

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İKİ SEVİYELİ STOKASTİK TAŞIMA PROBLEMLERİNE ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

HANDE GÜNEY AKDEMİR

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. FATMA TİRYAKİ**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ SEVİYELİ STOKASTİK TAŞIMA PROBLEMLERİNE ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

Hande GÜNAY AKDEMİR tarafından hazırlanan tez çalışması 09.08.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fatma ŞENYÜCEL
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet AHLATCIOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan ÖZDEMİR
İstanbul Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkış sürecinde bilgi, deneyim ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen *akıl hocam*, Sayın Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ'ye, Saygıdeğer hocamız Sayın Prof. Dr. Mehmet AHLATCIOĞLU'na, paylaşarak yükümü hafifleten sevgili eşim Onur AKDEMİR'e ve ailelerimize minnettarım, sizler olmadan bugünlere gelemezdim.

Ağustos, 2012

Hande GÜNAY AKDEMİR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	4
1.2 Tezin Amacı	9
1.3 Orijinal Katkı.....	10
BÖLÜM 2.....	11
STOKASTİK MATEMATİK PROGRAMLAMA	11
2.1 Şans Kısıtlı (Olasılıksal) Lineer Programlama	12
2.2 İki Aşamalı Stokastik Programlama.....	19
2.2.1 Kararlar ve Aşamalar	27
2.2.2 Özel Haller: Sabit Düzelticili (Fixed Recourse), Göreceli Tam (Relatively Complete) Düzelticili, Tam Düzelticili ve Basit Düzelticili Stokastik Programlama.....	28
2.2.3 Benders Ayrışım (Dual Decomposition) Algoritması	33
2.2.4 Stokastik Taşıma Problemi	37
2.2.4.1 STP'nin Kesikli Durumu	37
2.2.4.2 STP'nin Sürekli Durumu.....	47
2.2.4.3 Sürekli STP için Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Şartları.....	49
2.2.4.4 Frank-Wolfe Algoritması	51
2.2.4.5 Ayrılabilir (Seperable) Programlama.....	54

2.2.4.6 Çapraz Ayrışım Algoritması	67
BÖLÜM 3.....	73
İKİ SEVİYELİ PROGRAMLAMA.....	73
3.1 İki Seviyeli Programlama için Çözüm Yöntemleri	74
3.1.1 K. En İyi Algoritması	74
3.1.2 Dal-Sınır Tekniği	75
3.1.3 En Hızlı Düşüş Metodu	78
3.1.4 Ceza Fonksiyonu Yaklaşımı	80
3.2 Denge Kısıtlı Matematik Programlama	82
3.2.1 Çözüm Yöntemleri	84
BÖLÜM 4.....	87
DENGE KISITLI STOKASTİK MATEMATİK PROGRAMLAMA.....	87
4.1 <i>Alt Seviye Bekle de Gör</i> Formülasyonu	87
4.2 <i>Hemen Şimdi</i> Formülasyonu	89
4.3 Örnekler	90
BÖLÜM 5.....	94
İKİ SEVİYELİ STOKASTİK TAŞIMA PROBLEMLERİ.....	94
5.1 İki Seviyeli Kesikli Stokastik Taşıma Problemi	94
5.1.1 Kabuller.....	94
5.1.2 Problemin Formülasyonu	96
5.2 İki Seviyeli Sürekli Stokastik Taşıma Problemi	108
5.2.1 Kabuller.....	108
5.2.2 Problemin Formülasyonu	108
5.3 Stokastik Yaşam Süreli Çabuk Bozulan Malın Taşınması için İki Seviyeli Model.....	113
5.3.1 Kabuller.....	114
BÖLÜM 6.....	124
SONUÇ VE ÖNERİLER	124
EK-A.....	132
TEMEL OLASILIKSAL BİLGİLER	132
A-1 Rassal Değişkenler	132
A-2 Ortak Dağılımlı Rassal Değişkenler (Ross [77])	141
ÖZGEÇMİŞ.....	147

SİMGE LİSTESİ

$Cov(.,.)$	Kovaryans
$E[.]$	Beklenen değer
$P\{.\}$	Olasılık fonksiyonu
$p(.)$	Kesikli rassal değişken için olasılık ağırlık fonksiyonu
$Var(.)$	Varyans

KISALTMA LİSTESİ

DKMP	Denge Kısıtlı Matematik Programlama
DKSMP	Denge Kısıtlı Stokastik Matematik Programlama
GAMS	General Algebraic Modeling System
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
MPEC	Mathematical Programs with Equilibrium Constraints
STP	Stokastik Taşıma Problemi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Birinci varış yeri için düzeltici fonksiyon (Örnek 2.7).....	56
Şekil 2. 2 İkinci varış yeri için düzeltici fonksiyon (Örnek 2.7)	57
Şekil 2. 3 Üçüncü varış yeri için düzeltici fonksiyon (Örnek 2.7)	57
Şekil A-1. 1 Standart rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu	140

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2. 1 Örnek 2.5 için birim maliyetler	40
Çizelge 2. 2 Örnek 2.5’de taleplerin mümkün değerleri ve olasılıkları	40
Çizelge 2. 3 Örnek 2.6 için aylık yolcu kapasiteleri ve faaliyet giderleri	44
Çizelge 2. 4 Olası aylık talepler ve gerçekleşme olasılıkları (Örnek 2.6)	44
Çizelge 2. 5 Olasılık dağılımları (Örnek 2.8)	59
Çizelge 2. 6 Örnek 2.8’de alt aralıklara karşılık oluşturulan adım boyu problemlerinin optimal çözümleri	67
Çizelge 5. 1 Örnek 5.3’ün ikinci seviye çözümleri (uniform dağılım)	122
Çizelge 5. 2 Örnek 5.3’ün ikinci seviye çözümleri (uniform dağılım-çabuk bozulabilen)	123

İKİ SEVİYELİ STOKASTİK TAŞIMA PROBLEMLERİNE ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

Hande GÜNAY AKDEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ

Taşıma bir tedarik zincirinin önemli bir bileşenidir. Tedarik zinciri; rekabette üstünlük sağlamak için ürün geliştirme, pazarlama, dağıtım ve depolama gibi faaliyetleri eşgüdümlü bir biçimde gerçekleştiren, tedarikçiler, üreticiler, dağıtıcılar, perakendeciler ve taşımacılardan oluşan bir sistemdir. Tedarik zinciri yönetimi ile ilgili problemler, üretim hattında yaşanabilecek fiziksel aksaklıklardan, talepler ve birim fiyatlardaki dalgalanmalardan dolayı belirsiz parametreler içerir. Geçmiş verilerden yararlanılarak istatistiksel tekniklerle hesaplanan olasılık dağılım fonksiyonları ile değişkenliğin etkisi yansıtılabilir. Stokastik programlama, belirsizlik altındaki karmaşık gerçek hayat problemleriyle ilgilenen, istatistiksel karar teorisine dayalı bir tekniktir. Tüm olası senaryoları göz önüne alarak belirsizliği temsil edebilmek için esas stokastik (belirsiz) problem deterministik (belirli) eşdeğerine dönüştürülür.

Stokastik programlamanın ilk uygulamalarından biri stokastik taşıma problemidir. Bu problem, herbir müşterinin talebi birer rassal değişken olmak üzere, talebin üzerinde veya altında mal gönderiminin cezalandırılmasıyla müşterilere gönderilecek optimal mal miktarlarını belirleme problemidir. Amaç, taşıma maliyetleri ile ceza maliyetlerinin beklenen değerinin toplamının minimize edilmesidir.

Bir dağıtım şebekesinde yerel yönetim, bir iletişim pazarında servis sağlayıcısı veya bir tedarik zincirinde tedarikçi lider olarak hareket eder ve ilk önce kararını verir. Takipçiler olarak, bu şebekelerin kullanıcıları, rakipler veya bu tedarik zincirindeki perakendeciler bu kararı, kendi stratejilerini şekillendirmek için girdi olarak kullanırlar. Çok seviyeli

programlama ve oyun teorisi bu tür hiyerarşik karar problemlerini ele alır ve Stackelberg (denge) çözümlerini arar.

Bu çalışmada, hiyerarşik yapıdaki tedarik zincirlerinin dağıtım kararları belirsizlik altında göz önüne alınmıştır. Önerilen stokastik modellerin deterministik eşdeğerlerinin elde edilmesinden sonra problemler, iki seviyeli programlama problemlerinin çözümü için verilmiş etkin yöntemlerle çözülmüştür. Özellikle, depolama ve taşıma sürecinde bozularak çöpe gidebilen dayanıksız bir malın taşınması için merkezi olmayan bir tedarik zinciri göz önüne alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Optimizasyon, stokastik programlama, stokastik taşıma problemi, iki seviyeli programlama, denge kısıtlı matematik programlama, denge kısıtlı stokastik matematik programlama, talep belirsizliği, tedarik zinciri yönetimi, dayanıksız mallar.

**SOLUTION PROPOSALS FOR BILEVEL STOCHASTIC TRANSPORTATION
PROBLEMS**

Hande GÜNEY AKDEMİR

Department of Mathematics

Ph.D Thesis

Advisor: Prof. Dr. Fatma TIRYAKI

Transportation is an important component of the supply chain. Supply chain is a system consists of suppliers, manufacturers, distributors, retailers, transporters who act in a coordinated manner to accomplish product development, marketing, distribution and warehousing tasks and wish to provide a competitive advantage. Supply chain management related problems include uncertain parameters due to possible failures in production line, fluctuations in unit prices and demands. The impact of volatility can be captured by using probability distribution functions which are statistically calculated from historical data. Stochastic programming is a technique based on statistical decision theory and concerned with computationally difficult problems under uncertainty. The original stochastic problem is transformed into equivalent deterministic problem to introduce randomness by taking into account all possible scenarios.

Early applications of stochastic programming include stochastic transportation problem. With each customer demand a random variable, the problem is to determine optimal quantities to be sent to customers via linear penalties for any shortage and surplus. The objective is to minimize the sum of transportation costs and expected penalty costs.

A government in a distribution network, a service provider in a communication market or a supplier in a supply chain acts as a leader and makes his decision first. As followers, users of those networks, competitors or retailers use that decision as an input to form their strategy. Multi-level programming and game theory address that kind of hierarchical decision making problems and tries to find Stackelberg (equilibrium) solutions.

In this thesis, we restrict ourselves into distribution plans of hierarchical supply chains under stochastic environments. After obtaining deterministic equivalents of original two level stochastic transportation problems, we use efficient methods proposed for bilevel programming. In particular, a decentralized supply chain is considered to transport a perishable product which can be deteriorated during storage or transportation.

Key words: Optimization, stochastic programming, stochastic transportation problem, bilevel programming, mathematical programming with equilibrium constraints, stochastic mathematical programming with equilibrium constraints, demand uncertainty, supply chain management, perishables.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Finans, işletme yönetimi ve mühendislik gibi birçok disiplinde karşılaşılan karar verme, optimizasyon veya matematik programlama probleminin genel formu:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in & X \end{aligned} \tag{1.1}$$

şeklinde verilebilir. Burada minimize edilmesi istenilen reel değerli $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, *amaç veya maliyet fonksiyonu* adını alır.

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

olacak şekilde bileşenleri *karar değişkenleri* olarak adlandırılan bir vektördür. $X \subset \mathbb{R}^n$ kümesine ise *kısıt kümesi* veya *uygun bölge* denir. $X = \mathbb{R}^n$ olarak düşünüldüğünde, (1.1) problemi *kısıtsız optimizasyon problemi* adını alır.

Elbette ki, amaç fonksiyonunun maksimize edilmesini gerektiren bir problem de düşünülebilir. Ancak, f fonksiyonunun maksimizasyonu, $-f$ fonksiyonunun minimizasyonuna denktir, dolayısıyla basitlik açısından sadece minimizasyon problemine odaklanılabilir [1].

$i=1, \dots, m$ için $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, (1.1) problemi eşdeğer olarak:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i=1, \dots, m \\ \mathbf{x} \in & X \end{aligned} \tag{1.2}$$

şeklinde alınırsa, problemi tanımlayan fonksiyonların ve $X \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin sahip olduğu bazı özelliklere bağlı olarak (1.2) problemi:

- Eğer f ve g_i fonksiyonları lineer ve X kümesi konveks çokyüzlü ise *linear programlama problemi*,
- Eğer f ve g_i fonksiyonlarından en az biri lineer değil veya X kümesi konveks çokyüzlü değil ise *nonlinear programlama problemi*

isimlerini alır. Amaç fonksiyonu ve uygun bölgesi konveks olan bir nonlinear programlama problemi *konveks programlama problemi*, aksi halde *konveks olmayan programlama problemi* veya *global optimizasyon problemi* adını alır.

Bir başka özel sınıf ise *tamsayılı programlama problemi* olarak adlandırılır. Bu problemde karar değişkenlerinden bazıları (*karma tamsayılı*) veya tümü (*pür tamsayılı*) bölünemez çokluktur, yani sadece tamsayı değerleri alabilir [2]. Tamsayılı programlama problemi gibi uygun bölgesi sürekli olmayan problemler, *kombinatoryal* (kesikli) problemler adını alır.

Optimizasyon problemi, fonksiyon katsayıları kesin olarak bilinmekte ise *deterministik optimizasyon problemi* adını alır. Ancak, pratikte optimizasyon problemleri genellikle, planlama aşamasında sabit miktarlar olarak verilemeyen yani kontrol edilemeyen çok sayıda model parametresine ve rassallık faktörüne bağlıdır. Belirsizliğin (uncertainty) örnekleri; fiziksel belirsizlik (materyal, ağırlık ve boyut gibi fiziksel niceliklerin tam olarak ölçülememesi), ekonomik belirsizlik (piyasa koşullarındaki değişkenlikten dolayı birim fiyatlardaki dalgalanmalar ve talebin düşebilmesi), istatistiksel belirsizlik (sınırlı sayıda örnek veri olmasından dolayı gerçekleşen kestirim hataları) ve model belirsizliği (modelleme hataları) olarak verilebilir [3].

Stokastik programlamada, belirsizliklerle başa çıkabilmek üzere parametrelerin rassal olduğu, fakat istatistiksel uygunluk testleriyle geçmiş verilerden yararlanılarak kestirilebilen olasılık dağılımlarına sahip olduğu kabul edilir [4]. Model kurucu, optimizasyon probleminin parametreleriyle ilgili geçmiş verilere ulaşamıyorsa veya süreç hakkında çok az bilgiye sahip ise belirsizlik, olasılık dağılımları vasıtasıyla temsil

edilemeyeceğinden stokastik programlama yerine bulanık programlama tercih edilir [5].

Birbirini takip eden ve dolayısıyla birbiriyle ilişkili kararlar dizisinin sistematik bir yöntemle optimal kombinasyonunu bulmaya ise *çok aşamalı* veya *dinamik programlama* denir. En basit dinamik sistemde iki aşama vardır. Belirsizlik altında karar vermede oldukça sık kullanılan, dinamik programlamayla yakından ilişkili tekniklerinden biri iki aşamalı stokastik programlamadır [6]. Birinci aşamada rassal olay sonuçlanmadan alınan kararlara *hemen şimdi* (here-and-now) kararları, rassal olay sonuçlandıktan sonra artan kaynakların yeniden tahsisi kararlarına ise *bekle de gör* (wait-and-see) kararları denir. Böylece, iki aşamalı stokastik programlama probleminin amaç fonksiyonu, birinci aşama kararlarının maliyetleri ile ikinci aşama tepkilerinin beklenen maliyetlerinin toplamını içerir [7].

Stokastik programlama problemlerinde bazen amaç fonksiyonunda beklenen değer yerine varyans (değişkenlik) minimize edilmeye çalışılır. Bazen de hem beklenen değer hem de varyans minimizasyonu yapılması daha gerçekçidir. Bu şekildeki, bir yerine birden fazla amaç fonksiyonunun optimize edilmeye çalışıldığı durumlar bizi *çok amaçlı stokastik programlama* problemlerine götürür. Aralarında hiyerarşik bir ilişkinin söz konusu olduğu birden fazla karar seviyesi de mevcut ise problem, *çok seviyeli stokastik programlama* (*multi-level stochastic programming, stochastic decentralized decision making, distributed/hierarchical decision making under uncertainty* [8]) problemi adını alır.

Planlama, yönetim ve politika belirleme gibi alanlarda karşılaşılan çok seviyeli programlamanın en basit hali olan iki seviyeli programlamada, lider ve takipçi adı verilen iki oyuncudan lider, kararını açıklamada önceliğe sahiptir. Bireysel faydalarını maksimize etmeye çalışan karar vericiler, diğer seviyedeki karar vericinin kararına göre hareket eder. İki seviyeli problemde, birinci seviyedeki problemin kısıtlarında başka bir optimizasyon problemi (ikinci seviye problem) vardır. İkinci seviyenin optimallik şartları, birinci seviye problemin kısıtlarına eklendiğinde tek seviyeli eşdeğer bir problem elde edilir. Böylece, iki seviyeli programlamanın bir genelleştirmesi olarak, kısıtlarında başka bir problemin optimallik şartlarını içeren optimizasyon problemine,

denge kısıtlı matematik programlama (DKMP, mathematical programming with equilibrium constraints) problemi denir [9].

Fiyat, maliyet ve taleplerdeki dalgalanmalar, dış etkenler, ölçüm veya üretim hataları, bu tür hiyerarşik karar verme problemlerine belirsizliği getirir. DKMP probleminin stokastik uzantısına, yani bazı parametrelerin rassal olarak düşünüldüğü iki seviyeli programlama problemine *denge kısıtlı stokastik matematik programlama problemi (DKSMP)* adı verilir [10].

1.1 Literatür Özeti

Bu bölümde, çalışmamızla ilgili literatür üç aşamada verilecektir. İlk olarak, stokastik programlama ve stokastik taşıma problemiyle, daha sonra, iki seviyeli programlama ve DKMP ilgili literatür özetlenecektir. Son olarak, stokastik programlama ile iki seviyeli programlamanın birlikte kullanıldığı çalışmalara yer verilecektir.

Stokastik programlamanın uygulama alanları, matematik programlamanınki kadar geniştir. İlk uygulamalardan biri Ferguson ve Dantzig tarafından [11]'de verilmiş uçakları rotalara tahsis etme (filo ataması) modelidir. Bu problemde, her bir rota için verilen yolcu talebi dağılımlarından yararlanılarak yolcu kaybı maliyetlerinin beklenen değerini minimize edecek şekilde uçaklar rotalara tahsis edilmektedir. Bu çalışma literatürde önemli bir yere sahiptir, çünkü modelin kurulmasında genelleştirilmiş bir şebeke yapısı kullanılmış ve yöntemle birlikte önerilmiştir. Ayrıca, bu problem için belirsizliği dikkate alarak deterministik yerine stokastik modelden gelen çözümleri kullanmanın katkısı (stokastik çözümün değeri) oldukça yüksek çıkmıştır. Çözüm yöntemi taşıma simpleks metoduna benzemektedir. Bu modelle başlayan stokastik araç rotalama gibi taşıma modelleri, stokastik programlamanın göze çarpan uygulamalarındandır.

Stokastik programlama problemleri, özel bir yapıda olduğundan ayrışım ve/veya rahatlatma yöntemleriyle çözülmektedir. Ayrışım yöntemi, esas problemi alt problemlere ayırıp, alt problemlerin çözümlerinden esas problemin çözümüne ulaşmayı içeren iteratif bir yöntemdir. Rahatlatma yöntemi ise, problemin çözümünü zorlaştıran kısıtların probleminden çıkartılmasıyla başlar. Rahatlatılmış minimizasyon

probleminin çözümü esas probleme bir alt sınır verir. Esas problemin herhangi uygun bir çözümü ise esas probleme bir üst sınır verir. Üst sınır ile alt sınır arasındaki göreceli farkın önceden belirlenmiş bir değerden daha küçük kalması sağlanana kadar iterasyonlar tekrarlanır.

Çıkış noktasını istatistiksel karar teorisinden alan alternatif bir model, Charnes ve Cooper tarafından [12]'de verilmiş, belirli bir olasılıkla sağlanması gereken şans kısıtlarını içeren olasılıksal programlamadır. Problemin şans kısıtlarının yerine onların nonlinear deterministik eşdeğerleri alınır ve elde edilen deterministik eşdeğer problem bilinen nonlinear programlama teknikleriyle çözülür.

En iyi yatırım portföyünün seçimi gibi finansal problemler de belirsizlik ve risk (değişkenlik) içeren kararları barındırır. Stokastik programlamanın portföy analizinde başarılı uygulamaları, minimum varyanslı portföy seçimi ile 1952 ve 1959 yıllarında Harry Markowitz ile başlamıştır [13], [14]. Takip eden senelerde bu çalışmalarıyla yazar, Nobel ödülüne layık görülmüştür.

Elektrik dağıtım ve iletişim sistemlerinin planlamasında ve yönetiminde hat trafiği, performans ve güvenilirlik gibi konularda doğal olarak belirsizlikler ortaya çıkmaktadır. Tedarik ve talep miktarlarındaki belirsizliklerden dolayı üretim ve kapasite planlama gibi alanlarda da stokastik programlama ile kârlı sonuçlar elde edilebilmektedir [15].

Tedarik zinciri yönetimi kapsamında alınması gereken önemli kararlardan biri dağıtım planıdır. Özel yapıdaki bir lineer programlama problemi olan klasik taşıma probleminde tedarikçilerden müşterilere minimum taşıma maliyetiyle, tedarikçilerin kapasitelerini aşmamaları ve her bir müşterinin talebinin karşılanması şartıyla belirli bir malın dağıtımını planlanır. Rassal müşteri taleplerine karşılık, fazla veya eksik mal göndermenin cezalandırıldığı durumda problem, *stokastik taşıma problemi* (STP) adını alır. Taşıma maliyetleri ile beklenen ceza maliyetlerinin toplamı minimize edilmeye çalışılır.

STP için literatürde oldukça etkin yöntemler mevcuttur. Bunlardan bazıları, Frank-Wolfe algoritması [16], [17], ayrılabilir programlama [18], çapraz ayrışım algoritmaları [19], [20], orman iterasyonu metodudur [21], [22]. Elmaghraby, [23]'te kaynak tahsisi problemini belirsizlik altında ele almış ve problemin optimallik şartlarını vermiştir. STP bu problemin özel bir halidir. Önerilen yöntemde, başlangıç tahsisi

olarak müşteri taleplerinin beklenen değerlerinin alınmasının rasyonel olduğu belirtilmiştir ve bir sonraki iterasyon noktası kısmi türevler yardımıyla belirlenmiştir. Kesikli müşteri talepleri ile [11]'de verilmiş filo ataması problemindeki talepler, sürekli hale getirilmiş ve yöntem uygulanmıştır. Williams, [24]'te çözüm tekniği olarak ayrışım tekniğini kullanmış, ortak dağılıma sahip talepleri göz önüne almış ve ayrıca bölünemez mal durumunu da tartışmıştır. Szwarc, [25]'te sürekli talepler için histogram şekilli olasılık yoğunluk fonksiyonlarını almış ve nonlinear amaç fonksiyonunun lineerleştirilmesine dayalı bir çözüm yöntemi önermiştir. Holmberg, [26]'da mevcut birçok yöntemi taramış ve büyük ölçekli test problemleri kullanarak bu yöntemleri karşılaştırmıştır. Holmberg ve Tuy, [27]'de STP'nin özel bir durum olduğu üretim-taşıma problemini göz önüne almış ve problemin çözümü için rahatlatma tekniği kullanmıştır. Daneva vd., [28]'de Frank-Wolfe algoritmasının da içinde bulunduğu uygun yön metotlarını incelemiş ve literatürdeki test problemlerini çözerek metotların etkinliğini karşılaştırmıştır.

Taşıma yapılan bir şebekenin yöneticisi (merkezi otorite) çok yüksek bir geçiş ücreti belirlerse, şebeke kullanıcıları seyahat maliyetlerini minimize etmek üzere kendileri için en iyi rotayı seçtiklerinden mevcut yapıyı kullanmaktan vazgeçerler ki, bu tepki yüksek maliyetlere neden olur. Bu şekildeki gibi, bir karar vericinin izlediği politika başka bir karar vericinin tepkisine yol açıyorsa, bu iki karar seviyesi arasında hiyerarşik bir ilişki söz konusudur [29].

İki seviyeli programlama fikri ilk kez, gerçek piyasa koşullarını tanımlayan hiyerarşik yapıdaki bir modelle Stackelberg tarafından [30]'da ortaya atıldı. Bireysel faydalarını maksimize etmek üzere bağımsız olarak, ancak belirli bir hiyerarşiye göre hareket eden karar vericilerin olduğu ardışık yapıdaki optimizasyon problemi Stackelberg oyunu olarak adlandırılır. En basit yapıdaki Stackelberg oyunu iki oyuncunun bulunduğu lider-takipçi oyunudur. Lider, fiyatları ve stokları kontrol ederek bağımsız olarak piyasayı yönetirken, takipçi ise lidere bağlı olarak hareket etmelidir. Ancak, lider takipçinin tüm olası tepkilerini kestirebilmelidir, çünkü kârı yalnızca kendi kararına değil aynı zamanda takipçinin verdiği tepkiye de bağlıdır. Diğer taraftan, liderin seçimi takipçiyi etkiler, çünkü takipçi sadece liderin seçimine karşılık verebilir. Ortaksız iki oyuncu olarak lider

ve takipçinin aralarında bilgi paylaşımının söz konusu olmadığı düşünülür. İki seviyeli problemin (ortaksız oyunun) çözümüne Stackelberg (denge) çözümü denir.

Bracken ve McGill, [31] ve [32]'de savunma, üretim ve pazarlama alanlarında hiyerarşik yapıdaki optimizasyon problemlerini modellemiştir. Bu uygulamalar sonrasında birçok araştırmacı tarafından geliştirilen iki seviyeli programlama ve DKMP için kapsamlı literatür taraması, Dempe tarafından [33]'te verilmiştir.

Patriksson ve Wynter'a göre iki seviyeli programlama uygulamalarının neredeyse tamamında problem verilerinde belirsizlikler vardır ve tüm varyasyonları göz önüne almamak veya parametre değerleri için onların beklenen değerlerini (tüm mümkün değerlerin ortalamasını) almak maliyetli olabilir. Genellikle çok sayıda senaryo olmasından dolayı büyük boyutlu olan bu tür problemler, hem nonlineerdir hem de konveks değildir. Bu nedenle, iki aşamalı stokastik programlama için geliştirilen ayrışım gibi geleneksel yöntemlerle çözülemeyebilirler [34].

Patriksson ve Wynter, [10]'da hem iki aşamalı programlamanın hem de iki seviyeli programlamanın DKSM' nin özel halleri olduğunu göstermiştir.

Ryu vd., [35]'de birinci seviyenin dağıtımı yönettiği, ikinci seviyenin üretimden sorumlu olduğu bir tedarik zincirinde belirsizlik altında iki seviyeli karar verme problemini incelemiştir. Yazarlar, parametrik programlama tekniğine dayalı bir çözüm yöntemi önermiştir. Roghanian vd., [36]'da aynı problemi tartışmıştır, ancak yazarlar şans kısıtlı programlama tekniği ile belirsizliğin üstesinden gelmiştir.

Cheng vd., [37]'de uniform dağılımlı talebe sahip bir ürün için birinci seviye karar verici üretici ve ikinci seviye karar verici perakendeci arasındaki iki seviyeli klasik gazete satıcısı modelinde perakendecinin amacını koşullu (ortalama) riske maruz değer (CVaR) minimizasyonu olarak almıştır.

Sakawa ve Katagiri, [38]'de kısıtlarında ve amaç fonksiyonlarında rassal değişkenler içeren iki seviyeli lineer programlama problemlerine odaklanmıştır. Yazarlar, şans kısıtlı programlama yaklaşımı ile etkileşimli bulanık programlama tekniğini bir arada kullanmıştır.

Cromvik ve Patriksson, [39]'da radyasyon tedavisinde kanserli hücrelerin etrafındaki doku ve organların maruz kaldığı riski en aza indirmek üzere (CVaR minimizasyonu, minimum komplikasyon riski) en uygun dozun bulunması için birinci seviyede tümörün yerinin, ikinci seviyede ise makine parametrelerinin belirsiz olduğu (biyolojik parametrelerdeki belirsizlik ve pozisyon belirsizliği) kabulüyle DKSMP problemini modellemiştir.

Kalashnikov vd., [40]'ta bir doğalgaz tedarik zincirinde iki seviyeli çok aşamalı stokastik optimizasyon modelini önermişlerdir. Bu modelde, doğalgaz yükleme şirketi lider, doğalgaz hattı yönetim şirketi takipçi olarak düşünülmüştür.

Özaltın vd., [41]'de sağ taraf sabitlerinin rassal olarak düşünüldüğü stokastik iki seviyeli sırt çantası (stochastic bilevel knapsack) problemini tanımlamıştır. Sonlu sayıda senaryonun göz önüne alındığı iki aşamalı modelde, liderin sadece 0-1 değerlerini alabilen karar değişkenleri takipçinin kapasite kısıtları üzerinde belirsizliğe yol açmaktadır.

Charles vd., [42]'de talep belirsizliği içeren, şans kısıtlı ve kesirli (fractional) taşıma problemi için beklenen değer ve varyans modellerini tanımlamıştır. Beklenen değer modelinde değişkenlik önemszenmeden iki lineer maliyet fonksiyonunun oranı, varyans modelinde iki nonlineer fonksiyonunun oranı optimize edilmektedir. Kesirli programlama, örneğin kâr/maliyet gibi bir oranın maksimize edildiği durumlarda uygulanmaktadır (Çetin [43]).

Birbil vd., [44]'te uzun vadede takipçinin maliyetlerinin (gelirlerinin) veya üretim (talep) düzeyi gerekliliklerinin beklenen değerini içeren dinamik yapıdaki stokastik iki seviyeli optimizasyon problemini göz önüne almıştır. Simülasyon ve gradyent kestirim tekniklerine dayalı çözüm yöntemini, geçiş ücreti belirleme (toll pricing) problemine uygulamıştır.

Literatürde, özellikle konaklama, araba kiralama, konser organizasyonu gibi kapasitenin kısa ömürlü (perishable) ve kısıtlı olduğu hizmet sektörlerinde karşılaşılan gelir yönetimi (revenue (yield) management) problemleriyle sıkça karşılaşılmaktadır. Özellikle, talebin fiyat değişikliklerine duyarlı olduğu havayolu sektöründe gelir yönetimi problemi, talep kestirimi, mevcut kapasitenin üzerinde rezervasyon alma

politikasının belirlenmesi, kapasite tahsisi (koltuk stok kontrolü) ve uçak bileti fiyatlandırma adı verilen dört alt probleme ayrıştırılarak ele alınmaktadır. İstatistik, optimizasyon, yönetim, pazarlama ve finans disiplinleriyle ele alınan kapsamlı bir fiyatlandırma modeli, stokastik, dinamik ve oyun teorisiyle ilgili öğeleri barındırır. Rakiplerin bilet fiyatları, talep kestirimleri ve geçmiş satış verileri bir veri tabanında toplanmalıdır (Cote vd. [45]).

Fiyatlandırma problemine başka bir örnek Kosuch vd. tarafından [46]'da verilmiştir. Verilen şebekede servis sağlayıcısının lider, müşterilerin ise takipçi olduğu kabul edilerek stokastik iki seviyeli bir problem göz önüne alınmıştır. Talepler fiyata bağlıdır, fiyatlar yüksek ise rakip servis sağlayıcılardan biri tercih edilebilir. Lineer, birinci seviyede şans kısıtları olan ve sonlu sayıda senaryo olması durumlarında hizmet fiyatlandırma için verilen problemin çözümü Lagrange rahatlatması ile yapılmıştır.

Üretici veya tedarikçi ile perakendeci arasındaki rassal parametreler içeren iki seviyeli veya iki aşamalı problemlere diğer örnekler, optimal fiyatlandırma, sipariş ve stok kontrolü modelleri, iade ve gelir paylaşımı anlaşmalarını içeren gazete satıcısı probleminin uzantıları [47], [48], araç rotalama, üretim ve dağıtım çizelgeleme problemleridir [49], [50], [51].

Stackelberg oyunlarında oyuncuların kararlarını alırken iletişimde olmadığı ve ortaklık kurmadığı düşünülür. Belirsizlik içeren ortaksız oyunlar [52] ve [53]'te verilmiştir. Bir tedarik zincirinde oyuncuların genel faydayı, dolayısıyla bireysel faydalarını arttırmak üzere koalisyonlar kurması da olağandır. Ortaklık imkânlarının olduğu belirsizlik içeren bu tür karar verme problemleri [54]'te incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Literatürde genellikle fiyatlandırma problemlerinde karşılaşılan belirsizlik altında hiyerarşik karar vermenin, tedarik zincirlerinde de karar vericiler arasında hiyerarşik bir ilişkinin var olabilmesi ve uzun vadeli kararlarda belirsizliklerin ortaya çıkabilmesi nedenleriyle uygulanabilirliği çalışmamızın motivasyonunu oluşturmaktadır. Örneğin, hammadde tedarikçisinin aldığı bir karar üreticinin üretim çizelgeleme ve araç rotalama stratejilerini değiştirebilir, ayrıca istikrarsız piyasa koşulları fiyatlarda dalgalanmalara,

müşteri beklentilerinin sürekli artması ise taleplerde değişkenliğe yol açabilir (Gupta ve Maranas [7]).

Çalışmamızda belirsizlik içeren, hiyerarşik ilişkideki karar vericilerin taşıma planlama problemleri ele alınmıştır. Önerdiğimiz üç modelde de, STP’de olduğu gibi birim elde bulundurma ve bulundurmama maliyetlerini kullanan iki aşamalı basit düzelticili durumlar üzerinde durulmuştur.

1.3 Orijinal Katkı

Bildiğimiz kadarıyla çalışmamızla ilgili literatür çoğunlukla şans kısıtlı programlama tekniğine dayalıdır. Çalışmamızın orijinal kısmı, hiyerarşik ilişkideki karar vericilere sahip tedarik zinciri seviyeleri arasındaki taşıma planlarının iki aşamalı stokastik programlama tekniği ile belirlenmesidir.

Bu çerçevede, Bölüm 2’de şans kısıtlı programlama, iki aşamalı stokastik programlama ve stokastik taşıma problemi gibi stokastik programlama ile ilgili genel bilgiler, örnekler ve çözüm yaklaşımları verilmiştir. Bölüm 3’te iki seviyeli programlama ve onun bir genelleştirilmesi olan DKMP, Bölüm 4’te DKMP’nin stokastik uzantısı olan DKSMP problemleri tanıtılmıştır.

Çalışmamızın orijinal bölümü olan Bölüm 5’de üç model tanımlanmıştır. Kesikli talep durumunda, müşteri taleplerini karşılamak üzere anlaşılmış lider ve takipçinin optimal taşıma planını bulmak için birinci model önerilmiştir. İkinci model, ilk modelin sürekli talep durumu için düzenlenmiş halidir. DKMP ve DKSMP problemleri için önerilen Fischer-Burmeister fonksiyonu yardımıyla düzgünleştirme (smoothing) tekniği ile tek seviyeli eşdeğer problem elde edilmiştir. Son modelde, kısa raf ömrüne sahip bir ürünün taşınmasında üretici lider, perakendeci ise takipçi olarak kabul edilmiştir. Takipçi sürekli bozulmaya maruz kalan malın, müşteriye ulaştığı anda mümkün olduğunca taze olmasını istemektedir. Malın yaşam süresi stokastik kabul edilmiş ve ceza maliyetleri birim bozulma maliyetleri olarak alınmıştır.

Bölüm 6, Sonuç ve Öneriler bölümüdür. Çalışmada faydalanan temel olasılıksal kavramlar Ek-A’da verilmiştir.

STOKASTİK MATEMATİK PROGRAMLAMA

Stokastik programlama, optimizasyon problem parametrelerinin bazısının ya da tümünün deterministik (belirli) miktarlar yerine stokastik (rassal) değişkenler olarak tanımlandığı durumlarla ilgilenir.

Belirsizliğin etkisinin yansıtılabilmesi için, stokastik programlama problemi genellikle olasılıksal programlama ya da iki aşamalı stokastik programlama yöntemleri kullanılarak lineer olmayan eşdeğer deterministik programlama problemine dönüştürülür. Sonrasında standart çözüm yöntemlerinden biri kullanılarak lineer olmayan programlama problemi çözülür (Werner, [55]).

Stokastik lineer programlama problemi, c_j , a_{ij} ve b_i parametreleri bilinen olasılık dağılımlarına sahip rassal değişkenler olmak üzere, x_j karar değişkenlerinin deterministik olduğu kabulü ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left. \begin{aligned} \max(\min) \quad & \mathbf{C}^T \mathbf{X} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Burada en çok kullanılan yöntem:

$$\begin{aligned} \max(\min) \ E[\mathbf{C}^T \mathbf{x}] &= \sum_{j=1}^n E[c_j] x_j \\ \sum_{j=1}^n E[a_{ij}] x_j &\leq E[b_i] \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

olarak, amaç fonksiyonunun beklenen değerini maksimize (minimize) etmek ve kısıtlarda da parametrelerin yerine beklenen değerlerini almaktır. Bu problem, beklenen değer problemi veya ortalama değer problemi adını alır.

Başka bir yaklaşım ise olası tüm senaryoları düşünerek, rassal a_{ij} parametresinin mümkün en büyük değeri $\max(a_{ij})$ ve rassal b_i parametresinin mümkün en küçük değeri $\min(b_i)$ olmak üzere, (2.1) probleminin esas kısıtları yerine onun en kısıtlayıcı hali olan

$$\sum_{j=1}^n \max(a_{ij}) x_j \leq \min(b_i)$$

kısıtlarını yazmaktır. Bu yeni kısıt, rassal parametrelerin tüm mümkün kombinasyonları için esas kısıtların sağlanmasını garantilemektedir. Ancak, bu yaklaşım uygun çözümler bölgesini gerektiğinden fazla kısıtlamaya neden olabilir (Hillier ve Lieberman [56]). Bu tür yaklaşımların kimi zaman optimale yakın veya tamamen geçersiz olup olmadığı soruları doğal olarak akla gelebilir (Birge ve Louveaux [57], Sayfa 137).

Rassal parametrelerin tüm mümkün kombinasyonları için orijinal kısıtların belirli bir derecede sağlanması yeterli ise (2.1) problemi için alternatif bir yaklaşım Şans Kısıtlı Programlamadır (Chance-Constrained Programming). Bu yaklaşım bir sonraki bölümde açıklanmıştır.

2.1 Şans Kısıtlı (Olasılıksal) Lineer Programlama

c_j , a_{ij} ve b_i parametreleri bilinen ortalama ve standart sapmalara sahip, normal dağılım gösteren rassal değişkenler olmak üzere, şans kısıtlı lineer programlama problemi:

$$\left. \begin{array}{l} \min \mathbf{C}^T \mathbf{X} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ P \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \right\} \geq p_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. Burada, i . kısıt en az $0 \leq p_i \leq 1$ olasılıkla sağlanmış olmalıdır. Başka bir deyişle, Kısıtın ihlal edilme olasılığı ya da kabul edilen risk en çok $(1 - p_i)$ kadardır. Ek A'daki Teorem A-2.1'den c_j parametreleri normal dağılımlı olduğundan

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

de normal dağılım gösterir. Fonksiyonun beklenen değeri Sonuç A-2.1'den:

$$E\left[\sum_{j=1}^n c_j x_j\right] = \sum_{j=1}^n E[c_j] x_j$$

ve varyansı Tanım A-2.5 ile verilen 6. kovaryans özelliğinden:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n c_j x_j\right) &= \sum_{j=1}^n \text{Var}(c_j x_j) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \text{Cov}(c_j x_j, c_i x_i) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j^2 \text{Var}(c_j) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} x_i x_j \text{Cov}(c_j, c_i) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu eşitlik,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \text{Var}(c_1) & \text{Cov}(c_1, c_2) & \dots & \text{Cov}(c_1, c_n) \\ \text{Cov}(c_2, c_1) & \text{Var}(c_2) & \dots & \text{Cov}(c_2, c_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(c_n, c_1) & \text{Cov}(c_n, c_2) & \dots & \text{Var}(c_n) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\text{Var}(\mathbf{C}^T \mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{V} \mathbf{X}$$

olarak da yazılabilir. Tanım A-2.5 ile verilen 2. kovaryans özelliğinden simetrik olduğu görülebilen $\mathbf{V}$ matrisine c_j 'lerin kovaryans matrisi denir.

Eğer c_j 'ler bağımsız ise (A.5)'den $Cov(c_i, c_j) = 0$ olacağından

$$Var(\mathbf{C}^T \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n x_j^2 Var(c_j)$$

olur.

(2.2) probleminin deterministik eşdeğer amaç fonksiyonu:

$$k_1 \sum_{j=1}^n E[c_j] x_j + k_2 \sqrt{Var(\mathbf{C}^T \mathbf{X})} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanmak istensin. Burada k_1 ve k_2 , sırasıyla beklenen değer ve standart sapma için negatif olmayan göreceli önem ağırlıklarıdır. Örneğin, $k_2 = 0$ alınması amaç fonksiyonunun standart sapmasının yani değişkenliğinin önemsenmediği sadece beklenen değerinin minimize edildiği anlamına gelir. Tersine $k_1 = 0$ alınırsa amaç fonksiyonunun değişkenliği minimize edilir, beklenen değeri ile ilgilenilmez. $k_1 = k_2 = 1$ alınırsa amaç fonksiyonunun standart sapmasının olduğu kadar beklenen değerinin de minimize edilmek istendiği söylenebilir (eşit önem).

Karar teorisine göre, karar verici karakteri üç türdür: riskten kaçınan (risk averse), risk üstlenen (risk pro, risk seeker, risk lover) ve riske nötr (risk neutral). Riskten kaçınan karar verici kötümserdir, yani bir belirsizlikle karşı karşıya kaldığında belirsizliğin en kötü şekilde sonuçlanacağını varsayar ve buna göre planlama yapar. Kötümser bakış açısına örnek olarak; ekim, büyüme ve hasat sezonunda havalar çok soğuk geçecek, talep çok az olur vb. verilebilir. Tersine, risk üstlenen (iyimser) karar verici ise belirsizliğin en iyi şekilde sonuçlanacağını varsayar. (2.3)'teki önem ağırlıkları karar vericinin karar davranışını ortaya koyar. O halde, rassal olayın nasıl sonuçlanacağını önceden bilinmesi karar vericinin optimal kararı alabilmesi açısından önemlidir. Karar vericinin rassal olayın nasıl sonuçlanacağı ile ilgili bilgi karşılığında ödemeye hazır olduğu en büyük miktara tam bilginin beklenen değeri (the expected value of perfect

information) adı verilir. Tam bilginin beklenen değeri büyük olduğunda rassallık faktörü problemde önemli bir rol oynamaktadır denilebilir (Birge ve Louveaux [57]).

Şans kısıtlı lineer stokastik programlama probleminin deterministik eşdeğerinin amaç fonksiyonunda $Var(\mathbf{C}^T \mathbf{X})$ ifadesi karekök içinde olduğundan amaç fonksiyonu nonlinear yapıdadır. Probleminin kısıtları ise

$$h_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \quad (2.4)$$

dönüşümleriyle $P\{h_i \leq 0\} \geq p_i$ şekline dönüşür. a_{ij} ve b_i parametreleri normal dağılımlı olduğundan Teorem A-2.1'den bunların lineer kombinasyonları olan h_i 'ler de normal dağılım gösterir. Sonuç A-2.1'den h_i 'lerin beklenen değerleri:

$$E[h_i] = \sum_{j=1}^n E[a_{ij}] x_j - E[b_i]$$

olur.

$j=1, \dots, n$ için $a_{ij} = q_{ij}$, $x_j = y_j$ ve $b_i = q_{i(n+1)}$ dönüşümleri yapılırsa ve $y_{n+1} = -1$ alınırsa

$$h_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = \sum_{j=1}^{n+1} q_{ij} y_j$$

olarak yeni rassal değişkenler q_{ij} 'lerdir. Buradan,

$$\mathbf{Y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_{n+1}]$$

ve

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} Var(q_{i1}) & Cov(q_{i1}, q_{i2}) & \dots & Cov(q_{i1}, q_{i(n+1)}) \\ Cov(q_{i2}, q_{i1}) & Var(q_{i2}) & \dots & Cov(q_{i2}, q_{i(n+1)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(q_{i(n+1)}, q_{i1}) & Cov(q_{i(n+1)}, q_{i2}) & \dots & Var(q_{i(n+1)}) \end{bmatrix}$$

olmak üzere, h_i 'lerin varyansları da

$$Var(h_i) = \mathbf{Y}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Y}$$

şeklinde hesaplanır.

$$P\{h_i \leq 0\} \geq p_i \text{ kısıtları}$$

$$P\left\{\frac{h_i - E[h_i]}{\sqrt{Var(h_i)}} \leq \frac{-E[h_i]}{\sqrt{Var(h_i)}}\right\} \geq p_i \quad (2.5)$$

şeklinde yazılarak, Sonuç A-1.2'den beklenen değeri 0, varyansı 1 olan

$$\frac{h_i - E[h_i]}{\sqrt{Var(h_i)}}$$

standart normal değişkeni oluşturularak (2.5) kısıtları

$$F\left(\frac{-E[h_i]}{\sqrt{Var(h_i)}}\right) \geq p_i$$

şeklinde dağılım fonksiyonu kullanılarak yazılabilir. $F(s_i) = p_i$ olacak şekilde s_i değeri standart normal dağılım tablosundan okunarak,

$$F\left(\frac{-E[h_i]}{\sqrt{Var(h_i)}}\right) \geq F(s_i)$$

elde edilir.

Dağılım fonksiyonu F , azalmayan bir fonksiyon olduğundan, bu eşitsizlik ancak ve ancak

$$\frac{-E[h_i]}{\sqrt{Var(h_i)}} \geq s_i$$

olmasıyla sağlanır. Böylece, kısıtlar

$$E[h_i] + s_i \sqrt{Var(h_i)} \leq 0 \quad (2.6)$$

şekline dönüşür.

Özetle, (2.3), (2.4) ve (2.6)'dan şans kısıtlı programlama probleminin deterministik eşdeğeri:

$$\begin{aligned} \min \quad & k_1 \sum_{j=1}^n E[c_j]x_j + k_2 \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}} \quad (k_1, k_2 \geq 0) \\ & h_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & E[h_i] + s_i \sqrt{\text{Var}(h_i)} \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

olur.

Burada özel olarak, tüm a_{ij} parametrelerinin sabit, c_j ve b_i bilinen ortalama ve standart sapmalara sahip, normal dağılım gösteren rassal değişkenler olduğu kabul edilirse, Z standart normal rassal değişken ve K_{p_i} , $P\{Z \geq K_{p_i}\} = p_i$ olacak şekilde bir sabit sayı olmak üzere, (2.2) probleminin kısıtları:

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right\} = P\left\{\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - E[b_i]}{\sqrt{\text{Var}(b_i)}} \leq \frac{b_i - E[b_i]}{\sqrt{\text{Var}(b_i)}}\right\} \geq p_i$$

olur ve buradan

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - E[b_i]}{\sqrt{\text{Var}(b_i)}} \leq K_{p_i}$$

elde edilir ve bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq K_{p_i} \sqrt{\text{Var}(b_i)} + E[b_i] \quad (2.7)$$

olur (Rao [58]).

Örnek 2.1 Şans Kısıtlı Stokastik Taşıma Problemi

$i=1,\dots,m$ olmak üzere, i . tedarikçinin elinde (kaynakta) tek tip bir maldan b_i kadar bulunur. Ayrıca $j=1,\dots,n$ olmak üzere, j . müşteri (varış yeri) d_j kadar talep etmektedir. Bir birim malı i . kaynaktan j . varış yerine gönderme maliyeti c_{ij} 'dir. Problem, kaynak kapasiteleri aşılmadan müşteri gereksinimlerini karşılayan, toplam taşıma maliyetini minimize edecek şekilde dağıtım planını bulma problemidir. x_{ij} , i . kaynaktan j . varış yerine gönderilen mal miktarı olmak üzere, problemin matematiksel modeli:

$$\left. \begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq b_i \quad \forall i=1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq d_j \quad \forall j=1,\dots,n \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \forall i \text{ ve } j \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

şeklindedir.

Şans-kısıtlı stokastik taşıma problemi, klasik taşıma probleminin şans kısıtlı versiyonu olarak düşünülebilir. Basitlik açısından, b_i , d_j ve c_{ij} parametrelerinin normal dağılımlı, bağımsız rassal değişkenler olduğu kabul edilirse, $p_i \in (0,1)$ ve $q_j \in (0,1)$ olmak üzere, (2.8) probleminin şans kısıtları sırasıyla;

$$P\left\{\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i\right\} \geq p_i \quad \forall i=1,\dots,m \quad (2.9)$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j\right\} \geq q_j \quad \forall j=1,\dots,n \quad (2.10)$$

şeklindedir. (2.7) ve (2.6)'dan (2.9) ve (2.10) kısıtları sırasıyla;

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq K_{p_i} \sqrt{\text{Var}(b_i)} + E[b_i]$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq s_j \sqrt{\text{Var}(d_j)} + E[d_j]$$

şekline dönüşür. Burada, K_{p_i} ve s_j değerleri, $P\{Z \geq K_{p_i}\} = p_i$ ve $F(s_j) = q_j$ olacak şekilde standart normal dağılım tablosundan okunur. Problemin amaç fonksiyonu ise (2.3)'den,

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (E[c_{ij}] + \sqrt{\text{Var}(c_{ij})}) x_{ij}$$

şeklindedir. Böylece, parametreleri bağımsız rassal değişkenler olan şans kısıtlı stokastik taşıma probleminin deterministik eşdeğeri:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (E[c_{ij}] + \sqrt{\text{Var}(c_{ij})}) x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq K_{p_i} \sqrt{\text{Var}(b_i)} + E[b_i], \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq s_j \sqrt{\text{Var}(d_j)} + E[d_j], \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

olarak ifade edilir (Kataoka [59]).

2.2 İki Aşamalı Stokastik Programlama

İki aşamalı stokastik programlamanın temelinde yatan fikir, telafi etme (recourse) kavramıdır. Belirli kararlar iki aşamalı olabilir; bazen ilk aşamada kararlar alınır, ancak elde edilecek ek bilgiler ile gelecekteki belirsizliğin ortadan kalkmasıyla alınan bu kararların sonraki aşamada düzeltilmesi gerekebilir. Rassal bir olay gerçekleşmeden önce alınan kararların sonraki aşamada dengelenmesine düzeltme faaliyetleri denir.

İki aşamalı problem olarak adlandırılan bu problemde, önce başlangıç tahsisleri yapılır, sonrasında stokastik olaylar gözlemlenir ve ardından ilk tahsislerin ya da stokastik olayın şart koştuğu kısıtlar çerçevesinde kalan kaynaklar yeniden tahsis edilir. Görüldüğü gibi burada, bazı kararlar stokastik olay gerçekleşmeden alınır, bazı kararlar ise ilk aşamada alınan kararlara ve stokastik olaylara bağlı olarak ikinci aşamada alınır.

Örnek 2.2’de bir matematik programlama probleminin iki aşamalı olması fikri basit bir tarımsal planlama örneği üzerinde açıklanmıştır.

Örnek 2.2 Tarımsal Planlama (Birge ve Louveaux [57], Sayfa 4)

500 dönüm arazisinde buğday, mısır ve şeker pancarı yetiştirmekte uzmanlaşmış bir çiftçiye göz önüne alalım. Bu çiftçi, gelecek kış sezonu için her bir ürüne arazisinden ne kadar ayıracağına karar vermek istemektedir.

Çiftçi büyükbaş hayvanların beslenmesi için en az 200 ton buğday ve 240 ton mısır ihtiyacı duyacağını bilmektedir. Bu tahıllar arazide yetiştirilebilir veya arazide yetiştirilenler eksik kalırsa toptancıdan alınabilir. Hayvanların besini için gerekli miktarlar ayrıldıktan sonra artan tahıllar, çiftçi tarafından piyasada satılabilir. Ton başına buğday ve mısırın piyasa satış fiyatı sırasıyla, 170 ve 150 para birimdir. Toptancının kârı ve taşıma masraflarından dolayı çiftçinin toptancıdan alış fiyatları ise %40 daha fazla olup sırasıyla 238 ve 210 para birimdir.

Şeker pancarı ise ton başına 36 para birimine satılmakta olan kârlı bir üründür. Ancak hükümet şeker pancarı üretimine kota getirmiştir. Kotanın üzerinde üretilen her bir ton şeker pancarı, ancak 10 para birimine satılabilmektedir. Çiftçinin gelecek yıl için üretim kotası 6000 tondur.

Çiftçi geçmiş tecrübelerinden buğday, mısır ve şeker pancarına ayrılan dönüm başına sırasıyla, 2.5 ton, 3 ton ve 20 ton ürün elde edildiğini bilmektedir. Ürünlerin ekim maliyetleri dönüm başına sırasıyla, 150, 230 ve 260 para birimdir. Çiftçinin karar vermesine yardımcı olmak için kurulan modelde karar değişkenleri:

x_1 = buğdaya ayrılan arazi (dönüm)

x_2 = mısıra ayrılan arazi (dönüm)

x_3 = şeker pancarına ayrılan arazi (dönüm)

ω_1 = buğday fazlalığı (piyasaya satılan buğday) (ton)

y_1 = buğday eksikliği (toptancıdan alınan buğday) (ton)

ω_2 = mısır fazlalığı (piyasaya satılan mısır) (ton)

y_2 = mısır eksikliği (toptancıdan alınan mısır) (ton)

ω_3 = yüksek fiyattan satılan şeker pancarı (ton)

ω_4 = düşük fiyattan satılan şeker pancarı (ton)

olmak üzere, problemin lineer programlama modeli:

$$\begin{aligned} \min \{ & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170\omega_1 + 210y_2 - 150\omega_2 - 36\omega_3 - 10\omega_4 \} \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \\ & 2.5x_1 + y_1 - \omega_1 \geq 200, \quad 3x_2 + y_2 - \omega_2 \geq 240, \\ & \omega_3 + \omega_4 \leq 20x_3, \quad \omega_3 \leq 6000, \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \geq 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Problem bir paket programla çözüldüğünde elde edilen optimal çözümler özetlenirse: çiftçi arazisini ürünlere sırasıyla,

$$x_1^* = 120, x_2^* = 80, x_3^* = 300$$

dönüm olarak paylaştırmalıdır. Bu şekilde paylaştırdığında elde edeceği ürün miktarları sırasıyla, 300, 240 ve 6000 ton olacaktır. Geçmiş tecrübelerine dayanarak, çiftçi 200 ton buğdayı hayvanları için ayırırsa geriye kalan

$$\omega_1^* = 100$$

ton buğdayı satmalıdır. Benzer şekilde, yine geçmiş tecrübelerinden 240 ton mısırı hayvanlarına ayıracağından, piyasaya satması gereken mısır miktarı:

$$\omega_2^* = 0$$

olmalıdır. Elde ettiği buğday ve mısır miktarları hayvanlarına yeteceğinden,

$$y_1^* = 0, y_2^* = 0$$

olmalıdır ve çiftçinin toptancıdan buğday ve mısır almasına gerek yoktur.

$\omega_3^* = 6000$ olarak elde ettiği şeker pancarının tamamını yüksek fiyattan satmalıdır ve şeker pancarı için kota değeri aşılmamıştır. $\omega_4^* = 0$ değeriyle de çiftçi düşük fiyattan şeker pancarı satmamalıdır.

Maliyet minimizasyonu problemi çözümü ile optimal maliyet -118600 para birimi, dolayısıyla optimal kâr 118600 para birimi olarak bulunmuştur. Optimal çözümün neden bu şekilde elde edildiğini anlamak oldukça kolaydır. Çiftçi, ekimi en kârlı ürün olan şeker pancarı kotasına ulaşabilecek kadar arazi miktarını şeker pancarına ayırır. Daha sonra, hayvanlarının beslenmesine yetecek tahılı elde edebilecek şekilde buğday ve mısır eker. Sonrasında kalan araziye, piyasaya satıldığında daha çok gelir sağlayacak buğdayın ekimine ayırır. Burada, “Dönüm başına kârın gittikçe azaldığı bir sıralamayla araziye ürünlere tahsis et.” şeklinde basit bir sezgisel kural geliştirilebilir.

Ancak, çiftçinin geçmiş tecrübelerine göre, aynı ürün için farklı yıllarda, farklı hava koşullarında farklı miktarlar elde edildiğinden çiftçi bu karardan endişe duymaya başlayacaktır. Ekim ya da dikim aşamasında yağmura, büyüme ve hasat zamanında ise güneşe gereksinim duyulmaktadır. Fazla yağmur tohumların çürümmesine, fazla güneş de kuraklığa neden olabilir. Hava şartlarındaki yağmur ya da güneşe bağlı tüm bu değişiklikler, ortalamanın %20’si ile %25’i arasında değişen bir değer ile ortalamanın altında veya üzerinde bir aralıkta değer alan ürünlerin elde edilmesine yol açacaktır.

Farklı ürünler de olsalar hava şartlarına bağlı olarak elde edilecek ürün miktarları arasında bir korelasyon olduğu kabul edilsin. Bu korelasyon basitçe, tüm ürünler için hava şartlarının *kötü*, *ortalama* veya *iyi* olması durumlarında elde edilecek ürün miktarları sırasıyla, *ortalamanın altında*, *ortalama* veya *ortalamanın üzerinde* olarak ifade edilebilir. Yukarıdaki *ortalamanın altında* ve *ortalamanın üzerinde* dilsel ifadelerinin sabitlenmesi için ortalamanın sırasıyla, %20 altında ve %20 üzerinde olduğu düşünölsün. Hava şartlarına göre, *ortalamanın altında*, *ortalama* ve *ortalamanın üzerinde* elde edilecek ürün miktarları dönüm başına sırasıyla, buğday için $(2.5 \pm \%20)$ 2, 2.5 ya da 3 ton; mısır için $(3 \pm \%20)$ 2.4, 3 ya da 3.6 ton; şeker pancarı için $(20 \pm \%20)$ 16, 20 ya da 24 ton olarak gerçekleşecektir. Basitlik açısından, hava şartlarının fiyatlar üzerinde etkisi olmadığı farz edilsin.

Hava şartlarının *ortalama* gitmesi senaryosuna karşılık gelen durum için oluşturulan modelin sonuçları zaten elde edilmişti. Şimdi, hava şartlarının *kötü* ve *iyi* gitmesi senaryolarına karşılık gelen modelleri ve sonuçlarını elde edelim:

- Hava şartlarının *kötü* gitmesi senaryosuna karşılık *ortalamanın altında* ürünler elde edilmesi durumu için oluşturulacak model:

$$\begin{aligned} \min \{ & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170\omega_1 + 210y_2 - 150\omega_2 - 36\omega_3 - 10\omega_4 \} \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \\ & 2x_1 + y_1 - \omega_1 \geq 200, \quad 2.4x_2 + y_2 - \omega_2 \geq 240, \\ & \omega_3 + \omega_4 \leq 16x_3, \quad \omega_3 \leq 6000, \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- Hava şartlarının *iyi* gitmesi senaryosuna karşılık *ortalamanın üzerinde* ürünler elde edilmesi durumu için oluşturulacak model:

$$\begin{aligned} \min \{ & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170\omega_1 + 210y_2 - 150\omega_2 - 36\omega_3 - 10\omega_4 \} \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \\ & 3x_1 + y_1 - \omega_1 \geq 200, \quad 3.6x_2 + y_2 - \omega_2 \geq 240, \\ & \omega_3 + \omega_4 \leq 24x_3, \quad \omega_3 \leq 6000, \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \geq 0 \end{aligned}$$

olur.

Havaların *kötü* gitmesi senaryosuna karşılık, çiftçi arazisini ürünlere sırasıyla,

$$x_1^* = 100, x_2^* = 25, x_3^* = 375$$

dönüm olarak paylaşmalıdır. Bu durumda elde edeceği ürün miktarları buğday, mısır ve şeker pancarı için sırasıyla, 200, 60 ve 6000 tondur.

$$\omega_1^* = \omega_2^* = 0$$

olduğundan piyasaya buğday ve mısır satmamalıdır.

Elde ettiği buğday hayvanlarına yetecektir, ancak mısırın yetmediği görülür. Toptancıdan alacağı buğday ve mısır miktarları, sırasıyla:

$$y_1^* = 0, y_2^* = 180$$

olmalıdır.

$\omega_3^* = 6000$ olduğundan çiftçi elde ettiği 6000 ton şeker pancarının tamamını yüksek fiyattan satabilir, kota aşılmadığı için düşük fiyattan şeker pancarı satmayacaktır ve

$$\omega_4^* = 0$$

dir. Bu senaryoya göre, optimal kâr 59950 para birimi olarak bulunmuştur.

Havaların *iyi* gitmesi senaryosuna karşılık, çiftçi arazisini ürünlere sırasıyla,

$$x_1^* = 183.33, x_2^* = 66.67, x_3^* = 250$$

dönüm olarak paylaştırmalıdır. Bu durumda elde edeceği ürün miktarları buğday, mısır ve şeker pancarı için sırasıyla, 550, 240 ve 6000 tondur. Hayvanlardan artan buğday piyasaya satılır ve elde edilen mısır ancak hayvanlara yeter:

$$\omega_1^* = 350, \omega_2^* = 0.$$

Çiftçinin toptancıdan buğday ve mısır almasına gerek yoktur:

$$y_1^* = y_2^* = 0.$$

Elde ettiği 6000 ton şeker pancarının tamamını yüksek fiyattan satar, kota aşılmadığı için düşük fiyattan şeker pancarı satmaz:

$$\omega_3^* = 6000, \omega_4^* = 0.$$

Bu senaryoya göre, optimal kâr 167667 para birimi olarak elde edilmiştir.

Optimal çözümler, hava şartlarına oldukça duyarlıdır. Ürünlere ayrılacak araziler buğday, mısır ve şeker pancarı için sırasıyla, 100 ile 183.33, 25 ile 80 ve 250 ile 375 arasında değişmektedir.

Uzun dönem için yapılan hava tahminleri çiftçi için önemlidir. Ancak, meteorologlar altı ay öncesinden havanın doğru tahmin edilemeyeceği konusunda hemfikirdir. Çiftçi hava şartlarının nasıl olacağı konusunda tam bir bilgiye sahip olmadan kararını vermelidir.

Bu problemde en önemli mesele, şeker pancarına ne kadar arazi ayrılması gerektiğidir. Gereğinden fazla arazi ayrılırsa, kotanın üzerinde elde edilen şeker pancarının tercih edilmeyen, düşük bir fiyattan satılması olasılığı vardır. Olması gerekenden daha az arazi ayrılması durumunda ise, kotanın altında kalınması ve kotanın altında kalan miktarın yüksek fiyattan satılması fırsatının kaçırılması söz konusudur.

Burada, hava koşulları hakkında tam bir bilgiye sahip olunmadan hemen alınması gereken kararlar, yani ilk aşama kararları her bir ürüne ayrılacak dönüm cinsinden arazi miktarlarıdır. İkinci aşama kararları ise piyasaya satılacak ve toptancıdan alınacak tahıl miktarlarıdır ve bu miktarlara hava şartlarına bağlı olarak sonradan karar verilebilir. Ürün miktarları hava şartlarına bağlı olarak üç senaryo —Senaryo 1: *ortalamanın altında miktar* (kötü hava şartları), Senaryo 2: *ortalama miktar* (ortalama hava şartları), ve Senaryo 3: *ortalamanın üzerinde miktar* (iyi hava şartları)— ile temsil edilebilir. Senaryo indisi, sırasıyla:

$$s = 1, 2, 3$$

olarak alınırsa, karar değişkenleri:

$$x_1 = \text{buğdaya ayrılan arazi (dönüm)}$$

$$x_2 = \text{mısıra ayrılan arazi (dönüm)}$$

$$x_3 = \text{şeker pancarına ayrılan arazi (dönüm)}$$

$$\omega_{1s} = s \text{ senaryosu gerçekleşirse piyasaya satılan buğday (ton)}$$

$$y_{1s} = s \text{ senaryosu gerçekleşirse toptancıdan alınan buğday (ton)}$$

$$\omega_{2s} = s \text{ senaryosu gerçekleşirse piyasaya satılan mısır (ton)}$$

$$y_{2s} = s \text{ senaryosu gerçekleşirse toptancıdan alınan mısır (ton)}$$

$$\omega_{3s} = s \text{ senaryosu gerçekleşirse yüksek fiyattan satılan şeker pancarı (ton)}$$

$$\omega_{4s} = s \text{ senaryosu gerçekleşirse düşük fiyattan satılan şeker pancarı (ton)}$$

olacaktır.

Her bir senaryonun eşit olasılıkla gerçekleşebileceği, çiftçinin riske karşı nötr olduğu ve beklenen kârını maksimize etmek istediği farz edilirse problem:

$$\min \left\{ \begin{array}{l} 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 \\ + \frac{1}{3}(238y_{11} - 170\omega_{11} + 210y_{21} - 150\omega_{21} - 36\omega_{31} - 10\omega_{41}) \\ + \frac{1}{3}(238y_{12} - 170\omega_{12} + 210y_{22} - 150\omega_{22} - 36\omega_{32} - 10\omega_{42}) \\ + \frac{1}{3}(238y_{13} - 170\omega_{13} + 210y_{23} - 150\omega_{23} - 36\omega_{33} - 10\omega_{43}) \end{array} \right\}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$

$$2x_1 + y_{11} - \omega_{11} \geq 200, 2.5x_1 + y_{12} - \omega_{12} \geq 200, 3x_1 + y_{13} - \omega_{13} \geq 200,$$

$$2.4x_2 + y_{21} - \omega_{21} \geq 240, 3x_2 + y_{22} - \omega_{22} \geq 240, 3.6x_2 + y_{23} - \omega_{23} \geq 240,$$

$$\omega_{31} + \omega_{41} \leq 16x_3, \omega_{32} + \omega_{42} \leq 20x_3, \omega_{33} + \omega_{43} \leq 24x_3,$$

$$\omega_{31} \leq 6000, \omega_{32} \leq 6000, \omega_{33} \leq 6000,$$

$$x_1, x_2, x_3, y_{1s}, y_{2s}, \omega_{1s}, \omega_{2s}, \omega_{3s}, \omega_{4s} \geq 0 \quad s = 1, 2, 3$$

şeklini alır.

Tüm senaryolar için ideal olan optimal çözüm:

Birinci aşama kararları, çiftçi arazisini buğday, mısır ve şeker pancarına sırasıyla,

$$x_1^* = 170, x_2^* = 80, x_3^* = 250$$

dönüm olarak paylaştırmalıdır. Senaryo 1'e göre, çiftçinin elde ettiği tahıl miktarları sırasıyla, 340, 192 ve 4000 tondur. Senaryo 2'ye ve Senaryo 3'e göre, bu miktarlar sırasıyla, 425, 240 ve 5000 ton; 510, 288 ve 6000 ton olarak bulunur. Buradan, ikinci aşama kararları:

$$\text{Piyasaya satılan miktarlar: } (\omega_{1s}^*) = (140 \quad 225 \quad 310) \text{ (buğday),}$$

$$(\omega_{2s}^*) = (0 \quad 0 \quad 48) \text{ (mısır),}$$

$$\text{Toptancıdan alınan miktarlar: } (y_{1s}^*) = (0 \quad 0 \quad 0) \text{ (buğday),}$$

$$(y_{2s}^*) = (48 \quad 0 \quad 0) \text{ (mısır),}$$

$$\text{Şeker pancarı satış miktarları: } (\omega_{3s}^*) = (4000 \quad 5000 \quad 6000) \text{ (yüksek fiyattan satılacak}$$

$$\text{miktarlar), } (\omega_{4s}^*) = (0 \quad 0 \quad 0) \text{ (düşük fiyattan satılacak}$$

$$\text{miktarlar)}$$

olarak hesaplanır. Beklenen kâr ise 108390 para birimidir.

Şimdi, çiftçinin gelecek üç yıl için hava tahminlerini doğru olarak kestirebilecek yeni bir meteoroloji teknolojisine yatırım yapmak istediği düşünölsün. Bu yatırım sonucunda çiftçi, gelecek üç yıl için tam bilgiye sahip olacaktır. Bu tam bilginin sırasıyla, *iyi*, *ortalama* ve *kötü* şeklinde olacağı kabul edilsin. Bu durumda, ilgili modeller için senaryolardaki optimal çözümler kullanılarak, optimal kârlar gelecek üç yıl için sırasıyla, 167667, 118600 ve 59950 para birimi olarak gerçekleşir. Ortalama kâr ise 115406 şeklinde hesaplanır. Teknoloji yatırımı yapılmazsa, üç yıl için de iki aşamalı modelden elde edilen sonuçlar kullanılır ve bu durumda ortalama kâr 108390 para birimi olarak bulunur. O halde, tam bilginin beklenen değeri, yani ortalama kârlar arasındaki fark olan 7016 para birimi, bu teknolojiye yapılabilecek yatırımın üst sınırıdır.

2.2.1 Kararlar ve Aşamalar

Rassal olayın nasıl sonuçlandığı ile ilgili tam bir bilgiye sahip olunmadan alınan kararlara 1. aşama kararları denir ve genellikle $\mathbf{x}$ vektörü ile gösterilir. Daha sonra rassal olayın gerçekleşmesiyle tam bilgiye sahip olunur ve 2. aşama kararları ya da düzeltici kararlar alınır. Bu kararlar ise $\mathbf{y}$ vektörü ile gösterilir. Ω olasılık uzayı, $\omega \in \Omega$ rassal olayının mümkün sonuçlarının kümesi ve ω rassal olayına bağlı olarak ortaya çıkan $\xi(\omega)$ rassal vektörü olmak üzere, olaylar ve kararların dizilişi:

$$\mathbf{x} \rightarrow \xi(\omega) \rightarrow \mathbf{y}(\omega, \mathbf{x})$$

olarak özetlenebilir (Birge ve Louveaux [57], Sayfa 52). $E_{\xi}[\cdot]$, ξ vektörüne göre beklenen değer olmak üzere, iki aşamalı düzelticili stokastik programlama modeli:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + E_{\xi}[Q(\mathbf{x}, \xi(\omega))]$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\omega \in \Omega$$

şeklindedir. Burada,

$$Q(\mathbf{x}, \xi(\omega)) = \min\{\mathbf{q}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{Tx} + \mathbf{Wy} = \mathbf{h}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

fonksiyonu ikinci aşamanın optimal değerini verir. $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ vektörü, $\mathbf{q}^T$, $\mathbf{h}^T$ ve $\mathbf{T}$ bileşenlerinden oluşmuştur.

Örnek 2.2'ye dönülürse, $t_i(s)$, $s=1,2,3$ ve $i=1,2,3$ için, s senaryosu gerçekleştiğinde i . üründen elde edilecek miktarı göstermek üzere, ikinci aşama problemi:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}, s) = \min \{ & 238y_1 - 170\omega_1 + 210y_2 - 150\omega_2 - 36\omega_3 - 10\omega_4 \} \\ & t_1(s)x_1 + y_1 - \omega_1 \geq 200, \\ & t_2(s)x_2 + y_2 - \omega_2 \geq 240, \\ & \omega_3 + \omega_4 \leq t_3(s)x_3, \\ & \omega_3 \leq 6000, \\ & y_1, y_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \geq 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\xi_s = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$ olmak üzere,

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

rassal vektörü sadece üç farklı değer alabilir.

2.2.2 Özel Haller: Sabit Düzelticili (Fixed Recourse), Göreceli Tam (Relatively Complete) Düzelticili, Tam Düzelticili ve Basit Düzelticili Stokastik Programlama

İki aşamalı stokastik programlama problemlerinde bazı özelliklerin varlığı hesaplamalarda kolaylık sağlamaktadır.

Sabit düzelticili adı verilen durumda, ikinci aşamaya ait $\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ kısıtlarında $\mathbf{T}$ matrisinin rassal bir matris, $\mathbf{W}$ düzeltici matrisinin ise bilinen sabit bir matris olduğu kabul edilir. Rassal olay ω gerçekleştikten sonra, artık düzeltici faaliyetlerin maliyetleri $\mathbf{q}$, sağ taraf sabitleri $\mathbf{h}$ ve katsayılar matrisi $\mathbf{T}$ deterministik hale gelir. Bundan sonra, düzeltici ikinci aşama kararları $\mathbf{y}$ alınır. Birinci ve ikinci aşama kararlarını aynı anda hesaplattıran iki aşamalı sabit düzelticili stokastik programlama probleminin deterministik eşdeğeri:

$$\left. \begin{array}{l} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + E_{\xi}[\min \mathbf{q}(\omega)^T \mathbf{y}(\omega)] \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x} + \mathbf{Wy}(\omega) = \mathbf{h}(\omega) \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(\omega) \geq \mathbf{0} \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

olur.

İlk aşamada karar alırken bu kararların gelecekteki etkileri göz önüne alınır. Bu etki, $\mathbf{x}$ kararını almanın beklenen değerini hesaplayan

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = E_{\xi}[Q(\mathbf{x}, \xi(\omega))]$$

düzeltilici fonksiyonu vasıtasıyla ölçülür. Stokastik programlamanın zor yanı, özellikle senaryo sayısı çok fazla olduğunda her bir $\mathbf{x}$ için düzeltilici fonksiyonun hesaplanmasındaki işlem yüküdür.

Özel olarak, rassal olayın sonlu sayıda sonuçlanabildiği durum göz önüne alınırsa, sırasıyla birinci ve ikinci aşama uygunluk kümeleri $K_1 = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ ve $K_2 = \{\mathbf{x} | \mathcal{Q}(\mathbf{x}) < \infty\}$ olmak üzere, $\mathbf{W}$ matrisi sabit ise her $\mathbf{x} \in K_1 \cap K_2$ için düzeltilici fonksiyon $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ parçalı lineer konveks fonksiyondur. Hem kesikli hem de sürekli rassal değişkenler için, $\mathbf{W}$ düzeltilici matrisinin sabit yerine rassal olduğu durumda uygunluk gibi bazı konularda zorluklarla karşılaşilmektedir (Birge ve Louveaux [57], Sayfa 85).

$\mathbf{x} \in K_1$ için, ξ_k senaryosu gerçekleştiğinde $\mathbf{T}_k \mathbf{x} + \mathbf{W}_k \mathbf{y} = \mathbf{h}_k$ ikinci aşama kısıtlarını sağlayan $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ bulunamıyorsa, yani ikinci aşama uygun çözümler bölgesi boş küme ise $Q(\mathbf{x}, \xi_k) = \infty$ alınarak bu durum modele yansıtılabilir. Bu durumda uygun olmayan ikinci aşama çözümleri üretecek $\mathbf{x}$ çözümü, sınırsız cezalandırılacak ve birinci aşama optimal çözümü olamayacaktır.

Hiçbir senaryoda böyle bir uygun olmama durumu gerçekleşmiyorsa, yani birinci aşama için uygun olan her bir çözüm, iki aşama için de uygunsa, başka bir deyişle, $K_1 \subset K_2$ ise bu özel duruma göreceli tam düzeltilicili stokastik programlama denir. İkinci aşamanın uygunluğu, sabit bir $\gamma > 0$ parametresi vasıtasıyla amaç ve kısıtlardaki

$$\min\{\mathbf{q}^T \mathbf{y} + \gamma \mathbf{t} \mid \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{W}\mathbf{y} - \mathbf{t}\mathbf{e} = \mathbf{h}, \mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T, \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

şeklindeki bir değişiklikle kontrol edilebilir. Göreceli tam düzelticili durumun özel bir hali olan bu duruma tam düzelticili adı verilir. Tam düzelticili durumda rassal olayın hiçbir olası sonucu uygun olmayan çözümler üretmez. Başka bir deyişle, her $\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}$ için $\mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}$ olacak şekilde en az bir $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ mevcuttur.

Tam düzelticili durumun özel bir hali ise basit düzticili durumudur. Basit düzelticili stokastik programlama probleminde, $\mathbf{q}^+ + \mathbf{q}^- \geq \mathbf{0}$ olmak üzere, $\mathbf{q}$ vektörü $\mathbf{q} = (\mathbf{q}^+, \mathbf{q}^-)$, $\mathbf{y}$ vektörü $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-)$ ve $\mathbf{W}$ matrisi $\mathbf{W} = (\mathbf{I}, -\mathbf{I})$ şeklinde bölünmüştür (Birge ve Louveaux [57]).

Örnek 2.3 Stokastik programlamanın en basit formlarından biri *gazete satıcısı* (news vendor veya newsboy) modelidir. Bu problemde, Bir gazete satıcısı günlük talep ξ 'nin F dağılımına ve f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir sürekli rassal değişken olduğunu gözlemler. Satıcı adet başına c alış, p satış fiyatından kârını maksimize edecek şekilde kaç adet gazete satın alması gerektiğini bulmalıdır. Satıcının elindeki gazete sayısı, talepten fazla olduğunda satılamayan fazla gazeteler iade edilemez. Günlük alınan gazete sayısı x 'in optimal değeri, satıcının beklenen kârının

$$\max_{x \geq 0} z(x) = -cx + \int_0^x ptf(t)dt + \int_x^\infty pxf(t)dt$$

şeklinde maksimize edilmesiyle bulunur. Amaç fonksiyonunda yapılan düzenlemelerle problem,

$$\max_{x \geq 0} z(x) = -cx + pE[\xi] + p \int_x^\infty (x-t)f(t)dt = -cx + pE[\xi] + p(x - E[\xi])^+$$

şekline dönüşür ve

$$\frac{dz}{dx} = -c + p(1 - F(x)) = 0$$

denkleminden çözümü

$$x^* = F^{-1}\left(\frac{p-c}{p}\right)$$

olarak bulunur (Birge [15]).

Örnek 2.4 (Dantzig, [60]) Belirsiz Talebi Karşılama Üzere bir Mağazaya Mal Taşıma

İki aşamalı basit düzelticili bir durumu ele alalım: Bir fabrikanın elinde belirli bir maldan 100 parça vardır. Bu mal, tanesi 1 para birimi maliyetle belirsiz d_2 talebini karşılamak üzere bir mağazaya yollanabilir. Eğer talep, tedarik miktarından fazla ise karşılanamayan talep bölgedeki piyasadan tanesi 2 para biriminden satın alınabilir. Bilinmeyen d_2 talebi 70 ile 80 arasında uniform dağılım göstermektedir.

Problemin iki aşamalı stokastik taşıma modelini kuralım ve aşamalarda verilecek kararları belirleyelim.

Karar değişkenleri:

Fabrikadan yollanan miktar: $x_{11} \geq 0$

Fabrikada depolanan miktar: $x_{12} \geq 0$

Piyasadan satın alınan miktar: $x_{21} \geq 0$

Talebin üstünde gerçekleşen arz fazlası: $x_{22} \geq 0$

Toplam maliyet: C

olmak üzere, sistemin sağlaması gereken denklemler;

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 100 \\ d_2 = x_{11} + x_{21} - x_{22} \\ C = x_{11} + 2x_{21} \end{cases}$$

şeklindedir.

d_2 talebi belirsiz olduğundan toplam maliyetin beklenen değerini bulalım. Bu değer minimum olması için, $x_{11} > d_2$ ise $x_{21} = 0$, $x_{11} \leq d_2$ ise $x_{21} = d_2 - x_{11}$ dir. Böylece, toplam maliyet fonksiyonu;

$$\min C = \begin{cases} x_{11}, & x_{11} > d_2 \\ x_{11} + 2(d_2 - x_{11}), & x_{11} \leq d_2 \end{cases} = \begin{cases} x_{11}, & x_{11} > d_2 \\ -x_{11} + 2d_2, & x_{11} \leq d_2 \end{cases}$$

olur. d_2 talebi 70 ile 80 arasında uniform dağılım gösterdiğinden; Örnek A-1.2'den

Eğer $x_{11} \leq 70$ ise

$$E[C] = \int_{-\infty}^{\infty} C f_{d_2}(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{70} C f_{d_2}(x) dx}_{=0} + \int_{70}^{80} C f_{d_2}(x) dx + \underbrace{\int_{80}^{\infty} C f_{d_2}(x) dx}_{=0} = \frac{1}{10} \int_{70}^{80} (x_{11} + 2(x - x_{11})) dx$$

$$= 150 - x_{11}$$

şeklinde hesaplanır.

Eğer $70 < x_{11} < 80$ ise

$$E[C] = \frac{1}{10} \int_{70}^{x_{11}} x_{11} dx + \frac{1}{10} \int_{x_{11}}^{80} (2x - x_{11}) dx = \frac{x_{11}^2}{10} - 15x_{11} + 640$$

ve eğer $x_{11} \geq 80$ ise, benzer şekilde

$$E[C] = \int_{70}^{80} C f_{d_2}(x) dx = \frac{1}{10} \int_{70}^{80} x_{11} dx = x_{11}$$

olur. Özetle,

$$E[C] = \begin{cases} 150 - x_{11}, & x_{11} \leq 70 \\ \frac{x_{11}^2}{10} - 15x_{11} + 640, & 70 < x_{11} < 80 \\ x_{11}, & 80 \leq x_{11} \end{cases}$$

yapısındadır. Beklenen değerin minimum olabilmesi için, $x_{11} \leq 70$ ise $x_{11} = 70$ ve

$x_{11} \geq 80$ ise $x_{11} = 80$ olmalıdır. Her iki durumda da beklenen değer 80 olarak bulunur.

Eğer $70 < x_{11} < 80$ ise beklenen değerin türevi 0 olmalıdır, yani

$$E[C]' = \left(\frac{x_{11}^2}{10} - 15x_{11} + 640 \right)' = \frac{x_{11}}{5} - 15 = 0$$

dan

$$x_{11} = 75$$

olarak bulunur. Bu durumda, beklenen değer 77.5 olur ve açıktır ki bu değer 80'den daha iyi olup minimumdur.

Sonucu yorumlarsak, birinci aşamaya ait karar değişkeni x_{11} , ikinci aşamaya ait karar değişkeni x_{21} ’dir. Müşteri talebi belirli olmadan mağazaya birinci aşamada $x_{11} = 75$ adet mal gönderilmelidir. Bu çözüm, rassal olay ya da müşteri talebinin her türlü durumunu karşılayacak şekilde en iyi çözümdür. Rassal olay gerçekleştikten sonra, yani müşteri talebinin belirli hale gelmesinden sonra, talep 75 birimin üstünde gerçekleşirse eksik miktar (tanımlanmış dağılıma göre en fazla 5 birim) piyasadan alınıp müşteriye gönderilerek eksiklik telafi edilir. Mağazaya mal gönderme maliyeti ile düzeltme (1 para birimi yerine 2 para birimi ödeme ile ceza) maliyetinin toplamının beklenen değeri 77.5 olarak gerçekleşir.

2.2.3 Benders Ayırışım (Dual Decomposition) Algoritması

İlk kez karma tamsayılı lineer programlama problemleri için önerilen ve iki aşamalı stokastik programlama problemlerine de uygulanabilen Benders ayırışım algoritması [61], Dantzig-Wolfe ayırışım algoritmasının [62] dual probleme uygulanmış halidir. Ayırışım algoritmaları temelde orijinal problemi küçük alt problemlere ayırarak bu problemleri ardarda veya paralel olarak çözerek orijinal problemi çözmeye dayalı bir yaklaşımdır. Ayrılabilir yapıda karar değişkenleri kümesine sahip olduğundan problemin modeline bakıldığında blok köşegen yapısı (hem $\mathbf{x}$ hem de $\mathbf{y}$ değişkenlerini içeren kısıtlar, sadece $\mathbf{x}$ değişkenlerini içeren kısıtlar ve sadece $\mathbf{y}$ değişkenlerini içeren kısıtlar) görülür. Bu yapıdan dolayı alt problemler birbirinden bağımsız olarak çözülebilir.

Dual ayırışım yönteminin temel fikrini anlatabilmek üzere, basitlik açısından stokastik olayın tek türlü sonuçlanabildiği varsayalım. İki aşamalı problemin deterministik eşdeğeri olan (2.11) problemi:

$$\left. \begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{q}^T \mathbf{y} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{Tx} + \mathbf{Wy} = \mathbf{h} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

problemine indirgensin. Burada ayrıca, $\{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ sınırlı bir küme olsun. $\mathbf{x}$ ’in bir an için bilindiği kabul edilirse düzeltici fonksiyon;

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \min \{ \mathbf{q}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}$$

şeklinde parçalı lineer olarak ifade edilebilir.

Bu durumda, (2.12) problemine eşdeğer ve ana problem olarak adlandırılacak problem;

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathcal{G}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Ax} = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq & \mathbf{0} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \theta \\ \mathbf{Ax} = & \mathbf{b} \\ \theta - \mathcal{G}(\mathbf{x}) \geq & \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geq & \mathbf{0} \end{aligned}$$

şeklindedir. Benders ayrışım algoritması şöyle özetlenebilir:

Adım 1. θ_0 , $\min \{ \mathbf{q}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}$ probleminin bir alt sınırı olmak üzere, $\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \theta \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \theta \geq \theta_0, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ ana problemi çözülür. Problemin çözümü $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta})$ olsun.

Adım 2. $\mathcal{G}(\hat{\mathbf{x}}) = \min \{ \mathbf{q}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}$ probleminin duali alınır, dual problem;

$$\max \{ (\mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{u} \mid \mathbf{W}^T \mathbf{u} \leq \mathbf{q} \}$$

şeklindedir. Burada iki tür durumla karşılaşılabilir;

Durum 1. Dual problem sınırsız ise primal problemin çözümü uygun değildir. O halde, ana probleme uygunluk keseni eklenir. Dualite teoreminden;

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{u}} & \leq \mathbf{0} \\ (\mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}})^T \tilde{\mathbf{u}} & > \mathbf{0} \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayacak $\tilde{\mathbf{u}}$ simpleks çarpanları bulunur. $\tilde{\mathbf{u}}^T (\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ uygunluk keseni ana probleme eklenir ve Adım 3'e geçilir.

Durum 2. Dual problemin sonlu çözümü varsa, $\hat{\mathbf{y}}$ primal ve $\hat{\mathbf{u}}$ dual çözümleri bulunur. Bu durumda, ana probleme optimallik keseni eklenir. Herhangi bir $\mathbf{x}$ için;

$$\theta \geq \mathcal{G}(\mathbf{x}) \geq \min_{\mathbf{y}} \underbrace{(\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x})\mathbf{u}}_{\max} \geq (\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}$$

eşitsizliği sağlanır. $\theta \geq (\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}$ optimallik keseni ana probleme eklenir. Böylece optimal olmayan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta})$ çözümü uygun çözümler bölgesinden atılarak bölge güncellenir ve Adım 3'e geçilir. Ana problemde güncelleme yapılamıyorsa, yani $\mathcal{G}(\hat{\mathbf{x}}) \leq \hat{\theta}$ ise, algoritma sonlanır, $\hat{\mathbf{x}}$ birinci aşama optimal çözümüdür.

Adım 3. Güncellenmiş ana problem çözülür, problemin optimal çözümü $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\theta})$ olsun. $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta}) := (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\theta})$ ile Adım 2'ye dönülür.

K farklı senaryoya karşılık ve $k \in \{1, \dots, K\}$ olmak üzere, k . senaryonun gerçekleşme olasılığının $p_k (\geq 0)$ ve $\sum_{k=1}^K p_k = 1$ olduğu kabul edilsin. İki aşamalı yapıdaki

$$\left. \begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{q}_k^T \mathbf{y}_k \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{T}_k \mathbf{x} + \mathbf{W} \mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k \quad k=1, \dots, K \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_k \geq \mathbf{0} \quad k=1, \dots, K \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

problemi de ayrılabilir yapıdadır. Sabit bir $\mathbf{x}$ için, birbirinden bağımsız K farklı alt problem elde edilir. Birinci aşama kararları $\mathbf{x}$, rassal olay gerçekleşmeden alınmalıdır. Rassal olay gerçekleşmeden önce $\mathbf{T}_k$, $\mathbf{q}_k$ ve $\mathbf{h}_k$ matrisleri bilinmektedir, ancak hangi rassal olayın gerçekleşeceği bilinmemektedir. Rassal olay gerçekleştikten sonra artık tüm parametreler belirlidir. Ana problem;

$$\min \{ z \mid z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

şeklindedir. Ana problemin optimal çözümü $\hat{\mathbf{x}}$,

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{q}_k^T \mathbf{y}_k \\ & \mathbf{W} \mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k - \mathbf{T}_k \hat{\mathbf{x}} \\ & \mathbf{y}_k \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

alt problemlerinde yerine yazılır. İlk adımda, alt problem k için, dual problem sınırsız ise üst sınır $z_u = \infty$ olarak belirlenir ve uygunluk keseni eklenerek ana problem güncellenir ve çözülür. Açıktır ki, $|z^* - z_u|$ farkı önceden belirlenmiş bir tolerans değerinden daha büyük olacaktır. Bu nedenle, güncellenen $\hat{\mathbf{x}}$ için alt problemler yaratılır ve çözülür. Dual problemlerin tümü sonlu ise üst sınır:

$$z_u = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} + \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{q}_k^T \hat{\mathbf{y}}_k$$

olarak güncellenir. Optimallik keseni eklenerek ana problem güncellenir. Bir sonraki adımda alt problemlerin tümü uygun çözüme sahipse ve bir önceki adımdakinden daha iyi bir üst sınır değeri elde ediliyorsa üst sınır güncellenir. Önceden belirli bir tolerans değeri kadar yakınlıkta bir çözüm elde edinceye kadar uygunluk keseni ya da optimallik keseni ekleyerek adımlar tekrarlanır.

Optimallik kesenleri aşağıdaki şekilde oluşturulur; π_k^T dual değişkenlerin optimal değerleri (simpleks çarpanlar) olmak üzere, $\mathbf{T}_k \mathbf{x} + \mathbf{W} \mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k$ eşitliğinin her iki tarafı $p_k \pi_k^T$ ile çarpılır ve sol tarafa $p_k \mathbf{q}_k^T \mathbf{y}_k$ eklenip, çıkartılır ve eşitlik düzenlenirse;

$$p_k (\pi_k^T \mathbf{T}_k) \mathbf{x} - p_k \underbrace{(\mathbf{q}_k^T - \pi_k^T \mathbf{W}) \mathbf{y}_k}_{\geq 0} + p_k \mathbf{q}_k^T \mathbf{y}_k = p_k \pi_k^T \mathbf{h}_k$$

elde edilir, bu eşitlik $k=1$ 'den K 'ya toplanırsa;

$$\sum_{k=1}^K p_k (\pi_k^T \mathbf{T}_k) \mathbf{x} + \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{q}_k^T \mathbf{y}_k \geq \sum_{k=1}^K p_k \pi_k^T \mathbf{h}_k$$

olur, ayrıca $\sum_{k=1}^K p_k \mathbf{q}_k^T \mathbf{y}_k = \theta$ alınırsa kesen;

$$\theta \geq \sum_{k=1}^K p_k \pi_k^T \mathbf{h}_k - \sum_{k=1}^K p_k (\pi_k^T \mathbf{T}_k) \mathbf{x}$$

şeklini alır. Dikkat edilirse, bu kesen yöntemin 2. adımın Durum 2'sinde verilen optimallik kesene benzerdir. Benzer şekilde, uygunluk keseni de;

$$\sum_{k=1}^K p_k \pi_k^T \mathbf{h}_k - \sum_{k=1}^K p_k (\pi_k^T \mathbf{T}_k) \mathbf{x} \leq 0$$

olarak yazılabilir (Kall ve Wallace [2], Dantzig ve Thapa [6]).

2.2.4 Stokastik Taşıma Problemi

Belirli bir mal için müşteri talepleri kesin olarak bilinmiyorsa, tedarik noktalarından talep noktalarına taşınan optimal mal miktarını belirleme problemine stokastik taşıma problemi denir.

Burada $i=1,\dots,m$ olmak üzere, i . tedarikçinin elinde (kaynakta) tek tip bir maldan b_i kadar bulunur. Ayrıca $j=1,\dots,n$ olmak üzere, j . müşteri (varış yeri) $\tilde{d}_j$ kadar talep etmektedir. Talep miktarları bilinen olasılık dağılımlarına sahip rassal değişkenlerdir. Bu rassal değişkenler kesikli veya sürekli yapıda olabilir. Çalışmamızda STP, bu iki durum için ayrı ayrı incelenecektir.

i . kaynaktan j . varış yerine gönderilen mal miktarı x_{ij} ve bir birim malı gönderme maliyeti c_{ij} , j müşterisine gönderilen toplam mal miktarı y_j olsun. Eğer j . müşterinin talebi karşılanmazsa karşılanmayan her bir birim talebe karşılık elde bulundurmama maliyeti (cezası) s_j 'dir. Eğer j . müşterinin talebinin üzerinde mal gönderilirse her bir birim fazla mala karşılık elde bulundurma maliyeti h_j 'dir.

2.2.4.1 STP'nin Kesikli Durumu

Müşteri taleplerinin bilinen kesikli dağılımlara sahip rassal değişkenler olduğu kabul edildiği durum STP'nin kesikli versiyonudur. j . müşterinin kesikli talep sayısı k_j ve $k=1,\dots,k_j$ için j müşterisinin kesikli talebi d_{jk} ya karşılık gelen olasılık p_{jk} olmak üzere, kesikli STP modeli:

$$\left. \begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n \left(h_j E[y_j - d_j]^+ + s_j E[d_j - y_j]^+ \right) \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

şeklinde verilebilir (Ferguson ve Dantzig [11]).

Kesikli d_j rassal talepleri için, (2.14) modelinin amaç fonksiyonundaki beklenen eksiklik ve beklenen fazlalık fonksiyonlarının genelleştirilmesi, sırasıyla:

$$\begin{aligned} E[d_j - y_j]^+ &= \sum_{t=1}^{\infty} t P\{d_j - y_j = t\} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{t-1} P\{d_j - y_j = t\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=k+1}^{\infty} P\{d_j - y_j = t\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{d_j - y_j > k\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - P\{d_j - y_j \leq k\}) = \sum_{\substack{k=0 \\ d_j > y_j}}^{\infty} (1 - F(y_j + k)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[y_j - d_j]^+ &= \sum_{t=1}^{\infty} t P\{y_j - d_j = t\} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{t-1} P\{y_j - d_j = t\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=k+1}^{\infty} P\{y_j - d_j = t\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{d_j < y_j - k\} = \sum_{\substack{k=0 \\ y_j > d_j}}^{\infty} F(y_j - k) \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir (Louveaux ve van der Vlerk [63]).

(2.14) modelini daha açık yazmak için, η_{jk}^- ve η_{jk}^+ , sırasıyla j müşterisinin kesikli d_{jk} talebinin üzerinde ve altında gönderilen miktarlar olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} y_j - \eta_{jk}^- + \eta_{jk}^+ &= d_{jk} \\ \eta_{jk}^- \eta_{jk}^+ &= 0 \\ \eta_{jk}^-, \eta_{jk}^+ &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, k_j$$

dönüşümleri (2.14) probleminin kısıtlarına eklenirse, (2.14)'e eşdeğer olan

$$\left. \begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n \left(h_j \sum_{k=1}^{k_j} (P\{d_j \geq d_{jk}\} \eta_{jk}^-) + s_j \sum_{k=1}^{k_j} (P\{d_j \leq d_{jk}\} \eta_{jk}^+) \right) \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \\
& \sum_{i=1}^m x_{ij} - \eta_{jk}^- + \eta_{jk}^+ = d_{jk}, \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, k_j \\
& \eta_{jk}^- \eta_{jk}^+ = 0, \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, k_j \\
& \eta_{jk}^-, \eta_{jk}^+ \geq 0 \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, k_j
\end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

problemi elde edilir.

Teorem 2.1 η_{jk}^- ve η_{jk}^+ değişkenleri aynı tabanda olamaz.

İspat: Aksini varsayalım, yani ikisi birden sıfırdan farklı değerle aynı tabanda olsunlar.

Ancak $q^-, q^+ \geq 0$, $q\eta = \max\{q^-(\eta_{jk}^- - \eta_{jk}^+), q^+(\eta_{jk}^+ - \eta_{jk}^-)\}$ olmak üzere,

$$q^- \eta_{jk}^- + q^+ \eta_{jk}^+ \geq q\eta$$

olması fonksiyonun minimum olmasıyla çelişir. Değişkenlerden birinin sıfır, diğerinin

$\eta = |\eta_{jk}^- - \eta_{jk}^+|$ olması daha iyi bir fonksiyon değeri verir. Dolayısıyla kabul yanlıştır.

Sonuç 2.1 η_{jk}^- ve η_{jk}^+ değişkenlerinin aynı anda tabanda olması, sadece birinin tabanda olmasına göre daha büyük bir amaç fonksiyonu değeri vereceğinden, bu iki değişken aynı anda tabanda olamaz, dolayısıyla $\eta_{jk}^- \eta_{jk}^+ = 0$ kısıtı gereksiz olur, atılabilir.

Böylece, (2.15)'de elde edilen kesikli STP, lineer amaç fonksiyonuna sahip ve uygun çözümler bölgesi lineer kısıtlarla belirli olduğundan bir konveks programlama problemidir. Düzeltici fonksiyon parçalı lineer konveks fonksiyondur ve problem lineer programlama problemlerini çözen herhangi bir paket programla çözülebilir.

Örnek 2.5 (Bricker [64]) Bir küçük örnek üzerinde basit düzelticili stokastik taşıma problemini ele alalım. Bu problemde her biri 10 birim mal tedarik edebilecek iki firma ve her biri rassal talepli üç varış yeri olsun.

Çizelge 2. 1 Örnek 2.5 için birim maliyetler

	Varış Yeri 1	Varış Yeri 2	Varış Yeri 3
Firma 1	3	5	6
Firma 2	2	4	7
h_j	3	3	6
s_j	6	7	8

Çizelge 2. 2 Örnek 2.5’de taleplerin mümkün değerleri ve olasılıkları

	Varış Yeri 1			Varış Yeri 2		Varış Yeri 3			
Talep (d_{jk})	5	7	9	4	8	4	6	8	10
Olasılık (p_{jk})	0.25	0.50	0.25	0.50	0.50	0.1	0.4	0.4	0.1

Çizelge 2.1’de, birim taşıma maliyetleri, birim elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetleri; Çizelge 2.2’de de varış yerlerinin kesikli taleplerinin olasılık ağırlık fonksiyonları verilmiştir. Bu problemde, üç bölgede müşteri talepleri sırasıyla, 3, 2 ve 4 farklı şekilde gerçekleşebileceği için olası senaryo sayısı, $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ tanedir.

(2.14) problemine karşılık gelen STP’nin matematik modeli:

$$\min \left\{ 3x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23} + \sum_{j=1}^3 Q_j(y_j) \right\}$$

$$x_{11} + x_{21} = y_1$$

$$x_{12} + x_{22} = y_2$$

$$x_{13} + x_{23} = y_3$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 10$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

şeklindedir.

Birinci varış yeri talebinin üzerinde ve altında gönderilen mal miktarlarının beklenen değerini ve buradan düzeltme maliyetini hesaplayalım. Öncelikle,

$$y_1 - 5 = \eta_{11}^- - \eta_{11}^+$$

$$y_1 - 7 = \eta_{12}^- - \eta_{12}^+$$

$$y_1 - 9 = \eta_{13}^- - \eta_{13}^+$$

$$\eta_{11}^-, \eta_{11}^+, \eta_{12}^-, \eta_{12}^+, \eta_{13}^-, \eta_{13}^+ \geq 0$$

olarak alalım. Taleplerin üzerinde gönderilen miktarlar:

$$P\{d_1 \geq 5\} = P\{d_1 = 5\} + P\{d_1 = 7\} + P\{d_1 = 9\} = 0.25 + 0.50 + 0.25 = 1$$

olasılıkla η_{11}^- ,

$$P\{d_1 \geq 7\} = P\{d_1 = 7\} + P\{d_1 = 9\} = 0.50 + 0.25 = 0.75$$

olasılıkla η_{12}^- ,

$$P\{d_1 \geq 9\} = P\{d_1 = 9\} = 0.25$$

olasılıkla η_{13}^- olur.

Talebin üzerinde gönderilen bir birim mal 3 para birimi maliyetle cezalandırıldığına göre beklenen maliyet:

$$3(\eta_{11}^- + 0.75\eta_{12}^- + 0.25\eta_{13}^-)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, birinci varış yerinin talebinin altında gönderilen mala karşılık beklenen maliyet:

$$6(0.25\eta_{11}^+ + 0.75\eta_{12}^+ + \eta_{13}^+)$$

olur. Bu durumda, birinci varış yeri için toplam beklenen düzeltme maliyeti ise

$$Q_1(\eta_1) = 3\eta_{11}^- + 2.25\eta_{12}^- + 0.75\eta_{13}^- + 1.5\eta_{11}^+ + 4.5\eta_{12}^+ + 6\eta_{13}^+$$

şeklindedir.

Benzer hesaplamalar ikinci ve üçüncü varış yerleri için de tekrarlanırsa:

$$\begin{aligned}
y_2 - 4 &= \eta_{21}^- - \eta_{21}^+ \\
y_2 - 8 &= \eta_{22}^- - \eta_{22}^+ \\
y_3 - 4 &= \eta_{31}^- - \eta_{31}^+ \\
y_3 - 6 &= \eta_{32}^- - \eta_{32}^+ \\
y_3 - 8 &= \eta_{33}^- - \eta_{33}^+ \\
y_3 - 10 &= \eta_{34}^- - \eta_{34}^+ \\
\eta_{21}^-, \eta_{21}^+, \eta_{22}^-, \eta_{22}^+, \eta_{31}^-, \eta_{31}^+, \eta_{32}^-, \eta_{32}^+, \eta_{33}^-, \eta_{33}^+, \eta_{34}^-, \eta_{34}^+ &\geq 0
\end{aligned}$$

olmak üzere, beklenen düzeltme maliyetleri, sırasıyla:

$$Q_2(\eta_2) = 3\eta_{21}^- + 1.5\eta_{22}^- + 3.5\eta_{21}^+ + 7\eta_{22}^+$$

ve

$$Q_3(\eta_3) = 6\eta_{31}^- + 5.4\eta_{32}^- + 3\eta_{33}^- + 0.6\eta_{34}^- + 0.8\eta_{31}^+ + 4\eta_{32}^+ + 7.2\eta_{33}^+ + 8\eta_{34}^+$$

şeklinde dir. Buradan, (2.15)'e karşılık gelen kesikli STP modeli:

$$\begin{aligned}
\min f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) &= 3x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23} \\
&+ 3\eta_{11}^- + 2.25\eta_{12}^- + 0.75\eta_{13}^- + 1.5\eta_{11}^+ + 4.5\eta_{12}^+ + 6\eta_{13}^+ + 3\eta_{21}^- + 1.5\eta_{22}^- + 3.5\eta_{21}^+ + 7\eta_{22}^+ \\
&+ 6\eta_{31}^- + 5.4\eta_{32}^- + 3\eta_{33}^- + 0.6\eta_{34}^- + 0.8\eta_{31}^+ + 4\eta_{32}^+ + 7.2\eta_{33}^+ + 8\eta_{34}^+ \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 10 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 10 \\
x_{11} + x_{21} - \eta_{11}^- + \eta_{11}^+ &= 5 \\
x_{11} + x_{21} - \eta_{12}^- + \eta_{12}^+ &= 7 \\
x_{11} + x_{21} - \eta_{13}^- + \eta_{13}^+ &= 9 \\
x_{12} + x_{22} - \eta_{21}^- + \eta_{21}^+ &= 4 \\
x_{12} + x_{22} - \eta_{22}^- + \eta_{22}^+ &= 8 \\
x_{13} + x_{23} - \eta_{31}^- + \eta_{31}^+ &= 4 \\
x_{13} + x_{23} - \eta_{32}^- + \eta_{32}^+ &= 6 \\
x_{13} + x_{23} - \eta_{33}^- + \eta_{33}^+ &= 8 \\
x_{13} + x_{23} - \eta_{34}^- + \eta_{34}^+ &= 10 \\
\boldsymbol{\eta}, x_{ij} &\geq 0 \quad i=1,2; j=1,2,3
\end{aligned}$$

olur. Problemin optimal çözümü ise,

$$\begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & x_{13}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & x_{23}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(y_1^* \ y_2^* \ y_3^*) = (7 \ 4 \ 6),$$

$$\begin{pmatrix} \eta_{11}^{*-} & \eta_{12}^{*-} & \eta_{13}^{*-} & \eta_{21}^{*-} & \eta_{22}^{*-} & \eta_{31}^{*-} & \eta_{32}^{*-} & \eta_{33}^{*-} & \eta_{34}^{*-} \\ \eta_{11}^{*+} & \eta_{12}^{*+} & \eta_{13}^{*+} & \eta_{21}^{*+} & \eta_{22}^{*+} & \eta_{31}^{*+} & \eta_{32}^{*+} & \eta_{33}^{*+} & \eta_{34}^{*+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Birinci varış yerine 7 birim mal yollanmalıdır. Bu durumda, olası taleplere göre 0.25 olasılıkla 2 birim fazla yükleme, 0.50 olasılıkla tam yükleme ve 0.25 olasılıkla 2 birim eksik yükleme gerçekleşecektir. Birinci varış yerinde birim elde bulundurma ve bulundurmama maliyetleri, sırasıyla 3 ve 6 para birimi olduğundan, beklenen düzeltme maliyeti:

$$Q_1(7) = 0.25 \times 2 \times 3 + 0.50 \times 0 + 0.25 \times 2 \times 6 = 4.5$$

para birimi olacaktır. Benzer şekilde, ikinci ve üçüncü varış yerlerindeki beklenen düzeltme maliyetleri, sırasıyla:

$$Q_2(4) = 0.5 \times 0 + 0.50 \times 4 \times 7 = 14$$

ve

$$Q_3(6) = 0.1 \times 2 \times 6 + 0.4 \times 0 + 0.4 \times 2 \times 8 + 0.1 \times 4 \times 8 = 10.8$$

olarak hesaplanır. Bu durumda, toplam düzeltme maliyeti 29.3 para birimi olurken, 67 para birimi taşıma maliyeti ile birlikte toplam maliyet 96.3 para birimi olacaktır.

Bu örnekte ikinci aşamada yeniden yükleme yapma, anında teslimat için civardaki pazardan satın alma ve bir sonraki teslimata kadar depoda saklama gibi bir takım acil durum eylemleri gerçekleştirilebilir. Ancak, Örnek 2.6'daki Filo ataması örneğinde görüleceği gibi bazı basit düzeltici modellerde beklenen ceza maliyetleri amaç fonksiyonuna eklense de rassal olayın sonuçlanmasından sonra gerçekte bir düzeltme eylemi yapılmamaktadır.

Örnek 2.6 Filo ataması (Ferguson ve Dantzig [11])

Bir havayolu firmasının beş farklı rotaya atanacak dört tipte uçakları vardır. Rotalara atanabilecek uçak tiplerinin mevcut miktarları $(b_i, i=1, \dots, 4)$ sırasıyla 10, 19, 25 ve

15'dir. Rotalardaki yolcu başına elde edilecek gelirler, yani bilet fiyatları sırasıyla 130, 130, 70, 70 ve 10 para birimi (p.b.)'dir.

Çizelge 2. 3 Örnek 2.6 için aylık yolcu kapasiteleri ve faaliyet giderleri

(t_{ij}, c_{ij})	R1	R2	R3	R4	R5
U1	(16, 18)	(15, 21)	(28, 18)	(23, 16)	(81, 10)
U2	(0, M)	(10, 15)	(14, 16)	(15, 14)	(57, 9)
U3	(0, M)	(5, 10)	(0, M)	(7, 9)	(29, 6)
U4	(9, 17)	(11, 16)	(22, 17)	(17, 15)	(55, 10)

Belirli bir rotaya atanan uçak sayısı ile doğru orantılı olarak yolcu kapasitesi değişmektedir. Çizelge 2.3'de, t_{ij} 'ler ($\times 100$ ölçeğiyle) her bir uçak-rota ikilisi için uçak başına aylık yolcu kapasitelerini, c_{ij} 'ler ($\times 1000$ p.b.) bir uçağın belirli bir rotaya atanmasından doğan maliyetleri gösteren faaliyet giderlerini, (0, M) ikilisi ise uçak tiplerinin rotalara atanamaması durumunda 0 yolcu kapasitesi ve $M > 0$ yüksek faaliyet giderini göstermektedir.

Çizelge 2. 4 Olası aylık talepler ve gerçekleşme olasılıkları (Örnek 2.6)

$d_{jk}(p_{jk})$	1	2	3	4	5
R1	200 (0.2)	220 (0.05)	250 (0.35)	270 (0.2)	300 (0.2)
R2	50 (0.3)	150 (0.7)	-	-	-
R3	140 (0.1)	160 (0.2)	180 (0.4)	200 (0.2)	220 (0.1)
R4	10 (0.2)	50 (0.2)	80 (0.3)	100 (0.2)	340 (0.1)
R5	580 (0.1)	600 (0.8)	620 (0.1)	-	-

Her bir rota için yolcu sayıları (talepler) belirsizdir, ancak $\times 100$ ölçeği ile verilen taleplerin kesikli dağılımları bilinmektedir (Çizelge 2.4). Talepler belirli olmadan önce uçaklar rotalara tahsis edilmelidir. Yolcu talepleri belirli hale geldiğinde talep fazlalığı denebilecek atanan kapasitenin yolcu talebini karşılayamaması durumu ortaya çıkabilir. Bu durumda, yolcu geri çevrileceğinden yolcu başına bir bilet fiyatı kadar miktar kaybedilecektir. Yolcu kaybı durumunda bilet satma fırsatı kaçırıldığından, bu durum bir ceza maliyetini gerektirir. 100 yolcu başına ve 1000 p.b. ölçekleri kullanıldığından birim ceza maliyetleri $(r_j, j=1, \dots, 5)$ sırasıyla 13, 13, 7, 7 ve 1 p.b.dir.

j rotası için olası talep sayısı k_j ve atanan toplam yolcu kapasitesi $y_j(\times 100)$ olmak üzere, $k \in \{1, \dots, k_j\}$ için olası yolcu talebi $d_{jk}(\times 100)$ olsun (Çizelge 2.4).

$$0 \leq y_{j1} \leq d_{j1}$$

$$0 \leq y_{j2} \leq d_{j2} - d_{j1}$$

$\vdots$

$$0 \leq y_{j(k_j)} \leq d_{j(k_j)} - d_{j(k_j-1)}$$

olmak üzere,

$$y_j = \sum_{k=1}^{k_j} y_{jk}$$

şeklinde parçalanırsa, kapasitenin d_{jk} mümkün talep değerlerinden büyük veya eşit olma olasılığı γ_{jk} olmak üzere, j rotasından sağlanacak beklenen gelir:

$$r_j \sum_{k=1}^{k_j} \gamma_{jk} y_{jk}$$

ile hesaplanır. Öncelikle, sadece birinci rotaya odaklanılırsa, aylık yolcu talebi 20000, 22000, 25000, 27000, 30000 sayılarından sadece biri olabilir. Birinci rotaya atanan yolcu kapasitesinin ilk 20000'lik kısmı kesinlikle kullanılacaktır ve yolcu başına 130 p.b. gelir veya -130 p.b. maliyet sağlanacaktır. Talep

$$1 - 0.20 = 0.80$$

olasılıkla 20000'den büyük olacağından, sonraki

$$22000 - 20000 = 2000$$

kişilik kapasite 0.80 olasılıkla kullanılacaktır, o halde gelir:

$$130 \times 0.80 = 104$$

para birimine düşecektir. Bu şekilde devam edilirse, birinci rota için γ_{jk} değerleri:

$$\gamma_{11} = 1, \gamma_{12} = 0.80, \gamma_{13} = 0.75, \gamma_{14} = 0.40, \gamma_{15} = 0.20$$

olur ve birinci rotadan sağlanacak beklenen gelir:

$$13(1.00 \times y_{11} + 0.80 \times y_{12} + 0.75 \times y_{13} + 0.40 \times y_{14} + 0.20 \times y_{15})$$

olarak hesaplanır. Örneğin, birinci rotaya atanmış toplam kapasite $y_1 = 210$ bulunursa

$$y_{11} = 200, y_{12} = 10, y_{13} = 0, y_{14} = 0, y_{15} = 0$$

şeklinde bir parçalanış söz konusudur.

j rotasında kullanılacak i . tipteki uçak sayısı x_{ij} bilinmeyenler olmak üzere, rotalara

uçak tahsis etme probleminin basit düzeltici modeli:

$$\begin{aligned} \min & \left\{ \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^{k_j} r_j \gamma_{jk} y_{jk} \right\} \\ & \sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, 4 \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 5 \\ & \left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^4 t_{ij} x_{ij} = y_j, \\ & y_j = \sum_{k=1}^{k_j} y_{jk}, \\ & 0 \leq y_{j1} \leq d_{j1}, \\ & 0 \leq y_{j2} \leq d_{j2} - d_{j1}, \\ & \vdots \\ & 0 \leq y_{j(k_j)} \leq d_{j(k_j)} - d_{j(k_j-1)} \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Problemin birinci aşama optimal çözümü:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 10.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12.8 & 0.9 & 5.3 & 0 \\ 0 & 4.3 & 0 & 0 & 20.7 \\ 7.4 & 0 & 7.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Bu durumda, rotalara tahsis edilen toplam kapasiteler sırasıyla, 22660, 15000, 18000, 8000 ve 60000 olmaktadır.

Daha önceden belirtildiği gibi, bu modelde gerçekte bir düzeltme eylemi yapılmamaktadır. Örneğin, üçüncü rotaya 18000 yolcu kapasitesi atanmış olduğundan müşteri talebi 20000 veya 22000 olarak gerçekleşirse, 0.2 olasılıkla 2000 yolcu veya 0.1 olasılıkla 4000 yolcu kaybedilecektir. Kayıp yolcu sayısının beklenen değeri 800 olarak hesaplanır. Modelde tüm olası sonuçlar göz önüne alınır ve yolcu kayıpları en aza indirilmeye çalışılır.

2.2.4.2 STP'nin Sürekli Durumu

Müşteri taleplerinin bilinen sürekli dağılımlara sahip rassal değişkenler olduğu kabul edildiği durum STP'nin sürekli versiyonudur. j . müşteri talebi için olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_j(t)$ ve dağılım fonksiyonu $F_j(t)$ olmak üzere, toplam taşıma maliyeti ile toplam ceza maliyetlerinin beklenen değerinin toplamını minimize eden sürekli STP modeli:

$$\left. \begin{aligned} \min z'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n \left(h_j \int_0^{y_j} (y_j - t) f_j(t) dt + s_j \int_{y_j}^{\infty} (t - y_j) f_j(t) dt \right) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= y_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \forall i \text{ ve } j \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

yapısındadır. Görüldüğü gibi elde edilen modelin kısıtları lineer, amaç fonksiyonu ise nonlineerdir ve konveks programlama problemi olduğu Teorem 2.2'de gösterilecektir. Bu problemin amaç fonksiyonunda

$$Q_j(y_j) = h_j \int_0^{y_j} (y_j - t) f_j(t) dt + s_j \int_{y_j}^{\infty} (t - y_j) f_j(t) dt \quad (2.17)$$

diyerek integraller hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n Q_j(y_j) &= \sum_{j=1}^n \left(h_j \int_0^{y_j} (y_j - t) f_j(t) dt + s_j \int_{y_j}^{\infty} (t - y_j) f_j(t) dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(h_j y_j \int_0^{y_j} f_j(t) dt - h_j \int_0^{y_j} t f_j(t) dt + s_j \int_{y_j}^{\infty} t f_j(t) dt - s_j y_j \int_{y_j}^{\infty} f_j(t) dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(h_j y_j F_j(t) \Big|_0^{y_j} - h_j \int_0^{y_j} t f_j(t) dt + s_j (E[d_j] - \int_0^{y_j} t f_j(t) dt) - s_j y_j F_j(t) \Big|_{y_j}^{\infty} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(h_j y_j F_j(y_j) - (h_j + s_j) \int_0^{y_j} t f_j(t) dt + s_j E[d_j] - s_j y_j (1 - F_j(y_j)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left((h_j + s_j) y_j F_j(y_j) - (h_j + s_j) \int_0^{y_j} t f_j(t) dt + s_j E[d_j] - s_j y_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left((h_j + s_j) y_j F_j(y_j) - (h_j + s_j) (y_j F_j(y_j) - \int_0^{y_j} F_j(t) dt) + s_j E[d_j] - s_j y_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left((h_j + s_j) \int_0^{y_j} F_j(t) dt + s_j E[d_j] - s_j y_j \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Son satırda bulunan

$$\sum_{j=1}^n s_j E[d_j]$$

sabit teriminin optimal çözüm üzerinde etkisi yoktur, bu nedenle bu terim eşitliğin sol tarafına geçirilebilir (kaldırılabilir). Ancak, optimal çözüm bulunduktan sonra amaç fonksiyon değeri bu sabit terim kadar ötelenerek esas optimal amaç fonksiyon değeri bulunur. Böylece, STP'nin amaç fonksiyonu, sabit terim olmaksızın:

$$\min z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n \left((h_j + s_j) \int_0^{y_j} F_j(t) dt - s_j y_j \right) \quad (2.18)$$

formundadır.

(2.18)'de $j=1, \dots, n$ için $y_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}$ alınırsa, (2.16) problemi:

$$\left. \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n \left((h_j + s_j) \int_0^{\sum_{i=1}^m x_{ij}} F_j(t) dt - s_j \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq b_i \quad i=1, 2, \dots, m \\ x_{ij} &\geq 0 \quad i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

şekline dönüşür.

Sürekli d_j rassal talepleri için, (2.16)'daki beklenen eksiklik ve beklenen fazlalık fonksiyonlarının genelleştirilmesi kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak, sırasıyla;

$$\begin{aligned} \int_{y_j}^{\infty} (t - y_j) f(t) dt &= (t - y_j) F(t) \Big|_{y_j}^{\infty} - \int_{y_j}^{\infty} F(t) dt = (\infty - y_j) F(\infty) - \int_{y_j}^{\infty} F(t) dt \\ &= \int_{y_j}^{\infty} dt - \int_{y_j}^{\infty} F(t) dt = \int_{y_j}^{\infty} (1 - F(t)) dt \end{aligned}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{y_j} (y_j - t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{y_j} F(t) dt$$

şeklinde verilebilir (Louveau ve van der Vlerk [63]).

2.2.4.3 Sürekli STP için Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Şartları

(2.19) probleminde $i=1, \dots, m$ ve $j=1, \dots, n$ için u_i ve v_{ij} Lagrange çarpanları ve

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n \left((h_j + s_j) \int_0^{\sum_{i=1}^m x_{ij}} F_j(t) dt - s_j \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) + \sum_{i=1}^m u_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - b_i \right) - \sum_{j=1}^n v_{ij} x_{ij}$$

Lagrange fonksiyonu ise KKT gerek şartları:

$$\forall i \text{ için } u_i \geq 0, u_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - b_i \right) = 0,$$

$$\forall i, j \text{ için } v_{ij} \geq 0,$$

$$v_{ij} x_{ij} = 0 \quad (2.20)$$

ve

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = c_{ij} + (h_j + s_j) F_j \left(\sum_{k=1}^m x_{kj} \right) - s_j + u_i - v_{ij} = 0 \Rightarrow c_{ij} + (h_j + s_j) F_j \left(\sum_{k=1}^m x_{kj} \right) - s_j + u_i \geq 0 \quad (2.21)$$

şeklindedir.

(2.21)'den $v_{ij} = c_{ij} + (h_j + s_j) F_j \left(\sum_{k=1}^m x_{kj} \right) - s_j + u_i$ olduğundan v_{ij} değişkenlerinin elimine edilmesiyle (2.20) kısıtı:

$$x_{ij} (c_{ij} + (h_j + s_j) F_j \left(\sum_{k=1}^m x_{kj} \right) - s_j + u_i) = 0$$

şeklinde yazılır (França ve Luna [65]).

Teorem 2.2 (2.18) ile verilen $z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bir konveks fonksiyondur (Elmaghraby, [23]).

İspat: (2.19) probleminin amaç fonksiyonunun kısmi türevleri:

$$\frac{\partial z}{\partial x_{ij}} = c_{ij} + (h_j + s_j) F_j \left(\sum_{k=1}^m x_{kj} \right) - s_j \quad (2.22)$$

ve

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_{rs} \partial x_{ij}} = \begin{cases} (h_j + s_j) f_j \left(\sum_{k=1}^m x_{kj} \right), & j = s \\ 0, & j \neq s \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır. $mn \times mn$ boyutlu Hessian matris yarı-pozitif definit olacağından $z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ konveks bir fonksiyondur.

Sonuç 2.2 $z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fonksiyonu ve uygun çözümler bölgesi konveks olduğundan STP bir konveks programlama problemidir. KKT gerek şartları aynı zamanda yeter şartlardır, yani yerel minimum aynı zamanda bir global minimumdur (Elmaghraby, [23]).

Sonuç 2.3 $\mathbf{x} \geq 0$ ve $\mathbf{u} \geq 0$ olmak üzere, $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ikilisinin (2.19) probleminin KKT şartlarının sağlaması için

$$\left. \begin{aligned} c_{ij} + (h_j + s_j)F_j\left(\sum_{k=1}^m x_{kj}\right) - s_j + u_i &\geq 0 & i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_{ij} \left(c_{ij} + (h_j + s_j)F_j\left(\sum_{k=1}^m x_{kj}\right) - s_j + u_i \right) &= 0 & i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \\ u_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - b_i \right) &= 0 & i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

olması gerekir ve yeter.

Sürekli STP için literatürde önerilmiş yöntemleri inceleyelim.

2.2.4.4 Frank-Wolfe Algoritması

Bu algoritma Frank ve Wolfe [16] tarafından 1956'da ilk olarak kuadratik programlama problemlerinin çözümü için önerilmiş, lineer kısıtlı konveks programlama için de uygulanabileceği belirtilmiştir. STP de lineer kısıtlı, nonlinear bir konveks programlama problemi olduğundan Frank-Wolfe algoritması STP probleminde de kullanılabilir.

$z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $S \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir çokyüzlü olmak üzere,

$$\min \{ z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S \}$$

problemini ele alalım.

$\mathbf{x} \in S$ noktasının yerel minimum olması için gerek koşul, her $\mathbf{y}$ için $\nabla z(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0$ olmasıdır. $z(\mathbf{y}) = z(\mathbf{x}) + \nabla z(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x})$ olduğundan $\nabla z(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq 0$ olursa $z(\mathbf{y}) \leq z(\mathbf{x})$ olur ki bu $\mathbf{x} \in S$ noktasının yerel minimum olması ile çelişir. Dolayısıyla, algoritmanın her

iterasyonunda amaç fonksiyonu lineerleştirilir ve bu yolla esas amaç fonksiyonuna iyi bir yaklaşım sağlamaya çalışılır.

Frank-Wolfe Algoritması:

Adım 0. $\mathbf{x}_0 \in S$ başlangıç çözümünü seç ve $k=0$ al.

Bu çözüm herhangi bir uygun taban çözümdür, yani bir uç noktadır. Problemin herhangi bir uygun çözümü, problem için bir üst sınır verir.

Adım 1. Yön bulma problemi:

$$\min_{\mathbf{x} \in S} z_k(\mathbf{x}) = z(\mathbf{x}_k) + \nabla z(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

çöz. Burada, yön bulma probleminin amaç fonksiyonu esas problemin amaç fonksiyonunun $\mathbf{x}_k$ civarında birinci mertebeden Taylor açılımı, başka bir deyişle, esas problemin amaç fonksiyonunun lineerleştirilmiş halidir. Problemin çözümü $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ uç noktası olsun. Bu çözüm, lineerleştirilmiş amaç fonksiyonunda yerine yazılır ve nonlinear amaç fonksiyonunun optimal değeri için

$$z_k(\hat{\mathbf{x}}) = z(\mathbf{x}_k) + \nabla z(\mathbf{x}_k)^T (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_k)$$

olarak bir alt sınır verir. Ayrıca, uygun $\mathbf{x}_k$ noktasından $\hat{\mathbf{x}}$ uç noktasına doğru olan ilerleme yönü vektörü $\mathbf{p}_k := \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_k$ belirlenmiş olur. Hem $\mathbf{x}_k$ hem de $\hat{\mathbf{x}}$, S ye ait ve S konveks küme olduğundan bu ilerleme yönü uygun bir yöndür.

Adım 2. α_k adım uzunluğunu

$$z(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) < z(\mathbf{x}_k)$$

olacak şekilde belirlemek üzere

$$\min_{\alpha \in [0,1]} z(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k)$$

adım uzunluğu problemini çöz. α en fazla 1 olabilir, çünkü $\alpha > 1$ olursa çözüm uygun değildir.

Adım 3. Yeni iterasyon noktası

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

dır.

Adım 4. Durdurma kriteri sağlanıyorsa DUR, $\mathbf{x}_{k+1}$ optimal çözüme bir yaklaşım olarak alınabilir. Aksi halde, $k := k + 1$ al ve Adım 1'e dön.

Yeni iterasyon noktasında nonlinear amaç fonksiyonunun değerinin hesaplanmasıyla $z(\mathbf{x}_{k+1})$ üst sınırı elde edilir. Her iterasyonda güncellenen üst sınır ile alt sınır arasındaki göreceli fark, önceden belirlenmiş bir değerden küçük kaldığında algoritma sonlanır.

Önceden belirlenmiş kabul edilebilir göreceli hata değeri olan durdurma kriteri ise $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\frac{z(\mathbf{x}_{k+1}) - z_k(\hat{\mathbf{x}})}{|z_k(\hat{\mathbf{x}})|} \leq \varepsilon$$

dur.

Frank-Wolfe algoritması Cooper ve LeBlanc [17] tarafından 1977 yılında stokastik taşıma problemine uyarlanmıştır. Bu uyarlamada (2.19) probleminin amaç fonksiyonunun $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ noktasındaki lineerleştirilmesinden elde edilen

$$\begin{aligned} v_i &= \min \sum_{j=1}^n \frac{\partial z(\mathbf{x}_k)}{\partial x_{ij}} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

alt problemi (yön bulma problemi) her i için çözülmektedir. (2.22)'den lineerleştirilmiş maliyetler:

$$\frac{\partial z(\mathbf{x}_k)}{\partial x_{ij}} = c_{ij} - s_j + (h_j + s_j)F_j\left(\sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)}\right) = \hat{c}_{ij} \quad (2.24)$$

olarak alınırsa, $\hat{c}_{ii} = \min_j \hat{c}_{ij}$ olmak üzere, problemin optimal çözümü

$$x_{ij}^* = \begin{cases} b_i, & j = I \text{ ve } \hat{c}_{ii} < 0 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir, yani her i kaynağı için kaynaktaki tüm mal, en küçük negatif lineerleştirilmiş maliyete sahip bölgeye gönderilir (Holmberg [26]).

Uygun yön metotları sınıfında yer alan Frank-Wolfe algoritması başlangıç noktasının seçimine de bağlı olarak ilk birkaç iterasyonda optimal çözüme hızla yakınsar, ancak optimale yaklaşıldıkça bu yakınsama yavaşlar. Bunun nedeni sonraki iterasyonlarda gradyente dik (zigzag) ilerleme eğiliminin oluşmasıdır (Daneva vd. [28]).

Frank-Wolfe algoritması basitliği açısından uygulamalarda sıklıkla kullanılmasına rağmen bahsedilen dezavantajından dolayı bu algorithmada bazı modifikasyonlar yapılmıştır. Bunlardan sezgisel Frank-Wolfe algoritmasında, i . kaynaktaki tüm malı en küçük lineerleştirilmiş $\hat{c}_{ij}$ maliyetine sahip j . müşteri bölgesine göndermektense, negatif $\hat{c}_{ij}$ 'ye sahip bölgeler arasında eşit şekilde paylaştırmaktır. (Holmberg [26], Daneva vd. [28]).

Amaç fonksiyonunu lineerleştiren Frank-Wolfe algoritmasının başka bir modifikasyonu olan köşegenleştirilmiş Newton metodunda ise her adımda fonksiyona lineer yerine kuadratik yaklaşım sağlanır (Daneva vd. [28]).

2.2.4.5 Ayrılabilir (Seperable) Programlama

Nonlinear programlamada kullanılan bu yöntem, amaç ve kısıt fonksiyonlarının ayrılabilir yapıda olduğu problemlere uygulanır. Amaç ve kısıt fonksiyonları sırasıyla

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

ve

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n g_{ij}(x_j) \quad i = 1, \dots, m$$

şeklinde olmalıdır, görüldüğü gibi fonksiyonlardaki her terim sadece bir değişkeni içermektedir.

Amaç fonksiyonundaki lineer olmayan kısım, belirli sayıda kırılma noktası vasıtasıyla parçalı lineer bir fonksiyonla değiştirilerek esas fonksiyona iyi bir yaklaşım sağlanmaya çalışılır. Lineerleştirilmiş problem, simpleks yöntemin bir uzantısıyla çözülebilir. Kırılma

noktalarının sayısı arttırıldıkça nonlinear fonksiyona daha iyi bir yaklaşım sağlanır (Holmberg [18]).

STP’de sonlu sayıda rassal talebin var olması durumunda düzeltici fonksiyonlar parçalı lineer yapıda olduğundan, STP ayrılabilir programlama yardımıyla çözülebilir. Olasılık dağılımları sürekli olduğunda ise ayrılabilir programlama yöntemi düzeltici fonksiyonların parçalı lineer yaklaşımları oluşturularak uygulanabilir.

Örnek 2.7 Örnek 2.5’e dönülürse, birinci varış yerine yollanan toplam mal miktarı y_1 olmak üzere, birinci varış yeri için parçalı lineer düzeltici fonksiyon:

$$Q_1(y_1) = 0.25[6(5 - y_1)^+ + 3(y_1 - 5)^+] + 0.50[6(7 - y_1)^+ + 3(y_1 - 7)^+] \\ + 0.25[6(9 - y_1)^+ + 3(y_1 - 9)^+] \\ = \begin{cases} 42 - 6y_1, & 0 \leq y_1 < 5 \\ 30.75 - 3.75y_1, & 5 \leq y_1 < 7 \\ 0.75y_1 - 0.75, & 7 \leq y_1 < 9 \\ 3y_1 - 21, & 9 \leq y_1 \end{cases}$$

olarak hesaplanır (Şekil 2.1). Buradan,

$$Q_1(0) = 42, \quad Q_1(5) = 12, \quad Q_1(7) = 4.5, \quad Q_1(9) = 6 \quad \text{ve} \quad Q_1(18) = 33$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15} \in [0,1] \quad \text{ve} \quad \lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + \lambda_{15} = 1$$

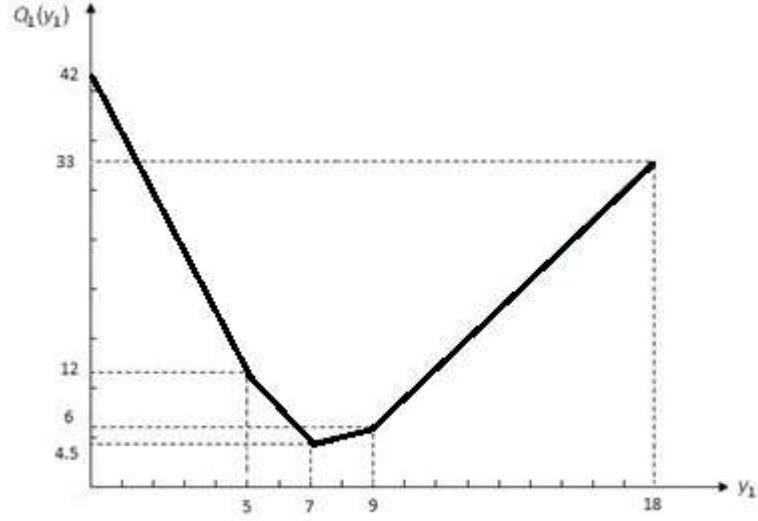
olmak üzere,

$$y_1 = 0\lambda_{11} + 5\lambda_{12} + 7\lambda_{13} + 9\lambda_{14} + 18\lambda_{15}$$

dönüşümü yapılırsa

$$Q_1(y_1) = 42\lambda_{11} + 12\lambda_{12} + 4.5\lambda_{13} + 6\lambda_{14} + 33\lambda_{15}$$

olur.



Şekil 2. 1 Birinci varış yeri için düzeltici fonksiyon (Örnek 2.7)

Benzer hesaplamalar diğer bölgeler içinde tekrarlanırsa, parçalı lineer düzeltici fonksiyonlar, sırasıyla:

$$Q_2(y_2) = 0.5[7(4 - y_2)^+ + 3(y_2 - 4)^+] + 0.5[7(8 - y_2)^+ + 3(y_2 - 8)^+]$$

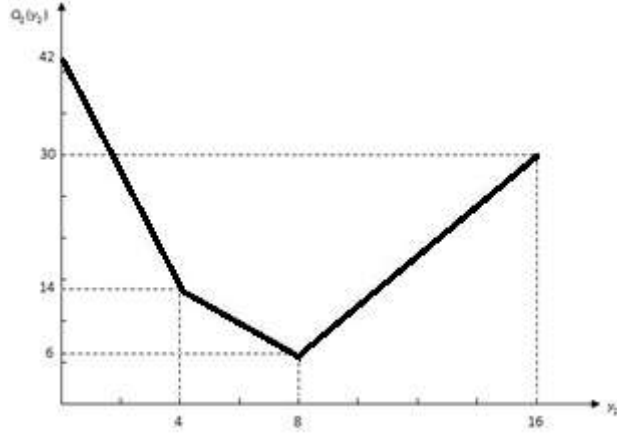
$$= \begin{cases} 42 - 7y_2, & 0 \leq y_2 < 4 \\ 22 - 2y_2, & 4 \leq y_2 < 8 \\ 3y_2 - 18, & 8 \leq y_2 \end{cases}$$

ve

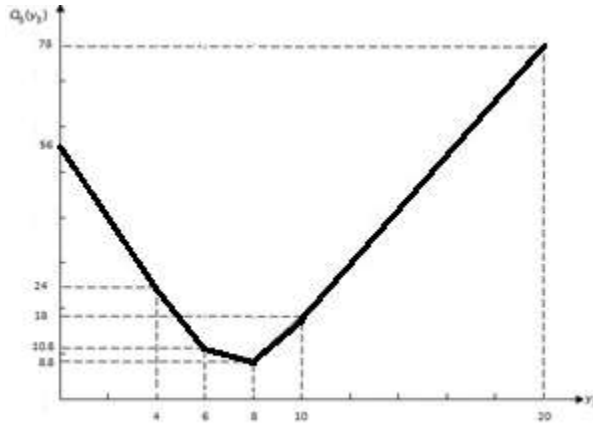
$$Q_3(y_3) = 0.1[8(4 - y_3)^+ + 6(y_3 - 4)^+] + 0.4[8(6 - y_3)^+ + 6(y_3 - 6)^+] \\ + 0.4[8(8 - y_3)^+ + 6(y_3 - 8)^+] + 0.1[8(10 - y_3)^+ + 6(y_3 - 10)^+]$$

$$= \begin{cases} 56 - 8y_3, & 0 \leq y_3 < 4 \\ 50.4 - 6.6y_3, & 4 \leq y_3 < 6 \\ 16.8 - y_3, & 6 \leq y_3 < 8 \\ 4.6y_3 - 28, & 8 \leq y_3 < 10 \\ 6y_3 - 42, & 10 \leq y_3 \end{cases}$$

olarak bulunur (Şekil 2.2 ve Şekil 2.3).



Şekil 2. 2 İkinci varış yeri için düzeltici fonksiyon (Örnek 2.7)



Şekil 2. 3 Üçüncü varış yeri için düzeltici fonksiyon (Örnek 2.7)

$$\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{24}, \lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}, \lambda_{34}, \lambda_{35}, \lambda_{36} \in [0,1], \sum_{k=1}^4 \lambda_{2k} = 1 \text{ ve } \sum_{k=1}^6 \lambda_{3k} = 1$$

olmak üzere,

$$y_2 = 0\lambda_{21} + 4\lambda_{22} + 8\lambda_{23} + 16\lambda_{24}$$

ve

$$y_3 = 0\lambda_{31} + 4\lambda_{32} + 6\lambda_{33} + 8\lambda_{34} + 10\lambda_{35} + 20\lambda_{36}$$

dönüşümleriyle elde edilen parçalı lineer düzeltici fonksiyonlar:

$$Q_2(y_2) = 42\lambda_{21} + 14\lambda_{22} + 6\lambda_{23} + 30\lambda_{24}$$

ve

$$Q_3(y_3) = 56\lambda_{31} + 24\lambda_{32} + 10.8\lambda_{33} + 8.8\lambda_{34} + 18\lambda_{35} + 78\lambda_{36}$$

olarak bulunur. Özetle, problemin modeli:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \left\{ \begin{aligned} & 3x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23} + 42\lambda_{11} + 12\lambda_{12} + 4.5\lambda_{13} + 6\lambda_{14} + 33\lambda_{15} \\ & + 42\lambda_{21} + 14\lambda_{22} + 6\lambda_{23} + 30\lambda_{24} + 56\lambda_{31} + 24\lambda_{32} + 10.8\lambda_{33} + 8.8\lambda_{34} + 18\lambda_{35} + 78\lambda_{36} \end{aligned} \right\} \\
 & x_{11} + x_{21} = 5\lambda_{12} + 7\lambda_{13} + 9\lambda_{14} + 18\lambda_{15} \\
 & x_{12} + x_{22} = 4\lambda_{22} + 8\lambda_{23} + 16\lambda_{24} \\
 & x_{13} + x_{23} = 4\lambda_{32} + 6\lambda_{33} + 8\lambda_{34} + 10\lambda_{35} + 20\lambda_{36} \\
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 10 \\
 & \lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + \lambda_{15} = 1 \\
 & \lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + \lambda_{24} = 1 \\
 & \lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{33} + \lambda_{34} + \lambda_{35} + \lambda_{36} = 1 \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3 \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned}$$

olarak alınır.

Problemin optimal çözümü simpleks yöntemle bulunursa, konveks kombinasyonlardaki pozitif çarpanlar:

$$\lambda_{13} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 1$$

şeklinde hesaplanır, diğer çarpanlar ise 0'dır. Buradan,

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$y_1^* = 7, Q_1(7) = 4.5,$$

$$y_2^* = 4, Q_2(4) = 14,$$

$$y_3^* = 6, Q_3(6) = 10.8$$

olurken optimal amaç fonksiyon değeri önceki ile aynı şekilde 96.3 bulunmuştur.

Örnek 2.8 (Szwarch [25]) Üç tedarikçiden dört müşteriye taşımanın yapıldığı bir durumda taşıma maliyetleri matrisi ve tedarikçi kapasiteleri sırasıyla:

$$c = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 24 & 25 \\ 19 & 23 & 16 & 18 \\ 21 & 22 & 19 & 15 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Müşteri talepleri, Çizelge 2.5’de verilen aralıklarda uniform dağılımlı olarak tüm reel değerleri alabilmektedir.

Çizelge 2. 5 Olasılık dağılımları (Örnek 2.8)

Müşteriler	$j=1$		$j=2$		$j=3$		$j=4$	
Durumlar	Aralık	Olasılık	Aralık	Olasılık	Aralık	Olasılık	Aralık	Olasılık
1	[4,6]	0.5	[3,5]	0.1	[6,8]	0.3	[4,6]	0.1
2	[6,8]	0.1	[5,7]	0.2	[8,10]	0.5	[6,8]	0.2
3	[8,10]	0.1	[7,9]	0.6	[10,12]	0.2	[8,10]	0.7
4	[10,12]	0.3	[9,11]	0.1	—	—	—	—

Tüm müşteri bölgeleri için birim elde bulundurma ve bulundurmama maliyetleri sırasıyla, 20 ve 40 para birimidir.

Amaç fonksiyonu (2.18)’teki gibi alınırsa, (2.16)’ya göre model:

$$\begin{aligned}
 \min z = & \left\{ \begin{aligned} & 15x_{11} + 18x_{12} + 24x_{13} + 25x_{14} + 19x_{21} + 23x_{22} + 16x_{23} + 18x_{24} \\ & + 21x_{31} + 22x_{32} + 19x_{33} + 15x_{34} + \sum_{j=1}^4 \left(60 \int_0^{y_j} F_j(t) dt - 40y_j \right) \end{aligned} \right\} \\
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 16 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 9 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 15 \\
 & x_{11} + x_{21} + x_{31} = y_1 \\
 & x_{12} + x_{22} + x_{32} = y_2 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{33} = y_3 \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} = y_4 \\
 & x_{ij}, y_j \geq 0 \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3,4
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

olur. Burada, $j=1,2,3,4$ için j . müşteri bölgesine yollanacak toplam mal miktarı olan y_j 'nin üst sınırı:

$$y_j \leq \sum_{i=1}^3 b_i = 16 + 9 + 15 = 40$$

dır.

Problemin ayrılabilir programlama ile çözülebilmesi için, öncelikle amaç fonksiyonunun nonlinear terimi olan

$$\int_0^{y_j} F_j(t) dt$$

integralleri düzenlenmelidir.

Birinci müşteri bölgesi için, Çizelge 2.5'den dağılım fonksiyonu:

$$F_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 4 \\ 0.25t - 1, & 4 \leq t < 6 \\ 0.05t + 0.2, & 6 \leq t < 8 \\ 0.05t + 0.2, & 8 \leq t < 10 \\ 0.15t - 0.8, & 10 \leq t < 12 \\ 1, & 12 \leq t \end{cases}$$

şeklinde parçalı lineer yapıdadır. Bu fonksiyonun integrali,

$$\int_0^{y_1} F_1(t) dt = \begin{cases} 0, & 0 \leq y_1 < 4 \\ 0.125y_1^2 - y_1 + 2, & 4 \leq y_1 < 6 \\ 0.025y_1^2 + 0.2y_1 - 1.6, & 6 \leq y_1 < 8 \\ 0.025y_1^2 + 0.2y_1 - 1.6, & 8 \leq y_1 < 10 \\ 0.075y_1^2 - 0.8y_1 + 3.4, & 10 \leq y_1 < 12 \\ y_1 - 7.4, & 12 \leq y_1 \leq 40 \end{cases}$$

fonksiyon eğrisinin altında kalan alan olarak parçalı yapıdadır. Bu fonksiyona iyi bir yaklaşım sağlamak için, $\lambda_{11}, \dots, \lambda_{16} \geq 0$ ve $\lambda_{11} + \dots + \lambda_{16} = 1$ olmak üzere,

$$y_1 = 4\lambda_{11} + 6\lambda_{12} + 8\lambda_{13} + 10\lambda_{14} + 12\lambda_{15} + 40\lambda_{16}$$

olarak alınırsa

$$\int_0^{y_1} F_1(t) dt = 0\lambda_{11} + 0.5\lambda_{12} + 1.6\lambda_{13} + 2.9\lambda_{14} + 4.6\lambda_{15} + 32.6\lambda_{16}$$

şeklinde bulunur.

Benzer hesaplamalar ikinci müşteri bölgesi için de yapılırsa, dağılım fonksiyonu:

$$F_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 0.05t - 0.15, & 3 \leq t < 5 \\ 0.1t - 0.4, & 5 \leq t < 7 \\ 0.3t - 1.8, & 7 \leq t < 9 \\ 0.05t + 0.45, & 9 \leq t < 11 \\ 1, & 11 \leq t \end{cases}$$

olurken, fonksiyonun integrali:

$$\int_0^{y_2} F_2(t) dt = \begin{cases} 0, & 0 \leq y_2 < 3 \\ 0.025y_2^2 - 0.15y_2 + 0.225, & 3 \leq y_2 < 5 \\ 0.05y_2^2 - 0.4y_2 + 0.85, & 5 \leq y_2 < 7 \\ 0.15y_2^2 - 1.8y_2 + 5.75, & 7 \leq y_2 < 9 \\ 0.025y_2^2 + 0.45y_2 - 4.375, & 9 \leq y_2 < 11 \\ y_2 - 7.4, & 11 \leq y_2 \leq 40 \end{cases}$$

olarak hesaplanır. $\lambda_{21}, \dots, \lambda_{26} \geq 0$ ve $\lambda_{21} + \dots + \lambda_{26} = 1$ olmak üzere,

$$y_2 = 3\lambda_{21} + 5\lambda_{22} + 7\lambda_{23} + 9\lambda_{24} + 11\lambda_{25} + 40\lambda_{26}$$

alınırsa

$$\int_0^{y_2} F_2(t) dt = 0\lambda_{21} + 0.1\lambda_{22} + 0.5\lambda_{23} + 1.7\lambda_{24} + 3.6\lambda_{25} + 32.6\lambda_{26}$$

şeklinde elde edilir.

Üçüncü müşteri bölgesi için dağılım fonksiyonu:

$$F_3(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 6 \\ 0.15t - 0.9, & 6 \leq t < 8 \\ 0.25t - 1.7, & 8 \leq t < 10 \\ 0.1t - 0.2, & 10 \leq t < 12 \\ 1, & 12 \leq t \end{cases}$$

ve integrali:

$$\int_0^{y_3} F_3(t) dt = \begin{cases} 0, & 0 \leq y_3 < 6 \\ 0.075y_3^2 - 0.9y_3 + 2.7, & 6 \leq y_3 < 8 \\ 0.125y_3^2 - 1.7y_3 + 5.9, & 8 \leq y_3 < 10 \\ 0.05y_3^2 - 0.2y_3 - 1.6, & 10 \leq y_3 < 12 \\ y_3 - 8.8, & 12 \leq y_3 \leq 40 \end{cases}$$

olarak hesaplanır. Buradan, $\lambda_{31}, \dots, \lambda_{35} \geq 0$ ve $\lambda_{31} + \dots + \lambda_{35} = 1$ olmak üzere,

$$y_3 = 6\lambda_{31} + 8\lambda_{32} + 10\lambda_{33} + 12\lambda_{34} + 40\lambda_{35}$$

alınırsa

$$\int_0^{y_3} F_3(t) dt = 0\lambda_{31} + 0.3\lambda_{32} + 1.4\lambda_{33} + 3.2\lambda_{34} + 31.2\lambda_{35}$$

bulunur.

Dördüncü müşteri bölgesi için dağılım fonksiyonu:

$$F_4(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 4 \\ 0.05t - 0.2, & 4 \leq t < 6 \\ 0.1t - 0.5, & 6 \leq t < 8 \\ 0.35t - 2.5, & 8 \leq t < 10 \\ 1, & 10 \leq t \end{cases}$$

ve integrali:

$$\int_0^{y_4} F_4(t) dt = \begin{cases} 0, & 0 \leq y_4 < 4 \\ 0.025y_4^2 - 0.2y_4 + 0.4, & 4 \leq y_4 < 6 \\ 0.05y_4^2 - 0.5y_4 + 1.3, & 6 \leq y_4 < 8 \\ 0.175y_4^2 - 2.5y_4 + 9.3, & 8 \leq y_4 < 10 \\ y_4 - 8.2, & 10 \leq y_4 \leq 40 \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Buradan, $\lambda_{41}, \dots, \lambda_{45} \geq 0$ ve $\lambda_{41} + \dots + \lambda_{45} = 1$ olmak üzere,

$$y_4 = 4\lambda_{41} + 6\lambda_{42} + 8\lambda_{43} + 10\lambda_{44} + 40\lambda_{45}$$

alınırsa

$$\int_0^{y_4} F_4(t) dt = y_4 = 0\lambda_{41} + 0.1\lambda_{42} + 0.5\lambda_{43} + 1.8\lambda_{44} + 31.8\lambda_{45}$$

olur.

$y_j, j=1,2,3,4$ değişkenlerine karşılık gelen yeni $\lambda_{\bullet}$ değişkenleri ve ilgili kısıtları (2.25) problemine eklenir ve lineer programlama problemlerini çözen bir paket programla problem çözülürse optimal çözüm:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^* = (6 \quad 7 \quad 8 \quad 8)$$

ve konveks kombinasyonlardaki pozitif çarpanlar:

$$\lambda_{12}^* = \lambda_{23}^* = \lambda_{32}^* = \lambda_{43}^* = 1,$$

diğer çarpanlar 0, amaç fonksiyon değeri ise -588 olarak bulunur. (2.18)'de atılan

$$\sum_{j=1}^n s_j E[d_j] = 40(7.4 + 7.4 + 8.8 + 8.2) = 1272$$

sabit terimi de eklenerek optimal (minimal) amaç fonksiyon değeri (toplam taşıma maliyeti ve toplam ceza maliyetinin beklenen değeri) 684 olur.

Ancak, burada parçalı nonlinear fonksiyonlara lineer yaklaşım sağlandığından elde edilen optimal sonucu alternatif olarak Frank-Wolfe algoritması ile de kontrol edelim. Frank-Wolfe algoritmasının örnek bir adımı (2.25) problemi için şöyle özetlenebilir:

Ayrılabilir programlama ile bulunan

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{y}_0 = (6 \quad 7 \quad 8 \quad 8)$$

optimal çözümü, Frank-Wolfe algoritmasının başlangıç çözümü olarak alınırsa, $F_1(6)=0.5$, $F_2(7)=0.3$, $F_3(8)=0.3$ ve $F_4(8)=0.3$ değerleriyle (2.24) ile verilen lineerleştirilmiş maliyetler:

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & -6 & -4 \\ 11 & 0 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

dir. $\hat{\mathbf{c}}$ 'nin bileşenleri arasında negatif modifiye edilmiş maliyetler olduğundan, yani aday ilerleme yönleri bulunduğundan mevcut $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ çözümü optimal değildir. Lineerleştirilmiş problemin optimal çözümü:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix},$$

ilerleme yönü

$$\hat{\mathbf{p}}_0 = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

yeni iterasyon noktası, adım boyu $\alpha \in [0,1]$ olarak,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 6-6\alpha & 7+9\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8+7\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 = (6-6\alpha \quad 7+9\alpha \quad 8+\alpha \quad 8+7\alpha)$$

ile algoritmanın 2. adımındaki α^* optimal adım boyunu bulma probleminde kullanılmak üzere hesaplanır. Örnekte, $0 \leq \alpha \leq 1$ olduğu için $0 \leq y_1 \leq 6$, $7 \leq y_2 \leq 16$, $8 \leq y_3 \leq 9$ ve $8 \leq y_4 \leq 15$ şeklindedir.

(2.25) probleminin amaç fonksiyonundaki nonlinear terim, parçalı yapıdaki

$$\int_0^{y_j} F_j(t) dt$$

integrallerinin toplamından oluşmaktadır. $0 \leq y_1 \leq 6$ ve $y_1 = 6 - 6\alpha$ olduğundan,

$$\int_0^{y_1} F_1(t) dt = \begin{cases} 0, & 0 \leq y_1 < 4, \quad (\frac{1}{3} < \alpha \leq 1) \\ 0.125y_1^2 - y_1 + 2, & 4 \leq y_1 \leq 6, \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}) \end{cases}$$

şeklinde y_1 'e karşılık iki α alt aralığı söz konusudur. Benzer bir analiz diğer integraller için de yapılırsa,

$$\int_0^{y_2} F_2(t)dt = \begin{cases} 0.15y_2^2 - 1.8y_2 + 5.75, & 7 \leq y_2 < 9, \quad (0 \leq \alpha < \frac{2}{9}) \\ 0.025y_2^2 + 0.45y_2 - 4.375, & 9 \leq y_2 < 11, \quad (\frac{2}{9} \leq \alpha < \frac{4}{9}) \\ y_2 - 7.4, & 11 \leq y_2 \leq 16, \quad (\frac{4}{9} \leq \alpha \leq 1) \end{cases}$$

$$\int_0^{y_3} F_3(t)dt = 0.125y_3^2 - 1.7y_3 + 5.9$$

ve

$$\int_0^{y_4} F_4(t)dt = \begin{cases} 0.175y_4^2 - 2.5y_4 + 9.3, & 8 \leq y_4 < 10, \quad (0 \leq \alpha < \frac{2}{7}) \\ y_4 - 8.2, & 10 \leq y_4 \leq 15, \quad (\frac{2}{7} \leq \alpha \leq 1) \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece, y_2 'ye karşılık üç, y_3 'e karşılık tek ve y_4 'e karşılık iki α alt aralığı mevcuttur. Bu durumda, α için beş farklı senaryo (adım boyunu bulma problemi) söz konusudur. Böylece, $[0,1]$ aralığı:

- Senaryo 1: $0 \leq \alpha < \frac{2}{9}$
- Senaryo 2: $\frac{2}{9} \leq \alpha < \frac{2}{7}$
- Senaryo 3: $\frac{2}{7} \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$
- Senaryo 4: $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{4}{9}$
- Senaryo 5: $\frac{4}{9} \leq \alpha \leq 1$

şeklinde beş alt aralığa ayrılmıştır.

Senaryo 1'e göre, $0 \leq \alpha < \frac{2}{9} \cong 0.222$ ise $4 \leq y_1 \leq 6$, $7 \leq y_2 \leq 9$, $8 \leq y_3 \leq 9$ ve $8 \leq y_4 \leq 10$

şeklinde olur ve buradan integrallerin toplamı:

$$(0.125y_1^2 - y_1 + 2) + (0.15y_2^2 - 1.8y_2 + 5.75) \\ + (0.125y_3^2 - 1.7y_3 + 5.9) + (0.175y_4^2 - 2.5y_4 + 9.3)$$

olarak hesaplanır.

Benzer şekilde, diğer senaryolara göre integrallerin toplamı, sırasıyla:

$$\text{Senaryo 2: } (0.125y_1^2 - y_1 + 2) + (0.025y_2^2 + 0.45y_2 - 4.375) \\ + (0.125y_3^2 - 1.7y_3 + 5.9) + (0.175y_4^2 - 2.5y_4 + 9.3)$$

$$\text{Senaryo 3: } (0.125y_1^2 - y_1 + 2) + (0.025y_2^2 + 0.45y_2 - 4.375) \\ + (0.125y_3^2 - 1.7y_3 + 5.9) + (y_4 - 8.2)$$

$$\text{Senaryo 4: } (0.025y_2^2 + 0.45y_2 - 4.375) + (0.125y_3^2 - 1.7y_3 + 5.9) + (y_4 - 8.2)$$

$$\text{Senaryo 5: } (y_2 - 7.4) + (0.125y_3^2 - 1.7y_3 + 5.9) + (y_4 - 8.2)$$

olarak elde edilir.

$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ çözümü (2.25) probleminde yerine yazılırsa, Senaryo 1, yani birinci alt aralık için adım boyunu bulma problemi:

$$\min_{\alpha \geq 0} z = \begin{cases} 15(6 - 6\alpha) + 18(7 + 9\alpha) + 16(8 + \alpha) + 15(8 + 7\alpha) + 60[(0.125y_1^2 - y_1 + 2) \\ + (0.15y_2^2 - 1.8y_2 + 5.75) + (0.125y_3^2 - 1.7y_3 + 5.9) + (0.175y_4^2 - 2.5y_4 + 9.3)] \\ - 40[y_1 + y_2 + y_3 + y_4] \end{cases}$$

$$y_1 = 6 - 6\alpha, \quad y_2 = 7 + 9\alpha, \quad y_3 = 8 + \alpha, \quad y_4 = 8 + 7\alpha,$$

$$\alpha \leq \frac{2}{9}$$

elde edilir. Bu problem α adım boyuna göre minimize edilirse $\alpha^* = 0.04$ ve

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 5.761 & 7.358 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.040 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.278 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 = (5.761 \quad 7.358 \quad 8.040 \quad 8.278)$$

şeklinde bulunur. Diğer senaryolar için çözümler Çizelge 2.6'da verilmiştir. Görüldüğü gibi, bu örnek için alt aralıklarda α^* değerleri arttıkça z^* ve dolayısıyla z'^* amaç değerleri de artmaktadır. Frank-Wolfe algoritmasının 2. adımına göre hesaplanan optimal adım boyu $\alpha^* = 0.04$ olarak senaryolar içinde z'^* amacını minimum yapan Senaryo 1'deki, yani birinci alt aralıktaki bir noktadaki değerdir.

Çizelge 2. 6 Örnek 2.8'de alt aralıklara karşılık oluşturulan adım boyu problemlerinin optimal çözümleri

Senaryo 1	$\alpha^* = 0.040$	$z^* = -590.406$	$z'^* = 681.594$
Senaryo 2	$\alpha^* = 0.222$	$z^* = -539.778$	$z'^* = 732.222$
Senaryo 3	$\alpha^* = 0.286$	$z^* = -500.857$	$z'^* = 771.143$
Senaryo 4	$\alpha^* = 0.333$	$z^* = -468.000$	$z'^* = 804.000$
Senaryo 5	$\alpha^* = 0.444$	$z^* = -387.630$	$z'^* = 884.370$

2.2.4.6 Çapraz Ayrışım Algoritması

Çapraz ayrışım algoritması (Holmberg ve Jörnsten [19]) Benders ayrışım algoritmasıyla ve Lagrange rahatlatmasını birlikte kullanır. STP'nin Benders ayrışım algoritmasıyla çözebilmesi için kurulan ana problemin çözümü zor olduğundan ana problemde Lagrange rahatlatması yapılır. Algoritma aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Öncelikle (2.16) probleminde $j=1, \dots, n$ için $y_j = \bar{y}_j$ şeklinde sabit alınır. Bu işlem sonucu elde edilen klasik taşıma probleminin bu başlangıç çözümünün uygun olması için

$$\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i$$

şartı sağlanmalıdır.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \bar{y}_j$$

kısıtına karşılık gelen dual değişken α_j ve

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i$$

kısıtına karşılık gelen dual değişken β_i olmak üzere, Benders ayrışım algoritmasının ana problemine eklenecek kesenlerin oluşturulmasında dual değişkenlerin optimal değerleri kullanılır. Ancak, (2.17)'den

$$\min \left[\sum_{j=1}^n Q_j(y_j) + \max \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j^* y_j - \sum_{i=1}^m \beta_i^* b_i \right] \right]$$

şeklinde yazılan ana problemin çözümü oldukça zor olduğundan Benders ayrışım algoritmasının ana problemi yerine, Lagrange rahatlatılması yapılmış, daha basit çözülebilen problem alınır.

$y_j = \bar{y}_j$ şeklinde sabit alınarak elde edilen klasik taşıma probleminin çözümünden hesaplanabilen dual değişkenler

$$\alpha_j = \bar{\alpha}_j$$

şeklinde sabit alınarak (2.16) probleminin

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = y_j$$

kısıtlarında yapılan Lagrange rahatlatması sonucu problem:

$$\begin{aligned} \min & \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n Q_j(y_j) + \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} - y_j \right) \right] \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Bu rahatlatma, problemi x_{ij} ve y_j değişkenlerine göre çözümü kolay, iki ayrı alt probleme ayrıştırır. Alt problemler:

$$\left. \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} + \bar{\alpha}_j) x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i \\ x_{ij} \geq 0 \quad \forall j \end{array} \right\} i = 1, \dots, m \quad (2.26)$$

ve

$$\left. \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n (Q_j(y_j) - \bar{\alpha}_j y_j) \\ \sum_{j=1}^n y_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \\ y_j \geq 0 \quad \forall j \end{array} \right\} \quad (2.27)$$

şeklindedir.

Esas STP için, Lagrange rahatlatması sonucunda elde edilen problemin amaç değeri ((2.26) ve (2.27) problemlerinin amaç değerlerinin toplamı) bir alt sınırdır, problemin herhangi bir uygun çözümü ise üst sınırdır. Her bir iterasyonda alt sınır gittikçe artarken, üst sınır azalır. Alt sınır ile üst sınır arasındaki fark istenen bir değerden küçük olduğunda optimal değer bulunmuş olur. Üst sınırı belirlemek üzere başlangıçta alınan uygun çözümün iyi seçilmesi, algoritmanın adım sayısını azaltır.

$\hat{c}_{ij} = c_{ij} + \bar{\alpha}_j$ ve $\hat{c}_{ii} = \min_j \hat{c}_{ij}$ olmak üzere, (2.26) probleminin optimal çözümü:

$$x_{ij}^* = \begin{cases} b_i, & j = I \text{ ve } \hat{c}_{ii} < 0 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklindedir.

α_j dual değişkenlerinin başlangıç değerleri:

$$\alpha_j^{(0)} = -\min_i c_{ij}$$

şeklinde her bölgeye ulaşmak için en ucuz fiyatı kullanarak belirlenmektedir.

(2.27) probleminin çözümünde ise sadece $\sum_{j=1}^n y_j \leq \sum_{i=1}^m b_i$ kısıtında Lagrange rahatlatması

yapılır, rahatlatma sonucu problem:

$$\max_{\delta \geq 0} \left\{ \min_{y \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^n (Q_j(y_j) - \bar{\alpha}_j y_j) - \delta \left(\sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m b_i \right) \right\} \right\}$$

şeklini alır. Bir an için δ 'nın sabit olduğu düşünülürse, içteki minimizasyon problemi tek değişkenli amaç fonksiyonuna sahip n tane alt probleme ayrılır. Amaç fonksiyonunun (2.22)'den y_j 'ye göre kısmi türevi

$$\frac{\partial Q_j(y_j)}{\partial y_j} - \bar{\alpha}_j - \bar{\delta} = -s_j + (h_j + s_j)F_j(y_j) - \bar{\alpha}_j - \bar{\delta}$$

0'a eşitlenerek, minimum noktasında

$$y_j^* = F^{-1}\left(\frac{s_j + \bar{\alpha}_j + \bar{\delta}}{h_j + s_j}\right)$$

olmalıdır. Burada, olasılık değeri

$$0 \leq \frac{s_j + \bar{\alpha}_j + \bar{\delta}}{h_j + s_j} \leq 1$$

şeklinde olması gerektiğinden,

$$-s_j \leq \bar{\alpha}_j + \bar{\delta} \leq h_j$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. $0 \leq \delta \leq h_j - \bar{\alpha}_j$ kapalı aralığından seçilecek δ^* değeri, ikiye bölme yöntemi ile bulunabilir. Ancak, bazı durumlarda algoritmanın adım sayısını kısaltmak için ikiye bölme yöntemini kullanmak yerine problem, yaklaşık olarak çözülmelidir. Burada, $\delta^* = 0$ çıkması

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq \sum_{i=1}^m b_i$$

kısıtının ihlal edilmesine yol açabilir. Bu gibi bir durumda, δ^* yerine kısıtı ihlal etmeyecek yaklaşık bir değer kullanılmalıdır.

iterasyon sayacı $k := k + 1$ olmak üzere, (2.26) ve (2.27) problemleri çözüldükten sonra sırasıyla elde edilen

$$\mathbf{x}^{(k)} \text{ ve } \mathbf{y}^{(k)}$$

çözümleri için optimallik ve yakınsaklık testi yapılır. Özellikle, $\mathbf{y}^{(k)}$ çözümünün daha iyi bir çözüme ulaştırıp ulaştırmayacağı test edilir.

Örnek 2.9 Örnek 2.8'e dönülürse, başlangıç çözümü:

$$\mathbf{y}_0 = (6 \quad 7 \quad 8 \quad 8)$$

şeklinde sabit alınır ve elde edilen taşıma problemi çözülürse,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur ve simpleks çarpanlar:

$$\alpha_1^{(0)} = -15, \alpha_2^{(0)} = -18, \alpha_3^{(0)} = -16, \alpha_4^{(0)} = -15, \\ \beta_1^{(0)} = \beta_2^{(0)} = \beta_3^{(0)} = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda, (2.26) probleminin optimal çözümü:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. (2.27) probleminde, $\delta = 0$ seçilirse;

$$y_j^* = F^{-1}\left(\frac{s_j + \bar{\alpha}_j + \bar{\delta}}{h_j + s_j}\right)$$

formülünden,

$$y_1 = 5.\bar{6}, y_2 = 7.\bar{2}, y_3 = 8.4 \text{ ve } y_4 = 8.\bar{3} \text{ olarak hesaplanır. Buradan,}$$

$$\sum_{j=1}^4 y_j = 29.\bar{12} \leq \sum_{i=1}^3 b_i = 40$$

olarak, kısıtın ihlal edilmediği görülür. δ değeri daha büyük alınırsa amaç değeri artar.

Virgülden sonra üç basamak duyarlılıkla,

$$\mathbf{y}_1 = (5.667 \quad 7.222 \quad 8.400 \quad 8.333)$$

şeklinde alındığında taşıma probleminin optimal çözümü:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 5.667 & 7.222 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.333 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Taşıma probleminin optimal çözümünden simpleks çarpanlar:

$$\alpha_1^{(1)} = -15, \alpha_2^{(1)} = -18, \alpha_3^{(1)} = -16, \alpha_4^{(1)} = -15, \\ \beta_1^{(1)} = \beta_2^{(1)} = \beta_3^{(1)} = 0$$

olarak değişmez. O halde, elde edilen çözüm optimaldir. Gerçekten de, (2.24)'den lineerleştirilmiş maliyetler:

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 10 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

olduğundan, Frank-Wolfe algoritmasına göre ilerleme yönü bulunamadığından ve (2.23) ile verilen KKT şartları da sağlandığından çözüm optimaldir. Ayrıca, -591.640 (ötelenmiş değeriyle 680.360) olarak hesaplanan amaç fonksiyon değeri, diğer yöntemler (ayrılabilir programlama ve Frank-Wolfe algoritmasının bir adım uygulanması) ile bulunan değerlerden daha iyidir.

İKİ SEVİYELİ PROGRAMLAMA

İki seviyeli programlama problemleri lider ve takipçi denilen, muhtemelen çelişen iki amaç fonksiyonuna sahip iki özerk karar verici arasındaki hiyerarşik ilişkiyi modeller. Karar değişkenleri kümesi ayrık $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerine ayrıştırılmıştır. İlk seviyedeki karar verici, yani lider, $\mathbf{x}$ vektörüne ait karar değişkenlerini kontrol ederken, ikinci seviyedeki karar verici, yani takipçi, $\mathbf{y}$ vektörüne ait karar değişkenlerini kontrol eder. Öncelikle liderin karar verdiği ve bundan sonra takipçinin liderin stratejisine bağlı olarak kendi kararını aldığı, yani en rasyonel tepkiyi verdiği varsayılır.

$\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in Y \subseteq \mathbb{R}^r$, $F, f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$, $G: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{s'}$ ve $g: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ olmak üzere, iki seviyeli programlama problemi:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \quad & F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \end{array} \right. \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde modellenebilir.

Görüldüğü gibi, iki seviyeli programlama problemleri kısıtlarında ikinci bir optimizasyon problemi olan bir optimizasyon problemidir.

İki seviyeli programlama ile ilgili temel tanımlar şu şekilde özetlenebilir:

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}, g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}\}$$

kümesine rahatlatılmış uygun bölge denir. İkinci seviye problemin uygun çözümler kümesi, sabit bir $\bar{\mathbf{x}}$ vektörü için;

$$S(\bar{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{y} : g(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}\}$$

ile gösterilir. İkinci seviyenin optimal çözüm kümesi

$$R(\bar{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \operatorname{argmin}\{f(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) : \hat{\mathbf{y}} \in S(\bar{\mathbf{x}})\}\}$$

şeklindedir. Bu kümeye rasyonel reaksiyon kümesi (rational reaction set) denir. Yine verilen bir $\mathbf{x}$ için,

$$IR = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{y} \in R(\mathbf{x})\}$$

kümesine indirgenmiş bölge (induced region) adı verilir. Bu küme genellikle konveks değildir, hatta bağlantısız ya da boş küme olabilir.

En basit yapıdaki ve en çok üzerinde çalışılan iki seviyeli programlama problemi, amaç fonksiyonlarının ve kısıtların lineer olduğu lineer iki seviyeli programlama problemidir (Colson vd. [29]).

3.1 İki Seviyeli Programlama için Çözüm Yöntemleri

Literatürde iki seviyeli programlama problemleri için birçok çözüm yöntemi vardır.

3.1.1 K. En İyi Algoritması

Bu algoritma Bialas ve Karwan tarafından [66]'da lineer iki seviyeli programlama problemi için önerilmiştir. Öncelikle, sınırlı olduğu kabul edilen Ω rahatlatılmış uygun bölgesi üzerinde ilk seviye problem simpleks yöntemle çözülür. Optimal çözüm Ω 'nın bir uç noktasında ortaya çıkar. Çözüm bölgesinin tüm uç noktaları taranarak ilk seviyenin amaç değerine (minimizasyon problemine) göre küçükten büyüğe bütün uç noktalar sıralanır. Bu sıralı uygun taban çözümler;

$$(\hat{\mathbf{x}}_{[1]}, \hat{\mathbf{y}}_{[1]}), (\hat{\mathbf{x}}_{[2]}, \hat{\mathbf{y}}_{[2]}), \dots, (\hat{\mathbf{x}}_{[N]}, \hat{\mathbf{y}}_{[N]}) \in \Omega$$

ile gösterilsin. Burada en iyi çözüm $(\hat{\mathbf{x}}_{[1]}, \hat{\mathbf{y}}_{[1]})$, ikinci en iyi çözüm $(\hat{\mathbf{x}}_{[2]}, \hat{\mathbf{y}}_{[2]})$, vb şekilde sıralanmıştır. Amaç,

$$K^* = \min \left\{ i \mid i \in \{1, \dots, N\}, (\hat{\mathbf{x}}_{[i]}, \hat{\mathbf{y}}_{[i]}) \in \Omega \right\}$$

olacak şekildeki minimal indeksi bulmaktır. Böylece, $(\hat{\mathbf{x}}_{[K^*]}, \hat{\mathbf{y}}_{[K^*]})$ global optimal çözüm olacaktır.

İlk seviye karar değişkenleri $\mathbf{x}$ ve ikinci seviye karar değişkenleri $\mathbf{y}$ olmak üzere,

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{[1]}$$

şeklinde sabit alınarak ikinci seviye problem çözülür. Eğer problemin çözümünden

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}_{[1]}$$

olarak bulunursa algoritma sonlanır, $(\hat{\mathbf{x}}_{[1]}, \hat{\mathbf{y}}_{[1]})$ çözümü optimaldir. Değilse bu uç noktadan bir sonraki sırada en iyi çözümü veren komşu uç noktaya geçilerek, yani

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{[2]}$$

sabit alınarak ve bu şekilde devam edilerek K^* inci adımdaki en iyi çözümü veren uç noktada global optimal çözüm bulunur.

3.1.2 Dal-Sınır Tekniği

İki seviyeli programlama problemleri için çözüm yöntemlerinin çoğu,

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \end{cases}$$

ikinci seviye probleminin yerine, $\boldsymbol{\mu}$ Lagrange çarpanları vektörü olmak üzere,

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\mu}^T \nabla_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ \mu_i g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, & i = 1, \dots, s \\ \mu_i \geq 0, & i = 1, \dots, s \end{cases}$$

KKT optimallik şartlarıyla yer değiştirilmesine dayanır. Böylelikle, tüm değişkenlerin ($\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ 'nin) kontrolü kendisinde olan liderin problemi çözülürken takipçinin probleminin de optimal olması sağlanır. Böylece, (3.1) probleminin eşdeğer tek seviyeli formülasyonu:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\mu}^T \nabla_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ \mu_i g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad i = 1, \dots, s \\ \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, s \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

yapısında olur.

KKT optimallik şartları, ikinci seviye problem için gerek şartlardır. Eğer, ikinci seviye problem, herhangi bir sabit $\mathbf{x}$ için, $\mathbf{y}$ 'ye göre konveks optimizasyon problemi ise bu şartlar aynı zamanda yeter şartlardır. Böylece, ikinci seviye problem için herhangi bir yerel minimum, aynı zamanda global minimum olacaktır. Ancak, (3.2)'deki eşdeğer tek seviyeli problemin çözümü zordur, çünkü bu problem

$$\mu_i g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad i = 1, \dots, s \quad (3.3)$$

nonlinear tamamlayıcı kısıtlarını içermektedir. Dal-Sınır algoritmasında, öncelikle tamamlayıcı kısıtlar problemden çıkartılır ve elde edilen rahatlatılmış problem çözülür. Algoritmanın her iterasyonunda problemin çözümünün (3.3) kısıtlarını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

Dal-sınır yönteminin temelinde yatan kavramlar dallandırma ve budamadır. Dallandırma uygun çözümler kümesini gittikçe küçülen altkümelere bölme işlemidir. Budama ise mevcut altkümedeki en iyi çözüm için bir sınır bulma ve bu sınır bilgisiyle esas problemin çözümünün bulunamayacağını anlaşılmamasıyla mevcut altkümenin elimine edilmesi işlemidir. Böylelikle, bir çözüm için önce uygunluk, sonra optimallik kontrol edilmektedir (Ahlatçioğlu ve Tiryaki [67], Sayfa 87).

Rahatlatılmış problemin çözümünün en az bir tamamlayıcı kısıtı sağlamadığı varsayılırsa rahatlatılmış probleme

$$\mu_i = 0 \text{ ve } g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

kısıtları ayrı ayrı eklenir ve böylece rahatlatılmış problem, iki alt probleme dallandırılır. Bu alt problemlerin optimal değerleri karşılık gelen dal için alt sınır üretir. Burada adım sayısını azaltmak için i ,

$$|\mu_i g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$$

en büyük olacak şekilde seçilir.

Tüm tamamlayıcı kısıtlar sağlanana kadar ya da uygun olmayan bir çözüm elde edilene kadar dallanma işlemine devam edilir. Tüm tamamlayıcı kısıtları sağlayan uygun çözüm, aday çözüm olarak etiketlenir. Aday çözümler probleme üst sınır verir. Daha iyi bir üst sınır bulunduğu anda üst sınır güncellenir. Aday çözümler arasından en iyi çözüm global optimumdur (minimumdur).

Algoritma verilmeden önce bazı ek notasyonlar verilmelidir. Tamamlayıcı kısıtlar için indis kümesi $W = \{1, \dots, s\}$ ve liderin amaç fonksiyonu için o ana kadar bulunup kaydedilen en iyi üst sınır (incumbent upper bound) $\bar{F}$ ile gösterilsin. Dal-sınır ağacının k . seviyedeki indis altkümesi $W_k \subseteq W$ olsun. Ayrıca,

$$S_k^+ = \{i : i \in W_k, \mu_i = 0\}$$

$$S_k^- = \{i : i \in W_k, g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$$

$$S_k^0 = \{i : i \notin W_k\}$$

olarak tanımlansın.

Dal-sınır algoritması:

Adım 0. (Başlangıç) $k=0$, $S_k^+ = S_k^- = \emptyset$, $S_k^0 = W$ ve $\bar{F} = \infty$ al.

Adım 1. (k. iterasyon) $i \in S_k^+$ için $\mu_i = 0$ ve $i \in S_k^-$ için $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ olarak al. (3.2) problemini (3.3) kısıtları olmadan çöz. Elde edilen çözüm uygun değilse Adım 5'e git. Aksi halde, çözümü $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$ olarak etiketle ve $k := k + 1$ al.

Bu adım, potansiyel uygun çözümü bulmak için uygulanır.

Adım 2. (Budama (Fathoming)) Eğer $F(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) \geq \bar{F}$ ise Adım 5'e git.

Adım 3. (Dallandırma (Branching)) Eğer $\forall i \in W$ için $\mu_i^k g_i(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) = 0$ ise Adım 4'e git.

Aksi halde, $i_1 = \arg \max_i |\mu_i^k g_i(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)|$, $S_k^+ := S_k^+ \cup \{i_1\}$ ve $S_k^0 := S_k^0 - \{i_1\}$ al ve Adım 1'e git.

Bu adımda tamamlayıcı kısıtların sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Dallanma ilk önce Lagrange çarpanı üzerinden yapılır. Tamamlayıcı kısıtlar sağlanmadığında en büyük çarpıma sahip tamamlayıcı kısıt dallanan değişken olarak kullanılır.

Adım 4. (Güncelleme) $\bar{F} = F(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$ al.

Bu adım, iki seviyeli problem için uygun bir çözüm bulunduğunu gösterir ve liderin amaç fonksiyonu için elde edilen üst sınır güncellenir.

Adım 5. (Geline yoldan geri dönme (Backtracking)) Canlı düğüm kalmazsa Adım 6'ya git. Aksi halde, en yeni canlı düğüme geç, S_k^+ , S_k^- ve S_k^0 kümelerini güncelle ve Adım 1'e git.

Adım 2'de daha iyi bir çözüm bulunamazsa bu adıma geçilir.

Adım 6. (Çıkış) $\bar{F} = \infty$ ise (3.1) probleminin uygun çözümü yoktur. Aksi halde, $\bar{F}$ ile ilişkili çözüm optimal çözümdür (Bard ve Moore [68]).

3.1.3 En Hızlı Düşüş Metodu

İki seviyeli programlama probleminde ikinci seviye karar, birinci seviye karar $\mathbf{x}$ 'in bir fonksiyonu olarak $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Dolayısıyla, (3.1) problemi sadece $\mathbf{x}$ cinsinden ifade edilebilir.

Diğer yönlerle oranla, gradyent yönünde ilerlemek amaç fonksiyonunda en büyük artışa yol açar. Böylece, amaç fonksiyonunun minimumunu bulmak için negatif gradyent yönü iyi bir arama yönüdür. Bu algoritma ile uygun bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ noktasından başlayarak, iki seviyeli problemin uygunluğu sürdürülürken, birinci seviyenin amaç fonksiyonunda makul bir azalmayı garantilemek üzere uygun bir $\mathbf{d}_x \in \mathbb{R}^p$ yönü bulunmaya çalışılır. Bu nedenle, amaç fonksiyonunda iyi bir azalma sağlayan adım boyu $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere uygun bölgede yeni bir $\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}_x$ noktasına atlanır. Burada esas sorun, bu uygun noktada üst seviye amacın $\nabla_x F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}))$ gradyentini elde edebilmektir. Uygunluk korunacak şekilde $\mathbf{y}^*(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}_x)$ hesaplaması yapılır. Öncelikle zincir kuralının uygulanmasıyla, birinci seviye amaç fonksiyonunun gradyenti;

$$\nabla_x F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = \nabla_x F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_y F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_x \mathbf{y}(\mathbf{x})$$

şeklinde hesaplanır.

Bu algoritma üst seviye kısıtlarının bulunmadığı iki seviyeli bir problemde yerel minimumu bulmak için önerilmiştir. Bu problemde alt seviyeye ait eşitsizlik ve eşitlik kısıtlar,

$$g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \quad i \in I \quad \text{ve} \quad g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad i \in J$$

sırasıyla I ve J indis kümeleriyle gösterilmiştir.

$\mathbf{d}_y(\mathbf{x}^*, \mathbf{d}_x)$ yönlü türev olmak üzere, optimal $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\mathbf{x}^*))$ çözümü için;

$$\nabla_x F(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\mathbf{x}^*)) \mathbf{d}_x + \nabla_y F(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\mathbf{x}^*)) \mathbf{d}_y(\mathbf{x}^*, \mathbf{d}_x) \geq 0$$

ilişkisi geçerlidir. Yerel minimum elde edildikten sonra amaç fonksiyonunda azalma sağlayacak başka bir uygun yön bulunamaz ve algoritma sonlanır. $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y)$ en hızlı düşüş yönünü bulmak için,

$$\min_{\mathbf{d}_x} \left\{ \nabla_x F(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \mathbf{d}_x + \nabla_y F(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \mathbf{d}_y(\mathbf{x}, \mathbf{d}_x) \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{d}_x\| \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

problemi çözülür.

Burada $\mathbf{d}_y(\mathbf{x}, \mathbf{d}_x)$,

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{d}_y} (\mathbf{d}_x^T, \mathbf{d}_y^T) \nabla_{xy}^2 L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y) \\
& \nabla_y g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \mathbf{d}_y \leq -\nabla_x g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \mathbf{d}_x, \quad i \in I(\mathbf{x}) = \{i \in I : g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = 0\} \\
& \nabla_y g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \mathbf{d}_y = -\nabla_x g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \mathbf{d}_x, \quad j \in J \\
& \nabla_y f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \mathbf{d}_y = -\nabla_x f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \mathbf{d}_x + \nabla_x L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{d}_x
\end{aligned}$$

probleminin çözümünden elde edilir. $I(\mathbf{x})$ kümesi ise aktif, yani bağlayıcı eşitsizlik kısıtlarının kümesidir. Bu problemin kısıtları sağlandığında $\mathbf{d}=(\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y)$ yönü uygun bir yöndür, yani ilerlenebilir yönler kümesindendir.

Ayrıca, $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ ikinci seviyenin aktif kısıtlara göre Lagrange fonksiyonudur ve

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i \in I(\mathbf{x}) \cup J} \mu_i g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) .$$

(3.4) probleminin amaç fonksiyonu pozitif olduğunda yerel minimum elde edilmiş demektir. Aksi halde, α adım uzunluğu

$$F(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}_x, \mathbf{y}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}_x)) \leq F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}))$$

olacak şekilde hesaplanır, yeni bir noktaya atlanır ve uygun bir yön bulmak üzere işlemler tekrarlanır (Colson vd. [29]).

3.1.4 Ceza Fonksiyonu Yaklaşımı

Ceza fonksiyonları lineer olmayan optimizasyonda yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak, bu yöntem yerel minimum elde etmekle sınırlıdır (Colson vd. [29]).

$$\left. \begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} f(\mathbf{x}) \\
& g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

şeklindeki bir nonlinear programlama problemi, $M > 0$ çok büyük bir sayı olmak üzere, bir ceza fonksiyonu örneğin

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_i (\max\{0, g_i(\mathbf{x})\})^2 + \sum_j (h_j(\mathbf{x}))^2$$

aracılığıyla

$$\min\{f(\mathbf{x}) + M\alpha(\mathbf{x})\}$$

yapısında bir kısıtsız probleme indirgenebilir. (3.5)'in kısıtları sağlanmadığında $\alpha(\mathbf{x}) > 0$ olması nedeniyle büyük bir ceza değeri oluşur, $M \rightarrow \infty$ iken (3.5) probleminin optimal çözümü ile kısıtsız problemin çözümü birbirine yaklaşır.

$\alpha(\mathbf{x})$ ceza fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlamalıdır;

1. $\alpha(\mathbf{x})$ sürekli fonksiyondur.
2. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ için $\alpha(\mathbf{x}) \geq 0$ 'dır.
3. $\alpha(\mathbf{x}) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{x}$ 'in (3.5) probleminin uygun çözümü, yani $g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) \leq 0, h_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, h_n(\mathbf{x}) = 0$ olmasıdır.

Ceza fonksiyonu uygun kümenin dışındaki noktalara cezalar atamaktadır, dolayısıyla problemin kısıtları cinsinden tanımlanmaktadır. Ceza fonksiyonu doğru seçildiğinde esas probleme iyi bir yaklaşım sağlanır (Chong ve Żak [1]).

Ceza fonksiyonu yaklaşımı iki seviyeli problemlere uygulanırsa

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, M) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + M\alpha(g(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

dönüşümüyle (3.1) problemi:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*(\mathbf{x}, M)) \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*(\mathbf{x}, M)) \leq 0 \\ p(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*(\mathbf{x}, M), M) = \min_{\mathbf{y}} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, M) \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde yazılır. Her adımda $\mathbf{x}$ birinci seviye karar değişkenleri güncellenir ve böylece (3.6) probleminin optimal çözümü olan

$$\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^*(\mathbf{x}^k, M^k))\}$$

dizisi (3.1) probleminin optimal çözümüne yakınsar. Bu yöntemin ana eksikliği, sabit bir M değeri için birinci seviye karar değişkenlerinin her güncellenmesinde (3.6) probleminin global çözümünü bulmayı gerektirmesidir. Alt problemlerin çözümü

orijinal iki seviyeli (3.1) probleminin çözümü kadar zordur. Bu durumda (3.6) probleminin tek seviyeli eşdeğeri:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \quad & F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{s.t.} \quad & G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \\ & g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \\ & \nabla_{\mathbf{y}} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, M) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

alınır. Dikkat edilirse (3.6)'nın ikinci seviyedeki ceza fonksiyonunu içeren

$$\min_{\mathbf{y}} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, M)$$

probleminin yerine, onun birinci merteye optimallik koşulu:

$$\nabla_{\mathbf{y}} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, M) = \mathbf{0}$$

alınmıştır. $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0$ kısıtının da probleme eklenmesi $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, M)$ fonksiyonunun tanım kümesini kısıtlamaktadır. (3.7) problemi ikinci kez uygulanacak ceza yaklaşımı ile çözülür (Ishizuka ve Aiyoshi [69], Colson vd. [29]).

3.2 Denge Kısıtlı Matematik Programlama

İki seviyeli programlama sahasında temel gelişmeler incelendiğinde bu konuyla bağlantılı olarak bir başka önemli sınıfı, yani DKMP problemlerini görmekteyiz. Esasen, bu iki sınıf arasındaki ilişkiler öylesine kuvvetlidir ki bazı yazarlar her iki sınıf için de aynı terminolojiyi kullandığından bu durum bazen karmaşaya yol açmaktadır (Colson vd. [29]).

DKMP problemi, kısıtlarında bazı parametrik varyasyonel eşitsizlikler içeren bir kısıtlı optimizasyon problemidir. Diğer bir deyişle, kısıtlarında başka bir programlama probleminin birinci mertebeden optimallik koşullarını barındıran nonlinear programlama problemine DKMP problemi adı verilir. Bu problem iki seviyeli programlama probleminin bir genelleştirilmesi olarak da görülebilir ve Stackelberg oyunu ile de yakından ilişkilidir.

DKMP problemleri mühendislikte dizayn, ekonomik denge, çok seviyeli oyun ve matematik programlama gibi birçok alanda önemli rol oynamaktadır. Ancak, geometrik

olarak bakıldığında, problemin uygun bölgesi konveks olmadığından ve genellikle bağlantısız olduğundan bu problemlerin çözümü oldukça zordur. Bu nedenle, nonlinear programlama teorisi direkt olarak bu problemlere uygulanamayabilir. Doğal ve popüler birçok yaklaşım, bir dizi adi nonlinear programlama problemlerini çözerek, DKMP problemine uygun bir şekilde yaklaşmaya çalışmaktadır. (Fukushima ve Lin [70]).

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $C: \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ şeklindeki fonksiyonlar, $(F(\mathbf{x},.), C(\mathbf{x}))$ ikilisiyle tanımlı

$$VE(F(\mathbf{x},.), C(\mathbf{x})) \quad (3.8)$$

varyasyonel eşitsizlik problemi ve $\mathbf{y}$ de (3.8)'in çözümü olmak üzere, DKMP problemi:

$$\left. \begin{array}{l} \min f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{x} \in X \\ \mathbf{y}, \{ VE(F(\mathbf{x},.), C(\mathbf{x})) \text{ probleminin çözümüdür.} \} \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse, örneğin $C(\mathbf{x})$ fonksiyonu verilen bir $\mathbf{x}$ noktası için

$$C(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}\} \quad (3.10)$$

veya

$$C(\mathbf{x}) \equiv \mathbb{R}_+^m$$

şeklinde alınırsa noktayı kümeye eşleyen (point-to-set) bir fonksiyon olur.

Teorem 3.1 $\mathbf{y} \in C(\mathbf{x})$ noktasının diferansiyellenebilir $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fonksiyonunun yerel minimumu olması için gerek koşul: $\forall \mathbf{v} \in C(\mathbf{x})$ için

$$(\mathbf{v} - \mathbf{y})^T \nabla_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$$

olmasıdır.

İspat: Herhangi iki değişkenli bir $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fonksiyonunda, $\mathbf{x}$ noktası veriliyorsa fonksiyon sadece $\mathbf{y}$ 'ye bağlıdır.

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \cong g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{v} - \mathbf{y})^T \nabla_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

açılımından, aksini kabul ederek, yani

$$(\mathbf{v} - \mathbf{y})^T \nabla_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0$$

olarak

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olur ki bu da $\mathbf{y} \in C(\mathbf{x})$ noktasının $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fonksiyonunun yerel minimumu olması ile çelişir.

Sonuç 3.1 Diferansiyellenebilir $c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fonksiyonu için $\nabla_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ alınırsa, $\mathbf{y}$ 'nin

$$\left. \begin{array}{l} \min g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

probleminin çözümü olabilmesi için gerek ve yeter şart: $\mathbf{y} \in C(\mathbf{x})$ ve $\forall \mathbf{v} \in C(\mathbf{x})$ için

$$(\mathbf{v} - \mathbf{y})^T F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad (\text{varyasyonel eşitsizlik})$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 3.2 $C(\mathbf{x})$ fonksiyonu (3.10)'daki gibi alınırsa (3.8) varyasyonel eşitsizlik problemi, (3.11) probleminin KKT şartlarıyla eşdeğer olur ve böylece, (3.9) problemine karşılık kurulan tek seviyeli eşdeğer problem, λ Lagrange çarpanları vektörü olmak üzere,

$$\left. \begin{array}{l} \min f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{x} \in X \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \lambda = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \\ \lambda^T c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

olur.

3.2.1 Çözüm Yöntemleri

Literatürde DKMP problemlerini çözmek üzere, rahatlatma yaklaşımı, ceza fonksiyonu yaklaşımı, aktif küme belirleme yaklaşımı, ardışık kuadratik programlama yaklaşımı, iç nokta yaklaşımı gibi birçok yöntem önerilmiştir [70].

DKMP problemlerini çözmedeki esas güçlük problemin tamamlayıcı kısıtlarındadır. Bu kısıtları rahatlatmak veya düzgünleştirmek için bazı parametreleri probleme katmak gerekir.

(3.2) veya (3.12) probleminin tamamlayıcı kısıtlarıyla baş edebilmek için, bu kısıtlar *nonlinear tamamlayıcı problem (nonlinear complementarity problem) fonksiyonları* adı verilen düzgün (smooth), yani her mertebeden türevleri mevcut fonksiyonlar vasıtasıyla düzgünleştirilir.

Düzgün fonksiyona bir örnek olarak, $\varepsilon(>0)$ küçük bir sapma (perturbation) parametresine bağlı olarak tanımlanmış

$$\phi_{\varepsilon}(a,b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\varepsilon^2}$$

Fischer-Burmeister fonksiyonu verilebilir. Burada, $\phi_{\varepsilon}(a,b) = 0$ olması için gerek ve yeter şartlar:

$$a > 0, b > 0 \text{ ve } ab = \varepsilon^2$$

olmasıdır. (3.2) probleminin

$$\mu_i g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad i = 1, \dots, s$$

tamamlayıcı kısıtları yerine, Fischer-Burmeister fonksiyonu kullanılarak

$$\phi_{\varepsilon}(\mu_i, -g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0, \quad i = 1, \dots, s$$

kısıtları alınırsa, yani

$$\mu_i \geq 0, -g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, -\mu_i g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varepsilon^2 \quad i = 1, \dots, s$$

olursa $\varepsilon \rightarrow 0$ iken (3.2) probleminin tamamlayıcı kısıtları sağlanmış olur. Bu yaklaşıma rahatlatma yaklaşımı denir.

Nonlinear tamamlayıcı problem fonksiyonlar sınıfına ait örnek bir başka düzgün fonksiyon:

$$\phi_{\min}(a,b) = [\min(a,b)]^2$$

fonksiyonudur. Farklı bir yaklaşım ile (3.3) tamamlayıcı kısıtlarının sağlanması için,

$$\min \phi_{\min}(\mu_i, -g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

problemi çözülebilir. Bu problemin optimal amaç fonksiyon değeri 0 olduğunda esas problem de çözülmüş olur (Lin vd. [71]). Nonlinear tamamlayıcı problem fonksiyonlarına literatürden diğer bazı örnekler:

$$\phi(a, b) = [\max(ab, 0)]^2 + [\max(-b, 0)]^2,$$

$$\phi(a, b, \varepsilon) = b - \varepsilon \ln(1 + e^{(b-a)/\varepsilon}) \text{ (Sinir ağları düzgünleştirme fonksiyonu),}$$

$$\phi(a, b, \varepsilon) = \begin{cases} a - \frac{1}{2\varepsilon}(a - b + \frac{\varepsilon}{2})^2, & |a - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \min(a, b), & \text{aksi halde} \end{cases} \text{ (Uniform düzgünleştirme fonksiyonu),}$$

$$\phi(a, b, \varepsilon) = \begin{cases} a - \frac{\varepsilon}{2} e^{(a-b)/\varepsilon}, & a \leq b \\ b - \frac{\varepsilon}{2} e^{(b-a)/\varepsilon}, & \text{aksi halde} \end{cases} \text{ (Picard düzgünleştirme fonksiyonu)}$$

şeklindedir [71], [72].

Düzgünleştirme metotlarının ana özelliği düzgün olmayan (diferansiyellenemeyen) problemlere bir dizi parametrelenmiş düzgün (sürekli diferansiyellenebilir) problemler ile yaklaşmak ve düzgün bir yol izleyerek çözümlere ulaşmaktır. Kullanılan algoritmalar ve yakınsaklık analizleri ile ilgili bilgiler Chen tarafından [72]'de verilmiştir.

1999'dan bu yana, DKMP'nin daha ileri uygulamaları olarak stokastik yapıdaki DK SMP araştırmacıların ilgisini çekmektedir. DK SMP problemleri bir sonraki bölümde ayrıntılı açıklanacaktır.

DENGİ KISITLI STOKASTİK MATEMATİK PROGRAMLAMA

Literatürde, *Stokastik İki Seviyeli Matematik Programlama Problemi* ve *Tamamlayıcı Kısıtlı Stokastik Matematik Programlama Problemi* gibi isimler de alan DKSMP problemi, DKMP probleminin stokastik uzantısıdır.

$X \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω olasılık uzayı ve $f: \mathbb{R}^{n+m} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^{n+m} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $C: \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ şeklindeki fonksiyonlar olmak üzere, DKSMP problemi:

$$\left. \begin{array}{l} \min E_{\omega}[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)] \\ \mathbf{x} \in X \\ \omega \in \Omega \\ \mathbf{y}, \{ \forall \mathbf{e} (F(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \omega), C(\mathbf{x}, \omega)) \text{ probleminin çözümüdür.} \} \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu problem ilk defa 1999'da Patriksson ve Wynter tarafından [10] ile ortaya atılmıştır. Lin vd. [73] *alt seviye bekle de gör* modeli ve *hemen şimdi* modeli olarak adlandırılan iki tür DKSMP formülasyonunu önermiştir.

4.1 Alt Seviye Bekle de Gör Formülasyonu

Alt seviye bekle de gör modelinde, önce ilk seviye kararları $\mathbf{x}$ alınır, sonra rassal olay ω gözlemlenir ve daha sonra ikinci seviye kararları $\mathbf{y}$ alınır. Kararlar ve rassal olayların dizilişi:

$$\mathbf{x} \rightarrow \xi(\omega) \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x}, \omega)$$

şeklinde özetlenebilir.

Modelin elde edilmesini açıklamak üzere, (4.1) probleminde

$$C(\mathbf{x}, \omega) = \mathbb{R}_+^m = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{y}(\omega) \geq \mathbf{0}\}$$

şeklinde alındığını varsayarak; ikinci seviyedeki problemin KKT şartlarını (4.1) problemine ekleyelim. Varyasyonel eşitsizlik problemi yerine onun daha açık bir formunu yazarak, (4.1) problemine eşdeğer olan

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega)} E_{\omega} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega)] \\ \mathbf{x} \in X \\ \omega \in \Omega \\ \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) \\ \mathbf{y}(\omega) \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

problemi elde edilir. İkinci seviyedeki varyasyonel eşitsizlik problemi için Lagrange fonksiyonu;

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega, \boldsymbol{\mu}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}(\omega)$$

olarak alınırsa, KKT şartları

$$\nabla_{\mathbf{y}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega, \boldsymbol{\mu}) = \nabla_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \nabla_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) \geq \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}(\omega) = \mathbf{y}(\omega)^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{y}(\omega)^T F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) = \mathbf{0}$$

şeklinde bulunur. O halde, (4.1) ya da eşdeğer (4.2)'nin *alt seviye bekle de gör* modeli:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega)} E_{\omega} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega)] \\ \mathbf{x} \in X \\ \omega \in \Omega \\ \mathbf{y}(\omega) \geq \mathbf{0} \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(\omega)^T F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

olur.

Ancak, (4.1) probleminde $C(\mathbf{x}, \omega) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \leq \mathbf{0}\}$ şeklinde alındığı varsayılırsa, $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}, \omega)$ Lagrange çarpanları vektörü olmak üzere; (4.1)'e eşdeğer

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega)} E_{\omega} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega)] \\ \mathbf{x} \in X \\ \omega \in \Omega \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) + \nabla_{\mathbf{y}} c(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}, \omega) \geq \mathbf{0} \\ c(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) \leq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}, \omega)^T c(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\omega), \omega) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

problemi elde edilir (Lin vd. [73]).

Bu modelde de birinci seviye karar değişkeni vektörü $\mathbf{x}$ ve ikinci seviye karar değişkeni vektörü $\mathbf{y}(\omega)$ 'dır.

4.2 Hemen Şimdi Formülasyonu

Hemen şimdi modeline göre tüm kararlar (birinci seviye ve ikinci seviye) rassal olay gerçekleşmeden alınır. Dolayısıyla birinci ve ikinci seviye kararları $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$, ω rassal olayına bağlı değildir. Kararlar ve rassal olayların dizilişi:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\xi}(\omega) \rightarrow \mathbf{z}(\omega)$$

olarak özetlenebilir. *Hemen şimdi* modeli:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} E_{\omega} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + \mathbf{d}^T \mathbf{z}(\omega)] \\ \mathbf{x} \in X \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + \mathbf{z}(\omega) \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^T [F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + \mathbf{z}(\omega)] = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}(\omega) \geq \mathbf{0} \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{z}(\omega)$, düzeltici değişkenler; $\mathbf{d}$, ceza ağırlıklarını içeren, bileşenleri sabit ve pozitif olan vektördür.

4.3 Örnekler

Örnek 4.1 (Lin vd. [73]) Bir yemek şirketi soğuk sandviç paketleri hazırlamakta, bir sokak satıcısı da bu yemek şirketinden Pazar günleri yürüyüşçülere satmak üzere sandviç satın almaktadır. Şirket ile satıcı arasındaki anlaşma şu şekildedir:

1. Satıcı şirketin belirlediği $x \in [a, b]$ fiyatından şirketten paketleri satın almaktadır.
2. Satıcı satın alacağı y paket miktarını kendisi belirler, bu miktar belirli bir $c > 0$ değerinin üstünde olmalıdır ($y \geq c$).
3. Satıcının şirkete ödemesi xy kadardır.
4. Satıcı sandviçleri iki katı fiyatıyla yürüyüşçülere satmaktadır. Satılan her sandviç üzerinden elde edilen kâr x kadardır.
5. Satılmayan sandviçler iade edilemez. Satıcı satamadığı sandviçleri çöpe atar.

Yürüyüşçülerin sandviçlere olan talebi, hem sandviç fiyatına hem de o günkü hava koşullarına bağlıdır. Havanın nasıl olacağı ise rassal olaydır. $\omega \in \Omega$, $D(\omega) \geq 0$ ve $d(\omega) \geq 0$ rassal değişkenler olmak üzere, fiyata ve hava koşullarına bağlı lineer talep fonksiyonu:

$$\phi(x, \omega) = D(\omega) - d(\omega)x$$

şeklindedir.

Pazar günü satılan sandviç sayısı da o günkü hava durumuna bağlı olarak $\min\{y, \phi(x, \omega)\}$ ile hesaplanır. Şirketin ve satıcının amaçları, sırasıyla, toplam kârlarını

$$\max_x \{xy\}$$

$$\max_y \{2x \min\{y, \phi(x, \omega)\} - xy\}$$

şeklinde maksimize etmektir.

$\min\{y, \phi(x, \omega)\} = t$ olmak üzere, satıcının problemi

$$\begin{aligned} \max_{y,t} \{ & x(2t - y) \} \\ & y \geq c \\ & y - t \geq 0 \\ & D(\omega) - d(\omega)x - t \geq 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

u, v ve w Lagrange çarpanları olmak üzere, satıcının probleminin Lagrange fonksiyonu:

$$L(y, t, u, v, w) = xy - 2tx + u(c - y) + v(t - y) + w(t - D(\omega) + d(\omega)x)$$

şeklinde yazıldığında problemin KKT şartları:

$$\begin{aligned} u, v, w &\geq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x - u - v = 0 \Rightarrow u = x - v \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -2x + v + w = 0 \Rightarrow w = 2x - v \\ u(c - y) &= 0, \quad v(t - y) = 0, \quad w(t - D(\omega) + d(\omega)x) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $w = 2x - v = x + u > a > 0$ olduğundan $t = D(\omega) - d(\omega)x$ olmalıdır. Bu bilgiden yararlanarak KKT şartları yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} x - v &\geq 0 \\ y - c &\geq 0 \\ v &\geq 0 \\ (x - v)(c - y) &= 0 \\ v(D(\omega) - d(\omega)x - y) &= 0 \\ y - D(\omega) + d(\omega)x &\geq 0 \end{aligned}$$

şekline gelir. Böylece, şirketin problemi:

$$\begin{aligned} \max_x \{ & xy \} \\ & a \leq x \leq b \\ & x - v \geq 0 \\ & y - c \geq 0 \\ & v \geq 0 \\ & (x - v)(c - y) = 0 \\ & v(D(\omega) - d(\omega)x - y) = 0 \\ & y - D(\omega) + d(\omega)x \geq 0 \end{aligned}$$

olarak verilebilir.

Alt seviye bekle de gör modelinde, şirketin Cumartesi günü, hava koşullarının ertesi gün nasıl olacağını bilmeden, satıcının ise Pazar sabahı hava koşullarını bilerek kararlarını aldığı farz edilmektedir. Satıcının kararı, $y = y(\omega)$ şeklinde ω rassal olayına bağlıdır.

Şirketin problemi:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \{xy(\omega)\} \\ & a \leq x \leq b \\ & \omega \in \Omega \\ & x - v(\omega) \geq 0 \\ & y(\omega) - c \geq 0 \\ & v(\omega) \geq 0 \\ & (x - v(\omega))(c - y(\omega)) = 0 \\ & v(\omega)(D(\omega) - d(\omega)x - y(\omega)) = 0 \\ & y(\omega) - D(\omega) + d(\omega)x \geq 0 \end{aligned}$$

olur.

Hemen şimdi modelinde ise, hem şirket hem de satıcı Pazar günü havanın nasıl olacağını bilmeden, Cumartesi günü kararlarını almaktadır. Bu durumda, $z(\omega)$ düzeltici değişkenler, $\beta > 0$ sabit bir sayı olmak üzere, şirketin problemi:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \{xy - \beta E_\omega[z(\omega)]\} \\ & a \leq x \leq b \\ & \omega \in \Omega \\ & z(\omega) \geq 0 \\ & x - v \geq 0 \\ & y - c \geq 0 \\ & v \geq 0 \\ & (x - v)(c - y) = 0 \\ & v(D(\omega) - d(\omega)x - y - z(\omega)) = 0 \\ & y - D(\omega) + d(\omega)x + z(\omega) \geq 0 \end{aligned}$$

olur. Düzeltici duruma örnek olarak, talep beklenenden çok olur ve satıcının elindeki sandviçler erkenden biterse satıcı yerel bir marketten, daha yüksek bir fiyattan sandviç alabilir.

Hangi formülasyonun uygun olacağı duruma göre değişir, yani ikinci seviyedeki karar vericinin kararını rassal olay gerçekleşmeden ya da gerçekleştikten sonra alıyor olmasına göre sırasıyla, *hemen şimdi* ya da *alt seviye bekle de gör* modeli kullanılır.

Örnek 4.2 (Shapiro ve Xu [74]) (4.3)'teki gibi verilmiş *alt seviye bekle de gör* modeli:

$$\min E[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + y_1(x, \xi)^2 + y_2(x, \xi)^2]$$

$$x_1, x_2 \in [0, 2]$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1, \xi_2 \sim \mathcal{U}[0, 1]$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$y_1 - x_1 + \xi_1 \geq 0$$

$$y_2 - x_2 + \xi_2 \geq 0$$

$$y_1(y_1 - x_1 + \xi_1) = 0$$

$$y_2(y_2 - x_2 + \xi_2) = 0$$

şeklinde olsun. İkinci seviye problemin çözümü:

$$y_1 = \begin{cases} x_1 - \xi_1, & x_1 \geq \xi_1 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \text{ve} \quad y_2 = \begin{cases} x_2 - \xi_2, & x_2 \geq \xi_2 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olarak tek türdür. Böylece, amaç fonksiyonu:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \int_0^{x_1} (x_1 - \xi_1)^2 d\xi_1 + \int_0^{x_2} (x_2 - \xi_2)^2 d\xi_2 \\ &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_2^3}{3} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Amaç fonksiyonunun kısmi türevlerinin 0'a eşitlenmesinden,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) + x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^* = \sqrt{3} - 1 \in [0, 2]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1) + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2^* = \sqrt{3} - 1 \in [0, 2]$$

çözümü elde edilir. Bu aday çözüm için, Hessian matris:

$$\partial^2 f(x_1^*, x_2^*) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

şeklinde pozitif definit olduğundan minimum çözümdür.

İKİ SEVİYELİ STOKASTİK TAŞIMA PROBLEMLERİ

Bu bölümde, tek çeşit bir ürün için bazı parametrelerin rassal değişken olduğu kabul edilerek stokastik taşımaların yapıldığı, hiyerarşik ilişkideki karar vericilerin bulunduğu modeller, yani iki seviyeli stokastik taşıma problemleri göz önüne alınmış ve bu problemlerin üç farklı tipi için çözüm önerisi yapılmıştır. Bildiğimiz kadarıyla, önereceğimiz stokastik taşıma modellerinin iki seviyeli yapıları, tezden üretilmiş yayınlar dışında, literatürde ilktir ve dolayısıyla tez çalışmamızın orijinal kısmıdır. Önerdiğimiz ilk modelde, müşteri talepleri kesikli rassal değişkenler, ikinci modelde müşteri talepleri sürekli rassal değişkenler ve üçüncü modelde ise çabuk bozulan (perishable) bir ürünün yaşam süresi stokastik değişken olarak kabul edilmiştir.

5.1 İki Seviyeli Kesikli Stokastik Taşıma Problemi

İki seviyeli kesikli stokastik taşıma problemini tanımlamadan önce, yapılan kabulleri verelim.

5.1.1 Kabuller

(i) Fabrikaların kümesi, ayrık L_1 ve L_2 kümelerinin birleşimidir. Burada, L_1 lider tarafından yönetilen fabrikaların kümesi iken, L_2 takipçi tarafından yönetilen fabrikaların kümesidir.

(ii) Müşteri talepleri belli olmadan hem lider hem de takipçi karar vermelidir (*hemen şimdi* modeli). Önce lider, ardından takipçi müşterilere yollayacağı miktarları belirler. Varış yerlerinde elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetleri söz konusudur.

Elde bulundurma maliyeti, müşteriye gönderilen mal miktarı, gerçek müşteri talebinden fazla olduğunda üstlenilen ceza; benzer şekilde, elde bulundurmama maliyeti, müşteriye gönderilen mal miktarı, gerçek müşteri talebinden az olduğunda üstlenilen ceza olarak görülebilir. Elde bulundurmama maliyeti yerel bir pazardan telafi etmenin veya yapılan ilave yüklemelerin maliyeti olarak da düşünülebilir.

(iii) Müşterilerin kümesi, ayrık M_1 ve M_2 kümelerinin birleşimidir. Burada M_1 , liderin sorumlu olduğu, yani toplam elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetlerini üstlendiği varış yerlerinin kümesidir. Benzer şekilde M_2 , takipçinin sorumlu olduğu, yani toplam elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetlerini üstlendiği varış yerlerinin kümesidir. Ayrıca, lider ve takipçi tüm müşteri taleplerini karşılamak üzere anlaşmıştır.

(iv) Lider, $i \in L_1$ olacak şekildeki x_{ij} değişkenlerini; takipçi ise $i \in L_2$ olacak şekildeki x_{ij} değişkenlerini kontrol etmektedir.

(v) Müşteri talepleri bilinen kesikli dağılımlara sahip rassal değişkenlerdir.

$k=1, \dots, k_j$, $p_{jk} \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{k_j} p_{jk} = 1$ olmak üzere, j müşterisinin talebinin d_{jk} olma olasılığı p_{jk} 'dir. Ayrıca, j müşterisinin talebinin beklenen değeri:

$$E[d_j] = \sum_{k=1}^{k_j} p_{jk} d_{jk} \quad (5.1)$$

ile hesaplanır.

(vi) Hiyerarşi seviyelerindeki karar vericilerin (birinci seviye için lider, ikinci seviye için takipçi) amaçları, herbir seviyede kendilerine ait toplam taşıma maliyetleri ile toplam ceza maliyetlerinin beklenen değerlerinin toplamını minimize etmektir.

5.1.2 Problemin Formülasyonu

Bu kabullerden yola çıkılarak modellenen iki seviyeli kesikli stokastik taşıma modeli:

$$\begin{aligned}
 (P1) \min_{\mathbf{x}_1} & \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_1} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_1} \left(h_j E[y_j - d_j]^+ + s_j E[d_j - y_j]^+ \right) \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_1 \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i \in L_1, j = 1, \dots, n \\
 (P2) & \left\{ \begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}_2} \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_2} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_2} \left(h_j E[y_j - d_j]^+ + s_j E[d_j - y_j]^+ \right) \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_2 \\
 & \sum_{i=1}^m x_{ij} = y_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad i \in L_2, j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \right. \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

şeklinde. Bu problem, kesikli stokastik taşıma probleminin iki seviyeli versiyonudur. İkinci seviyenin amaç fonksiyonunun lineer olması ve uygun çözümler bölgesinin lineer kısıtlarla belirlenmesi dolayısıyla ikinci seviye problem, konveks programlama problemidir. İkinci seviye probleminin konveksliği, iki seviyeli problemi KKT şartlarından faydalananak yeniden formüle etmemize imkân sağlar.

Bu problemin amaç fonksiyonlarını daha açık bir şekilde yazabilmek için, η_{jk}^- , j müşterisinin kesikli d_{jk} talebinin üzerinde gönderilen miktarı ve η_{jk}^+ , j müşterisinin kesikli d_{jk} talebinin altında gönderilen miktarı olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned}
 y_j - \eta_{jk}^- + \eta_{jk}^+ &= d_{jk} \\
 \eta_{jk}^- \eta_{jk}^+ &= 0 \\
 \eta_{jk}^-, \eta_{jk}^+ &\geq 0
 \end{aligned} \right\} \quad j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, k_j \quad (5.3)$$

kısıtlarını (5.2)'ye ekleyerek,

$$\begin{aligned}
(P1) \quad & \min \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_1} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_1} \left(h_j \sum_{k=1}^{k_j} (P\{d_j \geq d_{jk}\} \eta_{jk}^-) + s_j \sum_{k=1}^{k_j} (P\{d_j \leq d_{jk}\} \eta_{jk}^+) \right) \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_1 \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i \in L_1, j = 1, \dots, n \\
& \eta_{jk}^- \eta_{jk}^+ = 0, \quad \eta_{jk}^-, \eta_{jk}^+ \geq 0, \quad j \in M_1, k = 1, \dots, k_j \\
(P2) \quad & \min \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_2} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_2} \left(h_j \sum_{k=1}^{k_j} (P\{d_j \geq d_{jk}\} \eta_{jk}^-) + s_j \sum_{k=1}^{k_j} (P\{d_j \leq d_{jk}\} \eta_{jk}^+) \right) \quad (5.4) \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_2 \\
& x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, i \in L_2 \\
& \sum_{i=1}^m x_{ij} - \eta_{jk}^- + \eta_{jk}^+ = d_{jk}, \quad j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, k_j \\
& \eta_{jk}^- \eta_{jk}^+ = 0, \quad \eta_{jk}^-, \eta_{jk}^+ \geq 0, \quad j \in M_2, k = 1, \dots, k_j
\end{aligned}$$

(5.2) probleminin eşdeğerini elde ederiz. Teorem 2.1'den η_{jk}^- ve η_{jk}^+ değişkenleri aynı anda tabanda olamaz. Dolayısıyla, $\eta_{jk}^- \eta_{jk}^+ = 0$ kısıtları gereksizdir, atılabilir.

$u_i, v_{jk}, \omega_{ij}, \mu_{jk}^-$ ve μ_{jk}^+ Lagrange çarpanları olmak üzere, (5.4)'teki (P2) problemi için yarı-pozitif definit Hessian matrisine sahip kuadratik, dolayısıyla konveks Lagrange fonksiyonu:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{\omega}, \mathbf{\mu}, \mathbf{\eta}) = & \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_2} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_2} \left(h_j \sum_{k=1}^{k_j} (P\{d_j \geq d_{jk}\} \eta_{jk}^-) + s_j \sum_{k=1}^{k_j} (P\{d_j \leq d_{jk}\} \eta_{jk}^+) \right) \\
& + \sum_{i \in L_2} u_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - b_i \right) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_j} \left(v_{jk} \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} - \eta_{jk}^- + \eta_{jk}^+ - d_{jk} \right) \right) \quad (5.5) \\
& - \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_2} \omega_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in M_2} \sum_{k=1}^{k_j} (\mu_{jk}^- \eta_{jk}^- + \mu_{jk}^+ \eta_{jk}^+)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İkinci seviye problemin KKT optimallik şartları ise,

$$\begin{aligned}
& u_i, \omega_{ij} \geq 0, \quad i \in L_2, j=1, \dots, n, \quad \mu_{jk}^-, \mu_{jk}^+ \geq 0, \quad j \in M_2, k=1, \dots, k_j, \\
& \frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = c_{ij} + u_i + \sum_{k=1}^{k_j} v_{jk} - \omega_{ij} = 0, \quad i \in L_2, j=1, \dots, n, \\
& \left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \eta_{jk}^-} &= h_j P\{d_j \geq d_{jk}\} - v_{jk} - \mu_{jk}^- = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \eta_{jk}^+} &= s_j P\{d_j \leq d_{jk}\} + v_{jk} - \mu_{jk}^+ = 0, \end{aligned} \right\} \quad j \in M_2, k=1, \dots, k_j, \\
& u_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - b_i \right) = 0, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_2, \\
& \omega_{ij} x_{ij} = 0, \quad i \in L_2, j=1, \dots, n, \\
& \left. \begin{aligned} \mu_{jk}^- \eta_{jk}^- &= 0, \\ \mu_{jk}^+ \eta_{jk}^+ &= 0, \end{aligned} \right\} \quad j \in M_2, k=1, \dots, k_j, \\
& \sum_{i=1}^m x_{ij} - \eta_{jk}^- + \eta_{jk}^+ = d_{jk}, \quad j=1, \dots, n, k=1, \dots, k_j, \\
& x_{ij} \geq 0, \quad j=1, \dots, n, i \in L_2, \\
& \eta_{jk}^-, \eta_{jk}^+ \geq 0, \quad j \in M_2, k=1, \dots, k_j,
\end{aligned}$$

olur. KKT şartlarındaki ω_{ij} , μ_{jk}^- ve μ_{jk}^+ değişkenlerini elimine ederek, (5.4)'e eşdeğer:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_1} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_1} \left(h_j \sum_{k=1}^{k_j} (P\{d_j \geq d_{jk}\} \eta_{jk}^-) + s_j \sum_{k=1}^{k_j} (P\{d_j \leq d_{jk}\} \eta_{jk}^+) \right) \\
& u_i \geq 0, \quad i \in L_2 \\
& c_{ij} + u_i + \sum_{k=1}^{k_j} v_{jk} \geq 0, \quad i \in L_2, j=1, \dots, n \\
& h_j P\{d_j \geq d_{jk}\} - v_{jk} \geq 0, \quad j \in M_2, k=1, \dots, k_j \\
& s_j P\{d_j \leq d_{jk}\} + v_{jk} \geq 0, \quad j \in M_2, k=1, \dots, k_j \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i=1, \dots, m \\
& \sum_{i=1}^m x_{ij} - \eta_{jk}^- + \eta_{jk}^+ = d_{jk}, \quad j=1, \dots, n, k=1, \dots, k_j \quad (5.6) \\
& x_{ij}, \eta_{jk}^-, \eta_{jk}^+ \geq 0, \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, n, k=1, \dots, k_j \\
& \left. \begin{aligned} u_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - b_i \right) &= 0, \\ x_{ij} (c_{ij} + u_i + \sum_{k=1}^{k_j} v_{jk}) &= 0, \\ \eta_{jk}^- (h_j P\{d_j \geq d_{jk}\} - v_{jk}) &= 0, \\ \eta_{jk}^+ (s_j P\{d_j \leq d_{jk}\} + v_{jk}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} i &\in L_2 \\ i &\in L_2, j=1, \dots, n \\ j &\in M_2, k=1, \dots, k_j \\ j &\in M_2, k=1, \dots, k_j \end{aligned} \quad \text{Tamamlayıcı kısıtlar}
\end{aligned}$$

tek seviyeli problemini elde ederiz. Eşdeğer problemin tamamlayıcı kısıtlarıyla baş edebilmek için literatürdeki etkin bir yöntemi, örneğin Bölüm 3'te verilen Dal-Sınır algoritmasını, kullanabiliriz. Algoritmada elde edilen alt problemler lineer programlama problemleridir ve mevcut herhangi bir paket program ile çözülebilir.

Örnek 5.1'de, Örnek 2.6'da STP için verilen Filo ataması örneğini iki seviyeli STP yapısına bazı kabullerle uyarlayarak tekrar ele alacağız.

Örnek 5.1 Örnek 2.6'daki STP'de rotalarda yolcu başına gelirler sırasıyla 130, 130, 70, 70 ve 10 p.b.; 100 yolcu başına ve 1000 p.b. ölçekleri kullanılarak birim ceza maliyetleri ($r_j, j=1,\dots,5$) sırasıyla 13, 13, 7, 7 ve 1 p.b. idi. Basitlik açısından, iki seviyeli STP için hem lider hem de takipçi havayollarına ait rotalardaki yolcu başına gelirlerin ve birim ceza maliyetlerinin aynı değerlerle fiyatlandırıldığını kabul edelim.

Uçak tipleri $i=1,\dots,4$ ve rotalar $j=1,\dots,5$ olmak üzere, öncelikle birinci seviyedeki lider havayolu, sırasıyla $b_1^1=5, b_2^1=10, b_3^1=13$ ve $b_4^1=8$ tane mevcut uçak tiplerinden rotalara aylık kaçar tane atayacağını, yani

$$x_{ij}^1$$

duyursun. Ardından ikinci seviyedeki takipçi havayolu, liderin kararını göz önüne alarak, sırasıyla $b_1^2=5, b_2^2=9, b_3^2=12$ ve $b_4^2=7$ tane mevcut uçak tiplerinden rotalara aylık kaçar tane atayacağını, yani

$$x_{ij}^2$$

bildirsin. Böylece, liderin ve takipçinin j rotasına atadığı yolcu kapasiteleri, sırasıyla:

$$z_j^1 = \sum_{i=1}^4 t_{ij} x_{ij}^1$$

ve

$$z_j^2 = \sum_{i=1}^4 t_{ij} x_{ij}^2$$

olur ve j rotasına atanan toplam yolcu kapasitesini ise

$$z_j = z_j^1 + z_j^2$$

olarak hesaplarız. Hem lider hem de takipçi havayolu yolcu talepleri belirli olmadan kararını almalıdır (*hemen şimdi* modeli).

Lider konumundaki havayolu şirketi, uçakları dolu olmadığı sürece yolcuların kendisini tercih edeceğini düşünecek, takipçi konumundaki havayolu ise lider havayolunun uçaklarında yer bulamayan yolculara sahip olacak, her iki havayolunun da uçaklarında kapasite yoksa yolcular şirketlerce kaybedilecektir.

$j=1, \dots, 5$ rotasına olan talep d_j olmak üzere, takipçinin problemi:

$$\begin{aligned} \min_{x_{ij}^2 \geq 0} \quad & \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^{k_j} r_j \max \{0, d_j - z_j\} \\ & \left. \begin{aligned} z_j &= z_j^1 + z_j^2 \\ z_j^2 &= \sum_{i=1}^4 t_{ij} x_{ij}^2 \end{aligned} \right\} \quad j=1, \dots, 5 \\ & \sum_{j=1}^5 x_{ij}^2 \leq b_i^2 \quad i=1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklindedir. Burada takipçinin kararı x_{ij}^2 , hem liderin kararına (x_{ij}^1 'e) hem de rassal müşteri talebinin (d_j 'nin) nasıl gerçekleşeceğine bağlıdır.

Öncelikle, birinci rotayı ($j=1$) göz önüne alırsak, takipçinin kaybedeceği yolcu sayısının beklenen değerini:

$$E[(d_1 - z_1)^+] = \begin{cases} 252.5 - 1.00z_1, & 0 \leq z_1 \leq 200 \\ 212.5 - 0.80z_1, & 200 \leq z_1 \leq 220 \\ 201.5 - 0.75z_1, & 220 \leq z_1 \leq 250 \\ 114.0 - 0.40z_1, & 250 \leq z_1 \leq 270 \\ 60.0 - 0.20z_1, & 270 \leq z_1 \leq 300 \end{cases}$$

olarak hesaplarız. Ayrılabilir programlama yaklaşımıyla $\lambda_{11}, \dots, \lambda_{16} \geq 0$ ve $\lambda_{11} + \dots + \lambda_{16} = 1$ olmak üzere, atanacak kapasiteyi

$$z_1 = 0\lambda_{11} + 200\lambda_{12} + 220\lambda_{13} + 250\lambda_{14} + 270\lambda_{15} + 300\lambda_{16}$$

olarak,

$$E[(d_1 - z_1)^+] = 252.5\lambda_{11} + 52.5\lambda_{12} + 36.5\lambda_{13} + 14\lambda_{14} + 6\lambda_{15} + 0\lambda_{16}$$

şeklinde buluruz. Benzer şekilde, diğer rotalar için,

$$E[(d_2 - z_2)^+] = \begin{cases} 120 - 1.00z_2, & 0 \leq z_2 \leq 50 \\ 105 - 0.70z_2, & 50 \leq z_2 \leq 150 \end{cases},$$

$\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23} \geq 0$ ve $\lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} = 1$ olmak üzere,

$$z_2 = 0\lambda_{21} + 50\lambda_{22} + 150\lambda_{23},$$

$$E[(d_2 - z_2)^+] = 120\lambda_{21} + 70\lambda_{22} + 0\lambda_{23},$$

$$E[(d_3 - z_3)^+] = \begin{cases} 180 - 1.00z_3, & 0 \leq z_3 \leq 140 \\ 166 - 0.90z_3, & 140 \leq z_3 \leq 160 \\ 134 - 0.70z_3, & 160 \leq z_3 \leq 180 \\ 62 - 0.30z_3, & 180 \leq z_3 \leq 200 \\ 22 - 0.10z_3, & 200 \leq z_3 \leq 220 \end{cases},$$

$\lambda_{31}, \dots, \lambda_{36} \geq 0$ ve $\lambda_{31} + \dots + \lambda_{36} = 1$ olmak üzere,

$$z_3 = 0\lambda_{31} + 140\lambda_{32} + 160\lambda_{33} + 180\lambda_{34} + 200\lambda_{35} + 220\lambda_{36},$$

$$E[(d_3 - z_3)^+] = 180\lambda_{31} + 40\lambda_{32} + 22\lambda_{33} + 8\lambda_{34} + 2\lambda_{35} + 0\lambda_{36},$$

$$E[(d_4 - z_4)^+] = \begin{cases} 90 - 1.00z_4, & 0 \leq z_4 \leq 10 \\ 88 - 0.80z_4, & 10 \leq z_4 \leq 50 \\ 78 - 0.60z_4, & 50 \leq z_4 \leq 80 \\ 54 - 0.30z_4, & 80 \leq z_4 \leq 100 \\ 34 - 0.10z_4, & 100 \leq z_4 \leq 340 \end{cases},$$

$\lambda_{41}, \dots, \lambda_{46} \geq 0$ ve $\lambda_{41} + \dots + \lambda_{46} = 1$ olmak üzere,

$$z_4 = 0\lambda_{41} + 10\lambda_{42} + 50\lambda_{43} + 80\lambda_{44} + 100\lambda_{45} + 340\lambda_{46},$$

$$E[(d_4 - z_4)^+] = 90\lambda_{41} + 80\lambda_{42} + 48\lambda_{43} + 30\lambda_{44} + 24\lambda_{45} + 0\lambda_{46},$$

ve

$$E[(d_5 - z_5)^+] = \begin{cases} 600 - 1.00z_5, & 0 \leq z_5 \leq 580 \\ 542 - 0.90z_5, & 580 \leq z_5 \leq 600, \\ 62 - 0.10z_5, & 600 \leq z_5 \leq 620 \end{cases}$$

$\lambda_{51}, \dots, \lambda_{54} \geq 0$ ve $\lambda_{51} + \dots + \lambda_{54} = 1$ olmak üzere,

$$z_5 = 0\lambda_{51} + 580\lambda_{52} + 600\lambda_{53} + 620\lambda_{54},$$

$$E[(d_5 - z_5)^+] = 600\lambda_{51} + 20\lambda_{52} + 2\lambda_{53} + 0\lambda_{54},$$

şeklinde hesaplarız. Benzer şekilde, (5.7) problemini optimal yapacak şekilde liderin problemi:

$$\begin{aligned} \min_{x_{ij}^1 \geq 0} \quad & \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}^1 + \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^{k_j} r_j \max \{0, d_j - z_j^1\} \\ & z_j^1 = \sum_{i=1}^4 t_{ij} x_{ij}^1 \quad j = 1, \dots, 5 \\ & \sum_{j=1}^5 x_{ij}^1 \leq b_i^1 \quad i = 1, \dots, 4 \\ & \{(5.7) \text{ problemi} \end{aligned} \tag{5.8}$$

olur. Benzer dönüşümlerle, liderin problemi için

$\gamma_{11}, \dots, \gamma_{16} \geq 0$ ve $\gamma_{11} + \dots + \gamma_{16} = 1$ olmak üzere, liderin birinci rotaya atadığı kapasiteyi

$$z_1^1 = 0\gamma_{11} + 200\gamma_{12} + 220\gamma_{13} + 250\gamma_{14} + 270\gamma_{15} + 300\gamma_{16}$$

ve birinci rotadaki müşteri kaybının beklenen değerini

$$E[(d_1 - z_1^1)^+] = 252.5\gamma_{11} + 52.5\gamma_{12} + 36.5\gamma_{13} + 14\gamma_{14} + 6\gamma_{15} + 0\gamma_{16},$$

benzer şekilde, liderin diğer rotalara atadığı kapasiteleri ve diğer rotalardaki müşteri kayıplarının beklenen değerlerini

$\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23} \geq 0$ ve $\gamma_{21} + \gamma_{22} + \gamma_{23} = 1$ olmak üzere,

$$z_2^1 = 0\gamma_{21} + 50\gamma_{22} + 150\gamma_{23},$$

$$E[(d_2 - z_2^1)^+] = 120\gamma_{21} + 70\gamma_{22} + 0\gamma_{23},$$

$\gamma_{31}, \dots, \gamma_{36} \geq 0$ ve $\gamma_{31} + \dots + \gamma_{36} = 1$ olmak üzere,

$$z_3^1 = 0\gamma_{31} + 140\gamma_{32} + 160\gamma_{33} + 180\gamma_{34} + 200\gamma_{35} + 220\gamma_{36},$$

$$E[(d_3 - z_3^1)^+] = 180\gamma_{31} + 40\gamma_{32} + 22\gamma_{33} + 8\gamma_{34} + 2\gamma_{35} + 0\gamma_{36},$$

$\gamma_{41}, \dots, \gamma_{46} \geq 0$ ve $\gamma_{41} + \dots + \gamma_{46} = 1$ olmak üzere,

$$z_4^1 = 0\gamma_{41} + 10\gamma_{42} + 50\gamma_{43} + 80\gamma_{44} + 100\gamma_{45} + 340\gamma_{46},$$

$$E[(d_4 - z_4^1)^+] = 90\gamma_{41} + 80\gamma_{42} + 48\gamma_{43} + 30\gamma_{44} + 24\gamma_{45} + 0\gamma_{46},$$

$\gamma_{51}, \dots, \gamma_{54} \geq 0$ ve $\gamma_{51} + \dots + \gamma_{54} = 1$ olmak üzere,

$$z_5^1 = 0\gamma_{51} + 580\gamma_{52} + 600\gamma_{53} + 620\gamma_{54},$$

$$E[(d_5 - z_5^1)^+] = 600\gamma_{51} + 20\gamma_{52} + 2\gamma_{53} + 0\gamma_{54}$$

olarak elde ederiz.

İki seviyeli problemin eşdeğer tek seviyeli problemini elde etmek üzere, ikinci seviye için Lagrange fonksiyonunu yazmak amacıyla,

$$z_j^2 = \sum_{i=1}^4 t_{ij} x_{ij}^2 \text{ kısıtlarına karşılık } u_j,$$

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij}^2 \leq b_i^2 \text{ kısıtlarına karşılık } v_i \geq 0,$$

$$\sum_{l=1}^{k_j+1} \lambda_{jl} = 1 \text{ kısıtlarına karşılık } \alpha_j \text{ ve}$$

$$\mathbf{d} = (d_{jl}) = \begin{pmatrix} 0 & 200 & 220 & 250 & 270 & 300 \\ 0 & 50 & 150 & - & - & - \\ 0 & 140 & 160 & 180 & 200 & 220 \\ 0 & 10 & 50 & 80 & 100 & 340 \\ 0 & 580 & 600 & 620 & - & - \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$z_j^1 + z_j^2 = \sum_{l=1}^{k_j+1} d_{jl} \lambda_{jl} \text{ kısıtlarına karşılık } \beta_j$$

Lagrange çarpanlarını getirelim. Buradan,

$$\omega = (\omega_{jl}) = \begin{pmatrix} 252.5 & 52.5 & 36.5 & 14 & 6 & 0 \\ 120 & 70 & 0 & - & - & - \\ 180 & 40 & 22 & 8 & 2 & 0 \\ 90 & 80 & 48 & 30 & 24 & 0 \\ 600 & 20 & 2 & 0 & - & - \end{pmatrix}$$

olmak üzere, Lagrange fonksiyonu:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}^2, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}^2, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = & \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^{k_j+1} r_j \omega_{jl} \lambda_{jl} + \sum_{j=1}^5 u_j \left(z_j^2 - \sum_{i=1}^4 t_{ij} x_{ij}^2 \right) \\ & + \sum_{i=1}^4 v_i \left(\sum_{j=1}^5 x_{ij}^2 - b_i^2 \right) + \sum_{j=1}^5 \alpha_j \left(\sum_{l=1}^{k_j+1} \lambda_{jl} - 1 \right) + \sum_{j=1}^5 \beta_j \left(z_j^1 + z_j^2 - \sum_{l=1}^{k_j+1} d_{jl} \lambda_{jl} \right) \end{aligned}$$

olur. Böylece, KKT şartlarını:

İkinci seviye problemin kısıtları,

$$c_{ij} - u_j t_{ij} + v_i \geq 0, \quad x_{ij}^2 (c_{ij} - u_j t_{ij} + v_i) = 0, \quad i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 5$$

$$r_j \omega_{jl} + \alpha_j - \beta_j d_{jl} \geq 0, \quad \lambda_{jl} (r_j \omega_{jl} + \alpha_j - \beta_j d_{jl}) = 0, \quad l = 1, \dots, (k_j + 1), j = 1, \dots, 5$$

$$u_j + \beta_j = 0, \quad j = 1, \dots, 5$$

$$v_i \left(\sum_{j=1}^5 x_{ij}^2 - b_i^2 \right) = 0, \quad i = 1, \dots, 4$$

olarak yazarız. Burada, $z_j^2 \geq 0$ kısıtı dahil edilmemiştir, çünkü x_{ij}^2 ve λ_{jl} değişkenleri negatif değildir. Özetle, iki seviyeli STP'nin tek seviyeli eşdeğer problemini:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}^1 + \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^{k_j+1} r_j \omega_{jl} \gamma_{jl} \\
& \left. \begin{aligned}
z_j^1 &= \sum_{i=1}^4 t_{ij} x_{ij}^1, & z_j^2 &= \sum_{i=1}^4 t_{ij} x_{ij}^2, \\
\sum_{l=1}^{k_j+1} \gamma_{jl} &= 1, & \sum_{l=1}^{k_j+1} \lambda_{jl} &= 1, \\
z_j^1 &= \sum_{l=1}^{k_j+1} d_{jl} \gamma_{jl}, & z_j^1 + z_j^2 &= \sum_{l=1}^{k_j+1} d_{jl} \lambda_{jl}, \\
r_j \omega_{jl} + \alpha_j + u_j d_{jl} &\geq 0, \\
\lambda_{jl} (r_j \omega_{jl} + \alpha_j + u_j d_{jl}) &= 0,
\end{aligned} \right\} j=1, \dots, 5 \\
& \left. \begin{aligned}
\sum_{j=1}^5 x_{ij}^1 &\leq b_i^1, & \sum_{j=1}^5 x_{ij}^2 &\leq b_i^2, & v_i \left(\sum_{j=1}^5 x_{ij}^2 - b_i^2 \right) &= 0
\end{aligned} \right\} i=1, \dots, 4 \quad (5.9) \\
& x_{21}^1 = x_{31}^1 = x_{33}^1 = x_{21}^2 = x_{31}^2 = x_{33}^2 = 0, \\
& \left. \begin{aligned}
c_{ij} - u_j t_{ij} + v_i &\geq 0, \\
x_{ij}^2 (c_{ij} - u_j t_{ij} + v_i) &= 0,
\end{aligned} \right\} i=1, \dots, 4, j=1, \dots, 5 \\
& \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v} \geq 0 \\
& \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u} \text{ serbest değişkenler}
\end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz. Bu problem, ikinci seviyeye ait tamamlayıcı kısıtlardan dolayı nonlinear yapıdadır.

Problemin optimal çözümünü nonlinear programlama yöntemlerinden örneğin dal-sınır algoritması ile bulalım. Bunun için öncelikle

$$\begin{aligned}
\lambda_{jl} (r_j \omega_{jl} + \alpha_j + u_j d_{jl}) &= 0 & l=1, \dots, (k_j+1), j=1, \dots, 5 \\
x_{ij}^2 (c_{ij} - u_j t_{ij} + v_i) &= 0 & i=1, \dots, 4, j=1, \dots, 5 \\
v_i \left(\sum_{j=1}^5 x_{ij}^2 - b_i^2 \right) &= 0 & i=1, \dots, 4
\end{aligned}$$

tamamlayıcı kısıtlarının (5.9) probleminden çıkartılmasıyla elde ettiğimiz rahatlatılmış problemi çözelim. Bilindiğı gibi, esas probleme bir üst sınır bulmak üzere, tamamlayıcı kısıtları sağlamak için her adımda rahatlatılmış probleme yeni bir kısıt eklenir. Belirli bir aday çözüme ulaşma sürecine örnek olarak herbir adımda eklenen kısıtlar bir dizi ile

$$\begin{aligned}
&\lambda_{11} = 0 \rightarrow \lambda_{12} = 0 \rightarrow \lambda_{13} = 0 \rightarrow \lambda_{41} = 0 \rightarrow \lambda_{21} = 0 \rightarrow \lambda_{42} = 0 \rightarrow \lambda_{31} = 0 \rightarrow \lambda_{43} = 0 \\
&\rightarrow \lambda_{32} = 0 \rightarrow \lambda_{44} = 0 \rightarrow \lambda_{51} = 0 \rightarrow \lambda_{14} = 0 \rightarrow \lambda_{33} = 0 \rightarrow \lambda_{45} = 0 \rightarrow c_{41} - u_1 t_{41} + v_4 = 0 \\
&\rightarrow r_1 \omega_{15} + \alpha_1 + u_1 d_{15} = 0 \rightarrow \lambda_{34} = 0 \rightarrow x_{43}^2 = 0 \rightarrow c_{23} - u_3 t_{23} + v_2 = 0 \rightarrow r_3 \omega_{35} + \alpha_3 + u_3 d_{35} = 0 \\
&\rightarrow \sum_{j=1}^5 x_{1j}^2 = b_1^2 \rightarrow \sum_{j=1}^5 x_{4j}^2 = b_4^2 \rightarrow x_{24}^2 = 0 \rightarrow x_{14}^2 = 0 \rightarrow x_{12}^2 = 0 \rightarrow x_{34}^2 = 0 \rightarrow x_{44}^2 = 0 \rightarrow \lambda_{16} = 0 \\
&\rightarrow x_{13}^2 = 0 \rightarrow x_{15}^2 = 0 \rightarrow x_{42}^2 = 0 \rightarrow x_{45}^2 = 0 \rightarrow c_{11} - u_1 t_{11} + v_1 = 0 \rightarrow \text{aday çözüm}
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilmiştir. Tüm tamamlayıcı kısıtları sağlayan bu aday çözüm vasıtasıyla elde ettiğimiz üst sınır:

$$\bar{F} = 2330.607$$

olur. $\bar{F}$ 'den daha büyük bir amaç değeri ile başlayan bir dal, başka bir işlem gerekmeksizin budanır. Her adımda yeni bir kısıt eklendiğinden uygun çözümler bölgesi daralacak ve daha iyi bir amaç değeri elde edilemeyecektir.

Böylece, (5.9) probleminin aday çözümleri arasında optimal amaç değerini veren çözümü ya da (5.8) probleminin Stackelberg çözümü:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^1 = (x_{ij}^1) &= \begin{pmatrix} 5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.400 & 0.600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.000 & 0 \\ 6.709 & 0 & 1.291 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}^2 = (x_{ij}^2) &= \begin{pmatrix} 5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.521 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.513 & 0 & 1.487 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{z}^1 = (z_j^1) = (140.382 \quad 0 \quad 160.000 \quad 100.000 \quad 0),$$

$$\mathbf{z}^2 = (z_j^2) = (129.618 \quad 0 \quad 40.000 \quad 0 \quad 0),$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j) = (-832.286 \quad 0 \quad -242.571 \quad -238.000 \quad 0),$$

$$\mathbf{u} = (u_j) = (2.794 \quad 0 \quad 1.143 \quad 0.700 \quad 0),$$

$$\mathbf{v} = (v_i) = (26.698 \quad 0 \quad 0 \quad 8.143),$$

$$\mathbf{v} = (\gamma_{jl}) = \begin{pmatrix} 0.298 & 0.702 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.103 & 0.103 & 0.793 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\lambda} = (\lambda_{jl}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.793 & 0.207 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur ve optimal (minimal) amaç değeri 2281.336×1000 p.b.dir.

Problemin yorumları:

- $x_{23}^1 = 9.4$ ve $x_{24}^1 = 0.6$ olması liderin bir ayda 2. tip toplam 10 uçağından 9'unu 3. rotaya ve kalan 1 uçağına da 0.4 oranında 3. rotaya, 0.6 oranında da 4. rotaya tahsis etmesi gerektiğini göstermektedir.
- Tamamlayıcı kısıtlar gereği, takipçi 1. ve 4. tipte uçaklarını tam kapasite ile kullandığından bu kapasite kısıtlarına karşılık gelen dual değişkenlerin değerleri $v_1 = 26.698$ ve $v_4 = 8.143$ olarak sıfırdan farklıdır. Benzer şekilde, 2. ve 3. tipte uçaklarını tam kapasite ile kullanmadığından $v_2 = v_3 = 0$ 'dır.
- Tamamlayıcı kısıtlar gereği, $x_{11}^2 = 5$ olduğundan karşılık gelen dual kısıt $c_{11} - u_1 t_{11} + v_1 = 18 - 2.794 \times 16 + 26.698 = 0$ olarak (10^{-6} yaklaşıklık mertebesinde) sağlanmıştır.
- Lider birinci rotaya ayda $140.382(\times 100)$, üçüncü ve dördüncü rotalara, sırasıyla 16000 ve 10000; buna karşılık, takipçi birinci ve üçüncü rotaya sırasıyla $129.618(\times 100)$ ve 4000 kişilik yolcu kapasitesi tahsis etmelidir.
- Lider ve takipçi üçüncü rotaya toplam $200(\times 100)$ kişilik yolcu kapasitesi ayırdıklarından 0.1 olasılıkla $\times 100$ ölçeğiyle talep $d_{36} = 220$ olursa $20(\times 100)$ yolcu kaybedilecektir.

5.2 İki Seviyeli Sürekli Stokastik Taşıma Problemi

İki seviyeli sürekli stokastik taşıma problemini tanımlamadan önce, yapılan kabulleri verelim.

5.2.1 Kabuller

İki seviyeli kesikli STP'nin (v) kabulü hariç diğer tüm kabulleri bu problem için geçerlidir. Ancak, (v) kabulünde kesikli yerine sürekli ifadeleri yer almaktadır.

(v) Müşteri talepleri bilinen sürekli dağılımlara sahip stokastik değişkenlerdir. $j=1, \dots, n$ olmak üzere, j . müşterinin talebinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_j(t)$, dağılım fonksiyonu ise $F_j(t)$ 'dir.

5.2.2 Problemin Formülasyonu

Bu kabullerden yola çıkarak iki seviyeli sürekli stokastik taşıma problemini:

$$\begin{aligned}
 (P1) \quad & \min \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_1} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_1} \left((h_j + s_j) \int_0^{y_j} F_j(t) dt - s_j y_j \right) \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_1 \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i \in L_1, j = 1, \dots, n \\
 (P2) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_2} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_2} \left((h_j + s_j) \int_0^{y_j} F_j(t) dt - s_j y_j \right) \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_2 \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = y_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i \in L_2, j = 1, \dots, n \end{aligned} \right. \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

olarak tanımlayabiliriz. u_i ve v_{ij} Lagrange çarpanları olmak üzere, iki seviyeli STP için yarı-pozitif definit Hessian matrisine sahip kuadratik, dolayısıyla konveks Lagrange fonksiyonu:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_2} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_2} \left((h_j + s_j) \int_0^{\sum_{k=1}^m x_{kj}} F_j(t) dt - s_j \sum_{k=1}^m x_{kj} \right) \\
& + \sum_{i \in L_2} u_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - b_i \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_2} v_{ij} x_{ij}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

olarak yazabiliriz. İkinci seviye problemin KKT optimallik şartları:

$$u_i, v_{ij} \geq 0, v_{ij} x_{ij} = 0, x_{ij} \geq 0, \quad i \in L_2, j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = c_{ij} + (h_j + s_j) F_j \left(\sum_{k=1}^m x_{kj} \right) - s_j + u_i - v_{ij} = 0, \quad i \in L_2, j \in M_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = c_{ij} + u_i - v_{ij} = 0, \quad i \in L_2, j \in M_1$$

$$u_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - b_i \right) = 0, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_2$$

olur. KKT şartlarındaki v_{ij} değişkenlerini elimine ederek ve

$$\phi_\varepsilon(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\varepsilon^2}$$

Fischer-Burmeister fonksiyonunu kullanarak (5.10)'a eşdeğer tek seviyeli problemi:

$$\begin{aligned}
\min & \sum_{j=1}^n \sum_{i \in L_1} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_1} \left((h_j + s_j) \int_0^{y_j} F_j(t) dt - s_j y_j \right) \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& u_i \geq 0, \quad i \in L_2 \\
& c_{ij} + (h_j + s_j) F_j \left(\sum_{k=1}^m x_{kj} \right) - s_j + u_i \geq 0, \quad i \in L_2, j \in M_2 \\
& x_{ij} = 0, \quad i \in L_2, j \in M_1 \\
& \phi_\varepsilon(u_i, b_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}) = 0, \quad i \in L_2 \\
& \phi_\varepsilon(x_{ij}, c_{ij} + (h_j + s_j) F_j \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right) - s_j + u_i) = 0, \quad i \in L_2, j \in M_2 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{5.12}$$

şeklinde elde ederiz.

Örnek 5.2 Bir petrol şirketinin dört müşteri bölgesine ($j=1,2,3,4$) dağıtım yapabilecek üç rafinerisi ($i=1,2,3$); bu rafinerilerin üretim kapasitelerinin, sırasıyla $b_1=150$, $b_2=200$ ve $b_3=100$ birim petrol olduğunu kabul edelim. Müşteri talepleri bölgeden bölgeye değişmekte olsun ve sırasıyla

$$\lambda = (0.012 \quad 0.007 \quad 0.008 \quad 0.006)^T$$

parametreleriyle eksponensiyel dağılım gösterebilir, dolayısıyla λ_j parametreleri $[0.006, 0.012]$ aralığında kabul edildiğinden beklenen müşteri talepleri $1/\lambda_j$ oranıyla $[83.33, 166.67]$ aralığında olacaktır. Liderin üçüncü rafineriyi ($L_1 = \{3\}$), takipçinin birinci ve ikinci rafineriyi ($L_2 = \{1, 2\}$) yönettiğini, elde bulundurma maliyetlerinin lider, elde bulundurmama maliyetlerinin takipçi tarafından üstlenildiğini kabul edelim. Elde bulundurma maliyetlerinin negatif olabileceğini de vurgulayalım. Bunun anlamı, müşteriye gönderilip talep edilmeyen fazla malın o müşteri bölgesinde başka müşterilere satılabileceğidir. Birim taşıma, elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetleri, sırasıyla

$$c = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, h = (-16 \quad -18 \quad 5 \quad 6)^T, s = (60 \quad 28 \quad 20 \quad 30)^T$$

matrisleriyle verilmiş olsun. Böylece, örnek problemin iki seviyeli sürekli STP formülasyonunu:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_1} & \sum_{j=1}^4 \sum_{i \in L_1} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^4 \left(h_j \int_0^{y_j} (y_j - t) f_j(t) dt \right) \\ & \sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_1, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i \in L_1; j=1, \dots, 4 \\ \min_{\mathbf{x}_2} & \sum_{j=1}^4 \sum_{i \in L_2} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^4 \left(s_j \int_{y_j}^{\infty} (t - y_j) f_j(t) dt \right) \\ & \sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_2, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i \in L_2; j=1, \dots, 4 \\ & \sum_{i=1}^3 x_{ij} = y_j, \quad j=1, \dots, 4, \end{aligned}$$

olarak verebiliriz. $j=1,\dots,4$ için,

$$f_j(t) = \lambda_j e^{-\lambda_j t}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğundan, amaç fonksiyonlarındaki integralleri hesaplırsak, lider ve takipçinin amaçlarını sırasıyla

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{i \in L_1} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^4 \left(h_j y_j + \frac{h_j}{\lambda_j} e^{-\lambda_j y_j} \right)$$

ve

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{i \in L_2} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^4 \frac{s_j}{\lambda_j} e^{-\lambda_j y_j}$$

olarak buluruz. Konveks ikinci seviye amaç fonksiyonu için, $u_i, v_{ij}, i \in L_2, j=1,\dots,4$ Lagrange çarpanları olmak üzere, Lagrange fonksiyonu:

$$L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i \in L_2} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^4 \frac{s_j}{\lambda_j} e^{-\lambda_j \sum_{k=1}^3 x_{kj}} + \sum_{i \in L_2} u_i \left(\sum_{j=1}^4 x_{ij} - b_i \right) - \sum_{j=1}^4 \sum_{i \in L_2} v_{ij} x_{ij}$$

olur. Buradan KKT şartları:

$$u_i, v_{ij} \geq 0, \quad i \in L_2, j=1,\dots,4$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = c_{ij} - s_j e^{-\lambda_j \sum_{k=1}^3 x_{kj}} + u_i - v_{ij} = 0, \quad i \in L_2, j=1,\dots,4$$

$$u_i \left(\sum_{j=1}^4 x_{ij} - b_i \right) = 0, \quad i \in L_2$$

$$v_{ij} x_{ij} = 0, \quad i \in L_2, j=1,\dots,4$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq b_i, \quad i \in L_2$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in L_2, j=1,\dots,4$$

şeklinde yazarak, iki seviyeli sürekli STP'ye eşdeğer tek seviyeli problemi:

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2} \quad & \sum_{j=1}^4 \sum_{i \in L_1} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^4 \left(h_j \sum_{i=1}^3 x_{ij} + \frac{h_j}{\lambda_j} e^{-\lambda_j \sum_{i=1}^3 x_{ij}} \right) \\
& \sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3 \\
& c_{ij} - s_j e^{-\lambda_j \sum_{i=1}^3 x_{ij}} + u_i \geq 0, \quad i \in L_2, \forall j \\
& x_{ij} (c_{ij} - s_j e^{-\lambda_j \sum_{i=1}^3 x_{ij}} + u_i) = 0, \quad i \in L_2, \forall j \\
& u_i (\sum_{j=1}^4 x_{ij} - b_i) = 0, \quad i \in L_2 \\
& u_i \geq 0, \quad i \in L_2 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j
\end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz. Bu problemin tamamlayıcı kısıtları yerine, Fischer-Burmeister fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
\phi_\varepsilon(x_{ij}, c_{ij} - s_j e^{-\lambda_j \sum_{i=1}^3 x_{ij}} + u_i) &= 0, \quad i \in L_2, \forall j \\
\phi_\varepsilon(u_i, b_i - \sum_{j=1}^4 x_{ij}) &= 0, \quad i \in L_2
\end{aligned}$$

kısıtlarını alarak düzgünleştirme yaparız. GAMS (General Algebraic Modeling System) paket programının MPEC (Mathematical Programs with Equilibrium Constraints) çözücüsünü kullanarak $\varepsilon = 10^{-6} \cong 0$ yaklaşıklıkla, örnek problemin Stackelberg çözümünü:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1^* &= (x_{3j}^*) = (0 \quad 0 \quad 46.3298 \quad 53.6702), \\
\mathbf{x}_2^* &= \begin{pmatrix} x_{1j}^* \\ x_{2j}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 74.3195 & 0 & 75.6805 \\ 150.9470 & 49.0530 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
u_1^* &= 9.8059, \\
u_2^* &= 7.8059
\end{aligned}$$

olarak buluruz.

Burada birinci ve ikinci müşteri bölgelerinde hem elde bulundurmama maliyeti yüksek hem de elde bulundurma maliyeti düşük olduğundan, kapasite özellikle bu bölgelerde kullanılmıştır.

5.3 Stokastik Yaşam Süreli Çabuk Bozulan Malın Taşınması için İki Seviyeli Model

Kısa süreli satış ve raf ömrüne sahip, çabuk bozulan veya dayanıksız olarak adlandırılabilir mallara tipik örnekler, taze sebze veya meyve, ekmek, süt ürünleri, canlı çiçek, deniz ürünleri, işlenmiş veya işlenmemiş et ve dondurulmuş gıdalardır. Bu mallar ısıya ve soğuğa maruz kaldığında veya belirli bir süre sonrasında kullanılmaz hale gelmektedir. Ancak, mevsim ne olursa olsun tüketiciler raf ömrü uzun ve yüksek kaliteli malları tercih etmektedir.

Kalitedeki düşüş, mal üretildiği anda başlayan, depolama ve taşıma süresince hızla devam eden zamanın ve sıcaklığın bir fonksiyonudur. Bozulma, iki uç sıcaklık düzeyinde de gerçekleşir. Örneğin, çok sıcakta oluşan bakteriler ve koku, çok soğukta meydana gelen rengin değişmesi, çukurlaşma, tadın bozulması gibi donma yaraları bu tür malları bozmaktadır. Bu tür malların taşınmasında raf ömrünü ve dolayısıyla üreticinin faydasını arttırmak için özel soğutma ünitesi olan, ancak benzin tüketimi diğer araçlara göre daha fazla olan araçlar kullanılmaktadır. Dolayısıyla, dayanıksız malların taşınması toplam taşıma maliyetlerini arttırmaktadır. Taşıma sırasında bozulmaya engel olmak için bazı hususlara dikkat edilmelidir. Bu hususlar:

- Yükleme bölmesinin kapaklarının sıklıkla açılması, yollardan yansıyan veya doğrudan gelen güneş ışınlarının araçtaki çatlaklardan geçmesi gibi nedenlerle oluşacak sıcaklık dalgalanmalarına engel olunarak, mümkün olan en iyi hava dolaşımı ve yalıtım şartlarında, dayanıksız mallar hızlı bir şekilde depolanmalı ve taşınmalıdır.
- Sıvı veya katı haldeki karbondioksitin ve sıvı nitrojenin uygun yoğunluklardaki karışımlarıyla ısıнын soğutulmasını sağlayan ve nem kaybının önlenmesine yardımcı olan aracın soğutma sistemi, düzgün bir şekilde çalıştırılmalıdır.
- İstenen sıcaklık ve nem seviyesine göre hem araç hem de mallar önceden soğutulmalıdır.
- Mikro organizmaların ve kokunun yol açtığı bozulmalara engel olmak için araç yükleme öncesinde steril hale getirilmelidir. Ayrıca, süt ürünleri ve et gibi

kokuyu emen mallarla, soğan ve deniz ürünleri gibi koku yayan malların yakın taşınmamasına özen gösterilmelidir [75].

Çabuk bozulan bir malın dayanıksızlık özelliğinden ya da değişken taşıma koşullarından ötürü, malın yaşam süresinin sabit değil de belirsiz olduğu düşünülebilir. Bu ön bilgiler ışığında, modelle ilgili yapacağımız kabulleri verelim.

5.3.1 Kabuller

(i) Sürekli bozulmaya maruz kalan tek tip bir ürün taşınmaktadır. Malın bozulma süresi T , bilinen $F_*(.)$ dağılımına sahip sürekli rassal değişkendir.

(ii) Dayanıksız bir mal taşındığından stokta mal bulundurmaya ve talep edilenden fazla mal göndermeye izin verilmemektedir.

(iii) Hiyerarşik şekilde birbirine bağlı bir tedarik zinciri (supply chain) söz konusudur. Tedarikçi ya da üretici ile perakendeci arasında lider-takipçi ilişkisi vardır. Fiyatlar ve müşteri talepleri önceden bilinmektedir. Tedarikçi ile perakendeci, bilinen bu fiyatlarla müşterilerinin taleplerini karşılamak üzere bir anlaşma sağlamışlardır. Üretim ya da hasat bölgelerinin lider tarafından, dağıtım merkezlerinin takipçi tarafından yönetildiği kabul edilmektedir.

Lider olarak tedarikçi ya da üretici ilk önce ne kadar mal tedarik edeceğine ya da üreteceğine karar verir, sonrasında bu malları takipçinin dağıtım merkezlerine yollar. Lider, üretim bölgelerinin kapasitelerini aşmadan müşteri taleplerini karşılayan ve toplam taşıma maliyetlerini minimize edecek şekilde taşıma planını belirler. Ardından takipçi, liderin kararlarını göz önüne alarak, dağıtım merkezlerinin kapasitelerini aşmadan müşteri taleplerini karşılayan minimum maliyetli taşıma planını belirler. Ayrıca, malın bozulmadan zamanında taşınması da takipçi için önemlidir. Müşteri bozulan malı almayacağından takipçi, müşteri bölgelerine göre farklı değerler alabilen çöpe dökme maliyeti ve tekrar tedarik etme maliyetlerini içeren bozulma maliyetine katlanmalıdır. Eksiklik veya talebin istenen zaman yerine sonradan karşılanmasına izin verilmektedir, ancak bu durum yüksek bir maliyetle cezalandırılmaktadır.

(iv) I tane üretim bölgesi vardır ve $i=1,\dots,I$ olmak üzere, i . bölgenin üretim kapasitesi a_i 'dir. Üretim bölgelerinden J tane dağıtım merkezine mal gönderilmektedir ve $j=1,\dots,J$ olmak üzere, j . dağıtım merkezinin kapasitesi b_j 'dir. Dağıtım merkezlerinden K tane müşteriye mal gönderilmektedir ve $k=1,\dots,K$ olmak üzere, k . müşterinin talebi belirli ve d_k 'dir.

(v) i . üretim bölgesinden j . dağıtım merkezine birim taşıma maliyeti c_{ij} iken, j . dağıtım merkezinden k . müşteriye birim taşıma maliyeti e_{jk} 'dir. k . müşteri bölgesinde malın birim bozulma maliyeti ise PC_k 'dir.

(vi) Üretim bölgelerinden dağıtım merkezlerine, dağıtım merkezlerinden müşterilere mal taşıma zamanları belirlidir. i . üretim bölgesinden j . dağıtım merkezine gönderilmiş malın birim zaman cinsinden yaşı t_{ij} , j . dağıtım merkezinde geçen zaman, yani toplam indirme ve yeniden yükleme zamanı τ_j ve j . dağıtım merkezinden k . müşteriye taşıma zamanı T_{jk} 'dir. $((i,j),k)$ rotasını izleyen malın yaşı, $t_{ij} + \tau_j + T_{jk}$ olarak düşünülebilir ve günümüz teknolojisinde barkodlama vs. sistemlerle malın sistemde kaldığı süreler kolayca tespit edilebilir.

(vii) Liderin karar değişkenleri x_{ij} 'ler; i . üretim bölgesinde üretilip j . dağıtım merkezine gönderilen mal miktarlarını ve takipçinin karar değişkenleri y_{ijk} 'ler; i . üretim bölgesinden j . dağıtım merkezine gönderilmiş, oradan da k . müşteriye taşınan mal miktarlarını göstermektedir. Karar değişkenleri negatif olamaz; $x_{ij}, y_{ijk} \geq 0$.

(viii) Üretim bölgelerinin kapasite kısıtları;

- $$\sum_{j=1}^J x_{ij} \leq a_i, \quad i=1,\dots,I$$

Dağıtım merkezlerinin kapasite kısıtları;

- $$\sum_{i=1}^I x_{ij} \leq b_j, \quad j=1,\dots,J$$

- $\sum_{k=1}^K y_{ijk} = x_{ij}, \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$

Müşteri talep kısıtları;

- $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ijk} = d_k, \quad k = 1, \dots, K$

şeklindedir.

(ix) Liderin amacı:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} x_{ij}$$

üretim bölgelerinden dağıtım merkezlerine toplam taşıma maliyetini minimize etmektir. Takipçinin amacı ise,

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K e_{jk} \sum_{i=1}^I y_{ijk}$$

dağıtım merkezlerinden müşterilere toplam taşıma maliyetini ve

$$(t_{ij} + \tau_j + T_{jk})(y_{ijk}) = \begin{cases} t_{ij} + \tau_j + T_{jk}, & y_{ijk} > 0 \\ 0, & y_{ijk} = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

olmak üzere, riske nötr karar verici olarak

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K PC_k P\{T \leq (t_{ij} + \tau_j + T_{jk})(y_{ijk})\} y_{ijk} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K PC_k F_{ijk}(t_{ij} + \tau_j + T_{jk}) y_{ijk}$$

toplam beklenen bozulma maliyetini minimize etmektir. Burada, eğer malın rassal yaşam süresi, sistemde harcadığı toplam zaman olan $t_{ij} + \tau_j + T_{jk} = \theta_{ijk}$ 'dan küçük veya eşit ise mal bozulur ve (5.13) ile verilen fonksiyon eğer $((i, j), k)$ rotasında bir yükleme gerçekleşmişse sıfırdan farklı değer üretecektir.

Lider ve takipçi, mal bozulmadan karar vermek zorunda olduklarından, lineer iki seviyeli STP'nin *hemen şimdi* formülasyonu:

$$\begin{aligned}
& \min_{x_{ij}, y_{ijk}} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} x_{ij} \\
& \sum_{j=1}^J x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, I \\
& \sum_{i=1}^I x_{ij} \leq b_j \quad j = 1, \dots, J \\
& x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \\
& \left\{ \begin{aligned}
& \min_{y_{ijk}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K e_{jk} \sum_{i=1}^I y_{ijk} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K PC_k F_{ijk}(\theta_{ijk}) y_{ijk} \\
& \sum_{k=1}^K y_{ijk} = x_{ij} \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \\
& \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ijk} = d_k \quad k = 1, \dots, K \\
& y_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K
\end{aligned} \right. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

probleme daha iyi uymaktadır. $i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K$ için $u_k, v_{ij}, \omega_{ijk}$ değişkenleri Lagrange çarpanları olmak üzere, ikinci seviye problemin Lagrange fonksiyonunu:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}) = & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K e_{jk} \sum_{i=1}^I y_{ijk} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K PC_k F_{ijk}(\theta_{ijk}) y_{ijk} + \sum_{k=1}^K u_k \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ijk} - d_k \right) \\
& + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J v_{ij} \left(\sum_{k=1}^K y_{ijk} - x_{ij} \right) - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \omega_{ijk} y_{ijk}
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan, KKT şartları:

1. $\omega_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K$
2. $\frac{\partial L}{\partial y_{ijk}} = e_{jk} + PC_k F_{ijk}(\theta_{ijk}) + u_k + v_{ij} - \omega_{ijk} = 0, \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K$
3. $\sum_{k=1}^K y_{ijk} = x_{ij}, \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$
4. $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ijk} = d_k, \quad k = 1, \dots, K$

$$5. y_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K$$

şeklindedir. KKT şartlarındaki ω_{ijk} değişkenleri yok edilirse, KKT şartları:

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & e_{jk} + PC_k F_{ijk}(\theta_{ijk}) + u_k + v_{ij} \geq 0 \\ & y_{ijk}(e_{jk} + PC_k F_{ijk}(\theta_{ijk}) + u_k + v_{ij}) = 0 \end{aligned} \right\} & i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \\ & \sum_{k=1}^K y_{ijk} = x_{ij} & i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \\ & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ijk} = d_k & k = 1, \dots, K \\ & y_{ijk} \geq 0 & i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

şekline dönüşür. Buradan, (5.14) problemine eşdeğer tek seviyeli problemini:

$$\begin{aligned} \min_{x_{ij}, y_{ijk}} \quad & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^J x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, I \\ & \sum_{i=1}^I x_{ij} \leq b_j \quad j = 1, \dots, J \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \\ & e_{jk} + PC_k F_{ijk}(\theta_{ijk}) + u_k + v_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \\ & y_{ijk}(e_{jk} + PC_k F_{ijk}(\theta_{ijk}) + u_k + v_{ij}) = 0 \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \\ & \sum_{k=1}^K y_{ijk} = x_{ij} \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \\ & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ijk} = d_k \quad k = 1, \dots, K \\ & y_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

Bu problem bir nonlineer programlama problemidir. Herhangi bir nonlineer programlama problemlerini çözen paket programla çözülebileceği gibi iki seviyeli lineer programlama problemlerini çözen yöntemlerle de çözümlere Stackelberg çözümü bulunabilir.

Bu bölümde, (5.14)'teki lineer iki seviyeli STP'yi, Bölüm 3'te lineer iki seviyeli programlama problemleri için tanıtılan K . en iyi algoritmasıyla çözelim. İlk hareket eden oyuncu, yani lider, kararını açıkladıktan sonra, en iyi tepkiyi verebilmek üzere takipçi, bu bilgiyi girdi olarak kullanır. Liderin amaç fonksiyonu y_{ijk} değişkenlerini içermediğinden, takipçinin her tepki (reaction) y_{ijk} kombinasyonu, lider için alternatif optimaldir. Ayrıca, liderin x_{ij} kararlarının sabit olduğu düşünüldüğünde, (5.15) ile verilmiş KKT şartları, $I \times J$ kaynaktan K müşteriye, maliyet minimizasyonu amaçlı klasik taşıma probleminin KKT şartları ile aynıdır. Dolayısıyla, takipçinin problemi taşıma simpleks metodu ile çözülebilir. Ancak, burada birim taşıma maliyetleri:

$$C((i, j), k) = e_{jk} + PC_k F_{ijk}(\theta_{ijk})$$

şeklinde revize edilmelidir.

O halde, problemin çözümü için öncelikle, rahatlatılmış uygun bölgede liderin lineer programlama problemi:

$$\begin{aligned} \min_{x_{ij}, y_{ijk}} \quad & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^J x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, I \\ & \sum_{i=1}^I x_{ij} \leq b_j \quad j = 1, \dots, J \\ & \sum_{k=1}^K y_{ijk} = x_{ij} \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \\ & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ijk} = d_k \quad k = 1, \dots, K \\ & x_{ij}, y_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \end{aligned} \tag{5.16}$$

çözülür. Problemin optimal çözümünün (x_{ij}^*, y_{ijk}^*) olduğu kabul edilirse, $x_{ij} = x_{ij}^*$ şeklinde sabit alınarak takipçinin taşıma problemi:

$$\begin{aligned}
& \min_{y_{ijk}} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K C((i,j),k) y_{ijk} \\
& \sum_{k=1}^K y_{ijk} = x_{ij}^* \quad i=1,\dots,I; j=1,\dots,J \\
& \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ijk} = d_k \quad k=1,\dots,K \\
& y_{ijk} \geq 0 \quad i=1,\dots,I; j=1,\dots,J; k=1,\dots,K
\end{aligned}$$

taşıma simpleks metodu ile çözülür ve y_{ijk}^* değerleri güncellenir. Böylece, Stackelberg denge çözümü (x_{ij}^*, y_{ijk}^*) olur.

Örnek 5.3 Bu örnekte [76]'dan uyarlanan küçük bir model uygulanmıştır. Altışar tane üretim bölgesi, dağıtım merkezi ve müşteri olduğu düşünölsün. Üretim bölgelerinin ve dağıtım merkezlerinin kapasiteleri, müşteri talepleri sırasıyla:

$$\mathbf{a} = (200 \ 100 \ 140 \ 160 \ 200 \ 60)^T$$

$$\mathbf{b} = (200 \ 135 \ 120 \ 140 \ 100 \ 200)^T$$

$$\mathbf{d} = (80 \ 60 \ 200 \ 90 \ 200 \ 100)^T$$

matrisleri ile verilmiştir.

Bozulma, üretim bölgelerinden dağıtım merkezlerine, dağıtım merkezlerinden müşterilere taşıma maliyetleri, sırasıyla:

$$\mathbf{PC} = (400 \ 500 \ 480 \ 520 \ 560 \ 440)^T,$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 31.0 & 21.0 & 18.0 & 21.5 & 36.5 & 31.5 \\ 48.5 & 37.5 & 36.0 & 40.0 & 55.0 & 46.5 \\ 45.0 & 33.5 & 33.0 & 39.0 & 54.0 & 48.0 \\ 55.5 & 44.0 & 44.0 & 49.5 & 65.0 & 57.0 \\ 41.5 & 30.0 & 38.0 & 43.0 & 56.0 & 55.5 \\ 28.5 & 18.5 & 24.0 & 36.5 & 46.0 & 51.0 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 43.0 & 52.5 & 62.0 & 60.5 & 50.0 & 54.5 \\ 32.5 & 43.5 & 54.0 & 56.0 & 48.0 & 55.0 \\ 30.0 & 40.0 & 50.0 & 49.0 & 39.0 & 45.0 \\ 23.0 & 33.0 & 43.0 & 43.5 & 35.0 & 41.5 \\ 12.0 & 22.5 & 34.0 & 38.0 & 33.0 & 41.0 \\ 23.0 & 33.0 & 44.5 & 51.5 & 48.0 & 56.5 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Aynı zaman ölçeğiyle, üretim bölgelerinden dağıtım merkezlerine yollanmış malların yaşları, dağıtım merkezlerinde harcanan indirme ve yeniden yükleme zamanları ve dağıtım merkezlerinden müşterilere taşıma zamanları, sırasıyla:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 2.5 & 1.5 & 5.0 & 2.0 & 5.0 & 5.5 \\ 4.0 & 4.0 & 1.5 & 4.5 & 1.0 & 3.5 \\ 3.0 & 1.0 & 4.5 & 2.5 & 3.5 & 3.5 \\ 3.5 & 4.5 & 1.0 & 4.5 & 3.0 & 3.0 \\ 1.5 & 2.0 & 4.5 & 1.5 & 3.5 & 3.5 \\ 2.5 & 3.5 & 3.0 & 3.0 & 1.0 & 0.5 \end{pmatrix}, \tau = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T,$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3.5 & 0.5 & 1.0 & 4.5 & 3.5 & 1.5 \\ 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 0.5 & 3.5 \\ 1.0 & 3.5 & 3.5 & 2.0 & 2.5 & 4.0 \\ 4.0 & 1.0 & 0.5 & 4.5 & 4.0 & 1.5 \\ 4.0 & 4.0 & 4.0 & 3.0 & 1.0 & 4.0 \\ 3.5 & 3.0 & 3.0 & 3.5 & 2.5 & 3.0 \end{pmatrix}$$

matrisleriyle verilmiş olsun.

Her $((i,j),k)$ rotası için mal, farklı şartlarda üretildiğinden, depolandığından ve taşındığından uygunluk testleri geçmiş verilerle her rota için ayrı ayrı yapılarak dağılım fonksiyonları hesaplanmalıdır. Ancak burada, basitlik açısından bu şartlar hakkında fazla bir bilgiye sahip olunmadığı ve yaşam süresinin

$$T \sim U[6,10]$$

şeklinde uniform dağılıma sahip olduğu, yani dağılım fonksiyonunun,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 6 \\ \frac{t-6}{4}, & t \in [6,10] \\ 1, & t > 10 \end{cases} \quad (5.17)$$

olduğunu kabul edelim.

Öncelikle, liderin problemi (5.16)'yı çözersek üretim bölgelerinden dağıtım merkezlerine taşınan optimal mal miktarlarını:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 32.5 & 140 & 0 & 27.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 52.5 & 0 & 87.5 & 0 & 0 & 0 \\ 22.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.5 \\ 65 & 135 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde ederiz. Basit bir bilgisayar kodu ile tüm olası rotalar için malların sistemde ne kadar süreyle kalacağını tüm mümkün değerleri hesaplanabilir. Bu değerler kullanılarak dağılım fonksiyonunun üreteceği değerler ve sonrasında revize edilmiş maliyetler elde edilir. Revize maliyetler ile takipçinin taşıma problemi taşıma simpleks metodu ile çözülürse, dağıtım merkezlerinden müşterilere yollanan sıfırdan farklı optimal miktarlar Çizelge 5.1’de verilmiştir. Çizelge 5.1’de, örneğin ÜB1.DM3.M1 gösterilişi, 1. üretim bölgesinden 3. dağıtım merkezine yollanıp, oradan 1. müşteriye gönderilen mal miktarını, yani y_{131}^* ’ı temsil etmektedir ve değeri 32.5 birimdir.

Çizelge 5.1 Örnek 5.3’ün ikinci seviye çözümleri (uniform dağılım)

ÜB1.DM3.M1	32.5	ÜB1.DM4.M2	60	ÜB1.DM4.M3	80	ÜB1.DM6.M6	27.5
ÜB2.DM6.M5	100	ÜB3.DM1.M3	52.5	ÜB3.DM3.M1	47.5	ÜB3.DM3.M4	40
ÜB4.DM1.M3	22.5	ÜB4.DM6.M5	7.5	ÜB5.DM1.M3	45	ÜB5.DM1.M5	7.5
ÜB5.DM1.M6	12.5	ÜB5.DM2.M4	50	ÜB5.DM2.M5	85	ÜB6.DM1.M6	60

Şimdi de, takipçinin optimal çözümünün dağılım fonksiyonunun şekline duyarlı olup olmadığını araştıralım. Bunun için, malın rassal yaşam süresinin aynı [6,10] aralığında, fakat daha çabuk bozulabilen bir mal olduğunu ve dağılım fonksiyonunun:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 6 \\ 0.4(t - 6), & 6 \leq t < 7 \\ 0.4 + 0.3(t - 7), & 7 \leq t < 8 \\ 0.7 + 0.2(t - 8), & 8 \leq t < 9 \\ 0.9 + 0.1(t - 9), & 9 \leq t < 10 \\ 1, & 10 \leq t \end{cases} \quad (5.18)$$

şeklinde parçalı lineer olduğunu kabul edelim. Problem tekrar çözüldüğünde takipçinin sıfırdan farklı değişkenlerinin değerleri Çizelge 5.2'deki gibi olur. Malın rassal yaşam süresinin beklenen değeri Ek-A (A.3)'ten (5.17) dağılım fonksiyonu için 8, daha çabuk bozulabilen mala ait (5.18) dağılım fonksiyonu için ise 7.5'tir. Bozulma sürelerinin aynı aralıkta alınmasına ve beklenen değerlerinin birbirine yakın olmasına rağmen, takipçinin optimal çözümünün dağılım fonksiyonunun şekline duyarlı olduğu gözlemlenmiştir.

Çizelge 5.2 Örnek 5.3'ün ikinci seviye çözümleri (uniform dağılım-çabuk bozulabilen)

ÜB1.DM3.M4	32.5	ÜB1.DM4.M2	60	ÜB1.DM4.M3	80	ÜB1.DM6.M4	7.5
ÜB1.DM6.M6	20	ÜB2.DM6.M5	100	ÜB3.DM1.M3	52.5	ÜB3.DM3.M1	80
ÜB3.DM3.M4	7.5	ÜB4.DM1.M3	22.5	ÜB4.DM6.M5	7.5	ÜB5.DM1.M3	45
ÜB5.DM1.M6	20	ÜB5.DM2.M4	42.5	ÜB5.DM2.M5	92.5	ÜB6.DM1.M6	60

SONUÇ VE ÖNERİLER

Son yıllarda, matematik programlama, oyun teorisi ve istatistik alanlarındaki geniş literatürü kaynak alan, ilginç ve önemli uygulamaları bulunan *stokastik denge problemleri* (*stochastic equilibrium problems*) bu alanlarda çalışmalar yapan topluluğun dikkatini çekmiştir. Bunun nedeni, hiyerarşik ilişkideki karar vericilerin yer aldığı problemlerde problem verilerinin rassallık faktörlerinin etkisinde olabilmesidir. Belirsizliği göz önüne almamak ya da belirsiz parametrelerin beklenen değerlerini kullanarak basite indirmek bazı durumlarda maliyetli olabilir.

İstatistiksel belirsizliğin modellere yansıtılmasında dikkat çeken bir yöntem iki aşamalı stokastik programlama tekniğidir. Bu teknikte, belirsizlik gelecekte çözümlendiğinde alınan yanlış kararların telafi edilebildiği varsayılır. Bunun için, olası tüm senaryolar, bir karar almanın maliyetini veren düzeltici (recourse) fonksiyonlar vasıtasıyla üstü kapalı şekilde değerlendirilir.

Tedarik zinciri planlamada sıklıkla karşılaşılan taşıma problemi ve onun diğer varyantlarında da bu tür yaklaşımlar göze çarpmaktadır. Eğer müşteriler onlara gönderilen maldan daha az miktarda talep ederlerse fazla mal depolarda saklanır, daha fazla miktarda talep ederlerse eksik mal miktarı yerel bir pazardan telafi edilir veya yeniden yükleme yapılır, tabi ki daha yüksek bir maliyetle.

STP'nin çözümünde kesikli durum için ayrılabilir programlamanın ve sürekli durum için çapraz ayrışım algoritmasının literatürdeki etkin yöntemler olduğu, mevcut bir çözümün optimalliğinin kontrolünde ise Frank-Wolfe algoritmasının kullanılabileceği gözlemlenmiştir.

Bu çalışmamızda, stokastik taşıma probleminin iki seviyeli versiyonları göz önüne alınmıştır. Böylelikle, hiyerarşik ilişkideki karar seviyelerini barındıran tedarik zincirlerindeki taşımalarda belirsizlik ele alınmıştır. Kesikli ve sürekli durumlar ayrı ayrı incelenmiş ve örneklerle açıklanmıştır. Kesikli durumda, ayrılabilir programlama ile deterministik eşdeğer problem elde edildikten sonra iki seviyeli problem, ikinci seviye KKT şartları aracılığıyla tek seviyeye indirgenmiş ve elde edilen tek seviyeli problem Dal-sınır yöntemi ile çözülerek iki seviyeli STP'nin Stackelberg (denge) çözümü bulunmuştur. Sürekli durumda ise, DKMP ve DKSMP problemlerinin çözümü için verilmiş nonlinear tamamlayıcı problem fonksiyonlarından Fischer-Burmeister düzgünleştirme fonksiyonu yardımıyla iki seviyeli STP'nin tek seviyeli eşdeğer nonlinear modeli ve yine denge çözümleri elde edilmiştir.

Günümüzde, dayanıksız malların taşınması önemli bir sorun haline gelmiştir. Uygunsuz ortam şartlarında, aşırı sıcak veya soğukta, depolama ve taşıma sırasında bu tür malların bozulabilmesi dolayısıyla toplam maliyetlerin artabildiği durumlarda belirsizliğin de göz önüne alınması gerekmektedir. Çalışmamızda önerilen üretici-perakendeci (lider-takipçi) arasındaki iki seviyeli modelde, karar vericiler müşteri taleplerini minimum maliyetle karşılarken, malın müşteriye ulaştığında mümkün olduğunca taze olmasını istemektedir. Önerdiğimiz modelde, malın yaşam süresinin rassal olduğu kabul edilmiştir. Benzer şartlar altında, dağılım fonksiyonun şekline göre takipçinin optimal çözümünün değişkenlik gösterdiği görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Chong, E. K. P. ve Žak, S. H., (2001). An Introduction to Optimization, Second Edition, New York, NY: John Wiley and Sons, Inc.
- [2] Kall, P. ve Wallace, S., (1994). Stochastic Programming, John Wiley and Sons, New York.
- [3] Marti, K., (2005). Stochastic Optimization Methods, Springer, Verlag, Germany.
- [4] Uryasev, S. P. ve Pardalos, P. M. (eds.), (2001). Stochastic Optimization: Algorithms and Applications, Applied Optimization Vol. 54, Kluwer.
- [5] Bastin, F., (2004). Trust-Region Algorithms for Nonlinear Stochastic Programming and Mixed Logit Models, Doctorat en sciences économiques Université Notre Dame de Namur Belgique Union Européenne, Namur, Belgium.
- [6] Dantzig, G. B. ve Thapa, M. N., (2003). Linear Programming 2: Theory and Extensions, Springer-Verlag.
- [7] Gupta, A. ve Maranas C.D., (2000). "A Two-Stage Modeling and Solution Framework for Multisite Midterm Planning under Demand Uncertainty," Industrial & Engineering Chemistry Research 39, 3799-3813.
- [8] Schneeweiss C., (2003). "Distributed Decision Making—A Unified Approach", European Journal of Operational Research 150(2): 237-252.
- [9] Dempe, S., (2002). Foundations of Bilevel Programming, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [10] Patriksson, M. ve Wynter, L., (1999). "Stochastic Mathematical Programs with Equilibrium Constraints", Operations Research Letters, 25: 159-167.
- [11] Ferguson, A. ve Dantzig, G. B., (1956). "The Allocation of Aircraft to Routes: An Example of Linear Programming under Uncertain Demands", Management Science, 3: 45–73.
- [12] Charnes, A. ve Cooper, W. W., (1959). "Chance-constrained Programming," Management Science, 6(1): 73–79.

- [13] Markowitz, H.M, (1952). "Portfolio Selection", The Journal of Finance 7:77–91.
- [14] Markowitz, H.M, (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, John Wiley and Sons, New York.
- [15] Birge, J., (1997). "Stochastic Programming Computation and Applications", INFORMS Journal on Computing, 9(2): 111-33.
- [16] Frank, M. ve Wolfe, P., (1956). "An Algorithm for Quadratic Programming", Naval Research Logistics Quarterly, 3: 95–110.
- [17] Cooper, L. ve LeBlanc, L.J., (1977). "Stochastic Transportation Problems and other Network Related Convex Problems", Naval Research Logistics Quarterly, 24: 327–337.
- [18] Holmberg, K., (1984). "Separable Programming Applied to the Stochastic Transportation Problem", Research Report LiTH-MAT-R-1984-15, Department of Mathematics, Linköping Institute of Technology, Sweden.
- [19] Holmberg, K. ve Jörnsten K., (1984). "Cross Decomposition Applied to the Stochastic Transportation Problem", European Journal of Operational Research, 17(3): 361–368.
- [20] Holmberg, K. ve Kiwiel K., (2006). "Mean Value Cross Decomposition for Nonlinear Convex Problems", Optimization Methods and Software, 21(3).
- [21] Qi L., (1985). "Forest Iteration Method for Stochastic Transportation Problem", Math. Prog. Study, 25: 142–163.
- [22] Qi, L., (1987). "The A-forest Iteration Method for the Stochastic Generalized Transportation Problem", Math. Oper. Res. 12, 1–21.
- [23] Elmaghraby, S.E., (1960). "Allocation under Uncertainty when the Demand has Continuous D.F.", Management Science, 6: 270–294.
- [24] Williams, A.C., (1963). "A Stochastic Transportation Problem", Operations Research, 11(5): 759-770.
- [25] Szwarc, W., (1964). "The Transportation Problem with Stochastic Demand", Management Science, 11: 35-50.
- [26] Holmberg, K., (1995). "Efficient Decomposition and Linearization Methods for the Stochastic Transportation Problem", Computational Optimization and Applications, 4: 293-316.
- [27] Holmberg, K., ve Tuy, H., (1999). "A production-transportation Problem with Stochastic Demand and Concave Production Costs", Mathematical Programming, 85: 157–179.
- [28] Daneva, M., Larsson, T., Patriksson M. ve Rydergren C., (2010). "A Comparison of Feasible Direction Methods for the Stochastic Transportation Problem", Computational Optimization and Applications, 46(3): 451-466.
- [29] Colson, B., Marcotte, P., ve Savard, G., (2005). "Bilevel Programming: A Survey", A quarterly Journal of Operation Research, 3(2), 87-107.

- [30] Stackelberg, H. V., (1952). The Theory of Market Economy. Oxford University Press.
- [31] Bracken, J. ve McGill, J., (1974). "Defense Applications of Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints", Operations Research, 22: 1086-1096.
- [32] Bracken, J. ve McGill, J., (1978). "Production and Marketing Decisions with Multiple Objectives in a Competitive Environment", Journal of Optimization Theory and Applications, 24: 449-458.
- [33] Dempe, S., (2003). "Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints", Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 52(3): 333-359.
- [34] Patriksson M. ve Wynter L., (1997). "Stochastic Nonlinear Bilevel Programming", Technical report, PRISM, Université de Versailles – Saint Quentin en Yvelines, Versailles, France.
- [35] Ryu, J.H., Dua, V. ve Pistikopoulos E.N., (2004). "A Bilevel Programming Framework for Enterprise-Wide Process Networks under Uncertainty", Computers and Chemical Engineering, 28: 1121-1129.
- [36] Roghanian, E., Sadjadi, S.J. ve Aryanezhad, M.B., (2007). "A Probabilistic Bi-level Linear Multi-objective Programming Problem to Supply Chain Planning", Applied Mathematics and Computation, 188(1): 786-800.
- [37] Cheng, L., Wan, Z. ve Wang G., (2009). "Bilevel Newsvendor Models Considering Retailer with CVar Objective", Computers and Industrial Engineering, 57(1): 310-318.
- [38] Sakawa M. ve Katagiri H., (2010). "Interactive Fuzzy Programming Based on Fractile Criterion Optimization Model for Two-Level Stochastic Linear Programming Problems", Cybernetics and Systems: An International Journal, 41(7): 508-521.
- [39] Cromvik, C. ve Patriksson, M., (2010). "On the Robustness of Global Optima and Stationary Solutions to Stochastic Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, Part 2: Applications", Journal Of Optimization Theory & Applications, 144(3): 479-500.
- [40] Kalashnikov, V.V., Pérez-Valdés, G.A., Tomasgard, A., ve diğerleri, (2010). "Natural Gas Cash-Out Problem: Bilevel Stochastic Optimization Approach", European Journal of Operational Research, 206(1): 18-33.
- [41] Özaltın, O. Y., Prokopyev, O. A. ve Schaefer, A. J., (2010). "The Bilevel Knapsack Problem with Stochastic Right-hand Sides", Operations Research Letters, 38(4): 328-333.
- [42] Charles, V., Yadavalli, V. V. S., Rao, M. L. ve Reddy, P. S., (2011). "Stochastic Fractional Programming Approach to a Mean and Variance Model of a Transportation Problem", Mathematical Problems In Engineering, 2011: 1-12.

- [43] Çetin, N., (2008). Bulanık Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemine Çözüm Önerisi, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [44] Birbil, Ş. İ., Gürkan, G. ve Listeş, O., (2006). "Solving Stochastic Mathematical Programs with Complementarity Constraints using Simulation", *Mathematics of Operations Research*, 31(4): 739-760.
- [45] Cote, J.P., Marcotte P. ve Savard G., (2003). "A Bilevel Modelling Approach to Pricing and Fare Optimization in the Airline Industry", *Journal of Revenue and Pricing Management*, 2: 23-36.
- [46] Kosuch S., Le Bodic, P., Leung, J. ve Lisser, A., (2012). "On a Stochastic Bilevel Programming Problem with Knapsack constraints", *Networks*, 59 (1): 107-116.
- [47] Pasternack, B. A., (1985). "Optimal Pricing and Return Policies for Perishable Commodities", *Marketing Science*, 4: 166-76.
- [48] Li, Y., Lim A. ve Rodrigues B., (2009). "Pricing and Inventory Control for a Perishable Product", *Manufacturing and Services Operations Management*, 11(3): 538-542.
- [49] Laporte, G., Louveaux, F. ve Mercure, H., (1992). "The Vehicle Routing Problem with Stochastic Travel Times", *Transportation Science*, 26(3), 161–170.
- [50] Sakawa, M., Nishizaki, I. ve Uemura Y., (2002). "A Decentralized Two-Level Transportation Problem in a Housing Material Manufacturer: Interactive Fuzzy Programming Approach", *European Journal of Operational Research*, 141(1): 167-185.
- [51] Chen, H. K., Hsueh, C. F. ve Chang, M. S., (2009). "Production Scheduling and Vehicle Routing with Time Windows for Perishable Food Products", *Computers and Operations Research*, 36(7): 2311-2319.
- [52] De Wolf, D. ve Smeers, Y., (1997). "A Stochastic Version of a Stackelberg-Nash-Cournot Equilibrium Model, *Management Sciences*, 43: 190-197.
- [53] Xu, H., (2005). "An MPCC Approach for Stochastic Stackelberg-Nash-Cournot Equilibrium." *Optimization*, 54(1): 27–57.
- [54] Özen, U., Norde H. ve Slikker, M., (2009). "A General Framework for Cooperation under Uncertainty", *Operations Research Letters*, 37:148-154.
- [55] Werner, A. S., (2005). Bilevel Stochastic Programming Problems: Analysis and Application to Telecommunications, PhD Thesis, Norwegian University of Science and Technology, Faculty of Social Sciences and Technology Management, Trondheim, Norway.
- [56] Hillier, F.S. ve Lieberman, G.J., (1995). *Introduction to Mathematical Programming (International 2nd Edition)*, McGraw-Hill Publishing Company, New York.
- [57] Birge, J. ve Louveaux, F., (1997). *Introduction to Stochastic Programming*, Springer-Verlag, New York.

- [58] Rao, S. S., (1996). Engineering Optimization: Theory and Practice (3rd Edition), John Wiley and Sons, New York.
- [59] Kataoka, S., (1963). "A Stochastic Programming Model", *Econometrica* 31: 181–196.
- [60] Dantzig, G.B., (1955). "Linear Programming under Uncertainty", *Management Science*, 1: 197–206.
- [61] Benders, J. F., (1962). "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", *Numerische Mathematik*, 4: 238-252.
- [62] Dantzig, G.B. ve Wolfe, P., (1960). "Decomposition Principle for Linear Programs", *Operations Research*, 8: 101-111.
- [63] Louveaux, F. ve van der Vlerk, M., (1993). Stochastic Programming with Simple Integer Recourse, *Mathematical Programming* 61, 301-325.
- [64] Bricker D. L., Cf. Stochastic Programming, by Haneveld, W. K. K. and van der Vlerk, M. H., Dept. of Econometrics & OR, University of Groningen, Netherlands.
http://css.engineering.uiowa.edu/~dbricker/Stacks_pdf8/SLPw_Simple_R.PD
13 Kasım 2011.
- [65] França, P.M. ve Luna, H.P.L., (1982). "Solving Stochastic Transportation Location Problems by Generalized Benders Decomposition", *Transportation Science*, 16(2), 113–126.
- [66] Bialas, W. F. ve Karwan, M. H., (1984). "Two-Level Linear Programming", *Management Science*, 30(8): 1004-1020.
- [67] Ahlatçioğlu, M. ve Tiryaki, F. (1998). *Kantitatif Karar Verme Teknikleri*, Y.T.Ü. Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.
- [68] Bard, J. F. ve Moore, J. T., (1990). "A Branch and Bound Algorithm for the Bilevel Programming Problem", *SIAM Journal of Science and Statistical Computers*, 11: 281–292.
- [69] Ishizuka, Y. ve Aiyoshi, E., (1992). "Double Penalty Method for Bilevel Optimization Problems", *Annals of Operations Research*, 34: 73–88.
- [70] Fukushima, M. ve Lin, G.H., (2004). "Smoothing Methods for Mathematical Programs with Equilibrium Constraints", *Proceedings of the ICKS'04*, IEEE Computer Society, New York, 206–213.
- [71] Lin, G.H., Chen X. ve Fukushima, M., (2007). "New Restricted NCP Functions and their Applications to Stochastic NCP and Stochastic MPEC", *Optimization* 56: 641-653.
- [72] Chen, X., (2000). "Smoothing Methods for Complementarity Problems and their Applications: a Survey", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 43: 32-47.
- [73] Lin, G.H., Chen X. ve Fukushima, M., (2009). "Solving Stochastic Mathematical Programs with Equilibrium Constraints via Approximation and Smoothing

- Implicit Programming with Penalization", Mathematical Programming, 116: 343-368.
- [74] Shapiro, A. ve Xu, H., (2008). "Stochastic Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, Modelling and Sample Average Approximation", Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 57(3): 395-418.
- [75] Ashby, B.H., (1995), Protecting Perishable Foods during Transport by Truck, www.ams.usda.gov/AMSV1.0/getfile?dDocName=STELDEV3021003, 09 Haziran 2012.
- [76] Brito, J., Martínez, F.J., Moreno, J.A. ve Verdegay, J.L., (2010). "Fuzzy Approach for Vehicle Routing Problems with Fuzzy Travel Time", Fuzzy Systems (FUZZ), 2010 IEEE International Conference, 18-23 July 2010.
- [77] Ross, S. M., (2003). Introduction to Probability Models (8th Edition), International Edition, Academic Press.
- [78] Law, A.M. ve Kelton, W.D., (1991). Simulation Modeling and Analysis (2nd ed.), McGraw-Hill Inc., New York.

TEMEL OLASILIKSAL BİLGİLER

Bu bölümde, olasılık ile ilgili çalışmada yararlanılan temel tanımlara yer verilmektedir.

A-1 Rassal Değişkenler

Değer kümesi bir deneyin olası sonuçları olan fonksiyona rassal değişken denir ve genellikle X , Y ve Z gibi bir büyük harfle adlandırılır. Bu fonksiyon reel değerli olup deneyin örnek uzayı üzerinde tanımlıdır. Rassal değişken bir deneyin olası sonuçlarıyla belirlendiğinden rassal değişkenin mümkün değerlerine olasılıklar atanabilir.

Tanım A-1.1 (Kümülatif Dağılım Fonksiyonu) $P\{.\}$ olasılık fonksiyonu olmak üzere, herhangi bir a reel sayısı için, X rassal değişkeninin a reel sayısından küçük veya eşit olma olasılığını veren kümülatif dağılım fonksiyonu, kısaca dağılım fonksiyonu:

$$F(a) = P\{X \leq a\}$$

şeklinde tanımlanır. Dağılım fonksiyonunun bazı özellikleri şunlardır¹:

1. $F(a)$, a 'nın azalmayan fonksiyonudur.

2. $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 1$

3. $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 0$

¹ Ross [77], Sayfa 26, 27.

$$4. P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$$

Tanım A-1.2 (Kesikli Rassal Değişken) Sayılabilir sayıda değer alabilen rassal değişkenlere kesikli rassal değişken denir.

Tanım A-1.3 (Olasılık Ağırlık Fonksiyonu) Herhangi bir a reel sayısı için, kesikli X rassal değişkeninin a reel sayısına eşit olma olasılığını veren olasılık ağırlık fonksiyonu:

$$p(a) = P\{X = a\}$$

şeklinde tanımlanır.

Dağılım fonksiyonu ile olasılık ağırlık fonksiyonu arasındaki ilişki:

$$F(a) = P\{X \leq a\} = \sum_{x \leq a} p(x)$$

şeklindedir.

Tanım A-1.4 (Kesikli Rassal Değişkenler için Beklenen Değer) Beklenen değer, X rassal değişkeninin mümkün değerlerinin ağırlıklı ortalamasıdır. Buradaki ağırlıklar olasılıklardır. Olasılık ağırlık fonksiyonu $p(x)$ olan X rassal değişkeninin beklenen değeri:

$$E[X] = \sum_{x: p(x) > 0} x p(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek A-1.1 (Poisson Rassal Değişkeni) $0, 1, 2, \dots$ değerlerini alabilen X rassal değişkeni, $i = 0, 1, 2, \dots$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere,

$$p(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

şeklindeki olasılık ağırlık fonksiyonuna sahip ise λ parametrelili Poisson rassal değişkeni adını alır.

Dikkat edilirse,

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \{1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots\} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

olur. λ parametrelili Poisson rassal değişkeninin beklenen değeri ise

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

olarak bulunur.

Önerme A-1.1 Olasılık ağırlık fonksiyonu $p(x)$ olan X kesikli bir rassal değişkeni ve reel değerli g fonksiyonu için,

$$E[g(X)] = \sum_{x:p(x)>0} g(x)p(x) \quad (\text{A.1})$$

olur¹.

Tanım A-1.5 (Kesikli Rassal Değişkenler için Varyans) X rassal değişkeninin beklenen değerinden sapmasının karesinin beklenen değerine X rassal değişkeninin varyansı denir ve $Var(X)$ ile gösterilir. (A.1)'den,

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum x^2 p(x) - 2E[X] \sum x p(x) + E[X]^2 \sum p(x) = E[X^2] - E[X]^2$$

olduğu görülebilir.

Tanım A-1.6 (Sürekli Rassal Değişken) Belirli bir aralıktaki sınırsız sayıda değer alabilen rassal değişkenlere sürekli rassal değişken denir. Sürekli rassal değişkene örnek olarak belirli bir aralıktaki tüm reel değerleri alabilen *bir arabanın ömrü* verilebilir.

Tanım A-1.7 (Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu) Herhangi bir B reel sayı kümesi ve X sürekli rassal değişkeni için,

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x) dx$$

¹ Ross[77], Sayfa 44.

olacak şekilde negatif olmayan bir $f(x)$ fonksiyonu mevcut ise bu fonksiyon olasılık yoğunluk fonksiyonu adını alır.

Dağılım fonksiyonu ile olasılık yoğunluk fonksiyonu arasındaki ilişki:

$$F(a) = P\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

şeklindedir. Bu eşitliğin her iki tarafının da a 'ya göre türevi alınır;

$$\frac{dF}{da} = \frac{d}{da} \int_{-\infty}^a f(x) dx = f(a) \quad (\text{A.2})$$

elde edilir¹. Ayrıca,

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx$$

ve

$$P\{X = a\} = 0$$

özellikleri görülebilir.

Tanım A-1.8 (Sürekli Rassal Değişkenler için Beklenen Değer) X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ise X 'in beklenen değeri:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{A.3})$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme A-1.2 Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olan X sürekli rassal değişkeni ve reel değerli g fonksiyonu için,

¹ Ross [77], Sayfa 34.

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad (A.4)$$

olur.¹

İspat: $g(X) = Y$ alınırsa (A.3)'den,

$$E[g(X)] = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} a f_Y(a) da$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$F_Y(a) = P\{Y \leq a\} = P\{g(X) \leq a\} = P\{X \leq g^{-1}(a)\} = F(g^{-1}(a))$$

olduğu göz önünde bulundurularak zincir kuralı ile (A.2)'den,

$$f_Y(a) = \frac{dF_Y(a)}{da} = \frac{d}{da}[F(g^{-1}(a))] = F'(g^{-1}(a)) \frac{d}{da}[g^{-1}(a)]$$

olur. Böylece,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} a f_Y(a) da = \int_{-\infty}^{\infty} a F'(g^{-1}(a)) \frac{d}{da}[g^{-1}(a)] da = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{dF}{dx} \frac{dx}{da} da = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

olarak bulunur.

Sonuç A-1.1 Eğer c ve d birer sabit sayı ise $E[cX + d] = cE[X] + d$ olur.²

Tanım A-1.9 (Sürekli Rassal Değişkenler için Varyans) Kesikli rassal değişkenler için verilen tanım sürekli rassal değişkenler için de geçerlidir. (A.4)'den,

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

¹ Ross [77], Sayfa 45.

² Ross [77], Sayfa 45.

olduğu görülebilir.

Örnek A-1.2 (Uniform Rassal Değişken) Olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olan X sürekli rassal değişkeni için $(0,1)$ aralığında uniform dağılım gösterir denir. Dikkat edilirse,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 dx = 1$$

olduğu görülür. Ayrıca $a, b \in (0,1)$ olmak üzere,

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx = b - a$$

bulunur.

Burada verilen $(0,1)$ aralığı yerine herhangi bir (α, β) aralığı da kullanılabilir. Bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & x \in (\alpha, \beta) \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklini alır. Uniform rassal değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$F(a) = P\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & a < \alpha \\ \frac{a - \alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq a \leq \beta \\ 1, & a > \beta \end{cases}$$

olur. (α, β) aralığında uniform dağılım gösteren X rassal değişkeninin $(X \sim U[\alpha, \beta])$

beklenen değeri ve varyansı sırasıyla:

$$E[X] = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{x^2}{2} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} = \frac{\beta + \alpha}{2}$$

ve

$$Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

olarak bulunur.

Uniform rassal değişken tam bir belirsizliği temsil eder. Deneyin tüm sonuçları eşit olasılıkla gerçekleşir. Elde çok fazla veri bulunmadığı durumlarda kullanılır. Kesikli olarak da kullanılabilir.¹

Örnek A-1.3 (Eksponensiyel Rassal Değişken) $\lambda > 0$ için, olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde verilen X sürekli rassal değişkenine λ parametrelili eksponensiyel rassal değişken denir. Dikkat edilirse,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

olduğu görülür. $a \geq 0$ olmak üzere eksponensiyel rassal değişkenin dağılım fonksiyonu:

$$F(a) = P\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$$

olarak bulunur. Kısmi integrasyon yöntemiyle, λ parametrelili eksponensiyel rassal değişkenin beklenen değeri:

¹ Law ve Kelton [78], Sayfa 299, 300 ve 320.

$$E[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

olarak bulunur.

Eksponensiyel rassal değişken, özellikle birbirinden bağımsız iki olayın gerçekleşmesi arasında geçen zamanı temsil eder. Matematiksel olarak takip edilebilir olduğundan sıklıkla kullanılır.¹

Örnek A-1.4 (Normal Rassal Değişken) Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

şeklinde verilen X sürekli rassal değişkenine μ ve σ^2 parametrelili normal rassal değişken veya normal dağılım gösterir denir. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği μ 'ye göre simetriktir. μ ve σ^2 parametrelili normal rassal değişkenin beklenen değeri:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu + \mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$$

olarak bulunur. Varyansı ise, $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ değişken dönüşümü ve sonrasında kısmi integrasyon yöntemi ile

$$Var[X] = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sigma^2$$

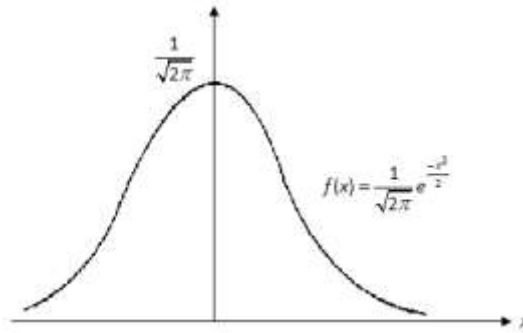
olarak elde edilir. Normal rassal değişkenin $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ parametresi standart sapma adını alır.

¹ Law ve Kelton [78], Sayfa 300.

Örnek A-1.5 (Standart Normal Rassal Değişken) Beklenen değeri (ortalaması) 0 ve standart sapması 1 olan normal rassal değişkene standart normal rassal değişken denir. Standart normal rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

olur.



Şekil A-1. 4 Standart rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

Teorem A-1.1 μ ve σ^2 parametrelili X normal rassal değişkeni verilsin. $Y = \alpha X + \beta$ rassal değişkeni de $\alpha\mu + \beta$ ve $\alpha^2\sigma^2$ parametrelili normal rassal değişkendir.

İspat: Öncelikle $\alpha > 0$ olduğunu kabul ederek,

$$F_Y(a) = P\{Y \leq a\} = P\{\alpha X + \beta \leq a\} = P\{X \leq \frac{a - \beta}{\alpha}\} = F_X\left(\frac{a - \beta}{\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{a - \beta}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Burada $y = \alpha x + \beta$ dönüşümü yapılırsa,

$$F_Y(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y - \beta}{\alpha} - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dy}{\alpha} = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\alpha} e^{-\frac{(y - (\alpha\mu + \beta))^2}{2\sigma^2\alpha^2}} dy$$

şeklinde elde edilen dağılım fonksiyonu $\alpha\mu + \beta$ ve $\alpha^2\sigma^2$ parametrelili normal rassal değişkene aittir. $\alpha < 0$ için de benzer sonuç elde edilir. O halde, Y de normal rassal değişkendir.¹

Sonuç A-1.2 Eğer Z standart normal rassal değişken ise $X = \sigma Z + \mu$ rassal değişkeni de normaldir ve parametreleri μ ve σ^2 olur.

A-2 Ortak Dağılımlı Rassal Değişkenler (Ross [77]²)

Birden fazla rassal değişkenin var olması durumunda ortak (birleşik) dağılım fonksiyonundan bahsedilebilir.

Tanım A-2.1 X ve Y birer rassal değişken olmak üzere,

$$F(a, b) = P\{X \leq a, Y \leq b\}$$

fonksiyonuna ortak (birleşik) dağılım fonksiyonu denir. Dikkat edilirse,

$$F(a, \infty) = P\{X \leq a, Y < \infty\} = F_X(a)$$

$$F(\infty, b) = P\{X < \infty, Y \leq b\} = F_Y(b)$$

olarak tek bir rassal değişkenin olması durumuna geçiş yapılabilir.

Tanım A-2.2 Eğer X ve Y birer kesikli rassal değişken ise bu durumda ortak (birleşik) olasılık ağırlık fonksiyonu:

$$p(a, b) = P\{X = a, Y = b\}$$

şeklinde tanımlamak uygun olacaktır. Buradan, X ve Y rassal değişkenlerinin olasılık ağırlık fonksiyonları sırasıyla:

$$p_X(x) = \sum_{y: p(x, y) > 0} p(x, y)$$

ve

¹ Ross [77], Sayfa 37 ve 38.

² Sayfa 47-68.

$$p_Y(y) = \sum_{x:p(x,y)>0} p(x,y)$$

olur.

Tanım A-2.3 A ve B birer küme, X ve Y birer sürekli rassal değişken olmak üzere,

$$P\{X \in A, Y \in B\} = \int_B \int_A f(x,y) dx dy$$

olacak şekilde bir $f(x,y)$ fonksiyonu mevcut ise $f(x,y)$ fonksiyonuna ortak (birleşik) olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

Dikkat edilirse, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$ ve $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$ olmak üzere,

$$P\{X \in A\} = P\{X \in A, Y \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_A f(x,y) dx dy = \int_A f_X(x) dx$$

$$P\{Y \in B\} = P\{X \in (-\infty, \infty), Y \in B\} = \int_B \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_B f_Y(y) dy$$

olur.

Önerme A-2.1 $g(x,y)$ iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere, kesikli X ve Y rassal değişkenleri için

$$E[g(X,Y)] = \sum_y \sum_x g(x,y) p(x,y),$$

sürekli X ve Y rassal değişkenleri için

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy$$

şeklindedir.

Sonuç A-2.1 X ve Y birer sürekli rassal değişken olmak üzere,

$$E[X+Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y)f(x,y)dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)dx dy = E[X] + E[Y]$$

olur. Genelleştirilecek olursa,

$$E[a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n] = a_1E[X_1] + a_2E[X_2] + \dots + a_nE[X_n]$$

şeklindedir.

Tanım A-2.4 (Bağımsız Rassal Değişkenler) Her a ve b sayısı için,

$$P\{X \leq a, Y \leq b\} = P\{X \leq a\}P\{Y \leq b\}$$

ise X ve Y rassal değişkenlerine bağımsız rassal değişkenler denir. Bu durumda,

$$F(a,b) = P\{X \leq a, Y \leq b\} = P\{X \leq a\}P\{Y \leq b\} = F_X(a)F_Y(b)$$

olur.

Eğer X ve Y kesikli rassal değişkenler ise

$$p(x,y) = P\{X=x, Y=y\} = P\{X=x\}P\{Y=y\} = p_X(x)p_Y(y),$$

sürekli rassal değişkenler ise

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} (F_X(x)F_Y(y)) \right] = \frac{\partial}{\partial y} [F_Y(y)f_X(x)] = f_X(x)f_Y(y)$$

olur.

Önerme A-2.2 X ve Y rassal değişkenleri bağımsız ve h ile g birer fonksiyon ise

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

ifadesi geçerlidir.

İspat: X ve Y sürekli rassal değişkenler ise

$$\begin{aligned}
E[g(X)h(Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f(x,y)dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_x(x)f_y(y)dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_x(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_y(y)dy = E[g(X)]E[h(Y)]
\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde, eğer X ve Y kesikli rassal değişkenler ise

$$\begin{aligned}
E[g(X)h(Y)] &= \sum_x \sum_y g(x)h(y)p(x,y) = \sum_x \sum_y g(x)h(y)p_x(x)p_y(y) \\
&= \sum_x g(x)p_x(x) \sum_y h(y)p_y(y) = E[g(X)]E[h(Y)]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım A-2.5 (Kovaryans) X ve Y rassal değişkenlerinin kovaryansı:

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]] \\
&= E[XY] - E[Y]E[X] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y] = E[XY] - E[X]E[Y]
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer X ve Y rassal değişkenleri bağımsız ise Önerme A-2.2'den,

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[X]E[Y] - E[X]E[Y] = 0 \quad (A.5)$$

olur. X , Y ve Z rassal değişkenler ve c de sabit bir sayı olmak üzere, kovaryansın diğer bazı özellikleri:

1. $Cov(X,X) = E[XX] - E[X]E[X] = E[X^2] - E[X]^2 = Var(X)$
2. $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[YX] - E[Y]E[X] = Cov(Y,X)$
3. $Cov(cX,Y) = E[cXY] - E[cX]E[Y] = cE[XY] - cE[X]E[Y] = cCov(X,Y)$
4. $Cov(X,Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$

ve özellik 4, genelleştirilecek olursa,

$$5. Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Cov(X_i, Y_j),$$

$$\begin{aligned}
6. \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \text{Cov}(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Sonuç A-2.2 $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız rassal değişkenler ise Özellik 6'dan,

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

$$\text{Var}(cX) = E[(cX)^2] - E[cX]^2 = E[c^2 X^2] - E[cX]E[cX] = c^2 \{E[X^2] - E[X]^2\} = c^2 \text{Var}(X)$$

olduğu görülür.

Tanım A-2.6 (Moment Üreten Fonksiyon) $\phi(t) = E[e^{tx}]$ şeklinde tanımlanan moment üreten fonksiyonun türevleri yardımıyla X rassal değişkeninin momentleri elde edilir.

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{d}{dt} E[e^{tx}] = E\left[\frac{d}{dt}(e^{tx})\right] = E[Xe^{tx}] \Rightarrow \phi'(0) = E[X]$$

$$\phi''(t) = \frac{d}{dt} \phi'(t) = \frac{d}{dt} E[Xe^{tx}] = E\left[\frac{d}{dt}(Xe^{tx})\right] = E[X^2 e^{tx}] \Rightarrow \phi''(0) = E[X^2]$$

⋮

$$\phi^{(n)}(0) = E[X^n]$$

Örnek A-2.1 Standart normal rassal değişkenin moment üreten fonksiyonu:

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + tx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t^2 - t^2 + 2tx - x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Z standart normal rassal değişken ise $X = \sigma Z + \mu$ rassal değişkeni de normal ve parametreleri μ ve σ^2 olduğundan, normal rassal değişkenin moment üreten fonksiyonu:

$$\phi(t) = E[e^{tX}] = E[e^{t(\sigma Z + \mu)}] = E[e^{t\sigma Z} e^{t\mu}] = E[e^{t\sigma Z}] E[e^{t\mu}] = e^{t\mu} e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} = e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu}$$

şeklindedir.

Önerme A-2.3 X ve Y bağımsız rassal değişkenler ise

$$\phi_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} e^{tY}] = E[e^{tX}] E[e^{tY}] = \phi_X(t) \phi_Y(t)$$

olur.

Teorem A-2.1 Bağımsız normal X ve Y rassal değişkenlerinin parametreleri sırasıyla (μ_1, σ_1^2) ve (μ_2, σ_2^2) olsun. $X+Y$ rassal değişkeni de $\mu_1 + \mu_2$ ortalamalı, standart sapması $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ olan normal rassal değişkendir.

İspat: $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \phi_Y(t) = e^{\frac{t^2 \sigma_1^2}{2} + t\mu_1} e^{\frac{t^2 \sigma_2^2}{2} + t\mu_2} = e^{\frac{t^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2} + t(\mu_1 + \mu_2)}$

Buradan $X+Y$ rassal değişkeninin, $\mu_1 + \mu_2$ ortalamalı ve standart sapması $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ olan normal rassal değişken olduğu açıkça görülür.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hande GÜNAY AKDEMİR
Doğum Tarihi ve Yeri : 29.08.1980/Kadıköy
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : handegunay@kirkclareli.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2006
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2003
Lise	Sayısal	Özel Marmara Fen Lisesi	1997

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010-Halen	Kırklareli Üniversitesi Vize Meslek Yüksekokulu	Öğretim Görevlisi
2004-2010	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. GÜNAY AKDEMİR, H., TİRYAKİ F., "Bilevel Stochastic Transportation Problem with Exponentially Distributed Demand", Bitlis Eren University Journal of Science and Technology, 2, (2012), 32-37, ISSN 2146-7706.
2. GÜNAY AKDEMİR, H., TİRYAKİ F., "İki Seviyeli Kesikli Stokastik Taşıma Problemi", Elektronik Meslek Yüksekokulları Dergisi, Cilt 1, Sayı 1, Aralık 2011, Sayfa 198-210, ISSN: 2146-7684.

Bildiri

1. GÜNAY AKDEMİR, H., TİRYAKİ F., A Bilevel Programming Model for Transportation of a Perishable Item with Stochastic Lifetime, ECCO 2012 – 25th Conference of European Chapter on Combinatorial Optimization, Antalya, Turkey, April 26 – 28, 2012.
2. GÜNAY AKDEMİR, H., TİRYAKİ F., Using Fuzzy Linear Regression to Estimate Relationship between Forest Fires and Meteorological Conditions, ICAAA 2011- International Conference on Applied Analysis and Algebra, Yıldız Technical University, 29-30 June, 1-2 July 2011, İstanbul, Turkey.
3. GÜNAY AKDEMİR, H., ANIL, N. K., ANIL, A., Vize Meslek Yüksekokulunun Yeni Program Açması ve Bina Planlaması için Tamsayılı Hedef Programlama Yaklaşımı, UMYOS 2011-2. Uluslararası 6. Ulusal Meslek Yüksekokulları Sempozyumu, 25-27 Mayıs 2011, Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın Meslek Yüksekokulu, Aydın, Türkiye.
4. GÜNAY, H., TİRYAKİ F., Bulanık Lineer Regresyon Modelleri ve Bir Uygulama, YA/EM 2008- Yöneylem Araştırması/ Endüstri Mühendisliği, 28. Ulusal Kongresi, 30 Haziran-2 Temmuz 2008, Galatasaray Üniversitesi, Ortaköy, İstanbul.
5. GÜNAY, H., TİRYAKİ F., Bulanık Regresyon Problemine Bulanık Çıkarım Yaklaşımı, YA/EM 2008- Yöneylem Araştırması/ Endüstri Mühendisliği, 28. Ulusal Kongresi, 30 Haziran-2 Temmuz 2008, Galatasaray Üniversitesi, Ortaköy, İstanbul.
6. TİRYAKİ, F., GÜNAY, H., "Birleştirme Operatörleri ve Dilsel Niceleyiciler: Yurtdışı Kongrelerine Katılım için Ödenek Tahsisi Yapılacak Akademisyen Seçimine Bir Uygulama", Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 2005 (YA/EM'2005) 25. Ulusal Kongresi, 04-06 Temmuz 2005, Koç Üniversitesi, Sarıyer, İstanbul.

Kitap

1. Matematik isimli kitapta "Limit ve Süreklilik" adlı bölüm, Editörler; Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ ve Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ, Lisans Yayıncılık, 2011.