

$$\det(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = p(p + \ddot{p}) d\psi \quad (3.32)$$

yazılabilir. O halde (g) nin alanı

$$F = \frac{1}{2} \oint \det(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$$

olmak üzere

$$F = \frac{1}{2} \oint p(p + \ddot{p}) d\psi$$

veya

$$F = \frac{1}{2} \oint p^2 d\psi + \frac{1}{2} \oint p \ddot{p} d\psi$$

elde edilir. Bu son eşitlikteki ikinci integral için kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\oint p \ddot{p} d\psi = p \dot{p} \Big|_{(g)} - \oint \dot{p}^2 d\psi$$

bulunur. $\dot{p}$ periyodik olduğundan

$$p\dot{p}|_{(g)} = 0$$

olur. Böylece

$$F = \frac{1}{2} \oint (p^2 - \dot{p}^2) d\psi \quad (3.33)$$

elde edilir. Bu formüle g doğrusunun (g) kapalı zarf eğrisine ait **Cauchy alan formülü** denir, [3].

3.5.1 Kapalı Hareketlerde Doğru Zarf Eğrilerinin Çevresi

$B = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareket olsun. E – hareketli düzleminde sabit bir g doğrusu

$$x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi = p \quad (3.34)$$

denklemleri verilsin. (Yani p, ψ ye göre sabit olsun.) Burada $X = (x_1, x_2)$ E – hareketli düzleminde doğru üzerindeki keyfi bir noktadır. g doğrusunun E' – sabit düzleminin $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemine göre denklemi için

$$x'_1 \cos \psi' + x'_2 \sin \psi' = p'$$

yazılabilir, (Şekil 3.7). Burada $p', \{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ dik koordinat sistemine göre koordinatları (u_1, u_2) olan O' orijin noktasının g doğrusuna olan uzaklığıdır ve O' noktasının O ya göre koordinatları (u_1, u_2) olmak üzere (3.4) denklemi yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$p' = p - u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi$$

elde edilir. O ve O' orijin noktalarının g doğrusuna inilen dikmelerinin, sırasıyla, $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}'_1$ ile yaptığı açılar ψ ve ψ' olmak üzere

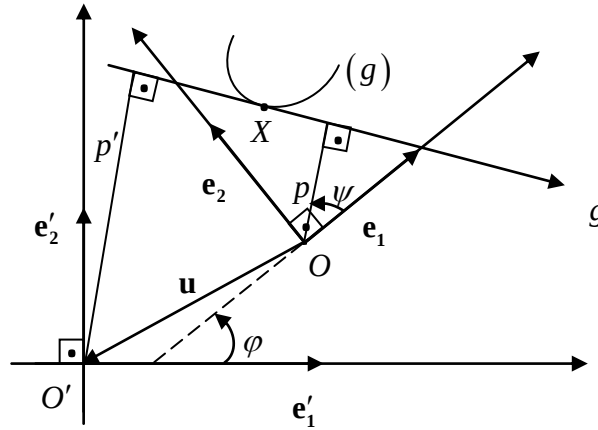
$$\psi' = \psi + \varphi$$

yazılabilir (Şekil 3.7). Buradan g, E -düzleminde sabit doğru olduğundan $\psi = \text{sabit}$ olup $d\psi' = d\varphi$ elde edilir.

$B = E/E'$ kapalı hareketi esnasında $g \subset E$ sabit doğrusunun E' -düzlemindeki (g') zarf eğrisinin çevresi (3.31) denklemi yardımıyla

$$L_g = \oint p' d\varphi \quad (3.35)$$

formülü ile hesaplanır.



Şekil 3. 7 Kapalı hareketlerde doğrunun zarf eğrisi

O halde

$$p' = p - u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi$$

eşitliği son denklemde yerine yazılırsa

$$L_g = \oint p d\varphi - \cos \psi \oint u_1 d\varphi - \sin \psi \oint u_2 d\varphi \quad (3.36)$$

elde edilir. (3.10) denkleminde

$$\oint p_1 d\varphi = \oint u_1 d\varphi + \oint du_2$$

$$\oint p_2 d\varphi = \oint u_2 d\varphi - \oint du_1$$

yazılabilir. Buradan u_1 ve u_2 fonksiyonlarının periyodikliği kullanılırsa

$$\oint du_1 = \oint du_2 = 0$$

olmak üzere

$$\oint p_j d\varphi = \oint u_j d\varphi, (j=1,2)$$

elde edilir. O halde (3.36) eşitliğinden

$$L_g = \oint p d\varphi - \cos \psi \oint p_1 d\varphi - \sin \psi \oint p_2 d\varphi \quad (3.37)$$

veya

$$L_g = \oint (p - p_1 \cos \psi - p_2 \sin \psi) d\varphi \quad (3.38)$$

elde edilir. $P = (p_1, p_2)$ pol noktasının g doğrusuna olan uzaklığı

$$\rho = p - p_1 \cos \psi - p_2 \sin \psi \quad (3.39)$$

olmak üzere (g) zarf eğrisinin uzunluğu için

$$L_g = \oint \rho d\varphi \quad (3.40)$$

formülü bulunur, [3].

O halde, aşağıdaki teoremi ispatsız verebiliriz, [3]:

Teorem 3.17 Bir $B = E/E'$ kapalı hareketinde E -düzleminde sabit bir g doğrusunun (g) zarf eğrisinin L_g çevresi; $d\varphi$ kütle elementi ile örtülü hareketli pol eğrisinin g' ye göre çizgisel momentine eşittir. $\square$

Ayrıca

$q; S = (s_1, s_2)$ Steiner noktasının g doğrusuna olan uzaklığı olmak üzere

$$q = p - s_1 \cos \psi - s_2 \sin \psi$$

yazılabilir. Burada

$$s_j = \frac{\oint p_j d\varphi}{\oint d\varphi}$$

olduğundan

$$\oint p_j d\varphi = s_j \oint d\varphi$$

yazılabilir. O halde (3.37) denkleminde

$$L_g = \oint p d\varphi - \cos \psi s_1 \oint d\varphi - \sin \psi s_2 \oint d\varphi$$

veya

$$L_g = \oint (p - s_1 \cos \psi - s_2 \sin \psi) d\varphi$$

bulunur. Buradan

$$L_g = 2\pi v q$$

elde edilir.

Teorem 3.18 $B = E/E'$ kapalı hareketi esnasında E -hareketli düzlemindeki aynı L_g uzunluğuna sahip g doğrularının (g) zarf eğrileri S Steiner noktasından aynı q uzaklığındadırlar. Yani, bu özelliğe sahip tüm g doğruları E -düzleminde r yarıçaplı ve S Steiner noktası merkezli çembere teğettir.

3.6 Kapalı Hareket Altında Yörünge Eğrisinin Kutupsal Atalet Momenti

$B = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareket esnasında, E' -sabit düzleminin O' orijin noktasına göre, E -hareketli düzlemdeki sabit bir X noktasının Steiner anlamında $d\varphi$ kütle elementi ile örtülen yörünge eğrisinin T_x kutupsal atalet momenti

$$T_x = \oint \|\mathbf{x}'\|^2 d\varphi$$

ile hesaplanır:

(3.3) denkleminde

$$T_x = \oint (u_1^2 + u_2^2) d\varphi + (x_1^2 + x_2^2) \oint d\varphi - 2x_1 \oint u_1 d\varphi - 2x_2 \oint u_2 d\varphi \quad (3.41)$$

yazılabilir. Ayrıca (3.10), (3.12) ve (3.13) denklemleri kullanılırsa

$$\oint p_1 d\varphi = \oint u_1 d\varphi, \quad \oint p_2 d\varphi = \oint u_2 d\varphi \quad (3.42)$$

bulunur. Bu eşitlikler (3.41) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$T_x = \oint (u_1^2 + u_2^2) d\varphi + (x_1^2 + x_2^2) \oint d\varphi - 2x_1 \oint p_1 d\varphi - 2x_2 \oint p_2 d\varphi \quad (3.43)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (3.17) denklemi ile verilen $S = (s_1, s_2)$ Steiner noktasının koordinatları kullanılırsa

$$T_x = T_O + 2\pi v (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 s_1 - 2x_2 s_2) \quad (3.44)$$

yazılabilir. Burada

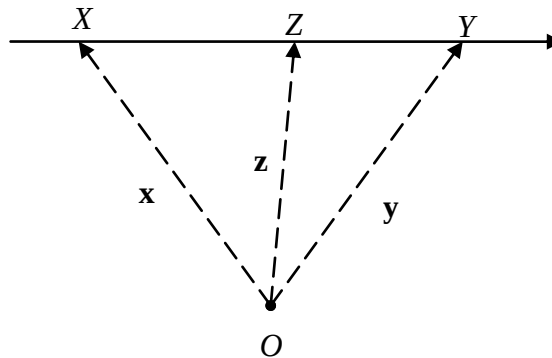
$$T_O = \oint (u_1^2 + u_2^2) d\varphi \quad (3.45)$$

O orijin noktasının yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentidir.

Teorem 3.19 $B = E / E'$ hareketi esnasında, aynı T_x kutupsal atalet momentine sahip olan E -hareketli düzleminin bütün sabit X noktaları E -düzleminde merkezi S Steiner noktası olan bir çember üzerinde bulunurlar.

3.7 Kutupsal Atalet Momenti için Holditch-Tipi Teorem

Bu bölümde, E -hareketli düzlemde sabit X, Y ve Z doğrudaş noktalarının çizmiş olduğu farklı yörünge eğrilerinin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişkiyi verelim:



Şekil 3. 8 Doğrudaş üç nokta

Şekil 3.8 kullanılarak

$$\begin{cases} \mathbf{OZ} = \mathbf{OX} + \mathbf{XZ} \\ \mathbf{XZ} = \mu \mathbf{XY}, \\ \mathbf{OY} = \mathbf{OX} + \mathbf{XY} \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Buradan

$$\mathbf{OZ} = \mathbf{OX} + \mu(\mathbf{OY} - \mathbf{OX})$$

veya

$$\mathbf{OZ} = (1 - \mu)\mathbf{OX} + \mu\mathbf{OY}$$

olup $1 - \mu = \lambda$ olmak üzere

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \quad \lambda + \mu = 1 \quad (3.46)$$

elde edilir.

Burada λ ve μ değerlerine $\mathbf{z}$ nin **barisantrik koordinatları** denir. Benzer şekilde doğrudan X, Y ve Z noktalarının O' orijin noktasına göre konum vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ ve $\mathbf{z}'$ olmak üzere hareketin (3.3) denklemi ile verilen vektörel ifadesi ve (3.46) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}' &= \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{u}) \\ &= \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} - \mathbf{u}(\lambda + \mu) \\ &= \mathbf{z} - \mathbf{u} \\ &= \mathbf{z}' \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Z nin E' -sabit düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentini

$$T_Z = \oint \|\mathbf{z}'\|^2 d\varphi$$

bağıntısını kullanarak hesaplayabiliriz. O halde $\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'$ için

$$T_Z = \lambda^2 T_X + 2\lambda\mu T_{XY} + \mu^2 T_Y \quad (3.47)$$

bulunur. Burada T_{XY} ifadesine X ve Y noktalarının yörünge eğrilerinin **karışık kutupsal atalet momenti** denir ve

$$T_{XY} = \oint \langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle d\varphi$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $T_{XY} = T_{YX}$ özelliği geçerlidir.

Şimdi T_{XY} ifadesini; X ve Y noktalarının E -hareketli düzlemdeki koordinatlarına göre ifade edelim:

$$\begin{aligned} T_{XY} &= \oint (x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2) d\varphi \\ &= \oint (u_1^2 + u_2^2) d\varphi + (x_1 y_1 + x_2 y_2) \oint d\varphi - (x_1 + y_1) \oint u_1 d\varphi - (x_2 + y_2) \oint u_2 d\varphi \end{aligned}$$

olmak üzere bu son eşitlikte (3.13), (3.17) ve (3.41) denklemleri kullanılırsa

$$T_{XY} = T_O + 2\pi\nu \left[x_1 y_1 + x_2 y_2 - (x_1 + y_1) s_1 - (x_2 + y_2) s_2 \right] \quad (3.48)$$

elde edilir. O halde

(3.44) ve (3.48) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} T_X - 2T_{XY} + T_Y &= T_O + 2\pi\nu (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 s_1 - 2x_2 s_2) \\ &\quad - 2 \left\{ T_O + 2\pi\nu [x_1 y_1 + x_2 y_2 - (x_1 + y_1) s_1 - (x_2 + y_2) s_2] \right\} \\ &\quad + T_O + 2\pi\nu (y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 s_1 - 2y_2 s_2) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = 2\pi\nu \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]$$

bulunur. Bu son denklemde, $d^2 = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]$ denilirse

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = 2\pi\nu d^2$$

elde edilir. Bu son eşitlikten elde edilen

$$T_{XY} = \frac{1}{2} (T_X + T_Y) - \pi\nu d^2 \quad (3.49)$$

ifadesi (3.47) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_Z = \lambda^2 T_X + \lambda\mu T_X + \lambda\mu T_Y - 2\pi\nu\lambda\mu d^2 + \mu^2 T_Y$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremler ispatsız olarak verilebilir:

Teorem 3.20 $B = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında sabit d uzunluklu XY doğru parçasının X ve Y uç noktaları, sırasıyla, k_X ve k_Y kapalı yörünge eğrilerini çizerken X ve Y , $(\lambda d = |XY|, \mu d = |YZ|, \lambda + \mu = 1)$ noktaları ile doğrudan Z noktası da kapalı bir k_Z yörünge eğrisini çizer, (Şekil 3.8). Bu yörünge eğrilerinin kutupsal atalet momentleri, sırasıyla, T_X, T_Y ve T_Z olmak üzere

$$T_Z = \lambda T_X + \mu T_Y - 2\lambda\mu\pi v d^2 \quad (3.50)$$

bağıntısı vardır, [5], (Bakınız, Ek-A Örnek 2).

Teorem 3.21 (Holditch-Tipi Teorem) $B = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında sabit d uzunluklu XY doğru parçasının uç noktaları aynı k eğrisi üzerinde bir defa dolandığında X ve Y ile doğrudan Z noktası da $(\lambda d = |XY|, \mu d = |YZ|, \lambda + \mu = 1)$ kapalı k_Z eğrisini çizer. k ve k_Z kapalı yörünge eğrilerinin, sırasıyla, T ve T_Z kutupsal atalet momentleri için

$$T - T_Z = 2\pi(\lambda d)(\mu d)$$

bağıntısı geçerlidir, [5], (Bakınız, Ek-A Örnek 1).

3.7.1 Yörünge Eğrisinin Kutupsal Atalet Momenti için Özel Durumlar

Özel Durum 3.22 X, Y ve Z noktalarının E -düzleminin birinci koordinat ekseninde olduğunu kabul edelim.

Bu durumda

$$\begin{aligned} d &= y - x \\ a &:= y - z = \lambda d, \\ b &:= z - x = \mu d, \\ a + b &= d \end{aligned} \quad (3.51)$$

bağıntıları geçerlidir. Böylece (3.50) eşitliğinden

$$T_Z = \lambda T_X + \mu T_Y - 2\lambda\mu\pi\nu d^2$$

$$= \frac{a}{d}T_X + \frac{b}{d}T_Y - 2\frac{a}{d}\frac{b}{d}\pi\nu d^2$$

veya

$$T_Z = \frac{1}{d}(aT_X + bT_Y) - 2ab\pi\nu \quad (3.52)$$

elde edilir. Eğer X ve Y noktaları aynı kapalı yörünge eğrisini çizerse $T_X = T_Y$ olacağından

$$T_X - T_Z = 2ab\pi\nu \quad (3.53)$$

elde edilir.

Özel Durum 3.23

i) S Steiner noktasının E -hareketli düzleminin O başlangıç noktası olduğunu kabul edelim. Böylece (3.44) ve (3.48) denklemlerinden

$$T_X = T_S + 2\pi\nu(x_1^2 + x_2^2) \quad (3.54)$$

ve

$$T_{XY} = T_S + 2\pi\nu(x_1y_1 + x_2y_2) \quad (3.55)$$

bulunur. Buna göre $\nu > 0$, $X \neq S$, $X \neq Y$ için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

a. $T_X = 2\pi\nu(x_1^2 + x_2^2) + T_S$ ve $2\pi\nu(x_1^2 + x_2^2) > 0$ olduğundan $T_X > T_S$ elde edilir.

Buna S Steiner noktasının yörünge eğrisinin atalet momentinin minimallik özelliği denir.

b. $T_X - 2T_{XY} + T_Y$ ifadesinde; (3.54) ve (3.55) denklemlerindeki eşitlikler yerlerine

yazılır ve $d^2 = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2] > 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = 2\pi\nu d^2 > 0 \quad (3.56)$$

Burada d , X ile Y noktası arasındaki uzaklıktır.

c. $T_S > 0$ olduğundan $T_X T_Y - T_{XY}^2 > 0$ bulunur. Gerçekten,

$$T_X = T_S + 2\pi\nu(x_1^2 + x_2^2),$$

$$T_Y = T_S + 2\pi\nu(y_1^2 + y_2^2),$$

$$T_{XY} = T_S + 2\pi\nu(x_1 y_1 + x_2 y_2)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T_X T_Y - T_{XY}^2 &= \left[2\pi\nu(x_1^2 + x_2^2) + T_S \right] \left[2\pi\nu(y_1^2 + y_2^2) + T_S \right] - \left[2\pi\nu(x_1 y_1 + x_2 y_2) + T_S \right]^2 \\ &= 4\pi^2\nu^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + 2\pi\nu T_S \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right] \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 > 0,$$

$$\nu > 0,$$

$$T_S > 0,$$

$$d^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 > 0$$

olduğundan,

$$T_X T_Y - T_{XY}^2 > 0$$

bulunur. Ayrıca,

$$T_X - T_S = 2\pi\nu(x_1^2 + x_2^2),$$

$$T_Y - T_S = 2\pi\nu(y_1^2 + y_2^2),$$

$$T_{XY} - T_S = 2\pi\nu(x_1 y_1 + x_2 y_2)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (T_X - T_S)(T_Y - T_S) - (T_{XY} - T_S)^2 &= 2\pi\nu(x_1^2 + x_2^2)2\pi\nu(y_1^2 + y_2^2) - 4\pi^2\nu^2(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \\ &= 4\pi^2\nu^2(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 \geq 0 \text{ olduğundan } (T_X - T_S)(T_Y - T_S) - (T_{XY} - T_S)^2 \geq 0 \text{ olup buradan}$$

$$T_X T_Y - T_X T_S - T_Y T_S + T_S^2 - T_{XY}^2 + 2T_{XY} T_S - T_S^2 \geq 0$$

veya

$$T_X T_Y - T_{XY}^2 \geq T_S (T_X - 2T_{XY} + T_Y) > 0$$

yazılabilir. Burada eşitlik hali X, Y ve S noktalarının doğrudan olması ile mümkündür.

□

ii) $B = E/E'$ kapalı hareketi için $\nu = 0$ olduğunu kabul edelim:

(3.41) denkleminde

$$T_X = \oint \|\mathbf{x}'\|^2 d\varphi = \oint (u_1^2 + u_2^2) d\varphi + (x_1^2 + x_2^2) \oint d\varphi - 2x_1 \oint u_1 d\varphi - 2x_2 \oint u_2 d\varphi$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\oint u_1 d\varphi = \oint p_1 d\varphi = P_1 ,$$

$$\oint u_2 d\varphi = \oint p_2 d\varphi = P_2$$

ve

$$\oint d\varphi = 2\pi\nu = 0 \text{ olduğundan}$$

$$T_X = T_O - 2(x_1 P_1 + x_2 P_2) \quad (3.57)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\nu = 0$ için (3.49) ve (3.57) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T_{XY} &= \frac{1}{2}(T_X + T_Y) \\ &= \frac{1}{2} \left[T_O - 2(x_1 P_1 + x_2 P_2) + T_O - 2(y_1 P_1 + y_2 P_2) \right] \end{aligned}$$

veya

$$T_{XY} = T_O - \left[(x_1 + y_1) P_1 + (x_2 + y_2) P_2 \right] \quad (3.58)$$

elde edilir, [5].

3.7.2 Yörünge Eğrisinin Atalet Momenti ve Yörünge Alanı Arasındaki İlişkiler

E -hareketli düzlemdeki sabit X, Y ve Z doğrudaş noktalarının sabit düzlemde çizdikleri farklı yörünge eğrilerinin alanları arasındaki ilişkiyi verelim:

$$\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'$$

olmak üzere

$$d\mathbf{z}' = \lambda d\mathbf{x}' + \mu d\mathbf{y}' \quad (3.59)$$

elde edilir. $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u}$ olduğundan

$$\mathbf{z}' = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{u})$$

bulunur. (3.59) denkleminde (3.14) denklemi yerine yazılırsa

$$d\mathbf{z}' = \lambda [-(x_2 - p_2)\mathbf{e}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{e}_2] d\varphi + \mu [-(y_2 - p_2)\mathbf{e}_1 + (y_1 - p_1)\mathbf{e}_2] d\varphi$$

elde edilir. $\mathbf{z}'$ ve $d\mathbf{z}'$ nin eşitlikleri ve (3.13), (3.16) ve (3.17) denklemleri

$$F_Z = \frac{1}{2} \oint \det(\mathbf{z}', d\mathbf{z}')$$

eşitliğinde kullanılırsa

$$F_Z = \lambda^2 F_X + 2\lambda\mu F_{XY} + \mu^2 F_Y \quad (3.60)$$

elde edilir. Burada F_{XY} ; X ve Y noktalarının **karışık alan formülü** olmak üzere

$$F_{XY} = F_O + \pi\nu [(x_1 y_1 + x_2 y_2) - (x_1 + y_1)s_1 - (x_2 + y_2)s_2] \quad (3.61)$$

yazılabilir. Ayrıca $F_{XY} = F_{YX}$ olduğu açıktır. $\square$

(3.18) ve (3.61) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} F_X - 2F_{XY} + F_Y &= F_O + \pi\nu (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 s_1 - 2x_2 s_2) \\ &\quad - 2\{F_O + \pi\nu [(x_1 y_1 + x_2 y_2) - (x_1 + y_1)s_1 - (x_2 + y_2)s_2]\} \\ &\quad + F_O + \pi\nu (y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 s_1 - 2y_2 s_2) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y = \pi v \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]$$

bulunur. Bu son denklemde, $d^2 = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]$ denilirse

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y = \pi v d^2 \quad (3.62)$$

bulunur. Buradan

$$F_{XY} = \frac{1}{2}(F_X + F_Y) - \frac{1}{2}\pi v d^2 \quad (3.63)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} F_Z &= \lambda^2 F_X + \mu^2 F_Y + 2\lambda\mu F_{XY} \\ &= (1-\mu)^2 F_X + \mu^2 F_Y + 2(1-\mu)\mu \left[\frac{1}{2}(F_X + F_Y - \pi v d^2) \right] \\ &= (1-2\mu + \mu^2) F_X + \mu^2 F_Y + (\mu - \mu^2)(F_X + F_Y - \pi v d^2) \\ &= (1-\mu) F_X + \mu F_Y - (1-\mu)\mu \pi v d^2 \end{aligned}$$

veya

$$F_Z = \lambda F_X + \mu F_Y - \lambda\mu \pi v d^2 \quad (3.64)$$

bulunur. $\square$

(3.48) ve (3.61) denklemlerinden

$$T_{XY} = T_O + 2(F_{XY} - F_O) \quad (3.65)$$

elde edilir. Ayrıca (3.18) ve (3.44) denklemlerinden

$$T_X = T_O + 2(F_X - F_O) \quad (3.66)$$

elde edilir, [5]. Buradan (3.49) denkleminde (3.66) denklemi ve $T_Y = T_O + 2(F_Y - F_O)$

ifadesi kullanılırsa

$$T_{XY} = F_X + F_Y - 2F_O + T_O - \pi v d^2 \quad (3.67)$$

bulunur, [5].

3.8 Kutupsal Atalet Momenti için Holditch Tipi Teoremin Genelleştirilmeleri

!

Bu bölümde, Müller, H. R. [5] tarafından verilen doğrudan üç noktanın kutupsal atalet momentleri için teorem 3.20 de verilen bağıntıyı doğrudan olmayan üç nokta için genelleştirelim, [7]:

$B = E / E'$ kapalı hareketi esnasında, sabit d uzunluklu bir doğru parçasının X ve Y uç noktaları, sırasıyla, k_X ve k_Y kapalı eğrilerini çizsin. Şimdi E -hareketli düzleminin $\mathbf{a}_3$ normal vektörü yardımıyla

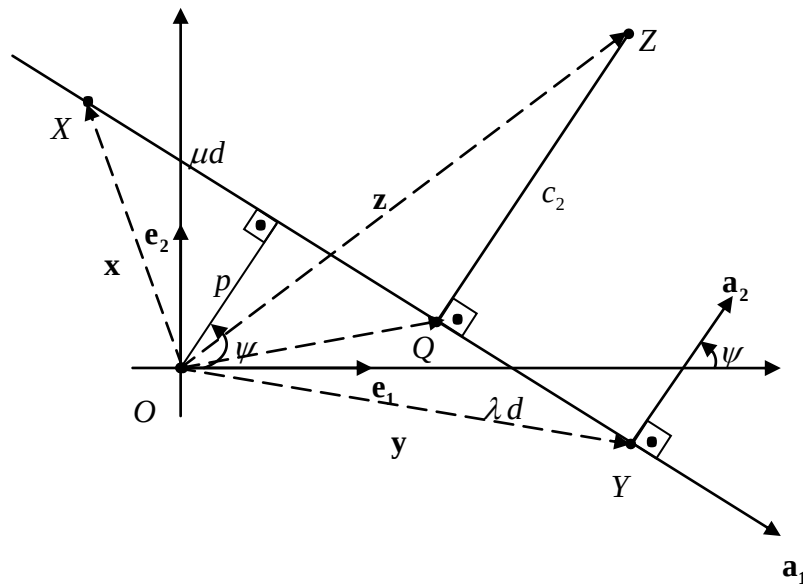
$$\mathbf{a}_1 := \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{d}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1$$

özelliğine sahip $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ dik çatısını oluşturalım, (Şekil 3.9):

O zaman

$$\oint \langle d\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = -\oint \langle d\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \rangle = 2\pi\nu$$

elde edilir.



Şekil 3. 9 Doğrudaş olmayan üç nokta

XY doğru parçası üzerinde olmayan sabit olan bir Z noktası seçelim. Bu durumda Z

noktasının $\mathbf{XY}$ doğru parçası üzerine dik izdüşüm noktası Q olmak üzere

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OX} + \mathbf{XQ}$$

ve

$$\mathbf{OY} = \mathbf{OX} + \mathbf{XY}$$

yazılabilir, (Şekil 3.9). Buradan $\mathbf{XQ} = \mu\mathbf{XY}$ olacak şekilde $\mu \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. O halde, bu son eşitlik yardımıyla

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OX} + \mu(\mathbf{OY} - \mathbf{OX})$$

veya

$$\mathbf{OQ} = (1 - \mu)\mathbf{OX} + \mu\mathbf{OY}$$

bulunur. $1 - \mu = \lambda \in \mathbb{R}$ dersek

$$\mathbf{OQ} = \lambda\mathbf{OX} + \mu\mathbf{OY}$$

elde edilir. Burada $\lambda + \mu = 1$ dir.

Benzer şekilde, (Şekil 3.9)

$$\mathbf{OZ} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QZ}$$

veya

$$\mathbf{OZ} = \lambda\mathbf{OX} + \mu\mathbf{OY} + c_2\mathbf{a}_2$$

yazılabilir. Böylece $\lambda + \mu = 1$ ve $\lambda, \mu, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + c_2\mathbf{a}_2 \tag{3.68}$$

elde edilir.

X, Y ve Z noktalarının O' orijin noktasına göre konum vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ ve $\mathbf{z}'$ olmak üzere (3.3) ve (3.68) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}' + c_2 \mathbf{a}_2 &= \lambda (\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \mu (\mathbf{y} - \mathbf{u}) + c_2 \mathbf{a}_2 \\
&= \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} + c_2 \mathbf{a}_2 - \mathbf{u} (\lambda + \mu), \quad \lambda + \mu = 1 \\
&= \mathbf{z} - \mathbf{u} \\
&= \mathbf{z}'
\end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir. Şimdi, $B = E/E'$ kapalı hareket esnasında, Z noktasının $d\varphi$ kütle elementi ile örtülmüş kapalı k_z yörünge eğrisinin T_z kutupsal atalet momentini hesaplayalım:

$$T_z = \oint \|\mathbf{z}'\|^2 d\varphi$$

olmak üzere (3.69) eşitliği yardımıyla

$$T_z = \lambda^2 T_x + 2\lambda\mu T_{xy} + \mu^2 T_y + 2\pi v c_2^2 + 2c_2 \oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi \tag{3.70}$$

elde edilir.

Burada, T_{xy} (veya T_{yx}), k_x ve k_y eğrilerinin karışık kutupsal atalet momentleri olup

$$T_{xy} = T_{yx} = \oint \langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle d\varphi$$

ile tanımlanır.

Şimdi, (3.70) denklemindeki

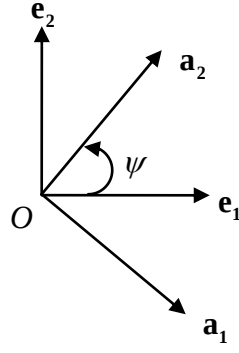
$$\oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi$$

integralini hesaplayalım:

$\mathbf{XY}$ doğrusu parçasının denklemi

$$p = x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi \tag{3.71}$$

ile verilsin, (Şekil 3.9). Burada p ; orijin noktasından $\mathbf{XY}$ doğru parçasına inilen dikmenin uzunluğu ve ψ de bu dikmenin x – eksenine pozitif yönde yaptığı açıdır.



Şekil 3. 10 Başlangıç noktaları aynı koordinat sistemleri

$\mathbf{a}_1$ ve $\mathbf{a}_2$ vektörleri $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ koordinat sisteminde bulunduğundan

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_2 = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

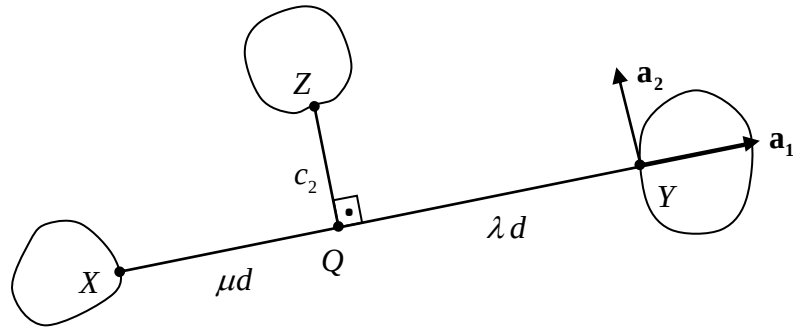
yazılabilir, (Şekil 3.10). Yukarıdaki denklemleri sırasıyla sağdan $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ ile iç çarparsak $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ve β_2 bulunur. Böylece $\psi = \text{sabit}$ olmak üzere

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = \sin \psi \mathbf{e}_1 - \cos \psi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_2 = \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (3.72)$$

elde edilir. Q noktası Z noktasının $\mathbf{XY}$ doğrusu üzerine dik izdüşümü olduğundan

$$\mathbf{q} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \quad (3.73)$$

yazılabilir.



Şekil 3. 11 Doğrudaş olmayan üç noktanın çizdiği farklı yörünge eğrileri

O halde

$$\mathbf{q} = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2, (q_i = \text{sabit}) \quad (3.74)$$

ve

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.75)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi &= \oint \langle \lambda (\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \mu (\mathbf{y} - \mathbf{u}), \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi \\ &= \oint \langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} - \mathbf{u}(\lambda + \mu), \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi, \quad \lambda + \mu = 1 \\ &= \oint \langle \mathbf{q} - \mathbf{u}, \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi \\ &= \oint (\langle \mathbf{q}, \mathbf{a}_2 \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_2 \rangle) d\varphi \\ &= \oint (q_1 \cos \psi + q_2 \sin \psi - u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi) d\varphi \\ &= \oint (p - u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi) d\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. O' noktasının $\mathbf{XY}$ doğrusuna olan uzaklığı p' olmak üzere

$$\oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi = \oint p' d\varphi$$

bulunur. O halde $\mathbf{XY}$ doğru parçasının E' -düzlemindeki zarf eğrisinin uzunluğu L olmak üzere (3.35) denkleminde

$$\oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi = L \quad (3.76)$$

bulunur. Böylece bu eşitlik (3.70) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_Z = \lambda^2 T_X + 2\lambda\mu T_{XY} + \mu^2 T_Y + 2C_2 (\pi v C_2 + L) \quad (3.77)$$

elde edilir. Eğer (3.49) denklemi (3.77) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilir, (Bakınız, Ek-A Örnek 3):

Teorem 3.24 $B = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareket esnasında sabit d uzunluklu $\mathbf{XY}$ doğru parçasının uç noktaları, sırasıyla, k_X ve k_Y kapalı eğrileri boyunca hareket ettirilirse, X ve Y noktaları ile doğrudan olmayan sabit bir Z noktası, k_Z kapalı eğrisini çizer. Bu durumda k_X, k_Y ve k_Z kapalı yörünge eğrilerinin, sırasıyla, T_X, T_Y ve T_Z kutupsal atalet momentleri arasında

$$T_Z = \lambda T_X + \mu T_Y - 2\lambda\mu\pi v d^2 + 2c_2(\pi v c_2 + L) \quad (3.78)$$

bağıntısı mevcuttur. Yani, k_Z nin kutupsal atalet momenti sadece T_X ve T_Y bağılı değildir, **XY** doğru parçasının uzunluğuna ve onun zarf eğrisine bağlıdır, [7].

Özel durum 3.25 $c_2 = 0$ özel durumunda X, Y ve Z doğrudan üç noktanın kutupsal atalet momentleri arasında

$$T_Z = \lambda T_X + \mu T_Y - 2\lambda\mu\pi v d^2$$

bağıntısı mevcuttur, [5].

II

Bu bölümde, $B = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında doğrudan olmayan X, Y ve Z noktalarının aynı yörünge eğrisi üzerinde hareketini inceleyeceğiz:

E -düzleminde köşeleri X, Y ve Z olan bir üçgen alalım. ΔXYZ üçgeninin köşeleri E' -düzleminde aynı kapalı eğriyi çizerler. O halde $T_X = T_Y = T_Z = T$ ve ΔXYZ üçgeninin çevrel merkezi S Steiner noktasıdır. Hareketli çatının orijin noktası yerine S noktası alırsak, $X = (r, 0)$, $Q = (x, y) \in E$ noktaları için (3.44) denkleminde,

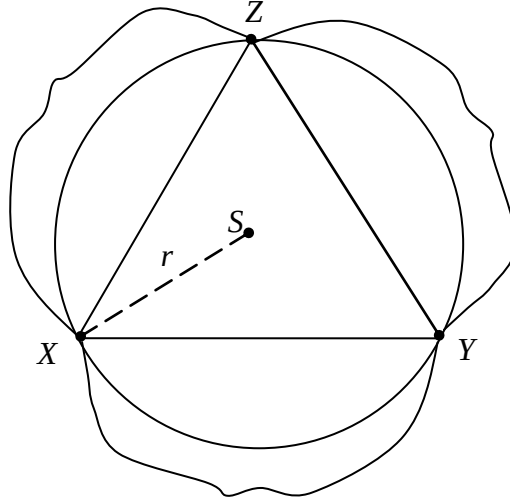
$$T = T_S + 2\pi v r^2, \quad T_Q = T_S + 2\pi v (x^2 + y^2)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir, (Bakınız, Ek-A Örnek 4):

Teorem 3.26 Eğer $B = E/E'$ kapalı hareket esnasında doğrudan olmayan $X, Y, Z \in E$ noktaları T kutupsal atalet momente sahip aynı kapalı eğriyi çizerlerse herhangi bir $Q \in E$ noktası da T_Q kutupsal atalet momentli kapalı k_Q eğrisini çizer. Böylece T ve T_Q arasında

$$T - T_Q = 2\pi v (r^2 - R^2) \quad (3.79)$$

bağıntısı vardır. Burada r ; çevrel çemberin yarıçapı ve R ; Q ve çevrel çemberin merkezi arasındaki uzaklıktır, [7].



Şekil 3. 12 Doğrudan olmayan üç noktanın çizdiği aynı yörünge eğrisi

$B = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, doğrudan olmayan $X = (0,0)$, $Y = (b,0)$, $Z = (c,d)$ ve $Q = (x,y) \in E$ noktalarının farklı yörünge eğrilerinin kutupsal atalet momentleri için aşağıdaki en genel hal verilebilir, (Bakınız, Ek-A Örnek 5):

Teorem 3.27 $B = E/E'$ kapalı hareket esnasında $X = (0,0)$, $Y = (b,0)$, $Z = (c,d) \in E$ noktalarının kapalı yörünge eğrilerinin kutupsal atalet momentleri, sırasıyla, T_X, T_Y ve T_Z olmak üzere herhangi bir $Q = (x,y) \in E$ noktasının kutupsal atalet momenti için

$$T_Q = \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{c-b}{bd}y\right)T_X + \left(\frac{x}{b} - \frac{cy}{bd}\right)T_Y + \frac{y}{d}T_Z + 2\pi\nu \left(x^2 + y^2 - bx - \frac{c^2 + d^2}{d}y + \frac{bc}{d}y\right) \quad (3.80)$$

elde edilir, [7].

İspat.

Q, X, Y ve Z noktalarının çizmiş olduğu yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentleri için (3.44) denkleminde

$$T_Q = T_O + 2\pi\nu(x^2 + y^2 - 2xs_1 - 2ys_2),$$

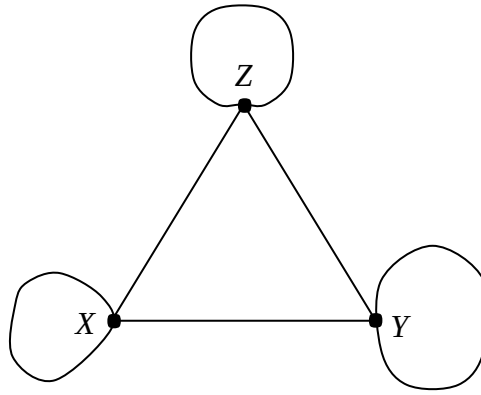
$$T_X = T_O,$$

$$T_Y = T_O + 2\pi\nu(b^2 - 2bs_1),$$

ve

$$T_Z = T_O + 2\pi\nu(c^2 + d^2 - 2cs_1 - 2ds_2)$$

yazılabilir. Buradan cebirsel işlemler yardımıyla kolay bir şekilde (3.80) denklemi elde edilir.



Şekil 3. 13 Doğrudaş olmayan üç noktanın çizdiği farklı yörünge eğrilerinin genel hali

III

Bu bölümde E_i / E' , $(i=1,2)$ farklı iki 1-parametrelili kapalı hareket esnasında E_1 ve E_2 düzlemlerindeki farklı doğrudaş üç noktanın çizdiği yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teorem ile verebilir, (Bakınız, Ek-A Örnek 6):

Teorem 3.28 E_i / E' , $(i=1,2)$ aynı yönlü ve ν_i dönme sayılı 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler olsunlar. Eğer $X_i Y_i$ doğru parçalarının X_i ve Y_i noktaları, sırasıyla, k_X ve k_Y kapalı yörünge eğrilerini çizerse X_i ve Y_i noktaları ile doğrudaş

Z_i ($|X_i Z_i| = \lambda_i a$, $|Z_i Y_i| = \lambda_i b$) noktaları da T_i kutupsal atalet momente sahip k_i kapalı yörünge eğrilerini belirler, k_i eğrilerinin T_i kutupsal atalet momentleri için

$$T_1 - T_2 = 2\pi ab(\nu_2 \lambda_2^2 - \nu_1 \lambda_1^2) \quad (3.81)$$

bağıntısı vardır. Yani, bu fark k_x ve k_y eğrilerinden bağımsızdır [7].

İspat.

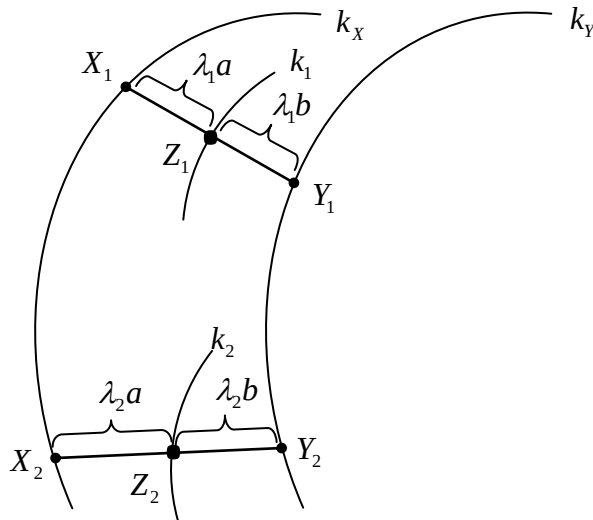
(3.52) denklemini kullanarak

$$T_1 = \frac{\lambda_1 a T_{Y_1} + \lambda_1 b T_{X_1}}{\lambda_1 (a+b)} - 2(\lambda_1 a)(\lambda_1 b) \pi \nu_1$$

ve

$$T_2 = \frac{\lambda_2 a T_{Y_2} + \lambda_2 b T_{X_2}}{\lambda_2 (a+b)} - 2(\lambda_2 a)(\lambda_2 b) \pi \nu_2$$

elde edilir. X_1 ve X_2 ile Y_1 ve Y_2 aynı kapalı yörünge eğrilerini çizdiklerinden $T_{X_1} = T_{X_2}$ ve $T_{Y_1} = T_{Y_2}$ olduğundan yukarıdaki ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa (3.81) denklemi bulunur.



Şekil 3. 14 Farklı iki hareketteki farklı doğrudan üç noktanın çizdiği yörünge eğrileri

Özel durum 3.29

$k_x = k_y$, $\nu_2 = 1$ ve $\lambda_1 = 0$ (yani $k_1 = k_x$) olması durumunda kutupsal atalet momenti için

$$T_1 - T_2 = 2\pi\lambda_2^2 ab$$

elde edilir, [5].

1-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKET

E -düzleminde hareketli koordinat sistemi $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ve E' -düzleminde sabit koordinat sistemi $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ olsun. E -düzleminde alınan bir X noktasının herhangi bir t anında,

$$\mathbf{x}' = h\mathbf{x} - \mathbf{u} = (hx_1 - u_1)\mathbf{e}_1 + (hx_2 - u_2)\mathbf{e}_2 \quad (4.1)$$

denklemleri ile tanımlanan harekete **1-parametrelili düzlemsel homotetik hareket** denir ve $H = E/E'$ ile gösterilir. Burada h, u_1, u_2 t reel parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere h ya hareketin **homotetik oranı** denir.

Hareketli düzlemin başlangıç noktasından, sabit düzlemin başlangıç noktasına giden $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ öteleme vektörü

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 \quad (4.2)$$

şeklinde dir. Ayrıca $t = t_0$ gibi bir an için iki koordinat sistemini çakışacak şekilde kaydırılmış olarak düşünelim. Bu durumda $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}'_1$ arasındaki dönme açısı φ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}'_1 + \sin \varphi \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}'_1 + \cos \varphi \mathbf{e}'_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

yazılabilir. 1-parametrelî düzlemsel homotetik hareketin vektörel denklemi $\mathbf{x}' = h\mathbf{x} - \mathbf{u}$ olduğundan ve $X \in E$ noktasının E' -düzlemindeki koordinatları (x'_1, x'_2) olmak üzere,

$$x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 = (hx_1 - u_1) \mathbf{e}_1 + (hx_2 - u_2) \mathbf{e}_2$$

eşitliğı yazılabilir. Bu eşitliğın $\mathbf{e}'_1$ ve $\mathbf{e}'_2$ ile iç-çarpımı sonucunda,

$$\begin{cases} x'_1 = (hx_1 - u_1) \cos \varphi - (hx_2 - u_2) \sin \varphi \\ x'_2 = (hx_1 - u_1) \sin \varphi + (hx_2 - u_2) \cos \varphi \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x'_1 = h(x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi) + (-u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi) \\ x'_2 = h(x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi) + (-u_1 \sin \varphi - u_2 \cos \varphi) \end{cases} \quad (4.4)$$

elde edilir. Bu son eşitlik,

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = hAX + C$$

şeklinde matrisel olarak gösterilebilir, (Bakınız, Ek-A Örnek 7).

4.1 Türev Denklemleri

X noktasının hareketli ve sabit düzlemlere göre hızlarını hesaplamak için önce H hareketinin türev denklemlerini bulalım. Bunun için (3.5) ve (3.6) denklemlerinden

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_1$$

ve

$$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1 - u_2 \dot{\phi}) \mathbf{e}_1 + (\dot{u}_2 + u_1 \dot{\phi}) \mathbf{e}_2$$

olduğunu biliyoruz. İşte bu denklemlere H hareketinin **türev denklemleri** denir.

4.2 Hızlar ve Hızların Terkibi

$X \in E$ noktasının hareketli sistemdeki koordinatları (x_1, x_2) olmak üzere,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.5)$$

yazılabilir.

H hareketinin relatif hızı, (4.5) denkleminde türev alarak

$$\mathbf{V}_r = \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.6)$$

bulunur. Mutlak hız ise (4.1) denkleminde türev alarak

$$\mathbf{V}_a = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \left\{ -\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2) \dot{\phi} + \dot{h}x_1 \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ -\dot{u}_2 + (-u_1 + hx_1) \dot{\phi} + \dot{h}x_2 \right\} \mathbf{e}_2 + h(\dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2)$$

veya

$$\mathbf{V}_a = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \left\{ -\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2) \dot{\phi} + \dot{h}x_1 \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ -\dot{u}_2 + (-u_1 + hx_1) \dot{\phi} + \dot{h}x_2 \right\} \mathbf{e}_2 + h\mathbf{V}_r \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitlikte

$$\mathbf{V}_f = \left\{ -\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2) \dot{\phi} + \dot{h}x_1 \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ -\dot{u}_2 + (-u_1 + hx_1) \dot{\phi} + \dot{h}x_2 \right\} \mathbf{e}_2 \quad (4.8)$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme hız vektörü** denir. Eğer X noktası E -de tesbit edilmiş ise $\mathbf{V}_r = \mathbf{0}$ olacaktır. Bu durumda mutlak hız sürüklenme hızına eşit olur.

Teorem 4.1 $H = E / E'$ homotetik hareketinde bir X noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + h\mathbf{V}_r \quad (4.9)$$

bağıntısı vardır. $\square$

Çalışmamız boyunca, yalnızca öteleme yada yalnızca dönme durumlarından kaçınmak için $\dot{\phi} \neq 0$ ve $h = h(t)$ nın sabit olmadığını kabul edeceğiz.

4.3 Pol Noktaları ve Pol Eğrileri

Şimdi sürüklenme hızının sıfır olduğu noktaları yani, pol noktalarını araştıralım:

Bu noktalar sadece hareketli düzlemde değil, aynı zamanda sabit düzlemde de sabit noktalardır. Buna göre,

$$\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$$

ise (4.8) denkleminde,

$$\begin{aligned} -\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2)\dot{\phi} + \dot{h}x_1 &= 0 \\ -\dot{u}_2 + (-u_1 + hx_1)\dot{\phi} + \dot{h}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu denklemleri x_1 ve x_2 ye göre düzenlersek

$$\begin{aligned} \dot{h}x_1 - h\dot{\phi}x_2 &= \dot{u}_1 - u_2\dot{\phi} \\ h\dot{\phi}x_1 + \dot{h}x_2 &= \dot{u}_2 + u_1\dot{\phi} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemin çözümleri p_1 ve p_2 ile gösterilirse ve $\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2 \neq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\dot{h}(\dot{u}_1 - u_2\dot{\phi}) + h\dot{\phi}(\dot{u}_2 + u_1\dot{\phi})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2} \\ p_2 &= \frac{\dot{h}(\dot{u}_2 + u_1\dot{\phi}) - h\dot{\phi}(\dot{u}_1 - u_2\dot{\phi})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

bulunur. Bu durumda,

$$\mathbf{OP} = \mathbf{p} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2$$

yer vektörüne karşılık gelen $P = (p_1, p_2)$ noktasına $H = E / E'$ homotetik hareketinin t anındaki **pol noktası** denir, (Bakınız, Ek-A Örnek 8). Bu pol noktasından faydalanarak bir X noktasının (4.8) de verilen sürüklenme hız vektörü aşağıdaki şekilde ifade edilir. Bunun için (4.10) denkleminde $\dot{u}_1$ ve $\dot{u}_2$ nin değerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= p_1 \dot{h} - p_2 h \dot{\phi} + u_2 \dot{\phi} \\ \dot{u}_2 &= p_1 h \dot{\phi} + p_2 \dot{h} - u_1 \dot{\phi} \end{aligned} \quad (4.11)$$

bulunur. Bunları (4.8) denkleminde yerine yazarsak

$$\mathbf{V}_f = \{(x_1 - p_1) \dot{h} - (x_2 - p_2) h \dot{\phi}\} \mathbf{e}_1 + \{(x_1 - p_1) h \dot{\phi} + (x_2 - p_2) \dot{h}\} \mathbf{e}_2 \quad (4.12)$$

elde edilir, [6].

Sürüklenme hızının bu ifadesinden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 4.2 P polünden X noktasına giden

$$\mathbf{PX} = (x_1 - p_1) \mathbf{e}_1 + (x_2 - p_2) \mathbf{e}_2$$

pol ışını ile $\mathbf{V}_f$ nin iç-çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_f, \mathbf{PX} \rangle &= (x_1 - p_1)(x_1 - p_1) \dot{h} - (x_1 - p_1)(x_2 - p_2) h \dot{\phi} \\ &\quad + (x_2 - p_2)(x_1 - p_1) h \dot{\phi} + (x_2 - p_2)(x_2 - p_2) \dot{h} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{V}_f, \mathbf{PX} \rangle &= \left[(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 \right] \dot{h} \\ &= \|\mathbf{PX}\|^2 \dot{h}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Özel Durum 4.3 $h \equiv 1$ alınırsa,

$$\langle \mathbf{V}_f, \mathbf{PX} \rangle = 0$$

bulunur, [3].

Sonuç 4.4 $\mathbf{V}_f$ vektörünün uzunluğu için

$$\begin{aligned}\|\mathbf{V}_f\| &= \sqrt{(\dot{h}^2 + h^2 \dot{\phi}^2) \left[(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 \right]} \\ &= \sqrt{\dot{h}^2 + h^2 \dot{\phi}^2} \|\mathbf{PX}\|\end{aligned}$$

bulunur.

Özel Durum 4.5 Bu son eşitlikte $h \equiv 1$ olarak alınırsa,

$$\|\mathbf{V}_f\| = \dot{\phi} \|\mathbf{PX}\|$$

elde edilir, [3].

Şimdi (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P pol noktasının hızlarını araştıralım:

Pol noktası $\mathbf{V}_f = 0$ ile tanımlandığından (4.9) eşitliğinden $X = P$ için

$$\mathbf{V}_a = h \mathbf{V}_r \tag{4.13}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.6 $H = E / E'$; 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareket esnasında sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinden farklıdır.

Teorem 4.7 $H = E / E'$; 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareket esnasında E düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kayarak yuvarlanır.

İspat:

(P) nin t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds = \|\mathbf{V}_r\| dt$$

dir. (P') nün t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds' = \|\mathbf{V}_a\| dt$$

olur. P pol noktası için $\mathbf{V}_a = h\mathbf{V}_r$ olduğundan

$$ds' \neq ds$$

dir. O halde (P) hareketli pol eğrisi (P') sabit pol eğrisi üzerinde kayarak yuvarlanır, [8].

Özel Durum 4.8 $h=1$ olması durumunda $ds' = ds$ elde edilir. Bu durumda pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanır, [3].

4.4 1- Parametrelili Düzlemsel Kapalı Homotetik Hareket

$H = E / E'$ hareketi esnasında, $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ için

$$u_j(t+T) = u_j(t), \quad (j=1,2), \quad (4.14)$$

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu \quad (4.15)$$

$$h(t+T) = h(t), \quad h(0) = h(T) = 1 \quad (4.16)$$

bağıntıları sağlanacak şekilde $T > 0$ en küçük sayısı varsa $H = E / E'$ ye T **periyotlu** ve ν **dönme sayısı 1-parametrelili düzlemsel kapalı homotetik hareket** denir. Burada ν bir tam sayıdır ve E' -ye göre E -düzleminin ilk durumuna gelinceye kadar kaç tam devir yaptığını gösterir. Dolayısıyla ν dönme sayısı E -düzleminin T periyodu içinde etrafında döndüğü $2\pi\nu$ tam dönme açısına karşılık gelir.

$H = E / E'$ kapalı hareketi altında, E -düzleminde tespit edilmiş bir X noktası E' -düzleminde kapalı bir yörünge eğrisi çizer. Ayrıca E -düzleminin doğru veya eğrilerinin zarf yörüngeleri de E' -düzleminde kapalı eğrilerdir, [6,8].

4.4.1 Kapalı Homotetik Hareket Esnasında Yörünge Eğrisinin Alanı

$H = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketler altında, sabit $X \in E$ noktasının E' -ye göre $d\mathbf{x}'$ değişimi X noktasının sürüklenme hızına karşılık gelir. O halde (4.13) denkleminde

$$d\mathbf{x}' = \{(x_1 - p_1)dh - (x_2 - p_2)hd\varphi\}\mathbf{e}_1 + \{(x_1 - p_1)hd\varphi + (x_2 - p_2)dh\}\mathbf{e}_2 \quad (4.17)$$

yazılabilir. Şimdi, kapalı hareket esnasında E düzleminde sabit bir X noktasının çevrelediği yörünge yüzeyinin F_X yörünge alanını

$$F_x = \frac{1}{2} \oint (x'_1 dx'_2 - x'_2 dx'_1) = \frac{1}{2} \oint \det(\mathbf{x}', d\mathbf{x}') \quad (4.18)$$

Gauss alan formülünü kullanarak hesaplayacağız [4]:

Buradaki eğrisel integral; X noktasının yörünge eğrisi üzerinde alınacaktır.

(4.11) denklemi u_1 ve u_2 ye göre çözülürse

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1 h + p_2 \frac{dh}{d\varphi} - \frac{du_2}{d\varphi} \\ u_2 &= p_2 h - p_1 \frac{dh}{d\varphi} + \frac{du_1}{d\varphi} \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.18) denkleminde (4.1), (4.17) ve (4.19) denklemlerindeki değerler yazılırsa

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{x}', d\mathbf{x}') &= \begin{vmatrix} hx_1 - u_1 & x_1 dh - p_1 dh - x_2 h d\varphi + p_2 h d\varphi \\ hx_2 - u_2 & x_1 h d\varphi - p_1 h d\varphi + x_2 dh - p_2 dh \end{vmatrix} \\ &= x_1^2 h^2 d\varphi - x_1 p_1 h^2 d\varphi + x_1 x_2 h dh - h x_1 p_2 d\varphi - u_1 x_1 h d\varphi + u_1 p_1 h d\varphi \\ &\quad - u_1 x_2 dh + u_1 p_2 dh - h x_1 x_2 dh + h x_2 p_1 dh + x_2^2 h^2 d\varphi - h^2 x_2 p_2 d\varphi \\ &\quad + u_2 x_1 dh - u_2 p_1 dh - u_2 x_2 h d\varphi + u_2 p_2 d\varphi \end{aligned} \quad (4.20)$$

bulunur. Bu ifade (4.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2F_x &= (x_1^2 + x_2^2) \oint h^2 d\varphi - 2x_1 \oint p_1 h^2 d\varphi - 2x_2 \oint p_2 h^2 d\varphi \\ &\quad + \oint (u_1 p_1 h d\varphi + u_2 p_2 h d\varphi + u_1 p_2 dh - u_2 p_1 dh) + x_1 \oint (-2h p_2 dh + h du_2 + u_2 dh) \\ &\quad + x_2 \oint (2h p_1 dh - h du_1 - u_1 dh) \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. Burada,

$$F_o = \frac{1}{2} \oint (u_1 p_1 h d\varphi + u_2 p_2 h d\varphi + u_1 p_2 dh - u_2 p_1 dh) \quad (4.22)$$

$O = (0,0)$ orijin noktasının yörünge alanıdır. Ayrıca, (4.15) denkleminde

$$\oint d\varphi = \int_0^T d\varphi = \varphi(T) - \varphi(0) = 2\pi\nu \quad (4.23)$$

bulunur.

Diğer taraftan, integral hesabın Ortalama Değer Teoremi gereğince*;

$h^2(t)$ ve $\dot{\varphi}(t)$, $[0, T]$ aralığında tanımlı, $h^2(t)$ ve $h^2(t)\dot{\varphi}(t)$ fonksiyonları bu kapalı aralıkta integrallenebilir fonksiyonlardır. $[0, T]$ aralığında $h^2(t)$ fonksiyonu sürekli ve bu aralıkta $\dot{\varphi}(t)$ her yerde aynı işaretli olduğundan

$$\int_0^T h^2(t) d\varphi = \int_0^T h^2(t) \dot{\varphi}(t) dt = h^2(t_0) \int_0^T \dot{\varphi}(t) dt = 2h^2(t_0)\pi\nu \quad (4.24)$$

olacak şekilde $t_0 \in [0, T]$ noktası vardır.

Bu durumda $\nu \neq 0$ alarak düzlemsel kapalı homotetik hareketler için hareketli pol eğrilerinin $S = (s_1, s_2)$ ağırlık merkezi olan Steiner noktası

$$s_j = \frac{\oint h^2 p_j d\varphi}{\oint h^2 d\varphi} = \frac{1}{2h^2(t_0)\pi\nu} \oint h^2 p_j d\varphi, \quad j=1,2 \quad (4.25)$$

yazılabilir. (4.21) denkleminde (4.22), (4.24) ve (4.25) denklemlerindeki değerler yazılırsa

* f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve g ile $f.g$ bu aralıkta integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar. g , $[a, b]$ üzerinde her yerde aynı işaretli ve f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise, $\int_a^b f(x).g(x)dx = f(x_0).\int_a^b g(x)dx$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in [a, b]$ vardır, [15].

$$F_X = F_O + h^2(t_0)\pi\nu(x_1^2 + x_2^2 - 2s_1x_1 - 2s_2x_2) + \frac{1}{2}x_1 \oint (-2hp_2dh + hdu_2 + u_2dh) + \frac{1}{2}x_2 \oint (2hp_1dh - hdu_1 - u_1dh) \quad (4.26)$$

bulunur. Bu son eşitlikte

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \oint (-2hp_2dh + hdu_2 + u_2dh) \quad \text{ve} \quad \mu_2 = \frac{1}{2} x_2 \oint (2hp_1dh - hdu_1 - u_1dh) \quad (4.27)$$

yazılırsa

$$F_X = F_O + h^2(t_0)\pi\nu(x_1^2 + x_2^2 - 2s_1x_1 - 2s_2x_2) + x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.28) denkleminde düzlemsel kapalı homotetik hareket için **Steiner Alan Formülü** denir, [6], (Bakınız, Ek-A Örnek 9).

Teorem 4.9 $H = E / E'$ hareketi esnasında, aynı F_X kutupsal atalet momentine sahip olan E -hareketli düzleminin bütün sabit X noktaları $S = (s_1, s_2)$ Steiner noktası olmak üzere E -düzleminde merkezi

$$M = \left(s_1 - \frac{\mu_1}{2h^2(t_0)\pi\nu}, s_2 - \frac{\mu_2}{2h^2(t_0)\pi\nu} \right) \quad (4.29)$$

olan bir çember üzerinde bulunurlar, [6].

Özel Durum 4.10 $h=1$ olması durumunda, (3.18) denklemini elde edilir, [3]. □

$\nu=0$ dönme sayılı kapalı düzlemsel homotetik bir hareket için (4.21) ve (4.24) denklemlerinden

$$F_x = F_o - x_1 \oint p_1 h^2 d\varphi - x_2 \oint p_2 h^2 d\varphi + \frac{1}{2} x_1 \oint (-2hp_2 dh + hdu_2 + u_2 dh) + \frac{1}{2} x_2 \oint (2hp_1 dh - hdu_1 - u_1 dh) \quad (4.30)$$

bulunur. Yörünge alanlarının hesaplanmasında (4.30) denklemi (4.28) STEINER-formülünün yerine geçer.

Sonuç olarak, bütün t değerleri için açısal hız $\dot{\varphi} \neq 0$ ise (4.21) denkleminde (4.30) denkleminde kadar olan denklemler geçerlidir. Bu durumda, (4.10) denkleminde görüldüğü gibi P dönme polü sonsuza yaklaşmaz. Yani, bütün $H = E / E'$ hareketi için sonsuz uzak pol konumu yoktur.

4.4.2 Kapalı Düzlemsel Homotetik Hareketler için Holditch Teoremi

Bu alt bölümde, Holditch, H. [1] tarafından verilen Klasik Holditch Teoreminin homotetik hareketlere genelleştirilmesi verilecektir, [6]:

Teorem 4.11 $H = E / E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketi esnasında, sabit $a+b$ uzunluklu $\mathbf{AB}$ kirişinin A ve B uç noktaları E' -sabit düzlemindeki bir k ovalini tam bir defa ($\nu=1$) kat ettiğinde, (Şekil 3.5) $\mathbf{AB}$ kirişi üzerinde seçilen herhangi bir sabit X noktası da ($a=|AX|, b=|XB|$) genellikle konveks olmayan kapalı bir k_X eğrisi çizer. X noktasının çizdiği k_X kapalı eğrisi ile k ovali arasındaki bölgenin (Holditch Halkası) alanı sadece X noktasının doğru parçası üzerinde seçilişine ve hareketin h homotetik oranına bağlı olup eğrilerden ve hareketten bağımsızdır.

İspat.

$\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ dik koordinat sisteminin $\mathbf{e}_1$ eksenini $\mathbf{AB}$ doğrultusunda ve A noktasını da $A=O$ olacak şekilde seçelim (Şekil 3.5). Bu durumda $X=(a,0)$ ve $B=(a+b,0)$ yazılabilir.

$\nu = 1$ olduğundan (4.28) denkleminde X ve B noktalarının yörünge alanları için

$$F_X = F_O + h^2(t_0)\pi(a^2 - 2as_1) + \mu_1 a \quad (4.31)$$

ve

$$F_B = F_O + h^2(t_0)\pi[(a+b)^2 - 2s_1(a+b)] + \mu_1(a+b)$$

yazılabilir. Buradan, $A=O$ ve B noktaları aynı k ovalini kat ettiğinden

$$F_O = F_O + h^2(t_0)\pi[(a+b)^2 - 2s_1(a+b)] + \mu_1(a+b)$$

elde edilir. Buradan

$$s_1 = \frac{\mu_1 + h^2(t_0)\pi(a+b)}{2h^2(t_0)\pi} \quad (4.32)$$

bulunur.

(4.32) denklemi (4.31) denkleminde yerine yazılırsa

$$F = F_A - F_X = h^2(t_0)\pi ab \quad (4.33)$$

elde edilir, [6].

Özel Durum 4.12 $h \equiv 1$ olması durumunda, Klasik Holditch Teoremi elde edilir, [1].

4.5 Kapalı Homotetik Hareketlerde Doğru Zarf Eğrilerinin Çevresi

$H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket olsun. E – hareketli düzleminde sabit bir g doğrusu; doğru üzerindeki keyfi bir $X = (x_1, x_2) \in E$ için

$$x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi = p, \quad p \in \mathbb{R}, \quad \psi \in [0, 2\pi) \quad (4.34)$$

denkleminde sahiptir. (Yani p, ψ ye göre sabit olsun.) g doğrusunun E' – sabit düzleminin $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemine göre denklemi için

$$x'_1 \cos \psi' + x'_2 \sin \psi' = p' \quad (4.35)$$

yazılabilir. Burada $p', \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ dik koordinat sistemine göre koordinatları (u_1, u_2) olan O' orijin noktasının g doğrusuna olan uzaklığıdır. O ve O' orijin noktalarının g doğrusuna inilen dikmelerinin, sırasıyla, $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_1'$ ile yaptığı açılar ψ ve ψ' olmak üzere

$$\psi' = \psi + \varphi$$

yazılabilir. Buradan g, E -düzleminde sabit doğru olduğundan $\psi = \text{sabit}$ olup $d\psi' = d\varphi$

elde edilir.

O' noktasının O ya göre koordinatları (u_1, u_2) olmak üzere (4.4) denklemi (4.35) denkleminde yerine yazılırsa

$$x_1' \cos \psi' + x_2' \sin \psi' = hp - u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi = p' \quad (4.36)$$

elde edilir. $H = E/E'$ kapalı hareketi esnasında $g \subset E$ sabit doğrusunun E' -düzlemindeki (g') zarf eğrisinin çevresi (3.31) denklemi yardımıyla

$$L_g = \oint p' d\varphi \quad (4.37)$$

formülü ile hesaplanır. O halde (4.36) denkleminde

$$L_g = p \oint h d\varphi - \cos \psi \oint u_1 d\varphi - \sin \psi \oint u_2 d\varphi \quad (4.38)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \lambda &= \oint h d\varphi \\ \lambda_1 &= \oint u_1 d\varphi \\ \lambda_2 &= \oint u_2 d\varphi \end{aligned} \quad (4.39)$$

denilirse

$$L_g = p\lambda - \lambda_1 \cos \psi - \lambda_2 \sin \psi \quad (4.40)$$

elde edilir.

Ayrıca

$r; C_g = (\lambda_1/\lambda, \lambda_2/\lambda)$ noktasının g doğrusuna olan uzaklığı olmak üzere

$$r = p - \frac{\lambda_1}{\lambda} \cos \psi - \frac{\lambda_2}{\lambda} \sin \psi$$

yazılabilir. Buradan

$$\lambda r = p\lambda - \lambda_1 \cos \psi - \lambda_2 \sin \psi$$

olup ve (4.40) denkleminde

$$r = \frac{L_g}{\lambda}$$

elde edilir, [13].

Teorem 4.13 $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında E -hareketli düzlemindeki aynı L_g uzunluğuna sahip g doğrularının (g) zarf eğrileri C_g noktasından aynı r uzaklığındadırlar. Yani, bu özelliğe sahip tüm g doğruları E -düzleminde L_g/λ yarıçaplı ve $C_g = (\lambda_1/\lambda, \lambda_2/\lambda)$ noktası merkezli çembere teğettir, [13].

4.6 Kapalı Homotetik Hareket Altında Yörünge Eğrisinin Alanı için Holditch-Tipi

Teoremler

Hering, L. [9] tarafından verilen $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket altında doğrudan olmayan üç nokta için Klasik Holditch Teoremini $M = C_g$ olmak üzere homotetik hareketlere genelleştirelim, [13]:

I

Teorem 4.14 $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket esnasında sabit $a+b$ uzunluklu $\mathbf{AB}$ doğru parçasının uç noktaları, sırasıyla, k_A ve k_B kapalı eğrileri boyunca hareket ettirilirse, $A=(0,0)$ ve $B=(a+b,0)$ noktaları ile doğrudan

olmayan sabit bir $C=(a,c)$ noktası, k_C kapalı eğrisini çizer. Bu durumda k_A, k_B ve k_C kapalı yörünge eğrilerinin, sırasıyla, F_A, F_B ve F_C yörünge alanları arasında

$$F_C = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} + (c^2 - ab)h^2(t_0)\pi\nu - \frac{2h^2(t_0)\pi\nu cL_{AB}}{\lambda} \quad (4.41)$$

bağıntısı mevcuttur. Yani, k_C nin yörünge alanı sadece F_A ve F_B ye bağlı değildir, **AB** doğru parçasının uzunluğuna ve onun zarf eğrisine bağlıdır, [13].

İspat. $A=(0,0)$, $B=(a+b,0)$ ve $C=(a,c)$ noktaları için (4.28) denkleminde

$$F_A = F_O \quad (4.42)$$

$$F_B = F_A + h^2(t_0)\pi\nu \left[(a+b)^2 - 2(a+b)s_1 \right] + (a+b)\mu_1 \quad (4.43)$$

$$F_C = F_A + h^2(t_0)\pi\nu (a^2 + c^2 - 2as_1 - 2cs_2) + a\mu_1 + c\mu_2 \quad (4.44)$$

olmak üzere

$$F_C = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} + (c^2 - ab)h^2(t_0)\pi\nu - 2h^2(t_0)\pi\nu cs_2 + c\mu_2 \quad (4.45)$$

denklemini sağlanır.

$$\mathbf{AB} \dots x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi = p, \quad p \in \mathbb{R}, \quad \psi \in [0, 2\pi)$$

olmak üzere **AB** doğru parçası x -ekseni üzerinde olduğundan $p=0$ ve $\psi = \frac{3\pi}{2}$ dir.

Buradan $\cos \psi = 0$ olup $\sin \psi = -1$ bulunur. O halde (4.40) denklemine göre **AB** doğru parçasının zarf eğrisinin uzunluğu

$$L_{AB} = \lambda_2 \quad (4.46)$$

elde edilir. $M = C_g$ olduğundan çemberlerin merkez noktalarının bileşenleri eşittir.

Buradan

$$\frac{\lambda_2}{\lambda} = s_2 - \frac{\mu_2}{2h^2(t_0)\pi\nu}$$

olup

$$L_{AB} = \lambda_2 = \lambda \left[s_2 - \frac{\mu_2}{2h^2(t_0)\pi\nu} \right] \quad (4.47)$$

bulunur. (4.47) denklemi (4.45) denkleminde yerine yazılırsa (4.41) denklemi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Ayrıca, $M = C_g$ eşitliğinden

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = s_1 - \frac{\mu_1}{2h^2(t_0)\pi\nu}$$

olup

$$\lambda_1 = -\lambda \left(-s_1 + \frac{\mu_1}{2h^2(t_0)\pi\nu} \right) \quad (4.48)$$

yazılabilir. (4.42) ve (4.43) denklemlerini kullanarak

$$\frac{F_B - F_A}{2(a+b)h^2(t_0)\pi\nu} - \frac{a+b}{2} = -s_1 + \frac{\mu_1}{2h^2(t_0)\pi\nu} \quad (4.49)$$

elde edilir. Buradan (4.49) denklemi (4.48) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda_1 = -\lambda \left[\frac{F_B - F_A}{2(a+b)h^2(t_0)\pi\nu} - \frac{a+b}{2} \right] \quad (4.50)$$

bulunur. O halde (4.40), (4.46) ve (4.50) denklemleri yardımıyla (g) zarf eğrisinin uzunluğu

$$L_g = p\lambda + \lambda \left[\frac{F_B - F_A}{2(a+b)h^2(t_0)\pi\nu} - \frac{a+b}{2} \right] \cos\psi - L_{AB} \sin\psi \quad (4.51)$$

yazılabilir, [13].

Özel Durum 4.15 $c = 0$ olması durumunda, (4.41) denkleminde Kuruoğlu, N., ve Yüce, S. [12] tarafından verilen

$$F_x = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} - h^2(t_0)\pi\nu ab \quad (4.52)$$

denklemini elde edilir, [13].

Özel Durum 4.16 $h \equiv 1$ olması durumunda, (4.41) denkleminde Hering, L. [9] tarafından verilen

$$F_x = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} + (c^2 - ab)\pi\nu - cL_{AB} \quad (4.53)$$

denklemini elde edilir, [13].

II

Bu bölümde, $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında doğrudan olmayan A, B ve C noktalarının aynı k kapalı yörünge eğrisi üzerinde hareketini inceleyeceğiz, [13]:

E -düzleminde köşeleri A, B ve C olan bir üçgen alalım. ΔABC üçgeninin köşeleri E' -düzleminde aynı kapalı eğriyi çizerler. O halde $F_A = F_B = F_C = F$ ve ΔABC üçgeninin

çevrel merkezi Teorem 4.9 deki $M = \left(s_1 - \frac{\mu_1}{2h^2(t_0)\pi\nu}, s_2 - \frac{\mu_2}{2h^2(t_0)\pi\nu} \right)$ noktasıdır.

Hareketli çatının orijin noktası yerine M noktası alırsak,

$$\begin{cases} s_1 = \frac{\mu_1}{2h^2(t_0)\pi\nu} \\ s_2 = \frac{\mu_2}{2h^2(t_0)\pi\nu} \end{cases}$$

ve $A = (r, 0)$, $X = (x, y) \in E$ noktaları için (4.28) denkleminde,

$$F_x = F_M + h^2(t_0)\pi\nu(x^2 + y^2), \quad F_A = F_M + h^2(t_0)\pi\nu r^2$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir, [13]:

Teorem 4.17 Eğer $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında doğrudan olmayan $A, B, C \in E$ noktaları F yörünge alanına sahip aynı kapalı eğriyi çizerlerse herhangi bir $X \in E$ noktası da F_X yörünge alanlı kapalı k_X eğrisini çizer. Böylece F ve F_X arasında

$$F - F_X = h^2(t_0) \pi v (r^2 - R^2) \quad (4.54)$$

bağıntısı vardır. Burada R ; X ve O arasındaki uzaklık ve r ; $\triangle ABC$ üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapıdır, [13].

Özel Durum 4.18 $h \equiv 1$ olması durumunda, (4.54) denkleminde Pottmann, H., [10] tarafından verilen

$$F - F_X = \pi v (r^2 - R^2) \quad (4.55)$$

denklemini elde edilir, [10].

$H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında, doğrudan olmayan $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, d)$ ve $X = (x, y) \in E$ noktalarının farklı yörünge eğrilerinin alanları için aşağıdaki en genel hal verilebilir, [13]:

Teorem 4.19 $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, d) \in E$ noktalarının kapalı yörünge eğrilerinin alanları, sırasıyla, F_A, F_B ve F_C olmak üzere herhangi bir $X = (x, y) \in E$ noktasının yörünge alanı için

$$F_X = \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{c-b}{bd} y\right) F_A + \left(\frac{x}{b} - \frac{cy}{bd}\right) F_B + \frac{y}{d} F_C + h^2(t_0) \pi v \left(x^2 + y^2 - bx - \frac{c^2 + d^2}{d} y + \frac{bc}{d} y\right) \quad (4.56)$$

elde edilir, [13].

Özel Durum 4.20 $h \equiv 1$ olması durumunda, (4.56) denkleminde Pottmann, H., [10] tarafından verilen

$$F_x = \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{c-b}{bd}y\right)F_A + \left(\frac{x}{b} - \frac{cy}{bd}\right)F_B + \frac{y}{d}F_C + \left(x^2 + y^2 - bx - \frac{c^2 + d^2}{d}y + \frac{bc}{d}y\right)\pi v$$

denklemini elde edilir, [10].

4.7 Kapalı Homotetik Hareket Altında Yörünge Eğrisinin Kutupsal Atalet Momenti

$H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket esnasında, E' -sabit düzleminin O' orijin noktasına göre, E -hareketli düzlemdeki sabit bir X noktasının yörünge eğrisinin T_x kutupsal atalet momenti

$$T_x = \oint \|\mathbf{x}'\|^2 d\varphi$$

şeklinde tanımlanır.

(4.1) denkleminde

$$T_x = \oint (u_1^2 + u_2^2) d\varphi + (x_1^2 + x_2^2) \oint h^2 d\varphi - 2x_1 \oint hu_1 d\varphi - 2x_2 \oint hu_2 d\varphi \quad (4.57)$$

yazılabilir. Ayrıca (4.19) ve (4.25) denklemleri (4.57) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$T_x = T_O + 2h^2(t_0)\pi v(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2) + 2x_1\eta_1 + 2x_2\eta_2 \quad (4.58)$$

elde edilir, (Bakınız, Ek-A Örnek 9). Burada

$$\eta_1 = \oint (-p_2 h dh + h du_2) \quad \text{ve} \quad \eta_2 = \oint (p_1 h dh - h du_1) \quad (4.59)$$

dir ve ayrıca

$$T_O = \oint (u_1^2 + u_2^2) d\varphi \quad (4.60)$$

O orijin noktasının yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentidir, [8].

Teorem 4.21 $H = E / E'$ hareketi esnasında, aynı T_x kutupsal atalet momentine sahip olan E -hareketli düzleminin bütün sabit X noktaları $S = (s_1, s_2)$ Steiner noktası olmak üzere E -düzleminde merkezi

$$C = \left(s_1 - \frac{\eta_1}{2h^2(t_0)\pi v}, s_2 - \frac{\eta_2}{2h^2(t_0)\pi v} \right) \quad (4.61)$$

olan bir çember üzerinde bulunurlar, [8].

Özel Durum 4.22 $h \equiv 1$ olması durumunda, (4.58) denkleminde Müller, H.R. [5] tarafından verilen (3.44) denklemi elde edilir. Ayrıca, (4.61) denkleminde verilen C merkezi S , Steiner noktası ile çakışır, [8].

4.8 Holditch-Tipi Teorem ile Kutupsal Atalet Momentinin Hesaplanması

I

$H = E / E'$ kapalı homotetik hareketi esnasında, X ve Y , E -hareketli düzlemde sabit iki nokta ve Z , XY doğru parçası üzerinde keyfi sabit bir nokta olsun. Bu durumda

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \quad \lambda + \mu = 1 \quad (4.62)$$

yazılabilir.

Burada λ ve μ değerlerine $\mathbf{z}$ nin **barisantrik koordinatları** denir. Benzer şekilde doğrudaki X, Y ve Z noktalarının O' orijin noktasına göre konum vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ ve $\mathbf{z}'$ olmak üzere hareketin (4.1) denklemi ile verilen vektörel ifadesi ve (4.62) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}' &= \lambda (h\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \mu (h\mathbf{y} - \mathbf{u}) \\ &= h(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) - \mathbf{u}(\lambda + \mu) \\ &= h\mathbf{z} - \mathbf{u} \\ &= \mathbf{z}' \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Z nin E' -sabit düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentini

$$T_Z = \oint \|\mathbf{z}'\|^2 d\varphi$$

bağıntısını kullanarak hesaplayabiliriz. O halde $\mathbf{z}' = \lambda\mathbf{x}' + \mu\mathbf{y}'$ için

$$T_Z = \lambda^2 T_X + 2\lambda\mu T_{XY} + \mu^2 T_Y \quad (4.63)$$

bulunur. Burada T_{XY} ifadesine X ve Y noktalarının yörünge eğrilerinin **karişik kutupsal atalet momenti** denir ve

$$T_{XY} = \oint \langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle d\varphi$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $T_{XY} = T_{YX}$ özelliği geçerlidir.

Şimdi T_{XY} ifadesini; X ve Y noktalarının E -hareketli düzlemdeki koordinatlarına göre ifade edelim:

$$\begin{aligned} T_{XY} &= \oint (x_1' y_1' + x_2' y_2') d\varphi \\ &= \oint (u_1^2 + u_2^2) d\varphi + (x_1 y_1 + x_2 y_2) \oint h^2 d\varphi + (x_1 + y_1) \oint (-h u_1) d\varphi + (x_2 + y_2) \oint (-h u_2) d\varphi \end{aligned}$$

olmak üzere bu son eşitlikte (4.19) ve (4.59) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} T_{XY} &= T_O + 2h^2(t_0) \pi \nu \left[x_1 y_1 + x_2 y_2 - (x_1 + y_1) s_1 - (x_2 + y_2) s_2 \right] \\ &\quad + (x_1 + y_1) \eta_1 + (x_2 + y_2) \eta_2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

elde edilir, [8].

Özel Durum 4.23 $h \equiv 1$ olması durumunda, son eşitlikten Müller, H.R. [5] tarafından verilen (3.48) denklemi elde edilir. □

(4.61) denklemiyle verilen C noktasını O orijin noktasına taşıyalım. Buradan

$$S = (s_1, s_2) = \left(\frac{\eta_1}{2h^2(t_0) \pi \nu}, \frac{\eta_2}{2h^2(t_0) \pi \nu} \right) \quad (4.65)$$

yazılabilir. Bu durumda $T_O = T_C$ dir. O halde (4.58) ve (4.64) denklemlerinden

$$\left. \begin{aligned} T_X &= T_C + 2h^2(t_0)\pi v(x_1^2 + x_2^2) \\ T_{XY} &= T_C + 2h^2(t_0)\pi v(x_1y_1 + x_2y_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

elde edilir.

Bu son eşitlikten $X \neq C$ için

$$T_X > T_C \quad (4.67)$$

bulunur. Ayrıca (4.58) ve (4.64) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} T_X - 2T_{XY} + T_Y &= T_O + 2h^2(t_0)\pi v(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2) + 2x_1\eta_1 + 2x_2\eta_2 \\ &\quad - 2\{T_O + 2h^2(t_0)\pi v[x_1y_1 + x_2y_2 - (x_1 + y_1)s_1 - (x_2 + y_2)s_2] \\ &\quad + (x_1 + y_1)\eta_1 + (x_2 + y_2)\eta_2\} + T_O + 2h^2(t_0)\pi v(y_1^2 + y_2^2 - 2y_1s_1 - 2y_2s_2) \\ &\quad + 2y_1\eta_1 + 2y_2\eta_2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = 2h^2(t_0)\pi v[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]$$

bulunur. Bu son denklemde, X ile Y noktası arasındaki uzaklığa

$$d_{XY} = \sqrt{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]} \text{ denilirse } X \neq Y \text{ için}$$

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = 2h^2(t_0)\pi v d_{XY}^2 \quad (4.68)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten elde edilen

$$T_{XY} = \frac{1}{2}(T_X + T_Y) - h^2(t_0)\pi v d_{XY}^2 \quad (4.69)$$

ifadesi (4.63) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_Z = \lambda T_X + \mu T_Y - 2h^2(t_0)\pi v \lambda \mu d_{XY}^2 \quad (4.70)$$

elde edilir. $d_{XY} = -d_{YX}$ olması XY doğru parçasının yönlendirilmesi ile ilgili bir durumdur, [8].

Özel Durum 4.24 $h \equiv 1$ olması durumunda, son eşitlikten Müller, H.R. [5] tarafından verilen (3.50) denklemi elde edilir.

Sonuç 4.25 (4.67) denkleminde C noktasının çizmiş olduğu yörünge eğrisi, minimum kutupsal atalet momentine sahip olduğu söylenebilir, [8].

II

Teorem 4.26 $H = E / E'$ 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket esnasında sabit d_{XY} uzunluklu XY doğru parçasının uç noktaları aynı k eğrisi üzerinde bir defa dolandığında X ve Y ile doğrudan Z noktası da kapalı k_z eğrisini çizer. k ve k_z kapalı yörünge eğrilerinin kutupsal atalet momentleri arasındaki fark, hareketin homotetik oranına ve Z noktasının uç noktalara olan uzaklığına bağlıdır.

İspat.

X, Y ve Z doğrudan olduklarından

$$d_{XZ} + d_{ZY} = d_{XY}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\lambda = \frac{d_{XZ}}{d_{ZY}}, \quad \mu = \frac{d_{XZ}}{d_{XY}}$$

denilirse (4.70) denkleminde $\nu = 1$ alınarak

$$T_Z = \frac{1}{d_{XY}} (d_{ZY} T_X + d_{XZ} T_Y) - 2h^2(t_0) \pi d_{XZ} d_{ZY} \quad (4.71)$$

elde edilir. X ve Y aynı kapalı eğriyi çizdiğinden $T_X = T_Y$ dir. O halde (4.71) denkleminde

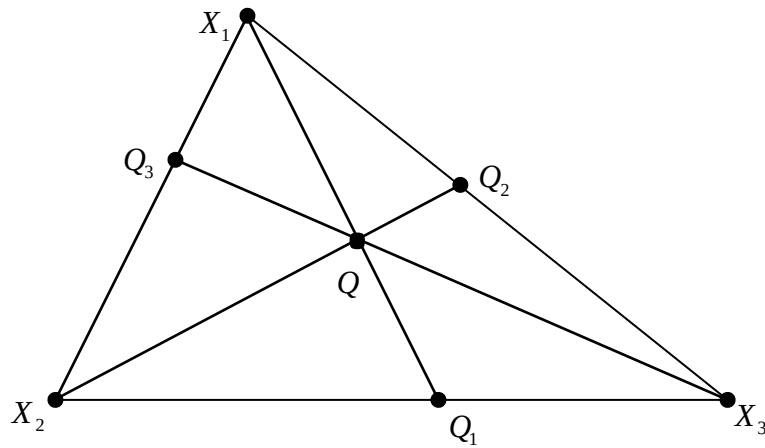
$$T_X - T_Z = 2h^2(t_0) \pi d_{XZ} d_{ZY} \quad (4.72)$$

bulunur, [8].

Özel Durum 4.27 $h \equiv 1$ olması durumunda, Müller, H.R. [5] tarafından verilen sonuç elde edilir.

III

Bu bölümde, $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareketi esnasında E -hareketli düzlemde doğrudan olmayan sabit X_1, X_2 ve X_3 noktalarının ve yine bu noktalar ile doğrudan olmayan herhangi sabit bir Q noktasının çizmiş olduğu farklı yörünge eğrilerinin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişkiyi verelim:



Şekil 4. 1 Doğrudan olmayan üç nokta ve farklı Q_i ($i=1,2,3$) noktaları

Şekil 4.1 e göre

$$\mathbf{q} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (4.73)$$

yazılabilir.

Benzer şekilde X_1, X_2, X_3 ve Q noktalarının O' orijin noktasına göre konum vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3$ ve $\mathbf{q}$ olmak üzere hareketin (4.1) denklemi ile verilen vektörel ifadesi ve (4.73) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{x}'_1 + \lambda_2 \mathbf{x}'_2 + \lambda_3 \mathbf{x}'_3 &= \lambda_1 (h\mathbf{x}_1 - \mathbf{u}) + \lambda_2 (h\mathbf{x}_2 - \mathbf{u}) + \lambda_3 (h\mathbf{x}_3 - \mathbf{u}) \\ &= h(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3) - \mathbf{u}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ &= h\mathbf{q} - \mathbf{u} \\ &= \mathbf{q}' \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Q noktasının E' -sabit düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentini

$$T_Q = \oint \|\mathbf{q}'\|^2 d\varphi$$

bağıntısını kullanarak hesaplayabiliriz. O halde $\mathbf{q}' = \lambda_1 \mathbf{x}'_1 + \lambda_2 \mathbf{x}'_2 + \lambda_3 \mathbf{x}'_3$ için

$$T_Q = \lambda_1^2 T_{X_1} + \lambda_2^2 T_{X_2} + \lambda_3^2 T_{X_3} + 2\lambda_1 \lambda_2 T_{X_1 X_2} + 2\lambda_1 \lambda_3 T_{X_1 X_3} + 2\lambda_2 \lambda_3 T_{X_2 X_3} \quad (4.74)$$

bulunur. (4.69) denklemi kullanılarak

$$T_Q = \lambda_1 T_{X_1} + \lambda_2 T_{X_2} + \lambda_3 T_{X_3} - 2h^2(t_0) \pi \nu \left(\lambda_1 \lambda_2 d_{X_1 X_2}^2 + \lambda_1 \lambda_3 d_{X_1 X_3}^2 + \lambda_2 \lambda_3 d_{X_2 X_3}^2 \right) \quad (4.75)$$

elde edilir.

Şekil 4.1 deki Q_1 noktasını göz önüne alalım. X_2, X_3 ve Q_1 noktaları

$$\mathbf{q}_1 = \mu_1 \mathbf{x}_2 + \mu_2 \mathbf{x}_3, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \quad (4.76)$$

ve X_1, Q_1 ve Q noktaları doğrudan olduğundan da

$$\mathbf{q} = \mu_3 \mathbf{x}_1 + \mu_4 \mathbf{q}_1, \quad \mu_3 + \mu_4 = 1, \quad \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R} \quad (4.77)$$

yazılabilir. Burada

$$\mu_1 = \frac{d_{Q_1 X_3}}{d_{X_2 X_3}}, \mu_2 = \frac{d_{X_2 Q_1}}{d_{X_2 X_3}}$$

ve

$$\mu_3 = \frac{d_{Q Q_1}}{d_{X_1 Q_1}}, \mu_4 = \frac{d_{X_1 Q}}{d_{X_1 Q_1}}$$

olmak üzere (4.76) denklemi (4.77) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{q} = \mu_3 \mathbf{x}_1 + \mu_4 (\mu_1 \mathbf{x}_2 + \mu_2 \mathbf{x}_3) = \mu_3 \mathbf{x}_1 + (\mu_4 \mu_1) \mathbf{x}_2 + (\mu_4 \mu_2) \mathbf{x}_3$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \mu_3 &= \frac{d_{QQ_1}}{d_{X_1Q_1}}, \\
\lambda_2 = \mu_4\mu_1 &= \frac{d_{X_1Q}d_{Q_1X_3}}{d_{X_1Q_1}d_{X_2X_3}}, \\
\lambda_3 = \mu_4\mu_2 &= \frac{d_{X_1Q}d_{X_2Q_1}}{d_{X_1Q_1}d_{X_2X_3}}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

bulunur.

Benzer şekilde Q_2 noktasını göz önüne alalım. X_3, X_1 ve Q_2 noktaları doğrudan,

$$\mathbf{q}_2 = \mu_5\mathbf{x}_3 + \mu_6\mathbf{x}_1, \quad \mu_5 + \mu_6 = 1, \quad \mu_5, \mu_6 \in \mathbb{R} \tag{4.79}$$

ve X_2, Q_2 ve Q noktaları doğrudan olduğundan da

$$\mathbf{q} = \mu_7\mathbf{x}_2 + \mu_8\mathbf{q}_2, \quad \mu_7 + \mu_8 = 1, \quad \mu_7, \mu_8 \in \mathbb{R} \tag{4.80}$$

yazılabilir. Burada

$$\mu_5 = \frac{d_{Q_2X_1}}{d_{X_3X_1}}, \mu_6 = \frac{d_{X_3Q_2}}{d_{X_3X_1}}$$

ve

$$\mu_7 = \frac{d_{QQ_2}}{d_{X_2Q_2}}, \mu_8 = \frac{d_{X_2Q}}{d_{X_2Q_2}}$$

olmak üzere (4.79) denklemi (4.80) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{q} = \mu_7\mathbf{x}_2 + \mu_8(\mu_5\mathbf{x}_3 + \mu_6\mathbf{x}_1) = (\mu_8\mu_6)\mathbf{x}_1 + \mu_7\mathbf{x}_2 + (\mu_8\mu_5)\mathbf{x}_3$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \mu_3 &= \frac{d_{X_2Q}d_{X_3Q_2}}{d_{X_2Q_2}d_{X_3X_1}}, \\
\lambda_2 = \mu_4\mu_1 &= \frac{d_{QQ_2}}{d_{X_2Q_2}}, \\
\lambda_3 = \mu_4\mu_2 &= \frac{d_{X_2Q}d_{Q_2X_1}}{d_{X_2Q_2}d_{X_3X_1}}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

bulunur.

Şimdi de Q_3 noktasını göz önüne alalım. X_1, X_2 ve Q_3 noktaları doğrudan olduğundan,

$$\mathbf{q}_3 = \mu_9 \mathbf{x}_1 + \mu_{10} \mathbf{x}_2, \quad \mu_9 + \mu_{10} = 1, \quad \mu_9, \mu_{10} \in \mathbb{R} \quad (4.82)$$

ve X_3, Q_3 ve Q noktaları doğrudan olduğundan da

$$\mathbf{q} = \mu_{11} \mathbf{x}_3 + \mu_{12} \mathbf{q}_3, \quad \mu_{11} + \mu_{12} = 1, \quad \mu_{11}, \mu_{12} \in \mathbb{R} \quad (4.83)$$

yazılabilir. Burada

$$\mu_9 = \frac{d_{Q_3 X_2}}{d_{X_1 X_2}}, \quad \mu_{10} = \frac{d_{X_1 Q_3}}{d_{X_1 X_2}}$$

ve

$$\mu_{11} = \frac{d_{Q Q_3}}{d_{X_3 Q_3}}, \quad \mu_{12} = \frac{d_{X_3 Q}}{d_{X_3 Q_3}}$$

olmak üzere (4.82) denklemi (4.83) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{q} = \mu_{11} \mathbf{x}_3 + \mu_{12} (\mu_9 \mathbf{x}_1 + \mu_{10} \mathbf{x}_2) = (\mu_{12} \mu_9) \mathbf{x}_1 + (\mu_{12} \mu_{10}) \mathbf{x}_2 + \mu_{11} \mathbf{x}_3$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_{12} \mu_9 = \frac{d_{X_3 Q} d_{Q_3 X_2}}{d_{X_3 Q_3} d_{X_1 X_2}}, \\ \lambda_2 &= \mu_{12} \mu_{10} = \frac{d_{X_3 Q} d_{X_1 Q_3}}{d_{X_3 Q_3} d_{X_1 X_2}}, \\ \lambda_3 &= \mu_{11} = \frac{d_{Q Q_3}}{d_{X_3 Q_3}} \end{aligned} \quad (4.84)$$

elde edilir. Bu takdirde (4.78), (4.81) ve (4.84) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{d_{Q Q_1}}{d_{X_1 Q_1}} = \frac{d_{X_2 Q} d_{X_3 Q_2}}{d_{X_2 Q_2} d_{X_3 X_1}} = \frac{d_{X_3 Q} d_{Q_3 X_2}}{d_{X_3 Q_3} d_{X_1 X_2}}, \\ \lambda_2 &= \frac{d_{X_1 Q} d_{Q_1 X_3}}{d_{X_1 Q_1} d_{X_2 X_3}} = \frac{d_{Q Q_2}}{d_{X_2 Q_2}} = \frac{d_{X_3 Q} d_{X_1 Q_3}}{d_{X_3 Q_3} d_{X_1 X_2}}, \\ \lambda_3 &= \frac{d_{X_1 Q} d_{X_2 Q_1}}{d_{X_1 Q_1} d_{X_2 X_3}} = \frac{d_{X_2 Q} d_{Q_2 X_1}}{d_{X_2 Q_2} d_{X_3 X_1}} = \frac{d_{Q Q_3}}{d_{X_3 Q_3}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikler, kısaca

$$\lambda_i = \frac{d_{QQ_i}}{d_{X_iQ_i}} = \frac{d_{X_jQ}d_{X_kQ_j}}{d_{X_jQ_j}d_{X_kX_i}} = \frac{d_{X_kQ}d_{Q_kX_j}}{d_{X_kQ_k}d_{X_iX_j}}, \quad (4.85)$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 1, 2, 3; 1, 2, 3$ şeklinde de ifade edilebilir. O takdirde Q_i noktaları; X_iQ ve X_jX_k doğru parçalarının kesişim noktaları olmak üzere (4.75) ve (4.85) denklemlerinden (4.70) denkleminin bir genelleştirilmesi olan

$$T_Q = \sum \frac{d_{QQ_i}}{d_{X_iQ_i}} T_{X_i} - 2h^2(t_0) \pi v \sum \left(\frac{d_{X_kQ}}{d_{X_kQ_k}} \right)^2 d_{Q_kX_j} d_{X_iQ_k} \quad (4.86)$$

Eğer X_1, X_2 ve X_3 noktaları aynı kapalı eğrileri çizerse, kutupsal atalet momentleri arasındaki fark

$$T_{X_1} - T_Q = 2h^2(t_0) \pi v \sum \left(\frac{d_{X_kQ}}{d_{X_kQ_k}} \right)^2 d_{Q_kX_j} d_{X_iQ_k} \quad (4.87)$$

bulunur.

O halde, aşağıdaki teoremi ispatsız verebiliriz, [8]:

Teorem 4.28 $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareketi esnasında E -hareketli düzlemde X_1, X_2 ve X_3 köşe noktalarına sahip bir üçgen göz önüne alalım. Üçgenin köşe noktaları E' -sabit düzlemde aynı kapalı eğriyi çizsin. Bu durumda X_1, X_2 ve X_3 noktalarının belirttiği düzlem üzerindeki herhangi bir Q noktası da E' -sabit düzlemde başka bir kapalı eğri çizer. Bu eğrilerin kutupsal atalet momentleri arasındaki fark, hareket eden üçgenin uzaklıklarına ve h homotetik oranına bağlıdır.

DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA KAPALI YÖRÜNGE EĞRİSİNİN KUTUPSAL ATALET MOMENTİ İÇİN HOLDITCH-TİPİ TEOREMLER

Tezin orijinal kısmı olan bu bölümde, Yüce, S., Düldül, M. ve Kuruoğlu, N. [7] tarafından verilen 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler altında elde edilen doğrudan olmayan üç noktanın kutupsal atalet momentleri için Holditch Tipi Teoremlerin, h homotetik oranlı homotetik hareketlerdeki karşılığını inceleyeceğiz ve $h \equiv 1$ için [7] deki sonuçları ((3.77), (3.79), (3.80), (3.81) denklemleri) bir özel durum olarak elde edeceğiz:

I

Yüce, S., Düldül, M. ve Kuruoğlu, N. [7] tarafından verilen doğrudan olmayan üç noktanın kutupsal atalet momenti için Holditch Tipi Teoremi homotetik hareketlere genelleştirelim:

X, Y ve Z doğrudan olmayan noktalarının O' orijin noktasına göre konum vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ ve $\mathbf{z}'$ olmak üzere hareketin (4.1) denklemi ile verilen vektörel ifadesi ve (3.68) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}' &= h\mathbf{z} - \mathbf{u} \\
&= h(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + c_2\mathbf{a}_2) - \mathbf{u} \\
&= \lambda(h\mathbf{x}) + \mu(h\mathbf{y}) + hc_2\mathbf{a}_2 - \mathbf{u} \\
&= \lambda(\mathbf{x}' + \mathbf{u}) + \mu(\mathbf{y}' + \mathbf{u}) + hc_2\mathbf{a}_2 - \mathbf{u} \\
&= \lambda\mathbf{x}' + \mu\mathbf{y}' + hc_2\mathbf{a}_2 + (\lambda + \mu)\mathbf{u} - \mathbf{u}, \quad \lambda + \mu = 1 \\
&= \lambda\mathbf{x}' + \mu\mathbf{y}' + hc_2\mathbf{a}_2
\end{aligned} \tag{5.1}$$

elde edilir. Şimdi, $H = E/E'$ kapalı hareket esnasında, Z ($\|\mathbf{ZM}\| = c_2, \|\mathbf{XM}\| = \mu d, \|\mathbf{MY}\| = \lambda d, \|\mathbf{OV}\| = hp, \|\mathbf{O'N}\| = hp'$) noktasının $d\varphi$ kütle elementi ile örtülmüş kapalı k_z yörünge eğrisinin T_z kutupsal atalet momentini hesaplayalım:

$$T_z = \oint \|\mathbf{z}'\|^2 d\varphi$$

olmak üzere (4.24) ve (5.1) denklemleri yardımıyla

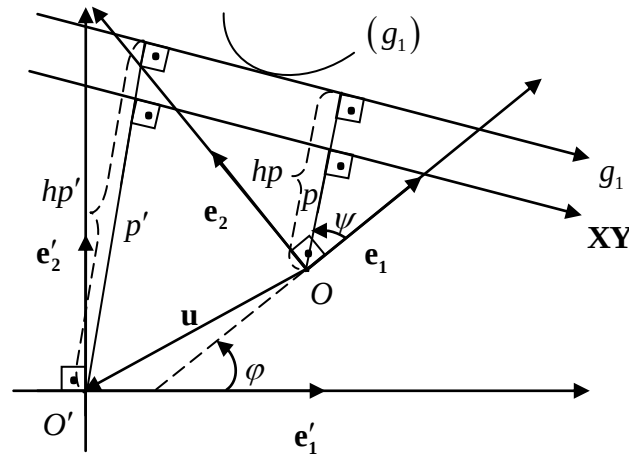
$$T_z = \lambda^2 T_x + 2\lambda\mu T_{xy} + \mu^2 T_y + 2h^2(t_0)\pi\nu c_2^2 + 2c_2 \oint \langle (\lambda\mathbf{x}' + \mu\mathbf{y}'), h\mathbf{a}_2 \rangle d\varphi \tag{5.2}$$

elde edilir.

Burada, T_{xy} (veya T_{yx}), k_x ve k_y eğrilerinin karışık kutupsal atalet momentleri olup

$$T_{xy} = T_{yx} = \oint \langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle d\varphi$$

ile tanımlanır.



Şekil 5. 1 Kapalı homotetik hareketlerde doğrunun zarf eğrisi

Şimdi, (5.2) denklemindeki

$$\oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), h \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi$$

integralini hesaplayalım:

(4.1) ve (3.73) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), h \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi &= \oint \langle \lambda (h\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \mu (h\mathbf{y} - \mathbf{u}), h \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi \\ &= \oint \langle h(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) - \mathbf{u}(\lambda + \mu), h \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi, \quad \lambda + \mu = 1 \\ &= \oint \langle h\mathbf{q} - \mathbf{u}, h \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi \\ &= \oint (h^2 \langle \mathbf{q}, \mathbf{a}_2 \rangle - h \langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_2 \rangle) d\varphi \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca (3.71), (3.72), (3.74) ve (3.75) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), h \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi &= \oint h [h(q_1 \cos \psi + q_2 \sin \psi) - u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi] d\varphi \\ &= \oint h(hp - u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi) d\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. E -düzlemindeki $\mathbf{XY}$ doğru parçasına paralel g_1 doğrusu

$$x \cos \psi + y \sin \psi = hp$$

denklemini verilsin. O halde O' noktasının g_1 doğrusuna olan uzaklığı hp' olup

$$\oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), h \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi = \oint hp' d\varphi$$

yazılabilir, (Şekil 5.1). Bu durumda g_1 doğru parçasının E' -düzlemindeki zarf eğrisinin uzunluğu L_{g_1} olmak üzere (4.37) denkleminde

$$\oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), h \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi = L_{g_1} \quad (5.3)$$

yazılabilir. Böylece bu eşitlik (5.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_Z = \lambda^2 T_X + 2\lambda\mu T_{XY} + \mu^2 T_Y + 2c_2 (h^2(t_0) \pi v c_2 + L_{g_1}) \quad (5.4)$$

elde edilir. Eğer (4.69) denklemi (5.4) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilir:

Teorem 5.1 $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında sabit d uzunluklu $\mathbf{XY}$ doğru parçasının uç noktaları, sırasıyla, k_x ve k_y kapalı eğrileri boyunca hareket ettirilirse, X ve Y noktaları ile doğrudan olmayan sabit bir Z noktası, k_z kapalı eğrisini çizer. Bu durumda k_x, k_y ve k_z kapalı yörünge eğrilerinin, sırasıyla, T_x, T_y ve T_z kutupsal atalet momentleri arasında

$$T_z = \lambda T_x + \mu T_y - 2h^2(t_0) \lambda \mu \pi v d^2 + 2c_2 (\pi v c_2 + L_{g_1}) \quad (5.5)$$

bağıntısı mevcuttur. Yani, k_z nin kutupsal atalet momenti sadece T_x ve T_y bağlı değildir, $\mathbf{XY}$ doğru parçasının uzunluğuna ve ona paralel olan g_1 doğrusunun zarf eğrisine bağlıdır.

Özel Durum 5.2 $c_2 = 0$ olması durumunda, (5.1) denkleminde Döldül, M. ve Kuruoğlu, N. [8] tarafından verilen (4.70) denklemi elde edilir.

Özel Durum 5.3 $h \equiv 1$ olması durumunda, (5.1) denkleminde Yüce, S., Döldül, M. ve Kuruoğlu, N. [7] tarafından verilen (3.78) denklemi elde edilir.

Bu durumda (5.2) denklemindeki

$$\oint \langle (\lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'), h \mathbf{a}_2 \rangle d\varphi$$

integrali; $\mathbf{XY}$ doğru parçasına paralel olan g_1 doğrusunun zarf eğrisinin uzunluğuna değil, $\mathbf{XY}$ doğru parçasının zarf eğrisinin uzunluğuna eşittir. Yani,

$$L_{g_1} = L_{\mathbf{XY}}$$

elde edilir.

II

Bu bölümde, $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında doğrudan olmayan X, Y ve Z noktalarının aynı yörünge eğrisi üzerinde hareketini inceleyeceğiz:

E -düzleminde köşeleri X, Y ve Z olan bir üçgen alalım. ΔXYZ üçgeninin köşeleri E' -düzleminde aynı kapalı eğriyi çizerler. O halde $T_x = T_y = T_z = T$ ve ΔXYZ

üçgeninin çevrel merkezi Teorem 4.21 deki $C = \left(s_1 - \frac{\eta_1}{2h^2(t_0)\pi\nu}, s_2 - \frac{\eta_2}{2h^2(t_0)\pi\nu} \right)$

noktasıdır. Hareketli çatının orijin noktası yerine C noktası alırsak,

$$\begin{cases} s_1 = \frac{\eta_1}{2h^2(t_0)\pi\nu} \\ s_2 = \frac{\eta_2}{2h^2(t_0)\pi\nu} \end{cases}$$

ve $X = (r, 0)$, $Q = (x, y) \in E$ noktaları için (4.58) denkleminde,

$$T = T_C + 2h^2(t_0)\pi\nu r^2, \quad T_Q = T_C + 2h^2(t_0)\pi\nu (x^2 + y^2)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.4 Eğer $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında doğrudan olmayan $X, Y, Z \in E$ noktaları T kutupsal atalet momente sahip aynı kapalı eğriyi çizerlerse herhangi bir $Q \in E$ noktası da T_Q kutupsal atalet momentli kapalı k_Q eğrisini çizer. Böylece T ve T_Q arasında

$$T - T_Q = 2h^2(t_0)\pi\nu (r^2 - R^2) \quad (5.6)$$

bağıntısı vardır. Burada r ; çevrel çemberin yarıçapı ve R ; Q ve çevrel çemberin merkezi arasındaki uzaklıktır.

Özel Durum 5.5 $h \equiv 1$ olması durumunda, (5.6) denkleminde Yüce, S., Döldül, M. ve Kuruoğlu, N. [7] tarafından verilen (3.79) denklemi elde edilir.

Not 5.6 Döldül, M., Kuruoğlu, N., [8] tarafından, $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında doğrudan olmayan $X, Y, Z \in E$ noktaları T

kutupsal atalet momente sahip aynı kapalı eğriyi çizerlerse herhangi bir $Q \in E$ noktası da T_Q kutupsal atalet momentli kapalı k_Q eğrisini çizmesi durumunda T ve T_Q arasındaki fark (4.87) denklemi ile verilmişti. Bu çalışmada ise $T - T_Q$ farkı; (4.87) denkleminde farklı olarak (5.6) denklemi çevrel çemberin yarıçapı ve Q nun çevrel çemberin merkezine olan uzaklığına bağlı olarak daha sade bir biçimde elde edilmiştir.

III

$H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında, doğrudan olmayan $X = (0,0)$, $Y = (b,0)$, $Z = (c,d)$ ve $Q = (x,y) \in E$ noktalarının farklı yörünge eğrilerinin kutupsal atalet momentleri için aşağıdaki en genel hal verilebilir:

Teorem 5.7 $H = E/E'$ 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında $X = (0,0)$, $Y = (b,0)$, $Z = (c,d) \in E$ noktalarının kapalı yörünge eğrilerinin kutupsal atalet momentleri, sırasıyla, T_X, T_Y ve T_Z olmak üzere herhangi bir $Q = (x,y) \in E$ noktasının kutupsal atalet momenti için

$$T_Q = \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{c-b}{bd} y\right) T_X + \left(\frac{x}{b} - \frac{cy}{bd}\right) T_Y + \frac{y}{d} T_Z + 2h^2(t_0) \pi v \left(x^2 + y^2 - bx - \frac{c^2 + d^2}{d} y + \frac{bc}{d} y\right) \quad (5.7)$$

elde edilir, (Şekil 3.13).

İspat.

Q, X, Y ve Z noktalarının çizmiş olduğu yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentleri için (4.58) denkleminde

$$T_Q = T_O + 2h^2(t_0) \pi v (x^2 + y^2 - 2xs_1 - 2ys_2) + 2x\eta_1 + 2y\eta_2,$$

$$T_X = T_O,$$

$$T_Y = T_O + 2h^2(t_0) \pi v (b^2 - 2bs_1) + 2b\eta_1,$$

ve

$$T_z = T_o + 2h^2(t_0)\pi\nu(c^2 + d^2 - 2cs_1 - 2ds_2) + 2c\eta_1 + 2d\eta_2$$

yazılabilir. Buradan cebirsel işlemler yardımıyla kolay bir şekilde (5.7) denklemi elde edilir.

Özel Durum 5.8 $h \equiv 1$ olması durumunda, (5.7) denkleminde Yüce, S., Düldül, M. ve Kuruoğlu, N. [7] tarafından verilen (3.80) denklemi elde edilir.

IV

Bu bölümde $E_i / E', (i=1,2)$ farklı iki 1-parametrelili kapalı homotetik düzlemsel hareket esnasında E_1 ve E_2 düzlemlerindeki farklı doğrudan üç noktanın çizdiği yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teorem ile verilebilir:

Teorem 5.9 $E_i / E', (i=1,2)$ aynı yönlü ve ν_i dönme sayılı 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler olsunlar. Eğer $X_i Y_i$ doğru parçalarının X_i ve Y_i noktaları, sırasıyla, k_x ve k_y kapalı yörünge eğrilerini çizerse X_i ve Y_i noktaları ile doğrudan Z_i ($|X_i Z_i| = \lambda_i a, |Z_i Y_i| = \lambda_i b, |X_i Y_i| = \lambda_i (a+b)$) noktaları da T_i kutupsal atalet momente sahip k_i kapalı yörünge eğrilerini belirler. k_i eğrilerinin T_i kutupsal atalet momentleri için

$$T_1 - T_2 = 2h^2(t_0)\pi ab(\nu_2 \lambda_2^2 - \nu_1 \lambda_1^2) \quad (5.8)$$

bağıntısı vardır. Yani, bu fark k_x ve k_y eğrilerinden bağımsızdır.

İspat.

(4.71) denklemini kullanarak

$$T_1 = \frac{\lambda_1 a T_{Y_1} + \lambda_1 b T_{X_1}}{\lambda_1 (a+b)} - 2h^2(t_0)(\lambda_1 a)(\lambda_1 b)\pi\nu_1$$

ve

$$T_2 = \frac{\lambda_2 a T_{Y_2} + \lambda_2 b T_{X_2}}{\lambda_2 (a+b)} - 2h^2(t_0)(\lambda_2 a)(\lambda_2 b)\pi v_2$$

elde edilir. X_1 ve X_2 ile Y_1 ve Y_2 aynı kapalı yörünge eğrilerini çizdiklerinden $T_{X_1} = T_{X_2}$ ve $T_{Y_1} = T_{Y_2}$ olduğundan yukarıdaki ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa (5.8) denklemi bulunur.

Özel durum 5.10 $k_x = k_y$, $v_2 = 1$ ve $\lambda_1 = 0$ (yani $k_1 = k_x$) olması durumunda kutupsal atalet momenti için

$$T_1 - T_2 = 2h^2(t_0)\pi\lambda_2^2 ab$$

elde edilir, [8].

Özel durum 5.11 $h \equiv 1$ olması durumunda, (5.8) denkleminde Yüce, S., Döldül, M. ve Kuruoğlu, N. [7] tarafından verilen (3.81) denklemi elde edilir.

Özel durum 5.12 $v_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $h \equiv 1$ olması durumunda (5.8) denkleminde Müller, H. R. [5] tarafından verilen Teorem 3.21 deki denklem elde edilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, 1-parametrelili düzlemsel kapalı homotetik hareketler altında kapalı yörünge eğrisinin kutupsal atalet momenti için Holditch-tipi teoremler verilmiştir. Hareketin “ h ” homotetik oranı $h \equiv 1$ olması durumunda ise Yüce, S., Düldül, M. ve Kuruoğlu, N. (2005) tarafından verilen sonuçlar özel hal olarak elde edilmiştir. Ayrıca, Maple 15 Programında düzlemsel hareketler ile ilgili bazı örnekler verilmiştir. Konuyla ilgili bu örneklerde farklı girdiler alınarak örneklerin kullanılabilirliği görülebilir.

- [1] Holditch, H., (1858). "Geometrical Theorem", Q. J. Pure Appl. Math., 2, 38.
- [2] Steiner, J., (1881). "Gesammelte Werke II", Berlin.
- [3] Blaschke, W. und Müller H. R., (1956). "Ebene Kinematik", Verlag Oldenbourg, München.
- [4] Spivak, M., (1965). "Calculus on Manifolds", W. A. Benjamin, New York.
- [5] Müller H. R., (1978). "Über Trägheitsmomente bei Steinerscher Massenbelegung", Abh. Braunsch. Wiss. Ges., 29, 115-119.03.
- [6] Tutar, A. and Kuruoğlu, N., (1999). "The Steiner Formula and the Holditch Theorem for the Homothetic Motions on Planar Kinematics", Mechanism and Machine Theory, 34, 1-6. York.
- [7] Yüce, S., Düldül, M. and Kuruoğlu, N., (2005). "On the Generalizations of the Polar Inertia Momentum of the Closed Curves Obtained Kinematically", Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 42 (1), 73-78.
- [8] Düldül, M. and Kuruoğlu, N., (2008). "Computation of Polar Moments of Inertia with Holditch Type Theorem", Applied Mathematics E-Notes, 8, 271-278.
- [9] Hering, L., (1983). "Sätze vom Holditch-Typ für ebene Kurven", Elem. Math., 38, 39-49.
- [10] Pottmann, H., (1985). "Holditch-Sicheln", Arch. Math., 44, 373-378.
- [11] Pottmann, H., (1986), "Zum Satz von Holditch in der euklidischen Ebene", Elem. Math., 41, 1-6.
- [12] Kuruoğlu N. and Yüce, S., (2004). "The Generalized Holditch Theorem for the Homothetic Motions on the Planar Kinematics", Czechoslovak Math. J., 54(129), 337-340.5.
- [13] Yüce, S. and Kuruoğlu N., (2007). "Holditch-Type Theorems under the closed Planar Homothetic Motions", Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 21, 105-108.

- [14] Yüce, S. and Kuruoğlu N., (2005). "A Generalization of the Holditch Theorem for the Planar Homothetic Motions", *Applications of Mathematics*, 2, 87-91.
- [15] Balcı, M., (2009). "Matematik Analiz I", Balcı Yayınları.
- [16] Gray, A., Abbena E. and Salamon, S., (2006). "Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica", Third Edition, *Studies in Advanced Mathematics*, Chapman & Hall/CRC.

DÜZLEMSEL HAREKETLERİN MAPLE ÖRNEKLERİ

Düzlemsel hareketler için aşağıda bazı örnekler Maple kodlarıyla birlikte verilmiştir.

Örnek 1 (Klasik Holditch Teoremi)

$u_1(t) = \cos t, u_2(t) = \sin t, \varphi(t) = t$ olmak üzere $B = E/E'$, 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, sabit 12br uzunluklu $\mathbf{XY}$ kirişinin $X = (-6, 0)$ ve $Y = (6, 0)$ uç noktaları E' -sabit düzlemindeki ovali tam bir defa ($\nu = 1$) kat etsin. Bu durumda $\mathbf{XY}$ kirişi üzerinde seçilen herhangi bir sabit $Z = (-2, 0)$ noktası da kapalı bir k_z eğrisi çizer.

Hareketin kartezyen denklemi,

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - \cos t) \cos t - (x_2 - \sin t) \sin t \\ x'_2 = (x_1 - \cos t) \sin t + (x_2 - \sin t) \cos t \end{cases}$$

dir. Aşağıda görüldüğü gibi Z noktasının çizdiği k_z kapalı eğrisi (kahverengi renkli eğri) ile k ovali (kırmızı renkli kapalı eğri) arasındaki bölgenin (Holditch Halkası) alanı: $F - F_z = \|\mathbf{XZ}\| * \|\mathbf{ZY}\| * \pi = 4 * 8 * \pi = 32\pi$ ve bu iki kapalı eğrinin kutupsal atalet momentleri arasındaki fark: $T - T_z = 2 * \|\mathbf{XZ}\| * \|\mathbf{ZY}\| * \pi = 2 * 4 * 8 * \pi = 64\pi$ dir.

> **restart:**

> **with(plottools):with(plots):**

> **F:= proc(t)**

```

>plots[display](plottools[line]([-6*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),-6*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)],[6*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),6*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)],color=black,thickness=2)):

>end proc:

>k1:=animate(F,[t],t=0..2*Pi,background=plot([6*cos(t)-
0*sin(t)-cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),6*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),
t=0..2*Pi],thickness=2,numpoints=1000,scaling=CONSTRAINED))
:

>k2:=animate( textplot,[[6*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),6*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)],`Y`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k3:=animate( textplot,[[6*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),-6*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)],`X`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

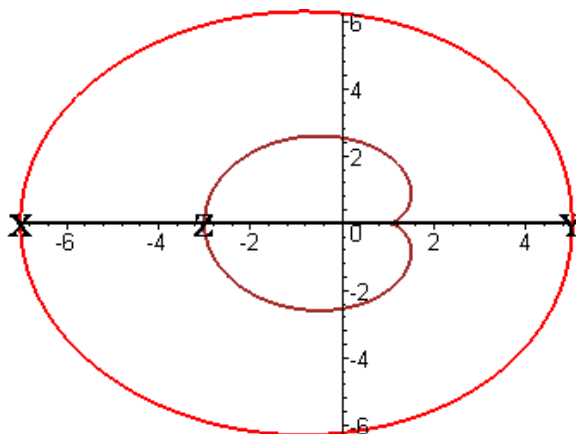
>k4:=animate(plot,[[2*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),-2*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=brown],A=0..0+2*Pi,color=brown,
thickness=2):

>k5:=animate( textplot,[[2*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),-2*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)],`Z`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>

>display(k1,k2,k3,k4,k5);

```



>

```

> restart:
> Alan:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G;
> G:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**
2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> print(F=G) ;
> end:
> Alan(6,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;
>

```

$$F = 38\pi$$

```

> restart:
> Alan:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G;
> G:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(z1**2+z2**
2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> print(F[Z]=G) ;
> end:
> Alan(-2,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;
>

```

$$F_z = 6\pi$$

```

> restart:
> Alan:=proc(x1,x2,z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G1,G2;
> G1:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**
2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> G2:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(z1**2+z2**
2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*

```

```

Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
>print(F-F[Z]=G1-G2);
>end:
>Alan(-6,0,-2,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>


$$F - F_z = 32\pi$$

>
>restart:
>Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H;
>H:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
>print(T=H);
>end:
>Atalet_Momenti(-6,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);


$$T = 74\pi$$

>
>restart:
>Atalet_Momenti:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H;
>H:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(z1**2+z2**2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
>print(T[Z]=H);
>end:
>Atalet_Momenti(-2,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>


$$T_z = 10\pi$$

>
>restart:
>Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local
T,H1,H2;
>H1:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*

```



```

Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
> H2:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(z1**2+z2**2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
> print(T-T[Z]=H1-H2);
> end:
> Atalet_Momenti(-6,0,-2,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

```

$$T - T_z = 64\pi$$

Örnek 2 (Doğrudaş Üç Nokta İçin Holditch-Tipi Teoremi)

$u_1(t) = \cos t, u_2(t) = \sin t, \varphi(t) = t$ olmak üzere $B = E/E'$, 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, doğrudaş XY parçasının $X = (2,0)$, $Y = (5,0)$ uç noktaları, sırasıyla, aşağıdaki şekilde olduğu gibi E' -sabit düzleminde kırmızı ve yeşil renkli kapalı eğrilerini çizdiğinde X ve Y noktaları ile doğrudaş bir $Z = (3,0)$ noktası da ($\|XZ\| = a = 1, \|ZY\| = b = 2$) mavi renkli kapalı eğriyi çizecektir.

Hareketin kartezyen denklemi,

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - \cos t) \cos t - (x_2 - \sin t) \sin t \\ x'_2 = (x_1 - \cos t) \sin t + (x_2 - \sin t) \cos t \end{cases}$$

dir. Aşağıda görüldüğü gibi, öncelikle F_x, F_y ve F_z tek tek hesaplandı ve daha sonra aşağıdaki bağıntının varlığı gösterildi,

$$F_z = \frac{aF_y + bF_x}{a+b} - \pi vab = \frac{1*27\pi + 2*6\pi}{1+2} - \pi*1*2 = 11\pi. \text{ Benzer şekilde } T_x, T_y \text{ ve } T_z$$

tek tek hesaplandı ve daha sonra aşağıdaki bağıntının varlığı gösterildi,

$$T_z = \frac{aT_y + bT_x}{a+b} - 2\pi vab = \frac{1*52\pi + 2*10\pi}{1+2} - 2*\pi*1*2 = 20\pi.$$

```

> restart:
> with(plottools):with(plots):
> F := proc(t)

```

```

>plots[display](plottools[line]([2*cos(t)-0*sin(b)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),2*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], [5*cos(t)-0*sin(b)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),5*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)],color=black,thickness=2)):

>end proc:

>k1:=animate(F,[t],t=0..2*Pi):

>k2:=animate(plot,[ [2*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),2*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=red],A=0..0+2*Pi,color=red,thic
kness=2,scaling=CONSTRAINED):

>k3:=animate( textplot,[ [2*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),2*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`X`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k4:=animate(plot,[ [3*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),3*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=blue],A=0..0+2*Pi,color=blue,th
ickness=2):

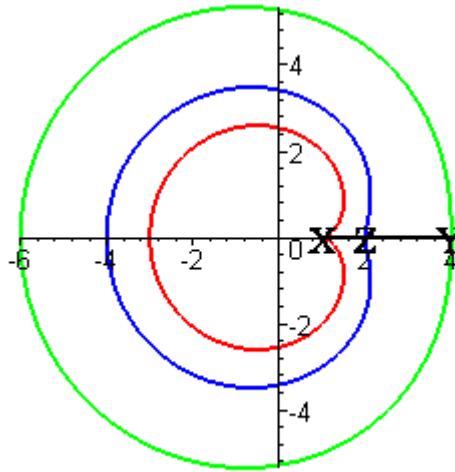
>k5:=animate( textplot,[ [3*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),3*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Z`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k6:=animate(plot,[ [5*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),5*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=green],A=0..0+2*Pi,color=green,
thickness=2):

>k7:=animate( textplot,[ [5*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),5*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Y`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>display(k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7);

```



```
>
> restart:
> Alan:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G1;
> G1:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**
2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n)))):
> print(F[X]=G1);
> end:
> Alan(2,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>
```

$$F_x = 6\pi$$

```
>
> restart:
> Alan:=proc(y1,y2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G2;
> G2:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y1**2+y2**
2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n)))):
> print(F[Y]=G2);
> end:
> Alan(5,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
```

$$F_y = 27\pi$$

```

>
> restart:
> Alan:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G3;
> G3:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(z1**2+z2**
2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n)))):
> print(F[Z]=G3);
> end:
> Alan(3,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>

```

$$F_z = 11\pi$$

```

>
> restart:
> Alan:=proc(x1,x2,y1,y2,z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local
F,G1,G2,G3;
> G1:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**
2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n)))):
> G2:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y1**2+y2**
2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n)))):
> G3:=(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2)*G2+sqrt((z1-y1)**2+(z2-
y2)**2)*G1)/(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2)+sqrt((z1-
y1)**2+(z2-y2)**2))-Pi*n*sqrt((x1-z1)**2+(x2-
z2)**2)*sqrt((z1-y1)**2+(z2-y2)**2):
> print(F[Z]=G3);
> end:
> Alan(2,0,5,0,3,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

```

$$F_z = 11\pi$$

```

>

```

```

> restart:

> Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H1;

> H1:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :

> print(T[X]=H1) ;

> end:

> Atalet_Momenti(2,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;

>

```

$$T_X = 10\pi$$

```

>

> restart:

> Atalet_Momenti:=proc(y1,y2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H2;

> H2:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y1**2+y2**2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :

> print(T[Y]=H2) ;

> end:

> Atalet_Momenti(5,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;

>

```

$$T_Y = 52\pi$$

```

>

> restart:

> Atalet_Momenti:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H3;

> H3:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(z1**2+z2**2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :

> print(T[Z]=H3) ;

> end:

> Atalet_Momenti(3,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;

>

```

$$T_Z = 20\pi$$

```

>
> restart:
> Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,y1,y2,z1,z2,u1,u2,b,n,c,d)
local F,H1,H2,H3;
> H1:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> H2:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y1**2+y2**2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> H3:=(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2)*H2+sqrt((z1-y1)**2+(z2-
y2)**2)*H1)/(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2)+sqrt((z1-
y1)**2+(z2-y2)**2))-2*Pi*n*sqrt((x1-z1)**2+(x2-
z2)**2)*sqrt((z1-y1)**2+(z2-y2)**2) :
> print(T[Z]=H3) ;
> end:
> Atalet_Momenti(2,0,5,0,3,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;
>

```

$$T_z = 20\pi$$

Örnek 3 (Doğrudaş Olmayan Üç Nokta İçin Holditch-Tipi Teoremler)

$u_1(t) = \cos t, u_2(t) = \sin t, \varphi(t) = t$ olmak üzere $B = E/E'$, 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, sabit $d = 10$ br uzunluklu XY parçasının $X = (-6, 0)$ ve $Y = (4, 0)$ uç noktaları, sırasıyla, aşağıdaki şekilde olduğu gibi E' – sabit düzleminde kırmızı ve mavi renkli kapalı eğriler boyunca hareket ettirilirse, X ve Y noktaları ile doğrudaş olmayan $Z = (0, 4)$ noktası da yeşil renkli kapalı eğriyi çizecektir.

Hareketin kartezyen denklemi,

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - \cos t) \cos t - (x_2 - \sin t) \sin t \\ x'_2 = (x_1 - \cos t) \sin t + (x_2 - \sin t) \cos t \end{cases}$$

dir. Aşağıda görüldüğü gibi, öncelikle F_x, F_y ve F_z tek tek hesaplandı ve daha sonra aşağıdaki bağıntının varlığı gösterildi,

$$F_z = \frac{aF_y + bF_x}{a+b} + (c^2 - ab)\pi\nu - cL_{AB} = \frac{6*18\pi + 4*38\pi}{6+4} + (4^2 - 6*4)\pi*1 - 4*0 = 18\pi.$$

Benzer şekilde T_x, T_y ve T_z tek tek hesaplandı ve daha sonra aşağıdaki bağıntının varlığı gösterildi,

$$\begin{aligned} T_z &= \frac{aT_y + bT_x}{a+b} + 2(c^2 - ab)\pi\nu - 2cL_{AB} \\ &= \frac{6*34\pi + 4*74\pi}{6+4} + 2*(4^2 - 6*4)*\pi*1 - 2*4*0 \\ &= 34\pi. \end{aligned}$$

> restart:

> with(plottools):with(plots):

> F := proc(t)

```
> plots[display](plottools[line]([0*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t), 0*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], [0*cos(t)-4*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t), 0*sin(t)+4*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], color=black, thickness=2)):
```

> end proc:

> k1:=animate(F, [t], t=0..2*Pi, scaling=CONSTRAINED):

> G:= proc(t)

```
> plots[display](plottools[line]([-6*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t), -6*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], [4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t), 4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], color=black, thickness=2)):
```

> end proc:

> k2:=animate(G, [t], t=0..2*Pi):

```
> k3:=animate(plot, [[-6*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t), -6*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t), t=0..A], color=red], A=0..0+2*Pi, color=red, thic
kness=2):
```

```
> k4:=animate(textplot, [[-6*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t), -6*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], `X`,
font=[TIMES, ROMAN, 15]]], t=0..2*Pi):
```

```
> k5:=animate(plot, [[4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t), 4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
```

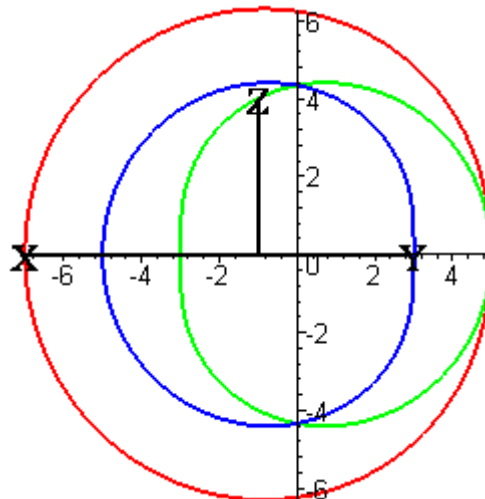
```
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=blue],A=0..0+2*Pi,color=blue,thickness=2):
```

```
>k6:=animate( textplot,[[4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Y`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):
```

```
>k7:=animate(plot,[[0*cos(t)-4*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),0*sin(t)+4*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=green],A=0..0+2*Pi,color=green,
thickness=2):
```

```
>k8:=animate( textplot,[[0*cos(t)-4*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),0*sin(t)+4*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Z`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):
```

```
>display(k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8);
```



```
>
```

```
>restart:
```

```
>Alan:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G1;
```

```
>G1:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**
2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
```

```
>print(F[X]=G1);
```

```
>end:
```

```
>Alan(-6,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
```

```
>
```


$$F_x = 38\pi$$

>

> restart:

> Alan:=proc(y1,y2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G2;

> G2:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y1**2+y2**2-2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))-2*y2*(int((u2-(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> print(F[Y]=G2);

> end:

> Alan(4,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

$$F_y = 18\pi$$

>

> restart:

> Alan:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G3;

> G3:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(z1**2+z2**2-2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))-2*z2*(int((u2-(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> print(F[Z]=G3);

> end:

> Alan(0,4,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

>

$$F_z = 18\pi$$

>

> restart:

> Alan:=proc(x1,x2,y1,y2,z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G1,G2,G3,k;

> G1:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**2-2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))-2*x2*(int((u2-(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

```

> G2:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y1**2+y2**
2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
> k:=abs(((y2-x2)*z1+(x1-y1)*z2-x1*(y2-x2)+x2*(y1-
x1))/(sqrt((y2-x2)**2+(x1-y1)**2))):
> G3:=(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2-k**2)*G2+sqrt((y1-
z1)**2+(y2-z2)**2-k**2)*G1)/(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2-
k**2)+sqrt((y1-z1)**2+(y2-z2)**2-k**2))-Pi*n*sqrt((x1-
z1)**2+(x2-z2)**2-k**2)*sqrt((y1-z1)**2+(y2-z2)**2-
k**2)+(k**2)*Pi*n-k*int(u1,t=0..2*Pi):
> print(F[Z]=G3);
> end:
> Alan(-6,0,4,0,0,4,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>

```

$$F_z = 18\pi$$

```

>
> restart:
> Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H1;
> H1:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
> print(T[X]=H1);
> end:
> Atalet_Momenti(-6,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>

```

$$T_x = 74\pi$$

```

>
> restart:
> Atalet_Momenti:=proc(y1,y2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H2;
> H2:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y1**2+y2**2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
> print(T[Y]=H2);

```

> end:

> Atalet_Momenti(4,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

>

$$T_y = 34\pi$$

>

> restart:

> Atalet_Momenti:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H3;

> H3:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(z1**2+z2**2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> print(T[Z]=H3);

> end:

> Atalet_Momenti(0,4,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

>

$$T_z = 34\pi$$

>

> restart:

> Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,y1,y2,z1,z2,u1,u2,b,n,c,d)
local F,H1,H2,H3,k;

> H1:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> H2:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y1**2+y2**2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> k:=abs(((y2-x2)*z1+(x1-y1)*z2-x1*(y2-x2)+x2*(y1-
x1))/(sqrt((y2-x2)**2+(x1-y1)**2))):

> H3:=(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2-k**2)*H2+sqrt((y1-
z1)**2+(y2-z2)**2-k**2)*H1)/(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2-
k**2)+sqrt((y1-z1)**2+(y2-z2)**2-k**2))-2*Pi*n*sqrt((x1-
z1)**2+(x2-z2)**2-k**2)*sqrt((y1-z1)**2+(y2-z2)**2-
k**2)+2*(k**2)*Pi*n-2*k*int(u1,t=0..2*Pi):

> print(T[Z]=H3);

> end:

> Atalet_Momenti(-6,0,4,0,0,4,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

>

$$T_z = 34\pi$$

Örnek 4 (Doğrudaş Olmayan Üç Nokta Aynı Kapalı Eğriyi Çizmesi Durumunda Holditch-Tipi Teorem)

$u_1(t) = \cos t, u_2(t) = \sin t, \varphi(t) = t, S = (0,0)$ Steiner noktası olmak üzere $B = E/E', 1$ -parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, doğrudaş olmayan $X = (4,0), Y = (-4\cos(\pi/9), 4\sin(\pi/9)), Z = (-4,0) \in E$ noktaları aşağıdaki şekilde olduğu gibi, sırasıyla, kırmızı, mavi, yeşil renkli aynı F alanına sahip k eğrisini çizerlerse herhangi bir $Q = (6,2)$ noktası da F_Q yörünge alanına sahip sarı renkli kapalı k_Q eğrisini çizecektir.

Hareketin kartezyen denklemi,

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - \cos t) \cos t - (x_2 - \sin t) \sin t \\ x'_2 = (x_1 - \cos t) \sin t + (x_2 - \sin t) \cos t \end{cases}$$

dir. Aşağıda görüldüğü gibi, öncelikle F_x, F_y, F_z ve F_Q tek tek hesaplandı ve daha sonra aşağıdaki bağıntının varlığı gösterildi,

$$F_z = |\pi v(r^2 - R^2)| = |\pi * 1 * [4^2 - ((6-2)^2 + (2-0)^2)]| = 24\pi.$$

Benzer şekilde T_x, T_y, T_z ve T_Q tek tek hesaplandı ve daha sonra aşağıdaki bağıntının varlığı gösterildi,

$$T_z = |2\pi v(r^2 - R^2)| = |2 * \pi * 1 * [4^2 - ((6-2)^2 + (2-0)^2)]| = 48\pi.$$

> **restart:**

> **with(plottools):with(plots):**

> **F:= proc(t)**

> **plots[display](plottools[line]([4*cos(t)-0*sin(t)-cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t), 4*sin(t)+0*cos(t)-cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], [4*cos(t+8*Pi/9)-0*sin(t+8*Pi/9)-**

```

cos(t+8*Pi/9)*cos(t+8*Pi/9)+sin(t+8*Pi/9)*sin(t+8*Pi/9),4*
sin(t+8*Pi/9)+0*cos(t+8*Pi/9)-cos(t+8*Pi/9)*sin(t+8*Pi/9)-
sin(t+8*Pi/9)*cos(t+8*Pi/9)],color=black,thickness=2)):

>end proc:

>k1:=animate(F,[t],t=0..2*Pi,scaling=CONSTRAINED):

>G:= proc(t)

>plots[display](plottools[line]([4*cos(t+8*Pi/9)-
0*sin(t+8*Pi/9)-
cos(t+8*Pi/9)*cos(t+8*Pi/9)+sin(t+8*Pi/9)*sin(t+8*Pi/9),4*
sin(t+8*Pi/9)+0*cos(t+8*Pi/9)-cos(t+8*Pi/9)*sin(t+8*Pi/9)-
sin(t+8*Pi/9)*cos(t+8*Pi/9)],[-4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),-4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)],color=black,thickness=2)):

>end proc:

>k2:=animate(G,[t],t=0..2*Pi):

>H:= proc(t)

>plots[display](plottools[line]([-4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),-4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], [4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)],color=black,thickness=2)):

>end proc:

>k3:=animate(H,[t],t=0..2*Pi):

>k4:=animate(plot,[ [4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=red],A=0..0+2*Pi,color=red,thic
kness=2):

>k5:=animate( textplot,[ [4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`X`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k6:=animate(plot,[ [4*cos(t+8*Pi/9)-0*sin(t+8*Pi/9)-
cos(t+8*Pi/9)*cos(t+8*Pi/9)+sin(t+8*Pi/9)*sin(t+8*Pi/9),4*
sin(t+8*Pi/9)+0*cos(t+8*Pi/9)-cos(t+8*Pi/9)*sin(t+8*Pi/9)-
sin(t+8*Pi/9)*cos(t+8*Pi/9),t=0..A],color=magenta],A=0..0+2
*Pi,color=magenta,thickness=2):

>k7:=animate( textplot,[ [4*cos(t+8*Pi/9)-0*sin(t+8*Pi/9)-
cos(t+8*Pi/9)*cos(t+8*Pi/9)+sin(t+8*Pi/9)*sin(t+8*Pi/9),4*
sin(t+8*Pi/9)+0*cos(t+8*Pi/9)-cos(t+8*Pi/9)*sin(t+8*Pi/9)-
sin(t+8*Pi/9)*cos(t+8*Pi/9),`Y`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

```

```

>k8:=animate(plot,[[ -4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),-4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=green],A=0..0+2*Pi,color=green,
thickness=2):

>k9:=animate( textplot,[[ -4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),-4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Z`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>
s1:=simplify(int(cos(t)+(diff(sin(t),t)/diff(t,t)),t=0..2*P
i)/(2*Pi*1)):

>s2:=simplify(int(sin(t)-
(diff(cos(t),t)/diff(t,t)),t=0..2*Pi)/(2*Pi*1)):

>k10:=animate(plot,[[s1*cos(t)-s2*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),s1*sin(t)+s2*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=brown],A=0..0+2*Pi,color=brown,
thickness=2):

>k11:=animate( textplot,[[s1*cos(t)-s2*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),s1*sin(t)+s2*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`S`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

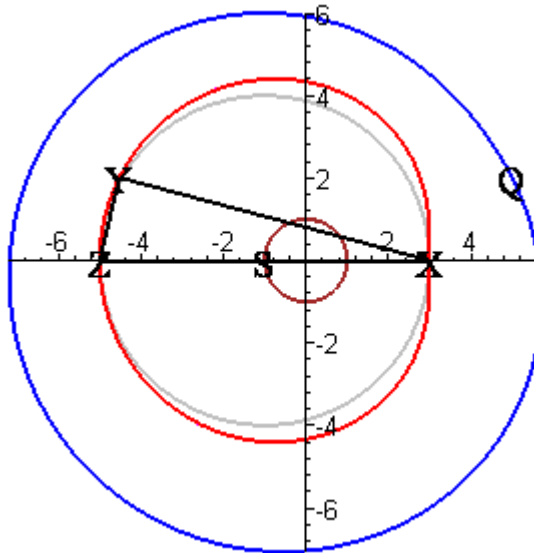
>k12:=animate(plot,[[6*cos(t)-2*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),6*sin(t)+2*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=blue],A=0..0+2*Pi,color=blue,th
ickness=2):

>k13:=animate( textplot,[[6*cos(t)-2*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),6*sin(t)+2*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Q`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k14:=circle([-1,0],4,color=grey):

>
>
> display(k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8,k9,k10,k11,k12,k13,k14);

```



>

> restart:

> Alan:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G1;

> G1:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**2-2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))-2*x2*(int((u2-(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> print(F[X]=G1);

> end:

> Alan(4,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

>

$$F_X = 18\pi$$

>

> restart:

> Alan:=proc(y1,y2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G2;

> G2:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y1**2+y2**2-2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))-2*y2*(int((u2-(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> print(F[Y]=simplify(G2));

> end:

```
> Alan(-
4*cos(1/9*Pi), 4*sin(1/9*Pi), cos(t), sin(t), t, 1, 0, 2*Pi);
```

$$F_Y = 18\pi$$

```
> restart:
```

```
> Alan:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G3;
> G3:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(z1**2+z2**
2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n)))):
> print(F[Z]=G3);
> end:
> Alan(-4,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>
```

$$F_Z = 18\pi$$

```
>
```

```
> restart:
```

```
> Alan:=proc(q1,q2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G4;
> G4:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(q1**2+q2**
2-
2*q1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*q2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n)))):
> print(F[Q]=G4);
> end:
> Alan(6,2,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
```

$$F_Q = 42\pi$$

```
>
```

```
> restart:
```

```
> Alan:=proc(x1,x2,q1,q2,u1,u2,b,n,c,d) local F,s1,s2,G5;
>
s1:=simplify(int(cos(t)+(diff(sin(t),t)/diff(t,t)),t=0..2*P
i)/(2*Pi*n)):
> s2:=simplify(int(sin(t)-
(diff(cos(t),t)/diff(t,t)),t=0..2*Pi)/(2*Pi*n)):
>
```



```
> G5:=abs(Pi*n*((x1-s1)**2+(x2-s2)**2)-((q1-s1)**2+(q2-s2)**2)):

```

```
> print(F-F[Q]=G5);

```

```
> end:

```

```
> Alan(-4,0,6,2,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

```

$$F - F_Q = 24\pi$$

```
>

```

```
> restart:

```

```
> Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H1;

```

```
> H1:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

```

```
> print(T[X]=H1);

```

```
> end:

```

```
> Atalet_Momenti(4,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

```

```
>

```

$$T_x = 34\pi$$

```
>

```

```
> restart:

```

```
> Atalet_Momenti:=proc(y1,y2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H2;

```

```
> H2:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y1**2+y2**2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

```

```
> print(T[Y]=simplify(H2));

```

```
> end:

```

```
> Atalet_Momenti(-
4*cos(1/9*Pi),4*sin(1/9*Pi),cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

```

$$T_y = 34\pi$$

```
> restart:

```

```
> Atalet_Momenti:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H3;

```

```
> H3:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(z1**2+z2**2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

```

```
> print(T[Z]=H3) ;
```

```
> end:
```

```
> Atalet_Momenti(-4,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;
```

```
>
```

$$T_z = 34\pi$$

```
>
```

```
> restart:
```

```
> Atalet_Momenti:=proc(q1,q2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H4;
```

```
> H4:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(q1**2+q2**2-  
2*q1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*  
Pi*n))-2*q2*(int((u2-  
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
```

```
> print(T[Q]=H4) ;
```

```
> end:
```

```
> Atalet_Momenti(6,2,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;
```

```
>
```

$$T_Q = 82\pi$$

```
>
```

```
> restart:
```

```
> Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,q1,q2,u1,u2,b,n,c,d) local  
F,s1,s2,H5;
```

```
>
```

```
s1:=simplify(int(cos(t)+(diff(sin(t),t)/diff(t,t)),t=0..2*P  
i)/(2*Pi*n)):
```

```
> s2:=simplify(int(sin(t)-  
(diff(cos(t),t)/diff(t,t)),t=0..2*Pi)/(2*Pi*n)):
```

```
> H5:=abs(2*Pi*n*((x1-s1)**2+(x2-s2)**2)-((q1-s1)**2+(q2-  
s2)**2)):
```

```
> print(T-T[Q]=H5) ;
```

```
> end:
```

```
> Atalet_Momenti(-4,0,6,2,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;
```

```
>
```

$$T - T_Q = 48\pi$$

Örnek 5 (Doğrudaş Olmayan Üç Nokta Farklı Kapalı Eğriler Çizmesi Durumunda Holditch-Tipi Teorem)

$u_1(t) = \cos t, u_2(t) = \sin t, \varphi(t) = t$, olmak üzere $B = E/E'$, 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, doğrudaş olmayan $X = (0,0), Y = (7,0), Z = (2,4) \in E$ noktaları aşağıdaki şekilde olduğu gibi, sırasıyla, kırmızı, mavi, yeşil renkli farklı eğrileri çizerlerse herhangi bir $Q = (9,1)$ noktası da F_Q yörünge alanına sahip kahve renkli kapalı k_Q eğrisini çizecektir.

Hareketin kartezyen denklemi,

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - \cos t) \cos t - (x_2 - \sin t) \sin t \\ x'_2 = (x_1 - \cos t) \sin t + (x_2 - \sin t) \cos t \end{cases}$$

dir. Aşağıda görüldüğü gibi, öncelikle F_x, F_y, F_z ve F_Q tek tek hesaplandı ve daha sonra aşağıdaki bağıntının varlığı gösterildi,

$$\begin{aligned} F_Q &= \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{c-b}{bd} y\right) F_x + \left(\frac{x}{b} - \frac{cy}{bd}\right) F_y + \frac{y}{d} F_z + \left(x^2 + y^2 - bx - \frac{c^2 + d^2}{d} y + \frac{bc}{d} y\right) \pi v \\ &= \left(1 - \frac{9}{7} + \frac{2-7}{7*4} * 1\right) 2\pi + \left(\frac{9}{7} - \frac{2*1}{7*4}\right) 51\pi + \frac{1}{4} 22\pi \\ &\quad + \left(9^2 + 1^2 - 7*9 - \frac{2^2 + 4^2}{4} * 1 + \frac{7*2}{4} * 1\right) \pi * 1 \\ &= 84\pi \end{aligned}$$

Benzer şekilde T_x, T_y, T_z ve T_Q tek tek hesaplandı ve daha sonra aşağıdaki bağıntının varlığı gösterildi,

$$\begin{aligned} T_Q &= \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{c-b}{bd} y\right) T_x + \left(\frac{x}{b} - \frac{cy}{bd}\right) T_y + \frac{y}{d} T_z + 2\pi v \left(x^2 + y^2 - bx - \frac{c^2 + d^2}{d} y + \frac{bc}{d} y\right) \\ &= \left(1 - \frac{9}{7} + \frac{2-7}{7*4} * 1\right) 2\pi + \left(\frac{9}{7} - \frac{2*1}{7*4}\right) 100\pi + \frac{1}{4} 42\pi \\ &\quad + 2 * \pi * 1 \left(9^2 + 1^2 - 7*9 - \frac{2^2 + 4^2}{4} * 1 + \frac{7*2}{4} * 1\right) \\ &= 166\pi \end{aligned}$$

```

> restart:

> with(plottools):with(plots):

> F:= proc(t)

> plots[display](plottools[line]([0*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),0*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], [2*cos(t)-4*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),2*sin(t)+4*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], color=black, thickness=2)):

> end proc:

> k1:=animate(F, [t], t=0..2*Pi, scaling=CONSTRAINED):

> G:=proc(t)

> plots[display](plottools[line]([2*cos(t)-4*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),2*sin(t)+4*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], [7*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),7*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], color=black, thickness=2)):

> end proc:

> k2:=animate(G, [t], t=0..2*Pi):

> H:= proc(t)

> plots[display](plottools[line]([7*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),7*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], [0*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),0*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], color=black, thickness=2)):

> end proc:

> k3:=animate(H, [t], t=0..2*Pi):

> k4:=animate(plot, [[0*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),0*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t), t=0..A], color=red], A=0..0+2*Pi, color=red, thic
kness=2):

> k5:=animate( textplot, [[0*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),0*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t), `X`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]], t=0..2*Pi):

> k6:=animate(plot, [[7*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),7*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t), t=0..A], color=blue], A=0..0+2*Pi, color=blue, th
ickness=2):

```

```

>k7:=animate( textplot,[[7*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),7*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Y`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k8:=animate(plot,[[2*cos(t)-4*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),2*sin(t)+4*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=green],A=0..0+2*Pi,color=green,
thickness=2):

>k9:=animate( textplot,[[2*cos(t)-4*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),2*sin(t)+4*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Z`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k10:=animate(plot,[[9*cos(t)-1*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),9*sin(t)+1*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=brown],A=0..0+2*Pi,color=brown,
thickness=2):

>k11:=animate( textplot,[[9*cos(t)-1*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),8*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Q`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

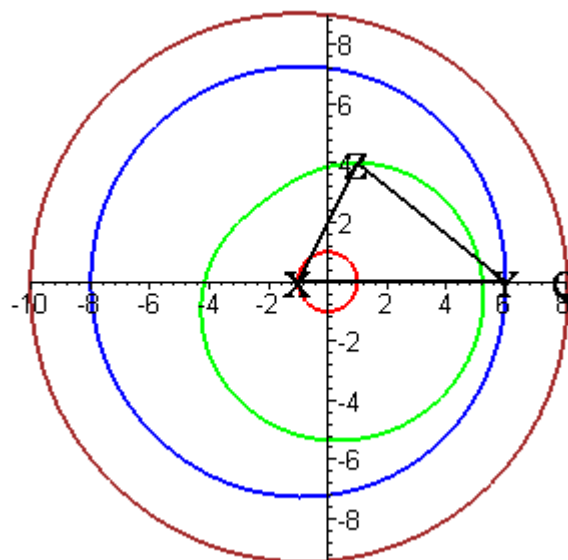
>

>

>display(k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8,k9,k10,k11);

>

```



```

> restart:
> Alan:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G1;
> G1:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**
2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
> print(F[X]=G1);
> end:
> Alan(0,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>

```

$$F_x = 2\pi$$

```

>
> restart:
> Alan:=proc(y1,y2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G2;
> G2:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y1**2+y2**
2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
> print(F[Y]=G2);
> end:
> Alan(7,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

```

$$F_y = 51\pi$$

```

> restart:
> Alan:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G3;
> G3:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(z1**2+z2**
2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
> print(F[Z]=G3);
> end:
> Alan(2,4,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>

```

$$F_z = 22\pi$$

>

> restart:

> Alan:=proc(q1,q2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G4;

> G4:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(q1**2+q2**2-2*q1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))-2*q2*(int((u2-(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> print(F[Q]=G4);

> end:

> Alan(9,1,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

$$F_Q = 84\pi$$

>

> restart:

> Alan:=proc(x1,x2,y1,y2,z1,z2,q1,q2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G1,G2,G3,G5;

> G1:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**2-2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))-2*x2*(int((u2-(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> G2:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y1**2+y2**2-2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))-2*y2*(int((u2-(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> G3:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(z1**2+z2**2-2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))-2*z2*(int((u2-(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> G5:=(1-q1/y1+((z1-y1)/(y1*z2))*q2)*G1+(q1/y1-(z1*q2)/(y1*z2))*G2+(q2/z2)*G3+(q1**2+q2**2-y1*q1+(-z1**2*q2-z2**2*q2+y1*z1*q2)/z2)*Pi*n:

> print(F[Q]=G5);

```

> end:
> Alan(0,0,7,0,2,4,9,1,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

$$F_Q = 84\pi$$

>
> restart:
> Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H1;
> H1:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> print(T[X]=H1);
> end:
> Atalet_Momenti(0,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>

$$T_X = 2\pi$$

>
> restart:
> Atalet_Momenti:=proc(y1,y2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H2;
> H2:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y1**2+y2**2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> print(T[Y]=H2);
> end:
> Atalet_Momenti(7,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

$$T_Y = 100\pi$$

> restart:
> Atalet_Momenti:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H3;
> H3:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(z1**2+z2**2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> print(T[Z]=H3);
> end:
> Atalet_Momenti(2,4,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

```


>

$$T_z = 42\pi$$

>

> restart:

> Atalet_Momenti:=proc(q1,q2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H4;

> H4:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(q1**2+q2**2-
2*q1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*q2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> print(T[Q]=H4);

> end:

> Atalet_Momenti(9,1,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

>

$$T_Q = 166\pi$$

>

> restart:

>

Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,y1,y2,z1,z2,q1,q2,u1,u2,b,n,c,d)
local F,H1,H2,H3,H5;

> H1:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> H2:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y1**2+y2**2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> H3:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(z1**2+z2**2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):

> H5:=(1-q1/y1+((z1-y1)/(y1*z2))*q2)*H1+(q1/y1-
(z1*q2)/(y1*z2))*H2+(q2/z2)*H3+2*Pi*n*(q1**2+q2**2-y1*q1+(-
z1**2*q2-z2**2*q2+y1*z1*q2)/z2):

> print(T[Q]=H5);

> end:

> Atalet_Momenti(0,0,7,0,2,4,9,1,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);

>

$$T_Q = 166\pi$$

Örnek 6 (Farklı Doğrudaş Üç Noktanın Farklı Hareketleri İçin Holditch-Tipi Teorem)

$u_1(t) = \cos t, u_2(t) = \sin t, \varphi(t) = t$, olmak üzere $E_i/E', (i=1,2)$ aynı yönlü ν_i dönme 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler olsunlar.

Hareketin kartezyen denklemi,

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - \cos t) \cos t - (x_2 - \sin t) \sin t \\ x'_2 = (x_1 - \cos t) \sin t + (x_2 - \sin t) \cos t \end{cases}$$

dir. Eğer **XY** doğru parçasının $X=(2,0), Y=(4,0)$ uç noktaları, sırasıyla, aşağıdaki şekilde olduğu için, kırmızı ve yeşil renkli kapalı eğrilerini X ve Y noktaları ile doğrudaş bir $Z=(3,0)$ noktası da

$(\|XZ\| = \lambda_1 a$ ve $\|ZY\| = \lambda_1 b)$ mavi renkli kapalı eğriyi çizecektir. Benzer şekilde, **AB** doğru parçasının $A=(1, \sqrt{3}), B=(2, 2\sqrt{3})$ uç noktaları, sırasıyla, aşağıdaki gibi kırmızı ve yeşil renkli kapalı eğrileri çizdiğinde A ve noktaları ile doğrudaş $C=(1.25, 1.25\sqrt{3})$ noktası da $(\|AC\| = \lambda_2 a$ ve $\|CB\| = \lambda_2 b)$ kahverengi eğriyi çizecektir.

> restart:

> with(plottools):with(plots):

> F := proc(t)

```
> plots[display](plottools[line]([2*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t), 2*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], [4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t), 4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t)], color=black, thickness=2)):
```

> end proc:

> k1:=animate(F, [t], t=0..2*Pi, scaling=CONSTRAINED):

> G := proc(t)

```
> plots[display](plottools[line]([2*cos(t+Pi/3)-
0*sin(t+Pi/3)-
cos(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)+sin(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3), 2*sin(t+Pi/3)+
0*cos(t+Pi/3)-cos(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3)-
sin(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)], [4*cos(t+Pi/3)-0*sin(t+Pi/3)-
cos(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)+sin(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3), 4*sin(t+Pi/3)-
0*cos(t+Pi/3)-sin(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)-
cos(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3)], color=black, thickness=2)):
```

```

3)+0*cos(t+Pi/3)-cos(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3)-
sin(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)],color=black,thickness=2)):

>end proc:

>k2:=animate(G,[t],t=0..2*Pi):

>k3:=animate(plot,[[2*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),2*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=red],A=0..0+2*Pi,color=red,thic
kness=2):

>k4:=animate( textplot,[[2*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),2*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`X`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k5:=animate(plot,[[3*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),3*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=blue],A=0..0+2*Pi,color=blue,th
ickness=2):

>k6:=animate( textplot,[[3*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),3*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Z`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k7:=animate(plot,[[4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-
sin(t)*cos(t),t=0..A],color=green],A=0..0+2*Pi,color=green,
thickness=2):

>k8:=animate( textplot,[[4*cos(t)-0*sin(t)-
cos(t)*cos(t)+sin(t)*sin(t),4*sin(t)+0*cos(t)-
cos(t)*sin(t)-sin(t)*cos(t),`Y`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k9:=animate(plot,[[2*cos(t+Pi/3)-0*sin(t+Pi/3)-
cos(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)+sin(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3),2*sin(t+Pi/
3)+0*cos(t+Pi/3)-cos(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3)-
sin(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3),t=0..A],color=red],A=0..0+2*Pi,colo
r=red,thickness=2):

>k10:=animate( textplot,[[2*cos(t+Pi/3)-0*sin(t+Pi/3)-
cos(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)+sin(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3),2*sin(t+Pi/
3)+0*cos(t+Pi/3)-cos(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3)-
sin(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3),`A`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k11:=animate(plot,[[2.5*cos(t+Pi/3)-0*sin(t+Pi/3)-
cos(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)+sin(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3),2.5*sin(t+P
i/3)+0*cos(t+Pi/3)-cos(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3)-

```

```

sin(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3),t=0..A],color=brown],A=0..0+2*Pi,color=blue,thickness=2):

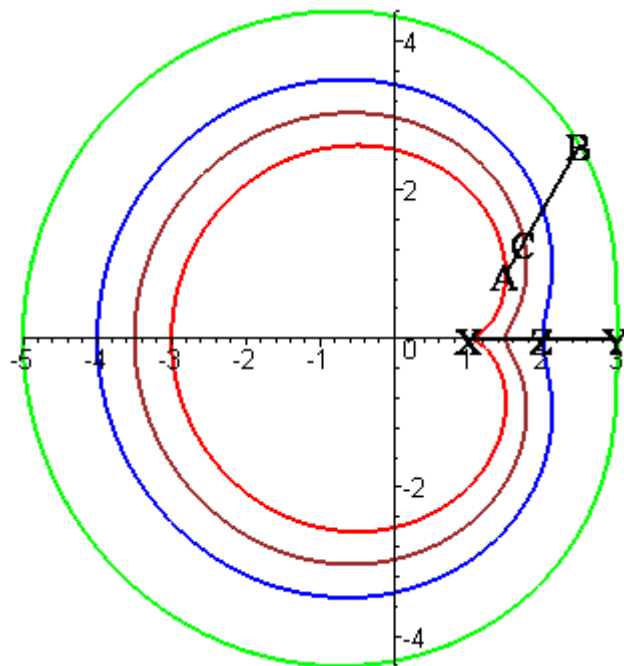
>k12:=animate( textplot,[[2.5*cos(t+Pi/3)-0*sin(t+Pi/3)-
cos(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)+sin(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3),2.5*sin(t+Pi/3)+0*cos(t+Pi/3)-cos(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3)-
sin(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3),`C`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>k13:=animate(plot,[[4*cos(t+Pi/3)-0*sin(t+Pi/3)-
cos(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)+sin(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3),4*sin(t+Pi/3)+0*cos(t+Pi/3)-cos(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3)-
sin(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3),t=0..A],color=green],A=0..0+2*Pi,color=green,thickness=2):

>k14:=animate( textplot,[[4*cos(t+Pi/3)-0*sin(t+Pi/3)-
cos(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3)+sin(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3),4*sin(t+Pi/3)+0*cos(t+Pi/3)-cos(t+Pi/3)*sin(t+Pi/3)-
sin(t+Pi/3)*cos(t+Pi/3),`B`,
font=[TIMES,ROMAN,15]]],t=0..2*Pi):

>display(k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8,k9,k10,k11,k12,k13,k14);

```



```

>

>restart:

>Alan:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G1;

>G1:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**
2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*

```

```
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
```

```
>print(F[X]=G1);
```

```
>end:
```

```
>Alan(2,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
```

```
>
```

$$F_x = 6\pi$$

```
>
```

```
>restart:
```

```
>Alan:=proc(y1,y2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G2;
```

```
>G2:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y1**2+y2**
2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
```

```
>print(F[Y]=G2);
```

```
>end:
```

```
>Alan(4,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
```

$$F_y = 18\pi$$

```
>
```

```
>restart:
```

```
>Alan:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local F,G3;
```

```
>G3:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(z1**2+z2**
2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
```

```
>print(F[Z]=G3);
```

```
>end:
```

```
>Alan(3,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
```

```
>
```

$$F_z = 11\pi$$

```
>
```

```
>restart:
```

```

> Alan:=proc(x1,x2,y1,y2,z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local
F,G1,G2,G3;

> G1:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x1**2+x2**
2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :

> G2:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y1**2+y2**
2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :

> G3:=(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2)*G2+sqrt((z1-y1)**2+(z2-
y2)**2)*G1)/(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2)+sqrt((z1-
y1)**2+(z2-y2)**2))-Pi*n*sqrt((x1-z1)**2+(x2-
z2)**2)*sqrt((z1-y1)**2+(z2-y2)**2) :

> print(F[Z]=G3) ;

> end:

> Alan(2,0,4,0,3,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;

```

$$F_Z = 11\pi$$

```

>

> restart:

> Alan:=proc(x11,x22,u1,u2,b,n,c,d) local F,G11;

> G11:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x11**2+x22
**2-
2*x11*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2
*Pi*n))-2*x22*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :

> print(F[A]=G11) ;

> end:

> Alan(1,sqrt(3),cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;

>

```

$$F_A = 6\pi$$

```

>

> restart:

> Alan:=proc(y11,y22,u1,u2,b,n,c,d) local F,G22;

```

```

> G22:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y11**2+y22
**2-
2*y11*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2
*Pi*n))-2*y22*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> print(F[B]=G22) ;
> end:
> Alan(2,2*sqrt(3),cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;

```

$$F_B = 18\pi$$

```

>
> restart:
> Alan:=proc(z11,z22,u1,u2,b,n,c,d) local F,G33;
> G33:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(z11**2+z22
**2-
2*z11*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2
*Pi*n))-2*z22*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> print(F[C]=G33) ;
> end:
> Alan(1.25,1.25*sqrt(3),cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;
>

```

$$F_C = 8.25\pi$$

```

>
> restart:
> Alan:=proc(x11,x22,y11,y22,z11,z22,u1,u2,b,n,c,d) local
F,G11,G22,G33;
> G11:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(x11**2+x22
**2-
2*x11*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2
*Pi*n))-2*x22*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> G22:=(1/2)*int((u1*(u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))+u2*(u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t))))*diff(b,t),t=c..d)+Pi*n*(y11**2+y22
**2-
2*y11*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2
*Pi*n))-2*y22*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :

```

```

> G33:=(sqrt((x11-z11)**2+(x22-z22)**2)*G22+sqrt((z11-
y11)**2+(z22-y22)**2)*G11)/(sqrt((x11-z11)**2+(x22-
z22)**2)+sqrt((z11-y11)**2+(z22-y22)**2))-Pi*n*sqrt((x11-
z11)**2+(x22-z22)**2)*sqrt((z11-y11)**2+(z22-y22)**2):
> print(F[C]=G33);
> end:
>
Alan(1,sqrt(3),2,2*sqrt(3),1.25,1.25*sqrt(3),cos(t),sin(t),
t,1,0,2*Pi);

```

$$F_C = 8.25\pi$$

```

>
> restart:
> Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H1;
> H1:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
> print(T[X]=H1);
> end:
> Atalet_Momenti(2,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>

```

$$T_X = 10\pi$$

```

>
> restart:
> Atalet_Momenti:=proc(y1,y2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H2;
> H2:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y1**2+y2**2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
> print(T[Y]=H2);
> end:
> Atalet_Momenti(4,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
>

```

$$T_Y = 34\pi$$

```

>

```



```

> restart:

> Atalet_Momenti:=proc(z1,z2,u1,u2,b,n,c,d) local T,H3;

> H3:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(z1**2+z2**2-
2*z1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*z2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :

> print(T[Z]=H3) ;

> end:

> Atalet_Momenti(3,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;

>

```

$$T_z = 20\pi$$

```

>

> restart:

> Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,y1,y2,z1,z2,u1,u2,b,n,c,d)
local F,H1,H2,H3;

> H1:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x1**2+x2**2-
2*x1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*x2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :

> H2:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y1**2+y2**2-
2*y1*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*
Pi*n))-2*y2*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :

> H3:=(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2)*H2+sqrt((z1-y1)**2+(z2-
y2)**2)*H1)/(sqrt((x1-z1)**2+(x2-z2)**2)+sqrt((z1-
y1)**2+(z2-y2)**2))-2*Pi*n*sqrt((x1-z1)**2+(x2-
z2)**2)*sqrt((z1-y1)**2+(z2-y2)**2) :

> print(T[Z]=H3) ;

> end:

> Atalet_Momenti(2,0,4,0,3,0,cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;

>

```

$$T_z = 20\pi$$

```

>

> restart:

> Atalet_Momenti:=proc(x11,x22,u1,u2,b,n,c,d) local T,H11;

> H11:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x11**2+x22**2-
2*x11*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2

```

```
*Pi*n))-2*x22*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
```

```
>print(T[A]=H11);
```

```
>end:
```

```
>Atalet_Momenti(1,sqrt(3),cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
```

```
>
```

$$T_A = 10\pi$$

```
>
```

```
>restart:
```

```
>Atalet_Momenti:=proc(y11,y22,u1,u2,b,n,c,d) local T,H22;
```

```
>H22:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y11**2+y22**2-
2*y11*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2
*Pi*n))-2*y22*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
```

```
>print(T[B]=H22);
```

```
>end:
```

```
>Atalet_Momenti(2,2*sqrt(3),cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
```

```
>
```

$$T_B = 34\pi$$

```
>
```

```
>restart:
```

```
>Atalet_Momenti:=proc(z11,z22,u1,u2,b,n,c,d) local T,H33;
```

```
>H33:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(z11**2+z22**2-
2*z11*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2
*Pi*n))-2*z22*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))):
```

```
>print(T[C]=H33);
```

```
>end:
```

```
>
```

```
Atalet_Momenti(1.25,1.25*sqrt(3),cos(t),sin(t),t,1,0,2*Pi);
```

```
>
```

$$T_C = 14.5\pi$$

```
>
```

```
>
```

```
Atalet_Momenti:=proc(x11,x22,y11,y22,z11,z22,u1,u2,b,n,c,d)
local F,H11,H22,H33;
```

```

> H11:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(x11**2+x22**2-
2*x11*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2
*Pi*n))-2*x22*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> H22:=int(u1**2+u2**2,t=c..d)+2*Pi*n*(y11**2+y22**2-
2*y11*(int((u1+(diff(u2,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2
*Pi*n))-2*y22*(int((u2-
(diff(u1,t)/diff(b,t)))*diff(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))) :
> H33:=(sqrt((x11-z11)**2+(x22-z22)**2)*H22+sqrt((z11-
y11)**2+(z22-y22)**2)*H11)/(sqrt((x11-z11)**2+(x22-
z22)**2)+sqrt((z11-y11)**2+(z22-y22)**2))-2*Pi*n*sqrt((x11-
z11)**2+(x22-z22)**2)*sqrt((z11-y11)**2+(z22-y22)**2) :
> print(T[C]=H33) ;
> end:
>
Atalet_Momenti(1,sqrt(3),2,2*sqrt(3),1.25,1.25*sqrt(3),cos(
t),sin(t),t,1,0,2*Pi) ;
>

```

$$T_C = 14.5\pi$$

Örnek 7 (1-Parametrelili Düzlemsel Homotetik Hareket)

$u_1(t)=t^3, u_2(t)=t^2, h(t)=\sin t, \varphi(t)=\left(\frac{\pi}{6}\right)t$, olmak üzere $B=E/E'$, 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, $(1,2)$ noktasının çizmiş olduğu kapalı yörünge eğrisinin grafiği aşağıdaki gibidir. Hareketin kartezyen denklemi

$$\begin{cases} x'_1 = (\sin t x_1 - t^3) \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - (\sin t x_2 - t^2) \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\ x'_2 = (\sin t x_1 - t^3) \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + (\sin t x_2 - t^2) \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \end{cases}$$

dir.

```

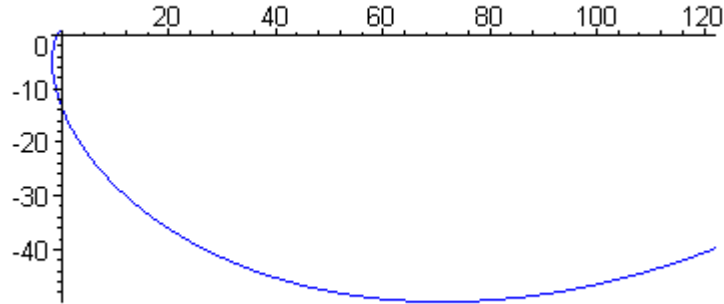
> restart:with(plottools):with(plots):
>
Bir_Parametrelili_Düzlemsel_Homotetik_Hareket:=proc(x1,x2,u1,
u2,h,b,c,d) ;
> animate(plot, [[h*(x1*cos(b)-x2*sin(b))-
u1*cos(b)+u2*sin(b),h*(x1*sin(b)+x2*cos(b))-u1*sin(b)-
u2*cos(b),t=c..A],color=blue],A=c..0+d,color=blue
,scaling=CONSTRAINED) ;

```

```

> end proc:
>
>
Bir_Parametrelili_Düzlemsel_Homotetik_Hareket(1,2,t**3,t**2,s
in(t) , (Pi/6)*t,0,5);

```



Örnek 8 (1-Parametrelili Düzlemsel Homotetik Harekette Pol Noktaları, Pol Eğrileri, Mutlak Hız, Relatif Hız)

$u_1(t)=t^3, u_2(t)=t^2, h(t)=\frac{t}{2}, \varphi(t)=\left(\frac{\pi}{6}\right)t$, olmak üzere $B=E/E'$, 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, P pol noktasının koordinatları, P' pol noktasının koordinatları, V_r ve V_a nın normları, (P) ve (P') pol eğrilerinin grafikleri aşağıdaki gibidir. Hareketin kartezyen denklemi

$$\begin{cases} x'_1 = \left(\left(\frac{t}{2} \right) x_1 - t^3 \right) \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) - \left(\left(\frac{t}{2} \right) x_2 - t^2 \right) \sin \left(\frac{\pi t}{6} \right) \\ x'_2 = \left(\left(\frac{t}{2} \right) x_1 - t^3 \right) \sin \left(\frac{\pi t}{6} \right) + \left(\left(\frac{t}{2} \right) x_2 - t^2 \right) \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) \end{cases}$$

dir.

```

> restart:with(plottools):with(plots):
> Pol_Eğrileri:=proc(u1,u2,h,b,c,d) global
l1,l2,p1,p2,p11,p22,vr,va;
> p1:=simplify((diff(h,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t))+h*diff(b,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t)))/(diff(
h,t)**2+(h*diff(b,t))**2)):
> p2:=simplify((diff(h,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t))-
h*diff(b,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t)))/(diff(h,t)**2+(h*diff(b,t))**2)):

```

```

>p11:=simplify(h*((diff(h,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t))+h*diff(b,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t)))/(diff(
h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*cos(b)-
((diff(h,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t))-
h*diff(b,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t)))/(diff(h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*sin(b))-
u1*cos(b)+u2*sin(b)):

>p22:=simplify(h*((diff(h,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t))+h*diff(b,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t)))/(diff(
h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*sin(b)+((diff(h,t)*(diff(u2,t)+u
1*diff(b,t))-h*diff(b,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t)))/(diff(h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*cos(b))-
u1*sin(b)-u2*cos(b)):

>print(p[1]=p1);

>print(p[2]=p2);

>print(p[1]**('`')=p11);

>print(p[2]**('`')=p22);

>vr:=simplify(sqrt((diff(p1,t))**2+(diff(p2,t))**2)):

>va:=simplify(sqrt((diff(p11,t))**2+(diff(p22,t))**2)):

>print(V[r],`nin normu`=vr);

>print(V[a],`nin normu`=va);

>

l1:=animate(plot,[p1,p2,t=c..A],color=red,A=c..0+d,color=
red,scaling=CONSTRAINED):

>

l2:=animate(plot,[p11,p22,t=c..A],color=blue,A=c..0+d,col
or=blue,scaling=CONSTRAINED):

>display(l1,l2);

>end proc:

>Pol_Eğrileri(t**3,t**2,t/2,(Pi/6)*t,0,5);

```

$$p_1 = \frac{2t^2(108 + 6\pi + t^2\pi^2)}{36 + t^2\pi^2}$$

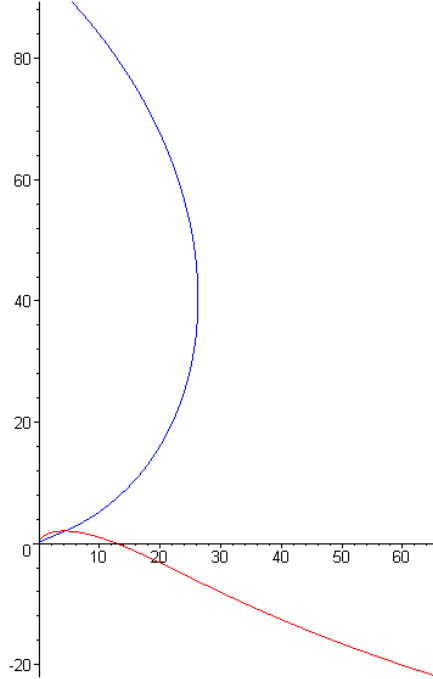
$$p_1 = \frac{2t(72 - 12t^2\pi + t^2\pi^2)}{36 + t^2\pi^2}$$

$$p_1' = \frac{6t^2 \left(12t \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + t \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \pi - 6 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) t^2 \pi \right)}{36 + t^2\pi^2}$$

$$p'_2 = - \frac{6t^2 \left(-12t \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) - t \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \pi - 6 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) t^2 \pi \right)}{36 + t^2 \pi^2}$$

$$V_r \text{ nin normu} = 2 \sqrt{\frac{4t^6 \pi^4 + t^4 \pi^4 - 24t^4 \pi^3 + 432t^4 \pi^2 + 46656t^2 + 5184}{(36 + t^2 \pi^2)^2}}$$

$$V_a \text{ nin normu} = \sqrt{\frac{t^2 (4t^6 \pi^4 + t^4 \pi^4 - 24t^4 \pi^3 + 432t^4 \pi^2 + 46656t^2 + 5184)}{(36 + t^2 \pi^2)^2}}$$



Örnek 9 (1-Parametrelili Düzlemsel Kapalı Homotetik Harekette Bir Noktanın Çizmiş Olduğu Yörünge Eğrisi, Yörünge Eğrisinin Alanı ve Kutupsal Atalet Momenti)

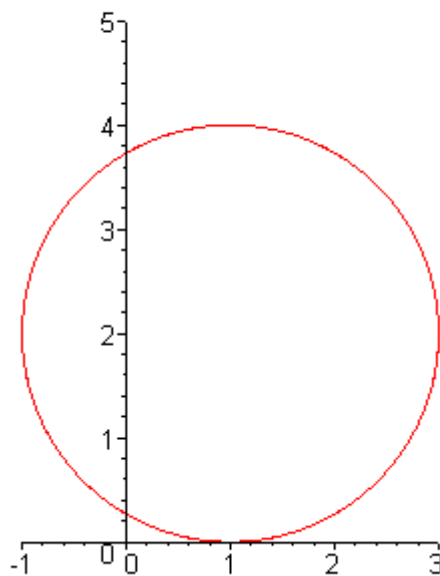
$u_1(t) = \cos t, u_2(t) = \sin t, h(t) = \cos t, \varphi(t) = t$, olmak üzere $B = E/E'$, 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, $(2,4)$ noktasının çizmiş olduğu kapalı yörünge eğrisinin alanı ve kutupsal atalet momentini aşağıdaki gibidir. Hareketin kartezyen denklemi

$$\begin{cases} x'_1 = (\cos t x_1 - \cos t) \cos t - (\cos t x_2 - \sin t) \sin t \\ x'_2 = (\cos t x_1 - \cos t) \sin t + (\cos t x_2 - \sin t) \cos t \end{cases}$$

dir.

```
> restart:with(plottools):with(plots):  
>  
Bir_Parametreli_Düzlemsel_kapalı_Homotetik_Hareket:=proc(x1  
,x2,u1,u2,h,b,c,d) local k1;  
> k1:=animate(plot,[ [h*(x1*cos(b)-x2*sin(b))-  
u1*cos(b)+u2*sin(b),h*(x1*sin(b)+x2*cos(b))-u1*sin(b)-  
u2*cos(b),t=c..A],color=red],A=c..0+d,color=red,scaling=CON  
STRAINED);  
> end proc:  
>  
>  
Bir_Parametreli_Düzlemsel_kapalı_Homotetik_Hareket(2,4,cos(  
t),sin(t),cos(t),t,0,2*Pi);  
>
```

A = 6.283185308



>

> restart:

```
> Alan:=proc(x1,x2,u1,u2,h,b,n,c,d) local F,G;  
> G:=(1/2)*(int(u1*((diff(h,t))*(diff(u1,t)-  
u2*diff(b,t))+h*diff(b,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t)))/(diff(  
h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*h*diff(b,t),t=c..d)+int(u2*((di  
ff(h,t))*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t))-h*diff(b,t)*(diff(u1,t)-
```

```

u2*diff(b,t)))/(diff(h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*h*diff(b,t)
,t=c..d)+int(u1*((diff(h,t))*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t))-
h*diff(b,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t)))/(diff(h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*diff(h,t),t
=c..d)-int(u2*((diff(h,t))*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t))+h*diff(b,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t)))/(diff(
h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*diff(h,t),t=c..d))+int(h**2*diff
f(b,t),t=c..d)/(2*Pi*n))*(Pi*n)*(x1**2+x2**2-
2*x1*int(((diff(h,t))*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t))+h*diff(b,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t)))/(diff(
h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*h**2*diff(b,t),t=c..d)/(int(h**2
*diff(b,t),t=c..d))-
2*x2*int(((diff(h,t))*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t))-
h*diff(b,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t)))/(diff(h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*h**2*diff(b
,t),t=c..d)/int(h**2*diff(b,t),t=c..d))+(x1/2)*(int(-
2*h*((diff(h,t))*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t))-
h*diff(b,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t)))/(diff(h,t)**2+(h*diff(b,t))**2)),t=c..d)+int
(h*diff(u2,t),t=c..d)+int(u2*diff(h,t),t=c..d))+(x2/2)*(int
(2*h*((diff(h,t))*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t))+h*diff(b,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t)))/(diff(
h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*diff(h,t),t=c..d)-
int(h*diff(u1,t),t=c..d)-int(u1*diff(h,t),t=c..d))) :

> print(F[X]=G);

> end:

> Alan(2,4,cos(t),sin(t),cos(t),t,1,0,2*Pi);

```

$$F_X = 8\pi$$

```

> restart:

> Atalet_Momenti:=proc(x1,x2,u1,u2,h,b,n,c,d) local T,H;

>
H:=int((u1**2+u2**2)*diff(b,t),t=c..d)+2*(int(h**2*diff(b,t)
),t=c..d)/(2*Pi*n))*(Pi*n)*(x1**2+x2**2-
2*x1*int(((diff(h,t))*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t))+h*diff(b,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t)))/(diff(
h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*h**2*diff(b,t),t=c..d)/(int(h**2
*diff(b,t),t=c..d))-
2*x2*int(((diff(h,t))*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t))-
h*diff(b,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t)))/(diff(h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*h**2*diff(b
,t),t=c..d)/int(h**2*diff(b,t),t=c..d))+2*x1*(int(-
(((diff(h,t))*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t))-
h*diff(b,t)*(diff(u1,t)-
u2*diff(b,t)))/(diff(h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*h*diff(h,t)
,t=c..d)+int(h*diff(u2,t),t=c..d))+2*x2*(int(((diff(h,t))*
(diff(u1,t)-

```



```

u2*diff(b,t))+h*diff(b,t)*(diff(u2,t)+u1*diff(b,t))/(diff(
h,t)**2+(h*diff(b,t))**2))*h*diff(h,t),t=c..d)+int(-
h*diff(u1,t),t=c..d)):

>print(T[X]=H);

>end:

>Atalet_Momenti(2,4,cos(t),sin(t),cos(t),t,1,0,2*Pi);


$$T_x = 18\pi$$


>

```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mutlu AKAR
Doğum Tarihi ve Yeri : 19.03.1984, Arapgir/Malatya
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : makar@yildiz.edu.tr veya akarmutlu@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2007
Lisans	Matematik	İnönü Üniversitesi	2005
Lise		H. Ahmet Akıncı Lisesi	2001

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2005-Devam Ediyor.	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2004-2005	Özel Dershane	Matematik Öğretmenliği

YAYINLARI

Makale

1. Çevikel A. C., Bekir A., **Akar M.**, San S., A Procedure to Construct Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations, Pramana Journal of Physics, Issue 3, Vol. 79, pp. 337-344, (2012) (SCI)
2. Çelik E., **Akar M.**, Least-Squares Approximations for Solving Differential-Algebraic Equations (DAEs), World Applied Sciences Journal (WASJ), Issue 8, Vol. 11, pp. 994-998, (2010)
3. Güzel, N., Ünal H., **Akar M.**, A Visual Proof to Inverse Trigonometric Function, Mathematics and Computer Education, Issue 2, Vol. 42, pp. 146, (2008)

Bildiri

1. **Mutlu Akar** and Salim Yüce, A Holditch-Type Theorem for the Polar Moment of Inertia under the 1-Parameter Closed Planar Homothetic Motion, International Conference on Applied Analysis and Algebra, Istanbul, Turkey, pp.194, June 20-24, (2012)
2. **Mutlu Akar**, Adem Cengiz Çevikel, Ahmet Bekir and Sait San, An Algebraic Procedure to Construct Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations, SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations (PD11), San Diego, California, USA, pp.69, (as a Session Chair) November 14-17, (2011)
3. **Mutlu Akar**, Salim Yüce and Nuri Kuruoğlu, One-Parameter Planar Motion in the Galilean Plane, International Conference on Applied Analysis and Algebra, Istanbul, Turkey, pp.274, June 29-July 02, (2011)
4. **Mutlu Akar** and Salim Yüce, A Generalization of the Polar Moment of Inertia under the 1- Parameter Closed Planar Homothetic Motion and Maple Examples, Sixth International Conference on Dynamic Systems and Applications, Atlanta, Georgia, USA, pp.28, May 25-28, (2011)

5. **Mutlu Akar** and Salim Yüce, On the Generalizations of the Polar Moments of Inertia under the Homothetic Motions, 2011 Joint Mathematics Meetings (JMM), New Orleans, Louisiana, USA, 32-204, January 6-9, (2011)
6. **Mutlu Akar** and Mustafa Bayram, Laguerre Polynomials Approximation For Numerical Solution Of Differential-Algebraic Equations (DAEs), 8 th Joint AMS-SMM International Meeting, Berkeley, California, USA, pp.60, June 2-4, (2010)
7. **Mutlu Akar** and Ercan Çelik, On the Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations (DAEs) by using Legendre Polynomials Approximation, SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations (PD09), Miami, Florida, USA, pp.32, December 07-10, (2009)
8. **Mutlu Akar**, Mustafa Bayram and Hasan Unal, Graphical Differentiation with ClassPad300Plus, 12th Asian Technology Conference in Mathematics, Taipei, Taiwan, December 16-20, (2007)
9. **Mutlu Akar** ve Ercan Çelik, Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin En Küçük Kareler Yaklaşımı ile Nümerik Çözümü, XX. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzurum/Türkiye, pp.98,3-6 Eylül, (2007)

Proje

1. **Mutlu AKAR** ve Salim YÜCE, Proje İsmi: "Düzlemsel Homotetik Hareketler Altında Kapalı Yörünge Eğrisinin Kutupsal Atalet Momenti için Holditch-Tipi Teoremlerin Genelleştirilmesi", Proje Türü: YTÜ-BAPK-DOP, Proje No: 2010-01-03-DOP01, Tarih: 15.05.2010-15.11.2012.

TEMSİLCİLİKLER

1. YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı Öğrenci Temsilcisi (2005-2009)

2. YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlileri Temsilcisi (2009-Devam ediyor)
3. YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Araştırma Görevlileri Temsilcisi (2009-Devam ediyor)
4. YTÜ Üniversite Araştırma Görevlileri Temsilcisi (2011-Devam ediyor)

KURUL ÜYELİKLERİ

1. Yıldız Koruma ve Yaşatma Derneği Yönetim Kurulu Yedek Üyesi (2009-2011)
2. YTÜ Araştırma Görevlileri Temsilcileri Konseyi Yönetim Kurulu Üyesi (2009-2011)
3. YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Yönetim Kurulu Üyesi (2009-Devam ediyor)
4. YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Kurulu Üyesi (2009-Devam ediyor)
5. YTÜ Araştırma Görevlileri Temsilciler Konseyi Yönetim Kurulu Başkanı (2011-Devam ediyor)
6. YTÜ Üniversite Yönetim Kurulu Üyesi (2011-Devam ediyor)
7. YTÜ Senato Üyesi (2011-Devam ediyor)

DERGİ HAKEMLİKLERİ

1. Iranian Journal of Science and Technology Transaction A: Science
2. Batman University Journal of Life Science
3. International Journal of Nonlinear Science

BİLİMSEL ORGANİZASYONLARI

1. TÜBİTAK Ortaöğretim Öğrencileri Arası Araştırma Projeleri İstanbul - Avrupa Bölgesi (İstanbul Avrupa, Kırklareli, Tekirdağ ve Edirne) Yarışması, 07-09 Nisan 2009, YTÜ (Rehber Öğretmenlik)
2. TÜBİTAK Ortaöğretim Öğrencileri Arası Araştırma Projeleri İstanbul - Avrupa Bölgesi (İstanbul Avrupa, Kırklareli, Tekirdağ ve Edirne) Yarışması, 22-26 Mart 2010, YTÜ (Rehber Öğretmenlik)
3. TÜBİTAK Ortaöğretim Öğrencileri Arası Araştırma Projeleri İstanbul - Avrupa Bölgesi (İstanbul Avrupa, Kırklareli, Tekirdağ ve Edirne) Yarışması, 29-31 Mart 2011, YTÜ (Rehber Öğretmenlik)
4. INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLIED ANALYSIS AND ALGEBRA (ICAAA2011), June 29-July 02, 2011, Istanbul/Turkey (Local Committee Member)
5. INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLIED ANALYSIS AND ALGEBRA (ICAAA2012), June 20-24, 2012, Istanbul/Turkey (Local Committee Member)

DİNLEYİCİ OLARAK KATILDIĞI DİĞER KONFERANSLARI

1. II. National Cryptography Conference, METU, Ankara, December 15-17, 2006
2. Matematical Days, B.A.İ.B. University, Bolu, June 9-10, 2007
3. Mathematics Workshop days (Summability, Sequence Spaces and Applications), Istanbul Commerce University, İstanbul, May 15-16, 2008
4. VI. Geometry Symposium, Uludağ University, Bursa, July 1-4, 2008