

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUANTUM UZAYLAR ÜZERİNDE HOPF CEBİRLERİ
VE DİFERANSİYEL HESAP**

MUTTALİP ÖZAVŞAR

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. GÜRSEL YEŞİLOT**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM UZAYLAR ÜZERİNDE HOPF CEBİRLERİ VE DİFERANSİYEL HESAP

Muttalip ÖZAVŞAR tarafından hazırlanan tez çalışması 17/09/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. A.Göksel AĞARGÜN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof.Dr.Mustafa BAYRAM

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç.Dr.Fatma ÖZDEMİR

İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd.Doç.Dr.Mehmet Ali KARACA

İstanbul Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Çalışmalarımnda her türlü desteği benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Doç.Dr. Gürsel YEŞİLOT'a, tez izleme komitesinde bulunan Sayın Prof.Dr. A.Göksel AĞARGÜN ve Sayın Prof.Dr. Mustafa BAYRAM hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli aileme, çalışmalarım boyunca tüm anlayışı ve desteği ile yanımda olan sevgili eşim Zeyneb ÖZAVŞAR'a ve çalışma arkadaşlarıma en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Eylül, 2012

Muttalip ÖZAVŞAR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	VI
ABSTRACT.....	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı.....	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	4
BÖLÜM 3	
POLİNOMLAR CEBİRİNİN DEFORMASYONU.....	9
3.1 Üç Değişkenli Polinomlar Cebirinin Hopf Cebiri ve Deformasyonu.....	12
BÖLÜM 4	
DİFERANSİYEL CEBİR	15
4.1 Hopf Cebirleri Üzerinde Diferansiyel Hesap.....	15
BÖLÜM 5	
CARTAN MAURER FORMLARI.....	24
5.1 Cartan-Maurer forma karşılık gelen vektör alanları	27
BÖLÜM 6	
HOMOJEN OLMAYAN DEĞİŞTİRME BAĞINTILI UZAYLAR.....	32
6.1 Ψ Üzerinde Diferansiyel Cebir.....	40
6.2 Ψ üzerinde Cartan-Maurer Formlar	47

BÖLÜM 7

DUAL HOPF CEBİRİ	49
------------------------	----

BÖLÜM 8

SONUÇ VE ÖNERİLER	54
-------------------------	----

KAYNAKLAR	55
-----------------	----

ÖZGEÇMİŞ	58
----------------	----

KUANTUM UZAYLAR ÜZERİNDE HOPF CEBİRLERİ VE DİFERANSİYEL HESAP

Muttalip ÖZAVŞAR

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Son yıllarda Lie grup teorisi ve diferansiyel geometrinin değişmeli olmayan genellemelerinde önemli ölçüde başarılar elde edildi ve matematiksel fiziğin birçok önemli yeni dalları, değişmeli olmayan yapıların en somut örnekleri olan kuantum uzaylar ve kuantum grupların çatısı altında şekillendi. Kuantum grup kavramı bir Lie grubuna karşılık gelen Hopf cebirinin deformasyonu olarak bilinmektedir. Diğer taraftan bir cebirin Hopf cebirinden faydalanmak o cebir üzerinde diferansiyel hesap oluşturmanın en etkili yöntemlerinden biridir.

Biz bu çalışmada önce polinomların değişmeli cebirleri için verilen Hopf cebirleri yardımıyla deformasyonlu cebirlerin nasıl elde edilebileceğini tartıştık. Elde edilen bulgular yardımıyla Hopf cebirine sahip iki parametrelili, homojen değiştirme bağıntılı bir kuantum uzay oluşturduk. Bu kuantum uzayın Hopf cebirini kullanarak bir diferansiyel hesap elde edildi. Bu diferansiyel hesaba karşılık gelen bazı deformasyonlu türev operatörleri ve ilgili Weyl cebiri verildi. Ayrıca bu kuantum uzay üzerinde Cartan-Maurer formlar ve bu formlara karşılık gelen vektör alanları çalışıldı.

Bu tez çalışmasında ayrıca, homojen değiştirme bağıntılı bir kuantum uzaydan homojen olmayan değiştirme bağıntılı yeni bir deformasyonlu uzayın nasıl elde edilebileceği çalışıldı. Yapılan değerlendirmeler ışığında elde ettiğimiz iki parametrelili, homojen değiştirme bağıntılı kuantum uzaydan homojen olmayan değiştirme bağıntılı yeni bir uzay elde edildi ve elde edilen bu uzay üzerinde diferansiyel hesap ve ilgili sonuçlar verildi.

Son olarak da iki parametrelili, homojen değiştirme bağıntılı kuantum uzay için bir dual Hopf cebiri elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Kuantum uzay, Kuantum grup, Hopf cebiri, Diferansiyel Hesap, Weyl cebiri, Dual Hopf cebiri.

HOPF ALGEBRAS ON QUANTUM SPACES AND DIFFERENTIAL CALCULUS

Muttalip ÖZAVŞAR

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

During the last decades a spectacular development of noncommutative generalizations of differential geometry and Lie group theory has been achieved, and the respective new chapters of mathematical physics are known under the frames of quantum spaces and quantum groups which are the most concrete examples of noncommutative structures. The concept of quantum group is known as a deformation of Hopf algebra corresponding to a Lie group. On the other hand, constructing Hopf algebra for an algebra has recently been an effective method to obtain differential calculus over the algebra.

In this thesis we first investigate construction of some noncommutative algebra of polynomial functions by using structures of Hopf algebra on the usual commutative algebra of polynomials. Using the main result of this investigation, we obtain a quantum space with two deformation parameters. A differential calculus is obtained for this quantum space due to its Hopf algebra structure. Thus some deformed derivations and the corresponding Weyl algebra are given. Moreover, the Cartan Maurer forms and the relevant vector fields are obtained for the quantum space.

In this work we also study how to derive quantum spaces with nonhomogeneous relations from a quantum space with homogeneous relations. Based on our discussions a quantum space with nonhomogeneous relations is obtained from the two-parameter quantum space with homogeneous relations, and a differential calculus and some related results on this space are given.

Finally a dual Hopf algebra is given for the two-parameter quantum space with homogeneous relations.

Key words: Quantum space, Quantum group, Hopf algebra, Differential calculus, Weyl algebra, Dual Hopf algebra.

1.1 Literatür Özeti

Drinfeld tarafından kavramlaştırılan kuantum gruplar ilk defa kuantum alan teorisi ve istatistiksel fizikle alakalı çalışmalarda ortaya çıkmıştır, [1-8]. Drinfeld, kuantum group kavramını bir Lie grubuna karşılık gelen Hopf cebirinin bazı deformasyonları olarak tanımladı, [1].

Son yıllarda değişmeli olmayan cebirler üzerindeki diferansiyel geometri, matematiksel ve fiziksel açıdan birçok çalışmaların ana kaynağı olarak görülmeye başlandı, [9-11]. Ayrıca, değişmeli olmayan cebirlerin somut bir örneği olan kuantum gruplar üzerinde diferansiyel hesabın Woronowicz tarafından çalışılmasıyla, değişmeli olmayan diferansiyel geometri çalışmaları büyük bir ivme kazandı. Woronowicz, çalışmasında kuantum grupların Hopf cebiri olma özelliğinden hareketle kuantum gruplar üzerinde diferansiyel hesap ve diferansiyel cebir yapılarını oluşturdu, [12].

Diğer taraftan, kuantum grupların üzerine etki ettiği kuantum uzaylar (deformasyonlu koordinatların uzayı) birçok araştırmacının çalışma konusu olarak ortaya çıktı [13-36]. Örneğin, Wess ve Zumino bu tür deformasyonlu koordinatların cebirine somut bir örnek olan kuantum düzlem üzerinde diferansiyel hesabı oluşturdular, [13]. Wess ve Zumino oluşturdıkları bu diferansiyel hesabı, kuantum düzlemin üzerinde Hopf cebiri oluşturmadan gerçekleştirdiler. Aslında, bu kuantum düzlemin sadece iki tane değişmeli olmayan koordinata sahip olması ile alakalı bir durum olduğundan, diferansiyel hesabı çok fazla cebirsel aletlere ihtiyaç duymadan gerçekleştirdiler.

Fakat koordinatların nasıl deforme edildiği, yani değişmeli olmayan bir yapıya dönüştürüldüğü de diferansiyel hesabı değiştireceğinden, üzerinde çalışılan koordinatlar cebirinin Hopf cebiri yapıları ve deformasyonları arasındaki ilişkiye ihtiyaç doğacaktır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında önce bir cebirin deformasyon yapısı ile aynı cebirin Hopf cebiri yapıları arasında var olan ilişkiyi daha somut hale getirecek şekilde inceleyeceğiz. Yani değişmeli bir cebir üzerinde verilen bir Hopf cebirinden faydalanarak, Hopf cebiri yapılarını bozmadan cebirin olası deformasyonlarının nasıl elde edilebileceğini irdelleyeceğiz.

Daha sonra yukarıda kısaca bahsedilen bu yaklaşımın, ileriye dönük yeni çalışma alanları oluşturabileceğini göstermek için, üç değişkenli polinomlar cebirinin bir deformasyonu oluşturulacak ve bu deformasyonlu uzayın diferansiyel geometrisini çalışmaya imkan tanıyan bir diferansiyel hesap elde edeceğiz. Elde edilecek bu değişmeli olmayan diferansiyel hesaba sahip olan uzay üzerine etki eden türev operatörlerine karşılık gelen Weyl cebirini inşa edeceğiz. Bu Weyl cebirinden ve deformasyonlu uzayın Hopf cebiri yapısından faydalanarak Cartan-Maurer formları ve bu formlara karşılık gelen Lie cebirini inşa edeceğiz. Ek olarak bu uzayın bir dualini elde edeceğiz.

Diğer taraftan, verilen bir homojen deformasyonlu cebiri formal serilerle genişleteceğiz ve özel olarak bu genişlemeden faydalanarak homojen olmayan deformasyonlu bir başka uzayı elde edeceğiz. Ayrıca bu türlü genişlemelerin üzerindeki diferansiyel hesabın rahat bir şekilde kurulmasına olanak sağlayan bir yaklaşımı ele alacağız.

1.3 Hipotez

Değişmeli bir cebir için verilen Hopf cebiri yapısından faydalanarak, Hopf cebiri korunacak şekilde bir değişmeli olmayan cebir elde edilebileceğini açıklığa kavuşturan bir yöntemi kullanacağız. Bu yöntem yardımıyla elde edilen iki deformasyon parametrelili kuantum uzayın üzerinde bazı diferansiyel yapılar oluşturacağız.

Ayrıca en az bir grubumsu(group-like) elemana sahip homojen değiştirme bağıntılı bir cebirin nasıl homojen olmayan değiştirme bağıntılı bir cebire dönüştürüleceği incelenecek ve bu yaklaşımı iki deformasyon parametrelili kuantum uzaya uygulayacağız. Elde edilen sonuçlarla homojen olmayan deformasyon parametrelili yeni uzayın üzerinde, mevcut yöntemlere göre çok daha az işlem gerektiren bir yöntemle diferansiyel hesabı oluşturacağız.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 Üzerinde toplama ve çarpma tanımlanmış bir boştan farklı R kümesine aşağıdaki özellikler sağlanırsa bir **birimli halka** denir:

1. $(R, +)$ bir değişmeli gruptur.
2. Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
3. Her $a \in R$ için $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a$ olacak şekilde $1_R \in R$ elemanı mevcuttur.
4. Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dır.

Eğer her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ oluyorsa R halkası değişmelidir denir.

Tanım 2.2 $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. Eğer

$$\varphi: R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto a \cdot x, \quad (\varphi: M \times R \rightarrow M, (x, a) \mapsto x \cdot a)$$

şeklinde tanımlanan tasvir aşağıdaki şartları sağlarsa, M ye bir sol (sağ) R -modül, kısaca sol (sağ) modül, φ tasvirine de sol (sağ) R -modül M nin yapı tasviri adı verilir:

$\forall a, b \in R$ ve $\forall x, y \in M$ için,

$$(i) \ a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y, \quad ((x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a)$$

$$(ii) \ (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x, \quad (x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b)$$

$$(iii) \ (a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x), \quad (x \cdot (a \cdot b) = (x \cdot a) \cdot b)$$

$$(iv) \ 1_R \cdot x = x, \quad (x \cdot 1_R = x)$$

Eğer M hem sağ hem sol R -modül ise M ye kısaca **modül** denir. Ek olarak R halkası bir cisim ise, M modülüne vektör uzayı veya bir lineer uzay denir.

Tanım 2.3 R ve S iki halka ve M , bir değişmeli toplamsal grup olsun.

(i) M bir sol R -modül ve sağ S -modül

(ii) Her $r \in R$, $s \in S$ ve $m \in M$ için $(rm)s = r(ms)$

şartları sağlanırsa M bir R - S bimodüldür ve bir R - R bimodüle, kısaca R -**bimodüldür** denir.

Örnek 2.4 R halkası, $n \times n$ tipindeki reel matrislerin halkası ve S halkası da $m \times m$ tipindeki reel matrislerin halkası olsun. Bu durumda M , $n \times m$ tipindeki bütün reel matrislerin toplamsal grubu olarak düşünülürse, M bir R - S bimodüldür.

Tanım 2.5 V ve W bir K cismi üzerinde vektör uzayları olmak üzere,

$$T: V \mapsto W$$

tasviri her $v_1, v_2 \in V$ ve $a, b \in K$ için

$$T(a \cdot v_1 + b \cdot v_2) = a \cdot T(v_1) + b \cdot T(v_2)$$

şartını sağlarsa bir lineer tasvir adını alır.

Tanım 2.6 U, V ve W bir K cismi üzerinde vektör uzayları olmak üzere $\varphi: U \times V \rightarrow W$ tasviri aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa φ ye bir iki-lineer tasvir denir.

Her $u, u' \in U$; $v, v' \in V$ ve $\lambda, \mu \in K$ için,

$$(i) \varphi(\lambda \cdot u + \mu \cdot u', v) = \lambda \cdot \varphi(u, v) + \mu \cdot \varphi(u', v)$$

$$(ii) \varphi(u, \lambda \cdot v + \mu \cdot v') = \lambda \cdot \varphi(u, v) + \mu \cdot \varphi(u, v')$$

Kabul edelim ki U , m -boyutlu ve V , n -boyutlu birer vektör uzayı olmak üzere

$\{\vec{u}_i\}_{i=1}^m$, U nun ve $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^n$, V nin taban elemanlarının kümesi olsun. Bu takdirde

$1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere mn tane (i, j) indisi mevcut olduğundan bu indis

çiftleri W daki bir $\{\vec{w}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ tabanını indislemek için kullanılabilir. Böyle yapınca,

$\varphi: U \times V \rightarrow W$ tasvirini $\vec{x} = x^i \vec{u}_i$ ve $\vec{y} = y^j \vec{v}_j$ olmak üzere

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x^i y^j \vec{w}_{ij}$$

şeklinde yazabiliriz. Aşikâr olarak φ , bir iki-lineer tasvirdir ve $\varphi(U \times V) \subseteq W$ uzayı, $\{\vec{w}_{ij}\}$ tabanını ihtiva eder. Dolayısıyla φ , W uzayını gerer.

Sonuç olarak, U ve V iki vektör uzayı olmak üzere bir W vektör uzayı için aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa W uzayına, U ve V uzaylarının **tensör** çarpımı denir ve sembolik olarak $U \otimes V$ ile gösterilir.

(i) $\varphi(U \times V), W$ yı gerer.

(ii) $\Psi : U \times V \mapsto W'$ herhangi bir iki-lineer tasvir ise $\Psi = \Phi \circ \varphi$ olacak şekilde bir

$\Phi : W \mapsto W'$ lineer tasvir mevcuttur.

Tanım 2.7 $T_1 : U_1 \mapsto V_1$, $T_2 : U_2 \mapsto V_2$ lineer tasvirler olsun. Bu takdirde $u_1 \in U_1$ ve $u_2 \in U_2$ için,

$$\Phi : U_1 \otimes U_2 \mapsto V_1 \otimes V_2, \quad \Phi(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanan bir lineer tasvir mevcuttur. Buradaki Φ ye T_1 ve T_2 nin tensör çarpımı denir ve $\Phi = T_1 \otimes T_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.8 L vektör uzayı olmak üzere, eğer

$$[,] : L \times L \mapsto L$$

iki-lineer tasviri aşağıdaki iki şartı sağlarsa L ye bir **Lie cebiri** denir:

(i) $\forall x, y \in L$ için $[x, y] = -[y, x]$

(ii) $\forall x, y, z \in L$ için, $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$

Tanım 2.9 A , bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve $m : A \otimes A \rightarrow A$, $a \otimes b \mapsto a \cdot b$ ile tanımlanan bir K -lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b, c \in A$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa A vektör uzayına **cebiri** denir:

$$m(a \otimes (b + c)) = m(a \otimes b) + m(a \otimes c)$$

$$m((a + b) \otimes c) = m(a \otimes c) + m(b \otimes c)$$

Ek olarak aşağıdaki şart sağlanırsa A cebirine birleşmeli cebir denir:

$$m \circ (\text{id} \otimes m) = m \circ (m \otimes \text{id}) \quad (\text{Birleşme özelliği})$$

Ayrıca,

$$m \circ (\text{id} \otimes \eta) = m \circ (\eta \otimes \text{id}) \quad (\text{Birimli olma özelliği})$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $1_A \in A$ ve bir $\eta : K \rightarrow A, k \mapsto 1_A \cdot k$ dönüşümü varsa A cebirine birimli cebir adı verilir. Burada id birim fonksiyonu göstermektedir.

Örnek 2.10 G bir grup ve K bir cisim olsun. A ile G den K ya tüm fonksiyonların kümesini gösterelim. Yani,

$$A = \text{Map}(G, K) = \{f \mid f : G \mapsto K\}$$

olsun. Bu durumda, her $f, g \in A$ ve $x \in G$ için aşağıda tanımlanan skalerle çarpma, toplama işlemi ve çarpım tasvirine göre A bir K -cebiri dir:

$$(i) (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

$$(ii) (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(iii) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \alpha \in K$$

Tanım 2.11 A bir K -cebiri olsun. Eğer ek olarak bu K -cebiri üzerinde

$\Delta_A : A \rightarrow A \otimes A, \varepsilon_A : A \rightarrow K$ şeklinde sırasıyla **eş-çarpım** (coproduct) ve **eş-birim** (counit) olarak adlandırılan ve

$$(\Delta_A \otimes \text{id}) \circ \Delta_A = \Delta_A \circ (\Delta_A \otimes \text{id}) \quad (2.1)$$

$$m((\varepsilon_A \otimes \text{id})\Delta_A(a)) = \text{id}(a) = m(\text{id} \otimes \varepsilon_A)\Delta_A(a) \quad (2.2)$$

şartlarını sağlayan K -lineer homomorfizmalar tanımlanabilirse A cebirine bir **eş-cebir** (coalgebra) denir, [37].

Diğer taraftan hem birimli birleşmeli, hem eş-cebir olan bir K cebirine bir **iki-cebir** (bialgebra) denir. Burada $\Delta_A(1_A) = 1_A \otimes 1_A, \varepsilon_A(1_A) = 1_K$ olmalıdır.

En son olarak bir iki-cebir üzerinde,

$$m((S_A \otimes \text{id})\Delta_A(a)) = \varepsilon_A(a)1_A = m((\text{id} \otimes S_A)\Delta_A(a)) \quad (2.3)$$

şartını sağlayan bir $S_A : A \rightarrow A$, K -lineer antihomomorfizma tanımlanabilirse, bu iki-
 cebire bir **Hopf cebiri** adı verilir ve yukarıdaki dönüşümlerin sağladığı özelliklere de
 Hopf cebiri aksiyomları denir, [37]. Kısaca bir Hopf cebirini $(A, \Delta_A, \varepsilon_A, S_A)$ dörtlüsü ile
 göstereceğiz.

Örnek 2.12 G bir grup ve A da Örnek 2.10 da verilen uzay olsun. $A \otimes A$, $G \times G$ den
 bir K cisminde giden bütün dönüşümlerin kümesi olmak üzere, G deki işlemi
 kullanarak aşağıdaki lineer homomorfizmaları tanımlayabiliriz. Her $x, y \in G$ için

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes A, \Delta f(x \otimes y) = f(x \cdot y)$$

$$\varepsilon : A \rightarrow K, \varepsilon(f) = f(e)$$

Burada e , G nin birim elemanıdır. Bu durumda (A, Δ, ε) üçlüsü bir iki-cebir yapısına
 sahiptir. Ek olarak

$$S : A \rightarrow A, Sf(x) = f(x^{-1})$$

dönüşümü ile birlikte $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ dörtlüsü bir Hopf cebiri yapısına sahiptir.

POLİNOMLAR CEBİRİNİN DEFORMASYONU

Daha önce belirttiğimiz gibi bir cebirin deformasyonu ile bu cebirin Hopf cebiri yapıları arasında direk bir bağlantı mevcuttur. Bu bağlantı Hopf cebiri aksiyomlarını sağlayan dönüşümlerin lineer homomorfizma olma özellikleri ile alakalıdır. Biz bu bağlantıdan hareket ederek cebirin Hopf cebiri yapısını bozmadan, yani direk Hopf cebiri yapısını kullanarak cebir üzerinde ne tür deformasyonların mevcut olduğunu inceleyeceğiz. Bu yaklaşımı, ileride hem fiziksel açıdan hem de diferansiyel geometri açısından birçok uygulaması olabileceğini düşündüğümüz, kompleks sayılar cismi üzerindeki üç değişkenli polinomların değişmeli cebirine uygulayacağız. Kompleks sayılar cismi üzerindeki bu değişmeli polinomlar cebirini, yani deforme edilmemiş halini

$$\mathbb{C}[x, y, z] = \mathbb{C}\langle x, y, z \rangle / \langle xy - yx, xz - zx, yz - zy \rangle \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $\mathbb{C}\langle x, y, z \rangle$, x, y, z ile üretilen bir serbest cebir ve $\langle xy - yx, xz - zx, yz - zy \rangle$ de bir idealdir. Yani $\mathbb{C}[x, y, z]$ bildiğimiz değişmeli koordinatlar üzerinde polinomlar cebiridir. Bir an için koordinatların değişmeli olmadığını kabul edelim, yani örneğin $xy \neq yx$ olsun. O zaman bu tür değişmeli olmayan yapıları kolay bir şekilde çalışılabilir ve birçok alana uygulanabilir hale getirmek için polinomlar cebiri üzerinde deformasyon(deformation) veya değiştirme(commutation) bağıntıları kavramına ihtiyaç duyulur.

Tanım 3.1 A , herhangi bir K -cebiri olsun. Çarpımları değişmeli olmayan herhangi iki elemanın farklı sırada çarpımlarıyla elde edilen elemanlar arasındaki (ab ve ba elemanları), K nın bazı elemanlarına bağlı olarak ifade edilen, eşitliğe

değiştirme bağıntısı adı verilir, [38]. Eğer bir cebirin çarpımları değişmeli olmayan her bir üreteç çifti için bir değiştirme bağıntısı mevcut ise bu cebire **deformasyonlu cebir** adı verilir.

Örnek 3.2

$$\mathbb{C}_q[x, y] = \mathbb{C}\langle x, y \rangle / \langle xy - qyx \rangle, \quad q \in \mathbb{C} - \{0\}$$

ile ifade edilen deformasyonlu polinomlar cebiri, ilk defa Manin tarafından çalışılmıştır ve kuantum düzlem olarak adlandırılır, [4]. Burada görüldüğü, gibi x ve y arasındaki değiştirme bağıntısı $xy = qyx$ şeklindedir. Eğer buradaki q kompleks deformasyon parametresi q nun, $q \rightarrow 1$ limit durumu düşünülürse bildiğimiz kompleks sayılar cismi üzerinde polinomların değişmeli cebirini elde ederiz. Elbette x ve y arasında keyfi olarak farklı değiştirme bağıntıları tanımlayarak farklı deformasyonlu, değişmeli olmayan polinomlar cebiri elde edilebilir. Fakat elde edilen deformasyonlu cebirin, ileriye dönük uygulamaları olabilmesi için bazı Hopf cebiri gibi cebirsel yapılara sahip olması gerekir. Bu yüzden deformasyonlu cebir ile bu cebirin deforme edilmeden önceki halinin Hopf cebiri arasındaki ilişkiyi genel anlamda ifade edeceğiz.

Çalışmanın devam eden kısımlarındaki tanım ve teoremlerin daha iyi ifade edilebilmesi ve anlaşılabilmesi için deformasyon kavramına ilişkin bazı genel tanımlamalar yapılmalıdır.

Tanım 3.3 $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ ile üretilen bir birleşmeli serbest cebir olmak üzere en genel anlamda **deformasyonlu polinomlar cebiri**

$$K_D[x_1, \dots, x_n] = K\langle x_1, \dots, x_n \rangle / I \quad (3.2)$$

ile tanımlanır. Burada I ,

$$x_i x_j = A_{ij} x_j x_i + \sum_k B_k f_k(x_1, \dots, x_n), \quad A_{ij} \in K - \{0\}, B_k \in K, \quad i \neq j \quad (3.3)$$

değiştirme bağıntıları ile üretilen bir ideal ve f_k , $x_i x_j$ den farklı monomial (tek terim) dir. Burada A_{ij} ve B_k katsayılarına **deformasyon parametreleri** adı verilir. Bütün B_k ların sıfır olduğu değiştirme bağıntısına **homojen değiştirme bağıntısı** adı verilir.

Homojen değiştirme bağıntılı bir polinomlar cebirini $K_H[x_1, \dots, x_n]$ ile gösterelim. Bütün A_{ij} değiştirme parametreleri özel olarak 1_K alınırsa homojen değiştirme bağıntılı $K_H[x_1, \dots, x_n]$, polinomların değişmeli cebiri $K[x_1, \dots, x_n]$ olur. Biz bu tez boyunca genellikle homojen değiştirme bağıntılı deformasyonlu cebirleri ele alacağız ve 6.Bölümde de homojen deformasyonlu cebirler ile homojen olmayan deformasyonlu cebirler arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

şimdi değişmeli koordinatlar üzerindeki polinomlar cebirinin Hopf cebiri yapısının yardımı ile nasıl homojen deformasyonlu bir polinomlar cebiri elde edilebileceğini ifade eden teoremi verelim.

Teorem 3.4 Kabul edelim ki $K[x_1, \dots, x_n]$ üzerinde bir Hopf cebiri yapısı verilsin. Eğer verilen bu Hopf cebiri yapısı, $K_H[x_1, \dots, x_n]$ üzerinde de mevcut ise $K_H[x_1, \dots, x_n]$ cebirinin deformasyon parametre sayısı en fazla $\frac{n.(n-1)}{2}$ kadardır.

İspat: Kabul edelim ki $K[x_1, \dots, x_n]$ polinomların değişmeli cebiri, Hopf cebiri aksiyomlarını sağlayan (Δ, ε, S) dönüşümler üçlüsü ile donatılsın. Diğer taraftan $K_H[x_1, \dots, x_n]$ nin koordinatları arasında $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$, $q_{ij} \in K - \{0\}$ şeklinde homojen deformasyonlu değiştirme bağıntıları mevcut olsun. Bu durumda $(q_{ij})^{-1} = q_{ji}$ olduğu açıktır. Böylelikle birinci koordinat diğer koordinatlarla eşleştirildiğinde $(n-1)$ farklı parametre, ikinci koordinat $(n-2)$ farklı deformasyon parametresi üretir. Böyle devam edilirse toplam

farklı parametre sayısı $\binom{n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}$ dir. Diğer taraftan $K_H[x_1, \dots, x_n]$ deformasyonlu

cebirin de, yukarıda ki Hopf cebiri yapısına sahip olduğu gerçeği göz önünde bulundurulur ise eşçarpım dönüşümü Δ nın deformasyonlu cebir üzerinde homomorfizma olma özelliğinden $\Delta(x_i x_j - q_{ij} x_j x_i) = 0 = 0 \otimes 0$ olduğu görülür. Bu ise, bazı deformasyon parametrelerinin diğerleri cinsinden yazılmasını gerektirebilir. Yani, parametre sayısı en fazla $\frac{n.(n-1)}{2}$ dir.

Sonuç: Yukarıdaki teoremin sonucu olarak, cebirin Hopf cebiri yapısını değiştirdiğimizde farklı deformasyon parametreleri ve bunun sonucu olarak farklı defor-

masyonlu cebirlerin elde edilebileceği görülür. Buna göre bir değişmeli polinomlar cebirinin, üzerinde tanımlanabilecek bütün Hopf cebiri yapılarının sınıflandırılması ihtiyacı doğar. Eğer bu sınıflandırma verilen bir cebir için en genel anlamda yapılabilirse, ileriye dönük olarak bu cebirin deformasyonları için hem fiziksel hem diferansiyel geometri açısından çeşitli çalışmalara yol açılabilir. Şimdi bu yaklaşımı üç koordinatlı polinomlar cebirine uygulayalım.

3.1 Üç Değişkenli Polinomlar Cebirinin Hopf Cebiri ve Deformasyonu

Teorem 3.5 Değişmeli üç adet x, y, z koordinatları üretilen, kompleks sayılar cismi üzerindeki polinomlar cebiri $\mathbb{C}[x, y, z]$ aşağıdaki lineer- cebir homomorfizması (eşçarpım) ile birlikte bir iki-cebir yapısına sahiptir fakat Hopf cebiri yapısına sahip değildir.

$$\Delta_A(x) = x \otimes x, \Delta_A(y) = y \otimes z + 1 \otimes y + y \otimes x, \Delta_A(z) = z \otimes x + x \otimes z$$

İspat: Bir eş-cebirin Hopf cebiri olduğunu göstermek için, gerekli olan aksiyomlardan faydalanarak eşbirim ve eşters dönüşümlerinin koordinatlar üzerine nasıl etki ettiğini irdelemek yeterlidir:

$$\begin{aligned} m((\varepsilon_A \otimes \text{id})\Delta_A(x)) &= \text{id}(x) = m(\text{id} \otimes \varepsilon_A)\Delta_A(x) \\ m((\varepsilon_A \otimes \text{id})(x \otimes x)) &= x = m(\text{id} \otimes \varepsilon_A)(x \otimes x) \\ m((\varepsilon_A(x) \otimes x)) &= x = m((x \otimes \varepsilon_A(x))) \\ \varepsilon_A(x)x &= x = x\varepsilon_A(x) \\ \Rightarrow \varepsilon_A(x) &= 1 \\ m((\varepsilon_A \otimes \text{id})\Delta_A(y)) &= \text{id}(y) = m(\text{id} \otimes \varepsilon_A)\Delta_A(y) \\ m((\varepsilon_A \otimes \text{id})(y \otimes z + 1 \otimes y + x \otimes y)) &= y = m(\text{id} \otimes \varepsilon_A)(\Delta_A(y)) \\ m((\varepsilon_A(y) \otimes z + 1 \otimes y + \varepsilon_A(y) \otimes x)) &= y = m(\text{id} \otimes \varepsilon_A)(\Delta_A(y)) \\ \varepsilon_A(y)z + y + \varepsilon_A(y)x &= y \\ \Rightarrow \varepsilon_A(y) &= 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $\varepsilon_A(z) = 0$ bulunur. Böylelikle cebirimiz bir iki-cebir yapısına sahiptir. Diğer taraftan benzer bir şekilde eşters dönüşümü ile alakalı aksiyomdan faydalanarak, y koordinatına etki eden bir eşters dönüşümünün mevcut olmadığı görülebilir. Dolayısı ile yukarıdaki dönüşüm $\mathbb{C}[x, y, z]$ üzerinde sadece bir iki-cebir yapısı doğuracaktır. Sonuç olarak yukarıda verilen eşçarpım yardımı ile elde edilecek olan deformasyonlu

cebiri de sadece iki-cebir yapısına sahip olur ve bu deformasyonlu cebir üzerinde Hopf cebiri yapısına sahip bir diferansiyel Hopf cebir elde edilemez. Bu ise cebirsel yönden zayıflığı gösterdiğinden istemediğimiz bir durumdur.

Teorem 3.6 Değişmeli üç adet x, y, z koordinatları ile üretilen, kompleks sayılar cismi üzerindeki, x in tersi ile genişletilmiş, polinomlar cebiri $\mathbb{C}[x, y, z]$ aşağıda tanımlanan lineer homomorfizmalar Δ_A, ε_A ve lineer antihomomorfizma S_A ile birlikte bir Hopf cebiri yapısına sahiptir:

$$\Delta_A(x) = x \otimes x, \Delta_A(y) = x^m \otimes y + y \otimes x^m, \Delta_A(z) = x^n \otimes z + z \otimes x^n, m, n \in \mathbb{Z} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_A(x) = 1, \varepsilon_A(y) = 0, \varepsilon_A(z) = 0 \quad (3.5)$$

$$S_A(x) = x^{-1}, S_A(y) = -x^{-m}yx^{-m}, S_A(z) = -x^{-n}zx^{-n} \quad (3.6)$$

İspat: Δ_A, ε_A ve S_A dönüşümleri için Hopf cebiri aksiyomlarının sağlandığını gösterelim: (2.1) in sağlandığı aşikardır. (2.2) nin sağlandığını aşağıda gösterelim:

$$\begin{aligned} m((\varepsilon_A \otimes \text{id})\Delta_A(x)) &= \text{id}(x) = m(\text{id} \otimes \varepsilon_A)\Delta_A(x) \\ m((\varepsilon_A \otimes \text{id})(x \otimes x)) &= x = m(\text{id} \otimes \varepsilon_A)(x \otimes x) \\ m((\varepsilon_A(x) \otimes x)) &= x = m((x \otimes \varepsilon_A(x))) \\ \varepsilon_A(x)x &= x = x\varepsilon_A(x) \\ m((\varepsilon_A \otimes \text{id})\Delta_A(y)) &= \text{id}(y) = m(\text{id} \otimes \varepsilon_A)\Delta_A(y) \\ m((\varepsilon_A \otimes \text{id})(x^m \otimes y + y \otimes x^m)) &= y = m(\text{id} \otimes \varepsilon_A)(x^m \otimes y + y \otimes x^m) \\ m((\varepsilon_A(x^m) \otimes y + \varepsilon_A(y) \otimes x^m)) &= y = m(x^m \otimes \varepsilon_A(y) + y \otimes \varepsilon_A(x^m)) \\ \varepsilon_A(x^m)y + \varepsilon_A(y)x^m &= y = x^m\varepsilon_A(y) + y\varepsilon_A(x^m) \end{aligned}$$

(2.3) ün sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned} m((S_A \otimes \text{id})\Delta_A(x)) &= \varepsilon(x) = m(\text{id} \otimes S_A)\Delta_A(x) \\ m((S_A \otimes \text{id})(x \otimes x)) &= 1 = m(\text{id} \otimes S_A)(x \otimes x) \\ m((S_A(x) \otimes x)) &= 1 = m((x \otimes S_A(x))) \\ S_A(x)x &= 1 = xS_A(x) \\ m((S_A \otimes \text{id})\Delta_A(y)) &= \varepsilon(y) = m(\text{id} \otimes S_A)\Delta_A(y) \\ m((S_A \otimes \text{id})(x^m \otimes y + y \otimes x^m)) &= 0 = m(\text{id} \otimes S_A)(x^m \otimes y + y \otimes x^m) \\ m((S_A(x^m) \otimes y + S_A(y) \otimes x^m)) &= 0 = m(x^m \otimes S_A(y) + y \otimes S_A(x^m)) \\ S_A(x^m)y + S_A(y)x^m &= 0 = x^mS_A(y) + yS_A(x^m) \end{aligned}$$

Şu halde söz konusu polinomlar cebiri $\mathbb{C}[x, y, z]$, Δ_A , ε_A ve S_A dönüşümleri ile birlikte bir Hopf cebiridir.

Teorem 3.7 Kabul edelimki homojen deformasyonlu polinomlar cebiri $\mathbb{C}_h[x, y, z]$ yukarıda verilen Δ_A , ε_A ve S_A dönüşümleri ile birlikte bir Hopf cebiri yapısına sahip olsun. Bu durumda her bir koordinat çifti için sadece aşağıdaki değiştirme bağıntıları mevcuttur:

$$xy = pyx, xz = qzx, yz = p^{-n}q^m zy, p, q \in \mathbb{C} - \{0\} \quad (3.7)$$

İspat: Kabul edelim ki p, q, r ler birbirinden bağımsız kompleks parametreler ve $xy = pyx, xz = qzx, yz = rzy$ şeklinde koordinatlar arasında değiştirme bağıntıları mevcut olsun. $\mathbb{C}_h[x, y, z]$ cebiri yukarıda verilen Δ_A , ε_A ve S_A dönüşümleri ile birlikte bir Hopf cebiri oluşturduğundan, Δ_A bir cebir homomorfizmasıdır. Buradan

$$\Delta(xy - pyx) = 0, \Delta(xz - qzx) = 0, \Delta(yz - rzy) = 0$$

bağıntıları mevcuttur. Böylece

$$\begin{aligned} \Delta(yz - rzy) &= 0 \\ \Rightarrow (x^m \otimes y + y \otimes x^m)(x^n \otimes z + z \otimes x^n) - r(x^n \otimes z + z \otimes x^n)(x^m \otimes y + y \otimes x^m) &= 0 \\ \Rightarrow (q^m - rp^n)zx^m \otimes yx^n + yx^n \otimes (q^m - rp^n)zx^m &= 0 \\ \Rightarrow r &= q^m p^{-n} \end{aligned}$$

olup $r = p^{-n}q^m$ eşitliğini elde ederiz. Sonuç olarak bu eş-çarpıma karşılık gelen aşağıdaki eş-birim ve eş-ters dönüşümlerini Hopf cebiri aksiyomlarından elde ederiz:

$$\varepsilon(x) = 1, \varepsilon(y) = 0, \varepsilon(z) = 0, \quad (3.8)$$

$$S(x) = x^{-1}, S(y) = -x^{-m}yx^{-m}, S(z) = -x^{-n}zx^{-n} \quad (3.9)$$

Not: Yukarıda elde edilen değişmeli olmayan, yani deformasyonlu Hopf cebirini tez boyunca $A_{pq}(3)$ ile göstereceğiz. Şimdi $A_{pq}(3)$ üzerindeki bazı temel diferansiyel cebir yapılarını inceleyelim.

DİFERANSİYEL CEBİR

Tanım 4.1 A , bir K -cebiri ve Ω , A cebiri üzerinde bir bimodül olsun.

$$d : A \rightarrow \Omega \quad (4.1)$$

bir lineer dönüşüm olmak üzere eğer d

$$d(ab) = d(a)b + ad(b) \quad (4.2)$$

Leibniz kuralını sağlarsa, (Ω, d) ikilisine A cebiri üzerinde birinci dereceden diferansiyel cebir veya diferansiyel hesap denir, [39].

Örnek 4.2 $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye kendisi ve bütün türevleri sürekli olan fonksiyonların cebiri olsun. $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathbb{R}^n$ için bir koordinat fonksiyonları olmak üzere,

$$d = dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

şeklinde tanımlanan toplam diferansiyel operatörü ile

$$\sum_{k=1}^n f_i dx_i, f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

şeklinde diferansiyellerle üretilen elemanların oluşturduğu uzay(kotanjant uzay), bir diferansiyel cebir oluşturur.

4.1 Hopf Cebirleri Üzerinde Diferansiyel Hesap

Tanım 4.3 $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ bir Hopf cebiri ve Ω , A -bimodül olsun. $\Delta^R : \Omega \rightarrow \Omega \otimes A$ dönüşümü lineer olmak üzere, eğer

$$\Delta^R(a.p + a'.p') = \Delta(a)\Delta^R(p) + \Delta(a')\Delta^R(p'), \quad a, a' \in A, p, p' \in \Omega \quad (4.3)$$

$$(\Delta^R \otimes \text{id}) \circ \Delta^R = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta^R \quad (4.4)$$

$$m \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta^R = \text{id} \quad (4.5)$$

koşulları sağlanıyorsa (Ω, Δ^R) ikilisine bir sağ kovaryant(covariant) bimodül denir, [12].

Tanım 4.4 $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ bir Hopf cebiri ve Ω , A -bimodül olsun. $\Delta^L : \Omega \rightarrow A \otimes \Omega$ dönüşümü lineer olmak üzere, eğer

$$\Delta^L(a.p + a'.p') = \Delta(a)\Delta^L(p) + \Delta(a')\Delta^L(p'), \quad a, a' \in A, p, p' \in \Omega \quad (4.6)$$

$$(\text{id} \otimes \Delta^L) \circ \Delta^L = (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta^L \quad (4.7)$$

$$m \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta^L = \text{id} \quad (4.8)$$

koşulları sağlanıyorsa (Ω, Δ^L) ikilisine bir sol kovaryant(covariant) bimodül denir, [12].

Şimdi Hopf cebirleri üzerinde diferansiyel geometri çalışmaya olanak sağlayacak, diferansiyel hesap oluşturmayla alakalı, Woronowicz tarafından verilen temel yaklaşımı bir yardımcı teorem olarak ifade edelim.

Yardımcı Teorem 4.5 $(A, \Delta, \varepsilon, S)$, bir Hopf cebiri ve Ω , A -bimodül olsun. Eğer (Ω, d) , A üzerinde bir diferansiyel cebir ise,

$$\Delta^R(da) = (d \otimes \text{id}) \circ \Delta(a), \quad a \in A \quad (4.9)$$

$$\Delta^L(da) = (\text{id} \otimes d) \circ \Delta(a), \quad a \in A \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanan Δ^R, Δ^L dönüşümleri ile birlikte Ω , sırasıyla sağ ve sol kovaryant(covariant) bimodüldür, [12].

Tanım 4.6 $(A, \Delta, \varepsilon, S)$, bir Hopf cebiri ve Ω , A -bimodül olsun. (Ω, d) , A üzerinde bir diferansiyel cebir ve Ω yukarıdaki yardımcı teoremde tanımlanan sağ ve sol kovaryant dönüşümlerle donatılmış olsun. Eğer

$$(\text{id} \otimes \Delta^R) \circ \Delta^L = (\Delta^L \otimes \text{id}) \circ \Delta^R$$

şartı da sağlanırsa (Ω, d) diferansiyel cebirine bikovaryant(bicovariant) diferansiyel hesap denir, [12].

Yardımcı Teorem 4.7 $F = \{a_1 dx b_1 + a_2 dy b_2 + a_3 dz b_3 : a_i, b_i \in A_{pq}(3)\}$ şeklinde tanımlanan dx, dy, dz elemanları ile üretilen serbest $A_{pq}(3)$ -bimodülü ele alalım. x, y, z ve dx, dy, dz elemanları arasında

$$xdx = Adxx, xdy = Bdyx + Cdx y, xdz = Ddzx + Edxz \quad (4.11)$$

$$ydx = Fdxy + Gdyx, ydy = Hdy y, ydz = Idzy + Jdyz \quad (4.12)$$

$$zdx = Kdxz + Ldzx, zdy = Mdyz + Ndzy, zdz = Odzz \quad (4.13)$$

,büyük harflerle verilen değiştirme katsayıları kompleks sayılar olacak şekilde, değiştirme bağıntıları mevcut olsun ve $\mathbf{N}$ de, x, y, z ile yukarıda verilen değiştirme bağıntılarına sahip olan dx, dy, dz ile üretilen F nin bir alt bimodülü olsun. Bu durumda, sırasıyla x, y, z üreteçlerini dx, dy, dz şeklinde elemanlara götüren ve Leibniz koşulunu sağlayan $d : A_{pq}(3) \rightarrow \Omega_1 = F/\mathbf{N}$ bir lineer dönüşümü için (Ω_1, d) ikilisi, deformasyonlu $A_{pq}(3)$ cebiri üzerinde birinci dereceden diferansiyel cebirdir.

İspat: F serbest modül, Ω_1 bölüm uzayı ve d nin tanımlarından (Ω_1, d) nin $A_{pq}(3)$ üzerinde birinci dereceden diferansiyel hesap olduğu aşıkardır.

Not: Eğer $A_{pq}(3)$ deformasyonlu cebirin deformasyon parametreleri olan p ve q yu özel olarak 1 seçersek; yani deformasyon ortadan kaldırılırsa, bildiğimiz üç değişkenli polinomlar cebirini elde ederiz. Dolayısıyla deformasyonlu cebir üzerindeki diferansiyel hesabı veren yukarıdaki bağıntılardaki katsayıların p ve q parametrelerine bağlı olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz.

Teorem 4.8 $A_{pq}(3)$ için yukarıda verilen birinci dereceden diferansiyel hesap (Ω_1, d) üzerinde aşağıdaki bağıntılarla birlikte bikovaryant diferansiyel hesap oluşturulur:

$$xdx = dxx, xdy = pdyx, xdz = qdzx \quad (4.14)$$

$$\Delta^L(ydx - Fdxy - Gdxy) = 0, \Delta^L(ydy - Hdyy) = 0, \Delta^L(ydz - Idzy - Jdzy) = 0$$

$$\Delta^L(zdx - Kdxz - Ldzx) = 0, \Delta^L(zdy - Mdyz - Ndzy) = 0, \Delta^L(zdz - Odzz) = 0$$

sonucunu elde ederiz. Elde ettiğimiz bu sonucu, Δ^R ve Δ^L nin tanımlarından faydalanarak daha sade bir şekilde yazarsak, büyük harflerle verilen değiştirme katsayıları arasında bazı bağıntılar elde edilir. Diğer taraftan, x, y, z arasındaki değiştirme bağıntılarından faydalanarak

$$d(xy - pyx) = 0, d(xz - qzx) = 0, d(yz - p^{-n}q^mzy) = 0$$

$$(xy - pyx)dx = 0, d(xz - qzx)dx = 0, (yz - p^{-n}q^mzy)dx = 0$$

$$(xy - pyx)dy = 0, d(xz - qzx)dy = 0, (yz - p^{-n}q^mzy)dy = 0$$

$$(xy - pyx)dz = 0, d(xz - qzx)dz = 0, (yz - p^{-n}q^mzy)dz = 0$$

sonucunu rahatlıkla görebiliriz. Yukarıdaki ifadeler, d nin Leibniz kuralını sağladığı gerçeği ve (4.11-4.13) kullanılarak açık bir şekilde yazılırsa, (4.11-4.13) deki değiştirme katsayılarından oluşan bazı bağıntılar elde edilir. Bu bağıntılar yukarıda Δ^R ve Δ^L yardımıyla elde edilen bağıntılarla birlikte çözülürse, aradığımız değiştirme katsayıları, (4.14-4.16) de verilen şekilde olur. Yukarıda bahsedilen yollarla elde edilen değiştirme katsayılarının doğruluğunu teyit etmek için Δ^R ve Δ^L dönüşümlerinin (4.14-4.16) ile verilen bağıntıları koruduğunu göstermek yeterlidir.

Şimdi (4.14-4.16) bağıntıları ile verilen, birinci dereceden diferansiyel cebir(diferansiyel 1-formların uzayı), (Ω_1, d) yi yüksek mertebeden diferansiyel cebire(diferansiyel n -formların uzayı) genelleştirebiliriz. Bunun için d yi dış diferansiyel operatörüne genelleştirmemiz lazım, yani;

$$A_{pq}(3) \cong \Omega_0 \xrightarrow{d} \Omega_1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega_n \xrightarrow{d} \dots$$

şeklinde, d bir diferansiyel k -formu, diferansiyel $(k+1)$ -forma dönüştürsün ve aşağıdaki dereceli Leibniz ve nilpotentlik şartlarını sağlasın:

$$d(u \wedge v) = d(u) \wedge v + (-1)^n u \wedge d(v), u \in \Omega_n$$

$$d \circ d := d^2 = 0$$

Burada, diferansiyel n -formların uzayı Ω_n , aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\Omega_n = \left\{ \sum_{e \in M_n} a_e dx_{e(1)} \wedge dx_{e(2)} \wedge \dots \wedge dx_{e(n)} \mid a_e \in \Omega_0 \right\}$$

$$M_n = \{e \mid e: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, \text{ bir fonksiyon}\}$$

Burada $x_1 := x, x_2 := y, x_3 := z$ olarak tanımlanıyor. Şimdi, çarpma işlemi “ $\wedge$ ” nin iki elemanın çarpımı arasında nasıl bir değiştirme bağıntısı getirdiğini açıklığa kavuşturacak teoremi verelim.

Teorem 4.9 dx, dy, dz elemanları arasında aşağıdaki deformasyonlu anti-simetrik bağıntılar mevcuttur:

$$dx \wedge dy = -pdy \wedge dx, dx \wedge dz = -qdz \wedge dx, dy \wedge dz = -p^{-n}q^m dz \wedge dy \quad (4.17)$$

$$dx \wedge dx = 0, dy \wedge dy = 0, dz \wedge dz = 0 \quad (4.18)$$

İspat: Dış diferansiyel operatörü d nin tanımını göz önünde bulundurarak, d yi birinci dereceden diferansiyel hesaptaki x, y, z ve dx, dy, dz arasındaki değiştirme bağıntılarına uygularsak istenilen sonuç çıkar. Örneğin,

$$\begin{aligned} xdy &= pdyx \Rightarrow d(xdy) = d(pdyx) \\ &\Rightarrow dx \wedge dy + xd^2y = pd^2yx - pdy \wedge dx \\ &\Rightarrow dx \wedge dy = -pdy \wedge dx \end{aligned}$$

Dikkat edersek bu bağıntılardan, deformasyon parametreleri p ve q nun özel olarak 1 olması durumunda, diferansiyeller arasındaki bildiğimiz anti-simetrik bağıntıları elde ederiz. Elde ettiğimiz bu bağıntılara göre $\Omega_n = 0, n \geq 4$ sonucunu rahatlıkla görebiliriz.

Buna göre, sağ ve sol bikovaryant dönüşümlerden faydalanan diferansiyel cebir üzerinde bir Hopf cebiri oluşturulabilir, [40]. Bu durum aşağıdaki teoremden açıklanmaktadır.

Teorem 4.10 $\Omega = \Omega_0 \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus \Omega_3 \oplus 0 \dots$ dersek Ω , aşağıdaki şekilde tanımlanan bir dönüşüm $\Delta: \Omega \rightarrow \Omega \otimes \Omega$ ile birlikte $\mathbb{Z}$ -dereceli bir Hopf cebiri oluşturur.

$$\Delta(dx) = dx \otimes x + x \otimes dx \quad (4.19)$$

$$\Delta(dy) = dxmx^{m-1} \otimes y + dy \otimes x^m + x^m \otimes dy + y \otimes dxmx^{m-1} \quad (4.20)$$

$$\Delta(dz) = dxnx^{n-1} \otimes z + dz \otimes x^n + x^n \otimes dz + z \otimes dxnx^{n-1} \quad (4.21)$$

İspat: Önce Ω nın $\mathbb{Z}$ -dereceli bir cebir olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten,

$$\Omega_i \Omega_j \subseteq \Omega_{i+j}, i, j \in \mathbb{Z}$$

olduğu Teorem 4.9 ile verilen bağıntılardan rahatlıkla görülmektedir. Diğer taraftan, Δ nın tanımına bakarsak $\Delta = \Delta^R + \Delta^L$ olduğunu görebiliriz. Buna göre Δ^R ve Δ^L nın özelliklerinden ve Hopf cebiri olma aksiyomlarından Δ nın, bir Hopf cebiri oluşturmak için gerekli olan eş-çarpım olduğu görülür. Eş-birim ve eş-ters dönüşümlerinin diferansiyeller üzerindeki etkileri Hopf cebiri aksiyomlarından rahatlıkla gösterilebilir.

Şimdi $A_{pq}(3)$ üzerinde oluşturduğumuz deformasyonlu diferansiyel hesaba karşılık gelen $A_{pq}(3)$ üzerine etki eden kısmi türev operatörlerini (deformasyonlu tanjant vektörleri) belirleyelim.

Teorem 4.11

$$\partial_x : A_{pq}(3) \rightarrow A_{pq}(3)$$

$$\partial_y : A_{pq}(3) \rightarrow A_{pq}(3)$$

$$\partial_z : A_{pq}(3) \rightarrow A_{pq}(3)$$

olmak üzere $d = dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z$ şeklinde yazılabilen $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ lineer dönüşümleri her zaman mevcuttur.

İspat: d nin Leibniz kuralını sağladığı gerçeği ve Teorem 4.8 deki değiştirme bağıntılarından, her $f \in A_{pq}(3)$ için

$$d(f) = dx f_x + dy f_y + dz f_z \in \Omega_1$$

olacak şekilde $f_x, f_y, f_z \in A_{pq}(3)$ elemanları mevcuttur. Buna göre dönüşümleri

$$\partial_x(f) := f_x, \partial_y(f) := f_y, \partial_z(f) := f_z$$

şeklinde düşünebiliriz. Sonuç olarak bu dönüşümler bir $x^i y^j z^k \in A_{pq}(3)$ elemanına aşağıdaki şekilde etki ederler:

$$\partial_x (x^i y^j z^k) = i x^{i-1} y^j z^k \quad (4.22)$$

$$\partial_y (x^i y^j z^k) = j p^i x^i y^{j-1} z^k \quad (4.23)$$

$$\partial_z (x^i y^j z^k) = k p^{-nj} q^{mj+i} x^i y^j z^{k-1} \quad (4.24)$$

Not: Bu dönüşümler bildiğimiz kısmi türev operatörlerinin deformasyonlu halidir, yani; $p, q \rightarrow 1$ durumunda $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ dönüşümleri klasik kısmi türev operatörleri halini alır.

Yukarıda elde ettiğimiz deformasyonlu kısmi türev operatörlerine karşılık gelen Weyl cebirini oluşturabiliriz. Bunu yapmak için öncelikle $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ operatörlerinin x, y, z elemanlarıyla ve kendi aralarındaki değiştirme bağıntılarına ihtiyaç duyulacaktır. Mesela, bir $f \in A_{pq}(3)$ elemanı için Leibniz kuralından,

$$\begin{aligned} (dx \partial_x + dy \partial_y + dz \partial_z)(xf) &= dx f + x d(f) = dx f + x(dx \partial_x + dy \partial_y + dz \partial_z)(f) \\ &= [dx(1 + x \partial_x) + dy(px \partial_y) + dz(qx \partial_z)](f) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik ise x ile kısmi türev operatörleri arasındaki değiştirme bağıntılarını aşağıdaki gibi verir:

$$\partial_x x = 1 + x \partial_x, \partial_y x = px \partial_y, \partial_z x = qx \partial_z \quad (4.25)$$

Benzer şekilde y ve z elemanlarının kısmi türev operatörleri ile değiştirme bağıntıları

$$\partial_x y = p^{-1} y \partial_x, \partial_y y = 1 + y \partial_y, \partial_z y = p^{-n} q^m y \partial_z \quad (4.26)$$

$$\partial_x z = q^{-1} z \partial_x, \partial_y z = p^n q^{-m} z \partial_y, \partial_z z = 1 + z \partial_z \quad (4.27)$$

biçimindedir. Şimdi de en son olarak kısmi türev operatörlerinin kendi aralarındaki değiştirme bağıntılarını araştıralım. Bunun için dış diferansiyel operatörünün, $d \circ d = d^2 = 0$ şeklinde verilen nilpotentlik özelliğinde, $d = dx \partial_x + dy \partial_y + dz \partial_z$ eşitliğini aşağıdaki gibi kullanmamız gerekir:

$$\begin{aligned} d \circ (dx \partial_x + dy \partial_y + dz \partial_z) &= d^2 x \partial_x - dx \wedge (dx \partial_x \partial_x + dy \partial_y \partial_x + dz \partial_z \partial_x) \\ &\quad + d^2 y \partial_y - dy \wedge (dx \partial_x \partial_y + dy \partial_y \partial_y + dz \partial_z \partial_y) \\ &\quad + d^2 z \partial_z - dz \wedge (dx \partial_x \partial_z + dy \partial_y \partial_z + dz \partial_z \partial_z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Teorem 4.9 ile verilen diferansiyeller arasındaki değiştirme bağıntılarını yukarıda elde ettiğimiz eşitlikte uygun bir şekilde kullanırsak

$$dy \wedge dx(p\partial_y\partial_x - \partial_x\partial_y) + dz \wedge dx(q\partial_z\partial_x - \partial_x\partial_z) + dy \wedge dz(p^{-n}q^m\partial_z\partial_y - \partial_y\partial_z) = 0$$

şeklinde diferansiyellerin ikişer ikişer dış ęarpımlarının lineer kombinasyonunu elde ederiz. Yukarıdaki dış ęarpımların lineer bağımsız olmaları geręeęinden faydalanarak

$$\partial_x\partial_y = p\partial_y\partial_x, \partial_x\partial_z = q\partial_z\partial_x, \partial_y\partial_z = p^{-n}q^m\partial_z\partial_y \quad (4.28)$$

sonucuna ulaşırız. Sonuç olarak $A_{pq}(3)$ kuantum uzayına karşılık gelen Weyl cebiri

$$W = \mathbb{C}\langle x, y, z, \partial_x, \partial_y, \partial_z \rangle / I$$

biçiminde tanımlanır. Burada I , (3.7) ve (4.25-4.28) ile verilen bağıntılarla oluşturulan bir ideal olarak tanımlanıyor.

BÖLÜM 5

CARTAN MAURER FORMLARI

Klasik diferansiyel geometride herhangi bir Lie grubu G için sağ invaryant 1-form veya Cartan-Maurer form

$$d(g)g^{-1}, \quad g \in G \quad (5.1)$$

olarak tanımlanır. Daha önce belirttiğimiz gibi Kuantum gruplar üzerindeki diferansiyel hesap, kuantum grupların Hopf cebiri yapısından faydalanılarak oluşturulabilmektedir. Ayrıca bilinen tüm kuantum grup örnekleri, klasik diferansiyel geometride diferansiyellenebilir manifold olarak tanımlanan Lie grupların “deformasyonu” olarak adlandırılmaktadır. Kuantum gruplar ve Lie gruplar arasındaki bu ilişkiyi göz önünde bulunduran Woronowicz, herhangi bir Hopf cebiri H için sağ invaryant Cartan-Maurer formunu

$$w(h) := w_h = m((d \otimes S)\Delta(h)) \quad (5.2)$$

olarak formüle etmiştir, [12]. (5.2) formülü, klasik diferansiyel geometride yapılan çalışmaları değişmeli olmayan uzaylara uyarlamak için anahtar bir rol oynamaktadır. Fakat formülden görüldüğü gibi, bu geçişin sağlanması için, verilen değişmeli olmayan uzaylar üzerinde Hopf cebir yapısı oluşturmak hayati bir öneme sahiptir.

Buna göre $A_{pq}(3)$ ün Hopf cebiri yapısı düşünülürse koordinatlara karşılık gelen Cartan-Maurer form elemanları

$$w_x = m((d \otimes S)\Delta(x)) = m((d \otimes S)(x \otimes x)) = m((d(x) \otimes S(x)) = dx x^{-1} \quad (5.3)$$

$$w_y = m((d \otimes S)\Delta(x)) = m((d \otimes S)(x^m \otimes y + y \otimes x^m)) = dy x^{-m} - m dx x^{-1} y x^{-m} \quad (5.4)$$

$$w_z = m((d \otimes S)\Delta(z)) = m((d \otimes S)(x^n \otimes z + z \otimes x^n)) = dzx^{-n} - ndxx^{-1}zx^{-n} \quad (5.5)$$

biçimindedir. $A_{pq}(3)$ deki tüm elemanlara karşılık gelen Cartan Maurer formların kümesi

$$W = \{w_f : f \in A_{pq}(3)\} \quad (5.6)$$

şeklindedir. Ayrıca her bir w_f elemanının,

$$w_f = f_x w_x + f_y w_y + f_z w_z, f_x, f_y, f_z \in A_{pq}(3)$$

olarak yazılabileceği kolaylıkla gösterilebilir. Buna göre W , üreteçleri w_x, w_y, w_z olan, $A_{pq}(3)$ üzerinde bir modül yapısına sahiptir. Cartan-Maurer formlarının cebirini açık bir şekilde görmek için bazı değiştirme bağıntılarına ihtiyaç duyarız.

Yardımcı Teorem 5.1 W nın üreteçleri w_x, w_y, w_z ile x, y, z arasındaki değiştirme bağıntıları

$$xw_x = w_x x, xw_y = pw_y x, xw_z = qw_z x \quad (5.7)$$

$$yw_x = w_x y, yw_y = p^m w_y y, yw_z = q^m w_z y \quad (5.8)$$

$$zw_x = w_x z, zw_y = p^n w_y z, zw_z = q^n w_z z \quad (5.9)$$

şeklindedir.

İspat: (3.7), (4.14-4.16) değiştirme bağıntıları ve (5.3-5.5) birlikte ele alınırsa, örneğin y ile w_y arasındaki değiştirme bağıntısı

$$yw_y = y(dy x^{-m} - m dxx^{-1} y x^{-m}) = p^m dy x^{-m} y - p^m m dxx^{-1} y x^{-m} y = p^m w_y y$$

şeklinde bulunur. Diğer bağıntılar da benzer şekilde kontrol edilebilir.

Yardımcı Teorem 5.2 W nın üreteçleri w_x, w_y, w_z ler arasındaki değiştirme bağıntıları

$$w_x \wedge w_y = -w_y \wedge w_x, w_x \wedge w_z = -w_z \wedge w_x, w_y \wedge w_z = -w_z \wedge w_y \quad (5.10)$$

şeklindedir.

İspat: Gerçekten (3.7), (4.14-4.18) değiştirme bağıntıları düşünülürse,

$$\begin{aligned}
w_x \wedge w_y &= dxx^{-1} \wedge (dyx^{-m} - mdxx^{-1}yx^{-m}) \\
&= -dyx^{-m} \wedge dxx^{-1} + mdxx^{-1}yx^{-m} \wedge dxx^{-1} \\
&= -w_y \wedge w_x
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Diğer bağıntılarda benzer biçimde kontrol edilebilir.

Teorem 5.3 Yukarıda elde edilen değiştirme bağıntılarına sahip olan Cartan-Maurer formların cebiri W nın üreteçlerinin sahip olduğu değiştirme bağıntıları, aşağıdaki şekilde tanımlanan dönüşüm altında invariant kalır:

$$\Delta_W : W \rightarrow W \otimes W$$

$$\Delta_W(w_x) = w_x \otimes 1 + 1 \otimes w_x \quad (5.11)$$

$$\Delta_W(w_y) = w_y \otimes 1 + 1 \otimes w_y \quad (5.12)$$

$$\Delta_W(w_z) = w_z \otimes 1 + 1 \otimes w_z. \quad (5.13)$$

İspat: Δ_W dönüşümünün (5.10) da verilen anti-simetrik değiştirme bağıntılarını koruduğu aşıkardır.

Teorem 5.4 Δ_W ile donatılan W , aşağıda tanımlanan dönüşüm ile birlikte bir iki-cebir yapısına sahiptir.

$$\varepsilon_W : W \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varepsilon_W(w_x) = 0, \varepsilon_W(w_y) = 0, \varepsilon_W(w_z) = 0 \quad (5.14)$$

İspat: Eş-cebir olma aksiyomu göz önüne alınırsa bu dönüşüm ile birlikte W nın bir eş-cebir yapısına sahip olduğu görülür. Ayrıca bu cebir birleşmeli ve birimli olduğundan aynı zaman da bir iki-cebirdir.

Teorem 5.5 İki-cebir W nın aşağıda tanımlanan dönüşüm ile birlikte bir Hopf cebiri olduğu görülür.

$$S_W : W \rightarrow W$$

$$S_W(w_x) = -w_x, S_W(w_y) = -w_y, S_W(w_z) = -w_z \quad (5.15)$$

İspat: Hopf cebiri aksiyomlarından eş-ters dönüşümü ile alakalı olanı düşünülürse, yukarıda verildiği gibi tanımlanan S_W nın W ya bir Hopf cebiri yapısı sağladığı görülür.

5.1 Cartan-Maurer forma karşılık gelen vektör alanları

Teorem 4.11 de dış türev operatörü d nin $d = dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z$ şeklinde yazılabileceğini görmüştük. Şimdi kabul edelim ki aynı dış türev operatörü

$$d = w_x T_x + w_y T_y + w_z T_z \quad (5.16)$$

şeklinde Cartan-Maurer form üreteçleri ve bazı T_x, T_y, T_z vektör alanları cinsinden yazılsın. Aslında rahatlıkla, T_x, T_y, T_z vektör alanlarının ∂_x, ∂_y ve ∂_z cinsinden yazılabileceğini görebiliriz. Gerçekten, (5.3-5.5) deki eşitlikleri, dx, dy ve dz yalnız kalacak şekilde yeniden düzenleyelim:

$$dx = w_x x, dy = w_y x^m + m w_x y, dz = w_z x^m + n w_x z \quad (5.17)$$

$d = dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z$ de kullanılacak olursa,

$$\begin{aligned} dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z &= w_x x\partial_x + (w_y x^m + m w_x y)\partial_y + (w_z x^m + n w_x z)\partial_z \\ &= w_x (x\partial_x + m y\partial_y + n z\partial_z) + w_y x^m \partial_y + w_z x^m \partial_z \end{aligned}$$

görülür ve buradan $d = w_x T_x + w_y T_y + w_z T_z$ olduğu da düşünülürse

$$T_x = x\partial_x + m y\partial_y + n z\partial_z, T_y = x^m \partial_y, T_z = x^m \partial_z \quad (5.18)$$

biçiminde elde edilir. Bu elde ettiğimiz vektör alanlarının oluşturduğu cebiri inceleyelim. Öncelikle bunlar arasındaki değişirme bağıntılarını oluşturalım. T_x ve T_y arasındaki değişirme bağıntısını (3.7), (4.25-4-28) deki değişirme bağıntılarını kullanarak bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
T_x T_y &= (x\partial_x + my\partial_y + nz\partial_z)(x^m\partial_y) \\
&= x\partial_x x^m\partial_y + my\partial_y x^m\partial_y + nz\partial_z x^m\partial_y \\
&= x(mx^{m-1} + x^m\partial_x)\partial_y + p^m p^{-m} mx^m y\partial_y\partial_y + q^m q^{-m} nx^m z\partial_z\partial_y \\
&= mx^m\partial_y + x^m x\partial_x\partial_y + mx^m y\partial_y\partial_y + nx^m z\partial_z\partial_y \\
&= mx^m\partial_y + px^m x\partial_y\partial_x + mx^m (\partial_y y - 1)\partial_y + p^n q^{-m} nx^m z\partial_y\partial_z \\
&= mx^m\partial_y + pp^{-1} x^m\partial_y x\partial_x + mx^m\partial_y y\partial_y - mx^m\partial_y + p^n q^{-m} p^{-n} q^m nx^m\partial_y z\partial_z \\
&= x^m\partial_y (x\partial_x + my\partial_y + nz\partial_z) \\
&= T_y T_x
\end{aligned}$$

T_x ve T_z arasındaki değiştirme bağıntısının

$$\begin{aligned}
T_x T_z &= (x\partial_x + my\partial_y + nz\partial_z)(x^n\partial_z) \\
&= x\partial_x x^n\partial_z + my\partial_y x^n\partial_z + nz\partial_z x^n\partial_z \\
&= x(nx^{n-1} + x^n\partial_x)\partial_z + p^n p^{-n} mx^n y\partial_y\partial_z + q^n q^{-n} nx^n z\partial_z\partial_z \\
&= nx^n\partial_z + x^n x\partial_x\partial_z + mx^n y\partial_y\partial_z + nx^n z\partial_z\partial_z \\
&= nx^n\partial_z + qx^n x\partial_z\partial_x + p^{-n} q^m mx^n y\partial_z\partial_y + nx^n (\partial_z z - 1)\partial_z \\
&= nx^n\partial_z + qq^{-1} x^n\partial_z x\partial_x + p^{-n} q^m p^n q^{-m} mx^n\partial_z y\partial_y - nx^n\partial_z + nx^n\partial_z z\partial_z \\
&= x^n\partial_z (x\partial_x + my\partial_y + nz\partial_z) \\
&= T_z T_x
\end{aligned}$$

eşitliğinden değişmeli olduğu grlr. T_y ve T_z iin değiştirme bağıntısı

$$T_y T_z = x^m\partial_y x^n\partial_z = p^n x^m x^n\partial_y\partial_z = p^n p^{-n} q^m x^n x^m\partial_z\partial_y = p^n p^{-n} q^m q^{-m} x^n\partial_z x^m\partial_y = T_z T_y$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak

$$T_x T_y - T_y T_x = 0, T_x T_z - T_z T_x = 0, T_y T_z - T_z T_y = 0 \quad (5.19)$$

eşitliklerinden değişmeli bir yapı bulunmuş oldu.

şimdi T_x, T_y ve T_z vektör alanlarının $A_{pq}(3)$ üzerine nasıl etki ettiğini bulalım. Bunun için (4.22-4.24) deki ∂_x, ∂_y ve ∂_z nin $x^i y^j z^k$ tek terimlisi üzerindeki etkisinden faydalanarak

$$\begin{aligned}
T_x(x^i y^j z^k) &= (x\partial_x + my\partial_y + nz\partial_z)(x^i y^j z^k) \\
&= (x\partial_x)(x^i y^j z^k) + (my\partial_y)(x^i y^j z^k) + (nz\partial_z)(x^i y^j z^k) \\
&= x(ix^{i-1}y^j z^k) + my(jp^i x^i y^{j-1} z^k) + nz(kp^{-nj} q^{mj+i} x^i y^j z^{k-1}) \\
&= i(x^i y^j z^k) + mj(x^i y^j z^k) + nk(x^i y^j z^k) \\
&= (i + mj + nk)(x^i y^j z^k)
\end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edecek olursak T_x , tek teriminin kuvvetlerinde herhangi bir değişikliğe neden olmuyor, sadece katsayıyı yeniden ölçeklendiriyor. Bu durumun, bu vektör alanları için eş-çarpım, eş-birim ve eş-ters dönüşümleri tanımlamamıza yeterli derecede bir kolaylık sağladığını birkaç adım sonra göreceğiz. Şimdi benzer şekilde diğer vektör alanlarının tek terimli üzerindeki etkisine bakalım

$$T_y(x^i y^j z^k) = (x^m \partial_y)(x^i y^j z^k) = x^m j p^i x^i y^{j-1} z^k = j p^i x^{i+m} y^{j-1} z^k$$

şeklindedir. T_z nin etkisi

$$T_z(x^i y^j z^k) = (x^n \partial_z)(x^i y^j z^k) = x^n k p^{-nj} q^{mj+i} x^i y^j z^{k-1} = k p^{-nj} q^{mj+i} x^{i+n} y^j z^{k-1} \text{ olur.}$$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
T_x(x^i y^j z^k) &= (i + mj + nk)(x^i y^j z^k) \\
T_y(x^i y^j z^k) &= j p^i x^{i+m} y^{j-1} z^k \\
T_z(x^i y^j z^k) &= k p^{-nj} q^{mj+i} x^{i+n} y^j z^{k-1}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

biçiminde bulunur.

Teorem 5.6 (5.19) ile verilen aralarında değişmeli bağıntılara sahip olan T_x, T_y ve T_z ler ile üretilen cebiri Ξ ile gösterelim. Ξ , aşağıda tanımlanan eş-çarpım dönüşümü ile birlikte bir eş-cebir yapısına sahiptir:

$$\Delta_\Xi : \Xi \rightarrow \Xi \otimes \Xi$$

$$\Delta_\Xi(T_x) = T_x \otimes 1 + 1 \otimes T_x$$

$$\Delta_\Xi(T_y) = T_y \otimes 1 + p^{T_x} \otimes T_y$$

$$\Delta_\Xi(T_z) = T_z \otimes 1 + q^{T_x} \otimes T_z$$

İspat: Önce, yukarıda tanımlanan Δ_{Ξ} nin, T_x, T_y ve T_z vektör alanlarının (5.20) de verilen etkileriyle uyumlu olduğunu göstermeliyiz. Bunun için, bir $f = x^i y^j z^k$ şeklinde bir tek terimli ile herhangi bir $g \in A_{pq}(3)$ düşünelim. Dış diferansiyel operatörü d nin (5.16) daki temsili göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} d(fg) &= d(f)g + fd(g) \\ &= (w_x T_x + w_y T_y + w_z T_z)(f)g + f(w_x T_x + w_y T_y + w_z T_z)(g) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Şimdi bu son eşitlikteki ifadeleri w_x, w_y ve w_z ye göre düzenlemek için f ile bu Cartan-Maurer formlar arasındaki değişirme bağıntılarını bulmamız gerekir: w_x ile bütün koordinatlar değişmeli olduğundan ((5.7-5.9) daki bağıntılardan)

$$fw_x = w_x f \quad (5.22)$$

bulunur. f ile w_y arasındaki değişirme bağıntısı

$$x^i y^j z^k w_y = p^{nk} x^i y^j w_y z^k = p^{nk} p^{mj} x^i w_y y^j z^k = p^{nk+mj+i} w_y x^i y^j z^k \quad (5.23)$$

şeklindedir. Benzer şekilde f ile w_z arasındaki değişirme bağıntısı

$$fw_z = q^{nk+mj+i} w_z f \quad (5.24)$$

bulunur. Şimdi bu elde ettiğimiz değişirme bağıntılarını (5.21) de kullanarak gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\begin{aligned} d(fg) &= (w_x T_x + w_y T_y + w_z T_z)(f)g + f(w_x T_x + w_y T_y + w_z T_z)(g) \\ &= (w_x T_x + w_y T_y + w_z T_z)(f)g + (w_x f T_x + p^{nk+mj+i} w_y f T_y + q^{nk+mj+i} w_z f T_z)(g) \\ &= w_x (T_x(f)g + f T_x(g)) + w_y (T_y(f)g + p^{nk+mj+i} f T_y(g)) \\ &\quad + w_z (T_z(f)g + q^{nk+mj+i} f T_z(g)) \end{aligned}$$

olur. Bu son elde ettiğimiz eşitlikten, T_x, T_y ve T_z vektör alanlarının fg üzerindeki etkileri deformasyonlu Leibniz kuralı olarak

$$\begin{aligned} T_x(fg) &= T_x(f)g + f T_x(g) \\ T_y(fg) &= T_y(f)g + p^{nk+mj+i} f T_y(g) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$T_z(fg) = T_z(f)g + q^{nk+mj+i}fT_z(g)$$

bulunur. Diğer taraftan, $\Delta_\Xi(T_a) \in \Xi \otimes \Xi$, $a \in \{x, y, z\}$ şeklindeki bir elemanın

$A_{pq}(3) \otimes A_{pq}(3)$ deki bir $f \otimes g$ ye etkisinin

$$\Delta(T_a)(f \otimes g) := T_a(fg) \tag{5.26}$$

şeklinde olduğu, dönüşümlerin tensör çarpımı ve yukarıdaki deformasyonlu Leibniz kuralı birlikte düşünülürse ispat görülür.

HOMOJEN OLMAYAN DEĞİŞTİRME BAĞINTILI UZAYLAR

Değişmeli olmayan uzayların bazı özel örnekleri, uzayın değiştirme bağıntısının çeşidine göre birçok yazar tarafından incelenmiştir, [41-44]. Özetle, değişmeli olmayan bu uzaylar aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

$$[x_i, x_j] = \theta^{ij}, \quad (\text{Kanonik}) \quad (6.1)$$

$$[x_i, x_j] = \theta_k^{ij} x_k, \quad (\text{Lie Cebir}) \quad (6.2)$$

$$[x_i, x_j] = \theta_{kl}^{ij} x_k x_l, \quad (\text{Kuantum}) \quad (6.3)$$

Burada,

$$[x_i, x_j] = x_i x_j - x_j x_i \text{ ve } \theta^{ij}, \theta_k^{ij}, \theta_{kl}^{ij} \in \mathbb{C}$$

olarak veriliyor. Bu tezin üçüncü bölümünde en genel anlamda deformasyonlu bir cebirin tanımından kısaca bahsetmiştik. Diğer bir söylemle; (3.3) ile verilen ifade, (6.1), (6.2) ve (6.3) ile yapılan sınıflandırmayı en genel anlamda tek çatı altında ifade eder. Ayrıca, ikinci bölümde değişmeli bir cebir üzerine kurulan bir Hopf cebiri yardımı ile homojen değiştirme katsayılı bir cebir elde edebileceğimizi belirtmiştik.

Şimdi bu bölümde homojen değiştirme bağıntılarından homojen olmayan başka bağıntıların nasıl elde edilebileceğinden bahsedeceğiz. Bunun için gerekli bazı temel tanımları ve önermeleri verelim.

Tanım 6.1 (H, Δ, ε) üçlüsü bir eş-cebir olsun. Bu durumda bir $h \in H$ için

$$\Delta(h) = h \otimes h \quad (6.4)$$

ise h elemanına grubumsu(group-like) eleman denir, [37].

Tanım 6.2: (U, Δ, ε) üçlüsü bir eş-cebir olsun. Bu durumda bir $u \in U$ için

$$\Delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u \quad (6.5)$$

ise u elemanına ilkel eleman denir, [37].

Önerme 6.3 (H, Δ, ε) ve (U, Δ, ε) üçlüleri sırasıyla eş-cebir olsunlar. Ayrıca, H ve U cebirlerinin

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad x \in H \text{ veya } x \in U$$

şeklinde sonsuz toplam olarak verilebilen serilerle genelleştirilmiş durumlarını düşünelim.

Şimdi

$$f: U \rightarrow H, \quad u \mapsto f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = e^u$$

şeklindeki üstel dönüşümü ele alalım. Böylece literatürde çok iyi bilinen aşağıdaki önermeye sahip oluruz, [45].

$$f(u) \text{ grubumsu elemandır} \Leftrightarrow u \text{ ilkel elemandır}$$

İspat: u bir ilkel eleman olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \Delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u &\Leftrightarrow \Delta(f(u)) = \Delta(e^u) = e^{\Delta(u)} = e^{u \otimes 1 + 1 \otimes u} \\ &\Leftrightarrow \Delta(f(u)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u \otimes 1 + 1 \otimes u)^k}{k!} \\ &\Leftrightarrow \Delta(f(u)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (u \otimes 1)^{k-i} (1 \otimes u)^i \right) \\ &\Leftrightarrow \Delta(f(u)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \frac{u^{k-i}}{(k-i)!} \otimes \frac{u^i}{i!} \right) \\ &\Leftrightarrow \Delta(f(u)) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!} \right) \otimes \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \right) \\ &\Leftrightarrow \Delta(f(u)) = e^u \otimes e^u \\ &\Leftrightarrow \Delta(f(u)) = f(u) \otimes f(u) \end{aligned}$$

Bu önerme homojen değiştirme katsayılı bir cebirden homojen olmayan değiştirme katsayılı bir cebir oluşturmak için kilit rol oynar, [45,46]. Buna göre homojen değiştirme katsayılı $A_{pq}(3)$ den homojen olmayan değiştirme katsayılı bir cebir elde edelim. Bunun için, grubumsu eleman x için

$$a := \ln x \text{ veya } x := e^a \quad (6.6)$$

tanımlamasını ele alalım. y ve z elemanları için

$$b := x^{-1}y \text{ ve } c := x^{-1}z \quad (6.7)$$

eşitliklerini düşünelim. şimdi tanımladığımız bu a, b, c elemanları arasındaki değiştirme bağıntılarını araştıralım. Önce a ile b arasındaki değiştirme bağıntısını bulalım:

$$\begin{aligned} \ln x \cdot x^{-1}y &= x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n y = x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^i y \right) \\ &= x^{-1}y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (px)^{n-i} (-1)^i \right) \\ &= x^{-1}y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (px-1)^n \\ &= x^{-1}y \ln(px) \end{aligned}$$

Böylece a ile b arasındaki değiştirme bağıntısı

$$ab = ba + b \ln p$$

şeklinde homojen olmayacak biçimde bulunur. a ile c arasındaki değiştirme katsayısı

$$\begin{aligned} \ln x \cdot x^{-1}y &= x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n z = x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^i z \right) \\ &= x^{-1}z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (qx)^{n-i} (-1)^i \right) \\ &= x^{-1}z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (qx-1)^n \\ &= x^{-1}z \ln(qx) \end{aligned}$$

olup, buradan

$$ac = ca + c \ln q$$

sonucunu elde ederiz. b ile c arasındaki değiştirme bağıntısı ise

$$x^{-1}yx^{-1}z = px^{-1}x^{-1}yz = pp^{-n}q^m x^{-1}x^{-1}zy = pp^{-n}q^m q^{-1}x^{-1}zx^{-1}y$$

eşitliğinden

$$bc = p^{1-n}q^{m-1}cb$$

şeklindeki homojen değiştirme bağıntısıdır. Böylelikle

$$[a, b] = h_1 b \quad (6.8)$$

$$[a, c] = h_2 c \quad (6.9)$$

$$[b, c]_{h_3} = 0 \quad (6.10)$$

elde ederiz. Burada

$$[a, b] = ab - ba \quad (6.11)$$

$$[b, c]_{h_3} = bc - h_3 cb \quad (6.12)$$

ve $h_1 = \ln(p)$, $h_2 = \ln(q)$, $h_3 = p^{1-n}q^{m-1}$ dir.

(6.8), (6.9) ve (6.10) değiştirme bağıntılarının yapılarına bakacak olursak ilk iki bağıntı Lie cebiri anlamında bir bağıntı, sonuncu bağıntı ise kuantum uzayı anlamında bir bağıntıdır. Sonuç olarak, bir kuantum uzaydan hem Lie cebiri anlamında değiştirme bağıntılı hem de kuantum uzayı anlamında değiştirme bağıntılı bir başka uzay elde edilebileceğini göstermiş olduk.

Yardımcı Teorem 6.4 $k, l \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

$$a^k b^l = b^l (a + lh_1)^k \quad (6.13)$$

$$a^k c^l = c^l (a + lh_2)^k \quad (6.14)$$

$$b^k c^l = h_3^{kl} c^l b^k \quad (6.15)$$

İspat: Önce $a^k b = b(a + h_1)^k$ olduğunu gösterelim. İspat için tümevarım yöntemini kullanalım. $k = 1$ için doğruluğunu biliyoruz. $k - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim:

$$a^{k-1} b = b(a + h_1)^{k-1} \quad (6.16)$$

olsun. k için doğru olduğunu gösterelim: Bunun için (6.16) eşitliğinin her iki tarafını a ile sol taraftan çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa:

$$\begin{aligned} aa^{k-1} b &= ab(a + h_1)^{k-1} = (ba + h_1 b)(a + h_1)^{k-1} \\ &= b(a + h_1)(a + h_1)^{k-1} \\ &= b(a + h_1)^k \end{aligned}$$

bulunur. Böylece k için doğruluğu gösterilmiş oldu. Şimdi l üzerinden tümevarımla (6.13) ün doğruluğunu gösterelim. $l = 1$ için (6.13) ün doğruluğunu hemen yukarıda gösterdik. $l - 1$ için doğru olsun:

$$a^k b^{l-1} = b^{l-1} (a + (l-1)h_1)^k \quad (6.17)$$

Şimdi l için doğru olduğunu gösterelim: Bunun için (6.17) sağ taraftan b ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} a^k b^{l-1} b &= b^{l-1} (a + (l-1)h_1)^k b \\ a^k b^l &= b^{l-1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} ((l-1)h_1)^i b \\ a^k b^l &= b^{l-1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} b ((l-1)h_1)^i \\ a^k b^l &= b^{l-1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} b(a + h_1)^{k-i} ((l-1)h_1)^i \\ a^k b^l &= b^l (a + h_1 + (l-1)h_1)^k \\ a^k b^l &= b^l (a + lh_1)^k \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. (6.14) de aynı şekilde gösterilebilir. (6.15) in doğruluğu aşıkardır.

Şimdi, bu elemanlarla üretilen cebiri

$$\Psi := \mathbb{C}(a, b, c) / I \quad (6.18)$$

(burada I , (6.8), (6.9) ve (6.10) bağıntıları ile üretilen bir ideal olmak üzere) şeklinde tanımlayalım. Şimdi $A_{pq}(3)$ üzerinde verilen eş-çarpımın Ψ üzerinde nasıl bir etkiye sahip olacağını irdелейelim. Önce a için $\Delta(a)$ yı belirleyelim: x in bir grubumsu eleman olduğunu biliyoruz. Böylece Önerme 6.3 den kolaylıkla

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \quad (6.19)$$

olduğunu görebiliriz. Diğer taraftan $\Delta(x) = x \otimes x$ olduğundan kolaylıkla

$$\Delta(x^{-1}) = x^{-1} \otimes x^{-1} \quad (6.20)$$

gerçeğine sahip olduğumuzu görürüz. Dolayısıyla, b ve c için,

$$\begin{aligned} \Delta(b) &= \Delta(x^{-1}y) = \Delta(x^{-1})\Delta(y) = (x^{-1} \otimes x^{-1})(x^m \otimes y + y \otimes x^m) \\ &= x^{m-1} \otimes x^{-1}y + x^{-1}y \otimes x^{m-1} \\ &= e^{(m-1)a} \otimes b + b \otimes e^{(m-1)a} \\ \Delta(c) &= \Delta(x^{-1}z) = \Delta(x^{-1})\Delta(z) = (x^{-1} \otimes x^{-1})(x^n \otimes z + z \otimes x^n) \\ &= x^{n-1} \otimes x^{-1}z + x^{-1}z \otimes x^{n-1} \\ &= e^{(n-1)a} \otimes b + b \otimes e^{(n-1)a} \end{aligned}$$

olup, sonuç olarak

$$\Delta(b) = e^{(m-1)a} \otimes b + b \otimes e^{(m-1)a} \quad (6.21)$$

$$\Delta(c) = e^{(n-1)a} \otimes c + c \otimes e^{(n-1)a} \quad (6.22)$$

elde ederiz. Böylece buradan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz

Teorem 6.5 Ψ , (6.19), (6.21) ve (6.22) şeklinde tanımlanan bir dönüşüm ile birlikte bir eş-cebir yapısına sahiptir.

İspat: Yukarıda bahsedilen dönüşüm $A_{pq}(3)$ üzerindeki eş-çarpım dönüşümünden türetildiği için onun sağladığı tüm özellikleri sağlar: Gerçekten önce (6.19), (6.21) ve (6.22) ile verilen Δ nın (6.8), (6.9) ve (6.10) ile verilen değiştirme bağıntılarını koruduğunu gösterelim. Bunun için

$$[\Delta(a), \Delta(b)] = h_1 \Delta(b) \quad (6.23)$$

$$[\Delta(a), \Delta(c)] = h_2 \Delta(c) \quad (6.24)$$

$$[\Delta(b), \Delta(c)]_{h_3} = 0 \quad (6.25)$$

olduğunu göstermeliyiz: (6.23) için

$$\begin{aligned} [\Delta(a), \Delta(b)] &= [a \otimes 1 + 1 \otimes a, e^{(m-1)a} \otimes b + b \otimes e^{(m-1)a}] \\ &= (a \otimes 1 + 1 \otimes a) (e^{(m-1)a} \otimes b + b \otimes e^{(m-1)a}) - (e^{(m-1)a} \otimes b + b \otimes e^{(m-1)a}) (a \otimes 1 + 1 \otimes a) \\ &= (ae^{(m-1)a} \otimes b + ab \otimes e^{(m-1)a} + e^{(m-1)a} \otimes ab + b \otimes ae^{(m-1)a}) \\ &\quad - (e^{(m-1)a} a \otimes b + e^{(m-1)a} \otimes ba + ba \otimes e^{(m-1)a} + b \otimes e^{(m-1)a} a) \\ &= (ab - ba) \otimes e^{(m-1)a} + e^{(m-1)a} \otimes (ab - ba) \\ &= h_1 b \otimes e^{(m-1)a} + e^{(m-1)a} \otimes h_1 b \\ &= h_1 \Delta(b) \end{aligned}$$

bulunur. (6.24) de benzer şekilde gösterilebilir. (6.25) için

$$\begin{aligned} [\Delta(b), \Delta(c)]_{h_3} &= [e^{(m-1)a} \otimes b + b \otimes e^{(m-1)a}, e^{(n-1)a} \otimes c + c \otimes e^{(n-1)a}]_{h_3} \\ &= (e^{(m-1)a} \otimes b + b \otimes e^{(m-1)a}) (e^{(n-1)a} \otimes c + c \otimes e^{(n-1)a}) \\ &\quad - h_3 (e^{(n-1)a} \otimes c + c \otimes e^{(n-1)a}) (e^{(m-1)a} \otimes b + b \otimes e^{(m-1)a}) \\ &= e^{(m-1)a} c \otimes b e^{(n-1)a} + b e^{(n-1)a} \otimes e^{(m-1)a} c - h_3 e^{(n-1)a} b \otimes c e^{(m-1)a} - h_3 c e^{(m-1)a} \otimes e^{(n-1)a} b \end{aligned} \quad (6.26)$$

bulunur. Diğer taraftan bu son eşitlikteki ifadeleri daha sade hale getirebilmek için

$e^{(m-1)a}$ ile c ve b ile $e^{(n-1)a}$ arasındaki değişirme bağıntılarına ihtiyaç duyarız. Bunun için (6.13) ve (6.14) kullanılarak

$$\begin{aligned} e^{(m-1)a} c &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((m-1)a)^k}{k!} c \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c (m-1)^k (a + h_2)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c ((m-1)(a + h_2))^k}{k!} \\ &= c e^{(m-1)(a+h_2)} \\ &= q^{m-1} c e^{(m-1)a} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
be^{(n-1)a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b((n-1)a)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-1)^k (a-h_1)^k b}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n-1)(a-h_1))^k b}{k!} \\
&= e^{(n-1)(a-h_1)} b \\
&= p^{1-n} e^{(n-1)a} b
\end{aligned}$$

bulunur. Bu elde ettiğimiz $e^{(m-1)a} c = q^{(m-1)} c e^{(m-1)a}$ ve $be^{(n-1)a} = p^{1-n} e^{(n-1)a} b$ değiştirme bağıntıları (6.26) da kullanılırsa, $[\Delta(b), \Delta(c)]_{h_3} = 0$ olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak $\Delta: \Psi \rightarrow \Psi \otimes \Psi$ dönüşümü bir cebir homomorfizmasıdır.

Buna göre bu dönüşüme karşılık gelen eş-birim, Hopf cebiri aksiyomlarından (2.2) ve (6.19), (6.21) ve (6.22) birlikte düşünülürse

$$\varepsilon(a) = 0$$

$$\varepsilon(b) = 0$$

$$\varepsilon(c) = 0$$

olarak bulunur.

Teorem 6.6 Ψ aşağıdaki dönüşüm ile birlikte bir Hopf cebiri yapısına sahiptir.

$$S(a) = -a$$

$$S(b) = -e^{(1-m)a} b e^{(1-m)a}$$

$$S(c) = -e^{(1-n)a} c e^{(1-n)a}$$

İspat: Hopf cebiri aksiyomlarından eş-ters ile alakalı olan aksiyom ele alınırsa ispat kolaylıkla görülebilir.

6.1 Ψ Üzerinde Diferansiyel Cebir

Klasik diferansiyel geometriden biliyoruz ki bir diferansiyel form bir fonksiyonla sağdan ve soldan çarpılabilir. Değişmeli olmayan cebirlerde bu durum farklı olabilir; değişmeli bir A cebiri $([f, g] = fg - gf = 0, \forall f, g \in A)$ üzerine etki eden dış diferansiyel operatörü $d : A \rightarrow \Omega^1$ için

$$d([f, g]) = 0, f, g \in A$$

şartı sağlanır. Ayrıca dış türev operatörü d nin çekirdeği sadece A cebirinin üzerine kurulduğu K cisimidir. Eğer A değişmeli değil ise (mesela bizim oluşturduğumuz Ψ gibi) meydana gelebilecek farklılık

$$d([f, g]) \neq 0, f, g \in A$$

şeklinde olup, dolayısıyla bir diferansiyel formu sağdan ve soldan bir fonksiyonla çarpma ile elde edilen sonuçlar aynı olmayabilir. Bir değişmeli olmayan uzayda d nin çekirdeğini yine değişmeli durumda olduğu gibi K cismi olarak ele almalıyız. Bunu değişmeli uzaydaki bağlantılılık şartını değişmeli olmayan uzaya taşıyabilmek için yaparız, [47].

Yardımcı Teorem 6.7 a, b ve c elemanlarının diferansiyelleri x, y ve z koordinatları cinsinden

$$da = dxx^{-1}, db = p^{-1}dyx^{-1} - p^{-1}dxx^{-1}yx^{-1}, dc = q^{-1}dzx^{-1} - q^{-1}dxx^{-1}zx^{-1} \quad (6.27)$$

şeklindedir.

İspat: (4.22-4.24) ile verilen kısmi türev operatörleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} a &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n \Rightarrow da = (dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n \right) \\ &\Rightarrow da = dx\partial_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n \right) \\ &\Rightarrow da = dx \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan ∂_x kısmi türev operatörü, $A_{pq}(3)$ ün sadece x e bağlı bir elemanına, klasik türev operatörü gibi etki ettiğinden $da = dxx^{-1}$ olduğunu düşünebiliriz.

$$\begin{aligned} b = x^{-1}y &\Rightarrow db = d(x^{-1})y + x^{-1}dy \\ &= -x^{-2}dx y + x^{-1}dy \\ &= p^{-1}dyx^{-1} - p^{-1}dxx^{-1}yx^{-1} \end{aligned}$$

Benzer şekilde $dc = q^{-1}dzx^{-1} - q^{-1}dxx^{-1}zx^{-1}$ olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 6.8 a, b ve c ile bunların diferansiyelleri arasında aşağıdaki değişirme bağıntıları vardır.

$$\begin{aligned} ada - daa &= 0, \quad adb - dba = h_1 db, \quad adc - dca = h_2 dca \\ bda - dab &= 0, \quad bdb - dbb = 0, \quad bdc - h_3 dcb = 0 \\ cda - dac &= 0, \quad cdb - h_3^{-1} dbc = 0, \quad cdc - dcc = 0 \end{aligned} \tag{6.28}$$

İspat: $xdx = dxx$ olduğundan $ada = daa$ olduğu aşikardır. a ile db arasındaki değişirme bağıntısı için

$$\begin{aligned} adb &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n \right) (p^{-1}dyx^{-1} - p^{-1}dxx^{-1}yx^{-1}) \\ &= p^{-1}x^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^i dy \right) - p^{-1}dxx^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^i yx^{-1} \right) \\ &= p^{-1}x^{-1}dy \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i p^{n-i} x^{n-i} \right) \\ &\quad - p^{-1}dxx^{-1}yx^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i} (-1)^i p^{n-i} x^{n-i} \right) \\ &= p^{-1}x^{-1}dy \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (px-1)^n \right) - p^{-1}dxx^{-1}yx^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (px-1)^n \right) \\ &= (p^{-1}x^{-1}dy - p^{-1}dxx^{-1}yx^{-1}) \ln(px) \\ &= db(\ln p + \ln x) \\ &= db.h_1 + db.a \end{aligned}$$

Diğer değişirme bağıntılarının doğruluğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Yardımcı Teorem 6.9 Diferansiyellerin kendi aralarındaki değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibidir.

$$da \wedge da = 0, \quad db \wedge db = 0, \quad dc \wedge dc = 0 \quad (6.29)$$

$$da \wedge db = -db \wedge da, \quad da \wedge dc = -dc \wedge da, \quad db \wedge dc = -h_3 dc \wedge db$$

İspat: Dış türev operatörü d , (6.28) de verilen değiştirme bağıntılarına uygulanırsa istenilen sonuçlar elde edilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} adb &= dba + hdb \Rightarrow d(adb) = d(dba + hdb) \\ &\Rightarrow da \wedge db + ad^2b = d^2b - db \wedge da + hd^2b \\ &\Rightarrow da \wedge db = -db \wedge da \end{aligned}$$

bulunur. Diğer bağıntılar da dış türev operatörünün Leibniz ve nilpotentlik özelliği kullanılarak benzer şekilde elde edilebilir.

Sonuç olarak diferansiyel formların cebirinin (diferansiyel formların dış cebiri) $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \Lambda_3 \oplus 0 \oplus \dots$ şeklinde olduğu görölür. Burada $\Lambda_k, k \in \mathbb{N}$ diferansiyel k -formların cebiri olarak tanımlanır.

Teorem 6.10 Diferansiyel formların cebiri Λ , aşağıda verilen dönüşümlere göre bir eş-cebir yapısına sahiptir:

$$\Delta : \Lambda \rightarrow \Lambda \otimes \Lambda$$

$$\Delta(da) = da \otimes 1 + 1 \otimes da$$

$$\Delta(db) = db \otimes 1 + 1 \otimes db$$

$$\Delta(dc) = dc \otimes e^{-a} - e^{-a} da \otimes c + e^{-a} \otimes dc - c \otimes e^{-a} da$$

$$\varepsilon : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varepsilon(da) = 0, \quad \varepsilon(db) = 0, \quad \varepsilon(dc) = 0$$

İspat: Teoremi ispatlamak için önce diferansiyellere etkisi yukarıda verilen Δ ve ε dönüşümlerinin cebir homomorfizması olduklarını göstermemiz gerekir. Yani,

Δ ve ε dönüşümleri altında (6.28) ve (6.29) da verilen değiştirme bağıntılarının korunduğunu göstermek yeterli olacaktır. Mesela,

$$\begin{aligned}
[\Delta(a), \Delta(db)] &= (a \otimes 1 + 1 \otimes a)(db \otimes 1 + 1 \otimes db) - (db \otimes 1 + 1 \otimes db)(a \otimes 1 + 1 \otimes a) \\
&= (adb \otimes 1 + a \otimes db + db \otimes a + 1 \otimes adb) - (dba \otimes 1 + db \otimes a + a \otimes db + 1 \otimes dba) \\
&= (adb - dba) \otimes 1 + 1 \otimes (adb - dba) \\
&= h_1 db \otimes 1 + h_1 1 \otimes db \\
&= h_1 \Delta(db)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\{\Delta(da), \Delta(db)\} &= (da \otimes 1 + 1 \otimes da)(db \otimes 1 + 1 \otimes db) + (db \otimes 1 + 1 \otimes db)(da \otimes 1 + 1 \otimes da) \\
&= ((da \wedge db) \otimes 1 + da \otimes db + db \otimes a + 1 \otimes (da \wedge db)) \\
&\quad + ((db \wedge da) \otimes 1 + db \otimes da + da \otimes db + 1 \otimes (db \wedge da)) \\
&= (da \wedge db + db \wedge da) \otimes 1 + 1 \otimes (da \wedge db + db \wedge da) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan Δ dönüşümü $[adb, dba] = h_1 dba$ ve $\{da, db\} = 0$ değiştirme bağıntılarını korur. Burada, A herhangi bir cebir olmak üzere, $\{, \}: A \times A \rightarrow A$ operatörü $\{x, y\} = xy + yx$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca ε dönüşümünün de (6.28) ve (6.29) da verilen değiştirme bağıntılarını koruduğu gösterilebilir. Şimdi bu dönüşümlerin (2.2) ve (2.1) ile verilen şartların sağladığını gösterelim. (2.1) ile verilen şartın sağlandığını göstermek kolaydır. (2.2) ile verilen şart için

$$\begin{aligned}
m((\varepsilon \otimes \text{id})(\Delta(da))) &= m((\text{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(da))) \\
m((\varepsilon \otimes \text{id})(da \otimes 1 + 1 \otimes da)) &= m((\text{id} \otimes \varepsilon)(da \otimes 1 + 1 \otimes da)) \\
m(\varepsilon(da) \otimes \text{id}(1)) + m(\varepsilon(1) \otimes \text{id}(da)) &= m(\text{id}(da) \otimes \varepsilon(1)) + m(\text{id}(1) \otimes \varepsilon(da)) \\
0.1 + 1.da &= \text{id}(da) = da.1 + 1.0
\end{aligned}$$

eşitliğinin sağlandığını görürüz. Benzer şekilde db ve dc için de şartın sağlandığını gösterebiliriz. Sonuç olarak $(\Lambda, \Delta, \varepsilon)$ üçlüsü bir eş-cebir yapısına sahiptir. Ayrıca iki-cebir olduğu da açıktır. Benzer şekilde diğer bağıntıların da Δ dönüşümünün etkisi altında korunduğu gösterilebilir.

Teorem 6.11 $(\Lambda, \Delta, \varepsilon)$ üçlüsüne ilaveten aşağıda tanımlanan S dönüşümü düşünülürse $(\Lambda, \Delta, \varepsilon, S)$ dördlüsü bir Hopf cebiri yapısına sahiptir.

$$S : \Lambda \rightarrow \Lambda$$

$$S(da) = -da, S(db) = -db, S(dc) = -2e^a dace^a - e^a dce^a$$

İspat: S dönüşümü için (2.3) de verilen koşulun sağlandığını göstermek ispat için yeterlidir; mesela

$$\begin{aligned} m((S \otimes \text{id})\Delta(da)) &= m((S \otimes \text{id})(da \otimes 1 + 1 \otimes da)) \\ &= m(S(da) \otimes \text{id}(1)) + m(S(1) \otimes \text{id}(da)) \\ &= S(da)\text{id}(1) + S(1)\text{id}(da) \\ &= \varepsilon(da)1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m((\text{id} \otimes S)\Delta(da)) &= m((\text{id} \otimes S)(da \otimes 1 + 1 \otimes da)) \\ &= m(\text{id}(da) \otimes S(1)) + m(\text{id}(1) \otimes S(da)) \\ &= \text{id}(da)S(1) + \text{id}(1)S(da) \\ &= \varepsilon(da)1 \end{aligned}$$

olur. Diğer db ve dc diferansiyelleri için de (2.3) ile verilen koşulun sağlandığı gösterilebilir.

Şimdi a, b, c üreteçlerine göre, Ψ üzerine etki eden kısmi türev operatörlerini oluşturalım.

Yardımcı Teorem 6.12 $f \in \Psi$ ve $d(f) = da f_a + db f_b + dc f_c$, $f_a, f_b, f_c \in \Psi$ olsun. Bu durumda

$$\overrightarrow{\partial}_a : \Psi \rightarrow \Psi, \overrightarrow{\partial}_a(f) = f_a$$

$$\overrightarrow{\partial}_b : \Psi \rightarrow \Psi, \overrightarrow{\partial}_b(f) = f_b \tag{6.30}$$

$$\overrightarrow{\partial}_c : \Psi \rightarrow \Psi, \overrightarrow{\partial}_c(f) = f_c$$

olacak şekilde $\overrightarrow{\partial}_a, \overrightarrow{\partial}_b$ ve $\overrightarrow{\partial}_c$ lineer dönüşümleri vardır.

İspat: d diferansiyel operatörünün Leibniz kuralını sağladığı ve (6.28) ile verilen değiştirme bağıntıları düşünülürse, tek türlü olarak $f_a, f_b, f_c \in \Psi$ elemanlarını bulmamız mümkündür. Böylece diferansiyel operatörü d

$$d = da \overrightarrow{\partial}_a + db \overrightarrow{\partial}_b + dc \overrightarrow{\partial}_c \tag{6.31}$$

olarak temsil edilebilir. Çünkü, d nin lineer olma özelliği hesap edilirse, (6.31) ile verilen temsilde lineerliği garanti etmek için $\overrightarrow{\partial_a}, \overrightarrow{\partial_b}$ ve $\overrightarrow{\partial_c}$ gibi bazı lineer dönüşümlerin varlığından bahsetmek zorunda kalırız. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} d(f) &= (da\overrightarrow{\partial_a} + db\overrightarrow{\partial_b} + dc\overrightarrow{\partial_c})(f) = da\overrightarrow{\partial_a}(f) + db\overrightarrow{\partial_b}(f) + dc\overrightarrow{\partial_c}(f) \\ &= daf_a + dbf_b + dcf_c \end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu lineer dönüşümlere, sol taraftan etki eden lineer dönüşümler adını verelim.

Yardımcı Teorem 6.13 $g \in \Psi$ ve $d(g) = g_a da + g_b db + g_c dc$, $g_a, g_b, g_c \in \Psi$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\partial_a} : \Psi &\rightarrow \Psi, \overleftarrow{\partial_a}(g) = g_a \\ \overleftarrow{\partial_b} : \Psi &\rightarrow \Psi, \overleftarrow{\partial_b}(g) = g_b \\ \overleftarrow{\partial_c} : \Psi &\rightarrow \Psi, \overleftarrow{\partial_c}(g) = g_c \end{aligned} \tag{6.32}$$

olacak şekilde $\overleftarrow{\partial_a}, \overleftarrow{\partial_b}$ ve $\overleftarrow{\partial_c}$ lineer dönüşümleri vardır. Ayrıca diferansiyel operatörü d

$$d = \overleftarrow{\partial_a} da + \overleftarrow{\partial_b} db + \overleftarrow{\partial_c} dc \tag{6.33}$$

olarak da temsil edilebilir. Bu dönüşümlere de sağ taraftan etki eden lineer dönüşümler adını verelim.

İspat: İspat yukarıda yapılan açıklamalara benzer bir yaklaşımla yapılabilir.

Teorem 6.14 Sol taraftan etki eden lineer dönüşümlerin bir $a^i b^j c^k$ tek terimlisine etkisi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\partial_a}(a^i b^j c^k) &= i a^{i-1} b^j c^k \\ \overrightarrow{\partial_b}(a^i b^j c^k) &= j(a + h_1)^i a^i b^{j-1} c^k \\ \overrightarrow{\partial_c}(a^i b^j c^k) &= k h_3^j (a + h_2)^i a^i b^j c^{k-1} \end{aligned} \tag{6.34}$$

şeklindedir. Ayrıca, $h_1, h_2 \rightarrow 0$ ve $h_3 \rightarrow 1$ durumunda bu operatörler klasik kısmi türev operatörlerine dönüşür.

İspat: Diferansiyel operatörü d nin Leibniz kuralını sağladığı gerçeğinden,

$$\begin{aligned} d(a^i b^j c^k) &= d(a^i b^j) c^k + a^i b^j d(c^k) \\ &= da(i a^{i-1} b^j c^k) + db(j(a+h_1)^i b^{j-1} c^k) + dc(k h_3^j (a+h_2)^i b^j c^{k-1}) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bununla birlikte, Yardımcı Teorem 6.12 da düşünülürse (6.34) ile verilenler kolaylıkla görülür.

Teorem 6.15 Sağ taraftan etki eden lineer dönüşümlerin bir $a^i b^j c^k$ tek terimlisine etkisi

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\partial}_a(a^i b^j c^k) &= i a^{i-1} b^j c^k \\ \overleftarrow{\partial}_b(a^i b^j c^k) &= j h_3^k a^i b^{j-1} c^k \\ \overleftarrow{\partial}_c(a^i b^j c^k) &= k a^i b^j c^{k-1} \end{aligned} \tag{6.35}$$

şeklinde dir. Ayrıca, $h_3 \rightarrow 1$ durumunda bu operatörler klasik kısmi türev operatörlerine dönüşür.

İspat: Diferansiyel operatörü d nin Leibniz kuralını sağladığı gerçeğinden,

$$\begin{aligned} d(a^i b^j c^k) &= d(a^i b^j) c^k + a^i b^j d(c^k) \\ &= (i a^{i-1} b^j c^k) da + (j h_3^k a^i b^{j-1} c^k) db + (k a^i b^j c^{k-1}) dc \end{aligned}$$

yazabiliriz. Sonuç olarak, Yardımcı Teorem 6.13 ele alınırsa, (6.35) ile verilenler kolaylıkla görülür.

Bundan sonra biz sadece sol taraftan etki eden operatörleri göz önüne alarak devam edeceğiz. Şimdi bu operatörler için Weyl cebirini veren bağıntıları verelim:

$$\begin{aligned} \partial_a a &= 1 + a \partial_a, \partial_a b = b \partial_a, \partial_a c = c \partial_a \\ \partial_b a &= a \partial_b + h_1 \partial_b, \partial_b b = b \partial_b + 1, \partial_b c = h_3^{-1} c \partial_b \\ \partial_c a &= a \partial_c + h_2 \partial_c, \partial_c b = h_3 b \partial_c, \partial_c c = 1 + c \partial_c \end{aligned} \tag{6.36}$$

Yukarıda verilen bu bağıntılar Leibniz kuralı ve (6.28) ile verilen diferansiyel hesap

kullanılarak görülebilir. Ek olarak $d^2 = 0$ nilpotentlik kullanılarak

$$\partial_a \partial_b = \partial_b \partial_a, \partial_a \partial_c = \partial_c \partial_a, \partial_b \partial_c = h_3 \partial_c \partial_b \quad (6.37)$$

bağıntıları elde edilir. Sonuç olarak Weyl cebiri $\mathbb{C}\langle a, b, c, \partial_a, \partial_b, \partial_c \rangle$, (6.8-6.10), (6.36) ve (6.37) bağıntıları ile tanımlanır.

6.2 Ψ üzerinde Cartan-Maurer Formlar

Ψ nin Hopf cebiri yapısı ve (5.2) birlikte düşünülürse koordinatlara karşılık gelen Cartan-Maurer form elemanları

$$\begin{aligned} w_a &= da \\ w_b &= db e^{(1-m)a} + (1-m) dabe^{(1-m)a} \\ w_c &= dce^{(1-n)a} + (1-n) dace^{(1-n)a} \end{aligned} \quad (6.38)$$

biçiminde elde edilir. Ψ deki tüm elemanlara karşılık gelen Cartan Maurer formların kümesi $W_\Psi = \{w_f : f \in \Psi\}$ şeklindedir ve her bir w_f elemanının

$$w_f = f_a w_b + f_b w_b + f_c w_c, f_a, f_b, f_c \in \Psi$$

olarak yazılabileceği kolaylıkla görülür. Buna göre W_Ψ , üreteçleri w_a, w_b, w_c olan, Ψ üzerinde bir modül yapısına sahiptir. Cartan-Maurerlerin cebirini oluşturmak için w_a, w_b, w_c üreteçlerinin kendi aralarındaki ve Ψ nin üreteçleri a, b, c ler ile olan değiştirme bağıntılarına ihtiyaç duyulur. Bu bağıntıları (6.28), (6.29) ve a, b, c ler arasındaki değiştirme bağıntılarından faydalanarak

$$\begin{aligned} aw_a &= w_a a, aw_b = w_b a + h_1 w_b, aw_c = w_c a + h_2 w_c \\ bw_a &= w_a b, bw_b = w_b b, bw_c = w_c b, \\ cw_a &= w_a c, cw_b = h_3^{-1} w_b c, cw_c = w_c c \end{aligned} \quad (6.39)$$

ve

$$w_a w_b = -w_b w_a, w_a w_c = -w_c w_a, w_b w_c = -h_3 w_c w_b \quad (6.40)$$

olur. Şimdi bu Cartan-Maurer formlara karşılık gelen vektör alanlarını T_a, T_b ve T_c ile gösterelim. Bu durumda T_a, T_b ve T_c ları ∂_a, ∂_b ve ∂_c ler cinsinden belirlemek için

$$d = da\partial_a + db\partial_b + dc\partial_c = w_a T_a + w_b T_b + w_c T_c \quad (6.41)$$

eşitliği ve

$$da = w_a$$

$$db = w_b e^{(m-1)a} + (m-1)w_a b \quad (6.42)$$

$$dc = w_c e^{(n-1)a} + (n-1)w_a c$$

bağıntıları birlikte ele alınırsa

$$T_a = \partial_a + (m-1)\partial_b + (n-1)\partial_c$$

$$T_b = e^{(m-1)a} \partial_b \quad (6.43)$$

$$T_c = e^{(n-1)a} \partial_c$$

eşitlikleri elde edilir.

BÖLÜM 7

DUAL HOPF CEBİRİ

Bu bölümde, Hopf cebiri $A_{pq}(3)$ için bir dual uzay ve bu dual uzay için bir Hopf cebiri tanımlamaya çalışacağız. Bunun için, Sudbery ve Dobrev tarafından yapılan çalışmalardan faydalanacağız, [48, 49]. Önce bazı temel tanımları verelim.

U ve A gibi iki vektör uzayı arasındaki ikililere etki eden bir iki-lineer tasviri,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times A \rightarrow \mathbb{C}, (u, a) \mapsto \langle u, a \rangle$$

şeklinde gösterelim. Eğer

$$\langle u, a \rangle = 0, (\forall a \in A) \Rightarrow u = 0$$

$$\langle u, a \rangle = 0, (\forall u \in U) \Rightarrow a = 0,$$

şartları sağlanırsa, bu eşleme dejenere değildir denir. Bu şekildeki bir eşleme,

$$\langle u \otimes v, a \otimes b \rangle = \langle u, a \rangle \langle v, b \rangle$$

şeklinde bir tanımlama ile $U \otimes U$ ve $A \otimes A$ nin elemanları arasındaki bir eşlemeye genişletilebilir.

U ve A iki-cebirleri ve bu iki-cebirler arasında dejenere olmayan bir

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times A \rightarrow \mathbb{C}, (u, a) \mapsto \langle u, a \rangle, \forall u \in U, \forall a \in A,$$

eşleme verilsin. Eğer aşağıdaki özellikler var ise, U ve A iki-cebirleri birbirine dualdir denir, [50]:

$$\langle uv, a \rangle = \langle u \otimes v, \Delta_A(a) \rangle \tag{7.1}$$

$$\langle u, ab \rangle = \langle \Delta_U(u), a \otimes b \rangle \tag{7.2}$$

$$\langle 1_U, a \rangle = \varepsilon_A(a) \quad (7.3)$$

$$\langle u, 1_A \rangle = \varepsilon_U(u), \quad \forall u \in U, \forall a \in A \quad (7.4)$$

Ek olarak U ve A iki-cebirleri, S eş-ters tasviri ile birlikte bir Hopf cebiri yapısına sahip olsunlar. Bu takdirde

$$\forall u \in U, \forall a \in A, \langle S_U(u), a \rangle = \langle u, S_A(a) \rangle \quad (7.5)$$

şartı sağlanıyorsa U ve A Hopf cebirleri birbirine dualdir denir, [50].

Şimdi $A_{pq}(3)$ Hopf cebirinin cebirsel özelliklerinden faydalanarak, bu cebirin duali olan $U_{pq}(3)$ Hopf cebirinin cebirsel yapısını belirlemeye çalışalım. Bunu da yukarıdaki tanımlamalara göre, $U_{pq}(3)$ ve $A_{pq}(3)$ ün üreteçleri arasındaki eşlemeleri kullanarak yapacağız. Çünkü $U_{pq}(3)$ ve $A_{pq}(3)$ ün diğer elemanları arasındaki eşlemeleri (7.1-7.4) bağıntıları yardımıyla belirleyebiliriz. Örneğin, $U_{pq}(3)$ cebirinin herhangi bir u elemanı üzerine, Δ nın etkisi

$$\Delta(u) = \sum u'_k \otimes u''_k,$$

şeklinde ise,

$$\langle u, ab \rangle = \langle \Delta(u), a \otimes b \rangle = \sum \langle u'_k, a \rangle \langle u''_k, b \rangle$$

olur.

Bir Hopf cebiri olarak $A_{pq}(3)$, x, y, z elemanlarıyla oluşturulmuştur ve $A_{pq}(3)$ için bir taban

$$f = x^i y^j z^k, i, j, k \in \mathbb{N}$$

şeklindeki bütün tek terimlerle verilir. Diğer taraftan, dual cebiri $U_{pq}(3)$ ve onun üreteçlerini de X, Y, Z ile gösterelim. Dual cebirin X, Y, Z üreteçleri ve $A_{pq}(3)$ ün bir f elemanı arasındaki eşlemeyi tanjant vektörleri ve eş-birim yardımı ile

$$\langle X, f \rangle = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \langle Y, f \rangle = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \langle Z, f \rangle = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

şeklinde verebiliriz. Gerçekten, bu şekil bir eşleme dual olma şartlarını sağlar.

Eş-birimin x, y, θ elemanlarına etkisinden faydalanarak

$$\langle X, f \rangle = i\delta_{j,0}\delta_{k,0}$$

$$\langle Y, f \rangle = p^i\delta_{j,1}\delta_{k,0}$$

$$\langle Z, f \rangle = q^i\delta_{j,0}\delta_{k,1}$$

buluruz. Gerçekten, örneğin

$$\langle X, f \rangle = \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \varepsilon(ix^{i-1}y^jz^k) = i\varepsilon(y^j)\varepsilon(z^k) = i\delta_{j,0}\delta_{k,0}$$

dir.

Dual cebirin birim elemanıyla f monomiali arasındaki eşleme,

$$\langle 1_U, f \rangle = \varepsilon(f) = \delta_{j,0}\delta_{k,0}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (7.1-7.4) bağıntılarını kullanarak,

$$\langle XY, f \rangle = \langle X \otimes Y, \Delta(f) \rangle = (i+m).p^i\delta_{j,1}\delta_{k,0}$$

$$\langle YX, f \rangle = \langle Y \otimes X, \Delta(f) \rangle = (i+m).p^i\delta_{j,1}\delta_{k,0}$$

elde ederiz. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \langle XY, f \rangle &= \langle X \otimes Y, \Delta(f) \rangle \\ &= \langle X \otimes Y, (x^i \otimes x^i)[\delta_{j,0} + \delta_{j,1}(x^m \otimes y + y \otimes x^m)][\delta_{k,0} + \delta_{k,1}(x^n \otimes z + z \otimes x^n)] \rangle \\ &= \langle X \otimes Y, \delta_{j,1}\delta_{k,0}(x^i \otimes x^i)(x^m \otimes y) \rangle \\ &= \langle X \otimes Y, \delta_{j,1}\delta_{k,0}(x^{i+m} \otimes x^i y) \rangle \\ &= \delta_{l,1}\delta_{m,0} \langle X, x^{i+m} \rangle \langle Y, x^i y \rangle \\ &= (i+m)p^i\delta_{j,1}\delta_{k,0} \\ \langle YX, f \rangle &= \langle Y \otimes X, \Delta(f) \rangle \\ &= \langle Y \otimes X, (x^i \otimes x^i)[\delta_{j,0} + \delta_{j,1}(x^m \otimes y + y \otimes x^m)][\delta_{k,0} + \delta_{k,1}(x^n \otimes z + z \otimes x^n)] \rangle \\ &= \langle Y \otimes X, \delta_{j,1}\delta_{k,0}(x^i \otimes x^i)(y \otimes x^m) \rangle \\ &= \langle Y \otimes X, \delta_{l,1}\delta_{m,0}(x^i y \otimes x^{i+m}) \rangle \\ &= \delta_{l,1}\delta_{m,0} \langle Y, x^i y \rangle \langle X, x^{i+m} \rangle \\ &= (i+m)p^i\delta_{j,1}\delta_{k,0} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $U_{pq}(3)$ dual cebirinin üreteçleri arasındaki değiştirme bağıntıları

$$XY = YX, XZ = ZX, YZ = ZY$$

şeklinde bulunur.

Bu dual cebirin Hopf cebir yapısı, dual olma özelliklerinden faydalanılarak bulunabilir:

Bunun için, önce $U_{pq}(3)$ e etki eden bir eş-çarpım dönüşümü belirleyelim. Bu eş çarpımın X, Y, Θ üreteçlerine etkisinin

$$\Delta(X) = X \otimes B + C \otimes X$$

$$\Delta(Y) = Y \otimes D + E \otimes Y$$

$$\Delta(Z) = Z \otimes F + G \otimes Z, \quad B, C, D, E, G \in U_{pq}(3)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Burada B, C, D, E, G bulunacak elemanlardır. Eğer

$$f_1 = x^i \text{ denirse,}$$

$$\begin{aligned} x^i 1 &= x^i = 1x^i, \\ \Rightarrow \langle X, x^i \rangle &= i = \langle X, x^i 1 \rangle = \langle \Delta(X), x^i \otimes 1 \rangle \\ &= \langle X \otimes B + C \otimes X, x^i \otimes 1 \rangle \\ &= \langle X, x^i \rangle \langle B, 1 \rangle \\ &= i \langle B, 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = 1_U$$

$$\begin{aligned} \langle X, x^i \rangle &= i = \langle X, 1x^i \rangle = \langle \Delta(X), 1 \otimes x^i \rangle \\ &= \langle X \otimes B + C \otimes X, 1 \otimes x^i \rangle \\ &= \langle C, 1 \rangle \langle X, x^i \rangle \\ &= i \langle C, 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = 1_U$$

elde edilir. Eğer $f_2 = x^i y$ denirse

$$\begin{aligned}
x^i y &= p^i y x^i, \\
\Rightarrow \langle Y, x^i y \rangle &= \langle Y, p^i y x^i \rangle = p^i \\
\Rightarrow \langle Y, x^i y \rangle &= \langle \Delta(Y), x^i \otimes y \rangle = \langle Y \otimes D + E \otimes Y, x^i \otimes y \rangle \\
&= \langle E, x^i \rangle \langle Y, y \rangle = p^i \\
\Rightarrow E &= p^X \\
\langle Y, q^i y x^i \rangle &= \langle \Delta(Y), p^i y \otimes x^i \rangle = \langle Y \otimes D + E \otimes Y, p^i y \otimes x^i \rangle \\
&= p^i \langle D, x^i \rangle = p^i \\
\Rightarrow \langle D, x^k \rangle &= 1 \\
\Rightarrow D &= 1_U.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $f_3 = x^i z$ alınarak

$$F = 1_U, G = q^X$$

elde edilir. Sonuç itibariyle,

$$\Delta(X) = X \otimes 1_U + 1_U \otimes X$$

$$\Delta(Y) = Y \otimes 1_U + p^X \otimes Y$$

$$\Delta(Z) = Z \otimes 1_U + q^X \otimes Z$$

buluruz. Hopf cebiri olma aksiyomlarından, kolay bir şekilde eş-birim ve eş-ters tasvirlerinin dual üreteçlere etkisini belirleyebiliriz.

Eş-birim tasvirinin etkisi,

$$\varepsilon(X) = 0, \varepsilon(Y) = 0, \varepsilon(Z) = 0$$

ve eş-ters tasvirinin etkisi,

$$S(X) = -X, S(Y) = -p^{-X}Y, S(Z) = -q^{-X}Z$$

dir.

Böylelikle kolaylıkla aşağıdaki denkliği görebiliriz:

$$T_x \equiv X, T_y \equiv Y, T_z \equiv Z$$

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında değişmeli bir cebir üzerindeki Hopf cebiri yapısı yardımıyla değişmeli olmayan, deformasyonlu bir Hopf cebirinin nasıl elde edilebileceği tartışıldı ve ele alınan yaklaşım üç değişkenli polinomların cebirine uygulanarak iki parametrelili bir kuantum uzay oluşturuldu. Oluşturulan bu kuantum uzay üzerinde diferansiyel hesap, Weyl cebiri, Cartan-Maurer formlar ve bu formlara karşılık gelen vektör alanları verildi. Daha sonra bu iki parametrelili kuantum uzayın bir logaritmik genişlemesi ve ilgili bazı özellikleri çalışıldı. En son olarak da iki parametrelili kuantum uzay için bir dual Hopf cebiri oluşturuldu.

KAYNAKLAR

- [1] Drinfeld, V. G., (1986). "Quantum Groups", Proceedings of Internatioanal Congress of Mathematicians, Berkeley, 1: 798-820.
- [2] Jimbo, M., (1986). " A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation", Letters in Mathematical Physics, 11: 247-252.
- [3] Takhtajan , L.A., (1989). "Quantum Groups and Integrables Models", Advanced Studies in Pure Mathematics, 19: 435-457.
- [4] Manin, Y.I., (1988). Quantum Groups and Noncommutative Geometry(Centre deReserches Mathematiques, Montreal).
- [5] Manin, Y.I., (1989). "Multiparemetric quantum deformation of the general linear supergroup", Communication in Mathematical Physics, 123:163-175.
- [6] Woronowicz, S.L., (1987). "Compact matrix pseudogroups", Communication in Mathematical Physics, 111:613-665.
- [7] Fadeev, L.D., Reshetikin , N.Y.U. ve Takhtajan, L.A., (1989), "Quantization of Lie groups and Lie algebras", Algebraic Analysis, 129-139 .
- [8] Alvarez-Gaume, L., Gomez, C. ve Sierra, G., Nucl. Phys. B 330, 347(1990)
- [9] Majid, S., (1995). Fondation of Quantum Group Theory, Cambridge University Press.
- [10] Mourad, J., (1995). "Linear Connections in Noncommutative Geometry", Classical Quantum Gravity, 12: 965-974.
- [11] Madore, J., (2000). An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and Its Applications. Cambridge University Press, Cambridge.
- [12] Woronowicz, S.L., (1989). " Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups", Communication in Mathematical Physics, 122 :125-170.
- [13] Wess, J.ve Zumino, B., (1990). " Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyperplane, {\it Nucl. Phys.}, 18: 302-312.
- [14] Brzezinski, T., (1993). "Quantum Group Related to the Space of Differential Operators on the Quantum Hyperplane", Journal of Physics A:Mathematical and General, 26 : 905-911.

- [15] Sudbery, A., (1992). "Canonical Differential Calculus on Quantum General Linear Groups and Supergroups", Physics Letters B, 284: 61-65.
- [16] Kobayashi, T. ve Uematsu, T., (1992). "Differential Calculus on the Quantum Superspace and Deformation of Phase Space", Z. Phys. C 56:193-200.
- [17] El Hassouni, A., Hassoun, Y. ve Tahri, E.H., (1996). "Differential Calculi on the Quantum Superplane", Int J. Th. Physics, 35:2517-2525.
- [18] Bouwknegt, P., McCarthy, J. ve Nieuwenhuizen, P., (1997). "Fusing the coordinates of Quantum Superspace", Physics Letters B, 394 : 82-86.
- [19] Aizawa, N. ve Chakrabarti, R., (2004). "Noncommutative Geometry of Super-Jordanian $OSp(2/1)$ Covariant Quantum Space, J. Math. Physics, 45:1623-1638.
- [20] Falaki, E.M. ve Tahri, E.H., (2001). "Quantum Supergroup Structure of (1+1)-Dimensional Quantum Superplane, Its Dual and Its Differential Calculus", J.Phys.A;Math.Gen., 34: 3403-3412.
- [21] Coquereaux, R., Garcia, A. O. ve Trincherro, R., (2000). "Differential Calculus and Connections on a Quantum Plane at a Cubic Root of Unity", Reviews in Mathematical Physics, 12: 227-285.
- [22] Baz, E., (2006). "Gauge Theory on a Four-Dimensional Quantum Space Modern Phys. Letters A, 21: 2323-2330.
- [23] Bentalha, Z. ve Tahiri, M., (2007). "A New Approach in Bicovariant Differential Calculus on $SU_q(2)$, Int. J.Geo.M. .Mod.Phys., 4: 1087-1097.
- [24] Behr, W. ve Sykora, A., (2004). "Construction of Gauge Theories on Curved Noncommutative Spacetime", Nuclear Physics B, 3: 473-502.
- [25] Klimyk, A. ve Schmüdgen, K., Quantum Groups and Their Representations, SpringerVerlag, Heidelberg, 1997
- [26] Watts, P., Differential Geometry on Hopf Algebras and Quantum Groups(Ph.D. Thesis), hep-th/9412153v1.
- [27] Müller-Hoissen, F. ve Reuten, C., (1993). "Bicovariant Differential Calculus on $GL_{pq}(2)$ and Quantum Subgroups", J.Phys. A, 26: 2955-2975
- [28] Müller-Hoissen, F., (1992). "Differential Calculi on the Quantum Group $GL_{pq}(2)$ ", Journal of Physics A:Mathematical and General, 25: 1703-1734.
- [29] Celik, S.A. ve Yasar, E., (2006). "Differential Geometry of the Quantum 3-Dimensional Space", Czech. J. Physics, 56:229-236.
- [30] Celik, S., Ozkan, E.M. ve Yasar, E., (2009). "Cartan Calculus on the Quantum Space R_q^3 ", Turkish Journal of Mathematics, 33: 75-83.
- [31] Schirrmacher, A., Wess, J. ve Zumino, B., (1991). "The Two Parameter Deformation of $GL(2)$, Its Differential Calculus, and Lie Algebra", Zeitschrift Für Physik C Particles and Fields, 49: 317-324.

- [32] El Baz, M., El Hassouni, A., Hassouni, Y. ve Zakkari, E.H., (2007). "The two-parameter Higher Order Differential Calculus and Curvature on a Quantum Plane", *Adv. Appl. Clifford Alg.*, 17: 651-662.
- [33] Xiao-Dong, S. ve Shi-Kun, W., (1992). "Bicovariant Differential Calculus on the Two-Parameter Quantum Group $GL_{pq}(2)$ ", *Journal of Mathematical Physics*, 33: 3313-3329.
- [34] Celik, S., Celik, S.A. ve Arik, M., (1998). "Comment on the Differential Calculus on the Quantum Exterior Plane", *Modern Phys. Lett. A*, 13: 1645-1651.
- [35] Woronowicz, S.L., (1987). "Twisted $SU(2)$ Group. An Example of noncommutative differential calculus", *Publ. RIMS, Kyoto Uni.*, 23: 117-181.
- [36] Soni, S.K., (1990). "Comment on the differential calculus on quantum planes", *Journal of Physics A:Mathematical and General*, 24: 169-174.
- [37] Abe, E., (1980). *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [38] Landi, G.ve Madore, J., (2003). Twisted Configurations over Quantum Euclidean Spheres, *Journal of Geometry and Physics*, 45: 151-163.
- [39] Kaplansky, I., (1957). *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann.
- [40] Brzezinski, T., (1993). "Remark on Bicovariant Differential Calculi and Exterior Hopf algebras", *Nucl. Phys. B*, 18: 287-300.
- [41] Dimakis, A. ve Madore, J., (1998). "Differential Calculi and Linear Connections", *Journal of Mathematical Physics*, 37: 4647.
- [42] Dubois-Villette, M. ve Kerner, R., Madore, J., (1989). "Gauge Bosons in a Noncommutative Geometry", *Phys. Lett. B*, 217: 485-488.
- [43] Jurco, B. ve Schupp, P., (2000). "Noncommutative Yang-Mills from Equivalence of Star products", *Eur. Phys. J.*, 14: 367-370.
- [44] Madore, J., Scraml, S., Schupp, P. ve Wess, J., (2000). "Gauge Theory on Noncommutative Spaces", *Eur. Phys. J.*, 16: 161-167.
- [45] Fronsda, C., (1993). "The Dual of a Quantum Group", *Letters in Mathematical Physics*, 27: 59-71.
- [46] Jagannathan, R. ve Van -Jeugt, J., (1995). "Finite-Dimensional representations of the Quantum Group $GL_{pq}(2)$ Using the Exponential Map from $U_{pq}(gl(2))$ ", *J. Phys. A:Math. and Gen.*, 28: 2819-2831.
- [47] Connes, A., (1986). *Noncommutative Differential Geometry*, Institut des Hautes Scientifiques. Extrait des Publications Mathematiques.
- [48] Sudbery, A., (1991). *Proceedings of the Workshop on Quantum Groups*, Singapore.
- [49] Dobrev, V.K., (1992). "Duality for the Matrix Quantum Group $GL_{pq}(2, C)$ ", *Journal of Mathematical Physics*, 33: 3419-3431.
- [50] Sweedler, M.E., (1969). *Hopf Algebras*, Mathematics Lecture Notes Series.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Muttalıp ÖZAVŞAR
Doğum Tarihi ve Yeri : 03/05/1984-ANDIRIN
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : mozavsar@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2007
Lisans	Matematik	İnönü Üniversitesi	2005
Lise		Ahmet Kurttepelı Lisesi	2001

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2005-2008	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2008-2009	Johannes Kepler University	Bursiyer
2009-?	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Özavşar, M. ve Yeşilot, G., Differential Calculus on the Logarithmic Extension of the Quantum 3d Space and Weyl algebra, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics(IJGMMP), Issue 8, Vol. 8, pp. 1667-1678, (2011) (S.C.I-EXP)
2. Özavşar, M., Hopf algebra structure of (2+1) Dimensional Quantum Superspace, Its dual and Its Differential Calculus, Modern Physics Letters A(MPLA), Issue 26 , Vol. 25, 2241-2253, (2010) (S.C.I)
3. Özavşar, M. ve Yeşilot, G., Duality on the quantum space(3) with two parameters, Central European Journal of Physics, DOI: 10.2478/s11534-012-0092-1, 2012 (S.C.I-EXP)
4. Özavşar, M. ve Yeşilot, G., Derivative Operators on Quantum (3) space with Two Parameters and Weyl algebra, European Journal of Pure and Applied Mathematics, Issue 2, Vol. 5, 197-204 (2012).

Bildiri

1. Muttalip Özavşar ve Gürsel Yeşilot, Derivative Operators on the Logarithmic Extension of the Two-Parameter Quantum 3D Space, International Conference on Applied Analysis and Algebra, Istanbul, Turkey, pp.195, June 20-24 , (2012)
2. Muttalip Özavşar ve Gürsel Yeşilot, On the Two-Parameter Quantum 3D Space and Its Logarithmic Extension, X. Geometri Sempozyumu, Balıkesir, Turkey, pp. 86, June 13-16, (2012)
3. Muttalip Özavşar ve Gürsel Yeşilot, Cartan-Maurer forms over

quantum space with two parameters, International Conference on Applied Analysis and Algebra, Istanbul, Turkey, pp.198, June 29-July 02, (2011)

4. Muttalip Özavşar ve Gürsel Yeşilot, On the Hopf algebra Structure of the Manin Quantum Space and Its Differential Calculus, International Conference on Homotopy and Noncommutative Geometry , Tbilisi, Georgia, March 28-April 1, (2011)
5. Muttalip Özavşar ve Salih Çelik, Differential Geometry of 3D-Quantum Super Space, VI.Geometri Ulusal Geometri Sempozyumu, Bursa, Turkey, June 01-04, (2008)