

154217

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇOK KRİTERLİ KAYNAK TAHSİSİ
PROBLEMLERİNİN OPTİMİZASYONUNDA
BULANIK KARAR VERME YÖNTEMLERİNİN
UYGULANMASI**

Endüstri Müh. Vildan Çetinsaya

**FBE Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı Sistem Mühendisliği Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin BAŞLIGİL (YTÜ)

Prof. Dr. Cengiz KAHRAMAN (İTÜ)

Y. Doç. Dr. Hayri BAKARCI (YTÜ)

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	v
KISALTMA LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖNSÖZ	xi
ÖZET	xii
ABSTRACT	xiii
1. GİRİŞ	1
2. ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME	2
2.1 Genel Tanımlar ve Terimler	3
2.2 Çok Kriterli Karar Verme Metotları	4
2.2.1 Ağırlıklı Toplam Modeli Metodu	6
2.2.2 Ağırlıklı Çarpım Modeli Metodu	6
2.2.3 Analitik Hiyerarşi Prosesi Metodu	7
2.2.4 Düzeltilmiş Analitik Hiyerarşi Prosesi Metodu	7
2.2.5 ELECTRE Metodu	9
2.2.6 TOPSIS Metodu	14
2.3 Çok Kriterli Karar Verme Problemleri için Nitel Verilerin Sayısallaştırılması	16
2.3.1 Farklı ölçeklerin değerlendirilmesi	19
2.3.2 Gerçek Sürekli İkili Karşılaştırma ve En Yakın Kesikli İkili Karşılaştırma Matrisi Kavramları	19
2.4 Çok Kriterli Karar Verme Metotları İçin Bir Duyarlılık Analizi Yaklaşımı	22
2.4.1 İki Büyük Duyarlılık Analizi Yaklaşımı	23
2.4.2 En Kritik Kriterin Belirlenmesi	24
2.4.2.1 Tanımlar ve Terminoloji	24
2.4.2.2 WSM veya AHP Kullanımı	25

2.4.2.3 WPM Kullanımı	30
2.4.3 En kritik performans ölçütü a_{ij} 'nin tanımlanması	32
2.4.3.1 Tanımlar ve Terminoloji	32
2.4.3.2 Eşik değerlerin Δ'_{ij} tanımlanması	34
2.5 Bir Karar Matrisinin İşlenmesi İçin Değerlendirme Metotları ve Anormalliklerin derecelendirilmesi.....	44
2.5.1 İki Değerlendirme Kriteri.....	44
2.5.2 İlk Değerlendirme Kriteri Kullanılarak Metotların Test Edilmesi.....	45
2.5.3 İkinci Değerlendirme Kriteri Kullanılarak Metotların Test Edilmesi	48
2.5.4 TOPSIS Metodunun Değerlendirilmesi	52
2.5.5 Sonuçların Değerlendirilmesi.....	53
3. BULANIK ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME	55
3.1 Çok Kriterli Karar Verme Problemlerinde Bulanık Mantık Kullanılması	55
3.1.1 Bulanık İşlemler	56
3.1.2 Bulanık Sayıların Sıralanması	58
3.2 Bulanık Ağırlıklı Toplam Modeli (WSM) Metodu.....	60
3.3 Bulanık Ağırlıklı Çarpım Modeli (WPM) Metodu	61
3.4 Bulanık Analitik Hiyerarşi Prosesi (AHP) Metodu.....	62
3.5 Bulanık Düzeltilmiş Analitik Hiyerarşi Prosesi (R-AHP) Metodu	65
3.6 Bulanık TOPSIS Metodu.....	66
3.7 Bulanık Çok Kriterli Karar Verme Metotları için İki Değerlendirme Kriteri	68
3.7.1 İlk Bulanık Değerlendirme Kriteri Kullanılarak Metotların Test Edilmesi	69
3.7.2 İkinci Bulanık Değerlendirme Kriteri Kullanılarak Metotların Test Edilmesi	72
4. BULANIK HEDEF PROGRAMLAMA	75
4.1 Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Narasimhan Yaklaşımı	77
4.2 Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Hannan Yaklaşımı	82
4.3 Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Yang, Ignizio ve Kim Yaklaşımı.....	86
4.4 Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Tiwari, Dharmar ve Rao Yaklaşımı.....	88
4.5 Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Chen Yaklaşımı	93
4.6 Kim ve Whang Yaklaşımı	97
4.7 Tiwari, Dharmar ve Rao'nun Toplamsal Model Yaklaşımı.....	102
4.8 Chen ve Tsai'nin Toplamsal Model Yaklaşımı.....	108
4.9 Wang ve Fu Yaklaşımı	112

5.	UYGULAMA.....	121
6.	SONUÇ	142
	KAYNAKLAR.....	144
	ÖZGEÇMİŞ.....	145



SİMGE LİSTESİ

a_{ij}	Bir A karar matrisinde C_j karar kriterine göre A_i alternatifinin performansı
C_j	Karar Kriteri
w_i	i alternatifinin yada kriterinin önem ağırlığı
C_{kl}	Uyumluluk Kümesi
D_{kl}	Uyumsuzluk Kümesi
d, τ	Eşik Değer
A^+	İdeal Çözüm
A^-	Negatif İdeal Çözüm
S_i^+	İdeal Çözüme Uzaklığı
S_i^-	Negatif İdeal Çözüme Uzaklığı
$\text{sens}(C_k)$	C_k Kriterinin Duyarlılık Katsayısı
δ	Mutlak Değişim Miktarı
N/F	Fizibil Olmayan
Δ	En küçük Değişim Miktarı
$R(A_K/A_L)$	A_K ve A_L alternatiflerinin WPM Puanı
$\tilde{n}$	Bulanık Üçgensel Sayı
(l,m,u)	Bulanık Üçgensel Sayı Gösterimi (küçük, orta, büyük)(lower, medium, upper)
p_i	Sapma Değişkeni
n_i	Sapma Değişkeni
T_i	Öncelik Sıralaması
$(Ax)_i$	Kısıt ve/veya Hedef Denklemi
b_i	Hedef Değeri
d_i	Katlanılabilir Sapma Miktarı
$\mu(x)$	Üyelik Derecesi
t_i^-, t_i^+	Tolerans Miktarı
β_i^-, β_i^+	Bulanık Hedeflere Üye Olmama Derecesi
Ψ	Karar Vericinin Riske Karşı Duyarlılık Derecesini Temsil Eden Katsayı
x_i	i projesinin yapılabilirliği

KISALTMA LİSTESİ

AHP	Analitik Hiyerarşi prosesi (Analytic hierarchy process)
R-AHP	Düzeltilmiş Analitik Hiyerarşi Prosesi (Revised Analytic hierarchy process)
WSM	Ağırlıklı Toplam Modeli (Weighted Sum Model)
WPM	Ağırlıklı Çarpım Modeli (Weighted Product Model)
ELECTRE	for Elimination and Choice Translating Reality
TOPSIS	for the Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution
MCDM	Çok Kriterli Karar Verme (Multiple Criteria Decision Making)
MODM	Çok Amaçlı Karar Verme (Multiple Objective Decision Making)
MADM	Çok Ölçütlü Karar Verme (Multiple Attribute Decision Making)
RCP	Gerçek Sürekli İkili Karşılaştırma Matrisi (Real Continuous Pairwise)
CDP	En Yakın Kesikli İkili Karşılaştırma Matrisi (Closest Discrete Pairwise)
PT	Kısmi En İyi (Percent Top)
PA	Kısmi Herhangi (Percent Any)
AT	Mutlak En İyi (Absolute Top)
AA	Mutlak Herhangi (Absolute Any)
F-AHP	Analitik Hiyerarşi prosesi (Analytic hierarchy process)
F-R-AHP	Düzeltilmiş Analitik Hiyerarşi Prosesi (Revised Analytic hierarchy process)
F-TOPSIS	for the Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution
FGP	Bulanık Hedef Programlama (Fuzzy Goal Programming)

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1	Farklı çok kriterli karar verme metotlarının en iyi çok kriterli karar verme metodunu göstermesi (Triantaphyllou, 2000).	54
Şekil 3	Bulanık $\tilde{A}_1$ ve $\tilde{A}_2$ Alternatiflerinin Üyelik Fonksiyonları.	59
Şekil 4	Bulanık WSM'ye göre bulanık alternatiflerin üyelik öncelik fonksiyonları.	61
Şekil 5	Bulanık WPM'ye göre bulanık alternatiflerin üyelik fonksiyonları.	62
Şekil 6	Üçgensel Üyelik Fonksiyonu.	83
Şekil 7	Farklı Risk Grupları ve üyelik fonksiyonları	114



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 Saaty'nin Bağlı Önemler Ölçeği (Saaty, 1980).....	17
Çizelge 2.2 Lootsma'nın Önem Ağırlıkları (Triantaphyllou, 2000)	18
Çizelge 2.3 Lootsma (1998) Tarafından Tanımlanan Bağlı Önemler Ölçeği	19
Çizelge 2.4 Öncelik Sıralaması	27
Çizelge 2.5 Tüm mümkün $\delta_{k,i,j}$ değerleri (Kriter ağırlıklarındaki mutlak değişimler).....	28
Çizelge 2.6 Tüm mümkün $\delta_{k,i,j}$ değerleri (Kriter ağırlıklarındaki yüzde değişimler)	29
Çizelge 2.7 Mevcut Sıralama	31
Çizelge 2.8 WPM Örneği için Mümkün Tüm K değerleri	32
Çizelge 2.9 Karar Matrisi ve Başlangıç Öncelikleri.....	35
Çizelge 2.10 AHP/WSM kullanımı için bağıl olarak eşik değerleri $\tau'_{i,j,k}$ (%)	37
Çizelge 2.11 Her a_{ij} performans ölçütü için Δ'_{ij} Kritiklik derecesi.	38
Çizelge 2.12 Her a_{ij} performans ölçütü için $sens(a_{ij})$ Kritiklik derecesi.	38
Çizelge 2.13 Başlangıç Sıralaması	40
Çizelge 2.14 WPM kullanımı için bağıl olarak (%) eşik değerleri $\tau'_{i,j,k}$	41
Çizelge 2.15 Her a_{ij} Performans Ölçüsü için Yüzde Δ'_{ij} Kritiklik Dereceleri	42
Çizelge 2.16 Her a_{ij} Performans Ölçüsü için $sens(a_{ij})$ duyarlılık katsayıları	42
Çizelge 2.17 WSM ve AHP arasındaki (%) çelişki oranı (Triantaphyllou, 2000).....	47
Çizelge 2.18 WSM ve Düzeltilmiş AHP arasındaki (%) çelişki oranı.....	47
Çizelge 2.19 WSM ve WPM arasındaki (%) çelişki oranı (Triantaphyllou, 2000)	48
Çizelge 2.20 Optimum olmayan bir alternatifin yerine daha kötü bir alternatif yerleştirildiğinde, optimum alternatifi göstermesindeki (%) değişme oranı. (AHP için).....	50
Çizelge 2.21 Optimum olmayan bir alternatifin yerine daha kötü bir alternatif yerleştirildiğinde, optimum alternatifi göstermesindeki (%) değişme oranı. (AHP için).....	50
Çizelge 2.22 Özet Çizelge	51
Çizelge 2.23 WSM ve TOPSIS arasındaki (%) çelişki oranı (Triantaphyllou, 2000).....	52
Çizelge 2.24 Optimum olmayan bir alternatifin yerine daha kötü bir alternatif yerleştirildiğinde, optimum alternatifi göstermesindeki (%) değişme oranı. (TOPSIS için) (Triantaphyllou, 2000)	53
Çizelge 4.1 Narasimhan Yaklaşımı için verilen örnek verileri gösteren tablo.....	79
Çizelge 5.1 Kriterler İçin İkili Karşılaştırma Matrisi	121

Çizelge 5.2 Karar Vericinin Oluşturduğu Kriterlere Göre Projelerin Değerlendirilme Verileri .	122
Çizelge 5.3 Maliyet Kriterine göre Projelerin birbirine göre önem dereceleri.	122
Çizelge 5.4 Risk Kriterine göre Projelerin birbirine göre önem dereceleri.	123
Çizelge 5.5 Zaman Kriterine göre Projelerin birbirine göre önem dereceleri.	123
Çizelge 5.6 Etkinlik Kriterine göre Projelerin birbirine göre önem dereceleri.	124
Çizelge 5.7 Prestij Kriterine göre Projelerin birbirine göre önem dereceleri.	124
Çizelge 5.8 Boyut Analizi sonucunda elde edilen kriterlerin önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)	125
Çizelge 5.9 Boyut Analiziyle projelerin maliyet kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)	125
Çizelge 5.10 Boyut Analiziyle projelerin risk kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)	126
Çizelge 5.11 Boyut Analiziyle projelerin zaman kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)	126
Çizelge 5.12 Boyut Analiziyle projelerin etkinlik kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)	127
Çizelge 5.13 Boyut Analiziyle projelerin prestij kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)	127
Çizelge 5.14 Bulanık AHP uygulanmasının sonucunda elde edilen skorlar ve projeler için öncelik sıralaması.	128
Çizelge 5.15 Kriterlerin önem ağırlıkları. (Bulanık R-AHP)	128
Çizelge 5.16 Projelerin maliyet kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık R-AHP)	129
Çizelge 5.17 Projelerin risk kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık RAHP)	129
Çizelge 5.18 Projelerin zaman kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık R-AHP)	130
Çizelge 5.19 Projelerin etkinlik kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık R-AHP)	130
Çizelge 5.20 Projelerin prestij kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık R-AHP)	131
Çizelge 5.21 Bulanık R-AHP uygulanmasının sonucunda elde edilen skorlar ve projeler için öncelik sıralaması.	131
Çizelge 5.22 TOPSIS metodunun kullanılacağı ham karar matrisi.	132
Çizelge 5.23 Normalize Edilmiş Bulanık Karar Matrisi.	132
Çizelge 5.24 Bulanık Ağırlıklandırılmış Normalize Karar Matrisinin Yapılandırılması.	133
Çizelge 5.25 Bulanık İdeal ve Bulanık Negatif İdeal Çözümlerin Belirlenmesi.	133
Çizelge 5.26 Bulanık Ayırma Ölçüsü.	135
Çizelge 5.27 TOPSIS metodunun verdiği öncelik sıralaması	135
Çizelge 5.28 Bulanık AHP + Bulanık Hedef Programlama uygulandığında elde edilen sonuçlar	138
Çizelge 5.29 Bulanık R-AHP + Bulanık Hedef Programlama uygulandığında elde edilen sonuçlar	140

Çizelge 5.30 Özet Tablo.....	140
------------------------------	-----



ÖNSÖZ

Karar verme olgusu, hayatımızın her noktasında karşımıza çıkan bir olgudur. Hem özel hem de iş hayatımızın çeşitli noktalarında farklı önemlere sahip kararlar almak zorunda kalırız. Bu kararlar, belirli bir süre içinde sonuçlarıyla birlikte karşımıza çıkar. Bu nedenle; doğru kararlar alarak, hayatımız için olumlu sonuçlar almaya çalışırız. Özel hayatımızdaki problemler için karar alma yetkisi ve sorumluluğu tamamen kendi inisiyatifimizdedir. Bu nedenle, bu kararları alırken sadece kendi sezgilerimiz ve/veya yöntemlerimizle hareket ederiz. Fakat; iş hayatında karar verirken verilerin kantitatif olarak ifade edilebilmesi ve kararın sonuçlarının doğrudan çalıştığımız kurumu etkilemesi nedeniyle daha doğru karar almak için çeşitli araçlar ve yöntemler kullanırız. Karar verme, özel hayatımızda olduğu gibi, iş dünyasının da çalışmasını sağlayan temel unsurlardandır. Tüm yöneticiler, bulundukları faaliyet alanı ve kademelerinden bağımsız olarak stratejik düzeyden operasyonel düzeye kadar çeşitlenen geniş bir yelpazede kısa, orta, uzun dönemli kararlar vermek zorunda kalırlar. Ancak iyi karar verebilmek kolay bir iş değildir. Klasik anlamda düşünüldüğünde, iyi kararlar verebilmek için deneyim önemli bir faktör olarak öne çıkmaktadır. Öte yandan son derece karmaşık bir yapıya dönüşmüş, rekabetin yoğun olduğu, sürekli değişimin yaşandığı, milyonlarca insanın yer aldığı, yoğun bir veri bulutunun içinde işleyen, yüksek teknoloji kullanan günümüz iş dünyası koşullarında klasik yaklaşımla sadece deneyimi kullanarak verilen kararlar işletmeler açısından çok talihsiz sonuçlar doğurabilir.

Karar verme konusundaki en önemli kriter, kaynaklardır. Kaynakların hiçbir zaman sonsuz olamayacağı düşünüldüğünde, kısıtlı kaynaklarla en iyi sonucu almak iş dünyasının da en önemli problemidir. Kısıtlı kaynakların mevcudiyeti, kaynakların kullanımında belirli amaç işlevlerini veya işlevleri en iyileyecek kaynak tahsislerini de önemli kılar.

Bu çalışmada, bulanık ortamda kaynak tahsisi problemlerinin çözümü için geliştirilen algoritmalar kullanılmakta, hem çok kriterli karar verme yöntemlerinin kaynak tahsisi problemlerine uygulanabilirliğini incelemekte ve bu yöntemleri birbiriyle kıyaslamaktadır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana yol gösteren ve yardımı esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr. Hüseyin BAŞLIGİL'e, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım değerli hocalarım ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, ayrıca çalışmalarım boyunca destekleri ile bana güç veren Ailem'e teşekkürü bir borç bilirim.

İstanbul, 2004

Endüstri Müh. Vildan ÇETİNSAYA ÖZKIR

ÖZET

İş hayatında yöneticilerin karşısına çıkan en sık iş, karar verme işidir. Karar verme, yöneticinin faaliyetlerine devam etmek için yapmak zorunda olduğu en zor görevdir. Yöneticinin pozisyonundan kaynaklanan karar verme yetkisinin kendisine yüklediği sorumluluk yöneticiyi sürekli daha iyi karar almaya zorunlu kılar. Karar verme sırasında önde gelen etmenlerden biri olan kaynak kıtlığı, faaliyet önceliklerinin doğru belirlenmesi ve önceliklendirme kriterlerinin doğru tesbit edilmesi gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bu ihtiyaçlardan hareketle geliştirilen ve son yıllarda yoğun ilgi toplayan çok kriterli karar verme metotları bünyesindeki çok amaçlı karar verme metotları ve çok ölçütlü karar verme metotları, faaliyetlerin önceliklendirilmesi ve kaynakların faaliyetlere atanması problemlerinde kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, çok kriterli karar verme metotları başlığı altında ağırlıklı toplam modeli metodu, ağırlıklı çarpım modeli metodu, analitik hiyerarşi prosesi metodu, düzeltilmiş analitik hiyerarşi prosesi metodu, ELECTRE ve TOPSIS metotları incelenmekte ve karşılaştırmalı analizi yapılmaktadır.

İş hayatında kesin veri elde etmenin güçlüğü ve çoğu durumda mümkün olmaması, çok kriterli karar verme yöntemlerinin bulanıklaştırılmasını gündeme getirmiştir. Bu nedenle, bulanık çok kriterli karar verme metotları başlığı altında bulanık ağırlıklı toplam modeli metodu, bulanık ağırlıklı çarpım modeli metodu, bulanık analitik hiyerarşi prosesi metodu, bulanık düzeltilmiş analitik hiyerarşi prosesi metodu ve bulanık TOPSIS metotları incelenmekte ve bulanık çok amaçlı karar verme metotları başlığı altında ise bulanık hedef programlama yaklaşımları incelenmektedir.

Bu çalışmada, çok kriterli kaynak tahsisi problemlerinin çözümlenmesinde bulanık çok kriterli karar verme yöntemlerinin kullanılması incelenmekte ve bu metotlarla elde edilen sonuçların bir karşılaştırması yapılarak metotların problem için uygunluğu test edilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Çok kriterli karar verme metotları, bulanık Mantık, Bulanık Hedef Programlama, Kaynak Tahsisi.

ABSTRACT

Decision making is the most frequent task that is performed by the managers in business life. Additionally, it is the hardest duty assigned to them to make the company run. The responsibility bound with the authority of managers obliges them to make better decisions continuously. During decision making, lack of resources which is one of the negative arguments, requires the right determination of the activity priorities and prioritization criterion. Multiple objective decision making and multiple attribute decision making methods which are the members of Multiple criteria decision making which is deduced based on these requirements and draws attention of many people, are used for prioritizing activities and resource allocation problems.

In this study, under the topic of multiple criteria decision making, the following methods are examined and compared with in the depth analysis; WSM, WPM, AHP, R-AHP, ELECTRE and TOPSIS.

The toughness of getting certain data and even not possible in most cases, forced MCDM methods to become fuzzy.

Therefore, under the topic of Fuzzy MCDM, F-WSM, F-WPM, F-AHP, F-R-AHP AND F-TOPSIS methods are examined, and under the topic of MODM, fuzzy goal programming is examined.

In this study, during the resolution of multiple criteria resource allocation problems, the usability of MCDM methods are examined and the results gathered using these methods are compared with each other and validated against conformity.

Keywords: Multiple Criteria Decision Making Methods, Fuzzy Logic, Fuzzy Goal Programming, Resource allocation.

1. GİRİŞ

Geçmişten günümüze bilim ve mühendislik alanlarında büyük değişimler olduğu gibi, bunlardan en önemlisi mevcut bir durumda optimal kararın nasıl alınacağı ile ilgili olan gelişmelerdir. Bu problem insanoğlunun geçmişi kadar eski bir problemdir. İlk zamanlarda bilge kişilere (din adamı, öğretmen vs.) danışılıp onların geçmiş tecrübelerinden faydalanılarak verilen kararların yerini, artık günümüzde gelişen bilim ve teknoloji yardımıyla alınan bilimsel kararlar almıştır. İstatistik, yöneylem araştırması, bilgisayar bilimleri gibi çeşitli bilim alanlarında gerçekleşen ilerlemeler, karar verme yöntemlerinin değişimini ve gelişimi beraberinde getirmektedir. Lineer programlama, dinamik programlama ve envanter kontrolü gibi, geliştirilen yeni pek çok metot da optimal çözüme/ karara ulaşmaya ya da yakın sonuçlar üretmeye çabalamaktadır. Bu metotlar zaman içinde, çok kriterli karar verme ismi adı altında toplanmıştır.

Çok kriterli karar verme metotları, günümüzde karşılaşılan atama, sıralama ve optimizasyon problemleri gibi çok çeşitli problemlerin çözümünde kullanılabilir. Bu problemlerden kaynak tahsisi problemi bu çalışmanın ana konusudur. Geleneksel kaynak tahsisi problemleri, aktivitelerden sağlanan getirilerin enbüyüklenmesini sağlamak amacıyla, kısıtlı kaynakların aktivitelere atanmasıyla ilgilenir. Çok amaçlı kaynak tahsisi problemleri adı altında incelenmesi ise, ilk olarak Lai ve Li (1999) tarafından gerçekleştirilmiştir. Çok kriterli kaynak tahsisi problemi ise bir çok sayıda amacı enbüyüklemek için, kaynakların aktivitelere dağıtılmasını içerir (Lai ve Li, 1999).

Bu çalışmada, öncelikle çok kriterli karar verme metotları incelenmiş ve bir duyarlılık analizi yaklaşımıyla bu metotların birbirine göre üstünlükleri incelenmiştir. Ardından, çok kriterli karar verme problemlerinde bulanık mantık kullanımı, bulanık verilerin yapılandırılması ve bulanık çok kriterli karar verme yöntemleri incelenmiştir. Bulanık çok kriterli karar verme metotlarının da yine aynı şekilde, iki değerlendirme kriterine göre test edilmiş ve birbirlerine olan üstünlükleri incelenmiştir. Son olarak; bulanık hedef programlama yaklaşımları incelenmiş ve bu yaklaşımlardan mevcut probleme en uygun olan ağırlıklandırılmış bulanık hedef programlama yaklaşımının bir uygulaması sunulmuştur.

2. ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME

Çok kriterli karar verme (MCDM), özellikle son 20 yıldan beri en hızlı büyüyen problem alanıdır. İş hayatında, karar verme son yıllarda çok değişmiştir. Karar verme ortamı, tek karar vericili (Patron) ve tek kriterli (Kâr) bir ortamdan, çok karar vericili ve çok kriterli durumlara doğru değişmiştir.

Çok kriterli karar verme yöntemleri, adından da anlaşılacağı gibi, verilen bir karar kriterleri kümesi ve bir alternatifler kümesinde en iyi alternatifi çeşitli yollarla bulmaya çalışan yöntemlerdir. Bu problemler çeşitli şekillerde oluşabilir. Örneğin; alternatifler ya da kriterler veya pratikte olduğu gibi ilgili veriler iyi tanımlanamamış olabilir. Zaten gerçekte karşılaşılan pek çok problemde geçerli olan verilerin objektif ve doğru olarak sayısallaştırılması mümkün olmamaktadır. Genellikle bir karar problemi çok kademeli hiyerarşide yapılandırılır. Aynı zamanda, veri parçasının ya da tamamının stokastik ya da hatta bulanık olması çok sıra dışı bir durum değildir. Bu tezde, tüm karar kriterlerine göre sonlu sayıdaki alternatiflerin performansını nasıl değerlendireceğimiz ve sıralayacağımız incelenmektedir. Genellikle tüm karar verme problemlerinde olduğu gibi, karar vericinin her bir karar kriterine göre her alternatifin tek tek performansı hakkındaki düşüncesini açıklama yeteneğine ve hakkına sahip olduğu kabul edilir. Buradaki asıl sorun, tüm karar kriterleri eşzamanlı düşünüldüğünde alternatiflerin nasıl sıralanacağıdır.

Çok kriterli karar verme (Multiple Criteria Decision Making-MCDM), çok amaçlı karar verme (Multiple Objective Decision Making-MODM) ve çok ölçütlü karar verme (Multiple Attribute Decision Making-MADM) olarak ikiye ayrılır.

Çok amaçlı karar verme çalışmalarında karar uzayı sürekli olup, optimal uzlaşmalı çözümü tanımlamaya çalışır. Genellikle matematiksel programlama modeli olarak problem çözülür. Fakat, ne yazık ki matematiksel programlama uygulamada çok kriterli karar verme problemlerinin çoğunluğunu çözememektedir. Çünkü bu güçlü metotlar, uygulayıcı için sadece sınırlı limit değerlerine sahiptirler.

Çok ölçütlü karar vermede ise, karar uzayı kesiklidir. Yani; sayılabilir miktarda alternatifi vardır ve kesikli matematik yaklaşımlarını kullanır. Bu modeller, bir optimal sonuç bulmaktan ziyade, çeşitli kriterlere göre optimal karar alternatiflerinin sıralaması ve sıralama prosedürlerini tanımlarlar. Böyle problemler uygulamada daha sık görülmesine rağmen, teoride çok daha az metot bulunmakta ve bu metotların açıklanması sürekli durumlara göre çok daha zor olmaktadır. Bu nedenle; sorulması gereken soru, verilen bir problem için

hangisinin en iyi metot olduğudur. Anlaşılacağı üzere de, bu sorunun cevabı da verilebilecek en zor cevaplardan biridir.

Bu çalışma, bu sorunun cevabını vermeye yönelik olmayıp, yaygın kullanılan çok kriterli karar verme metotlarının açıklanması ve kaynak tahsisi problemlerine bu metotların uygulanmasını içermektedir.

2.1 Genel Tanımlar ve Terimler

Çok kriterli karar verme metotları, büyük bir çeşitlilik göstermektedir. Genellikle çoğunluğu belirli safhalara sahiptirler. Daha öncede bahsedildiği gibi, çok kriterli karar verme yöntemleri; çok amaçlı karar verme yöntemleri, çok ölçütlü karar verme yöntemleri olmak üzere iki gruba ayrılır. Çok amaçlı karar verme yöntemleri sürekli karar uzayında karar problemlerine çözüm bulmaya çalışır. Çok amaçlı fonksiyonlarla matematiksel programlama bunun tipik bir örneğidir. Diğer taraftan, Çok kriterli karar verme/ çok ölçütlü karar verme aynı zamanda kesikli karar uzayındaki problemlerinde çözümünde kullanılmaktadır. Bu problemlerde, karar alternatifleri kümesi daha önceden belirlenir (Triantaphyllou, 2000).

Çok kriterli karar vermede kullanılan genel tanımlar ve terimler aşağıda açıklanmaktadır:

- **Alternatifler:** Alternatifler, karar verici için mümkün olan farklı hareket seçeneklerini temsil eder. Alternatiflerin sayısı sonlu kabul edilir ve alternatiflerin elenebildiği, önceliklendirilebildiği ve sıralanabildiği kabul edilir.
- **Çok yönlü vasıflar:** (Multiple Attributes) Her çok kriterli karar verme problemi çok vasıfla ilişkilidir. Vasıflardan, “hedefler” veya “karar kriteri” olarak da söz edilebilir. Vasıflar, alternatiflerin farklı boyutlarını temsil ederler.

Kriterlerin sayılarının fazla olduğu durumlarda, kriterler hiyerarşik olarak düzenlenebilir. Bu bazı kriterlerin ana kriter olması gibi bir durumdur. Her ana kriter kendi alt kriterleriyle ilişkilidir ve her alt kriter de yine kendisiyle ilişkili çeşitli alt kriterlere sahip olabilir. Buna rağmen, bazı çok kriterli karar verme metotları, karar probleminin kriterlerini açıkça hiyerarşik olarak düşünürken, çok kriterli karar verme metotlarının çoğunluğu, kriteri tek seviyede inceler, yani hiyerarşi yoktur.

- **Kriterler arası uyumsuzluk (İhtilaf):** Farklı kriterler alternatiflerin farklı boyutlarını temsil ettikleri için, bazen aralarında uyumsuzluk oluşabilir. Mesela, maliyet kârla uyumsuzluk gösterebilir.

- **Orantısız Birimler (Incommensurable Units):** Farklı kriterler farklı ölçü birimleri ile değerlendirilebilirler. Örneğin; kullanılmış bir araba alırken bakılan en önemli kriterlerden ikisi arabanın maliyeti ve yaptığı kilometredir. Aslında çok kriterli karar verme problemlerinin çözümünün zor olması, doğasında farklı birimleri bulundurmasından kaynaklanmaktadır.
- **Karar Ağırlıkları:** Çok kriterli karar verme metodlarının çoğu, kriterlerin önem ağırlıklarına atanmasını gerektirir. Genellikle, bu ağırlıklar toplamı bir olacak şekilde normalize edilir.
- **Karar Matrisi:** Birçok kriterli karar verme problemi, bir matris formatında kolaylıkla gösterilebilir. Bir A karar matrisinde a_{ij} , C_j karar kriterine göre değerlendirilen A_i alternatifinin performansını göstermektedir ($i=1,2,3,...,m$ ve $j=1,2,3,...,n$). Aynı zamanda, karar kriterinin bağıl performansının ağırlığının (w_j) karar verici tarafından belirlendiği kabul edilir.

	C_1	C_2	C_3	..	C_n
Alternatifler	w_1	w_2	w_3	..	w_n
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	..	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	..	a_{2n}
..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..
A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	..	a_{mn}

(2.1)

2.2 Çok Kriterli Karar Verme Metodları

Karar metodlarının ve çeşitlerinin süregelen ani artışı ile birlikte, karşılaştırılmalı değerlerinin anlaşılması önem kazanmıştır. Metodların her biri, bir kesikli alternatif kararlar kümesinden seçimin yapılmasında karar vericiye yardım etmek üzere sayısal teknikleri kullanmaktadır. Bu, belirli bir kriter ve bu suretle karar vericilerin bütün verimi üzerinde alternatiflerin etkisinin temelinde başarılmıştır. Karar verme metodlarının kıyaslanması ve en iyisinin ortaya konulması çalışmaları sırasında zorluklar ortaya çıkmakta ve sonuçta “En iyi karar verme metodunun seçilmesinde hangi karar verme metodunun kullanılması gerekir?” gibi çeşitli paradokslara ulaşılmaktadır (Triantaphyllou, 2000).

Çok kriterli karar verme metodlarının sınıflandırılmasında pek çok yol vardır. Bunlardan birincisi, kullandıkları veri tipine göre sınıflandırılmasıdır. Bunlar; deterministik, stokastik ya da bulanık çok kriterli karar metodlarıdır. Çok kriterli karar verme metodlarını

sınıflandırmanın diğer bir yolu ise; karar verme sürecinin içinde bulunan karar verici sayısına göre sınıflandırmadır. Bunlar ise; tek karar vericili çok kriterli karar verme metotları ve grup kararı alınan çok kriterli karar verme metotlarıdır.

Grup karar verme, bir amaç doğrultusunda çalışan, birbirinden bağımsız davranma yeteneği belirlenmiş olan ve rollerin, sorumlulukların ve görevlerin tanımlanmış olduğu bir süreçtir. Takım performansı, doğal karar teorisi alanında geniş bir alana sahiptir. Grup performansı ise, geleneksel olarak organizasyonel davranış ve endüstriyel psikoloji alanlarında geniş bir yer alır. Grup kararı vermede, karar vericilerin grup içindeki rollerinden daha çok etik ve sosyal normlar etkilidir (Lehto, 2002).

Çok boyutlu karar verme metotlarının kritiğinin yanı sıra geniş bir alanda kullanıldıkları da kaçınılmaz bir gerçektir. Ağırlıklı Toplam Metodu, en eski ve en çok kullanılan metottur. Ağırlıklı Çarpım Metodu, Ağırlıklı Toplam Metodunun bir modifikasyonu olarak karşımıza çıkmakta ve bu metodun bazı zayıf yanlarını ortadan kaldırmaktadır. Saaty tarafından tasarlanan Analitik Hiyerarşi Prosesi daha sonradan önerilmesine karşın, her geçen gün artan bir şekilde popülerlik kazanmaktadır. Belton ve Gear tarafından önerilen revize AHP ise, orijinaline göre daha fazla tutarlılık göstermektedir. Geniş kullanım alanı olan diğer metotlar ise, ELECTRE ve TOPSIS metotlarıdır (Triantaphyllou, 2000).

Alternatiflerin sayısal analizlerini içeren herhangi bir karar verme metodunun kullanımında üç adım vardır. Bunlar;

1. *İlgili alternatifleri ve kriterleri tanımla.*
2. *Kriterlerin bağıl önemlerine ve bu kriterler üzerinde alternatiflerin etkilerine sayısal ölçüler ata.*
3. *Her alternatifin bir sıralamasını tanımlamak üzere sayısal değerleri işle.*

Bu bölümde, Ağırlıklı Toplam Metodu (WSM), Ağırlıklı Çarpım Metodu (WPM), Analitik Hiyerarşi Prosesi (AHP), Revize Analitik Hiyerarşi Prosesi (R-AHP), ELECTRE ve TOPSIS metotları sayısal veriyi 3. adımda proses ederler. Genel karar problemi şöyledir: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ ile gösterilen m adet alternatifin ve $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ ile gösterilen n adet karar kriteri verilir. Karar vericinin her kritere göre her alternatifin performans değerini belirlediği kabul edilir. a_{ij} değerleri ve w_j kriter ağırlıklarıyla birlikte A matrisi karar verici tarafından belirlenir.

2.2.1 Ağırlıklı Toplam Modeli Metodu

Ağırlıklı Toplam Metodu (WSM), özellikle tek boyutlu problemlerde, en çok kullanılan yaklaşımdır. Eğer m alternatif ve n kriter verildiğinde, en iyi alternatif aşağıdaki gibidir.

$$A^{*}_{WSM-puan} = \max \sum_{j=1}^n a_{ij}.w_j \quad i = 1,2,3K, n \quad (2.2)$$

$A^{*}_{WSM-puan}$, n karar kriteri sayısı, w_j j. kriterinin önem ağırlığı ve a_{ij} ise j. kriterine göre i. alternatifin gerçek değeri olmak üzere, en iyi alternatifin WSM puanıdır.

Bu modeli savunan varsayım, faydaların toplanabilirliği varsayımdır. Bu, her alternatifin toplam değeri yukarıda verildiği gibi çarpımların toplamına eşittir. Bütün birimlerin aynı olduğu tek boyutlu durumlarda, WSM hiç bir zorluk olmadan kullanılabilir. Bu metodun zorluğu, çok boyutlu çok kriterli karar problemine uygulanması sırasında ortaya çıkar. Farklı boyutların ve tamamen farklı birimlerin birleştirilmesinde, faydaların toplanabilirliği varsayımı işe yaramamakta ve sonuç elma ve armutların toplanmasına benzemektedir (Triantaphyllou, 2000).

2.2.2 Ağırlıklı Çarpım Modeli Metodu

Ağırlıklı Çarpım Modeli (WPM), Ağırlıklı Toplam Metoduna çok benzemektedir. Asıl Fark, modeldeki toplamın yerini çarpımın almasıdır. Her alternatif diğerleriyle her kriter için belli sayıda oranın çarpımı yoluyla kıyaslanmasıdır. Her oran karşılık gelen kriterin bağıl ağırlığına eşit güce sahiptir. Genel olarak, A_K ve A_L gibi iki alternatifi kıyaslamak için, n kriter sayısı, a_{ij} j. kriterine göre i. alternatifin gerçek değeri ve w_j j. kriterin önem ağırlığı olmak üzere, aşağıdaki çarpım hesaplanır (Triantaphyllou, 2000).

$$R(A_K / A_L) = \prod_{j=1}^n (a_{Kj} / a_{Lj})^{w_j} \quad (2.3)$$

$R(A_K / A_L)$ terimi birden büyük ya da bire eşit olması, maksimizasyon durumunda A_K alternatifinin A_L alternatifine göre çok daha cazip olduğunu gösterir. En iyi alternatif diğerlerinden daha iyi olan ya da en azından diğerlerine eşit olan alternatiftir.

Ağırlıklı Çarpım Modeli bazı kaynaklarda boyutsuz analiz olarak adlandırılır. Bunun nedeni, herhangi bir ölçü birimini kendi yapısından dolayı elimine etmesinden kaynaklanır. Bu metodun diğer bir avantajı, gerçek veriler yerine bağıl verileri kullanmasından kaynaklanır.

2.2.3 Analitik Hiyerarşi Prosesi Metodu

Analitik Hiyerarşi Prosesi (AHP), karmaşık çok kriterli karar problemlerini bir hiyerarşiler sistemine ayırıştırır. Analitik hiyerarşi prosesinde son adım $m \times n$ matrisinin yapısıyla ilgilenir. Matris, her kritere göre alternatiflerin bağıl önemlerini kullanarak yapılandırılır. Her i için $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in})$ vektörü i . kriterde m alternatiflerinin etkilerinin ikili karşılaştırılmasının belirlendiği $n \times n$ matrisinin en önemli vektörüdür (Triantaphyllou, 2000).

Karar vermede Analitik Hiyerarşi Prosesinin, değişkenlerinin ve ikili karşılaştırmaları kullanmasının önemi şimdiye kadar pek çok bilimsel yayında ve sempozyumda açıklanmıştır.

İlerideki bölümde; uzmanlar ve karar vericilerin nitel olgularını sayısal değerlendirmelere dönüştürmek için ikili karşılaştırma metodunun daha avantajlı olduğu üzerinde durulacaktır. Fakat bu bölümde, analitik hiyerarşi prosesinin a_{ij} değerlerini elde ederken, özvektör ve ikili karşılaştırma yönteminin avantaj ve dezavantajlarını incelemek yerine, kullanım şekilleri üzerinde durulmaktadır. $m \times n$ matrisinde a_{ij} girdisi, C_j kriterine göre düşünüldüğünde, A_i alternatifinin göreceli değerini temsil etmektedir. Orjinal Analitik Hiyerarşi Prosesinde

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \text{ dir.}$$

Analitik Hiyerarşi Prosesine göre, maksimizasyon durumunda en iyi alternatif aşağıdaki gibi gösterilir:

$$A^*_{AHP-proses} = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}.w_j, \quad i = 1, 2, 3K, n \quad (2.4)$$

Analitik hiyerarşi prosesi ile ağırlıklı toplam metodu arasındaki benzerlik açık olarak görülmektedir. AHP gerçek değerler yerine bağıl olanlarını kullanmaktadır. Bu nedenle, tek ya da çok boyutlu karar verme problemlerinde kullanılabilir.

2.2.4 Düzeltilmiş Analitik Hiyerarşi Prosesi Metodu

Belton ve Gear'ın tasarladığı Düzeltilmiş Analitik Hiyerarşi Prosesi (R-AHP) metodu, Saaty'nin orjinal AHP'sinden yola çıkarak düzenlenmiştir. Belton ve Gear, AHP kullanıldığında meydana gelen sıralama tutarsızlığını üç kriterli ve üç alternatifli bir örnek üzerinde göstermişlerdir. Aşağıda bununla ilgili bir örnek gösterilmektedir. Bu örnekte, optimal olan alternatifin özdeşi bir alternatif daha eklendiğinde, en iyi alternatifin değişmesi gösterilmektedir. Belton ve Gear'a göre, bu tutarsızlığın nedeninin her kriter için bağıl değerlerin toplamının bir olmasından kaynaklanmaktadır. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ alternatiflerinin

bağıl değerlerinin toplamının bire eşit olmasının yerine, tüm bağıl değerleri maksimum bağıl değere bölmeyi tasarlamışlar ve aşağıdaki örnekle göstermişlerdir.

Örnek: Aşağıdaki çok kriterli karar verme problemi 3 alternatiften ve 3 kriterden oluşmuş olup, değerler gerçek değerlerdir.

	<i>Kriterler</i>		
	C_1	C_2	C_3
<i>Alternatifler</i>	1/3	1/3	1/3
A_1	1	9	8
A_2	9	1	9
A_3	1	1	1

(2.5)

Gerçek hayattaki problemlerde, karar verici hiçbir zaman yukarıdaki gibi gerçek verilere sahip olamaz. Yani, bir sonraki bölümde anlatılacak olan ikili karşılaştırma metodu yardımıyla bağıl değerleri elde edebilir. AHP bu verilere uygulandığında, aşağıdaki karar matrisindeki bağıl değerler oluşur.

	<i>Kriterler</i>		
	C_1	C_2	C_3
<i>Alternatifler</i>	1/3	1/3	1/3
A_1	1/11	9/11	8/18
A_2	9/11	1/11	9/18
A_3	1/11	1/11	1/18

(2.6)

Buradan, AHP son puanlarını gösteren (0.45, 0.47, 0.08) vektörü, sıralamanın $A_2 > A_1 > A_3$ şeklinde olduğunu göstermektedir.

Ardından, mevcut optimal alternatifin özdeş bir kopyası olan yeni bir A_4 alternatifi türetilir. Bütün kriterlerin ağırlıklarının aynı kaldığı kabul edilir. Yeni A_4 alternatifi ile birlikte yeni karar matrisi aşağıdaki gibidir:

	<i>Kriterler</i>		
	C_1	C_2	C_3
<i>Alternatifler</i>	1/3	1/3	1/3
A_1	1/20	9/12	8/27
A_2	9/20	1/12	9/27
A_3	1/20	1/12	1/27
A_4	9/20	1/12	9/27

(2.7)

Daha öncede yapıldığı gibi, AHP son puanlarını gösteren (0.37, 0.29, 0.06, 0.29) vektörü sıralamanın $A_1 > A_2 \equiv A_4 > A_3$ olduğunu göstermektedir. Belton ve Gear daha önceki sonuçla, bu yöntemle çıkan sonucun çeliştiğini göstermişlerdir.

Düzeltilmiş AHP burada oluşan son verilere uygulandığında, yani her kolondaki sayıyı o kolondaki en büyük sayıya bölünerek normalize edildiğinde, karar matrisi şöyle olur:

	<i>Kriterler</i>		
	C_1	C_2	C_3
<i>Alternatifler</i>	1/3	1/3	1/3
A_1	1/9	1	8/9
A_2	1	1/9	1
A_3	1/9	1/9	1/9
A_4	1	1/9	1

(2.8)

Son puanın vektörü, (2/3, 19/27, 1/9, 19/27) olur. Bu, alternatiflerin sıralamasının arzu edilen sıralama olan $A_2 \equiv A_4 > A_1 > A_3$ olduğu anlamına gelir.

Düzeltilmiş AHP, ilk zamanlarda Saaty tarafından eleştirilmiş ve özdeş alternatiflerin karar sürecinde düşünülmeceği iddia edilmiştir. Aynı zamanlarda, Triantaphyllou ve Mann (1989), özdeş olmaya bazı alternatifler için de, hem orjinal AHP'nin hem de düzeltilmiş AHP'nin sunduğu çözümlerde mantıksal çelişkiler oluşmasının mümkün olduğunu göstermişlerdir (Triantaphyllou, 2000).

2.2.5 ELECTRE Metodu

ELECTRE (for Elimination and Choice Translating Reality) Metodu ilk olarak 1966'da Benayoun ve arkadaşları tarafından tanıtılmıştır. ELECTRE metodunun temel prensibi, her kritere göre ayrı ayrı alternatiflerin ikili karşılaştırılmasını kullanarak, "öncelik ilişkileri" ile ilgilenir. A_i ve A_j alternatiflerinin öncelik ilişkisi, sayısal olarak i. alternatif j. alternatife baskın değilse $A_i \rightarrow A_j$ şeklinde gösterilir ve sonra karar verici hala A_j alternatifinden daha iyi olan A_i alternatifinin riskini üstlenebilir (Pomerol ve Romero, 2000). Bir alternatif, bir ya da daha fazla kritere göre değerlendirildiğinde diğerlerinden daha iyiye ve kalan kriterlere göre de hesaplandığında diğerlerine eşitse, diğer alternatiflere baskındır (Triantaphyllou, 2000).

Sıralama metodları üzerine başlangıç ve alt konular geliştiren Roy, tüm seçeneklerin karşılaştırılması için gerekli olan değer fonksiyonu metodları ve kullanım fonksiyonları üzerine kritik bir rol oynamıştır. Roy ELECTRE metodunu zayıf, içeriksiz modelleri bir değer

fonksiyonundan sağlamanın, daha az efor sarfederek bir sonuca ulaşamamasını ortadan kaldırma amacıyla geliştirmiştir. Brans ve Vincke de sıralama metodlarıyla ilgili yarar fonksiyonu kadar aşırı olmayan ancak gerçekçi olan baskınlık ilişkisinin zenginleştirilmesini sağlamaya yönelik çalışmalar yapmıştır (Pomerol ve Barba-Romero, 2000)

ELECTRE Metodu her kriter altında alternatiflerin ikili karşılaştırılmaları yapılarak başlar. A_j ve A_k alternatiflerini ve bu alternatiflerin sırasıyla $g_j(A_j)$ ve $g_j(A_k)$ olarak gösterilen fiziksel veya parasal değerlerini kullanmasından dolayı ELECTRE metodu Uyumluluk İndeksi sağlar. Uyumluluk indeksi, A_j alternatifinin A_k alternatifine önceliğini veya baskınlığını gösteren neticeyi destekleyen kanıtların miktarı olarak ifade edilir. Aynı şekilde, Uyumsuzluk İndeksi de uyumluluk indeksinin tam tersidir.

Sonuç olarak, ELECTRE metodu alternatifler arasında ikili öncelik sıralama ilişkilerinin bir sistemini getirmektedir. Çünkü bu sistem, muhakkak tam değildir, ELECTRE metodu bazen en iyi alternatifi belirlemekte yetersiz kalmaktadır. Sadece önde gelen alternatiflerin özünü vermektedir. Bu metot, az tercih edilecekleri eleyerek karar vericiye alternatifleri incelerken daha açık bir görüş kazandırmaktadır. Ayrıca bu metot, çok sayıda alternatifin ve az sayıda kriterin bulunduğu karar problemlerini çözmek için güvenlidir (Triantaphyllou, 2000).

ELECTRE metodunun pek çok çeşidi vardır. ELECTRE metodunun orjinal hali Benayoun tarafından 1966'da aşağıdaki adımlarla açıklanmıştır.

- **Adım 1: Karar matrisinin normalize edilmesi:** Bu prosedür aşağıdaki denklemi kullanarak karar matrisindeki girdilerin boyutsuz karşılaştırılabilir girdilere dönüştürülmesini içerir:

$$x_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m a_{ik}^2}} \quad (2.9)$$

Böylece normalize edilmiş X matrisi şöyle olur:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

Burada m alternatiflerin sayısı, n kriterlerin sayısı ve x_{ij} j. kriterle göre i. alternatifin normalize edilmiş öncelik ölçüsüdür.

- **Adım 2: Normalize edilmiş karar matrisinin ağırlıklandırılması:** X matrisinde kolonların her biri karşılık gelen kriterlerin birleşik önem ağırlıkları ile çarpılır. $(w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$ ile gösterilen bu ağırlıklar, karar verici tarafından belirlenir. O nedenle, Y ile gösterilen ağırlıklandırılmış matris:

$Y = X \times W$, ya da:

(2.11)

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m1} & y_{m2} & y_{m3} & \dots & y_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$X = \begin{bmatrix} w_1 x_{11} & w_2 x_{12} & w_3 x_{13} & \dots & w_n x_{1n} \\ w_1 x_{21} & w_2 x_{22} & w_3 x_{23} & \dots & w_n x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1 x_{m1} & w_2 x_{m2} & w_3 x_{m3} & \dots & w_n x_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_n \end{bmatrix}, \text{ ve } \sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (2.14)$$

- **Adım 3: Uyumluluk ve Uyumsuzluk Kümelerinin tanımlanması:** $m, k, l \geq 1$ olmak üzere, A_k ve A_l alternatiflerinin uyumluluk kümesi C_{kl} , A_k alternatifinin A_l alternatifine tercih edilmesi için tüm kriterlerin tanımlandığı kümedir. Bu, aşağıdaki ifadeyi doğrulamaktadır:

$$C_{kl} = \{j, y_{kj} \geq y_{lj}\}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (2.15)$$

Tümleyici kümesi ise, uyumsuzluk kümesi olarak adlandırılmakta ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$D_k = \{j, y_{kj}(y_j)\}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (2.16)$$

- **Adım 4: Uyumluluk ve uyumsuzluk matrisinin yapılandırılması:** Uyumluluk matrisi C'deki elemanların bağıl değerleri uyumluluk indeksinin ortalaması hesaplanılarak elde edilir. Uyumluluk indeksi c_k , uyumluluk kümesinde bulunan kriterle birleşik ağırlıkların toplamıdır. Bu aşağıdaki ifadeyi doğrulamaktadır:

$$C_k = \sum_{j \in C_k} w_j, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (2.17)$$

Uyumluluk indeksi, A_l alternatifiyle ilgili olarak A_k alternatifinin bağıl önemini gösterir. Görünüşe göre, $0 \leq c_k \leq 1$ 'dir. $k = l$ olduğunda, C matrisinin girdilerinin tanımlanmadığı uyumluluk matrisi şöyle tanımlanır:

$$C = \begin{bmatrix} - & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & - & c_{23} & \dots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & - \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

D uyumsuzluk matrisi, A_k alternatifi A_l alternatifinden daha kötü olduğunu gösteren dereceyi ifade eder. Uyumsuzluk matrisinin d_k elemanları aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$d_k = \frac{\max |y_{kj} - y_j|}{\max |y_{kj} - y_j|} \quad (2.19)$$

$k = l$ olduğunda, D matrisinin girdilerinin tanımlanmadığında uyumsuzluk matrisi şöyle tanımlanır:

$$D = \begin{bmatrix} - & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & - & d_{23} & \dots & d_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{m1} & d_{m2} & d_{m3} & \dots & - \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

Son olarak, bu iki $m \times m$ matrisin simetrik olmadığı belirtilmelidir.

- **Adım 5: Uyumluluk ve uyumsuzluk baskınlık matrislerinin tanımlanması:** Uyumluluk Baskınlık Matrisi, uyumluluk indeksi için eşik değerinin ortalaması tarafından yapılandırılır. Mesela, A_k 'nın karşılık gelen uyumluluk indeksi c_k eğer en azından belli

bir eşik değeri $\underline{c}$ 'yi aşarsa, A_k alternatifi sadece A_i alternatifine baskın olma şansına sahiptir.

$$c_{ki} \geq \underline{c} \quad (2.21)$$

Eşik değeri $\underline{c}$ ortalama uyumluluk indeksi olarak tanımlanır. Bu, aşağıdaki ilişkinin doğruluğunu kanıtlar:

$$\underline{c} = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{k=1, k \neq i}^m \sum_{l=1, l \neq i}^m c_{kl} \quad (2.22)$$

Eşik değerine dayanarak, uyumluluk baskınlık matrisi F'in elemanları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$c_{ki} \geq \underline{c} \text{ ise, } f_{ki} = 1, \quad (2.23)$$

$$c_{ki} < \underline{c} \text{ ise, } f_{ki} = 0 \text{ dir}$$

Benzer şekilde, uyumsuzluk baskınlık matrisi G $\underline{d}$ eşik değeri kullanılarak tanımlanır. $\underline{d}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\underline{d} = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{k=1, k \neq i}^m \sum_{l=1, l \neq i}^m d_{kl}, \quad (2.24)$$

ve $d_{ki} \geq \underline{d}$ ise, $g_{ki} = 1$; $d_{ki} < \underline{d}$ ise, $g_{ki} = 0$ dir.

- **Adım 6: Toplam Baskınlık Matrisinin Belirlenmesi:** Toplam Baskınlık Matrisi E şöyle tanımlanır:

$$e_{ki} = f_{ki} \times g_{ki} \quad (2.25)$$

- **Adım 7: Daha Az Tercih Edilen Alternatiflerin Elenmesi:** Toplam Baskınlık Matrisinden alternatiflerin tercih sırası kısmen elde edilebilir. Eğer $e_{ki} = 1$ ise, uyumluluk ve uyumsuzluk kriterlerinin ikisini de kullanarak, A_k alternatifi A_i alternatifine tercih edilir anlamına gelir.

Eğer toplam baskınlık matrisinin herhangi bir kolonunda en azından 1'e eşit olan bir eleman varsa, bu kolona ELECTRE'ye göre karşılık gelen satır bu kolona baskındır. Bu nedenle, 1'e eşit elemanı olan kolon(lar) kolayca elenebilir. Tabii ki, en iyi alternatif bu anlamda diğer tüm alternatiflere baskın olan alternatif olacaktır.

2.2.6 TOPSIS Metodu

TOPSIS (for the Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) 1980 yılında Yoon ve Hwang tarafından ELECTRE'ye alternatif olarak geliştirilmiştir ve ELECTRE'nin en çok kabul gören çeşididir. Bu metodun temel prensibi, geometrik anlamda seçilen alternatifin ideal çözüme en yakın mesafesi olan ve negatif ideal çözüme en uzak mesafesi olan alternatif olması gerektiğidir (Triantaphyllou, 2000).

TOPSIS metodu tek düze artan ya da azalan kullanım eğilimi olduğunu farz eder. Bu nedenle, ideal ve negatif ideal çözümleri tanımlamak kolaydır. Öklid mesafe yaklaşımı, alternatiflerin ideal çözüme göreli yakınlığını değerlendirmek için tasarlanmıştır. Böylece, alternatiflerin tercih sırası, bu göreli mesafelerin karşılaştırılma serisiyle elde edilebilir (Triantaphyllou, 2000).

TOPSIS metodu, n adet kritere göre değerlendirilen m adet alternatifi temsil eden aşağıdaki karar matrisini şöyle değerlendirir:

$$D = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

matrisinde x_{ij} j. kritere göre değerlendirilen i. alternatifin performans ölçüsünü gösterir. Aşağıdaki adımlarda TOPSIS metodu anlatılmaktadır (Triantaphyllou, 2000).

- **Adım 1: Normalize edilmiş karar matrisinin yapılandırılması:** TOPSIS metodu, ELECTRE metodunda olduğu gibi, çeşitli boyutlara sahip olan kriterleri boyutsuz hale dönüştürür. Normalize edilmiş karar matrisi R'nin bir elemanı olan r_{ij} şöyle hesaplanır:

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m x_{kj}^2}} \quad (2.27)$$

Bu noktada, ELECTRE ve TOPSIS metotlarında öklid mesafeleri kullanılmakta ve makul sonuçlar elde edilmektedir. Bu diğer alternatif mesafe ölçülerinin de kullanılamayacağı anlamına gelmez, fakat uygulandığında farklı çözümler bulunması mümkündür.

- **Adım 2: Ağırlıklandırılmış Normalize karar matrisinin yapılandırılması:** Karar verici tarafından belirlenen bir $W = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$ ($\sum w_i = 1$) bir ağırlıklar kümesi ağırlıklı normalize matris V 'nin oluşturulmasında kullanılır:

$$V = \begin{bmatrix} w_1 r_{11} & w_2 r_{12} & w_3 r_{13} & \dots & w_n r_{1n} \\ w_1 r_{21} & w_2 r_{22} & w_3 r_{23} & \dots & w_n r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1 r_{m1} & w_2 r_{m2} & w_3 r_{m3} & \dots & w_n r_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

- **Adım 3: İdeal ve Negatif-İdeal Çözümlerin belirlenmesi:** A^+ olarak gösterilen ideal çözüm ve A^- negatif ideal çözümler (alternatifler) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A^+ = \left\{ \left(\max_i v_{ij} \mid j \in J \right), \left(\min_i v_{ij} \mid j \in J' \right), i = 1, 2, 3, \dots, m \right\} \quad (2.29)$$

$$A^+ = \{v_1^+, v_2^+, v_3^+, \dots, v_n^+\}.$$

$$A^- = \left\{ \left(\min_i v_{ij} \mid j \in J \right), \left(\max_i v_{ij} \mid j \in J' \right), i = 1, 2, 3, \dots, m \right\} \quad (2.30)$$

$$A^- = \{v_1^-, v_2^-, v_3^-, \dots, v_n^-\}.$$

$$J = \{j = 1, 2, 3, \dots, n \text{ ve } j \text{ fayda kriteri ile ilişkilidir.}\}$$

$$J' = \{j = 1, 2, 3, \dots, n \text{ ve } j \text{ kayıp/maliyet kriteri ile ilişkilidir.}\}.$$

Yukarıdaki iki alternatif de hayalidir. Bununla birlikte, fayda kriteri için karar vericinin alternatifler arasından maksimum değeri istediğinin kabul edilmesi mantıklı bir yaklaşımdır. Aynı şekilde, maliyet kriteri için karar vericinin alternatifler arasından minimum değeri istediği varsayılmaktadır. Önceki açıklamalardan da bilindiği gibi, A^+ alternatifi istenen sonuç ya da ideal çözümdür. Benzer şekilde, A^- alternatifi de en az tercih edilen sonuç ya da negatif-ideal çözümdür.

- **Adım 4: Ayırma Ölçüsünün Hesaplanması:** n - boyutlu öklid mesafe metodu, her alternatifi ideal ve negatif-ideal çözümlerden ayırma uzaklığının ölçümüne uygulanmaktadır. Böylece, ideal çözüme olan uzaklıklar için, S_i^+ her alternatifi ideal çözüme olan uzaklığına mesafesi (Öklid'e göre) olmak üzere;

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (2.31)$$

Benzer şekilde, negatif-ideal çözümden uzaklıklar için, S_i^- her alternatifin negatif-ideal çözüme olan uzaklığına mesafesi (Öklid'e göre) olmak üzere;

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (2.32)$$

- **Adım 5: İdeal Çözüme Bağlı Yakınlığın Hesaplanması:** A^+ ideal çözümüne A_i alternatifinin bağlı yakınlığı şöyle tanımlanır:

$$C_i^+ = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-}, \quad 1 \geq C_i^+ \geq 0 \quad \text{ve} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (2.33)$$

Görüldüğü üzere, $A_i = A^+$ ise $C_i^+ = 1$ ve $A_i = A^-$ ise $C_i^+ = 0$ dir.

- **Adım 6: Öncelik Sırasının Belirlenmesi:** Artık, en iyi (Optimal) alternatif C_i öncelik sıralamasına bakılarak karar verilebilir. Böylece, en iyi alternatif mesafesi ideal çözüme en kısa olan alternatif olur. Yani, daha önceki tanımlara göre, ideal alternatife en yakın olan alternatifin de negatif ideal çözüme en uzak olan alternatif olması garanti altına alınmış olur.

2.3 Çok Kriterli Karar Verme Problemleri için Nitel Verilerin Sayısallaştırılması

Çok kriterli karar verme problemlerinde ilk adım alternatifler kümesinin ve alternatiflerin değerlendirileceği karar kriterleri kümesinin belirlenmesidir. Bu, kritik bir adım olmasına rağmen, formülasyonu standart bir modelleme prosedürü ile kolayca yapılamaz (Triantaphyllou, 2000).

Çok kriterli karar verme problemleriyle ilgilenirken karşımıza çıkan diğer bir kritik adım ise, uygun verilerin tahmin edilmesidir. Sıklıkla, çok kriterli karar verme problemlerinde veriler net olarak elde edilememektedir. Bu nedenle, çok kriterli karar verme problemlerinde her kriter anlamında alternatiflerin bağlı ağırlıkları veya önemlerini belirlemeye çalışırlar.

İkili karşılaştırmaların kullanılmasındaki ana amaç, ikili karşılaştırmaların değerlendirilmesi sırasında, dilsel seçeneklerin nasıl sayısallaştırılacağına karar verici tarafından seçilmesidir. İkili karşılaştırma yaklaşımını kullanan bütün metotlar karar vericinin nicel yanıtlarını ifade etmek için kullanılır.

İkili karşılaştırmalar bir ölçek kullanarak sayısallaştırılır. Böyle bir ölçek, karar verici için mümkün olan kesikli dilsel seçeneklerin kümesi ve bu seçeneklerin ağırlıkları arasında bire-bir planlama (haritalama) yapar. Böyle ölçeklerin geliştirilmesinde iki ana yaklaşım vardır. İlki, Saaty'nin AHP'nin bir parçası olarak tanımlanan lineer ölçektir. İkincisi ise; Lootsma tarafından tasarlanan üssel ölçektir.

Çizelge 2-1: Saaty'nin Bağlı Önemler Ölçeği (Saaty, 1980)

Önem Derecesi	Tanımı	Açıklama
1	Eşit Önem	İki alternatif amaca eşit katkıda bulunur
3	Diğerine göre zayıf önem	Tecrübe ve yargılar birinin diğerine az tercih edilebilirliğini gösterir
5	Güçlü önem	Tecrübe ve yargılar birinin diğerine tercih edilebilirliğini gösterir
7	Daha güçlü önem	Bir aktivite güçlü şekilde tercih edilebilir ve uygulamada baskındır
9	Çok güçlü önem	Bir aktivite kanıtlanmış bir tercih edilebilirliğe ve en yüksek sıraya sahiptir
2,4,6,8,	İki yargı arasındaki ara önem dereceleri	Uzlaşma gerektiğinde
Yukarıdaki değerlerin tersleri	i aktivitesi j aktivitesiyle kıyaslandığında yukarıdaki değerlerden birine sahipse, j aktivitesi i aktivitesiyle karşılaştırıldığında bu değer tersine sahip olur.	

İkili karşılaştırma değerleri aşağıdaki Çizelgeye göre belirlenir. Bu lineer ölçeğe göre; ikili karşılaştırmalar için mümkün değerler, $\{9,8,7,6,5,4,3,2,1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6,1/7,1/8,1/9\}$ kümesinin elemanlarıdır. Bu sayılar, ikili karşılaştırmalar için değerlerin iki aralıkta $[9,1]$ ve $[1,1/9]$ toplanabileceğini göstermektedir.

Diğer ölçek ise, Lootsma tarafından tasarlanan Üssel Ölçeklerdir. Bu ölçeklerin geliştirilmesi, uyarıcı sezgiler (e_i) ile ilgili çeşitli psikolojik gözlemlere dayanır. Bu gözleme göre, Robert'in teorisi doğrultusunda, $e_{n+1} - e_n$ farkının e_n ile orantılı olan algılanabilir en küçük farktan büyük veya bu farka eşit olması şarttır. Karar verici tarafından kabul edilebilir seçenekler Çizelge 2'de özetlenmiştir. Bu dilsel ifadelerin sayısal karşılıkları aşağıdaki ilişkiyi sağlamalıdır (Triantaphyllou, 2000):

$$e_{n+1} - e_n = \varepsilon e_n, (\varepsilon > 0) \text{ veya,}$$

$$e_{n+1} = (1 + \varepsilon)e_n = (1 + \varepsilon)^2 e_{n-1} = \dots \quad (2.34)$$

$$..... = (1 + \varepsilon)^{n+1} e_0, (e_0 \approx 1) \text{ veya } e_n = e^{r \times n}.$$

Yukarıdaki açıklamalarda, γ parametresi aynı ε parametresi gibi bilinmemektedir. $\gamma = \ln(1 + \varepsilon)$ olmak üzere, e doğal logaritmanın tabanıdır (e , logaritma tabanından farklı olup, sadece bir değişkeni göstermektedir.). Çizelge 3 γ parametresinin iki değişik değerine karşılık gelmek üzere, iki üssel ölçeğin değerlerini sunmaktadır. Görüldüğü gibi, γ parametresine değişik değerler atanarak, farklı üssel ölçekler elde edilebilir.

Çizelge 2-2: Lootsma'nın Önem Ağırlıkları (Triantaphyllou, 2000)

Önem Şiddeti	Açıklama
e_0	A_i ile A_j arasında kesin ilgisizlik
e_1	A_i 'ye ilgisizlik eşiği
e_2	A_i için zayıf öncelik (tercih)
e_3	A_i ile uyum eşiği
e_4	A_i için güçlü öncelik (tercih)
e_5	A_i 'ye baskınlık eşiği
e_6	A_i için çok güçlü öncelik (tercih)
Yukarıdaki değerlerin tersleri	i üyesi j üyesiyle kıyaslandığında yukarıdaki değerlerden birine sahipse, j üyesi i üyesiyle karşılaştırıldığında bu değer tersine sahip olur.

Saaty Ölçeği ile üssel dağılım arasındaki diğer bir fark, üssel ölçekler tarafından izin verilen kategori sayısıdır. Şu anda, dört ayrı ana kategori ve ek olarak bunların yanında sözde eşik kategorileri vardır. Eğer karar verici ana kategorilerden birini kullanmakta tereddüt ederse, eşik kategorilerini kullanabilir.

Çizelge 2-3: Lootsma (1998) Tarafından Tanımlanan Bağlı Önemler Ölçeği (Triantaphyllou, 2000)

Normal ($\gamma = 1/2$)	Genişletilmiş ($\gamma = 1$)	Tanımı
$e^{rx0} = 1.00$	$= 1.00$	e_0
$e^{rx1} = 1.65$	$= 2.72$	e_1
$e^{rx2} = 2.72$	$= 7.39$	e_2
$e^{rx3} = 4.48$	$= 20.09$	e_3
$e^{rx4} = 7.39$	$= 54.60$	e_4
$e^{rx5} = 12.18$	$= 148.41$	e_5
$e^{rx6} = 20.09$	$= 403.43$	e_6

2.3.1 Farklı Ölçeklerin Değerlendirilmesi

Farklı ölçekleri değerlendirmek için iki değerlendirme kriteri kullanılmıştır. Ardından özel bir ikili karşılaştırma matrisi sınıfı geliştirilmiştir. Bu özel matrisler, iki değerlendirme kriteriyle birlikte, farklı ölçeklerin bazı kararlılık özelliklerini incelemek için kullanılacaktır.

2.3.2 Gerçek Sürekli İkili Karşılaştırma ve En Yakın Kesikli İkili Karşılaştırma Matrisi Kavramları

İkili karşılaştırma matrisleri, bir karar vericiden tüm uygun bilgileri almak üzere tasarlanmış araçlar olarak Saaty (1980) tarafından açıklanmıştır. Aynı yazar, elemanları 1,2,3,K,9 ve bunların terslerinden oluşan θ kümesinden girdi değerlerini alan matrislerle sonuçlanan bir ölçek tasarlamıştır. Eğer farklı bir ölçek kullanılıyorsa, θ kümesi bu farklı ölçeği temsil eden kesikli sayısal değerlerin sonlu bir kümesi olur. Genellikle, bu matrislerdeki her bir girdi, bir tek karar kriterine göre iki alternatif arasındaki ikili karşılaştırma değerlerini sayısal olarak temsil eder. Bu matrisler, kriterlerin ya da alternatiflerin bağlı performansını göz önünde bulundurarak gerekli bilgiyi elde etmek için etkin bir yolla yapılandırılır (Triantaphyllou, 2000)

Saaty'nin karar matrisleri, gerçek dünya çok kriterli karar verme problemlerinde nitel bilgilerin elde edilmeleri için etkin bir yol olarak geniş bir alanda kabul görmüştür.

Benzer bir çalışma Triantaphyllou (1990)'nun yaptığı gerçek performans değerlerinin sürekli değerlere dayandığı kabulüyle yapılmıştır. Bir tek genel bir karakteristiğe göre; $w_1, w_2, \dots, w_n$ gerçek değerleri (bilinmeyen) n alternatifli (veya kriterli) bir kümenin elemanı olsun. Her w_i değeri $[0,1]$ arasında olsun. Eğer karar verici bu gerçek değerleri bilseydi, gerçek ikili karşılaştırmaları içeren bir karar matrisini oluşturabilirdi. Bu matrise A matrisi diyelim ve her girdi $\alpha_{ij} = w_i/w_j$ 'ye eşit olsun. Böylece α_{ij} girdisi, i . varlık j . varlıkla kıyaslandığında oluşan kıyaslama değeridir. Bu matris, gerçek sürekli ikili karşılaştırma matrisi (RCP) matrisidir. Gerçek dünya değerleri w_i 'ler bilinmediğinden, α_{ij} değerleri de bilinemez. Bununla birlikte, α_{ij} değerlerini belirlemek için bir ölçek tarafından sağlanan θ kümesinden alınan en yakın değerler belirlenir. Diğer bir deyişle, gerçek α_{ij} değerleri için, a_{ij} değerlerinin aşağıdaki gibi tanımlandığını varsayalım (Triantaphyllou, 2000):

$$\text{Fark } |\alpha_{ij} - a_{ij}| \text{ minimum ve } a_{ij} \in \theta \quad (2.35)$$

Yani, gerçek α_{ij} değerleri bilmediğimiz gerçek hayat koşullarında, bu değerlere en yakın değerleri tahmin edebilmek için bir ölçekten faydalanılır. Yukarıdaki ölçü (norm) yerine şöyle bir ölçü de kullanılabilir:

$$\text{Fark } \left| \alpha_{ij} / (1 + \alpha_{ij}) - a_{ij} / (1 + a_{ij}) \right| \text{ minimum ve } a_{ij} \in \theta \quad (2.36)$$

Sonlu ve kesikli değerler kümesinden alınan oranlarla gerçek oranlara yaklaştırmaya çalışan herhangi bir norm, birbirine yeterince yakın olan gerçek bazı oranları, mevcut ölçekte aynı kesikli değeri adresleyebilmesi ihtimaline izin verir.

Karar vericinin bir sonlu ve kesikli θ kümesinden elde ettiği girdilerle tahmin ederek yapılandığı a_{ij} girdilerinden oluşan karar matrisine en yakın kesikli ikili karşılaştırma (CDP) matrisi denir. CDP matrisi mükemmel şekilde tutarlı olmayabilir. CDP matrisinin tutarlılık indeksi (CI) değerinin 0 (sıfır)'a eşit olmasına gerek yoktur. CDP matrisleri, gerçek değerlere mümkün olduğunca yakın ikili karşılaştırmalar yapılarak karar verici tarafından yapılandırılan iki taraflı matrislerdir. Eğer tüm ikili karşılaştırmalar mükemmel tutarlı ise, a_{ik} , a_{kj} ve a_{ij} değerleri için $a_{ik} \times a_{kj} = a_{ij}$ ($1 \leq i, j, k \leq n$) olması gerekir. Tutarlılık indeksi aşağıdaki gibi tanımlanır (Triantaphyllou, 2000):

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \quad (2.37)$$

Burada $\lambda_{\max}$ ikili karşılaştırma matrisinin özvektörü n ise matrisin boyutudur. $n \geq 3$ girdili ikili karşılaştırmaların sayısallaştırılmasında kullanılan ölçeğe bağımlı kalınmadığında, karşılık gelen CDP matrisi tutarsız olabilir. CDP matrisinin maksimum tutarlılığı ($CI_{\max}$): Maksimum hata $\delta_{\max}$, $e_{ij} = a_{ij}(w_j/w_i)$ olmak üzere şöyle tanımlanır:

$$\text{Herhangi } i, j = 1, 2, K, n \text{ olmak üzere, } \delta_{\max} = \max(e_{ij} - 1) \text{ 'dır.} \quad (2.38)$$

a_{ij} ikili karşılaştırma matrisinin girdilerini, w_i ve w_j değerleri de i ve j girdilerinin gerçek ağırlıklarını temsil etmektedir:

$$CI_{\max} \leq \frac{\delta_{\max}^2}{2} \quad (2.39)$$

A_1, A_2, K, A_n kıyaslanacak olan n tane varlık (kriter, alternatif, kavram vs.) olsun. Tek genel bir karakteristiğe göre kıyaslandıklarında, bu varlıkların bağıl ağırlıklarıyla değerlendirmekle ilgilendiğimizi belirleyelim. Saaty (1980)'nin belirlediği ölçeğin sayısal değerler kümesinden alınan girdilerle oluşturulan bir ikili kıyaslama A matrisi vardır. Özelleştirsek, a_{ij} girdisi A_j elemanı ile kıyaslanan A_i elemanının bağıl öneminin tahmini değeridir. $1/a_{ij} = a_{ji}$ ve $a_{ii} = 1$ olur (Saaty, 2003).

Mükemmel a_{ij} değerlerini elde etmek için, $a_{ij} = w_i/w_j$ ve A matrisi tutarlı olsun. Yani, n kıyaslanan elemanların sayısı olmak üzere;

$$a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj} \quad (i, j, k = 1, 2, 3, \dots, n) \text{ 'dir.} \quad (2.40)$$

x başlıca özvektör olmak üzere, $A \times x = n \times x$ 'dir.

$a_{ij} = w_i/w_j$ olduğundan,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j = \sum_{j=1}^n w_i = n \times w_i \quad (2.41)$$

A oranların matrisinden w ölçeğini elde etmek için,

$$A \times w = n \times w \quad (2.42)$$

Özvektör probleminin çözülmesi şarttır. Bu, homojen lineer eşitlikler sistemidir (Saaty, 2003).

2.4 Çok Kriterli Karar Verme Metotları İçin Bir Duyarlılık Analizi Yaklaşımı

1986 yılında Simon French karar verme konusunda duyarlılık analizinin önemini vurgulamış ve modelleme yargılarındaki bazı zorlukların üstesinden gelmek için, etkileşimli karar verme

metotlarının kullanımının analizini gerçekleştirmiştir. Ayrıca Frech ve Rios Insua 1989'da optimal bir çözüm için rekabetçilerin tanımlanması için, bir mesafe minimizasyonu yaklaşımı kullanmışlardır. Çok amaçlı karar vermede bir duyarlılık analizi metodolojisi, Rios Insua'nın 1990'da yayımladığı “ Çok Amaçlı Karar Vermede Duyarlılık Analizi” kitabında açıklanmıştır. Bu kitapta, karar vermede Klasik Bayes Yaklaşımının sonuçlarının genişletilmiş olan duyarlılık analizini genel bir çerçevede incelemiştir. Bu çalışmanın üzerine, Masuda 1990 yılında Karar matrisinin tüm vektörlerindeki değişimlerin alternatiflerin sıralanmasındaki etkilerini incelemiştir. Masuda çok seviyeli bir hiyerarşi düşünmesine rağmen, verilen bir problemin verilerinin değişimlerinde bir duyarlılık analizinin uygulanması için bir prosedür önermemiştir.

1997'de Triantaphyllou ve Sanchez, Masuda tarafından tasarlanan yaklaşımın tamamlayıcısı olan bir duyarlılık analizi yaklaşımı tasarlamışlardır. Ayrıca, 1994 yılında Armacost ve Hosseini, tek seviye hiyerarşili AHP problemi için $A \times W = n \times W$ en kritik kriterin belirlenmesi için bir yöntem sunmuşlardır. Bu çalışma, bir kriterin mevcut ağırlığında en küçük bir değişim olduğunda ne olacağını, mesela mevcut alternatif sırasının değişmesi gibi, açık bir şekilde belirlememektedir (Triantaphyllou, 2000).

Karar vermede karar kriterlerine atanan ağırlıklar karar kriterlerinin gerçek değerlerini sunmaya çalışırlar. Kriter maliyet gibi sayısal olarak ifade edilemediği takdirde, bu kriterleri kesin olarak ifade etmek zorlaşır. Böyle bir durumda, karar verme süreci kritik kriterin belirlenmesi ve bu kriterlerin ağırlıklarının tekrar değerlendirilmesiyle geliştirilebilir. Burada, sezgisel olarak ağırlığı en büyük olan kriterin en kritik kriter olduğu kabul edilir. Bu bazı durumlarda doğru olmasına rağmen, bazı durumlarda ağırlığı en düşük kriter de en kritik kriter olabilir.

Karar verici, her kriterin ne kadar kritik olduğunu belirleyebilirse, daha iyi kararlar alabilir. Diğer bir deyişle, alternatiflerin sıralamasının ne kadar duyarlı olduğu, karar kriterlerinin mevcut ağırlıklarının değişimine bağlıdır. Bu bölümde incelenen ilk durum, kriterlerin ağırlıkları üzerinde duyarlılık analizi yaparak, her kriterin ne kadar kritik olduğunun belirlenmesidir. Bu duyarlılık analizi yaklaşımı, alternatiflerin mevcut sıralamasını bozan kriterin mevcut ağırlığındaki en küçük değişimin ne olacağını belirler. İkinci durum ise, alternatiflerin sıralanmasında alternatiflerin çeşitli performans ölçütlerinin ne kadar kritik olduğunun belirlenmesidir (Triantaphyllou, 2000).

2.4.1 İki Büyük Duyarlılık Analizi Yaklaşımı

Klasik m alternatifli ve n karar kriterli bir çok kriterli karar problemini ele alalım. Karar matrisinin, daha öncede olduğu gibi, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ve $j = 1, 2, 3, \dots, n$ olmak üzere, a_{ij} ve w_j girdileri bulunmaktadır. Bundan sonra problem en iyi alternatifin belirlenmesi ya da alternatiflerin sıralanmasıdır.

Tüm karar kriterleri eşzamanlı olarak göz önüne alındığında, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ olmak üzere, P_i , A_i alternatifinin nihai önceliğini temsil etsin. Farklı karar metodları, P_i öncelik değerinin hesaplanmasında farklı prosedürleri uygular. m alternatifleri aşağıdaki ilişkiye göre düzenlenmektedir (Yani; ilk alternatifin en iyi alternatif olduğu kabul edilmektedir.):

$$P_1 \geq P_2 \geq P_3 \dots \geq P_m \quad (2.43)$$

Bu bölümde iki ana problem açıklanacaktır. İlki, tipik bir çok kriterli karar verme probleminde en kritik kriterin nasıl belirleneceğidir. Sezgisel olarak, en kritik kriterin ağırlığı en büyük kriter olduğu düşünülse de, bu durum her zaman geçerli değildir. En kritik kriter iki şekilde tanımlanır. İlki, en iyi alternatifin değişmesi ya da değişmemesiyle ilgili olup, diğeri herhangi bir alternatifin sıralamadaki değişimi ile ilgilidir (Triantaphyllou, 2000).

En küçük değişim iki şekilde tanımlanabilir. Bu değişim, gerçek değerlerde en küçük değişim ya da bağıl değerlerde en küçük değişim olarak gerçekleştirilebilir. Örneğin; ağırlıkları $w_1 = 0.30$ ve $w_2 = 0.50$ olan C_1 ve C_2 kriterlerini düşünelim. Ardından, $w'_1 = 0.35$ olduğunda, alternatiflerin mevcut sıralaması da değişir. Benzer şekilde, $w_1 = 0.30$ aynı kalmak kaydıyla $w'_2 = 0.57$ olduğunda, alternatiflerin sıralaması yine değişmektedir. Gerçek değerlerde, ilk kriter en kritik kriterdir. Bu, C_1 kriteri için ağırlıkların değişiminin $|w_1 - w'_1| = 0.05$, aynı zamanda C_2 kriterinin karşılık gelen değişimi $|w_2 - w'_2| = 0.07$ olduğu sürece doğrudur. Yani, gerçek değerlerle hesaplama yapıldığında, ilk kriterin kritik değişimi ikinci kriterinkisinden küçüktür.

Buna rağmen, bağıl değerler düşünüldüğünde, önceki durum tersine döner. Bağıl değerlerde, C_1 için ağırlıkların değişimi $|w_1 - w'_1| \times 100 / w_1 = \%16.75$ 'e eşit olur, aynı zamanda C_2 kriterinin karşılık gelen değişimi $|w_2 - w'_2| \times 100 / w_2 = \%14.00$ 'a eşit olur. Yani, ikinci kriter için bağıl değişim kritik değişimi ikinci kriterinkisinden küçüktür. Böylece, bağıl değerlerin değişimi düşünüldüğünde, en kritik kriter C_2 olur.

Ayrıca, alternatiflerin sıralanmasında değişimler iki farklı yönden gözlenebilir. İlki, mevcut veri değişiminin neden olduğu, mevcut alternatif sıralamasında herhangi iki alternatifin yer değiştirmesinin gözlenmesi ile ilgilenilebilir. Bununla birlikte, bazıları sadece en iyi alternatifin yerinin değişmesiyle ilgilenir. Mesela, problem tek bir boşluğu dolduruyorsa, birbiriyle yarışan pek çok alternatif (aday) arasından en iyi alternatifin seçilmesiyle ilgilenilir. Diğer taraftan, problem bir bütçenin birbiriyle yarışan ihtiyaçlara dağıtılması için P_i değerleri ile ilgilenilir (Triantaphyllou, 2000).

Ayrıca, dört alternatifin toplamının tanımı da düşünülmelidir. Bunlar; literatürde Mutlak Herhangi (Absolute Any-AA), Mutlak En İyi (Absolute Top-AT), Kısmi Herhangi (Percent Any-PA) ve Kısmi En İyi (Percent Top-PT) olarak kodlanır. Bu yaklaşım, bazı durumlarda yanlış olabilmektedir. Mesela, 0.03'lük bir değişim olduğunu düşünelim. Bu değişim, orjinal değer 0.08 ya da 0.80 olması durumunda çok farklı öneme sahiptir. Bu nedenle, bağlı değerlerin kullanılması daha anlamlıdır (Triantaphyllou, 2000).

2.4.2 En Kritik Kriterin Belirlenmesi

2.4.2.1 Tanımlar ve Terminoloji

Öncelikle, karar kriterlerinin mevcut ağırlıklarındaki değişimleri tanımlayalım (Triantaphyllou, 2000).

Tanım 1: $1 \leq i < j \leq m$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere, $\delta_{k,i,j}$, A_i ve A_j alternatifleri yer değiştirdiğinde, C_k kriterinin mevcut w_k ağırlığındaki minimum değişimini gösterebilir. $\delta'_{k,i,j}$ şöyle olur:

$$\delta'_{k,i,j} = \delta_{k,i,j} \times 100 / w_k \quad (2.44)$$

$\delta'_{k,i,j}$ bağlı değerlerdeki değişimi göstermektedir. Bu arada belirtilmesi gerekir ki, verilen bir takım alternatifler ve karar kriterleri için, kritik değişim değeri fizibil olmayabilir.

En kritik kriter, daha öncede belirtildiği gibi, iki yolla tanımlanabilir. Birincisi sadece en iyi alternatifteki değişimle ilgilenen, ikincisi ise herhangi bir alternatifin sıralamadaki değişimiyle ilgilenen olmak üzere iki tanım yapılabilir.

Tanım 2: Percent Top (PT) kritik kriteri, $1 \leq j \leq m$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere, en küçük $|\delta'_{k,i,j}|$ değerine karşılık gelen kriterdir.

Tanım 3: Percent Any (PA) kritik kriteri, $1 \leq i < j \leq m$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere, en küçük $|\delta'_{k,i,j}|$ değerine karşılık gelen kriterdir.

Aşağıdaki iki tanım verilen bir karar kriterinin ne kadar kritik olduğunu açıklayan tanımlardır.

Tanım 4: C_k kriterinin kritiklik derecesi olarak gösterilen D'_k , alternatiflerin mevcut sıralamasını değiştiren, yani w_k 'nin mevcut değerinin değişmesi gereken miktarının en küçük yüzdesidir.

Tanım 5: C_k kriterinin duyarlılık katsayısı olarak gösterilen $sens(C_k)$, kendisinin kritiklik derecesinin tersidir ve herhangi $n \geq k \geq 1$ olmak üzere şöyle ifade edilebilir:

$$sens(C_k) = \frac{1}{D'_k} \quad (2.45)$$

Eğer kritiklik derecesi fizibil değilse (herhangi bir ağırlık değişimi ile alternatiflerin sıralamasında herhangi bir değişim mümkün olmuyorsa, vs..), duyarlılık katsayısı sıfıra eşit olur.

Yukarıdaki iki tanım, herhangi iki alternatifin sıralamasının değişimini temel alır. Bununla birlikte, sadece en iyi alternatifin sırasının değişimiyle de ilgilenilebilir. Mesela, bir ev satın alma probleminde, ilk odak noktası en iyi evi bulmaktır, ardından diğer alternatif evlerin sıralamasıdır. Buna benzer örnek olaylarda, en iyi alternatifin puanı üzerinde tanımlanan hangi değişimlerde, kritiklik derecesi ve duyarlılık katsayısı da kullanılabilir. Ayrıca, yukarıdaki tanımlara göre, D'_k daima birden küçük ya da bire eşit ve buradan hareketle, $sens(C_k)$ değeri ise; daima birden büyük veya bire eşittir.

2.4.2.2 WSM veya AHP Kullanımı

Karar vericinin, sadece C_1 kriterinin w_1 ağırlığını değiştirerek A_1 ve A_2 alternatiflerinin mevcut sıralamasını bozmak istediğini ve WSM veya AHP kullanmayı düşündüğünü varsayalım. Daha önceden kabul ettiğimiz gibi, $P_1 \geq P_2$ 'dir. Minimum miktar $\delta_{1,1,2}$, A_1 ve A_2 alternatiflerinin sıralamadaki yerlerinin tersine değişmesi için aşağıdaki ilişkiyi sağlamalıdır (Triantaphyllou, 2000):

$$\text{Eğer } a_{21} > a_{11} \text{ ise, } \delta_{1,1,2} < \frac{(P_2 - P_1)}{(a_{21} - a_{11})} \text{ ya da,} \quad (2.46)$$

$$\text{Eğer } a_{21} \langle a_{11} \text{ ise, } \delta_{1,1,2} \rangle \frac{(P_2 - P_1)}{(a_{21} - a_{11})} \text{ olur.} \quad (2.47)$$

Ayrıca, aşağıdaki durum yeni ağırlık $w_1^* = w_1 - \delta_{1,1,2}$ değeri için fizibil olacak şekilde sağlanmalıdır.

$$0 \leq w_1^* \text{ veya,}$$

$$0 \leq w_1 - \delta_{1,1,2} \text{ veya,}$$

$$\delta_{1,1,2} \leq w_1. \quad (2.48)$$

Burada, $w_1^* \leq 1$ olması gerekir, Çünkü bu ağırlıklar toplamı bir edecek şekilde tekrar normalize edilmiştir.

Görüldüğü gibi, $\delta_{1,1,2}$ miktarı her zaman fizibil bir değere sahip olamamaktadır. Diğer bir deyişle, C_1 kriterinin w_1 ağırlığını değiştirerek, A_1 ve A_2 alternatiflerinin sıralamadaki yerlerinin tersine değişmesi imkansız olabilmektedir. Bu durum aşağıdaki oran w_1 'den büyük olduğunda gerçekleşir:

$$\frac{(P_2 - P_1)}{(a_{21} - a_{11})}. \quad (2.49)$$

Teorem 1: WSM veya AHP kullanıldığında, $1 \leq i \leq j \leq m$ ve $1 \leq k \leq m$ olmak üzere, $\delta'_{k,i,j}$ miktarı normalizasyondan sonra C_k kriterinin w_k mevcut ağırlığı tarafından iyileştirilerek, A_i ve A_j alternatiflerinin sıralamadaki yerlerinin tersine değişmesi sağlanabilir. Yani;

$$\text{Eğer } (a_{jk} \rangle a_{ik}) \text{ ise, } \delta'_{k,i,j} \langle \frac{(P_j - P_i)}{(a_{jk} - a_{ik})} \times \frac{100}{w_k},$$

$$\text{Eğer } (a_{jk} \langle a_{ik}) \text{ ise, } \delta'_{k,i,j} \rangle \frac{(P_j - P_i)}{(a_{jk} - a_{ik})} \times \frac{100}{w_k} \text{, dir.} \quad (2.50)$$

Ayrıca, $\delta'_{k,i,j}$ değeri tarafından aşağıdaki denklem sağlanmalıdır.

$$\frac{(P_j - P_i)}{(a_{jk} - a_{ik})} \leq w_k. \quad (2.51)$$

Eğer alternatif A_i , alternatif A_j 'ye baskınsa (örneğin, k 'nın tüm değerleri için $(a_{ik} \geq a_{jk})$ ise), kriter ağırlıklarını değiştirerek A_j alternatifini A_i alternatifinden daha baskın bir tercih haline

getirilemez. Aynı zamanda, eğer $\delta'_{k,i,j}$ miktarı ve onunla ilgili her şeyin ($1 \leq i < j \leq m$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere) fizibil olmaması, bir C_k kriterinin güçlü bir kriter olduğunu gösterir. Diğer bir deyişle, $((P_j - P_i)/(a_{jk} - a_{ik})) \leq w_k$ durumu, bazı C_k kriterlerinin tüm $i, j = 1, 2, 3, \dots, m$ için ihlal edilirse, bu kriterin ağırlığındaki herhangi bir değişim olması mevcut alternatif sıralamasını etkilemez.

Böylece, en kritik kriterle ilgilenildiğinde, tüm mümkün $\delta'_{k,i,j}$ ($1 \leq i < j \leq m$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere) hesaplanmalıdır. Burada, $n \times (m(m-1))/2$ mümkün $\delta'_{k,i,j}$ miktarı olduğu gözlenir (Triantaphyllou, 2000).

Yukarıdaki ifadelerin tamamının harfsel olması nedeniyle, anlaşılması daha zordur. Bu nedenle, sayısal bir örnekle gösterilmesi daha açıklayıcı olacaktır. Dört alternatifi ve dört karar kriteri olan bir çok kriterli karar verme problemini ele alalım. Bu örnek için, aşağıda verileri normalize edilmiş olan bir karar matrisi verilmektedir.

	Kriterler			
	C_1	C_2	C_3	C_4
Alternatifler	0.3277	0.3058	0.2876	0.0790
A_1	0.3088	0.2897	0.3867	0.1922
A_2	0.2163	0.3458	0.1755	0.6288
A_3	0.4509	0.2473	0.1194	0.0575
A_4	0.0240	0.1172	0.3184	0.1215

(2.52)

WSM metodunu uygulamak istediğimizi düşünelim (Veriler normalize edilmiş olduğu için AHP metodunun da aynı zamanda uygulandığı kabul edilebilir.). Buna göre, aşağıdaki çizelgede son öncelikler ve karşılık gelen alternatiflerin öncelik sıralaması verilmektedir.

Çizelge 2-4: Öncelik Sıralaması

Alternatif	Öncelik (P_j)	Sıralama
A_1	0.3162	1*
A_2	0.2768	2
A_3	0.2621	3
A_4	0.1449	4

Böylece, $P_1 \geq P_2 \geq P_3 \geq P_4$ ilişkisi gerçekleşir ve bunun sonucu olarak en iyi alternatif A_1 olarak belirlenmiş olur. Buradaki dört kriterin ağırlıklarına bakıldığında, C_1 en kritik kriterdir.

Mevcut w_1 ağırlığını bozmak için minimum değişim $\delta_{1,1,3}$ değerine ihtiyaç duyulur, böylece A_1 ve A_3 alternatiflerinin mevcut sıralaması tersine çevrilebilir. Bu değer,

$$\delta_{1,1,3} < \frac{(0.2621 - 0.3162)}{(0.4509 - 0.3088)} \text{ yani, } \delta_{1,1,3} < -0.3807 \text{ olur.}$$

Bu -0.3807 miktarı w_1 'den küçük olduğu için $((P_j - P_i)/(a_{jk} - a_{ik})) \leq w_k$ denklemini sağlamaktadır. Böylece ilk kriterin yeni ağırlığı:

$$w_1^* = [0.3277 - (-0.3807)] = 0.7084 \text{ olur.}$$

Yukarıdaki gibi çalışarak, kriterlerin ve alternatiflerin mümkün tüm kombinasyonları için aşağıdaki Çizelge 5'de oluşturulmuştur. Ardından Çizelge 5 bağıl değerlerdeki değişimi anlatmaktadır. Çizelge 5'deki negatif değişimler artışları gösterirken, pozitif değişimler de azalışları göstermektedir. Ayrıca yüzde ya da mutlak olarak ifade edilen değişimlerin, normalizasyondan önceki halleri olduğu belirtilmelidir. İki Çizelgede da, koyu olarak gösterilen sayılar minimum kritik değişimleri göstermektedir.

Kısmi En İyi (Percent-Top) Kritik Kriteri, Çizelge 6'da A_1 alternatifiyle ilgili tüm satırların en küçük bağıl değerine bakılarak bulunabilir. A_1 ve A_2 alternatif çifti düşünüldüğünde, en küçük yüzde oranı (%64.8818) C_3 kriterine karşılık gelir. C_3 kriterinin ağırlığının %64.8818 değerine indirgenmesi, A_1 alternatifinin artık en iyi alternatif olmamasını ve A_2 alternatifinin en iyi alternatif olmasını beraberinde getirir.

Kısmi Herhangi (Percent Any) kritik kriteri, Çizelge 6'daki en küçük $\delta'_{k,i,j}$ değerine bakılarak bulunabilir. Böylece en küçük değer $\delta_{3,2,3} = \%9.1099$ olup, bu da C_3 kriterine karşılık gelir. O nedenle, Kısmi Herhangi (Percent Any) kritik kriteri C_3 kriteridir. Burada, en kritik kriterin her iki tanımının da aynı C_3 kriterini göstermesinin bir tesadüf olduğu belirtilmelidir.

Bu noktada, eğer karar verici en kritik kriteri belirlemek için mutlak değişimleri kullanmayı tercih ederse, önceki iki Kısmi En İyi (Percent Top) ve Kısmi Herhangi (Percent Any) kritik kriterleri tanımlarının yerine sırasıyla Mutlak En İyi (Absolute Top) ve Mutlak Herhangi (Absolute Any) kriterleri kullanılır. Çizelge 5'de Mutlak En İyi (Absolute Top) kriteri C_4 'e karşılık gelmekte ve yine tesadüfi Mutlak Herhangi (Absolute Any) kriteri de C_4 'e karşılık gelmektedir (Triantaphyllou, 2000).

Çizelge 2-5: Tüm mümkün $\delta_{k,i,j}$ değerleri (Kriter ağırlıklarındaki mutlak değişimler)

Alternatif Çiftleri	Kriterler			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1-A_2	N/F ¹	-0.7023	0.1866	-0.0902
A_1-A_3	-0.3807	N/F	0.2024	N/F
A_1-A_4	N/F	N/F	N/F	N/F
A_2-A_3	-0.0627	0.1492	0.0262	0.0257
A_2-A_4	N/F	N/F	-0.9230	N/F
A_3-A_4	0.2745	N/F	-0.5890	-1.8313

Çizelge 4’de dört kriter için kritiklik dereceleri $D'_1 = |-19.1334| = 19.1334$, $D'_2 = 48.7901$, $D'_3 = 9.1099$ ve $D'_4 = 32.5317$ verilmektedir. O nedenle, dört kriterin duyarlılık katsayıları: $sens(C_1) = 0.0523$, $sens(C_2) = 0.0205$, $sens(C_3) = 0.1098$ ve $sens(C_4) = 0.0307$ ’dir. Buna göre, C_3 en duyarlı kriterdir ve takip eden sıra C_1 , C_4 ve C_2 ’dir.

Çizelge 2-6: Tüm mümkün $\delta_{k,i,j}$ değerleri (Kriter ağırlıklarındaki yüzde değişimler)

Alternatif Çiftleri	Kriterler			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1-A_2	N/F	-229.7	64.8818	-114.1772
A_1-A_3	-116.1733	N/F	70.3755	N/F
A_1-A_4	N/F	N/F	N/F	N/F
A_2-A_3	-19.1334	48.7901	9.1099	32.5317
A_2-A_4	N/F	N/F	-320.9	N/F
A_3-A_4	83.7656	N/F	-204.8	-2318.10

2.4.2.3 WPM Kullanımı

$\delta_{1,1,2}$ miktarının belirlenmesinde WPM kullanımıyla ilgilenelim. Aşağıdaki oran birden küçük ya da bire eşitse, A_1 alternatifi A_2 alternatifinden daha iyidir:

¹ N/F Fizibil olmayan anlamındadır. Yani, karşılık gelen δ değeri $((P_j - P_i)/(a_{jk} - a_{ik})) \leq w_k$ denklemini sağlamamaktadır.

$$R\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_{1j}}{a_{2j}}\right)^{w_j} \quad (2.53)$$

Bölümün başında $P_1 \geq P_2$ kabulünü yapılmıştı. Bu iki alternatifin yeni önceliklerini P_1' ve P_2' gösterebiliriz. Ardından, bu iki alternatifin yerleri tersine değiştirildiğinde, bu öncelik ilişkisi $P_1' < P_2'$ olur. $\delta_{1,1,2}$ miktarı aşağıdaki durumu sağlamalıdır (Triantaphyllou, 2000):

$$\delta_{1,1,2} > \frac{\log\left(\prod_{y=1}^n \left(\frac{a_{1y}}{a_{2y}}\right)^{w_y}\right)}{\log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right)} \quad (2.54)$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafı, A_2 alternatifinin A_1 alternatifinden daha iyi yapacak olan C_1 kriterinin w_1 ağırlığının modifikasyonu için gereken minimum değişim değeri verir. Benzer şekilde, bu miktar $((P_j - P_i)/(a_{jk} - a_{ik})) \leq w_k$ durumunu sağlamalıdır (Triantaphyllou, 2000).

Teorem 2: WPM kullanıldığında, $\delta'_{k,i,j}$ kritik miktarı, $(1 \leq i < j \leq m)$ ve $(1 \leq k \leq n)$ olmak üzere, A_i ve A_j alternatiflerinin tersine yer değiştirmesi için gerekli olan C_k kriterinin w_k ağırlığının modifikasyonu şöyledir:

$$K \geq 0 \text{ ise } \delta'_{k,i,j} = K,$$

Aksi takdirde $\delta'_{k,i,j} = K$ 'dır. Ve;

$$K = \frac{\log\left(\prod_{y=1}^n \left(\frac{a_{iy}}{a_{jy}}\right)^{w_y}\right)}{\log\left(\frac{a_{ik}}{a_{jk}}\right)} \times \frac{100}{w_k}. \quad (2.55)$$

Ayrıca, aşağıdaki kısıt da sağlanmalıdır:

$$\delta'_{k,i,j} \leq 100. \quad (2.56)$$

Teorem 2'ye benzer şekilde, en kritik kriterleri belirlemek için, toplam $n \times m(m-1)$ kritik değişimleri ($\delta'_{k,i,j}$ değerleri) hesaplanmalıdır.

Yukarıdaki ifadelerin tamamının harfsel olması nedeniyle, anlaşılması daha zordur. Bu nedenle, sayısal bir örnekle gösterilmesi daha açıklayıcı olacaktır. Dört alternatifi ve dört karar kriteri olan bir çok kriterli karar verme problemini ele alalım. Bu örnek için, aşağıda verileri normalize edilmiş olan bir karar matrisi verilmektedir.

	<i>Kriterler</i>			
	C_1	C_2	C_3	C_4
<i>Alternatifler</i>	0.4504	0.1231	0.0848	0.3417
A_1	0.9381	0.3501	0.8811	0.5646
A_2	0.7691	0.4812	0.1679	0.9336
A_3	0.9445	0.1138	0.2219	0.0135
A_4	0.1768	0.0221	0.9462	0.1024

(2.57)

WPM uygulandığında, bu dört alternatifin sıralaması aşağıda Çizelge 7'de verilmektedir. A_1 alternatifinin tüm kombinasyonlarında A_1 en iyi alternatif olarak karşımıza çıkmaktadır. Aynı zamanda, kriter ağırlıklarına göre, en yüksek ağırlığa sahip olması nedeniyle, C_1 alternatifi en önemli olanıdır (Triantaphyllou, 2000).

Ardından, mevcut w_4 ağırlığını bozmak için gerekli olan en küçük miktarı hesaplarız. Böylece mevcut A_1 ve A_2 alternatiflerinin mevcut sıralamasının tersine değişmesi sağlanabilir. K ile gösterilen bu miktar:

$$K = \frac{\log\left(\left(\frac{0.9381}{0.7692}\right)^{0.4504} \left(\frac{0.3501}{0.4812}\right)^{0.1231} \wedge \left(\frac{0.5646}{0.9336}\right)^{0.3417}\right)}{\log\left(\frac{0.5646}{0.9336}\right)} \times \frac{100}{0.3417} = -11.04.$$

Çizelge 2-7: Mevcut Sıralama (*:maksimizasyon durumunda en çok tercih edilen alternatifi gösterir.)

Alternatif Çiftleri $A_i - A_j$	$R(A_i - A_j)$ Oranı	Sıralama
$A_1 - A_2$	1.0192	$A_1 \rightarrow 1st^*$
$A_1 - A_3$	4.6082	$A_2 \rightarrow 2nd$
$A_1 - A_4$	5.3062	$A_3 \rightarrow 3rd$
$A_2 - A_3$	4.5216	$A_4 \rightarrow 4th$
$A_2 - A_4$	5.2065	
$A_3 - A_4$	1.1515	

$\delta'_{4,1,2}$ değeri, $K = -11.04$ 'den küçük olmalıdır. $\delta'_{k,i,j} \leq 100$ olduğu sürece fizibildir. Benzer bir durumda, tüm mümkün K değerleri belirlenmelidir. Bu değerler, aşağıdaki Çizelgede gösterilmektedir:

Çizelge 2-8: WPM Örneği için Mümkün Tüm K değerleri (N/F: Fizibil olmayan anlamındadır.)

Alternatif Çiftleri	Kriterler			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1-A_2	21.21	-48.44	13.50	-11.04
A_1-A_3	N/F	N/F	N/F	N/F
A_1-A_4	N/F	N/F	N/F	N/F
A_2-A_3	N/F	N/F	N/F	N/F
A_2-A_4	N/F	N/F	N/F	N/F
A_3-A_4	18.69	69.97	-114.72	-20.37

Burada Kısmi En İyi (Percent Top) ve Kısmi Herhangi (Percent Any) kritik kriterlerinin aynı C_4 kriterini göstermesi enteresandır. Bununla birlikte, ağırlığı en yüksek olan kriter ise C_1 'dir. Bu beklenenin tersine bir sonuçtur. Çizelge 4.5'de $D_1' = 18.69$, $D_2' = |-48.44| = 48.44$, $D_3' = 13.50$ ve $D_4' = |-11.04| = 11.04$ kritiklik dereceleri görülmektedir. Böylece, bu dört kriter için duyarlılık katsayıları, $sens(C_1) = 0.0535$, $sens(C_2) = 0.0206$, $sens(C_3) = 0.0741$ ve $sens(C_4) = 0.0906$ 'dır. Bu sonuçlara göre, en duyarlı kriter C_4 olmak üzere, sırasıyla C_3 , C_1 ve C_2 'dir (Triantaphyllou, 2000).

2.4.3 En kritik performans ölçütü a_{ij} 'nin tanımlanması

2.4.3.1 Tanımlar ve Terminoloji

Bu bölümde incelenen ikinci önemli problem, WSM, AHP ya da WPM metotları kullanıldığında, kritik performans ölçütü a_{ij} 'nin nasıl tanımlanacağı problemidir. Aşağıdaki tanımlar bu problem için geçerlidir (Triantaphyllou, 2000).

Tanım 6: $\tau_{i,j,k}$ ($1 \leq i < j \leq m$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere), A_i ile A_j alternatifleri arasındaki mevcut sıralamayı değiştirecek olan mevcut a_{ij} 'de oluşması gereken minimum değişim olan a_{ij} 'nin eşik değerini gösterebilir.

m adet alternatif olması nedeniyle, her a_{ij} performans ölçüsü $(m-1)$ kadar eşik değeri düşünülür. Benzer bir şekilde, daha önce yapılan $\tau'_{i,j,k}$ değerlerinin tanımını göz önünde bulundurursak, eşik değeri bağıl değerlerle de ifade edilebilir. Bağıl olarak ifade edilen eşik değeri, $\tau'_{i,j,k}$ olarak gösterebiliriz:

$$\tau'_{i,j,k} = \tau_{i,j,k} \times 100 / a_{ij} \quad (\text{Her } 1 \leq i, k \leq m \text{ ve } 1 \leq j \leq n \text{ için}) \quad (2.57)$$

Yukarıda verilen eşik değeri ifadesine göre, en küçük eşik değeri olan alternatifi en duyarlı alternatif olarak tanımlayabiliriz. Daha öncekine benzer şekilde sadece en iyi alternatifin sıralamasını değiştiren ya da herhangi bir alternatifin sıralamadaki yerini değiştiren bir durumla ilgilenmek tamamen karar vericinin inisiyatifindedir.

Daha öncede bahsedildiği gibi, herhangi bir a_{ij} performans ölçüsü için $(m-1)$ tane mümkün $\tau'_{i,j,k}$ eşik değeri vardır. Aşağıda yer alan üç tanım $\tau'_{i,j,k}$ eşik değeri ile ilgilidir. Aşağıdaki tanımlar herhangi bir alternatifin sırasının değişimiyle ilgili olarak verilmiştir, fakat belirtilmelidir ki, benzer tanımlar en iyi alternatifin sıralamasının değişimi için de geçerlidir.

Tanım 7: C_j kriterine göre A_i alternatifinin kritiklik derecesi, A_i alternatifinin mevcut sıralamasını değiştirecek mevcut a_{ij} 'deki en küçük (%) değişim miktarı Δ'_{ij} olarak gösterilsin. Yani,

$$\Delta'_{ij} = \min_{k \neq i} \{ \tau'_{i,j,k} \}, \quad (\text{Tüm } m \geq i \geq 1 \text{ ve } n \geq j \geq 1 \text{ değerleri için}). \quad (2.58)$$

Tanım 8: Eğer A_L alternatifi en küçük kritiklik derecesi ilişkilendirilirse, A_L alternatifi en kritik alternatiftir. Bu yalnız ve yalnız aşağıdaki durum sağlandığında geçerlidir.

$$\Delta'_{Lk} = \min_{m \geq i \geq 1} \{ \min_{n \geq j \geq 1} \{ \Delta'_{ij} \} \} \quad (\text{Birkaç } n \geq k \geq 1 \text{ için}) \quad (2.59)$$

Tanım 9: C_j kriterine göre A_i alternatifinin duyarlılık katsayısı $sens(a_{ij})$, kritiklik derecesinin tersidir. Yani,

$$sens(a_{ij}) = \frac{1}{\Delta'_{ij}} \quad (\text{Her } m \geq i \geq 1 \text{ ve } n \geq j \geq 1 \text{ değerleri için}) \quad (2.60)$$

Eğer kritiklik derecesi fizibil değilse, bu durumda duyarlılık katsayısı sifıra eşitlenir.

Tanım 7'ye göre, Δ'_{ij} kritiklik derecesi küçüldükçe A_i alternatifinin sıralamasının değişmesi o kadar kolay olur. Alternatif olarak, Tanım 9 duyarlılık katsayıları $sens(a_{ij})$ yükseldikçe,

sıralama daha kolay değişir. Son olarak; Tanım 8, Tanım 7 ve Tanım 9 ile birleştirildiğinde, en duyarlı alternatifin en yüksek duyarlılık katsayısına sahip olduğunu gösterir. Takip eden bölüm bu yeni ve önemli terimlerin nasıl hesaplandığını göstermektedir.

2.4.3.2 Eşik değerlerin Δ'_{ij} tanımlanması

- *WSM veya AHP Kullanımı* (Triantaphyllou, 2000):

Teorem 3: WSM metodu kullanıldığında, C_j kriterine göre A_i alternatifinin performans ölçütü a_{ij} 'yi değiştirerek elde edilecek olan Δ'_{ij} , A_i ve A_k alternatiflerinin sıralamadaki yerlerini tersine değiştirmek için düzeltilmeye ihtiyaç duyar. Bu durum aşağıda verilmiştir:

$i < k$ ise $\tau'_{ij} < R$, ya da:

$i > k$ ise $\tau'_{ij} > R$.

R aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır

$$R = \frac{(P_i - P_k)}{w_j} \times \frac{100}{a_{ij}}. \quad (2.61)$$

Ayrıca, eşik değerinin fizibil olabilmesi için aşağıda yer alan koşulun sağlanması gerekmektedir:

$$\tau'_{ij} \leq 100. \quad (2.62)$$

$0 \leq a_{ij} - \tau'_{i,j,k}$ ve $\tau'_{i,j,k} = \tau_{i,j,k} \times 100 / a_{ij}$ gereklilikleri yardımıyla, yeni $0 \leq a_{ij} - a_{ij} \times \tau'_{i,j,k} / 100$ koşulu elde edilir. Sonra, bu denklem koşul (2.62) koşuluna öncülük eder. AHP metodunun uygulaması için gerekli olan teorem aşağıda gösterilmektedir.

Teorem 4: AHP metodu uygulandığı zaman, C_j kriterine göre A_i alternatifinin performans ölçütü a_{ij} 'yi değiştirerek elde edilecek olan Δ'_{ij} , A_i ve A_k alternatiflerinin sıralamalarını değiştirmek için düzeltilmeye ihtiyaç duyar. Bu durum aşağıda verilmiştir:

$$\tau'_{i,j,k} = \frac{(P_i - P_k)}{[P_i - P_k + w_i(a_{ki} - a_{ij} + 1)]} \times \frac{100}{a_{ij}}. \quad (2.63)$$

Ayrıca, aşağıda yer alan koşulların, fizibil olan eşik değeri için yerine getirilmesi gerekmektedir :

Ayrıca, eşik değerinin fizibil olabilmesi için aşağıda yer alan koşulun sağlanması gerekmektedir:

$$\tau'_{ij} \leq 100. \quad (2.64)$$

Daha iyi anlaşılması açısından bir önceki bölümde olduğu gibi ,WSM ya da AHP metotlarının kullanıldığında, a_{ij} değerinin duyarlılık analizi sayısal olarak bir örnekle anlatılmaktadır.

WSM modelinin uygulanması ile ilgili Çizelge 9'da yer alan karar matrisini göz önüne alalım. Bu problem beş alternatif ve beş karar kriterine sahiptir. AHP olayı benzer şekilde geliştirilebilir.

Çizelge 2-9: Karar Matrisi ve Başlangıç Öncelikleri

	Kriterler					ÖncelikDeğerleri
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	P_i
<i>Alternatifler</i>	(0.4146	0.0129	0.2958	0.0604	0.2164)	
A_1	0.3576	0.2483	0.2899	0.2961	0.3202	0.3244
A_2	0.3603	0.2836	0.0407	0.0939	0.0172	0.1745
A_3	0.0255	0.1745	0.2895	0.2212	0.2641	0.1690
A_4	0.1609	0.2008	0.2960	0.0716	0.0315	0.1680
A_5	0.0957	0.0928	0.0839	0.3172	0.3670	0.1643

Yukarıdaki verilere Teorem 4 uygulandığı zaman, $\tau'_{i,j,k}$ eşik değeri Çizelge 10'daki gibi olur. Çizelge 10'daki koyu yazılmış harfli değerler, her bir satır için kolonlardaki en küçük değer olan $\Delta'_{i,j}$ kritiklik derecesine karşılık gelmektedir. Kritiklik derecesi Çizelge 11' de özetlenmiştir.

Çizelge 10'daki değerlerin yorumlanmasına yardımcı olmak için, onlardan birini göz önüne alalım. Örneğin (3,1) girdisini ele alalım. (Örn. 89,3). Bu girdi $\tau'_{1,1,4} = \%89,3$ olduğunu gösterir. A_4 alternatifini A_1 alternatifinden daha çok tercih edilir hale getirmek için (Mevcut A_1 alternatifi A_4 alternatifine göre daha çok tercih edilmektedir), a_{11} performans ölçüsünü $\%89,3$ azaltılması, yani şimdiki değeri (0,3576)'den $(1-0,893) \times (0,3576)$ değerine azaltılması gerektiğini ifade etmektedir. Benzer bir yorum Çizelgenin geriye kalan değerleri için de yapılabilir. Bazı değerlerin N/F olarak yazılmış olup, bu değerler fizibil olmayan değerlere karşılık gelmektedir. Çizelge 10'da değerler 100'den büyük olduğunda, işaretlerinin de negatif olduğu belirtilmelidir. Negatif değişimler gerçekte artış anlamındadır. Puanın 100'den büyük olması iyidir. Kriter ağırlıkları toplamı bir edecek şekilde yeniden normalize edilir. a_{ij} performans ölçütü, AHP kullanılıyorsa toplamı bir olacak şekilde normalize edilir, WSM ya da WPM kullanılıyorsa toplamı 1 (bir)'den fazla olabilir. Daha öncede olduğu gibi koyu yazılı sayılar minimum değerleri göstermektedir.

Çizelge 2-10: AHP/WSM kullanımı için bağıl olarak eşik değerleri $\tau'_{i,j,k}$ (%)

Alternatifler A_i	C_j Kriterleri					Alternatifler A_k
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
A_1	74.1	N/F	N/F	N/F	N/F	A_2
A_1	N/F	N/F	N/F	N/F	N/F	A_3
A_1	89.3	N/F	N/F	N/F	N/F	A_4
A_1	96.1	N/F	N/F	N/F	N/F	A_5
A_2	-157.9	N/F	-1,677.6	N/F	N/F	A_1
A_2	5.4	N/F	35.9	79.4	N/F	A_3
A_2	5.3	N/F	41.9	N/F	N/F	A_4
A_2	8.9	N/F	78.4	N/F	N/F	A_5
A_3	-1,535.7	N/F	N/F	N/F	N/F	A_1
A_3	-39.3	-355.2	-8.7	-52.5	-13.2	A_2
A_3	8.0	38.9	1.1	8.3	2.2	A_4
A_3	41.1	N/F	6.8	29.9	7.3	A_5
A_4	-286.1	N/F	N/F	N/F	N/F	A_1
A_4	-8.2	N/F	-10.2	-163.0	-98.9	A_2
A_4	-1.7	-41.4	-1.1	-19.7	-11.5	A_3
A_4	5.9	N/F	5.3	65.9	40.4	A_5
A_5	-460.8	N/F	-970.6	N/F	N/F	A_1
A_5	-20.7	N/F	-44.4	-87.4	-21.2	A_2
A_5	-12.8	-544.7	-15.4	-29.7	-6.7	A_3
A_5	10.0	N/F	18.7	14.9	3.5	A_4

Bu noktadan sonra, Çizelge 10, Çizelge 11'i elde etmek için kullanılacaktır. Çizelge 11'den en kritik alternatifin A_3 ve A_4 alternatifleri olduğu belirlenmiştir. Çünkü, bu alternatifler, Çizelge 11'deki tüm değerler arasında minimum kritiklik derecesine (Neredeyse birbiriyle özdeşler ve bu değer 1.1'dir) karşılık gelmektedir. Çizelge 11'da sağ kolonda bulunan karşılık gelen alternatifler, Çizelge 11'da parantez içine alınarak belirtilmiştir. Daha öncede olduğu gibi, koyu renkli sayılar karşılık gelen minimum değerleri temsil etmektedir. Son olarak; Çizelge 12'de de Tanım 9'da izah edilen çeşitli duyarlılık katsayılarını göstermektedir. Çizelge 10'da fizibil olmayan herhangi bir değere, Çizelge 12' de karşılık gelen duyarlılık katsayısı sıfıra eşit olarak tanımlanacaktır.

Çizelge 2-11: Her a_{ij} performans ölçütü için Δ'_{ij} Kritiklik derecesi.

Alternatifler A_i	C_j Kriterleri				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	74.1(A_2)	-	-	-	-
A_2	5.3(A_4)	-	35.9(A_3)	79.4(A_3)	-
A_3	8.0(A_4)	38.9(A_4)	1.1(A_4)	8.3(A_4)	2.2(A_4)
A_4	1.7(A_3)	41.4(A_3)	-1.1(A_3)	19.7(A_3)	11.5(A_3)
A_5	10.0(A_4)	544.80	15.90	14.9(A_4)	3.5(A_4)

Çizelge 2-12: Her a_{ij} performans ölçütü için $sens(a_{ij})$ Kritiklik derecesi.

Alternatifler A_i	C_j Kriterleri				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	0.014(A_2)	0	0	0	0
A_2	0.189(A_4)	0	0.028(A_3)	0.013(A_3)	0
A_3	0.125(A_4)	0.026(A_4)	0.909(A_4)	0.121(A_4)	0.455(A_4)
A_4	0.588(A_3)	0.024(A_3)	0.909(A_3)	0.051(A_3)	0.087(A_3)
A_5	0.100(A_4)	0.005(A_3)	0.063(A_3)	0.067(A_4)	0.286(A_4)

• **WPM Kullanımı:**

Teorem 5, WPM metodu kullanıldığında, $\tau'_{i,j,k}$ eşik değerlerinin hesaplanması için esas formülü aşağıdaki gibi sunmaktadır.

Teorem 5: WPM metodu kullanıldığı zaman, C_j kriterine göre A_i alternatifinin performans ölçütü a_{ij} 'yi değiştirerek elde edilecek olan $\tau'_{i,j,k}$, A_i ve A_k alternatiflerinin sıralamalarını değiştirmek için düzeltilmeye ihtiyaç duyar. Bu durum aşağıda verilmiştir:

$$i > k \text{ ise } \tau'_{i,j,k} > Q$$

$$i < k \text{ ise } \tau'_{i,j,k} < Q \text{ 'dır.} \quad (2.65)$$

Q değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$Q = \left[1 - \sqrt[n_j]{R \left(\frac{A_k}{A_i} \right)} \right] \times 100. \quad (2.66)$$

Ayrıca, aşağıda yer alan koşulun da fizibil olan değer tarafından sağlanması gereklidir:

$$\tau'_{i,j,k} \leq 100. \quad (2.67)$$

Yani, bu durumu sayısal bir örnekle açıklamak gerekirse, A_1, A_2, A_3, A_4 ve A_5 karar alternatiflerinin C_1, C_2, C_3, C_4 ve C_5 karar kriterlerini içeren bir MCDM problemini göz önüne alalım ve aşağıdaki Çizelgedeki verilere sahip olduğumuzu varsayalım.

Çizelge 1: WPM Kullanımı için örnek bir karar matrisi

	Kriterler				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Alternatifler	(0.2363	0.1998	0.0491	0.2695	0.2453)
A_1	0.8366	0.5001	0.8179	0.8104	0.6951
A_2	0.4307	0.4782	0.9407	0.2062	0.9259
A_3	0.7755	0.5548	0.6380	0.3407	0.0514
A_4	0.3727	0.7447	0.3214	0.3709	0.0550
A_5	0.4259	0.7126	0.2195	0.0470	0.0014

Öncelikle, WPM metodunda a_{ij} değerlerinin normalizasyonuna gerek olmadığını hatırlayalım. Ardından, WPM metoduna göre sıralamaları hesaplayarak, aşağıdaki Çizelge 13'ü oluşturabiliriz.

Çizelge 2-13: Başlangıç Sıralaması

Alternatif Çiftleri ($A_p - A_q$)	Oran $R(A_p/A_q)$	Sıralama
A_1-A_2	1.580	$A_1 \rightarrow 1st^*$
A_1-A_3	2.415	$A_2 \rightarrow 2nd$
A_1-A_4	2.692	$A_3 \rightarrow 3rd$
A_1-A_5	6.152	$A_4 \rightarrow 4th$
A_2-A_3	1.529	$A_5 \rightarrow 5th$
A_2-A_4	1.704	
A_2-A_5	3.893	
A_3-A_4	1.115	
A_3-A_5	2.547	
A_4-A_5	2.285	

Çizelge 13'ten $P_1 \geq P_2 \geq P_3 \geq P_4 \geq P_5$ elde edilir ve bunun sonucu olarak en çok tercih edilen alternatif A_1 olur. Önceki verilere Teorem 5'de yer verilen formüller uygulandığında, mümkün tüm $\tau'_{i,j,k}$ eşik değerleri elde edilir. Bunun sonucunda oluşan Çizelge 14'deki değerler de, Çizelge 9'daki değerler gibi benzer bir şekilde yorumlanabilir.

Çizelge 14'teki bazı girdiler standart üssel formatta gösterilmişlerdir. Bu durum, bu girdilerin çok yüksek (negatif) değerlere karşılık gelmesinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, (2E+05) gerçekte $-2.0 \times 10^5 = -200000$ değerini göstermektedir. Burada çok önemli değişikliklerin (üssel formatta gösterilen girdiler vs.) gerçekçi olmadığı ve bu nedenle de uygulamada "N/F" olarak sınıflandırılabilmesi tartışılabilir. Son olarak; Çizelge 14'te vurgulanmış girdilerin Δ'_y kritiklik derecesine karşılık geldiği görülebilmektedir. Kritiklik dereceleri Çizelge 15'te özetlenmiştir.

Çizelge 2-14: WPM kullanımı için bağıl olarak (%) eşik değerleri $\tau'_{i,j,k}$

Alternatifler A_i	C_j Kriterleri					Alternatifler A_k
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
A_1	85.6	89.9	N/F	81.7	84.5	A_2
A_1	97.6	98.8	N/F	96.2	97.3	A_3
A_1	98.5	99.3	N/F	97.5	98.2	A_4
A_1	N/F	N/F	N/F	N/F	N/F	A_5
A_2	-593	-887	-1E+06	-446	-546	A_1
A_2	83.4	88.0	N/F	79.3	82.3	A_3
A_2	89.5	93.0	N/F	86.2	88.6	A_4
A_2	99.7	99.9	N/F	99.4	99.6	A_5
A_3	-4,072	-8156	-6E+09	-2,538	-3,540	A_1
A_3	-502	-736	-6E+05	-383	-464	A_2
A_3	36.8	41.9	89.0	33.1	35.7	A_4
A_3	98.1	99.1	N/F	96.9	97.8	A_5
A_4	-6,501	-14,105	-6E+10	-3,844	-5,562	A_1
A_4	-853	-1,339	-5E+06	-622	-777	A_2
A_4	-58	-72	-811	-50	-56	A_3
A_4	97.0	98.4	N/F	95.3	96.6	A_5
A_5	-2E+05	-9E+05	-1E+18	-8E+04	-2E+05	A_1
A_5	-3E+04	-9E+04	-1E+14	-2E+04	-3E+04	A_2
A_5	-5,124	-10,672	-2E+10	-3,113	-4,420	A_3
A_5	-3,202	-6,161	-2E+09	-2,049	-2,805	A_4

Çizelge 15'ten en kritik alternatifin A_3 alternatifi olduğu görülmektedir. Çünkü bu alternatif Çizelge 15'teki tüm değerler arasında minimum kritiklik derecesine (33,1) sahip olanıdır. Çizelge 16 çeşitli duyarlılık katsayılarını göstermektedir. Eğer Çizelge 15'te fizibil olmayan bir girdi varsa, Çizelge 16'da bu girdiye karşılık gelen duyarlılık katsayısı sıfıra eşit olarak tanımlanır. Çizelge 10 ve Çizelge 15'in (ya da Çizelge 11 ve Çizelge 16) karşılaştırılması, WPM kullanımının WSM/AHP kullanımından çok daha sağlam bir yol olduğunu göstermektedir. Çünkü, WPM kullanımı sırasında oluşan duyarlılık katsayıları daha küçüktür.

Çizelge 2-15: Her a_{ij} Performans Ölçüsü için Yüzde Δ'_{ij} Kritiklik Dereceleri

Alternatifler A_i	C_j Kriterleri				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	85.6(A_2)	89.9(A_2)	-	81.7(A_2)	84.5(A_2)
A_2	83.4(A_3)	88.0(A_3)	-	79.3(A_3)	82.3(A_3)
A_3	36.8(A_4)	41.9(A_4)	89.0(A_4)	33.1(A_4)	35.7(A_4)
A_4	58.0(A_3)	72.0(A_3)	-	50.0(A_3)	56.0(A_3)
A_5	-	-	-	-	-

Çizelge 2-16: Her a_{ij} Performans Ölçüsü için $sens(a_{ij})$ duyarlılık katsayıları

Alternatifler A_i	C_j Kriterleri				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	0.012(A_2)	0.011(A_2)	0	0.012(A_2)	0.012(A_2)
A_2	0.012(A_3)	0.011(A_3)	0	0.013(A_3)	0.012(A_3)
A_3	0.027(A_4)	0.024(A_4)	0.011(A_4)	0.030(A_4)	0.028(A_4)
A_4	0.017(A_3)	0.014(A_3)	0	0.020(A_3)	0.018(A_3)
A_5	0	0	0	0	0

Bu bölümde anlatılanlar doğal olarak hem teorik hem de deneyseldir. Duyarlılık analizi için üç farklı MCDM yöntemi kullanılmıştır. Bunlar; Ağırlıklı Toplam Metodu (WSM), ağırlıklı ürün modeli (WPM) ve analitik hiyerarşi prosesi (AHP). Tasarlanan duyarlılık analizi, karar kriterlerinin önem ağırlıklarındaki değişikliklerin etkilerini ve aynı zamanda tek karar kriterine göre alternatiflerin performans ölçülerini incelemektedir (Triantaphyllou, 2000).

Deneysel yazılar, karar kriterlerinin ağırlıklarındaki değişimlerin duyarlılık analiziyle ilgilidir. Fakat a_{ij} değerlerindeki değişimlerin tamamını deneysel çalışma ile sınırlayamayız. Çünkü, bu hem verilen bir problem için pek çok duyarlılık analizi senaryosunu gündeme getirir hem de merkezde toplanmış olan fikirleri farklı yönlerle sevk eder. Bunun önemini anlamak için, m alternatifi ve n karar kriteri olan ve her biri birbirinden farklı a_{ij} değerlerine sahip olan bir problem düşünebiliriz.

Triantaphyllou'nun yaptığı bu çalışmanın en önemli iki deneysel sonucu;

- (i) çok kriterli karar verme metodunun seçimi ya da alternatiflerin sayısının duyarlılık analizi üzerinde çok küçük bir etkisinin olması,
- (ii) eğer ağırlık değişimleri bağıl olarak ölçülüyorsa, sıklıkla en duyarlı karar kriterinin en yüksek ağırlığa sahip karar kriteri olması, eğer ağırlık değişimleri mutlak sayı değerleriyle ölçülüyorsa, en düşük ağırlığı olan kriter en duyarlı kriter olur.

Bu deneylerdeki ana gözlem, incelenen çok kriterli karar verme problemlerinin tamamının benzer modeller sağlamasıdır. Bu modeller, değişimler bağıl (mutlak) olarak ölçüldüğünde, en yüksek ağırlıklı kriterin aynı zamanda en kritik kriter olma sıklığı ifade eder. Ayrıca, aynı sonuçlar bir test probleminde karar kriterlerinin sayısının alternatif sayısından daha önemli olduğunu gösterir (Triantaphyllou, 2000).

Tasarlanan metodoloji, MCDM metotlarından biri uygulandığında, standart bir duyarlılık analizi olarak uygulamak için kullanılabilir. Duyarlılık analizi yapmanın yararı gerçek hayattaki problemlere çok kriterli karar verme metotlarının uygulamalarında göz ardı edilmesini önlemek açısından çok önemlidir. Duyarlılık analizi, parametrelerdeki değişimler altında optimal çözümün istikrarını sağlamayı amaçlayan kantitatif karar modellerinin uygulanmasında ve etkin kullanımında temel bir kavramdır. Hangi kriterin daha kritik olduğunu bilerek, karar verici dikkatini daha etkili bir şekilde çok kriterli karar verme probleminin en kritik bölümleri üzerine odaklayabilir.

Uygulamadaki bir başka alan, bir MCDM problemi için verilen bir bütçe ile verilerin elde edilmesi aşamasıdır. Sıklıkla, çok kriterli karar verme problemlerinin gerçek hayattaki

uygulamalarında veriler değişebilir ve tam olarak belirlenemeyebilirler. Böyle durumlarda, daha kritik olan kriterlerin (aynı zamanda a_y performans ölçütlerinin) ağırlıklarının yüksek doğrulukla tanımlamak ve daha az kritik olanları daha az doğrulukla tanımlamak sezgi ve özen gerektirir. Bir duyarlılık analizi, ilk aşamada, nihai (sıralama) karar için daha kritik olma eğilimi olan w_j ve a_y değerlerinin ortaya çıkarılmasıdır. Böylece, ikinci aşamada veriler yüksek doğrulukla tanımlanabilir. Ardından, yeni bir duyarlılık analizi çevrimi yeniden başlatılır. Bu adım silsilesi bütçe tamamlanana kadar ya da karar vericinin nihai sonuçlardan tatmin olana kadar devam ettirilebilir.

2.5 Bir Karar Matrisinin İşlenmesi İçin Değerlendirme Metotları ve Anormalliklerin derecelendirilmesi

Çok kriterli karar verme problemlerinde problemlerinin bir kısmı aynı probleme farklı sonuçlar üretebilir. Çünkü sadece WPM, AHP, Düzeltilmiş AHP ve TOPSIS metodu hem tek hem de çok boyutlu karar vermede kullanılabilir. Bu metotlar bu bölümde incelenecektir. ELECTRE metodunun incelenmemesinin nedeni, farklı bir sıralama felsefesi sunmakta ve uygulamada daima tek bir yöntem kullanımını varsaymamaktadır (Triantaphyllou, 2000).

2.5.1 İki Değerlendirme Kriteri

Çok kriterli karar verme metotlarının değerlendirilmesi için, iki değerlendirme kriteri geliştirilmiştir. Bu değerlendirme kriterleri,

İlk değerlendirme kriteri: Çok boyutlu problemlerde doğru olan bir çok kriterli karar verme metodu tek boyutlu problemlerde de doğru olmalıdır.

Çok boyutlu problemlerde iyi sonuçlar veren bir çok kriterli karar verme metodunun tek boyutlu problemlerde doğru sonuçlar verememesi için hiçbir neden yoktur. Tek boyutlu problemler, çok boyutlu problemlerin özel durumlarıdır. Çünkü ilk kullanacağımız metot olan Ağırlıklı Toplam Metodu tek boyutlu problemler için en iyi kabul edilebilir sonuçları vermektedir. Bu nedenle, diğer dört metodun kıyaslanması için WSM metodu bir standart olarak kullanılacaktır.

İkinci değerlendirme kriteri: Etkin bir çok kriterli karar verme metodu, (verilen her bir karar kriterinin bağlı önem ağırlığı değişmemek üzere) bir alternatif yerine ondan daha kötü bir alternatif bulunduğu, en iyi alternatifi göstermeyi değiştirmez.

Birçok benzer değerlendirme kriterleri de tanımlanabilir. Örneğin, doğru bir modelde en iyi alternatifle özdeş yeni bir alternatifi (ya da daha kötü bir alternatifi) tanımlanmasından

sonra, en iyi alternatiften başka bir alternatifi göstermemesi durumu üzerine başka birçok değerlendirme kriteri eklenebilir. Bununla birlikte, ikinci kriter bu kriterlere göre daha katı bir kriter olup, birden çok metodu etkilemektedir. Çok kriterli karar verme probleminin doğasına göre, daha fazla değerlendirme kriteri üretilebilir (Triantaphyllou, 2000).

Son olarak, yukarıdaki iki değerlendirme kriterini kullanarak metotları test etmek, bir metodun en iyi alternatifi göstermede veya bir alternatifler kümesini sıralamasını doğru olarak yapabilmeye verimsiz olduğunu açığa çıkartmak için gereklidir. Fakat, bir metod gerçekte verimsizse, bu iki değerlendirme kriterinin bu durumu ortaya çıkartmaz (Triantaphyllou, 2000).

2.5.2 İlk Değerlendirme Kriteri Kullanılarak Metotların Test Edilmesi

Analitik hiyerarşi prosesinin kullandığı metodun ilk değerlendirme kriterine göre test edilmesini inceleyelim. Aşağıdaki matrisin aynı birimlerle ölçülebilen gerçek değerlerle oluşturulduğunu düşünelim.

	Kriterler		
	C_1	C_2	C_3
Alternatifler	8/13	2/13	3/13
A_1	1	9	9
A_2	5	2	2
A_3	1	5	9

(2.68)

Yukarıdaki karar matrisi üç karar kriteri ve üç alternatiften oluşmaktadır. Kriterlerin ağırlıkları da matriste verilmektedir. WSM uygulandığında (İlk değerlendirme kriteri içeren), A_1 alternatifi en iyi alternatif olur ($A_{1,WSM-Puanı} = 53/13$).

Gerçek değerlerin bulunduğu matristen, bu probleme uygun olan ikili karşılaştırmalara sahip üç tane 3×3 matris görebiliriz. Tutarlı karşılaştırma durumunun etkilerini önlemek için, burada ikili karşılaştırmalarda mükemmel bir tutarlılık olduğu kabul edilmiştir.

$$C_1 \text{ Kriteri: } \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/1 \\ 5/1 & 1 & 5/1 \\ 1/1 & 1/5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 \text{ Kriteri: } \begin{bmatrix} 1 & 9/2 & 9/5 \\ 2/9 & 1 & 2/5 \\ 5/9 & 5/2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_3 \text{ Kriteri: } \begin{bmatrix} 1 & 9/2 & 9/9 \\ 2/9 & 1 & 2/9 \\ 9/9 & 9/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bu nedenle, her karar kriterine göre karar kriterlerinin ağırlıkları doğrultusunda alternatiflerin bağıl önemlerini içeren $m \times n$ karar matrisi AHP'nin son basamağında kullanılır:

	<i>Kriterler</i>			
	C_1	C_2	C_3	
<i>Alternatifler</i>	8/13	2/13	3/13	(2.69)
A_1	1/7	9/16	9/20	
A_2	5/7	2/16	2/20	
A_3	1/7	5/16	9/20	

AHP'nin son adımını uyguladığımızda, en iyi alternatif A_2 ye döner ($A_{2,AHPPuam} = 0.48$). Belli ki, burada WSM ile elde edilen sonuçla karşılaştırıldığında bir çelişki vardır.

Triantaphyllou, tüm mümkün 3,5,7,.....,21 alternatife ve 3,5,7,.....,21 kritere sahip kombinasyona sahip problemleri çözmek ve rassal sayı üretmek için bir bilgisayar programı yazmıştır. Böylece, 100 farklı olayı incelemiş ve her olay için 10.000 farklı karar matrisine 1 ile 9 sayıları arasında rassal sayılar üretmiştir. İncelenen durumlarda, AHP ve WSM'nin çelişkili sonuçlar ürettiğini gözlemlemiştir. Benzer bir çalışma, düzeltilmiş AHP ve WSM için de yapılmıştır. Triantaphyllou çalışmanın amacını, çelişki oranları hakkında genel bir fikir elde etmek olarak belirlemiştir. Örnek büyüklükleri tatmin edicidir. Aşağıdaki Çizelgelerde çelişki oranları gösterilmektedir (Triantaphyllou, 2000).

Çizelge 2-17: WSM ve AHP arasındaki (%) çelişki oranı (Triantaphyllou, 2000)

Alternatif Sayısı	Kriter Sayısı									
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
3	8.2	10.5	12.3	11.7	12.2	11.8	11.8	12.1	12.2	12.5
5	8.4	13.2	12.6	13.2	13.2	13.5	13.6	13.3	14.0	13.7
7	8.1	10.1	12.3	12.6	13.3	13.1	13.5	13.1	14.6	13.7
9	8.5	9.5	11.0	12.5	12.5	12.0	13.0	13.1	13.5	13.2
11	7.5	10.0	10.9	12.1	12.1	12.3	12.2	12.5	12.8	13.0
13	7.1	8.5	10.6	11.4	11.7	11.8	12.1	12.0	13.1	12.4
15	6.6	8.7	9.6	10.6	11.1	11.5	12.0	12.1	11.2	12.4
17	6.8	9.3	10.0	10.6	10.7	11.1	11.5	11.5	12.0	11.0
19	6.7	8.1	9.1	9.3	10.7	10.7	10.9	10.9	11.4	10.7
21	6.0	7.9	9.2	9.6	10.3	10.7	10.8	10.5	11.0	10.9

Çizelge 2-18: WSM ve Düzeltilmiş AHP arasındaki (%) çelişki oranı (Triantaphyllou, 2000)

Alternatif Sayısı	Kriter Sayısı									
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
3	7.4	8.2	8.8	9.6	10.5	10.3	10.9	10.5	9.5	10.6
5	5.6	7.1	9.3	8.4	8.7	9.1	8.7	8.8	8.8	9.1
7	4.4	6.3	6.2	6.2	7.7	6.6	7.1	7.6	8.3	7.3
9	4.2	4.2	4.9	6.9	7.5	6.5	6.2	6.8	6.4	7.6
11	3.0	3.8	5.6	4.8	5.1	5.4	6.0	6.3	6.0	6.2
13	2.7	3.3	3.8	5.0	4.5	4.0	6.3	5.3	5.0	5.3
15	2.2	3.1	3.9	4.4	3.6	3.9	3.4	4.5	4.3	5.3
17	1.7	2.2	2.6	3.7	3.6	3.8	3.4	3.7	4.2	4.0
19	1.8	2.7	2.6	2.8	3.1	3.2	3.4	3.5	3.1	3.4
21	1.4	1.9	2.2	2.2	2.7	2.9	2.5	2.9	3.1	3.0

Çizelge 2-19: WSM ve WPM arasındaki (%) çelişki oranı (Triantaphyllou, 2000)

Alternatif Sayısı	Kriter Sayısı									
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
3	14.7	12.7	12.1	13.9	15.3	14.3	13.8	12.6	13.6	14.5
5	12.0	14.8	15.7	17.0	17.5	19.6	18.9	17.1	18.7	18.1
7	12.2	17.1	18.7	18.0	22.0	19.5	19.9	20.2	21.8	20.3
9	11.2	16.5	18.9	19.7	20.9	21.5	23.0	23.4	21.6	23.3
11	11.8	17.5	20.9	21.3	21.8	23.6	22.9	22.0	22.2	23.0
13	11.7	17.2	21.1	20.8	22.8	23.4	24.9	25.0	25.7	25.1
15	11.3	19.4	19.4	21.8	24.9	24.8	23.3	25.0	26.9	24.7
17	11.2	17.1	21.2	23.3	23.9	26.4	22.5	25.2	26.3	26.2
19	11.3	18.9	21.3	22.7	23.6	25.7	25.2	28.6	26.9	27.7
21	11.3	18.2	21.1	24.0	25.4	26.6	25.9	27.5	26.4	25.7

2.5.3 İkinci Değerlendirme Kriteri Kullanılarak Metotların Test Edilmesi

İlk değerlendirme kriteri gibi, testler aşağıda bir örnekle gösterilmektedir. İkinci değerlendirme kriterini kullanarak AHP'nin kullandığı metodun test edilmesi:

AHP sürecinde üretilmiş özvektörlerin matrisi aşağıda verilmektedir. Matris, alternatiflerin önemlerinin bağlı değerlerini içermektedir (Triantaphyllou, 2000).

Alternatifler	Kriterler			
	C_1	C_2	C_3	
A_1	2/7	2/7	3/7	= M1 Matrisi
A_2	1/19	2/12	2/7	
A_3	5/19	1/12	4/7	
A_4	1/19	9/12	1/7	

AHP'ye göre; normalizasyondan önce, üç kriterin ağırlıklarının vektörü ile bağlı önemlerin matrisinin çarpılmasıyla elde edilen alternatiflerin öncelik vektörü (0.305, 0.344, 0.351) olur. Görüldüğü gibi, en iyi alternatif A_3 alternatifidir. Eğer yukarıdaki problemde, en iyi alternatif

olmayan A_1 alternatifi yerine, asıl A_1 alternatifinden daha kötü olan A_1' alternatifi yerleştirildiğinde matris şöyle olur:

<i>Kriterler</i>			
	C_1	C_2	C_3
<i>Alternatifler</i>	2/7	2/7	3/7
A_1	8/18	1/11	1/6
A_2	5/18	1/11	4/6
A_3	1/18	9/11	1/6

= M2 Matrisi

M1 matrisi, aşağıdaki üç adet 3×3 ikili karşılaştırma matrisinden elde edilen bağıl değerlere sahip olan matris olarak düşünülebilir.

$$C_1 \text{ Kriteri: } \begin{bmatrix} 1 & 9/5 & 9/5 \\ 5/9 & 1 & 5/5 \\ 5/9 & 5/5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 \text{ Kriteri: } \begin{bmatrix} 1 & 2/1 & 2/9 \\ 1/2 & 1 & 5/5 \\ 9/2 & 9/1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_3 \text{ Kriteri: } \begin{bmatrix} 1 & 2/4 & 2/1 \\ 4/2 & 1 & 4/1 \\ 1/2 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

M2 matrisi, A_1 alternatifinin vekili ve daha küçük olan A_1' alternatifi $A_1' = (8/18 \ 1/11 \ 1/6) < (9/19 \ 2/12 \ 2/7)$ M1 matrisinden türetilmiştir.

Benzer şekilde, M2 matrisi için öncelik vektörü ve aynı kriter ağırlıkları (0.224, 0.391, 0.385)'dir. Artık A_2 alternatifinin en iyi alternatif olduğu açıktır. Son durumda, en iyi alternatif olan A_3 alternatifinin yerini A_2 alternatifi almıştır. Yani, en iyi alternatiften farklı olan yeni bir alternatif (daha kötü bir alternatif) tanımlandığında, en iyi alternatif değişebilmektedir.

Birinci kriter gere; Triantaphyllou (2000)'in yaptığı teste benzer şekilde, bir bilgisayar programı yazıp rassal problemler (her olay için 5000 deneme) çözülmüştür. Her rassal problem AHP kullanılarak çözülmüş ve en iyi alternatif olmayan rassal bir alternatifi yerine daha kötü bir alternatifi yerleştirerek çözülmüştür.

Olaylar, düzeltilmiş AHP ve WPM için de benzer bir yolla incelenmiştir. Aşağıdaki Çizelgeler, ikinci değerlendirme kriterine göre test yapıldığında, WPM'nin çelişkili sonuçlar üretmediği görülmektedir. Etkiyi daha iyi görebilmek için, çalışma sırasında oluşturulan aşağıdaki çizelgeler verilmiştir.

Çizelge 2-20: Optimum olmayan bir alternativin yerine daha kötü bir alternatif yerleştirildiğinde, optimum alternatifi göstermesindeki (%) değişme oranı. (AHP için)

Alternatif Sayısı	Kriter Sayısı									
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
3	0.16	0.26	0.26	0.32	0.30	0.26	0.54	0.28	0.40	0.26
5	0.34	0.36	0.40	0.54	0.46	0.32	0.32	0.40	0.38	0.42
7	0.30	0.42	0.42	0.40	0.36	0.40	0.34	0.42	0.16	0.26
9	0.16	0.36	0.22	0.20	0.22	0.26	0.26	0.26	0.18	0.26
11	0.14	0.18	0.12	0.24	0.06	0.22	0.48	0.22	0.22	0.20
13	0.06	0.22	0.22	0.28	0.18	0.24	0.26	0.22	0.08	0.28
15	0.04	0.10	0.18	0.12	0.22	0.14	0.12	0.10	0.20	0.14
17	0.08	0.10	0.14	0.24	0.06	0.06	0.10	0.18	0.04	0.08
19	0.08	0.04	0.10	0.10	0.10	0.12	0.12	0.04	0.08	0.08
21	0.06	0.10	0.10	0.04	0.08	0.10	0.10	0.10	0.06	0.02

Çizelge 2-21: Optimum olmayan bir alternativin yerine daha kötü bir alternatif yerleştirildiğinde, optimum alternatifi göstermesindeki (%) değişme oranı. (AHP için)

Alternatif Sayısı	Kriter Sayısı									
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
3	0.50	0.50	0.60	0.30	0.30	0.10	0.00	0.10	0.10	0.10
5	0.50	0.50	0.80	0.80	1.30	0.80	0.10	0.50	0.50	0.00
7	0.60	0.60	1.70	0.90	0.80	0.50	0.50	0.50	0.40	0.20
9	0.70	0.30	1.30	0.80	0.80	1.00	1.10	0.70	0.60	0.20
11	0.30	1.00	0.30	1.00	0.50	1.10	0.60	0.60	0.80	0.70
13	0.20	0.60	1.40	0.80	1.20	1.20	0.80	0.80	0.40	0.40
15	0.30	0.90	0.80	0.40	0.90	1.20	0.60	0.60	0.60	0.90
17	0.00	0.40	0.80	0.40	0.90	0.80	0.80	1.20	0.50	0.30
19	0.20	0.10	0.20	0.50	0.80	1.20	0.80	0.60	1.00	0.70
21	0.10	0.20	0.30	0.40	0.70	0.60	0.70	0.40	1.20	0.60

Çizelge 2-22: Özet Çizelge

	Kriterler					
	1			2		
Olaylar						
Alternatif Sayısı	3	3	3 ... 21	3	3	3 ... 21
Kriter Sayısı	3	5	7 ... 21	3	3	7 ... 21
Alt Kriterler	1	2	3 ... 100	101	102	103 ... 200
Metot:						
WPM	14.7	12.7	12.1 ... 25.7	0	0	0 ... 0
AHP	8.2	10.5	12.3 ... 10.9	0.16	0.26	0.26 ... 0.02
Düzeltilmiş AHP	7.4	8.2	8.8 ... 3.0	0.50	0.50	0.50 ... 0.60

WSM ve AHP metotları arasındaki çelişki oranı, alternatif sayısı arttıkça azalır. Bunun nedeni, m alternatiflerinin sayısı arttıkça, her bir a_{ij} girdisinin çarpımında kullanılan $(1/\sum a_{ij})$ miktarlarının aynı değere yaklaşmasıdır. WSM’de, her girdi sonuçları bozmayacak şekilde aynı miktarla çarpılabilir. Yani, AHP alternatif sayısı arttıkça WSM gibi davranır.

Yine aynı şekilde, kriter sayısı arttıkça çelişki oranı da artar. Çünkü, n kriter sayısı arttıkça, $\left(1/\sum_{i=1}^m a_{ij}\right) (j=1,2,3,K,n)$ çarpanların sapma oranları artar. AHP’yi WSM’den ayıran da budur.

Düzeltilmiş AHP’de, çarpanlar $(1/\max\{a_{ij}, i=1,2,K,m\})$ miktarlarıdır. m alternatif sayısı arttıkça, tüm çarpanlar aynı sayıya eğilim gösterirler. Yakınsama çok hızlı ise, AHP WSM gibi davranır (Triantaphyllou, 2000).

Kriter sayısı, düzeltilmiş AHP’de de orjinal AHP’deki aynı rolü üstlenir. Tek fark, çelişki oranları daha küçüktür. Çünkü çarpanlar orjinal AHP’deki gibi birbirinden farklı değildir.

Görüldüğü gibi, alternatiflerin sayısı kritik bir rol oynamaktadır. m alternatiflerin sayısı, çarpanların rolünü artırmaktadır. Bu durum, optimal olmayan herhangi bir alternatifin daha kötü bir alternatifle yer değiştirilmesi durumundan çok daha kritiktir. Çünkü, yer değiştirmelerin etkisi alternatif sayısı arttıkça azalmaktadır (Triantaphyllou, 2000).

Son olarak, düzeltilmiş AHP’de alternatif sayısı arttıkça, daha kötü bir alternatifin optimal olmayan alternatifle yer değiştirmesinin optimal alternatifi göstermesindeki etkisi azalır. Bunun nedeni, alternatif sayısı arttıkça, çarpanlar $(1/\max\{a_{ij}, i = 1,2,3,K, m\})$ 9’a yaklaşır ve böylece değiştirilen alternatif optimal olmamaya devam eder. Benzer şekilde, kriter sayısı arttıkça, çarpanların yeteri kadar farklılaşması şartı artar ve alternatif değişimlerinin etkisi daha büyük olur. Çünkü düzeltilmiş AHP’de çarpanlar (örn., $(1/\max\{a_{ij}, i = 1,2,3,K, m\})$) miktarı orjinal AHP’ye kıyasla daha güvenilirdir. İlk değerlendirme kriterine göre düzeltilmiş AHP daha iyi sonuçlar vermektedir (Triantaphyllou, 2000).

2.5.4 TOPSIS Metodunun Değerlendirilmesi

TOPSIS metodu, iki değerlendirme kriterine göre incelenmiştir. İnceleme sonucunda aşağıdaki Çizelgeler oluşturulmuştur. Bu sonuçlara göre, TOPSIS emin hata oranları üretmiştir. Bununla birlikte, bu oranlar daha önceden incelenen metotlara göre daha yüksek oranlar üretmiştir. Bu nedenle; TOPSIS metodu, WSM, AHP ve Düzeltilmiş AHP ile kıyaslanmamıştır (Triantaphyllou, 2000).

Çizelge 2-23: WSM ve TOPSIS arasındaki (%) çelişki oranı (Triantaphyllou, 2000)

Alternatif Sayısı	Kriter Sayısı									
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
3	17.3	24.2	29.9	31.4	31.8	32.0	31.9	29.1	30.9	33.7
5	25.9	32.4	37.6	38.7	38.2	37.6	37.6	38.9	40.7	40.1
7	27.4	33.7	41.1	39.0	41.3	42.8	42.4	40.5	42.2	45.7
9	27.1	35.2	41.5	44.2	42.2	43.2	45.1	43.0	43.5	46.7
11	27.2	38.3	40.2	45.4	43.8	45.1	46.4	44.6	44.4	48.6
13	28.8	39.0	42.4	46.1	48.3	49.7	48.6	48.3	46.1	48.2
15	31.7	41.3	44.3	45.5	49.2	48.8	51.2	50.1	51.5	53.6
17	31.8	43.4	48.0	46.7	46.3	46.8	52.0	51.3	53.5	50.1
19	31.6	40.3	47.1	51.2	48.0	51.9	50.0	51.6	51.9	52.0
21	30.8	40.6	47.9	46.6	53.4	50.5	52.0	49.0	51.2	52.1

Çizelge 2-24: Optimum olmayan bir alternatifin yerine daha kötü bir alternatif yerleştirilmesinin, optimum alternatifi göstermesindeki (%) değişme oranı. (TOPSIS için) (Triantaphyllou, 2000)

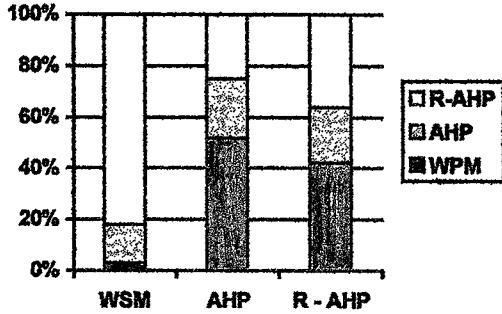
Alternatif Sayısı	Kriter Sayısı									
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
3	2.4	3.3	3.3	3.8	5.4	5.0	4.7	5.3	1.2	4.1
5	2.3	3.4	3.9	4.4	4.1	3.8	4.8	5.2	4.9	4.3
7	2.1	2.9	3.4	3.3	3.7	3.1	4.0	5.4	5.2	1.9
9	1.2	2.5	3.1	3.4	2.7	3.1	4.0	4.8	4.1	4.3
11	0.8	1.6	2.8	3.1	2.6	2.6	3.7	3.3	4.1	3.0
13	1.4	1.7	2.3	3.0	2.5	2.3	3.2	3.7	2.9	4.8
15	1.4	2.2	3.1	2.8	3.0	2.9	3.3	2.6	3.9	2.5
17	1.8	2.0	2.6	2.4	2.7	2.0	3.6	4.0	3.0	2.1
19	1.0	2.0	2.6	2.7	1.7	3.2	4.6	2.5	2.0	4.1
21	1.1	1.1	1.7	1.3	2.0	2.5	2.1	2.7	3.3	2.8

2.5.5 Sonuçların Değerlendirilmesi

Yapılan tüm analizler, hiçbir çok kriterli karar verme metodunun her iki değerlendirme kriteri kapsamında mükemmel bir etkinlik göstermediğini ortaya koymaktadır. İki değerlendirme kriteri kullanılarak metodların test edilmesi sırasında elde edilen sonuçlar, çok kriterli karar verme metodlarının farklı çelişki oranları ortaya çıkarmışlardır. Bulgular, Çizelge 22’de yüzde olarak özetlenmiştir. Bu Çizelge, tipik çok kriterli karar verme metodlarının ilgilendiği tipik karar verme problemlerinin yapısını sunar ve karar verme paradoksunu gösterir. Bu Çizelgede, çok kriterli karar verme metodları, alternatifler ve iki değerlendirme kriteri karar kriteri probleminin çözümünde kullanılır. İki değerlendirme kriteri, 3 alternatif ve 3 kriter, 3 alternatif 5 kriter, 3 alternatif 7 kriter, vs. olarak düşünülmüştür. Böyle, her kriter için 100 ($=10 \times 10$) alt kriter üretilmiştir. $w_1 = 1,2,3,K, 100\%$ olduğu w_1 ve $w_2 = 100 - w_1$ sayıları, iki değerlendirme kriterinin bağıl ağırlıkları olarak varsayılır. İlk 100 alt kriterin bağıl ağırlıkları, $w_1/100$ ’e eşit kabul edilir ve son 100 alt kriterin bağıl ağırlıkları da $w_2/100$ ’e eşit olur (Triantaphyllou, 2000).

Hangi metodun en iyi metod olduğu açık olmadığı için, en iyi karar verme metodunun seçimi problemi, WSM, AHP ve Düzeltilmiş AHP kullanılarak çözülmüştür. Çizelge 22’de oluşan sıfır değerleri WPM kullanımını fizibil yapmamaktadır. WSM metodu, en etkin karar verme metodunun seçimi problemi için en güvenilir sonuçları oluşturmuştur. Tüm bu araştırmaların

sonucunda WSM tarafından oluşturulan değerlendirme grafiği aşağıda verilmektedir. Bu grafikte görüldüğü gibi, Düzeltilmiş AHP, w_1 ve w_2 ağırlıklarının geniş bir aralıktaki farklı kombinasyonları için, en iyi metot olarak göze çarpmaktadır (Triantaphyllou, 2000).



Şekil 1: Farklı çok kriterli karar verme metotlarının en iyi çok kriterli karar verme metodunu göstermesi (Triantaphyllou, 2000).

Sadece w_1 ağırlığı 0.10'dan küçükse, Düzeltilmiş AHP en iyi metot olmamaktadır. Sadece w_1 ağırlığı 0.03'den büyük ve 0.10'dan küçük olduğu durumlarda AHP diğer metotlardan daha iyi olmakta ve w_1 ağırlığı 0.03'den küçük değerler için de WPM en iyi metot olmaktadır.

Yine aynı grafikten, w_1 ağırlığı arttıkça WPM'nin yerini AHP, AHP'nin yerine de düzeltilmiş AHP en iyi metot olarak aldığı görülmektedir. Bunun olma nedeni, büyük olasılıkla, bu metotların 100 kriterli ve 3 alternatifli problemlere aynı şekilde bakmasından kaynaklanmaktadır (Çizelge 22).

Bununla birlikte, tüm metotlar en iyi metot olarak kendileri değil, WPM'yi göstermektedir. Aynı zamanda, çoğunlukla ikinci en iyi metot olarak Düzeltilmiş AHP'yi göstermektedirler. Orjinal AHP ise, sadece küçük bir kısım için etkin bir metot olabilmektedir (Triantaphyllou, 2000).

Bu grafikte özetlenen çalışma bulguları, en iyi çok kriterli karar verme metodunu belirlemenin mümkün olmadığını göstermekte ve en iyi çok kriterli karar verme metodunun bulunması probleminde-bu problemin çözülmesinde bile sınırlı başarısı olan-bir karar verme paradoksunu işaret etmektedir. Bununla birlikte, buradaki sonuçlar, iki değerlendirme kriterine göre metotlar incelendiğinde, en iyi metodun düzeltilmiş AHP olduğu ve orjinal AHP'nin de en kusurlu metot olduğu görülmektedir (Triantaphyllou, 2000).

3. BULANIK ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME

Bu bölümde, WSM, WPM,AHP ve TOPSIS metotlarının bulanıklaştırılmış halleri anlatılmaktadır. ELECTRE metodu, TOPSIS metodunun daha üstün nitelikli olması nedeniyle incelenmeyecektir. Benzer şekilde, Çarpımsal AHP, WPM ile aynı sayısal özelliğe sahip olduğu için incelenmeyecektir. Öncelikle bulanık sayılarla ilgili yeterli olabilecek ölçüde bilgi verilecek, ardından karar verme metotlarında bulanık mantığın kullanılması izah edilecektir. Burada tek karar vericili ortamda, çok kriterli karar verme metotları bulanıklaştırılmıştır.

Bu bölümde, daha önce normal çok kriterli karar verme metotlarının performansını incelemek için kullanılan iki değerlendirme kriteri yine en iyi metodu aramak için kullanılmıştır. Yani, ilk değerlendirme kriteri, Bulanık WSM'nin sonuçlarını diğer bulanık çok kriterli karar verme metotlarını değerlendirmek üzere bir standart olarak kullanmaktadır. Benzer şekilde, ikinci değerlendirme kriteri, optimal olmayan bir alternatifin yerine bu alternatiften daha kötü bir alternatif yerleştirildiğinde, doğru bulanık çok kriterli karar verme metodu en iyi alternatifi göstermeyi değiştirmediyi kabul eder.

Bu bölümde iki amaç vardır. Birincisi Lootsma'nın AHP'yi bulanıklaştırıldığı gibi, diğer metotlarda bulanıklaştırılmasıdır. Bulanıklaştırılan çok kriterli karar verme metotları bu iki değerlendirme kriterine göre değerlendirilmiştir. İkinci ana amaç ise, en iyi bulanık çok kriterli karar verme metodunun belirlenmesidir.

Burada, karar verici, bulanık çok kriterli karar verme probleminde karar kriterlerine göre alternatiflere bulanık üçgensel sayılar atamıştır. Bu bulanık üçgensel sayılar $\tilde{n}$, $l \leq m \leq u$ olmak üzere, l, m, u değerleri $\tilde{n}$ sayısının küçük, orta ve büyük değerlerini göstermektedir. m parametresi, burada alternatif sayısını değil, üçgensel bulanık sayıyı ifade eden bileşenlerden birini göstermektedir.

3.1 Çok Kriterli Karar Verme Problemlerinde Bulanık Mantık Kullanılması

Uzun zamandan beri pek çok fiziksel gerçek hayat durumlarının tam olarak tanımlanmasının mümkün olmadığı kabul edilmiştir. Bunun nedeni gerçek dünya durumlarında yüksek derecede baskı olmasıdır. Zadeh 1965 ve 1968 deki makalelerinde, doğal bulanıklığı ölçmek için bulanık küme teorisini tasarlamıştır. Bulanıklık, üyelikten üye olmayana keskin bir geçiş olmayan birbirine kümelerle birleşmiş bir etki tipidir. Bulanık kümeler örnekler; varlıkların sınıflarının sıfatlarla oluşturulmasıdır. Büyüklük, küçüklük, basitlik, yakınlık...vs (Triantaphyllou, 2000).

Mühendislik ve bilimsel problemlerde, bulanık küme teorisinin öneminin etraflı bir şekilde açıklanmasını (Chang 1971) de verilen 1800 referans en iyi şekilde göstermektedir (Triantaphyllou, 2000).

Hala, büyük sayıda araştırmacı, verilerinin ya da eski bilgilerin bulanık olduğu problemlerle karşı karşıya gelmektedirler. Bu durum kısmen belirsiz kavramlar ve yargı kurallarıyla sürekli süzgeçten geçirilen bilgi için, karar destek sistemleri ve uzman sistemler oluşturan insanlar için kritik hale gelmiştir. Bulanık küme teorisinin herhangi bir uygulamasındaki en kritik adımı, ilgili veriyi etkin bir şekilde tahmin etmektir (ör.üyelik değerleri). Bu temel problem olmasına rağmen, bir bulanık kümede üyelik değerlerini tanımlamak için tek bir yol yoktur. Bunun ana nedeni, araştırmacıların problemi farklı şekillerde algılamasından kaynaklanmaktadır (Triantaphyllou, 2000).

Yukarıdaki problemler ve değişiklikler, bazı MCDM problemlerinde kısmen yaygındır. Çok sık olarak, MCDM problemlerinde veri eksik ve bulanıktır. Mesela, bir çevresel etki kriterine göre j. alternatifin değeri nedir? Bir karar verici, böyle dilsel ifadeleri kantitatif hale getirmekte zorlukla karşılaşabilir ve bu nedenle deterministik karar verme kullanılabilir. Bu nedenle, bir karar verilmesinde bulanık veri kullanan karar verme metotlarının geliştirilmesi ve kıyaslanması arzu edilebilir bir şeydir. Aynı zamanda bu bulanık MCDM metotlarının performanslarının değerlendirilmesi de oldukça önemlidir. Lootsma, 1989/1997 de Saaty'nin AHP metodunun bulanık versiyonunu sunmuştur. Yaklaşımında, karar kriterinin önem ağırlığını hesaplamak için, ikili karşılaştırmalarla birlikte üçgensel bulanık sayıları kullanmıştır. Benzer şekilde, her karar kriterine göre alternatiflerin bulanık performans değerleri de aynı şekilde üçgensel bulanık sayılar kullanılarak hesaplanmıştır. Lootsma tarafından kullanılan bulanık işlemler, diğer 4 karar verme metoduna da uygulanmıştır. Bunlar; WSM, WPM, RAHP, TOPSİS metotlarıdır. Bu metotlar, ikinci bölümdeki bulanık işlemler kullanılarak bulanıklaştırılmıştır (Triantaphyllou, 2000).

3.1.1 Bulanık İşlemler

Fiziksel dünyada karar vermenin çoğu, uygun verinin ve mümkün hareket dizilerinin tam olarak bilinmediği ortamda gerçekleşmektedir. Bu nedenle, karar verme problemindeki böyle durumları ifade etmek için bulanık verinin adapte edilmesi son derece önemlidir. Önceki dört karar verme metodunu bulanıklaştırmak için, bulanık sayılara bulanık işlemlerin nasıl uygulanacağını bilmek önemlidir. Bulanık işlemler ilk olarak Dubois ve Prade tarafından tanıtılmıştır. Diğer yazarlar, Dubois ve Prade 'in tanıttığı bulanık işlemleri kullanarak AHP'nin bulanık versiyonu üzerinde çalışmışlardır. Karar verici m alternatiflerini

(A_1, A_2, K, A_m) ve n kriterlerine (C_1, C_2, K, C_n) göre derecelendirmeyi düşünüyorsa, bu kriterlere göre alternatiflere sayı atamada (ya da sayılarına oran atamada) büyük zorluk yapacaktır. Böylece, Bulanık Olmayan Çok kriterli karar verme metotları, bulanık bir ortama direkt uygulanmayacaktır. Bundan sonra, bulanık alternatifler $\hat{A}_i$ ile gösterilecektir (Gevrek MCDM 'deki A_i den ayırmak için). Bulanık alternatifler, uygun enformasyonun sadece bulanık sayılarla ifade edilebildiği için kesikli alternatiflerdir. Benzer bir ifade de bulanık karar kriterinin $\hat{C}_i$ ile gösterilmesi için kullanılabilir. Bulanık yaklaşımın kullanılmasının faydası, alternatiflerin ve kriterlerin ilişkili öneminin ifade edilmesi için, gevrek (crisp) sayıların değil, bulanık sayıların kullanılmasıdır. Bulanık sayılar için üçgensel bulanık sayılar kullanacağız çünkü karmaşık trapezoid bulanık sayılarla kıyaslandığında daha basittir. Bir üçgensel bulanık sayı şöyle gösterilir:

Tanım 12.1: $\mathcal{R} \in \{-\infty, +\infty\}$ kümesindeki bir bulanık M sayısı, eğer üyelik fonksiyonu $\mu_m : \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ aşağıdaki ifadeye eşitse, bulanık üçgensel sayıdır.

$$\mu_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{m-l}x - \frac{1}{m-l}, & x \in [l, m] \\ \frac{1}{u-m}u - \frac{l}{u-m}x, & x \in [m, u] \\ 0, & \text{aksihalde} \end{cases} \quad (3.1)$$

Yukarıdaki ilişkide, $l \leq m \leq u$, l ve m , M bulanık sayısının destek değerinin alt ve üst değerlerini ve m ise modül değeri temsil etmektedir. Bir bulanık üçgensel sayı, yukarıdaki denklemde görüldüğü gibi (l, m, u) olarak ifade edilir.

Learhoven ve Peolrycz (1983), Buckley(1985) ve Boender ve arkadaşları (1989), gevrek (crisp) sayılar yerine üçgensel bulanık sayılar kullanarak, Saaty'nin AHP metoduna da bulanık sayı işlemleri tanıtmışlardır. Buckley'in metodunun Boender'in metodundan farkı, bir karar verme problemi bulanık çözümü bulanık üçgensel sayılar tarafından yakınlştırılmaya ihtiyaç duymaz. Bununla birlikte, bulanık işlemlerin üçgensel yakınlşması, bir karar verme probleminin kesin sonucunu bulanıklaştırmak makuldür ve Buckley'in metodundan daha az yaygın (dağınık) olan bulanık çözümler sağlar. Aynı zamanda, Bounder ve arkadaşları, bir insanın mukayeseli değeriendirmesindeki derece derece değışimin sayısallaştırılmasında, Saaty'nin orjinal eşit aralıklı ölçeğinin tersine geometrik oranlı bir ölçek tasarlamışlardır. Bulanık üçgensel sayıların temel işlemleri aşağıda verilmektedir (Triantaphyllou, 2000).

$$\tilde{n}_1 \oplus \tilde{n}_2 = (n_{1l} + n_{2l}, n_{1m} + n_{2m}, n_{1u} + n_{2u}) \text{ toplama işlemi için} \quad (3.2)$$

$$\tilde{n}_1 \otimes \tilde{n}_2 = (n_{1l} \times n_{2l}, n_{1m} \times n_{2m}, n_{1u} \times n_{2u}) \text{ çarpım işlemi için} \quad (3.3)$$

$$-\tilde{n}_1 = (-n_{1u}, -n_{1m}, -n_{1l}) \text{ negatif olma durumu için} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\tilde{n}_1} \equiv \left(\frac{1}{n_{1u}}, \frac{1}{n_{1m}}, \frac{1}{n_{1l}} \right) \text{ bölme işlemi için} \quad (3.5)$$

$$\ln(\tilde{n}_1) \equiv (\ln(n_{1l}), \ln(n_{1m}), \ln(n_{1u})) \text{ doğal logaritma işlemi için} \quad (3.6)$$

$$\exp(\tilde{n}_1) \equiv (\exp(n_{1l}), \exp(n_{1m}), \exp(n_{1u})) \text{ üssel işlem için} \quad (3.7)$$

yakınsamayı ifade etmektedir. $\tilde{n}_1 = (n_{1l}, n_{1m}, n_{1u})$ ve $\tilde{n}_2 = (n_{2l}, n_{2m}, n_{2u})$ ise ; alt, mod, üst değerleri l, m, u olan üçgensel bulanık sayıyı göstermektedir. Diğer bir özel durum ifadesi de, bulanık üçgensel bir sayının kuvvetinin yine üçgensel bir sayı olması durumudur.

$$\tilde{n}_1^{\tilde{n}_2} \equiv (n_{1l}^{\tilde{n}_{2l}}, n_{1m}^{\tilde{n}_{2m}}, n_{1u}^{\tilde{n}_{2u}}) \quad (3.8)$$

Bu formül, bulanık ağırlıklı çarpım metodunda kullanılacaktır.

3.1.2 Bulanık Sayıların Sıralanması

Literatürde bulanık sayıların sıralanması problemi oldukça sık görülür. Mesela, farklı sıralama yaklaşımlarının bir mukayesesi ve değerlendirilmesi 1988 yılında Mc Cahan ve Lee tarafından yapılmış olup, ayrıca 1991 yılında da Zhu ve Lee tarafından yapılmıştır (Triantaphyllou, 2000).

Bulanık sayıların sıralanması metotlarının her biri belli durumlarda avantajları olduğundan, hangi metodun en iyisi olduğunu tanımlamak güçtür. Verilen bir durum için hangisinin en uygun sıralama metodu olduğuna karar vermede bazı önemli faktörler, kullanılan algoritmanın karmaşıklığı, esnekliği, doğruluğu, yorum kolaylığı ve bulanık sayıların şeklini içerir (Triantaphyllou, 2000).

Bulanık sayıların kıyaslanmasında kabul gören metodu 1977 de Boas ve Kwakorneak tanıtmışlardır. Tong ve Bonissone, 1981' de bir baskınlık ölçüsü kavramı tanıtmışlar ve bunun Boas ve Kwakorneak sıralama ölçüsüne eşdeğer olduğunu kanıtlamışlardır. Bu metot Buckley tarafından benimsenmiştir. Daha sonra, Tong ve Bonissone, enteresan bir gözlem yapmışlardır. Yani, MCDM metotlarının çoğu, farklılıkların derecesini bir kalite ölçüsü olarak

kullanmakta ve eğer birisi insan karar vericileri modellemeye kalkarsa bunun geçerli (doğru) bir ölçü olduğu konusunu merak etmektedirler (Triantaphyllou, 2000).

Zhu ve Lee (1991)'e göre, bu sıralama metodu daha basit ve hala etkindir. Metot, karar vericiye uygulama ve yorum kolaylığı kazandırmaktadır. Bununla birlikte, verilen bir problem herhangi bir nedenle farklı bir metoda ihtiyaç duyulursa, farklı bir metot kullanılmalıdır (Triantaphyllou, 2000).

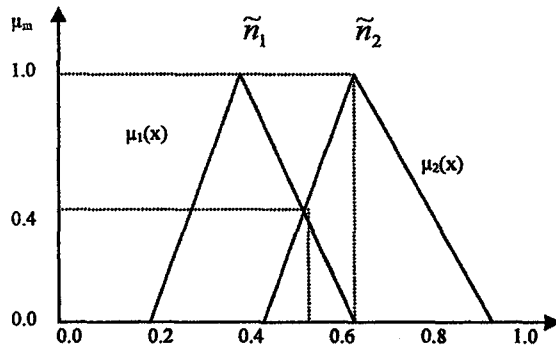
Üçgensel bulanık sayıların sıralanmasında kullanılan yukarıdaki prosedür şöyledir. $\tilde{n}_i$ bulanık sayısı için $\mu_i(x)$ üyelik fonksiyonunu gösterebilir,

$$e_{ij} = \max\{\min(\mu_i(x), \mu_j(y))\} \text{ tüm } i, j = 1, 2, 3, \dots, m \text{ dir.} \quad (3.9)$$

Sadece ve sadece $e_{ij} = 1$ ve $e_{ij} < Q$ (Q sayısı 1 (bir)'den küçük pozitif bir kesir) ise, $\tilde{n}_i$ $\tilde{n}_j$ 'ye baskındır denir ve $\tilde{n}_i > \tilde{n}_j$ şeklinde gösterilir. 0.80, 0.90, 0.70 gibi değerler Q için yaklaştırılabilir. Q değeri analist tarafından belirlenmeli ve duyarlılık analizi doğrultusunda çeşitlendirilmelidir. Bir sonraki bölümde gösterilen deneyde, Q 'nun değeri 0,90 olarak alınmıştır. Aşağıdaki örnekte yukarıdaki kavramlar açıklanmıştır.

Örnek:

$\hat{A}_1$ ve $\hat{A}_2$ bulanık alternatiflerinin öneminin $\tilde{n}_1 = (0.20, 0.40, 0.60)$ ve $\tilde{n}_2 = (0.40, 0.70, 0.90)$ bulanık üçgensel sayılarla ifade edildiğini kabul edelim. Şekil 2' de bulanık üçgensel sayıların kullanımı sonucu oluşan alternatiflerin üyelik fonksiyonları gösterilmektedir.



Şekil 2: Bulanık $\tilde{A}_1$ ve $\tilde{A}_2$ Alternatiflerinin Üyelik Fonksiyonları.

3.2 Bulanık Ağırlıklı Toplam Modeli (WSM) Metodu

j. kritere göre i. alternatifin performans değerini gösteren bulanık üçgensel sayı $\hat{a}_{ij} = (a_{ijl}, a_{ijm}, a_{iju})$ olarak gösterilir. Karar vericinin karar kriterlerinin önem ağırlıklarını bulanık üçgensel sayı olarak belirlediğini kabul edelim. Bu nedenle, bu ağırlıkları $\hat{w}_j = (w_{jl}, w_{jm}, w_{ju})$ olarak gösterilebilir. Aynı zamanda, normal çok kriterli karar verme metodlarında olduğu gibi, ağırlıkların toplamının bir olması gerekliliği bulanık üçgensel sayılar için de şarttır. En iyi alternatif aşağıdaki denklemi sağlamalıdır (Triantaphyllou, 2000):

$$i = 1, 2, 3, K, m \text{ olmak üzere, } \hat{P}_{F-WSMScore}^* = \max \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} \hat{w}_j \quad (3.10)$$

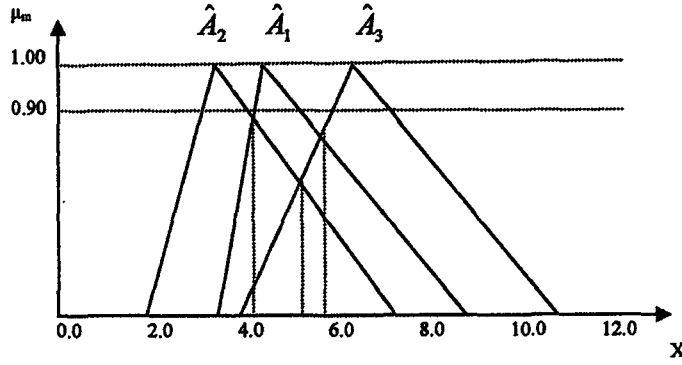
Sayısal bir örnekle göstermek gerekirse, aşağıda dört bulanık karar kriteri ve üç bulanık alternatiften oluşan bulanık bir karar matrisi verilmiştir.

	<i>Kriterler</i>			
	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_4$
<i>Alternatifler</i>	$(0.13, 0.20, 0.31)$	$(0.08, 0.15, 0.25)$	$(0.29, 0.40, 0.56)$	$(0.17, 0.25, 0.38)$
$\hat{A}_1$	$(3.00, 4.00, 5.00)$	$(5.00, 6.00, 7.00)$	$(5.00, 6.00, 7.00)$	$(2.00, 3.00, 4.00)$
$\hat{A}_2$	$(6.00, 7.00, 8.00)$	$(5.00, 6.00, 7.00)$	$(0.50, 1.00, 2.00)$	$(4.00, 5.00, 6.00)$
$\hat{A}_3$	$(4.00, 5.00, 6.00)$	$(3.00, 4.00, 5.00)$	$(7.00, 8.00, 9.00)$	$(6.00, 7.00, 8.00)$

Bulanık WSM kullanıldığında, üç alternatifin ($\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ olarak gösterilen) son öncelik puanları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &= (0.13, 0.20, 0.31) \times (3.00, 4.00, 5.00) + (0.08, 0.15, 0.25) \times (5.00, 6.00, 7.00) + \\ & (0.29, 0.40, 0.56) \times (5.00, 6.00, 7.00) + (0.17, 0.24, 0.38) \times (2.00, 3.00, 4.00) = (2.583, 4.850, 8.750) \end{aligned}$$

Benzer şekilde, $\hat{P}_2 = (1.979, 3.950, 7.675)$ ve $\hat{P}_3 = (3.792, 6.550, 11.188)$ değerleri de hesaplanır.



Şekil 3: Bulanık WSM'ye göre bulanık alternatiflerin üyelik öncelik fonksiyonları.

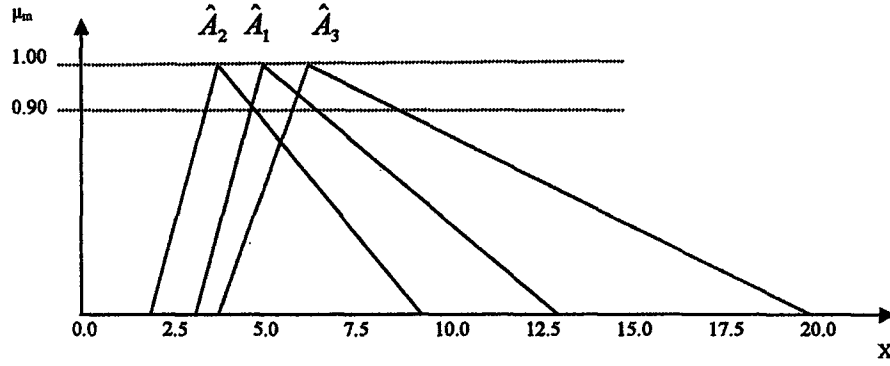
Şekil 3 sonuçların üyelik fonksiyonlarını göstermektedir. Bu sonuçlar, her alternatifin yeteneğinin karar kriteri ile buluşmasının ölçüsü olarak yorumlanabilir. Bu şekil ve e_{ij} katsayısının tanımından, $e_{31} = e_{32} = e_{12} = 1$ ve e_{13} , e_{23} ve e_{21} değerleri $Q(=0.90)$ 'den küçüktür. Bu sıralama prensibine göre, bulanık $\hat{A}_3$ alternatifi en çok tercih edilen alternatiftir.

3.3 Bulanık Ağırlıklı Çarpım Modeli (WPM) Metodu

$\hat{a}_{kj}$, $\hat{a}_{lj}$ ve $\hat{w}_j$ bulanık üçgensel sayılar olmak üzere, en iyi alternatif aşağıdaki denklemi sağlamalıdır:

$$R\left(\frac{A_K}{A_L}\right) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\hat{a}_{kj}}{\hat{a}_{lj}}\right)^{w_j} \quad (3.11)$$

Normal WPM'ye benzer şekilde, , sadece ve sadece payı paydasından büyükse bulanık $\hat{A}_K$ alternatifi bulanık $\hat{A}_L$ alternatifine baskın olur. Bu formül uygulandıktan sonra oluşan değerler aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 4: Bulanık WPM'ye göre bulanık alternatiflerin üyelik fonksiyonları.

Mesela, bir önceki örnekteki karar matrisini kullanalım. Bulanık WPM uygulandığında aşağıdaki oranlar elde edilir.

$$R\left(\frac{\hat{A}_1}{\hat{A}_2}\right) = \frac{[(3.00, 4.00, 5.00)^{(13, 20, 31)} \times (5.00, 6.00, 7.00)^{(08, 15, 25)} \times (5.00, 6.00, 7.00)^{(29, 40, 56)} \times (2.00, 3.00, 4.00)^{(17, 25, 38)}]}{[(6.00, 7.00, 8.00)^{(13, 20, 31)} \times (5.00, 6.00, 7.00)^{(08, 15, 25)} \times (0.50, 1.00, 2.00)^{(29, 40, 56)} \times (4.00, 5.00, 6.00)^{(17, 25, 38)}]} \cong$$

$$R\left(\frac{\hat{A}_1}{\hat{A}_2}\right) \cong \frac{(2.355, 4.652, 13.516)}{(1.473, 2.887, 9.008)}$$

Benzer şekilde,

$$R\left(\frac{\hat{A}_1}{\hat{A}_3}\right) \cong \frac{(2.355, 4.652, 13.516)}{(3.099, 6.348, 19.649)}$$

$$R\left(\frac{\hat{A}_2}{\hat{A}_3}\right) \cong \frac{(1.473, 2.887, 9.008)}{(3.099, 6.348, 19.649)}$$

Burada e_{ij} katsayıları $e_{31} = e_{32} = e_{12} = 1$ ve e_{31}, e_{23}, e_{21} katsayıları $Q(= 0.90)$ 'dan küçüktür.

Yani, Bulanık $\hat{A}_3$ alternatifi diğer alternatiflere baskındır. Bulanık olarak gösterilen öncelik değerleri şekil 4'de gösterilmektedir. Buradan, Bulanık WPM daha karmaşık işlemler gerektirmesine rağmen, bulanık WSM'in ve Bulanık WPM'nin aynı en iyi alternatifi gösterdiği görülmektedir.

3.4 Bulanık Analitik Hiyerarşi Prosesi (AHP) Metodu

Analitik hiyerarşi prosesinin bulanık mantıkla birleştirilmiş şekli aşağıda gösterilmektedir. Yine dört bulanık alternatifi olan ve üç bulanık kriteri olan bir karar problemi düşünelim. Burada ikili karşılaştırmalar, bulanık üçgensel sayıların oranları şeklindedir. Burada karar

vericinin ilk karar kriterine göre alternatifleri bulanık ikili karşılaştırmalar yapacağını düşünelim. İlk değerlendirme kriteri ($\hat{C}_1$) altında elde edilen karar matrisi aşağıdaki gibidir:

	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_3$
$\tilde{A}_1$	(1,1,1)	(1/6,1/2,2)	(1/10,1/4,2/3)
$\tilde{A}_2$	(1/2,2,6)	(1,1,1)	(1/8,1/3,1)
$\tilde{A}_3$	(3/2,4,10)	(1,3,8)	(1,1,1)

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, klasik çok kriterli karar verme metodlarında kendisiyle karşılaştırılan alternatif 1 değerini alırken, burada bulanıklık nedeniyle (1,1,1) bulanık sayısı kullanılır. Ardından, yukarıdaki matrisin bulanık özvektörü hesaplanır. Klasik bir karşılaştırmalı matris verildiğinde, Saaty'ye göre matrisin doğru en önemli özvektörü alternatiflerin önemini belirler. Saaty'nin özvektör yakınsama metodu ile bulanık aritmetik işlemler birleştirildiğinde, alternatiflerin aşağıdaki gibi önem sıralamaları ortaya çıkar (Triantaphyllou, 2000).

$$\hat{v}_1 = [(1,1,1) \times (1/6,1/2,2) \times (1/10,1/4,2/3)]^{1/3} \cong (0.25,0.50,1.10),$$

$$\hat{v}_2 = [(1/2,2,6) \times (1,1,1) \times (1/8,1/3,1)]^{1/3} \cong (0.40,0.87,1.82),$$

$$\hat{v}_3 = [(3/2,4,10) \times (1,3,8) \times (1,1,1)]^{1/3} \cong (1.14,2.29,4.31).$$

Ardından, orijinal AHP'de olduğu gibi vektörlerin normalizasyonu yapılır. Normalize edilen öncelik vektörleri; (0.02,0.14,0.99), (0.06,0.24,1.02) ve (0.16,0.62,2.42) olur.

Bu noktada, kalan karar kriterlerinin her birine göre üç alternatif kıyaslandığında, ikili karşılaştırma bulanık özvektörlerinin yakınsamasının benzer şekilde elde edildiğini kabul edelim. Aynısı dört bulanık kriterin önem ağırlıkları için de yapılır. Bu veriler artık karar matrisini oluşturmak için kullanılabilir.

<i>Alternatifler</i>	<i>Kriterler</i>			
	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_4$
$\hat{A}_1$	(0.08,0.18,0.46)	(0.08,0.16,0.39)	(0.17,0.40,0.86)	(0.11,0.26,0.61)
$\hat{A}_2$	(0.02,0.14,0.99)	(0.18,0.44,0.95)	(0.22,0.37,0.64)	(0.12,0.23,0.55)
$\hat{A}_3$	(0.06,0.24,1.02)	(0.14,0.35,0.83)	(0.07,0.10,0.15)	(0.13,0.30,0.69)
$\hat{A}_4$	(0.16,0.62,2.41)	(0.11,0.21,0.53)	(0.30,0.53,0.91)	(0.19,0.47,1.00)

Ardından, bulanık ağırlıklı toplam metodundaki formülü kullanarak üç bulanık alternatifin son bulanık öncelik puanları hesaplanır:

$$\hat{P}_1 = (0.02,0.14,0.99) \times (0.08,0.18,0.46) + (0.18,0.44,0.95) \times (0.08,0.16,0.39) +$$

$$(0.22,0.37,0.64) \times (0.17,0.40,0.86) + (0.12,0.23,0.55) \times (0.11,0.26,0.61) = \\ = (0.068,0.474,1.887).$$

Benzer şekilde, diğer iki bulanık öncelik puanları da hesaplanır:

$$\hat{P}_2 = (0.772,0.208,1.908),$$

$$\hat{P}_3 = (0.897,0.480,2.696).$$

Bulanık sayıların sıralanmasıyla ilgili olarak anlatılan prosedür $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ ve $\hat{P}_3$ 'e uygulandığında, en iyi alternatif bulanık $\hat{A}_3$ alternatifi olur.

Bulanık analitik hiyerarşi prosesi metodunun uygulanmasında kullanılan daha detaylı bir yaklaşım ise Chang (1992)'in önerdiği boyut analizi yaklaşımıdır. Her hedef için boyut analizi verilerinin elde edildiği bu yaklaşım aşağıdaki adımlardan oluşur (Kahraman, 2004):

Chang (1992)'nin boyut analizi metoduna göre, her nesne alınır ve her g_i amacı için m adet boyut analizi değerleri elde edilir. Böylece her nesne için m adet boyut analizi değeri elde edilir.

Adım 1: i . nesneye göre bulanık sentetik boyut değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$S_i = \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j \otimes \left[\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_l}^j \right]^{-1} \quad (3.12)$$

$\sum_{j=1}^m M_{g_i}^j$ 'yi elde etmek için, $\sum_{j=1}^m M_{g_i}^j = \left(\sum_{j=1}^m l_j, \sum_{j=1}^m m_j, \sum_{j=1}^m u_j \right)$ gibi bir matrisin m adet boyut analizinin bulanık toplamı alınır ve

$$\left[\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_l}^j \right]^{-1} \text{'yi elde etmek için} \quad \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_l}^j = \left(\sum_{l=1}^n l_l, \sum_{l=1}^n m_l, \sum_{l=1}^n u_l \right) \text{ gibi, } M_{g_i}^j \\ (j=1,2,\dots,m) \text{ değerlerinin toplamı alınır ve} \quad \left[\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_l}^j \right]^{-1} = \left(\frac{1}{\sum_{l=1}^n u_l}, \frac{1}{\sum_{l=1}^n m_l}, \frac{1}{\sum_{l=1}^n l_l} \right) \text{ gibi}$$

vektörün tersi hesaplanır.

Adım 2: $M_2 = (l_2, m_2, u_2) \geq M_1 = (l_1, m_1, u_1)$ olasılık değeri d μ_{M_1} ve μ_{M_2} üyelik fonksiyonları arasındaki en yüksek kesişim değerinin ordinatı olmak üzere:

$$V(M_2 \geq M_1) = hgt(M_1 \cap M_2) = \mu_{M_2}(d) \quad (3.13)$$

$$V(M_2 \geq M_1) = \begin{cases} 1 & ; m_2 \geq m_1 \\ 0 & ; l_1 \geq u_2 \\ \frac{(l_1 - m_1)}{(m_2 - u_2) - (m_1 - l_1)} & ; \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

M_1 ve M_2 üçgensel bulanık sayılarını kıyaslamak için, hem $V(M_1 \geq M_2)$ hem de $V(M_2 \geq M_1)$ değerlerine ihtiyaç duyulur.

Adım 3: Konveks bulanık bir sayının k tane M_i ($i=1,2,\dots,k$) konveks bulanık sayısından büyük olması ihtimali $V(M \geq M_1, M_2, K, M_k) = \min V(M_2 \geq M_i)$ ($i=1,2,\dots,k$) şeklinde tanımlanır.

($i=1,2,\dots,k$) ve $k \neq i$ için $d'(A_i) = \min V(S_i \geq S_k)$ olduğunu farz edilir. Böylece ağırlık vektörü,

A_i ($i=1,2,\dots,n$) n eleman için $W' = (d'(A_1), d'(A_2), K, d'(A_n))^T$ olur.

Adım 4: Normalizasyondan sonra normalize ağırlık vektörü;

$$W = (d(A_1), d(A_2), K, d(A_n)) \text{ olur.} \quad (3.15)$$

3.5 Bulanık Düzeltilmiş Analitik Hiyerarşi Prosesi (R-AHP) Metodu

Belton ve Gear (1983) tarafından tasarlanan düzeltilmiş analitik hiyerarşi prosesinin orjinal analitik hiyerarşi prosesinden tek farkı, her kritere göre alternatiflerin performans ölçüsünü bu değerlerden en büyüğüne bölerek normalize etmesidir. Düzeltilmiş AHP metodunun bulanık versiyonu bir önceki sayısal veri üzerinde izah edilmektedir.

Burada bulanık karar matrisindeki vektörler, bu vektördeki en büyük girdiye bölünür ve aşağıdaki karar matrisi oluşur.

	Kriterler			
	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_4$
Alternatifler	(0.08,0.18,0.46)	(0.08,0.16,0.39)	(0.17,0.40,0.86)	(0.11,0.26,0.61)
$\hat{A}_1$	(0.01,0.21,9.90)	(0.44,1.00,2.29)	(0.41,0.69,1.26)	(0.26,0.50,1.26)
$\hat{A}_2$	(0.01,0.38,1.14)	(0.35,0.79,2.00)	(0.13,0.19,0.30)	(0.30,0.63,1.59)
$\hat{A}_3$	(0.07,1.00,15.1)	(0.26,0.50,1.26)	(0.56,1.00,1.78)	(0.44,1.00,2.29)

Orjinal AHP metoduna benzer şekilde üç bulanık alternatifin son bulanık öncelik puanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\hat{P}_1 &= (0.02, 0.14, 0.99) \times (0.08, 0.18, 0.46) + (0.18, 0.44, 0.95) \times (0.08, 0.16, 0.39) + \\ &\quad (0.22, 0.37, 0.64) \times (0.17, 0.40, 0.86) + (0.12, 0.23, 0.55) \times (0.11, 0.26, 0.61) = \\ &= (0.068, 0.474, 1.887).\end{aligned}$$

Benzer şekilde, diğer iki bulanık öncelik puanları da hesaplanır:

$$\hat{P}_2 = (0.772, 0.208, 1.908),$$

$$\hat{P}_3 = (0.897, 0.480, 2.696).$$

Bulanık sayıların sıralanmasıyla ilgili olarak anlatılan prosedür $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ ve $\hat{P}_3$ 'e uygulandığında, en iyi alternatif bulanık $\hat{A}_3$ alternatifi olur.

Bulanık analitik hiyerarşi prosesi metodunun uygulanmasında kullanılan daha detaylı bir yaklaşım ise Chang (1992)'in önerdiği boyut analizi yaklaşımıdır. Her hedef için boyut analizi verilerinin elde edildiği bu yaklaşım aşağıdaki adımlardan oluşur (Kahraman, 2004):

Chang (1992)'nin boyut analizi metoduna göre, her nesne alınır ve her g_i amacı için m adet boyut analizi değerleri elde edilir. Böylece her nesne için m adet boyut analizi değeri elde edilir.

Adım 1: i . nesneye göre bulanık sentetik boyut değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$S_i = \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j \otimes \left[\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j \right]^{-1} \quad (3.12)$$

$\sum_{j=1}^m M_{g_i}^j$ 'yi elde etmek için, $\sum_{j=1}^m M_{g_i}^j = \left(\sum_{j=1}^m l_j, \sum_{j=1}^m m_j, \sum_{j=1}^m u_j \right)$ gibi bir matrisin m adet boyut analizinin bulanık toplamı alınır ve

$$\left[\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j \right]^{-1} \text{'yi elde etmek için} \quad \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j = \left(\sum_{l=1}^n l_i, \sum_{l=1}^n m_i, \sum_{l=1}^n u_i \right) \text{ gibi, } M_{g_i}^j$$

$$(j=1,2,\dots,m) \text{ değerlerinin toplamı alınır ve } \left[\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m M_{g_i}^j \right]^{-1} = \left(\frac{1}{\sum_{l=1}^n u_i}, \frac{1}{\sum_{l=1}^n m_i}, \frac{1}{\sum_{l=1}^n l_i} \right) \text{ gibi}$$

vektörün tersi hesaplanır.

Adım 2: $M_2 = (l_2, m_2, u_2) \geq M_1 = (l_1, m_1, u_1)$ olasılık değeri d μ_{M_1} ve μ_{M_2} üyelik fonksiyonları arasındaki en yüksek kesişim değerinin ordinatı olmak üzere:

$$V(M_2 \geq M_1) = hgt(M_1 \cap M_2) = \mu_{M_2}(d) \quad (3.13)$$

$$V(M_2 \geq M_1) = \begin{cases} 1 & ; m_2 \geq m_1 \\ 0 & ; l_1 \geq u_2 \\ \frac{(l_1 - m_1)}{(m_2 - u_2) - (m_1 - l_1)} & ; \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

M_1 ve M_2 üçgensel bulanık sayılarını kıyaslamak için, hem $V(M_1 \geq M_2)$ hem de $V(M_2 \geq M_1)$ değerlerine ihtiyaç duyulur.

Adım 3: Konveks bulanık bir sayının k tane M_i ($i=1,2,\dots,k$) konveks bulanık sayısından büyük olması ihtimali $V(M \geq M_1, M_2, K, M_k) = \min V(M_2 \geq M_i)$ ($i=1,2,\dots,k$) şeklinde tanımlanır.

($i=1,2,\dots,k$) ve $k \neq i$ için $d'(A_i) = \min V(S_i \geq S_k)$ olduğunu farz edilir. Böylece ağırlık vektörü, A_i ($i=1,2,\dots,n$) n eleman için $W' = (d'(A_1), d'(A_2), K, d'(A_n))^T$ olur.

Adım 4: Normalizasyondan sonra normalize ağırlık vektörü;

$$W = (d(A_1), d(A_2), K, d(A_n)) \text{ olur.} \quad (3.15)$$

3.5 Bulanık Düzeltilmiş Analitik Hiyerarşi Prosesi (R-AHP) Metodu

Belton ve Gear (1983) tarafından tasarlanan düzeltilmiş analitik hiyerarşi prosesinin orjinal analitik hiyerarşi prosesinden tek farkı, her kritere göre alternatiflerin performans ölçüsünü bu değerlerden en büyüğüne bölerek normalize etmesidir. Düzeltilmiş AHP metodunun bulanık versiyonu bir önceki sayısal veri üzerinde izah edilmektedir.

Burada bulanık karar matrisindeki vektörler, bu vektördeki en büyük girdiye bölünür ve aşağıdaki karar matrisi oluşur.

	Kriterler			
	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_4$
Alternatifler	(0.08,0.18,0.46)	(0.08,0.16,0.39)	(0.17,0.40,0.86)	(0.11,0.26,0.61)
$\hat{A}_1$	(0.01,0.21,9.90)	(0.44,1.00,2.29)	(0.41,0.69,1.26)	(0.26,0.50,1.26)
$\hat{A}_2$	(0.01,0.38,1.14)	(0.35,0.79,2.00)	(0.13,0.19,0.30)	(0.30,0.63,1.59)
$\hat{A}_3$	(0.07,1.00,15.1)	(0.26,0.50,1.26)	(0.56,1.00,1.78)	(0.44,1.00,2.29)

Orjinal AHP metoduna benzer şekilde üç bulanık alternatifin son bulanık öncelik puanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\hat{P}_1 &= (0.01, 0.21, 9.90) \times (0.08, 0.18, 0.46) + (0.44, 1.00, 2.29) \times (0.08, 0.16, 0.39) + \\ &\quad (0.41, 0.69, 1.26) \times (0.17, 0.40, 0.86) + (0.11, 0.26, 0.61) \times (0.11, 0.26, 0.61) = \\ &= (0.130, 0.605, 2.923).\end{aligned}$$

Benzer şekilde, diğer iki bulanık öncelik puanları da hesaplanır:

$$\hat{P}_2 = (0.081, 0.422, 2.525),$$

$$\hat{P}_3 = (0.167, 0.932, 11.45).$$

Bulanık sayıların sıralanmasıyla ilgili olarak anlatılan prosedür $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ ve $\hat{P}_3$ 'e uygulandığında, en iyi alternatif bulanık $\hat{A}_3$ alternatifi olur.

3.6 Bulanık TOPSIS Metodu

TOPSIS metodunun bulanık versiyonu aşağıdaki adımlarla açıklanmaktadır.

Adım 1: Normalize edilmiş bulanık karar matrisinin yapılandırılması

Aşağıdaki dört kriterli ve üç alternatifli bir karar problemine ve bir karar matrisine sahip olduğumuzu düşünelim.

	Kriterler			
	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_4$
Alternatifler	$(0.13, 0.20, 0.31)$	$(0.08, 0.15, 0.25)$	$(0.29, 0.40, 0.56)$	$(0.17, 0.25, 0.38)$
$\hat{A}_1$	$(0.08, 0.25, 0.94)$	$(0.25, 0.93, 2.96)$	$(0.34, 0.70, 1.71)$	$(0.12, 0.24, 0.92)$
$\hat{A}_2$	$(0.23, 1.00, 3.10)$	$(0.13, 0.60, 2.24)$	$(0.03, 0.05, 0.09)$	$(0.12, 0.40, 1.48)$
$\hat{A}_3$	$(0.15, 0.40, 1.48)$	$(0.13, 0.20, 0.88)$	$(0.62, 1.48, 3.41)$	$(0.24, 1.00, 3.03)$

Adım 2: Bulanık ağırlıklandırılmış normalize karar matrisinin yapılandırılması

- Verilen bulanık normalize edilmiş karar matrisinin bulanık ağırlıklandırılmış karar matrisi şöyledir:

Alternatifler	Kriterler			
	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_4$
$\hat{A}_1$	(0.01,0.05,0.29)	(0.02,0.14,0.74)	(0.10,0.28,0.96)	(0.02,0.06,0.35)
$\hat{A}_2$	(0.03,0.20,0.96)	(0.01,0.09,0.56)	(0.01,0.02,0.05)	(0.02,0.10,0.55)
$\hat{A}_3$	(0.02,0.08,0.46)	(0.01,0.03,0.22)	(0.18,0.59,1.91)	(0.04,0.25,1.15)

Adım 3: Bulanık İdeal ve Bulanık Negatif-İdeal Çözümlerin belirlenmesi

TOPSIS metoduna benzer şekilde, $\hat{A}^*$ olarak gösterilen bulanık ideal çözüm ve $\hat{A}^-$ bulanık negatif ideal çözümler (alternatifler) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\hat{A}^* = \{(0.03,0.20,0.96), (0.02,0.14,0.74), (0.18,0.59,1.91), (0.04,0.25,1.15)\}, \text{ ve}$$

$$\hat{A}^- = \{(0.01,0.05,0.29), (0.01,0.02,0.22), (0.01,0.02,0.05), (0.02,0.06,0.35)\}.$$

Adım 4: Bulanık Ayırma Ölçüsünün Hesaplanması

TOPSIS metoduna benzer şekilde, her bulanık alternatifle bulanık ideal/negatif-ideal çözümler arasındaki bulanık ayırma mesafeleri aşağıdadır:

$$\hat{S}_{1^+} \cong (0.09,0.39,1.41),$$

$$\hat{S}_{1^-} \cong (0.09,0.28,1.04),$$

$$\hat{S}_{2^+} \cong (0.17,0.59,1.95),$$

$$\hat{S}_{2^-} \cong (0.02,0.16,0.76),$$

$$\hat{S}_{3^+} \cong (0.02,0.16,0.71),$$

$$\hat{S}_{3^-} \cong (0.17,0.60,2.03).$$

$$\begin{aligned} \text{Örneğin; } \hat{S}_{1^+} &= \{[(0.01,0.05,0.29) - (0.03,0.20,0.96)]^2 + [(0.02,0.14,0.74) - (0.02,0.14,0.74)]^2 + \\ &\quad [(0.02,0.06,0.35) - (0.04,0.25,1.15)]^2 + [(0.10,0.28,0.96) - (0.18,0.59,1.91)]^2\}^{1/2} \cong \\ &\cong (0.09,0.28,1.04). \end{aligned}$$

Adım 5: Bulanık İdeal Çözüme Bağlı Yakınlığın Hesaplanması

Üç alternatifin ideal çözüme bağlı yakınlığı, TOPSIS metodunda kullanılan bağıntının bulanıklaştırılmasıyla elde edilir.

$$\hat{C}_{1^+} = \frac{\hat{S}_{1^-}}{\hat{S}_{1^+} + \hat{S}_{1^-}} \cong \frac{(0.09,0.39,1.41)}{[(0.09,0.39,1.41) + (0.09,0.28,1.04)]} = (0.04,0.42,5.83).$$

Benzer şekilde, $\hat{C}_2 \equiv (0.01, 0.21, 3.99)$ ve $\hat{C}_3 \equiv (0.06, 0.79, 10.42)$ değerleri bulunur.

Bulanık sayıların sıralanması bölümünde izah edilen sıralama yöntemleriyle, bağıl yakınlık mesafeleri karşılaştırıldığında, $\hat{C}_3 > \hat{C}_1 > \hat{C}_2$ sıralaması elde edilir. Yani, alternatiflerin sıralaması $\hat{A}_3 > \hat{A}_1 > \hat{A}_2$ şeklinde olup, en iyi alternatif $\hat{A}_3$ alternatifidir.

3.7 Bulanık Çok Kriterli Karar Verme Metotları için İki Değerlendirme Kriteri

Yukarıda anlatılan dört bulanık çok kriterli karar verme metodu tek karar vericili tüm çok kriterli karar verme problemlerinde kullanılabilir. Bununla birlikte, bu metotlar aynı problem için farklı cevaplar sunabilir. Herhangi bir ya da birkaç metot kullanıldığında en iyi alternatif hala aynı olması durumunda, bu metotların doğruluğu ve tutarlılığı yüksek derecede güvenilirdir. Böylece, değerlendirme kriterlerine benzer şekilde, iki bulanık değerlendirme kriteri bu bölümde tanımlanmakta ve bu bulanık çok kriterli karar verme metotlarının performansları incelenmektedir.

Bir önceki bölümde, normal ve tek boyutlu çevrede ağırlıklı toplam metodunun en iyi sonuçları verdiği gözlenmiştir. Bu nedenle, bir önceki bölümde WPM, AHP metodu ve TOPSIS metodu, WSM kullanılarak karşılaştırılmıştı. Benzer şekilde, bulanık durumda, bulanık ağırlıklı toplam metodundan elde edilen sonuçları, WPM, AHP TOPSIS metotlarının bulanık versiyonlarından elde edilen sonuçlarla değerlendirme kriterleri çerçevesinde kıyaslanacaktır.

Bu ilk bulanık değerlendirme kriteridir. Bulanık ağırlıklı toplam metodu ile diğer herhangi bir metodun kıyaslanmasında, iki çelişki oranı tanımlanabilir. İlki, iki metot tarafından bulunan en iyi alternatifin aynı olması oranını kaydetmektir. İkinci çelişki oranı ise, herhangi bir alternatifin sıralamada yer değiştirmesi sayılarının kaç defa olduğunun kaydedilmesi olsun.

İkinci değerlendirme kriteri ise, optimal olmayan bir alternatifin yerine daha kötü bir alternatif gelmesi durumunda, metotlar tarafından üretilen sonuçların istikrarını incelemektedir. Optimal olmayan bir alternatifin yerine kendisinden daha kötü bir alternatif getirildiğinde bile, mükemmel doğruluğa sahip bir metot bile bazı alternatifleri en iyi alternatif olarak sıralayabilir. Böylece ikinci değerlendirme kriteri, bir bulanık çok kriterli karar verme metodunun, herhangi bir optimal olmayan alternatifin yerine kendisinden daha kötü bir alternatif yerleştirildiğinde, iyi alternatifi göstermeye devam etmesine dayanır.

Daha da ötesi, Gerçek Sürekli İkili Karşılaştırma (RCP-Real Continuous Pairwise) ve En Yakın Kesikli İkili Karşılaştırma (CDP-Closest and Discrete Pairwise) matrisi kavramlarını,

bu bulanık metotların deneysel çalışmalarını yürütmek üzere bulanıklaştırılmaktadır. Bu matrisler, tek karar vericili durumda bu karar vericinin mümkün olduğunca doğru karar verdiğini varsayarak, ikili karşılaştırmalar yapma yeteneğinin yüksek olduğu düşünülür.

3.7.1 İlk Bulanık Değerlendirme Kriteri Kullanılarak Metotların Test Edilmesi

Aşağıda ilk bulanık değerlendirme kriterini kullanarak, bulanık karar verme metotlarının test edilmesi prosedürü gösterilmektedir. Üç alternatifi ve dört karar kriteri olan bir karar problemine sahip olduğumuzu düşünelim. Karar matrisindeki tüm verilerin aynı birimde ifade edildiğini ve matristeki verilerin gerçek veriler olduğunu kabul edelim.

<i>Alternatifler</i>	<i>Kriterler</i>			
	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_4$
$\hat{A}_1$	4.454	3.253	3.987	5.816
$\hat{A}_2$	3.684	8.450	1.447	2.189
$\hat{A}_3$	6.232	7.273	2.496	4.756

Karar vericinin buradaki verileri bilmediğini ve bunları belirlemek için bulanık üçgensel sayılar kullanması istendiğini varsayalım. Bu değerler daha öncede olduğu gibi, ikili karşılaştırmalar yapmak için Saaty'nin önerdiği $\{9,8,K,2,1,1/2,K,1/8,1/9\}$ kümesinden faydalanılarak oluşturulmaktadır.

Burada karar vericinin mümkün olduğunca doğru değerlendirme yapacağı kabul edilir. Örneğin, ilk kritere göre ilk alternatifi performansını değerlendirmek istediğinde, bulanık (3,4,5) sayısını kullanmıştır. Buradan, belirlenen üçgensel sayının orta değeri 4, gerçek (4.454) değerine en yakın olan sayıdır. Aynı zamanda, üçgensel sayının alt ve üst değerleri bir birim yanındaki değerlerdir. Benzer şekilde, diğer girdiler karar verici tarafından değerlendirilir ve bulanık karar matrisi elde edilir.

<i>Alternatifler</i>	<i>Kriterler</i>			
	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_4$
$\hat{A}_1$	(5,6,7)	(5,6,7)	(7,8,9)	(5,6,7)
$\hat{A}_2$	(3,4,5)	(2,3,4)	(3,4,5)	(5,6,7)
$\hat{A}_3$	(3,4,5)	(7,8,9)	(0.5,1,2)	(1,2,3)
$\hat{A}_4$	(5,6,7)	(6,7,8)	(1,2,3)	(4,5,6)

Böylece, bulanık alternatiflerin bulanık son öncelik puanları aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{P}_1 = (5,6,7) \times (3,4,5) + (5,6,7) \times (2,3,4) + (7,8,9) \times (3,4,5) + (5,6,7) \times (5,6,7) = (71,105,157).$$

Benzer şekilde, diğer iki bulanık öncelik değerleri hesaplanır:

$$\hat{P}_2 = (58.5, 92, 135),$$

$$\hat{P}_3 = (82, 124, 174).$$

Bu değerlere bulanık sayıların sıralanması prosedürü uygulandığında, sıralama $\hat{A}_3 > \hat{A}_1 > \hat{A}_2$ şeklinde olur ve böylece en iyi bulanık alternatif $\hat{A}_3$ alternatifi olur.

Karar vericinin bulanık analitik hiyerarşi prosesi kullanacağını kabul edelim. Karar verici gerçek verileri bilseydi, gerçek ikili karşılaştırmaların bulunduğu ve dört karar kriterinin birbiriyle kıyaslandığı matris (yani RCP matrisi- α) şöyle olurdu:

$$\begin{bmatrix} 6.015 \\ 5.526 \\ 8.349 \\ 5.721 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1.09 & 0.72 & 1.05 \\ 0.91 & 1 & 0.66 & 0.97 \\ 1.39 & 1.52 & 1 & 1.46 \\ 0.95 & 1.03 & 0.68 & 1 \end{bmatrix} = \alpha.$$

$\alpha_{12} = 1.09 = 6.015 / 5.526$ girdisi örnek olarak verilebilir. Bununla birlikte, karar verici ikili karşılaştırmaların gerçek değerlerini hiçbir zaman bilemez. Bu noktada, karar vericinin mümkün olduğu kadar doğru karar verebildiği ve bulanık üçgensel sayılar kullanmasının istendiği varsayılır. Bu değerler tanımlandıktan sonra, aşağıdaki en yakın ikili karşılaştırma matrisi (CDP Matrisi- β) oluşturulur.

$$\beta = \begin{bmatrix} (1,1,1) & (0.50,1,2) & (0.30,0.50,1) & (0.50,1,2) \\ (0.50,1,2) & (1,1,1) & (0.30,0.50,1) & (0.50,1,2) \\ (0.50,1,2) & (1,2,3) & (1,1,1) & (0.50,1,2) \\ (0.50,1,2) & (0.50,1,2) & (0.30,0.50,1) & (1,1,1) \end{bmatrix}.$$

Örneğin; $\beta_{32} = (1,2,3)$ değeri, 1.52 değeri Saaty'nin orjinal ölçeğinde 2'ye en küçük mesafesi olan değer olmasından dolayı $\alpha_{32} (= 1.52)$ değerinden türetilmiştir. Bu nedenle, β_{32} 'nin orta değeri ikiye eşit alınır ve alt ve üst değerleri birer birim yakınından seçilir. Benzer şekilde, her bir karar kriterine göre, üç alternatifin bulanık ikili karşılaştırmaları (Bulanık CDP Matrisleri) Saaty'nin ölçeğine göre aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

$$\begin{bmatrix} 4.454 \\ 3.647 \\ 6.232 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1.22 & 0.71 \\ 0.82 & 1 & 0.59 \\ 1.41 & 1.69 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (1,1,1) & (0.50,1,2) & (0.30,0.50,1) \\ (0.50,1,2) & (1,1,1) & (0.30,0.50,1) \\ (1,2,3) & (2,3,4) & (1,1,1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3.253 \\ 8.450 \\ 7.273 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.38 & 0.45 \\ 2.63 & 1 & 1.16 \\ 2.22 & 0.86 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (1,1,1) & (0.25,0.30,0.50) & (0.30,0.50,1) \\ (2,3,4) & (1,1,1) & (0.50,1,2) \\ (1,2,3) & (0.50,1,2) & (1,1,1) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 3.987 \\ 1.447 \\ 2.496 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2.76 & 1.60 \\ 0.36 & 1 & 0.58 \\ 0.63 & 1.72 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (1,1,1) & (2,3,4) & (1,2,3) \\ (0.25,0.30,0.50) & (1,1,1) & (0.30,0.50,1) \\ (0.30,0.50,1) & (1,2,3) & (1,1,1) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 5.816 \\ 2.189 \\ 4.736 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2.66 & 1.23 \\ 0.38 & 1 & 0.46 \\ 0.81 & 2.17 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (1,1,1) & (2,3,4) & (0.50,1,2) \\ (0.25,0.30,0.50) & (1,1,1) & (0.30,0.50,1) \\ (0.50,1,2) & (1,2,3) & (1,1,1) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ardından, dört karar kriterinin önem ağırlıkları boyunca her bir kritere göre alternatiflerin bağlı öncelik değerlerini bulmak için, yukarıdaki bulanık iki taraflı matrislere önce yakınsama özvektör yaklaşımı ve normalizasyon prosedürü uygulanır. Böylece karar vericinin değerlendirdiği bulanık karar matrisi şöyle olur:

	<i>Kriterler</i>			
	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_4$
<i>Alternatifler</i>	$(0.09,0.22,0.69)$	$(0.08,0.23,0.61)$	$(0.11,0.32,0.73)$	$(0.08,0.23,0.61)$
$\hat{A}_1$	$(0.13,0.29,0.67)$	$(0.10,0.17,0.35)$	$(0.29,0.55,0.98)$	$(0.23,0.46,0.91)$
$\hat{A}_2$	$(0.10,0.22,0.52)$	$(0.24,0.47,0.90)$	$(0.09,0.16,0.34)$	$(0.09,0.16,0.36)$
$\hat{A}_3$	$(0.24,0.49,0.84)$	$(0.16,0.36,0.66)$	$(0.14,0.29,0.60)$	$(0.16,0.38,0.81)$

Üç bulanık alternatifin son bulanık öncelik puanları daha öncekilere benzer şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\hat{P}_1 &= (0.09,0.26,0.72) \times (0.12,0.28,0.66) + (0.08,0.22,0.60) \times (0.09,0.16,0.34) + \\
&(0.11,0.30,0.72) \times (0.28,0.54,0.97) + (0.08,0.22,0.60) \times (0.22,0.45,0.90) = (0.070,0.384,1.946)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde, diğer iki bulanık öncelikler de hesaplanır:

$$\hat{P}_2 = (0.045,0.245,1.376),$$

$$\hat{P}_3 = (0.063,0.371,1.914).$$

Daha önceki öncelik değerleri sıralandığı gibi, üç bulanık alternatifin sıralaması $\hat{A}_1 > \hat{A}_3 > \hat{A}_2$ şeklinde olur. Yani bulanık $\hat{A}_1$ alternatifi en iyi alternatife dönüşmüştür. Burada açıkça bulanık ağırlıklı toplam metodu kullanıldığında elde edilen sonuçla bir çelişki olduğu görülmektedir.

Aynı zamanda, Bulanık ağırlıklı toplam ve bulanık analitik hiyerarşi prosesi metotları tarafından elde edilen bulanık alternatiflerin tamamının sıralamasının değiştiği gözlenmektedir. Bu sıralama $\hat{A}_3 > \hat{A}_1 > \hat{A}_2$ sıralamasından $\hat{A}_1 > \hat{A}_3 > \hat{A}_2$ sıralamasına değişmiştir. Bu bağlamda, bu üç alternatifin her iki metoda göre sıralamalarına bakıldığında, bulanık ağırlıklı toplam metodu ile bulanık analitik hiyerarşi prosesi metodu arasında çelişki oluşmaktadır.

Bulanık ağırlıklı toplam metodundan ve diğer bulanık metotlardan elde edilen en iyi alternatif özdeş olup, kalan diğer alternatiflerin sıralamalarının değişmesi mümkündür. Düzeltilmiş AHP, Ağırlıklı Çarpım ve TOPSIS metotları yukarıda incelenmiş ve WSM bir norm olarak alındığında, çelişkili sonuçlar ürettiği gösterilmiştir.

3.7.2 İkinci Bulanık Değerlendirme Kriteri Kullanılarak Metotların Test Edilmesi

Bir önceki bölümde anlatıldığına benzer şekilde, ikinci bulanık değerlendirme kriterinin kullanımı gösterilecektir.

Aşağıdaki gibi dört kriterli ve üç alternatifli bir karar matrisine sahip olduğumuzu düşünelim. Fakat, aynı şekilde karar verici buradaki değerleri bilmemektedir.

	<i>Kriterler</i>			
	C_1	C_2	C_3	C_4
<i>Alternatifler</i>	(2.885	3.987	2.434	4.894)
A_1	8.283	7.851	1.064	4.554
A_2	5.284	8.626	4.161	3.750
A_3	1.358	2.905	8.501	4.888

Karar verici aşağıdaki karar matrisini bulanık üçgensel sayılarla üretmiştir:

	<i>Kriterler</i>			
	C_1	C_2	C_3	C_4
<i>Alternatifler</i>	(0.08,0.18,0.47)	(0.11,0.30,0.74)	(0.08,0.18,0.47)	(0.13,0.35,0.82)
A_1	(0.35,0.59,0.91)	(0.22,0.43,0.83)	(0.06,0.08,0.11)	(0.13,0.33,0.84)
A_2	(0.21,0.32,0.57)	(0.22,0.43,0.83)	(0.20,0.31,0.54)	(0.13,0.33,0.84)
A_3	(0.06,0.09,0.13)	(0.09,0.14,0.26)	(0.38,0.62,0.94)	(0.13,0.33,0.84)

Üç alternatifin bulanık öncelik puanları $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ ve $\hat{P}_3$ şöyledir:

$$\hat{P}_1 = (0.073, 0.361, 1.889),$$

$$\hat{P}_2 = (0.073, 0.3655, 1.824),$$

$$\hat{P}_3 = (0.061, 0.284, 1.388).$$

Görüldüğü gibi, en iyi olanı bulanık $\hat{A}_1$ alternatiftir.

Ardından, orjinal matristeki bulanık olmayan A_3 alternatifinin yerine kendisinden daha kötü bir A'_3 alternatifi yerleştirilir. Bu alternatifin sadece C_3 kriterine göre ağırlığını 8.501'den 1.064'e indirelim ve diğer veriler aynı kalsın. Böylece matris şöyle olur:

	<i>Kriterler</i>			
	C_1	C_2	C_3	C_4
<i>Alternatifler</i>	(2.885	3.987	2.434	4.894)
A_1	8.283	7.851	1.064	4.554
A_2	5.284	8.626	4.161	3.750
A'_3	1.358	2.905	1.064	4.888

Bulanık AHP metodunun istikrarını test etmek için, en iyi alternatifi bulmak üzere aynı prosedür uygulanır. Yeni bulanık karar matrisi şöyle olur.

	<i>Kriterler</i>			
	C_1	C_2	C_3	C_4
<i>Alternatifler</i>	(0.08,0.18,0.47)	(0.11,0.30,0.74)	(0.08,0.18,0.47)	(0.13,0.35,0.82)
A_1	(0.35,0.59,0.91)	(0.22,0.43,0.83)	(0.06,0.08,0.11)	(0.13,0.33,0.84)
A_2	(0.21,0.32,0.57)	(0.22,0.43,0.83)	(0.20,0.31,0.54)	(0.13,0.33,0.84)
A_3	(0.06,0.09,0.13)	(0.09,0.14,0.26)	(0.10,0.17,0.29)	(0.13,0.33,0.84)

Buradan üç alternatifin bulanık öncelik puanları $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ ve $\hat{P}_3$ bulunur:

$$\hat{P}_1 = (0.077, 0.377, 1.872),$$

$$\hat{P}_2 = (0.092, 0.418, 2.030),$$

$$\hat{P}_3 = (0.040, 0.205, 1.082).$$

Bu bulanık puanlardan en iyi bulanık alternatifin $\hat{A}_1$ alternatifi olduğu görülmektedir. Bu sonuç, daha önceki sonucumuzla çelişmektedir. Bu analiz, bulanık AHP kullanıldığında ve optimal olmayan bir alternatifin yerine kendisinden daha kötü bir alternatif yerleştirildiğinde çelişkiler oluşabileceğini göstermektedir. Bulanık düzeltilmiş AHP, WPM ve TOPSIS metodları benzer şekilde test edilip, çelişkiler olup olmadığı incelenebilir.

4. BULANIK HEDEF PROGRAMLAMA

Hedef programlama modelinde, amaç fonksiyonları, bunların erişim değerleri ve kısıtlayıcılar deterministik olarak ifade edilir. Hedeflere ilişkin erişim değerlerinin, hedeflerin tercih öncelikli sıralamasının ve ağırlıkların kesin olarak belirlenmesi oldukça zor bir iştir. Erişim değerleri, hedeflerin tercih öncelikli sıralaması ve görelî ağırlıklar çoğu kez karar vericinin subjektif yargılarına dayanarak belirlenir. Hedef programlama modelindeki subjektiflik olgusu, bulanık küme teorisiyle ele alınabilir. Bulanık küme teorisi hedef programlama modeline uygulandığı zaman, hedeflerin erişim düzeyleri ve tercih öncelikleri kesin olmayan ifadelerle (bulanık olarak) nitelenebilir. Bulanık küme teorisi, karar vericilerin subjektif yargılara dayanan hedefler için, “yaklaşık olarak...’e eşit” ve “... ’den oldukça küçük” gibi bir dilin doğal yapısına göre ifade edilebilen erişim düzeylerinin tanımlanmasına izin verir. Hedeflere ilişkin bu tür tanımlamalar, bulanık kümelerde üyelik fonksiyonları ile ele alınır. Bu sayede, bulanık hedef programlama modelinin bir optimizasyon düşüncesinden daha çok bir doyum düşüncesine dayanma özelliği ön plana çıkarılmış olur (Özkan, 2003).

Bulanık hedef programlama, bulanık çok amaçlı karar verme yöntemlerinden sadece biridir. Bunun dışında; fiziksel lineer programlama, etkileşimli çok amaçlı karar verme (STEP Metodu-STEM), İki seviyeli doğrusal programlama ve interaktif iki seviyeli doğrusal programlama vs. Gibi pek çok yöntem vardır. Bu yöntemlerin tamamı her ne kadar aynı mantıktan yola çıkarak oluşturulsalar da, uygulamada farklılıklar gösterip farklı sonuçlar elde edilmesi de mümkündür (Ehrgott, Gandibleux, 2002).

Hedeflerin öncelik yapısına göre, bulanık hedef programlama modeli iki şekilde ele alınabilir. Bunlardan ilki bütün hedeflerin aynı tercih önceliğinde yer aldığı bulanık hedef programlama modelidir. Bu modelde, bütün hedefleri eşanlı olarak doyuran bir çözüm belirlenir. İkincisi ise, hedeflerin farklı tercih önceliklerinde yer alabildiği tercih öncelikli bulanık hedef programlama modelidir. Bu modelde, karar vericinin tercih özelliğini dikkate alan bir çözüm belirlenmeye çalışılır.

Hedefler için belirlenen erişim düzeylerinin bulanık olduğu varsayımı ile, genelleştirilmiş bir bulanık hedef programlama modeli aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\left. \begin{array}{l} (Ax)_i \cong b_i ; \quad i = 1, 2, K, m_1 \\ (Ax)_i \lesseqgtr b_i ; \quad i = m_1 + 1, K, m_2 \\ (Ax)_i \gtrless b_i ; \quad i = m_2 + 1, K, m_3 \end{array} \right\} \text{Bulanık Hedefler} \quad (4.1)$$

$$(Ax)_i \{=, \leq, \geq\} b_i ; i = 1, 2, K, p \} \quad \text{Bulanık Olmayan Kısıtlayıcılar}$$

$$x_j \geq 0 \quad ; j = 1, 2, K, n$$

Burada, $\cong$, $\lesseqgtr$, $\gtrless$ simgeleri sırasıyla $=$, $\leq$, $\geq$ simgelerinin bulanıklaştırılmış halidir. Bu modelde i'ninci hedef için karar vericinin belirlediği bulanık erişim düzeyi b_i ile gösterilmiştir.

Geleneksel küme teorisi ile bulanık küme teorisi arasındaki en temel fark üyelik fonksiyonlarıdır. Geleneksel bir küme sadece bir üyelik fonksiyonu ile nitelenebilirken, bulanık bir küme teorik olarak sonsuz sayıda üyelik fonksiyonuyla nitelenebilir. Bulanık kümelerle ilişkin üyelik fonksiyonları kesikli ve sürekli, parametrik ve parametrik olmayan, simetrik ve simetrik olmayan şekilde sınıflandırılabilir. Bulanık hedefler literatürde üçgensel, ikizkenar, parçalı doğrusal, iç bükey biçimli parçalı doğrusal, yarı iç bükey biçimli parçalı doğrusal, S biçimli parçalı doğrusal ve dış bükey biçimli parçalı doğrusal şeklinde farklı özellikteki üyelik fonksiyonları ile nitelenmiştir. Söz konusu üyelik fonksiyonları genellikle karar verici ile görüşülerek oluşturulur. Bulanık bir hedefin üyelik fonksiyonu, kavramların uygulamadaki anlamına dayanarak sezgisel olarak da oluşturulabilir. Ayrıca, üyelik fonksiyonları bulanık küme teorisinin esasını oluşturduğu için, üyelik fonksiyonları belirlendikten sonra bulanık küme teorisinde bulanık olan herhangi bir şey kalmadığı söylenir (Özkan, 2003).

Bulanık hedef programlama için geliştirilen çözüm yaklaşımlarının bir çoğunda bulanık hedefler işlemsel kolaylık sağlaması nedeniyle Zimmermann tipi üyelik fonksiyonlarıyla nitelenmiştir. Bulanık hedefler için Zimmermann tipi üyelik fonksiyonları kullanılır.

$$(Ax)_i \cong b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \leq b_i - d_i \text{ ise} \\ 1 - [(b_i - (Ax)_i)/d_i] & ; b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i \text{ ise} \\ 1 - [(Ax)_i - b_i]/d_i & ; b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \text{ ise} \\ 0 & ; (Ax)_i \geq b_i + d_i \text{ ise} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$(Ax)_i \lesseqgtr b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \geq b_i + d_i \text{ ise} \\ 1 - [(b_i - (Ax)_i)/d_i] & ; b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \text{ ise} \\ 1 & ; (Ax)_i \leq b_i \text{ ise} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$(Ax)_i \gtrless b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \leq b_i - d_i \text{ ise} \\ 1 - [(Ax)_i - b_i]/d_i & ; b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i \text{ ise} \\ 1 & ; (Ax)_i \geq b_i \text{ ise} \end{cases} \quad (4.4)$$

Burada i'ninci bulanık hedef için karar vericinin belirlediği erişim değerleri b_i ile, bu erişim değerinden oluşacak sapma için kabul edilebilir tolerans miktarı ise d_i ile gösterilmiştir. Bu bölümde bulanık hedef programlama modeli için geliştirilen yaklaşımlar ele alınacaktır.

4.1 Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Narasimhan Yaklaşımı

Bulanık erişim değerli hedef programlama modeli ilk olarak Narasimhan tarafından ele alınmıştır. Narasimhan'ın yaklaşımı aşağıda verilen kısıtlayıcı kümesinden çözüm vektörü x 'in belirlenmesi şeklinde ifade edilir.

$$(Ax)_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, K, m_1 \quad (4.5)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, K, n$$

Narasimhan bulanık hedefleri bulanık eşitlikler olarak kabul ederek onları üçgensel üyelik fonksiyonları ile nitelemiştir. Üçgensel üyelik fonksiyonu eşitlik (4.2)'de verildiği gibidir. Zimmermann'ın bulanık doğrusal programlama modeli için geliştirdiği çözüm yaklaşımından esinlenen Narasimhan, bulanık hedef programlama modelinin çözümünü bulanık karar kümesi kavramına dayanarak belirlemeye çalışmıştır. Bu yaklaşım, bulanık karar kümesinin en yüksek üyelik dereceli elemanının belirlenmesini, bir anlamda da bulanık hedeflerin üyelik derecelerinin artırılmasını amaçlar. Bunun için, aşağıda verilen problemin çözümü gerekir (Özkan, 2003).

$$\mu_D(x^M) = \max_{x \geq 0} (\min [\mu_i(x)]) \quad (4.6)$$

Bu problemi çözebilmek için bulanık hedefleri niteleyen üyelik fonksiyonlarını eşitlik (4.6)'da verilmektedir. Fakat bu durumda bir zorlukla karşılaşılır. Bu zorluk, i'ninci üyelik fonksiyonunun doğrusal iki fonksiyonla tanımlanmasından kaynaklanır. Üyelik fonksiyonlarını üyelik derecesinin 0'dan 1'e doğru arttığı parça ve 1'den 0'a doğru azaldığı parça olarak ele alırsak, söz konusu zorluğun üstesinden gelebiliriz. Böylece bulanık karar kümesinin en yüksek üyelik dereceli elemanının belirlenmesi problemini, iki alt probleme dönüştürmüş oluruz. Diğer bir ifadeyle, x^M vektörünün $[b_i - d_i, b_i]$ ve $[b_i, b_i + d_i]$ aralıklarının hangisinde yer aldığını belirlemeye çalışırız. Bu düşünceden hareketle, i'ninci bulanık hedef için aşağıda verilen alt problemler oluşturulur (Özkan, 2003).

$$\mu_{\tilde{D}}(x^M) = \max_{x \geq 0} (\min [\mu_i(x)]) = \left\{ \begin{array}{l} \text{1.Problem} \\ \max \left\{ \min_{x \geq 0} \left[1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i} \right] \right\} \\ \text{kısıtlayıcılar} \\ b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i \\ i = 1, 2, K, m_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{2.Problem} \\ \max \left\{ \min_{x \geq 0} \left[1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i} \right] \right\} \\ \text{kısıtlayıcılar} \\ b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \\ i = 1, 2, K, m_1 \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

Bulanık hedeflere erişme derecesini gösteren λ değişkeni tanımlanırsa, bu problemler doğrusal programlama problemleri olarak ifade edilir.

$$\mu_{\tilde{D}}(x^M) = \max_{x \geq 0} (\min [\mu_i(x)]) = \left\{ \begin{array}{l} \text{1.Problem} \\ \max \lambda \\ \text{kısıtlayıcılar} \\ 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i} \geq \lambda \\ b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i \\ x \geq 0 \\ \lambda \in [0,1] \\ i = 1, 2, K, m_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{2.Problem} \\ \max \lambda \\ \text{kısıtlayıcılar} \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i} \geq \lambda \\ b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \\ x \geq 0 \\ \lambda \in [0,1] \\ i = 1, 2, K, m_1 \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

Burada x^M vektörlü herhangi bir bulanık hedef için $b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i$ eşitsizliğini doyururken, diğer bir bulanık hedef için $b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i$ eşitsizliğini doyurabilir. Bu nedenle, söz konusu alt problemler aşağıdaki şekilde bir araya getirilir (Özkan, 2003).

$\max \lambda$

Kısıtlayıcılar:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i} \geq \lambda \\ b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i \end{array} \right\} \text{Bazı } i\text{'ler için}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i} \geq \lambda \\ b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \end{array} \right\} \text{Diğer } i\text{'ler için} \quad (4.9)$$

$x \geq 0$

$\lambda \in [0,1]$

Narasimhan yaklaşımında, m_1 adet bulanık hedefli bir hedef programlama modeli için, 2^{m_1} adet alt problem oluşturulur. Bir doğrusal programlama dizisinin çözümünden oluşan

Narasimhan yaklaşımında, oluşturulan alt problemlerden en yüksek λ değerini veren problemin çözümü, bulanık hedef programlama modelinin çözümü olarak kabul edilir (Özkan, 2003).

Örnek: Bir konfeksiyon mağazasının üç bölümünde gömlek ve tişört üretilmektedir. Bir gömleğin satışından elde edilen kâr ise 15 milyon TL.'dir. Mağaza yöneticisi, Pazar payının korunması için "yaklaşık olarak 190 adet gömlek" satılması gerektiğini düşünmektedir. Ayrıca, yönetici ocak ayında "15 milyar TL. Civarında bir kâr elde etmek istemektedir. Üretim bölümlerinin ocak ayı çalışma kapasiteleri ile gömlek ve tişört üretimi için istenen birim çalışma zamanları aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4-1: Narasimhan Yaklaşımı için verilen örnek verileri gösteren tablo.

Bölümler	İstenen birim saat		Ocak ayı elverişli çalışma saati
	Gömlek	Tişört	
Kesim	4	2	1600
Dikim	2.5	1	1200
Ambalaj	4.5	1.5	1500

Bu bilgiler ışığında, konfeksiyon mağazasının ocak ayına ilişkin üretim planını ve elde edeceği kârı belirlemeye çalışalım. Üretilcek gömlek miktarını x_1 değişkeni ile, üretilcek tişört miktarını da x_2 ile gösterecek olursak, bu problemi bir bulanık hedef programlama modeli olarak ifade edebilir hale geliriz.

$$40x_1 + 15x_2 \cong 15000 \quad (\text{Kâr Hedefi 1 000 000 TL.})$$

$$x_1 \cong 190 \quad (\text{Satış Hedefi})$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \quad (\text{Kesim Kısıtlayıcısı})$$

$$2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \quad (\text{Dikim Kısıtlayıcısı})$$

$$4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \quad (\text{Ambalaj Kısıtlayıcısı})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Kâr ve satış hedeflerine gösterilen tolerans miktarlarının mağaza yöneticisi tarafından sırasıyla 3 milyar TL. ve 20 adet gömlek olarak belirlendiğini kabul edelim. Bu durumda,

bulanık hedeflere ilişkin üyelik fonksiyonlarını (4.2) denkleminde faydalanarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\mu_{kar}(x) = \begin{cases} 0 & ; (40x_1 - 15x_2) \leq 12000 \text{ ise} \\ 1 - \frac{1500 - (40x_1 - 15x_2)}{3000} & ; 12000 \leq (40x_1 - 15x_2) \leq 15000 \text{ ise} \\ 1 - \frac{(40x_1 - 15x_2) - 1500}{3000} & ; 15000 \leq (40x_1 - 15x_2) \leq 18000 \text{ ise} \\ 0 & ; (40x_1 - 15x_2) \geq 18000 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\mu_{sana}(x) = \begin{cases} 0 & ; x_1 \leq 170 \text{ ise} \\ 1 - \frac{190 - x_1}{20} & ; 170 \leq x_1 \leq 190 \text{ ise} \\ 1 - \frac{x_1 - 190}{20} & ; 190 \leq x_1 \leq 210 \text{ ise} \\ 0 & ; x_1 \geq 210 \text{ ise} \end{cases}$$

Bulanık karar kümesinin en yüksek üyelik dereceli elemanını belirlemek için, bulanık hedeflerin tanımlı oldukları $[b_i - d_i, b_i]$ ve $[b_i, b_i + d_i]$ aralıklarını dikkate almanız gerekir. Yukarıda verilen üyelik fonksiyonlarını incelersek, kâr hedefinin $[12000, 15000]$ ve $[15000, 18000]$ aralıklarında, satış hedefinin ise $[170, 190]$ ve $[190, 210]$ aralıklarında tanımlı olduğunu görürüz. x^M vektörünün bu aralıkların hangilerinde yer aldığını bulabilmek için dört adet ($2^m = 2^2 = 4$) doğrusal programlama problemini çözmemiz gerekir. Çünkü, modelde kâr ve satış şeklinde iki bulanık hedef vardır. Söz konusu doğrusal programlama problemlerin WINQSB programıyla elde edilen çözüm değerleri aşağıda verilmektedir.

- $(40x_1 + 15x_2) \in [12000, 15000]$ ve $x_1 \in [170, 190]$ aralıkları için oluşturulan model:

$$\left. \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\ 1 - \frac{15000 - (40x_1 + 15x_2)}{3000} \geq \lambda \\ 12000 \leq (40x_1 + 15x_2) \leq 15000 \\ 1 - \frac{190 - x_1}{20} \geq \lambda \\ 170 \leq x_1 \leq 190 \\ \lambda \in [0, 1] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 - 3000\lambda \leq 1200 \\ (40x_1 + 15x_2) \geq 12000 \\ (40x_1 + 15x_2) \leq 15000 \\ x_1 + 20\lambda \geq 190 \\ x_1 \geq 170 \\ x_1 \leq 190 \\ \lambda \leq 1 \\ x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimal Çözüm} \\ x_1 = 190 \\ x_2 = 420 \\ \lambda = 0.6333 \end{array} \right.$$

- $(40x_1 + 15x_2) \in [12000, 15000]$ ve $x_1 \in [190, 210]$ aralıkları için oluşturulan model:

$$\left. \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\ 1 - \frac{15000 - (40x_1 + 15x_2)}{3000} \geq \lambda \\ 12000 \leq (40x_1 + 15x_2) \leq 15000 \\ 1 - \frac{[x_1 - 190]}{20} \geq \lambda \\ 190 \leq x_1 \leq 210 \\ \lambda \in [0, 1] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 - 3000\lambda \leq 1200 \\ (40x_1 + 15x_2) \geq 12000 \\ (40x_1 + 15x_2) \leq 15000 \\ x_1 - 20\lambda \geq 210 \\ x_1 \geq 190 \\ x_1 \leq 210 \\ \lambda \leq 1 \\ x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{Optimal Çözüm} \\ x_1 = 196.875 \\ x_2 = 406.25 \\ \lambda = 0.6563 \end{cases}$$

- $(40x_1 + 15x_2) \in [15000, 18000]$ ve $x_1 \in [170, 190]$ aralıkları için oluşturulan model:

$$\left. \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\ 1 - \frac{(40x_1 + 15x_2) - 15000}{3000} \geq \lambda \\ 15000 \leq (40x_1 + 15x_2) \leq 18000 \\ 1 - \frac{[190 - x_1]}{20} \geq \lambda \\ 170 \leq x_1 \leq 190 \\ \lambda \in [0, 1] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 + 3000\lambda \leq 1200 \\ (40x_1 + 15x_2) \geq 15000 \\ (40x_1 + 15x_2) \leq 18000 \\ x_1 + 20\lambda \geq 170 \\ x_1 \geq 170 \\ x_1 \leq 190 \\ \lambda \leq 1 \\ x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{uygun} \\ \text{çözüm} \\ \text{yoktur} \end{cases}$$

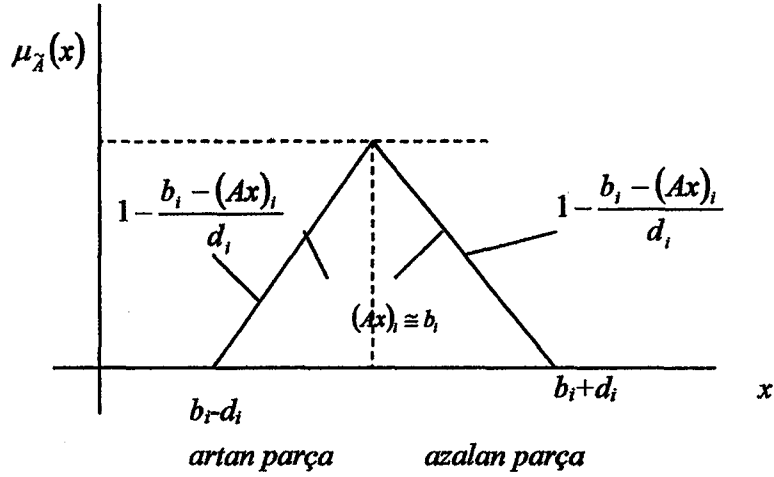
- $(40x_1 + 15x_2) \in [15000, 18000]$ ve $x_1 \in [190, 210]$ aralıkları için oluşturulan model:

$$\left. \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\ 1 - \frac{(40x_1 + 15x_2) - 15000}{3000} \geq \lambda \\ 15000 \leq (40x_1 + 15x_2) \leq 18000 \\ 1 - \frac{[x_1 - 190]}{20} \geq \lambda \\ 190 \leq x_1 \leq 210 \\ \lambda \in [0, 1] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 - 3000\lambda \leq 1200 \\ (40x_1 + 15x_2) \geq 15000 \\ (40x_1 + 15x_2) \leq 18000 \\ x_1 - 20\lambda \geq 210 \\ x_1 \geq 190 \\ x_1 \leq 210 \\ \lambda \leq 1 \\ x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{uygun} \\ \text{çözüm} \\ \text{yoktur} \end{cases}$$

Narasimhan yaklaşımında, oluşturulan alt problemlerden en yüksek λ değerini veren problemin çözümü, bulanık hedef programlama modelinin çözümü olarak kabul edilmektedir. Bu nedenle, bulanık hedef programlama probleminizin optimal çözümü $\lambda = 0.6563$ düzeyinde gerçekleşir. Diğer bir ifadeyle, karar vericinin belirlediği bulanık hedeflere 0.6563 düzeyinde ulaşılır. $\lambda = 0.6563$ iken $x_1 = 196.875$ ve $x_2 = 406.25$ olarak bulunmuştur. Bununla birlikte, gömlek ve tişörtün üretim miktarlarının tam sayı olma zorunluluğu vardır. Bu nedenle, çözüm değerlerini yuvarlayarak ocak ayında 197 adet gömlek ve 406 adet tişört üretilmesi gerektiğini söyleyebiliriz. Bu durumda, ocak ayında elde edilen kâr da 13.970.000.000 TL. $(40x_1 + 15x_2 = (40 \times 197) + (15 \times 406) = 13970)$ dir.

4.2 Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Hannan Yaklaşımı

Bulanık hedeflerin simetrik üçgensel üyelik fonksiyonlarıyla nitelenmesi halinde, Narasimhan yaklaşımına özdeş sonuçlar veren bir çözüm yöntemi Hannan tarafından geliştirilmiştir. Hannan, $\lambda^* = \max \lambda; j=1,2,K, 2^m$ şeklindeki bir teoremlerle, bulanık hedef programlama modelini tek bir doğrusal programlama modeli olarak formüle etmeyi başarmıştır. Burada λ_j, λ^* ise bulanık karar kümesinin en yüksek üyelik dereceli elemanını göstermektedir. Bu yaklaşımı açıklayabilmek için, üçgensel bir üyelik fonksiyonunu grafik olarak gösterelim.



Şekil 5: Üçgensel Üyelik Fonksiyonu.

Söz konusu üyelik fonksiyonunun $[b_i - d_i, b_i]$ aralığında artan bir fonksiyon olduğunu, $[b_i, b_i + d_i]$ aralığında ise azalan bir fonksiyon olduğunu Şekil 5'den görebiliriz. Buna göre, bulanık hedef programlama modelini çözmek için Narasimhan yaklaşımında oluşturulan alt problemleri aşağıdaki gibi ifade edebiliriz (Özkan, 2003).

$$\max \lambda$$

Kısıtlayıcılar:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i} \geq \lambda \\ b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i \end{array} \right\} \text{ artan parça}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i} \geq \lambda \\ b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \end{array} \right\} \text{ azalan parça} \quad (4.10)$$

$$x \geq 0$$

$$\lambda \in [0,1]$$

Şimdi, bu modelin artan parça (kısım) ismiyle nitelediğimiz kısıtlayıcılarını ele alalım. Burada, $(Ax)_i \leq b_i$ ifadesini d_i ile gösterilen tolerans miktarına böldüğümüz zaman,

$\frac{(Ax)_i}{d_i} \leq \frac{b_i}{d_i}$ ifadesini elde ederiz. Bu eşitsizliğin sol tarafına pozitif sapma değişkenini

gösteren p_i 'yi eklersek $\frac{(Ax)_i}{d_i} + p_i = \frac{b_i}{d_i}$ eşitliğine ulaşırız. Bu eşitliği de p_i değişkenine

göre düzenlersek $p_i = \frac{b_i}{d_i} - \frac{(Ax)_i}{d_i}$ ifadesini oluşturabiliriz. Pozitif sapma değişkenini

$1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i} \geq \lambda$ eşitsizliğinde yerine koyduğumuz zaman, $\lambda + p_i \leq 1$ kısıtlayıcısını elde

ederiz. Yukarıda verilen modelin azalan parça (kısım) ismiyle nitelediğimiz kısıtlayıcıları için de benzer işlemleri yapabiliriz. Burada, $b_i \leq (Ax)_i$ veya $(Ax)_i \geq b_i$ ifadesini tolerans miktarı d_i ' ye böldüğümüz zaman, $(Ax)_i/d_i \geq b_i/d_i$ ifadesini elde ederiz. Bu eşitsizliğin sol

tarafından negatif sapma değişkeni olan n_i ' yi çıkardığımız zaman, $\frac{(Ax)_i}{d_i} - n_i \geq \frac{b_i}{d_i}$ eşitliğine

ulaşırız. Bu eşitliği de negatif sapma değişkenine göre düzenlersek, $n_i = \frac{(Ax)_i}{d_i} - \frac{b_i}{d_i}$ ifadesini

oluşturabiliriz. Negatif sapma değişkenini $1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i} \geq \lambda$ eşitsizliğinde yerine

koyduğumuz zaman, $\lambda + n_i \leq 1$ kısıtlayıcısını elde ederiz. $(Ax)_i \leq b_i$ ve $(Ax)_i \geq b_i$,

eşitsizlikleri için yapılan bu analizin $(Ax)_i = b_i$ durumuna genişletilmesi gerekir. Hannan,

bulanık bir eşitlik için belirlenen erişim düzeyine ne oranda ulaşıldığını belirlemek için

$\lambda + p_i \leq 1$ ve $\lambda + n_i \leq 1$ kısıtlayıcılarını $\lambda + n_i + p_i \leq 1$ şeklinde bir araya getirmiştir. Bu

düşünceden hareketle, (4.9) denkleminde verilen bulanık hedef programlama modeli tek bir doğrusal programlama problemi olarak aşağıda verildiği gibi ifade edilir (Özkan, 2003).

$\max \lambda$

Kısıtlayıcılar:

$$\frac{(Ax)_i}{d_i} + n_i - p_i \geq \frac{b_i}{d_i}$$

$$\lambda + n_i + p_i \leq 1 \quad (4.11)$$

$$n_i \times p_i = 0$$

$$x_j, \lambda, n_i, p_i \geq 0 \quad i = 1, 2, K, m \quad j = 1, 2, K, n$$

Burada, λ değişkeni, bulanık hedeflere ulaşma derecesini göstermektedir. Bulanık bir hedefin tamamen doyurulması için $\lambda = 1$ veya $n_i = p_i = 0$ koşulunun sağlanması gerekir. Hannan'ın önerdiği bu yöntem, Narasimhan yöntemini açıklamak amacıyla kullanılan sayısal örnekler aşağıda açıklanmaktadır (Özkan, 2003).

$$40x_1 + 15x_2 \cong 15000 \quad (\text{Kâr Hedefi 1 000 000 TL.})$$

$$x_1 \cong 190 \quad (\text{Satış Hedefi})$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \quad (\text{Kesim Kısıtlayıcısı})$$

$$2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \quad (\text{Dikim Kısıtlayıcısı})$$

$$4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \quad (\text{Ambalaj Kısıtlayıcısı})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Bu modelde, kâr ve satış hedefinin erişim düzeylerinin sırasıyla $b_1=15000$ ve $b_2=190$ olarak, tolerans miktarlarının ise $d_1=3000$ ve $d_2=20$ olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda, Hannan yaklaşımı ile oluşturulan doğrusal programlama problemini ve bu problemin optimal çözüm değerlerini belirleyebiliriz. Şöyle ki;

$$\left. \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\ \frac{(40x_1 + 15x_2)}{3000} + n_1 - p_1 \geq \frac{15000}{3000} \\ \frac{x_1}{20} + n_2 - p_2 = \frac{190}{20} \\ \lambda + n_1 + p_1 \leq 1 \\ \lambda + n_2 + p_2 \leq 1 \\ n_1 \times p_1 = 0 \\ n_2 \times p_2 = 0 \\ x_1, x_2, n_1, n_2, p_1, p_2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 + 3000n_1 - 3000p_1 = 15000 \\ x_1 + 20n_2 - 20p_2 = 190 \\ \lambda + n_1 + p_1 \leq 1 \\ \lambda + n_2 + p_2 \leq 1 \\ n_1 \times p_1 = 0 \\ n_2 \times p_2 = 0 \\ x_1, x_2, n_1, n_2, p_1, p_2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimal Çözüm} \\ x_1 = 196.875 \\ x_2 = 406.250 \\ \lambda = 0.6563 \\ n_1 = 0.3438 \\ n_2 = 0 \\ p_1 = 0 \\ p_2 = 0.3438 \end{array} \right.$$

Buradan, Hannan yaklaşımı ile belirlenen çözümün Narasimhan yaklaşımı ile belirlenen çözüme özdeş olduğu görülebilir (Özkan, 2003).

4.3 Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Yang, Ignizio ve Kim Yaklaşımı

Herhangi bir eşitsizlik olarak ifade edilebildiği için, $(Ax)_i \cong b_i$ ifadesi bulanık eşitsizlikler olarak ele alınabilir. Bu durumda, (4.5) denkleminde verilen bulanık hedef programlama problemini,

$$\left\{ \begin{array}{l} (Ax)_i \equiv b_i \\ x_j \geq 0 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} (Ax)_i \lesseqgtr b_i \\ (Ax)_i \gtrless b_i \\ x_j \geq 0 \end{array} \right\} \quad i=1,2,K,m_1; j=1,2,K,n \quad (4.12)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Burada, bulanık eşitsizlikleri üçgensel bir üyelik fonksiyonuna dayanarak aşağıda verilen üyelik fonksiyonları ile niteleyebiliriz (Özkan, 2003).

$$(Ax)_i \lesseqgtr b_i \quad (i=1,2,K,m_1) \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad (Ax)_i \geq b_i + d_i \text{ ise} \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i} & ; \quad b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \text{ ise} \\ 1 & ; \quad (Ax)_i = b_i \text{ ise} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$(Ax)_i \gtrless b_i \quad (i=1,2,K,m_1) \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad (Ax)_i \geq b_i - d_i \text{ ise} \\ 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i} & ; \quad b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i \text{ ise} \\ 1 & ; \quad (Ax)_i = b_i \text{ ise} \end{cases} \quad (4.14)$$

Bulanık eşitliklerin üçgensel üyelik fonksiyonlarıyla nitelenmesi halinde, bulanık bir hedef programlama problemi bulanık bir doğrusal programlama problemi olarak çözülebilir. Bulanık hedeflerin yukarıda verilen üyelik fonksiyonlarıyla nitelenmesi halinde, Zimmermann'ın bulanık doğrusal programlama modeli için sunduğu yönteminin, Narasimhan ve Hannan yaklaşımlarına özdeş sonuçlar verdiği Yang, Ignizio ve Kim tarafından ispatlanmıştır. Buna göre; Bulanık karar kümesinin en yüksek üyelik dereceli elemanı, aşağıda verilen doğrusal programlama problemini çözerek belirlenebilir (Özkan, 2003).

max λ

Kısıtlayıcılar:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i} \geq \lambda \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i} \geq \lambda \end{array} \right\} \quad i=1,2,K,m_1 \quad (4.15)$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2,K,n$$

$$\lambda \in [0,1]$$

Burada, $(Ax)_i \equiv b_i$ ifadesinin $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ ve $(Ax)_i \gtrless b_i$ şeklinde iki bulanık eşitsizliğe dönüştürüldüğü unutulmamalıdır. Bu yaklaşımda, üçgensel üyelik fonksiyonlarının tanımı olduğu $[b_i - d_i, b_i]$ ve $[b_i, b_i + d_i]$ aralıklarının birbirine eşit büyüklükte olması gerekmez.

Diğer bir ifadeyle, $(Ax)_i \cong b_i$ ifadesinin simetrik olmayan bir üçgensel üyelik fonksiyonları ile nitelenmesi mümkündür. Simetrik olmayan üçgensel bir üyelik fonksiyonu aşağıda verildiği gibi tanımlanabilir.

$$(Ax)_{(i=1,2,K,m_1)} \cong b_i \Rightarrow \mu_1(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \leq b_i - d_i \quad \text{ise} \\ 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_{i_1}} & ; b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i \quad \text{ise} \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_{i_2}} & ; b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \quad \text{ise} \\ 0 & ; (Ax)_i \geq b_i + d_i \quad \text{ise} \end{cases} \quad (4.16)$$

Bu durumda, aşağıda verilen doğrusal programlama problemine ulaşırız.

$$\max \lambda$$

Kısıtlayıcılar:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_{i_1}} &\geq \lambda \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_{i_2}} &\geq \lambda \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, K, m_1 \quad (4.17)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, K, n$$

$$\lambda \in [0,1]$$

Daha önceki iki yöntemin açıklanması için kullanılan sayısal örneği bu yöntem için de kullanalım.

$$\left. \begin{aligned} 40x_1 + 15x_2 &\cong 15000 \\ x_1 &\cong 190 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 &\leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 &\leq 1500 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \equiv \left\{ \begin{aligned} 40x_1 + 15x_2 &\lesseqgtr 15000 \\ 40x_1 + 15x_2 &\gtrsim 15000 \\ x_1 &\lesseqgtr 190 \\ x_1 &\gtrsim 190 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 1600 \\ 2.5x_1 + x_2 &\leq 1200 \\ 4.5x_1 + 1.5x_2 &\leq 1500 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right.$$

Burada, kâr ve satış hedefine tanınan tolerans miktarlarının sırasıyla 3000 ve 20 olarak belirlenmiştir. Bu durumda, Yang, Ignizio ve Kim yaklaşımı ile oluşturulan doğrusal programlama problemi aşağıda verildiği gibidir (Özkan, 2003).

$$\left. \begin{array}{l}
 \max \lambda \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\
 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\
 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\
 1 - \frac{(40x_1 + 15x_2) - 15000}{3000} \geq \lambda \\
 1 - \frac{15000 - (40x_1 + 15x_2)}{3000} \leq \lambda \\
 1 - \frac{[x_1 - 190]}{20} \geq \lambda \\
 1 - \frac{[190 - x_1]}{20} \geq \lambda \\
 \lambda \in [0,1] \\
 x_1, x_2 \geq 0
 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l}
 \max \lambda \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 4x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\
 2.5x_1 + x_2 \leq 1200 \\
 4.5x_1 + 1.5x_2 \leq 1500 \\
 (40x_1 + 15x_2) - 3000\lambda \leq 12000 \\
 (40x_1 + 15x_2) + 3000\lambda \geq 18000 \\
 x_1 - 20\lambda \geq 170 \\
 x_1 + 20\lambda \geq 210 \\
 \lambda \leq 1 \\
 x_1, x_2, \lambda \geq 0
 \end{array} \right.$$

Bu problemin optimal çözüm değerlerini Narasimhan ve Hannan yaklaşımıyla elde edilen çözüm değerlerine denk bir şekilde $x_1 = 196.875$, $x_2 = 406.25$ ve $\lambda = 0.6563$ olarak buluruz.

4.4 Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Tiwari, Dharmar ve Rao Yaklaşımı

Bütün hedeflerin aynı tercih önceliğinde yer aldığını bulanık hedef programlama problemleri için Narasimhan'ın sunduğu çözüm yöntemi, Tiwari, Dharmar ve Rao tarafından tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemlerine uygulanmıştır. Tiwari, Dharmar ve Rao yaklaşımı, karar vericinin belirlediği her bir tercih önceliği için Narasimhan yaklaşımının ardışık programlamayla birleştirilmesine dayanır. Bu yaklaşımda, T_i tercih önceliği için en yüksek λ değerini veren alt problemin çözümü, T_{i+1} tercih önceliğinde bir kısıtlayıcı olarak yer alır. En düşük tercih önceliğinde yer alan hedefler doyurulana kadar süreç tekrarlanır. En düşük tercih önceliğinde en yüksek λ değerini veren alt problemin çözümü, tercih öncelikli bulanık hedef programlama probleminin çözümü olarak kabul edilir. Bu yaklaşımda, bu yaklaşımda, karar vericinin hedeflere ilişkin tercih önceliklerini belirleyebileceği kabul edilir. Hedeflerin en önemliden daha az önemliye doğru sıralandığı kabul edilse bile, elde edilen çözümün hedeflerin öncelik yapısına bağlı olarak değişebileceği göz önünde tutulmalıdır (Özkan, 2003).

Şimdi, buraya kadar ifade ettiğimiz kuramsal yaklaşımı bir örnek ile açıklayalım.

Bir imalatçı iki tip ürün üretmektedir. Ürün 1'in birim karı 80\$ iken, Ürün 2'nin 40\$ dır. Şirket yöneticisi "yaklaşık olarak 630\$" kâr elde etmek istemektedir. Yönetici, kâr hedefine ulaşmak için Ürün 1 ve Ürün 2'den sırasıyla "yaklaşık olarak 6 birim" ve "yaklaşık olarak 4 birim" üretilmesi gerektiğini düşünmektedir. Bu bilgiler ışığında, Ürün 1 ve Ürün 2'den ne kadar üretilmesi gerektiğini ve imalatçının elde edeceği kârı belirlemeye çalışalım. Üretilcek Ürün 1 miktarını x_1 değişkeni ile, üretilcek Ürün 2 miktarını da x_2 değişkeni ile gösterirsek, bu problemi bulanık bir hedef programlama problemi olarak ifade edebiliriz.

$$80x_1 + 40x_2 \cong 630 \quad (\text{Kâr hedefi})$$

$$x_1 \cong 6 \quad (\text{Ürün 1 Satış Hedefi})$$

$$x_2 \cong 4 \quad (\text{Ürün 2 Satış Hedefi})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Bulanık hedeflerin aşağıda verilen üyelik fonksiyonlarıyla nitelendirildiğini kabul edelim.

$$\mu_{kar}(x) = \begin{cases} 0 & ; (80x_1 + 40x_2) \leq 620 \text{ ise} \\ 1 - \frac{630 - (80x_1 + 40x_2)}{10} & ; 620 \leq (80x_1 + 40x_2) \leq 630 \text{ ise} \\ 1 - \frac{(80x_1 + 40x_2) - 630}{10} & ; 630 \leq (80x_1 + 40x_2) \leq 640 \text{ is} \\ 0 & ; (80x_1 + 40x_2) \geq 640 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\mu_{ürün1satış}(x) = \begin{cases} 0 & ; x_1 \leq 4 \text{ ise} \\ 1 - \frac{6 - x_1}{2} & ; 4 \leq x_1 \leq 6 \text{ ise} \\ 1 - \frac{x_1 - 6}{2} & ; 6 \leq x_1 \leq 8 \text{ ise} \\ 0 & ; x_1 \geq 8 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\mu_{ürün2satış}(x) = \begin{cases} 0 & ; x_2 \leq 2 \text{ ise} \\ 1 - \frac{4 - x_2}{2} & ; 2 \leq x_2 \leq 4 \text{ ise} \\ 1 - \frac{x_2 - 4}{2} & ; 4 \leq x_2 \leq 6 \text{ ise} \\ 0 & ; x_2 \geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$

Karar vericinin ilk olarak kâr hedefine, sonra da satış hedeflerine ulaşmak istediğini düşünelim. Bu durumda, birinci tercih önceliğinde çözülmesi gereken bulanık hedef programlama problemini,

$$80x_1 + 40x_2 \cong 630 \quad (\text{Kâr hedefi})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu problemin çözüm değerlerini belirlemek için iki adet ($2^m = 2^1 = 2$) alt problemleri oluşturmamız ve bu problemlerin çözüm değerlerini belirlememiz gerekir. Çünkü, birinci tercih önceliğinde bir adet bulanık hedef yer almaktadır. Kâr hedefi için tanımlanan üyelik fonksiyonuna göre, birinci tercih önceliğinde çözülmesi gereken alt problemler ve bu problemlerin çözüm değerleri aşağıda verildiği gibidir.

- $(80x_1 + 40x_2) \in [620, 630]$ aralığı için oluşturulan model:

$$\left. \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 1 - \frac{630 - (80x_1 + 40x_2)}{10} \geq \lambda \\ 620 \leq (80x_1 + 40x_2) \leq 630 \\ \lambda \in [0, 1] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 80x_1 + 40x_2 - 10\lambda \geq 620 \\ 80x_1 + 40x_2 \geq 620 \\ 80x_1 + 40x_2 \leq 630 \\ \lambda \leq 1 \\ x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{seçenekli optimal} & \text{çözüm} \\ x_1 = 7.875 & x_1 = 0 \\ x_2 = 0 & x_2 = 15.750 \\ \lambda = 1 & \lambda = 1 \end{array} \right.$$

- $(80x_1 + 40x_2) \in [630, 640]$ aralığı için oluşturulan model:

$$\left. \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 1 - \frac{(80x_1 + 40x_2) - 630}{10} \geq \lambda \\ 630 \leq (80x_1 + 40x_2) \leq 640 \\ \lambda \in [0, 1] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 80x_1 + 40x_2 + 10\lambda \geq 620 \\ 80x_1 + 40x_2 \geq 630 \\ 80x_1 + 40x_2 \leq 640 \\ \lambda \leq 1 \\ x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{seçenekli optimal} & \text{çözüm} \\ x_1 = 7.875 & x_1 = 0 \\ x_2 = 0 & x_2 = 15.750 \\ \lambda = 1 & \lambda = 1 \end{array} \right.$$

Birinci tercih önceliğine ilişkin λ değerini 1 olarak bulduğumuz için, imalatçının kâr hedefine tamamen ulaştığını söyleyebiliriz. Buradan, imalatçının elde ettiği kârı 630\$ olarak buluruz. Dolayısıyla, $80x_1 + 40x_2 = 630$ denklemini oluşturabiliriz. Bu denklemin ikinci tercih önceliğinde bir kısıtlayıcı olarak yer alması gerekir. Böylece, 630 dolarlık bir kâr sağlanması koşuluyla, ikinci tercih önceliğinde yer alan hedeflere ulaşmaya çalışırız. Bu durumda, ikinci tercih önceliği için bulanık hedef programlama problemini aşağıda verildiği gibi düzenleyebiliriz.

$$x_1 \cong 6 \quad (\text{Ürün 1 Satış Hedefi})$$

$$x_2 \cong 4 \quad (\text{Ürün 2 Satış Hedefi})$$

$$80x_1 + 40x_2 = 630 \quad (\text{Kâr Kısıtlayıcısı})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

İkinci tercih önceliğinde iki adet bulanık hedef olduğu için, dört adet ($2^m = 2^2 = 4$) alt problemin çözüm değerini belirlememiz gerekir. Satış hedefleri için karar vericinin tanımlandığı üyelik fonksiyonlarına göre, ikinci tercih önceliğinde çözülmesi gereken alt problemleri ve bu problemlerin optimal çözüm değerlerini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

- $x_1 \in [4, 6]$ ve $x_2 \in [2, 4]$ aralıkları için oluşturulan model:

$$\left. \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 1 - \frac{6-x_1}{2} \geq \lambda \\ 4 \leq x_1 \leq 6 \\ 1 - \frac{4-x_2}{2} \geq \lambda \\ 2 \leq x_2 \leq 4 \\ 80x_1 + 40x_2 = 630 \\ \lambda \in [0, 1] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} + \equiv \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ x_1 - 2\lambda \geq 4 \\ x_2 - 2\lambda \geq 2 \\ 80x_1 + 40x_2 = 630 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ \lambda \leq 1 \\ x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimal Çözüm} \\ x_1 = 5.9167 \\ x_2 = 3.9167 \\ \lambda = 0.9583 \end{array} \right.$$

- $x_1 \in [4, 6]$ ve $x_2 \in [4, 6]$ aralıkları için oluşturulan model:

$$\left. \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 1 - \frac{6-x_1}{2} \geq \lambda \\ 4 \leq x_1 \leq 6 \\ 1 - \frac{x_2-4}{2} \geq \lambda \\ 4 \leq x_1 \leq 6 \\ 80x_1 + 40x_2 = 630 \\ \lambda \in [0, 1] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} + \equiv \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ x_1 - 2\lambda \geq 4 \\ x_2 + 2\lambda \geq 6 \\ 80x_1 + 40x_2 = 630 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \geq 4 \\ x_2 \leq 6 \\ \lambda \leq 1 \\ x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimal Çözüm} \\ x_1 = 5.8750 \\ x_2 = 4 \\ \lambda = 0.9375 \end{array} \right.$$

- $x_1 \in [6, 8]$ ve $x_2 \in [2, 4]$ aralıkları için oluşturulan model:

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 \max \lambda \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 1 - \frac{x_1 - 6}{2} \geq \lambda \\
 6 \leq x_1 \leq 8 \\
 1 - \frac{4 - x_2}{2} \geq \lambda \\
 2 \leq x_2 \leq 4 \\
 80x_1 + 40x_2 = 630 \\
 \lambda \in [0, 1] \\
 x_1, x_2 \geq 0
 \end{array} \right\} + \equiv \left\{ \begin{array}{l}
 \max \lambda \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 x_1 + 2\lambda \leq 8 \\
 x_2 - 2\lambda \geq 2 \\
 80x_1 + 40x_2 = 630 \\
 x_1 \geq 6 \\
 x_1 \leq 8 \\
 x_2 \geq 2 \\
 x_2 \leq 4 \\
 \lambda \leq 1 \\
 x_1, x_2, \lambda \geq 0
 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Optimal Çözüm} \\
 x_1 = 6 \\
 x_2 = 3.750 \\
 \lambda = 0.8750
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

- $x_1 \in [6, 8]$ ve $x_2 \in [4, 6]$ aralıkları için oluşturulan model:

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 \max \lambda \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 1 - \frac{x_1 - 6}{2} \geq \lambda \\
 6 \leq x_1 \leq 8 \\
 1 - \frac{x_2 - 4}{2} \geq \lambda \\
 4 \leq x_2 \leq 6 \\
 80x_1 + 40x_2 = 630 \\
 \lambda \in [0, 1] \\
 x_1, x_2 \geq 0
 \end{array} \right\} + \equiv \left\{ \begin{array}{l}
 \max \lambda \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 x_1 + 2\lambda \leq 8 \\
 x_2 + 2\lambda \leq 6 \\
 80x_1 + 40x_2 = 630 \\
 x_1 \geq 6 \\
 x_1 \leq 8 \\
 x_2 \geq 4 \\
 x_2 \leq 6 \\
 \lambda \leq 1 \\
 x_1, x_2, \lambda \geq 0
 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Uygun} \\
 \text{çözüm} \\
 \text{yoktur.}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

İkinci tercih önceliği için en iyi karar, en yüksek λ değerini veren alt problemin optimal çözüm değerleridir. Söz konusu λ değerinin 0.9583 olduğu, yukarıda verilen problemlerin çözüm değerlerinden görülebilir. $\lambda = 0.9583$ değerini veren alt problemin çözümü aynı zamanda bulanık hedef programlama modelimizin çözümünü verir. Buna göre, imalatçının Ürün 1'den 5.9167 birim, Ürün 2'den 3.9167 birim üreterek 630 dolarlık bir kâr elde etmesi, en iyi karar olarak kabul edilebilir.

4.5 Üçgensel Üyelik Fonksiyonlarıyla Chen Yaklaşımı

Bulanık hedeflerin üçgensel üyelik fonksiyonlarıyla nitelendiği tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemlerinin Tiwari, Dharmar ve Rao yaklaşımıyla çözülmesinin getirdiği işlemsel yük, hedef ve/veya öncelik sayısına paralel olarak artmaktadır. Söz konusu işlemsel

yükü azaltmayı amaçlayan alternatif bir yaklaşım Chen tarafından önerilmiştir. Chen, T_i tercih önceliğindeki bulanık hedef programlama problemini tek bir doğrusal programlama problemine indirgemeyi başarmıştır. Bu nedenle, Chen'in yaklaşımı, T_i tercih önceliğinde 2^m alt problemin çözümünü gerektiren Tiwari, Dharmar ve Rao yaklaşımından daha etkilidir. Bilindiği üzere, bulanık bir hedefin erişim düzeyine ulaşma derecesi en az 0 (sıfır) en fazla 1 (bir) olabilir. Ayrıca, bulanık hedeflerin erişim düzeylerinin $\alpha = 1$ değerindeki α -kesim kümesinde yer aldığını söyleyebiliriz. Chen yaklaşımında bulanık hedeflerin üyelik derecelerinin maksimize edilmesi yerine, bulanık hedeflerin en fazla 1 (bir)'e eşit olabilen üyelik derecelerinden oluşan en büyük sapmalar minimize edilir. Çünkü, bulanık bir hedefin üyelik derecesinin ençoklanması, bulanık bir hedefe üye olmama derecesinin minimum kılınması düşüncesine özdeştir. Bu bakış açısından, tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemlerinin en iyi çözümü aşağıda verilen problemi çözerek belirlenebilir (Özkan, 2003).

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda' = \left[\max_i \{1 - \mu_i(Ax)_i\} \right] \\ & \text{Kısıtları} \\ & b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Burada bulanık hedeflere üye olmama derecesini gösteren λ' değişkeni, $\lambda' = 1 - \lambda$ eşitliği ile tanımlanır. $(Ax)_i \equiv b_i$ bulanık hedefini niteleyen üçgensel üyelik fonksiyonları üyelik derecesine göre artan parça ve azalan parça olarak ele alınabildiği için, yukarıda verilen modelde mutlak değer işareti kullanılabilir. Üyelik fonksiyonunun azalan parçasının $1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i}$ fonksiyonu ile artan parçasının ise $1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i}$ fonksiyonu ile nitelendiği açıktır. Bu nedenle, söz konusu model aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda = 1 - \lambda' \\ & \text{Kısıtları} \\ & \lambda' \geq \left(1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i} \right) - 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda' \geq \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i} \\ \lambda' \geq 1 - \left(1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i} \right) \end{array} \right. \quad i = 1, 2, K, m_1 \\ & b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \\ & \lambda' \in [0, 1] \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Chen tarafından önerilen yaklaşımın Tiwari, Dharmar ve Rao yaklaşımıyla özdeş sonuçlar verdiğini gösterebilmek için bir önceki yaklaşımı açıklamak için kullanılan bulanık hedef programlama problemini tekrar ele alalım. Söz konusu problem ve bu probleme ilişkin tercih öncelikleri aşağıda verildiği gibidir (Özkan, 2003).

$$80x_1 + 40x_2 \cong 630 \quad (\text{Kâr hedefi}) \rightarrow 1. \text{ tercih önceliği}$$

$$x_1 \cong 6 \quad (\text{Ürün 1 Satış Hedefi}) \rightarrow 2. \text{ tercih önceliği}$$

$$x_2 \cong 4 \quad (\text{Ürün 2 Satış Hedefi}) \rightarrow 2. \text{ tercih önceliği}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Bu modelde, bulanık hedefler aşağıda verilen üyelik fonksiyonlarıyla nitelendirilmektedir.

$$\mu_{kar}(x) = \begin{cases} 0 & ; (80x_1 + 40x_2) \leq 620 \text{ ise} \\ 1 - \frac{630 - (80x_1 + 40x_2)}{10} & ; 620 \leq (80x_1 + 40x_2) \leq 630 \text{ ise} \\ 1 - \frac{(80x_1 + 40x_2) - 630}{10} & ; 630 \leq (80x_1 + 40x_2) \leq 640 \text{ ise} \\ 0 & ; (80x_1 + 40x_2) \geq 640 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\mu_{ürün1satis}(x) = \begin{cases} 0 & ; x_1 \leq 4 \text{ ise} \\ 1 - \frac{6 - x_1}{2} & ; 4 \leq x_1 \leq 6 \text{ ise} \\ 1 - \frac{x_1 - 6}{2} & ; 6 \leq x_1 \leq 8 \text{ ise} \\ 0 & ; x_1 \geq 8 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\mu_{ürün2satis}(x) = \begin{cases} 0 & ; x_2 \leq 2 \text{ ise} \\ 1 - \frac{4 - x_2}{2} & ; 2 \leq x_2 \leq 4 \text{ ise} \\ 1 - \frac{x_2 - 4}{2} & ; 4 \leq x_2 \leq 6 \text{ ise} \\ 0 & ; x_2 \geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$

Chen yaklaşımına göre, birinci tercih önceliğinde çözülmesi gereken doğrusal programlama problemi ve bu problemin optimal çözüm değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } \lambda = 1 - \lambda' \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 \lambda' \geq \frac{(80x_1 + 40x_2) - 630}{10} \\
 \lambda' \geq \frac{630 - (80x_1 + 40x_2)}{10} \\
 b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \\
 \lambda' \in [0,1] \\
 x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}
 \equiv
 \begin{array}{l}
 \text{Max } \lambda \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 80x_1 + 40x_2 - 10\lambda' \leq 630 \\
 80x_1 + 40x_2 + 10\lambda' \geq 630 \\
 80x_1 + 40x_2 \leq 640 \\
 80x_1 + 40x_2 \geq 620 \\
 \lambda + \lambda' = 1 \\
 \lambda \leq 1 \\
 \lambda' \leq 1 \\
 x_1, x_2, \lambda, \lambda' \geq 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{ll}
 \text{seçenekli optimal} & \text{çözüm} \\
 x_1 = 7.875 & x_1 = 0 \\
 x_2 = 0 & x_2 = 15.750 \\
 \lambda = 1 & \lambda = 1
 \end{array}$$

Birinci tercih önceliğine ilişkin λ değerini 1 (bir) olarak bulduğumuz için imalatçının kâr hedefine tamamen ulaştığını ve 630 dolarlık bir kâr elde ettiğini söyleyebiliriz. Dolayısıyla, $80x_1 + 40x_2 = 630$ denklemini ikinci tercih önceliği için oluşturulan bulanık hedef programlama modeline bir kısıtlayıcı olarak ekleyebiliriz. İkinci tercih önceliğinde çözülmesi gereken doğrusal programlama problemi ve bu problemin optimal çözüm değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } \lambda = 1 - \lambda' \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 \lambda' \geq \frac{x_1 - 6}{2} \\
 \lambda' \geq \frac{6 - x_1}{2} \\
 \lambda' \geq \frac{x_2 - 4}{2} \\
 \lambda' \geq \frac{4 - x_2}{2} \\
 4 \leq x_1 \leq 8 \\
 2 \leq x_2 \leq 6 \\
 80x_1 + 40x_2 = 630 \\
 \lambda' \in [0,1] \\
 x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}
 \equiv
 \begin{array}{l}
 \text{Max } \lambda \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 x_1 - 2\lambda' \leq 6 \\
 x_1 + 2\lambda' \geq 6 \\
 x_2 - 2\lambda' \leq 4 \\
 x_2 + 2\lambda' \geq 4 \\
 80x_1 + 40x_2 = 630 \\
 x_1 \leq 8 \\
 x_1 \geq 4 \\
 x_2 \leq 6 \\
 x_2 \geq 2 \\
 \lambda + \lambda' = 1 \\
 \lambda \leq 1 \\
 \lambda' \leq 1 \\
 x_1, x_2, \lambda, \lambda' \geq 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{optimal çözüm} \\
 x_1 = 5.9167 \\
 x_2 = 3.9167 \\
 \lambda = 0.9583 \\
 \lambda' = 0.0417
 \end{array}$$

İkinci tercih önceliği için oluşturulan modelin çözümü, bulanık hedef programlama modelinin çözümünü verir. Buna göre, Ürün 1'den 5.9167 birim, Ürün 2'den 3.9167 birim üreterek 630 dolarlık bir kâr elde etmek imalatçının en iyi kararı olur. Böylece, Chen yaklaşımıyla bulunan

çözümün Tiwari, Dharmar ve Rao yaklaşımıyla bulunan çözüme özdeş olduğunu söyleyebiliriz (Özkan, 2003).

4.6 Kim ve Whang Yaklaşımı

Bulanık eşitsizlikleri de içeren tercih öncelikli hedef programlama problemlerinin, Hannan yaklaşımıyla çözülebileceği Kim ve Whang tarafından kanıtlanmıştır. Bu yaklaşım, temel olarak karar vericinin bulanık hedeflerine ilişkin toleransları tanımlamasına dayanır. Bulanık bir hedef, $(Ax)_i \equiv b_i$, $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ ve $(Ax)_i \gtrless b_i$ şeklinde ifade edilebilir. Bu yaklaşımda, $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ ve $(Ax)_i \gtrless b_i$ bulanık hedefleri için karar vericinin kabul edebileceği maksimum tolerans miktarları sırasıyla t_i^+ ve t_i^- ile gösterilir. Burada, t_i^+ değeri, $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ bulanık hedefinin erişim düzeyi b_i 'den daha büyük değerler almasına izin verildiğini gösterir. Bu durumda, $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ hedefinin $[b_i, b_i + t_i^+]$ aralığında değerler alması kabul edilir. Diğer taraftan, t_i^- değeri, $(Ax)_i \gtrless b_i$ bulanık hedefinin erişim düzeyi b_i 'den daha küçük değerler alabileceğini gösterir. Bu durumda ise, $(Ax)_i \gtrless b_i$ hedefinin $[b_i - t_i^-, b_i]$ aralığında değerler almasına izin verilir. Buna göre, $(Ax)_i \equiv b_i$ hedefinin $[b_i - t_i^-, b_i + t_i^+]$ aralığında değerler alabileceği düşünülür. Kim ve Whang yaklaşımında, siz konusu bulanık hedefler Zimmermann tipi üyelik fonksiyonlarıyla aşağıda verildiği gibi ifade edilebilir (Özkan, 2003).

$$(Ax)_i \equiv b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \leq b_i - t_i^- \text{ ise} \\ 1 - \left[\frac{(b_i - (Ax)_i)}{t_i^-} \right] & ; b_i - t_i^- \leq (Ax)_i \leq b_i \text{ ise} \\ 1 - \left[\frac{((Ax)_i - b_i)}{t_i^+} \right] & ; b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + t_i^+ \text{ ise} \\ 0 & ; (Ax)_i \geq b_i + t_i^+ \text{ ise} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$(Ax)_i \lesseqgtr b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \geq b_i + t_i^+ \text{ ise} \\ 1 - \left[\frac{(b_i - (Ax)_i)}{t_i^+} \right] & ; b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + t_i^+ \text{ ise} \\ 1 & ; (Ax)_i \leq b_i \text{ ise} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$(Ax)_i \gtrless b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \leq b_i - t_i^- \text{ ise} \\ 1 - \left[\frac{((Ax)_i - b_i)}{t_i^-} \right] & ; b_i - t_i^- \leq (Ax)_i \leq b_i \text{ ise} \\ 1 & ; (Ax)_i \geq b_i \text{ ise} \end{cases} \quad (4.21)$$

Bu yaklaşımda da bulanık hedefler en azından λ düzeyine kadar doyurulmaya çalışılmaktadır. Diğer bir ifadeyle, bulanık hedef programlama problemini doğrusal programlama problemi halinde ifade etmek için, $\mu_i(x) \geq \lambda$ ilişkisi temel olarak alınmaktadır.

Bu $\mu_i(x) \geq \lambda$ eşitsizliğinde yerine konulabilir. İlk olarak, $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ bulanık hedefi ele alınırsa,

$$\left. \begin{array}{l} \mu_i(x) \geq \lambda \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{t_i^+} \geq \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow (Ax)_i - t_i^+(1 - \lambda) \leq b_i$$

eşitsizliği oluşturulur. Burada λ değişkeni bulanık hedeflere ulaşma derecesini gösterdiği için, β_i^+ değişkeni $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ bulanık hedefinin erişim düzeyine ulaşmama derecesi (veya üye olmama derecesi) olarak tanımlanır. Bu durumda, $(1 - \lambda)$ ifadesi β_i^+ değişkeni ile nitelenirse, aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$(Ax)_i - t_i^+ \beta_i^+ \leq b_i \quad (4.22)$$

Burada β_i^+ değişkeni 0 (sıfır) değerini aldığı zaman, $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ bulanık hedefi için bir tolerans aralığının tanımlanmasına gerek olmadığı söylenebilir. Ayrıca, β_i^+ değişkeni 1 (bir) değerini alırsa, $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ bulanık hedefinin tamamen doyurulmadığı söylenir. Benzer işlemler, $(Ax)_i \gtrless b_i$ bulanık hedefi için de yapılabilir (Özkan, 2003).

$$\left. \begin{array}{l} \mu_i(x) \geq \lambda \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{t_i^+} \geq \lambda \end{array} \right\}$$

Buradan, $(Ax)_i - t_i^-(1 - \lambda) \geq b_i$ eşitsizliği elde edilir. Burada, $(1 - \lambda)$ ifadesi β_i^- değişkeni ile nitelenirse, $(Ax)_i \gtrless b_i$ bulanık hedefi aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$(Ax)_i - t_i^- \beta_i^- \leq b_i \quad (4.23)$$

Şimdi de $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ ve $(Ax)_i \gtrless b_i$ eşitsizliklerinden oluşan $(Ax)_i \cong b_i$ bulanık hedefini ele alalım. Eğer $(Ax)_i \cong b_i$ bulanık hedefi tamamen doyurulursa, β_i^+ ve β_i^- değişkenlerinin sıfır olması gerekir. Bu durumda, Hannan yaklaşımına benzer bir şekilde $(Ax)_i \cong b_i$ bulanık hedefi,

$$(Ax)_i + t_i^+ \beta_i^+ - t_i^- \beta_i^- = b_i \quad (4.24)$$

olarak ifade edilir. $\beta_i^- = (1-\lambda)$ ve $\beta_i^+ = (1-\lambda)$ ifadeleri (4.24) denkleminde yerine konursa, $(Ax)_i + (t_i^- - t_i^+) - (t_i^- - t_i^+) = b_i$ denklemi elde edilir. $(Ax)_i \equiv b_i$ bulanık hedefini niteleyen üçgensel üyelik fonksiyonunun simetrik olması halinde $t_i^- = t_i^+$ eşitliği geçerli olacağı için, $(Ax)_i = b_i$ ifadesine ulaşılır. Bu durumda, $(Ax)_i \equiv b_i$ bulanık hedefinin tamamen doyurulduğu açıktır (Özkan, 2003).

Bu noktaya kadar, bulanık bir hedef programlama problemindeki kısıtlayıcı kümesinin Kim ve Whang yaklaşımı ile nasıl oluşturulabileceğini açıkladıktan sonra, bu yaklaşım ile bulanık hedef programlama modelinin amaç fonksiyonunun nasıl oluşturulduğu açıklanacaktır. Kim ve Whang yaklaşımında t_i^- ve t_i^+ değişkenleri, bulanık hedefler için kabul edilebilir toleransları, β_i^+ ve β_i^- değişkenleri ise çözüm vektörü x 'in bulanık hedeflere üye olmama derecesini gösterir bu nedenle, Kim ve Whang yaklaşımında bulanık hedefler için kabul edilebilir tolerans değerleri veya çözüm vektörü x 'in bulanık hedeflere üye olma derecesi minimize edilir. Bu düşünceden hareketle bulanık hedef programlama modelinin amaç fonksiyonu,

$$\min \left[\sum_{i=1}^{m_1} (\beta_i^+ + \beta_i^-) + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \beta_i^+ + \sum_{i=m_2+1}^{m_3} \beta_i^- \right] \quad (4.25)$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda, $(Ax)_i \equiv b_i$, $(Ax)_i \lesseqgtr b_i$ ve $(Ax)_i \gtrless b_i$ bulanık hedeflerinden oluşan bir hedef programlama modeli aşağıda verilen doğrusal programlama modeline indirgenir (Özkan, 2003).

$$\min \left[\sum_{i=1}^{m_1} (\beta_i^+ + \beta_i^-) + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \beta_i^+ + \sum_{i=m_2+1}^{m_3} \beta_i^- \right]$$

Kısıtlayıcılar

$$\begin{aligned} (Ax)_i + t_i^+ \beta_i^+ - t_i^- \beta_i^- &= b_i, & i &= 1, 2, K, m_1 \\ (Ax)_i - t_i^+ \beta_i^+ &\leq b_i, & i &= m_1 + 1, K, m_2 \\ (Ax)_i + t_i^+ \beta_i^+ - t_i^- \beta_i^- &= b_i, & i &= m_2 + 1, K, m_3 \\ \beta_i^+, \beta_i^- &\geq 0, & i &= 1, 2, K, m_3 \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Eğer karar verici bulanık hedefler arasında tercih önceliğinin önemli olduğunu söylese, bulanık hedef programlama modeline ilişkin amaç fonksiyonunun aşağıdaki gibi düzenlenmesi gerekir.

$$\min \sum_{l=0}^L T_l \left[\left(\sum_{i=1}^{m_1} w_i (\beta_i^+ + \beta_i^-) + \sum_{i=m_1+1}^{m_{21}} w_i \beta_i^+ + \sum_{i=m_2+1}^{m_3} w_i \beta_i^- \right) \right] \quad (4.27)$$

Burada, T_l bulanık hedefler arasındaki tercih önceliğini, w_i ise her bir tercih önceliğinde yer alan bulanık hedefler için karar vericinin belirlediği ağırlık katsayısını verir. Kim ve Whang yaklaşımını örnek bir örnekle açıklamak üzere, çanta ve ayakkabı üreten bir imalatçının aşağıda verilen bulanık hedef programlama modelini inceleyelim.

$$3x_1 + 5x_2 \gtrsim 40 \quad (\text{Kar Hedefi})$$

$$x_1 + x_2 \cong 13 \quad (\text{Satış Hedefi})$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24 \quad (\text{Deri Kısıtlayıcısı})$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 15 \quad (\text{İşgücü Kısıtlayıcısı})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Burada, x_1 değişkeni üretilcek çanta sayısını, x_2 değişkeni ise çift olarak üretilcek ayakkabı sayısını göstermektedir. Karar vericinin kâr hedefi için 8 birimlik ($t_1^- = 8$), satış hedefi için 3 birimlik ($t_2^- = t_2^+ = 3$) bir toleransa izin verdiğini düşünelim. Ayrıca, bulanık hedeflerin aynı tercih önceliğinde yer aldığını kabul edelim. Buna göre, imalatçının kaç tane çanta ve kaç çift ayakkabı üretmesi gerektiğini belirleyelim. Bu bilgiler ışığında, imalatçının bulanık hedef programlama problemini bir doğrusal programlama problemi olarak ifade edebiliriz (Özkan, 2003).

$$\text{Min} \quad \beta_1^- + \beta_2^- + \beta_2^+$$

Kısıtlayıcılar

$$3x_1 + 5x_2 + 8\beta_1^- \geq 40 \quad (\text{Kar Kısıtlayıcısı})$$

$$x_1 + x_2 - 3\beta_2^+ + 3\beta_2^- = 13 \quad (\text{Satış Kısıtlayıcısı})$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24 \quad (\text{Deri Kısıtlayıcısı})$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 15 \quad (\text{İşgücü Kısıtlayıcısı})$$

$$x_1, x_2, \beta_1^-, \beta_2^-, \beta_2^+ \geq 0$$

Bu problemin optimal çözümü $x_1 = 12$, $x_2 = 0$, $\beta_1^- = 0,50$, $\beta_2^- = 0,333$, $\beta_2^+ = 0$ olarak bulunmuştur. WINQSB paket programıyla elde edilen çözüm değerlerine göre, imalatçının bütün hedeflerini eşanlı olarak doyurması için 12 adet çanta üretmesi gerekir. Bu durumda imalatçının elde edeceği kâr $3(12) + 5(0) = 36$ birimdir. Burada imalatçının kâr hedefinin $\lambda = 1 - \beta_1^- = 1 - 0,50 = 0,50$ düzeyinde, satış hedefinin ise $\lambda = 1 - \beta_2^- = 1 - 0,333 = 0,667$ düzeyinde doyurulduğunu söyleyebiliriz.

Daha önce açıklandığı üzere, Kim ve Whang yaklaşımında $(Ax)_i \cong b_i$ bulanık hedefi $(Ax)_i + t_i^- \beta_i^- - t_i^+ \beta_i^+ = b_i$ şeklindeki bir kısıtlayıcıya dönüştürülebilmektedir. Bu yaklaşımda, bulanık eşitlik halindeki hedefler simetrik olmayan üçgensel üyelik fonksiyonlarıyla da nitelenebilir. Diğer bir ifadeyle, $(Ax)_i \cong b_i$ bulanık hedefine ilişkin $[b_i - t_i^-, b_i]$ ve $[b_i, b_i + t_i^+]$ aralıkları farklı büyüklüklerde olabilir. Şimdi, yukarıda verilen bulanık hedef programlama probleminde satış hedefine ilişkin tolerans miktarlarının $t_2^- = 4$ ve $t_2^+ = 2$ olarak tanımlandığını düşünelim. Bu durumda, çözülmesi gereken doğrusal programlama modeli ve bu problemin optimal çözüm değerleri aşağıda verildiği gibidir (Özkan, 2003).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad \beta_1^- + \beta_2^- + \beta_2^+ \\ 3x_1 + 5x_2 + 8\beta_1^- \geq 40 \\ x_1 + x_2 - 2\beta_2^+ + 4\beta_2^- = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2, \beta_1^-, \beta_2^-, \beta_2^+ \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 12 \\ x_2 = 0 \\ \beta_1^- = 0,50 \\ \beta_2^- = 0,25 \\ \beta_2^+ = 0 \end{array} \right.$$

4.7 Tiwari, Dharmar ve Rao'nun Toplamsal Model Yaklaşımı

Hedeflerin aynı tercih önceliğinde yer aldığı bulanık hedef programlama modelleri için geliştirilen modellerin çoğunda, bulanık hedeflerin ortak doyum derecesine ulaşılmaya çalışılır. Bu durum, optimal çözümde bulanık hedeflerin her birinin aynı üyelik derecesini alması ile sonuçlanır. Tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemlerinde karar vericinin hedefler arasındaki tercih önceliğini belirlemesi, bulanık hedeflerin farklı düzeylerde doyurulabilmesini olanaklı kılar. Bulanık hedeflerin ortak doyum derecelerinin toplamını ençoklamaya çalışan bir çözüm yaklaşımı Tiwari, Dharmar ve Rao tarafından geliştirilmiştir.

Aşağıda verilen hedef programlama modelinde bulanık hedeflerin aynı tercih önceliğinde yer aldığını ve Zimmermann tipi bulanık üyelik fonksiyonlarıyla nitelendiğini kabul edelim. Yani,

$$(Ax)_i \lesseqgtr b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \geq b_i + d_i \text{ ise} \\ 1 - [(b_i - (Ax)_i)/d_i] & ; b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \text{ ise} \\ 1 & ; (Ax)_i \leq b_i \text{ ise} \end{cases} \quad (4.28)$$

$$(Ax)_i \gtrless b_i \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \leq b_i - d_i \text{ ise} \\ 1 - [((Ax)_i - b_i)/d_i] & ; b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i \text{ ise} \\ 1 & ; (Ax)_i \geq b_i \text{ ise} \end{cases} \quad (4.29)$$

$$x \geq 0$$

Yukarıda verilen bulanık hedef programlama problemine ilişkin Tiwari, Dharmar ve Rao'nun önerdiği toplamsal modeli, bulanık hedeflerin üyelik fonksiyonlarını toplayarak formüle edebiliriz.

$$\begin{aligned} & \text{Maksimum } V(\mu) \sum_{i=m_2+1}^{m_3} \mu_i \\ & \text{Kısıtlayıcılar} \\ & \mu_i = 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_{i_2}} \quad (i = m_1 + 1, K, m_2) \\ & \mu_i = 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_{i_1}} \quad (i = m_2 + 1, K, m_3) \\ & \mu_i \leq 1 \quad (i = m_1 + 1, K, m_3) \\ & x, \mu_i \geq 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Eğer ağırlık kavramı kullanılarak bulanık hedeflere farklı önem katsayıları iliştilirse, bu durumda ağırlıklı toplamsal bir modele ulaşılır.

$$\begin{aligned} & \text{Maksimum } V(\mu) \sum_{i=m_2+1}^{m_3} w_i \mu_i \\ & \text{Kısıtlayıcılar} \\ & \mu_i = 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_{i_2}} \quad (i = m_1 + 1, K, m_2) \\ & \mu_i = 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_{i_1}} \quad (i = m_2 + 1, K, m_3) \\ & \mu_i \leq 1 \quad (i = m_1 + 1, K, m_3) \\ & x, \mu_i \geq 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Burada, w_i hedeflere iliştirilen ağırlıkları gösterir. Bu ağırlıkların $0 \leq w_i \leq 1$ ve $\sum w_i$ koşullarını karşılaması gerekir.

Hedefler arasındaki tercih önceliği sözel olarak ifade edilirse, toplamsal model yaklaşımı ardışık programlama ile birleştirilebilir. Daha öncede açıklandığı gibi, böyle bir durumda T_i önceliğinde yer alan hedef(ler) doyurulmadan T_{i+1} önceliğinde yer alan hedef(ler)in doyurulması mümkün değildir. Ayrıca, T_i önceliğinde ulaşılan hedef değerinin bir sonraki öncelikte bir kısıtlayıcı olarak modele eklenmesi gerekir. Tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemi toplamsal model yaklaşımı ile aşağıda verildiği gibi ifade edilebilir (Özkan, 2003)

$$\begin{aligned}
 & \text{Maksimum } \sum_s (\mu_s)_{T_i} \\
 & \text{Kısıtlayıcılar} \\
 & \mu_s = 1 - \frac{(Ax)_s - b_s}{d_{s_2}} \\
 & \mu_s = 1 - \frac{b_s - (Ax)_s}{d_{s_1}} \\
 & (\mu_s)_{T_r} = (\mu^*)_{T_r} \quad r = 1, 2, K, i-1 \\
 & \mu_s \leq 1 \\
 & x, \mu_s \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Burada, i 'ninci tercih önceliğinde yer alan hedeflerin üyelik fonksiyonu $(\mu_s)_{T_i}$ ile, $r \leq i-1$ koşuluyla r 'ninci tercih önceliğinde yer alan hedeflerin fonksiyonu $(\mu_s)_{T_r}$ ile, r 'ninci tercih önceliğinde ulaşılan hedef değerleri ise $(\mu^*)_{T_r}$ ile gösterilmiştir. Bu kuramsal şekilde anlatılan yaklaşımı sayısal bir örnek üzerinde inceleyelim. İncelencek bulanık hedef programlama problemi aşağıda verilmektedir.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \lesseqgtr 340 \text{ (Bulanık Hedef 1)}$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \gtrless 630 \text{ (Bulanık Hedef 2)}$$

$$20x_1 - 30x_2 \lesseqgtr 200 \text{ (Bulanık Hedef 3)}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900$$

$$x_2 \geq 35$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Bulanık hedeflere ilişkin tolerans miktarlarının sırasıyla 60, 80 ve 50 birim olarak tanımlandığını varsayalım. Bu durumda, bulanık hedeflerin Zimmermann tipi üyelik fonksiyonlarıyla ifadesi aşağıda gösterilmektedir (Özkan, 2003).

$$\mu_1 = \begin{cases} 0 & ; \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 400 \quad \text{ise} \\ 1 - [(2x_1 + 3x_2 + x_3 - 340)/60] & ; \quad 340 \leq 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 400 \quad \text{ise} \\ 1 & ; \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 340 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} 0 & ; \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 550 \quad \text{ise} \\ 1 - [(630 - x_1 + 2x_2 + 4x_3)/80] & ; \quad 550 \leq x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 630 \quad \text{ise} \\ 1 & ; \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 630 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$\mu_3 = \begin{cases} 0 & ; \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 250 \quad \text{ise} \\ 1 - [(20x_1 - 30x_2 - 200)/50] & ; \quad 200 \leq x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 250 \quad \text{ise} \\ 1 & ; \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 200 \quad \text{ise} \end{cases}$$

İlk olarak, bulanık hedeflerin aynı tercih önceliğinde yer aldığı düşünelim. Bu durumda, toplamsal model yaklaşımına dayanarak, bulanık hedef programlama modelini doğrusal programlama problemi olarak ifade edebiliriz. Söz konusu doğrusal programlama problemi ve bunun optimal çözüm değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } V(\mu) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\ \text{Kısıtları ılar} \\ \mu_1 = 1 - \frac{2x_1 + 3x_2 + x_3 - 340}{60} \\ \mu_2 = 1 - \frac{630 - (x_1 + 2x_2 + 4x_3)}{80} \\ \mu_3 = 1 - \frac{20x_1 - 30x_2 - 200}{50} \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900 \\ x_2 \geq 35 \\ x_1 + 3x_2 \leq 400 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } V(\mu) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\ \text{Kısıtları ılar} \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 60\mu_1 = 400 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 80\mu_2 = 550 \\ 20x_1 - 30x_2 + 50\mu_3 = 250 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900 \\ x_2 \geq 35 \\ x_1 + 3x_2 \leq 400 \\ \mu_1 \leq 1 \\ \mu_2 \leq 1 \\ \mu_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimal Çözüm} \\ x_1 = 62.50 \\ x_2 = 35 \\ x_3 = 112.50 \\ \mu_1 = 0.9583 \\ \mu_2 = 0.4063 \\ \mu_3 = 1 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2.3646 \end{array} \right.$$

Şimdi, bulanık hedeflere ilişkin önem katsayılarının $w_1 = 0.15$, $w_2 = 0.80$, $w_3 = 0.05$ olarak belirlendiğini düşünelim. Bu durumda, toplamsal model yaklaşımı ile elde edilen doğrusal programlama problemi ve onu çözüm değerleri aşağıdadır.

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } V(\mu) = 0.15\mu_1 + 0.80\mu_2 + 0.05\mu_3 \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 60\mu_1 = 400 \\
 x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 80\mu_2 = 550 \\
 20x_1 - 30x_2 + \mu_3 = 250 \\
 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900 \\
 x_2 \geq 35 \\
 x_1 + 3x_2 \leq 400 \\
 \mu_1 \leq 1 \\
 \mu_2 \leq 1 \\
 \mu_3 \leq 1 \\
 x_1, x_2, x_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{Optimal Çözüm} \\
 x_1 = 65 \\
 x_2 = 36.667 \\
 x_3 = 111.667 \\
 \mu_1 = 0.8056 \\
 \mu_2 = 0.4375 \\
 \mu_3 = 1 \\
 \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2.2431 \\
 0.15\mu_1 + 0.80\mu_2 + 0.05\mu_3 = 0.5208
 \end{array}$$

Hedeflere ilişkin ağırlıkların $w_1 = 0.15$, $w_2 = 0.80$, $w_3 = 0.05$ olarak belirlenmesi, ikinci hedefin diğer hedeflerden daha önemli olduğu anlamına gelir. Bununla birlikte, yukarıda verilen modelin çözüm değerleri incelendiğinde, bulanık hedefler arasındaki öncelik ilişkisinin modelin çözüm değerlerine yansımadağını görülür. Çünkü, en çok ağırlıklı ikinci hedefin doyum derecesi, diğer hedeflerin doyum derecesinden küçüktür. Böyle bir durum, hedeflere ilişkin ağırlıkların yeniden belirlenmesini veya erişim düzeylerinin değiştirilmesini gerektirebilir (Özkan, 2003).

Şimdi de, bulanık hedeflerin farklı tercih önceliklerinde yer aldığını kabul edelim. Birinci bulanık hedefin ilk tercih önceliğinde, diğer hedefleri ise ikinci tercih önceliğinde yer aldığını düşünelim. Bu durumda, birinci tercih önceliğine ilişkin bulanık hedef programlama modeli aşağıdaki gibidir (Özkan, 2003).

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \lesseqgtr 340$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900$$

$$x_2 \geq 35$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Toplamsal model yaklaşımı ile oluşturulan doğrusal programlama problemi ve bu problemin optimal çözüm değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Max } V(\mu) = \mu_1 \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 \mu_1 = 1 - \frac{2x_1 + 3x_2 + x_3 - 340}{60} \\
 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900 \\
 x_2 \geq 35 \\
 x_1 + 3x_2 \leq 400 \\
 \mu_1 \leq 1 \\
 x_1, x_2, x_3, \mu_1 \geq 0
 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Max } V(\mu) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 60\mu_1 = 400 \\
 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900 \\
 x_2 \geq 35 \\
 x_1 + 3x_2 \leq 400 \\
 \mu_1 \leq 1 \\
 x_1, x_2, x_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0
 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Optimal Çözüm} \\
 x_1 = 0 \\
 x_2 = 113.33 \\
 x_3 = 0 \\
 \mu_1 = 1 \\
 \text{Max } V(\mu) = \mu_1 = 1
 \end{array} \right.$$

Şimdi ikinci tercih önceliğine ilişkin bulanık hedef programlama model oluşturulabilir. Burada $\mu_1 = 1$ kısıtlayıcısı, birinci tercih önceliğindeki bulanık hedef programlama modeline ilişkin amaç fonksiyonunun optimal çözüm değerini göstermektedir (Özkan, 2003).

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \gtrsim 630 \text{ (Bulanık Hedef 2)}$$

$$20x_1 - 30x_2 \lesssim 200 \text{ (Bulanık Hedef 3)}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900$$

$$x_2 \geq 35$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 400$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 60\mu_1 = 400$$

$$\mu_1 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, \mu_1 \geq 0$$

Buna göre, ikinci tercih önceliğinde çözülmesi gereken doğrusal programlama problemi ve bunun optimal çözüm değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{l}
\left. \begin{array}{l}
\text{Max } V(\mu) = \mu_2 + \mu_3 \\
\text{Kısıtlayıcılar} \\
\mu_2 = 1 - \frac{630 - (x_1 + 2x_2 + 4x_3)}{80} \\
\mu_3 = 1 - \frac{20x_1 - 30x_2 - 200}{50} \\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900 \\
x_2 \geq 35 \\
x_1 + 3x_2 \leq 400 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 60\mu_1 = 400 \\
\mu_1 = 1 \\
\mu_2, \mu_3 \leq 1 \\
x_1, x_2, x_3, \mu_2, \mu_3 \geq 0
\end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l}
\text{Max } V(\mu) = \mu_2 + \mu_3 \\
\text{Kısıtlayıcılar} \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 80\mu_2 = 550 \\
20x_1 - 30x_2 + 50\mu_3 = 250 \\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900 \\
x_2 \geq 35 \\
x_1 + 3x_2 \leq 400 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 60\mu_1 = 400 \\
\mu_1 = 1 \\
\mu_2 \leq 1 \\
\mu_3 \leq 1 \\
x_1, x_2, x_3, \mu_2, \mu_3 \geq 0
\end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
\text{Optimal Çözüm} \\
x_1 = 62.50 \\
x_2 = 35 \\
x_3 = 110 \\
\mu_1 = 1 \\
\mu_2 = 0.2813 \\
\mu_3 = 1 \\
\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2.2813
\end{array} \right.
\end{array}$$

4.8 Chen ve Tsai'nin Toplamsal Model Yaklaşımı

Tercih öncelikli hedef programlama problemlerini çözmek için geliştirilen yaklaşımların pek çoğu, ardışık optimizasyon yöntemine dayanmaktadır. Bulanık hedeflerin tanımlı olduğu öncelik düzey sayısının artması, işlemsel olarak etkinlik kaybına yol açmaktadır. Çünkü, her bir tercih önceliği için yeni bir doğrusal programlama probleminin çözümü belirlenmekte ve bu çözüm bir sonraki tercih önceliğinde bir kısıtlayıcı olarak modele katılmaktadır. Tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemlerinin çözümünde karşılaşılan işlemsel yükün azaltılması, öncelikli tercih yapısının tek bir doğrusal programlama problemiyle ifade edilebilmesine bağlıdır. Bunu başarmak için Tiwari, Dharmar ve Rao'nun toplamsal modelinin ağırlık kavramıyla ele alınması uygun bir yöntem olarak görünebilir. Bununla birlikte, bununla birlikte bulanık hedeflerin göreceli öneminin toplamsal modelde içerilmesi, tercih önceliğini tam olarak yansıtmayan çözümlere yol açabilir. Bir önceki sayısal örnekte açıklandığı gibi, bulanık bir hedefin önem derecesi arttıkça üyelik derecesinin de artması gerekir. En önemli hedefin en yüksek üyelik derecesine ulaşmasını sağlayan ve tercih öncelikli bulanık hedef programlama probleminin tek bir problemin çözümüne indirgeyen bir çözüm yaklaşımı Chen ve Tsai tarafından geliştirilmiştir. Chen ve Tsai'nin yaklaşımı, Tiwari, Dharmar ve Rao'nun toplamsal modeline $\mu_i \geq \alpha_i$ kısıtlayıcılarının eklenmesinden oluşur. Burada, i'ninci bulanık hedefin üyelik fonksiyonu μ_i ile, i'ninci bulanık hedef için karar vericinin ulaşmak istediği minimum üyelik derecesi ise α_i ile gösterilmiştir. Buna göre, Chen ve Tsai tarafından geliştirilen toplamsal model aşağıdaki gibi ifade edilir (Özkan, 2003).

$$\text{Maksimum } V(\mu) \sum_{i=m_2+1}^{m_3} \mu_i$$

Kısıtlayıcılar

$$\mu_i = 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_{i_2}} \quad (i = m_1 + 1, K, m_2)$$

$$\mu_i = 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_{i_1}} \quad (i = m_2 + 1, K, m_3)$$

$$\mu_i \leq 1 \quad (i = m_1 + 1, K, m_3)$$

$$\mu_i \geq \alpha_i$$

$$x, \mu_i \geq 0$$

(4.33)

Bulanık hedefler için ulaşılmak istenen minimum üyelik derecelerinin karar verici tarafından belirlenmesi kolay olmayabilir. Ayrıca, karar vericiler bulanık hedeflerin herhangi biri için gerekenden daha yüksek üyelik derecelerine ulaşmayı isterse, uygun olmayan bir çözümün elde edilebileceği göz önünde bulundurulmalıdır.

Chen ve Tsai'nin geliştirdiği çözüm yaklaşımı, tercih önceliğinin sözel olarak ifade edilmesi halinde de uygun çözümle verir. Bulanık hedefler arasındaki tercih önceliğinin $T_1 > T_2 > K > T_{n-1} > T_n$ olarak verildiğini düşünelim. Bu durumda, bulanık hedefler arasındaki tercih önceliğini matematiksel olarak $\mu_1 \geq \mu_2 \geq K \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n$ ilişkisi ile gösterebiliriz. Burada, birinci tercih önceliğinde yer alan hedefin üyelik derecesinin diğer hedeflerin üyelik derecelerinden büyük olması gerekir. Tiwari, Dharmar ve Rao'nun toplamsal modeline üyelik dereceleri arasındaki bu ilişki eklendiğinde, tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemi tek bir doğrusal programlama problemi olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\text{Maksimum } V(\mu) \sum_{i=m_2+1}^{m_3} \mu_i$$

Kısıtlayıcılar

$$\mu_i = 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_{i_2}} \quad (i = m_1 + 1, K, m_2)$$

$$\mu_i = 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_{i_1}} \quad (i = m_2 + 1, K, m_3)$$

$$\mu_i \leq 1 \quad (i = m_1 + 1, K, m_3)$$

$$\mu_i \geq \mu_j \quad (i \neq j)$$

$$x, \mu_i \geq 0$$

(4.34)

Tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemlerinde, karar vericiler belirli öncelik düzeyinde yer alan hedef(ler) için ulaşmak istedikleri minimum üyelik derecelerini ifade edebilirlerse, bu durumda aşağıda verilen toplamsal modelin çözülmesi gerekir.

$$\begin{aligned}
 & \text{Maksimum} \quad V(\mu) \sum_{i=m_2+1}^{m_3} \mu_i \\
 & \text{Kısıtlayıcılar} \\
 & \mu_i = 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_{i_2}} \quad (i = m_1 + 1, K, m_2) \\
 & \mu_i = 1 - \frac{b_i - (Ax)_i}{d_{i_1}} \quad (i = m_2 + 1, K, m_3) \\
 & \mu_i \leq 1 \quad (i = m_1 + 1, K, m_3) \\
 & \mu_i \geq \alpha_i \quad T_i \quad \text{Tercih Önceli ğn için} \\
 & K \quad K \\
 & \mu_n \geq \alpha_n \quad T_n \quad \text{Tercih Önceli ğn için} \\
 & x, \mu_i \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Chen ve Tiwari yaklaşımının Tiwari, Dharmar ve Rao'nun toplamsal model yaklaşımından daha etkin olduğunu gösterebilmek için, aynı bulanık hedef programlama örneğini tekrar ele alalım.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \lesseqgtr 340 \text{ (Bulanık Hedef 1)}$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \gtrless 630 \text{ (Bulanık Hedef 2)}$$

$$20x_1 - 30x_2 \lesseqgtr 200 \text{ (Bulanık Hedef 3)}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900$$

$$x_2 \geq 35$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Aynı şekilde, bulanık hedeflere ilişkin tolerans miktarlarının sırasıyla 60, 80 ve 50 birim olarak tanımlandığını varsayalım. Bu durumda, bulanık hedeflerin Zimmermann tipi üyelik fonksiyonlarıyla ifadesi de aynı şekilde olacaktır. Bu noktadan hareketle aşağıda verilen toplamsal modeli oluştururuz.

$$\text{Max } V(\mu) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

Kısıtlayıcılar

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 60\mu_1 = 400$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 80\mu_2 = 550$$

$$20x_1 - 30x_2 + 50\mu_3 = 250$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900$$

$$x_2 \geq 35$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 400$$

$$\mu_1 \leq 1$$

$$\mu_2 \leq 1$$

$$\mu_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$$

Birinci bulanık hedefin ilk tercih önceliğinde, diğer hedeflerin de ikinci tercih önceliğinde yer aldığını kabul edelim. Bu durumda, hedefler arasındaki tercih önceliği matematiksel olarak $\mu_1 \geq \mu_2$ ve $\mu_1 \geq \mu_3$ kısıtlayıcıları ile ifade edilebilir. Bu kısıtlayıcıların yukarıda verilen modele eklenmesi ile tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemi tek bir doğrusal programlama modeline indirgenir. Tercih öncelikli bulanık hedef programlama probleminin çözümünü belirlemek için, Chen ve Tsai yaklaşımında çözülmesi gereken doğrusal programlama problemi ve onun çözüm değerleri aşağıda verilmiştir (Özkan, 2003).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } V(\mu) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 60\mu_1 = 400 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 80\mu_2 = 550 \\ 20x_1 - 30x_2 + 50\mu_3 = 250 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 900 \\ x_2 \geq 35 \\ x_1 + 3x_2 \leq 400 \\ \mu_1 \geq \mu_2 \\ \mu_1 \geq \mu_3 \\ \mu_1 \leq 1 \\ \mu_2 \leq 1 \\ \mu_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimal Çözüm} \\ x_1 = 626119 \\ x_2 = 35 \\ x_3 = 112.4627 \\ \mu_1 = 0.9552 \\ \mu_2 = 0.4058 \\ \mu_3 = 0.9552 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2.3162 \end{array} \right.$$

Bu çözüm değerlerini, Tiwari, Dharmar ve Rao'nun tercih öncelikli toplamsal modeliyle elde edilen çözüm değerleriyle karşılaştırdığımız zaman, Chen ve Tsai'nin toplamsal modelinin

çözüm değerleri anlamında da etkin olduğunu görürüz. Çünkü, hedeflerin üyelik derecelerinin toplamı, Tiwari, Dharmar ve Rao'nun toplamsal modelinde 2.281 iken, Chen ve Tsai'nin toplamsal modelinde 2.316'dır.

4.9 Wang ve Fu Yaklaşımı

Bulanık hedef programlama problemi, karar vericinin doyurucu bulduğu bir çözümün belirlenmesine odaklanır. Bu bağlamda, bulanık hedeflere ilişkin erişim düzeylerinin, erişim düzeylerine tanınan tolerans miktarlarının, bulanık hedefler arasındaki öncelik yapısının ve bulanık hedeflere ilişkin göreceli ağırlıkların karar verici tarafından belirlenmesi gerekebilir. Bununla birlikte, geleneksel karar teorisinde karar vericiler, riskten kaçan, riski seven ve riske karşı duyarsız olan şekilde sınıflandırılır. Böylece, belirli bir hedef değeri için farklı risk grubundaki karar vericilerin farklı düzeylerde doyurulabilmesi olanaklı hale gelir. Karar vericilerin göze aldığı risk miktarı arttıkça, doyum derecesinin azalması beklenir. Bu nedenle, belirli bir hedef değeri için riskten kaçan bir karar vericinin sağladığı doyumun, riski seven bir karar vericinin sağladığı doyumdan büyük olması gerekir. Karar vericinin bulanık hedeflere ilişkin doyum derecesini, bir fayda fonksiyonu olan $\mu_i[x_i]$ ile ifade edelim. Bu durumda, her bir x değeri için $\mu_i''[x_i] < 0$ koşulunun sağlanması fayda fonksiyonunun iç büküye bir fonksiyon olduğunu, $\mu_i''[x_i] > 0$ koşulunun karşılanması fayda fonksiyonunun dış büküye bir fonksiyon olduğunu gösterir. Ayrıca, geleneksel karar teorisinde riskten kaçan bir karar vericinin fayda fonksiyonunun tamamen iç büküye, riski seven bir karar vericinin fayda fonksiyonunun tamamen dış büküye, riske karşı duyarsız olan bir karar vericinin fayda fonksiyonunun ise doğrusal bir fonksiyon olduğu kabul edilir (Özkan, 2003).

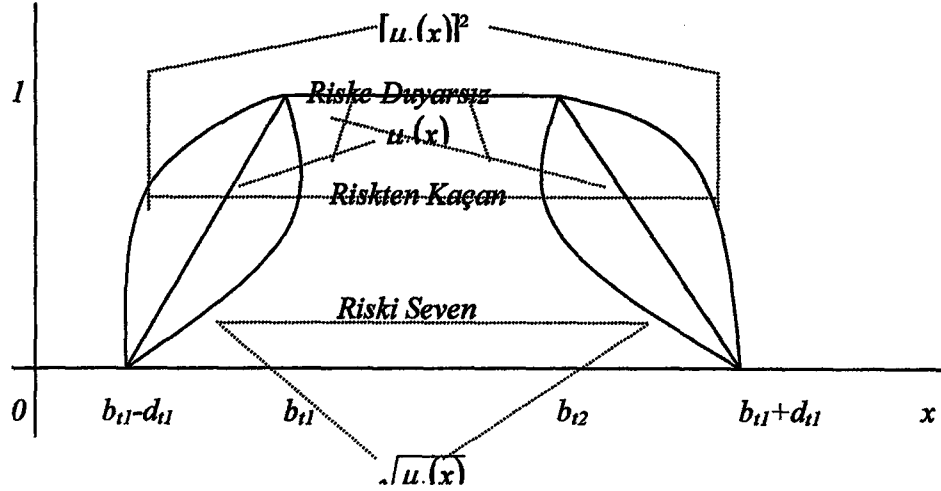
Bulanık bir hedefin sağladığı doyum derecesi, hedefleri niteleyen üyelik fonksiyonlarının üyelik derecesi olarak yorumlanabilir. Bu durum, fayda fonksiyonunun sağladığı doyum derecesinin üyelik derecesi ile gösterilebilmesini sağlar. Bu düşünceden hareketle, farklı risk grubundaki karar vericilerin bulanık hedeflerine ilişkin üyelik fonksiyonları Wang ve Fu tarafından tanımlanmıştır. Riske karşı duyarsız olan bir karar vericinin bulanık hedeflerini, parçalı doğrusal bir fonksiyon olan $\mu_i(x)$ üyelik fonksiyonuyla gösterebiliriz. Bununla birlikte, riskten kaçan bir karar vericinin bulanık hedeflerinin iç büküye bir üyelik fonksiyonuyla, riski seven bir karar vericinin bulanık hedeflerinin ise dış büküye bir üyelik fonksiyonuyla nitelenmesi gerekir. Riske karşı duyarsız olan bir karar verici riskten kaçmaya başladığında $\mu_i(x)$ üyelik fonksiyonunun $[\mu_i(x)]^2$ üyelik fonksiyonuna, riske karşı duyarsız

olan bir karar verici risk almaya başladığında ise $\mu_i(x)$ üyelik fonksiyonunun $\sqrt{\mu_i(x)}$ üyelik fonksiyonuna yaklaştığı Wang ve Fu tarafından ispatlanmıştır. Burada, $(Ax)_i \cong b_i$ şeklindeki bulanık bir hedef aşağıda verilen üyelik fonksiyonlarıyla nitelenebilir (Özkan, 2003).

$$(Ax)_i \cong b_i \quad \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \leq b_i - d_i & \text{ise} \\ [1 - (b_i - (Ax)_i / d_i)]^\psi & ; b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i & \text{ise} \\ 1 & ; b_i = (Ax)_i = b_i & \text{ise} \\ [1 - ((Ax)_i - b_i / d_i)]^\psi & ; b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i & \text{ise} \\ 0 & ; (Ax)_i \geq b_i + d_i & \text{ise} \end{cases} \quad (4.36)$$

$$(Ax)_i \cong b_i \quad \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \leq b_i - d_i & \text{ise} \\ [1 - (b_i - (Ax)_i / d_i)] & ; b_i - d_i \leq (Ax)_i \leq b_i & \text{ise} \\ 1 & ; b_i \leq (Ax)_i \leq b_i & \text{ise} \\ [1 - ((Ax)_i - b_i / d_i)] & ; b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i & \text{ise} \\ 0 & ; (Ax)_i \geq b_i + d_i & \text{ise} \end{cases} \quad (4.37)$$

Burada, ψ parametresi üyelik fonksiyonunun herhangi bir kısmı için 0.5, 1 ve 2 değerlerini alabilirler. $\psi = 1$ olduğunda, (4.36) denkleminde verilen üyelik fonksiyonunun üçgensel bir üyelik fonksiyonu olduğu, (4.37) denkleminde verilen üyelik fonksiyonunun yamuksal bir üyelik fonksiyonu olduğu açıktır. Karar verici belirli bir hedef değerine kadar riskten kaçma eğiliminde iken, diğer bir hedef değerinden sonra risk alma eğiliminde olabilir. Buna göre, üyelik fonksiyonunun $\psi = 0.5$ ile düzenlenen parçası için $\sqrt{\mu_i(x)}$ üyelik fonksiyonuna, $\psi = 2$ ile düzenlenen parçası için $[\mu_i(x)]^2$ üyelik fonksiyonuna ulaşılır. $\psi = 2$ ve $\psi = 0.5$ değerleri için (4.37) denkleminde verilen üyelik fonksiyonu Şekil 6'da grafik olarak gösterilmiştir.



Şekil 6: Farklı Risk Grupları ve üyelik fonksiyonları

$(Ax)_i \leq b_i$ ve $(Ax)_i \geq b_i$ şeklindeki bulanık hedeflerin aşağıda verilen üyelik fonksiyonlarıyla nitelendiğini kabul edelim.

$$(Ax)_i \cong b_i \quad \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \geq b_{i_2} + d_{i_1} \quad \text{ise} \\ \left[1 - (b_{i_2} - (Ax)_i) / d_{i_2}\right]^\psi & ; b_{i_2} \leq (Ax)_i \leq b_{i_2} + d_{i_1} \quad \text{ise} \\ 1 & ; (Ax)_i \leq b_{i_2} \quad \text{ise} \end{cases} \quad (4.38)$$

$$(Ax)_i \cong b_i \quad \Rightarrow \mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; (Ax)_i \leq b_{i_1} + d_{i_1} \quad \text{ise} \\ \left[1 - ((Ax)_i - b_{i_2}) / d_{i_2}\right]^\psi & ; b_{i_1} - d_{i_1} \leq (Ax)_i \leq b_{i_1} \quad \text{ise} \\ 1 & ; (Ax)_i \geq b_{i_1} \quad \text{ise} \end{cases} \quad (4.39)$$

Şimdi, aşağıda verilen genelleştirilmiş bulanık hedef programlama problemini ele alalım.

$$\left. \begin{aligned} (Ax)_i &\cong b_i ; \quad i = 1, 2, K, m_1 \\ (Ax)_i &\leq b_i ; \quad i = m_1 + 1, K, m_2 \\ (Ax)_i &\geq b_i ; \quad i = m_2 + 1, K, m_3 \end{aligned} \right\} \text{Bulanık Hedefler} \quad (4.40)$$

$$\left. \begin{aligned} (Ax)_l &\{=, \leq, \geq\} b_l ; l = 1, 2, K, p \\ x_j &\geq 0 ; j = 1, 2, K, n \end{aligned} \right\} \text{Bulanık Olmayan Kısıtlayıcılar}$$

Karar vericinin bulanık hedefler arasındaki tercih önceliğinin $T_1 > T_2 > K > T_{k-1} > T_k$ olarak verildiğini kabul edilsin. Wang ve Fu'ya göre, karar vericinin $T_1 > T_2 > K > T_{n-1} > T_n$ olarak belirlendiği öncelikli tercih yapısı, $1 > \lambda_1 > \lambda_2 > K > \lambda_{n-1} > \lambda_n > 0$ şeklinde ele alınabilir.

Burada, λ_i değişkeni T_i tercih önceliğinde yer alan bulanık hedef(ler)in doyum derecesini, λ değişkeni ise bulanık hedeflerin minimum işlemcisiyle hesaplanan ortak doyum derecesini gösterir. Bilindiği üzere, tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemlerinde T_i tercih önceliğindeki bulanık hedefler doyurulmadan T_{i+1} önceliğinde yer alan hedef(ler)in doyurulmasıyla ilgilenilmez. Ayrıca, karar vericinin tercih öncelikli yapısının karşılanması, T_i önceliğindeki hedef(ler)in doyum derecesinin, T_{i+1} önceliğindeki hedef(ler)in doyum derecesinden daha yüksek olmasına bağlıdır. Bu durum, her bir öncelik düzeyi için M_n ile gösterilen bir ceza maliyetinin tanımlanmasına yol açar. Burada T_i önceliğindeki hedeflere ilişkin ceza maliyetinin, T_{i+1} önceliğindeki hedef(ler)e ilişkin ceza maliyetinden küçük olması gerekir. Diğer bir ifadeyle, hedefler arasındaki tercih önceliğinin $T_1 > T_2 > K > T_{n-1} > T_n$ olarak belirlenmesi, ceza maliyetlerinin $0 < M_1 < M_2 < K < M_{n-1} < M_n$ şeklinde tanımlanmasını gerektirir. K'nıncı tercih önceliğine ilişkin ceza maliyeti $M_k = (10^{m_k})^{k-1}$ ifadesi ile belirlenebilir. Burada, m_k değişkeni bulanık hedef programlama problemindeki hedef sayısını göstermektedir. Bu durumda, hedefler arasındaki tercih önceliği, doyum düzeyleri ve ceza maliyetlerine göre aşağıda verilen kısıtlayıcılarla ifade edilir (Özkan, 2003).

$$\begin{aligned} M_k \lambda' + \lambda_k &\geq 1 \\ M_k \lambda' + \lambda &\leq 1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Bu kısıtlayıcılar, tercih öncelikli bulanık hedef programlama probleminin tek bir problem ile çözümünü olanaklı kılar. λ' değişkeni, $\lambda' = \max_i \left(\frac{1 - \lambda_i}{M_i} \right)$ ifadesiyle tanımlanır. Bu durumda, (4.40) denkleminde verilen tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

Max λ

Kısıtlayıcılar

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{b_i^k - (Ax)_i^k}{d_i^k} \right)^w &\geq \lambda_k \quad ; \quad , = 1, 2, K, m_1, m_2 + 1, K, m_4 \\ \left(1 - \frac{(Ax)_i^k - b_{i_2}^k}{d_{i_2}^k} \right)^w &\geq \lambda_k \quad ; \quad , = 1, 2, K, m_1, m_2 + 1, K, m_4 \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
M_k \lambda' + \lambda_k &\geq 1 \\
M_k \lambda' + \lambda &\leq 1 \\
\lambda, \lambda', \lambda_k &\leq 1 \\
x, \lambda, \lambda', \lambda_k &\geq 0
\end{aligned}$$

Bu problem, bulanık hedeflere ilişkin üyelik fonksiyonlarının $[\mu_i(x)]^\psi \geq \lambda$ eşitsizliğinde yerine konması ile elde edilir. Burada, λ değerinin artması karar vericinin doyum düzeyinin artması anlamına gelir. Bu problem, $\psi = 1$ olduğunda bir doğrusal programlama problemine, $\psi = 0.5$ ve/veya $\psi = 2$ olduğunda ise bir doğrusal olmayan programlama problemine dönüşür (Özkan, 2003).

Anlatılan kuramsal yaklaşımı sayısal bir örnek üzerine inceleyelim.

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= 30x_1 + 40x_2 + 50x_3 \cong 20000 \\
g_2(x) &= 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 \gtrsim 2000 \\
g_3(x) &= 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \lesssim 1800 \\
x_1 &\geq 90 \\
x_2 &\geq 90 \\
x_3 &\geq 90 \\
3x_1 - 2x_3 &= 0 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Birinci tercih önceliğinde g_1 hedefinin, ikinci tercih önceliğinde g_2 hedefinin ve üçüncü tercih önceliğinde g_3 hedefinin doyurulması gerektiğini düşünelim. Diğer bir ifadeyle, bulanık hedefler için karar vericini yaptığı öncelik sıralaması, $1 > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda > 0$ ve $0 < M_1 < M_2 < M_3$ ifadeleri ile gösterilir. Bulanık hedef programlama problemimizde üç hedef ve üç tane de öncelik düzeyi bulunmaktadır. Buna göre, tercih önceliklerine ilişkin ceza maliyetleri $M_1 = (10^3)^{1-1} = 1$, $M_2 = (10^3)^{2-1} = 1000$ ve $M_3 = (10^3)^{3-1} = 1000000$ olarak hesaplanır. Belirlenen ceza maliyetleri, tercih öncelikli bulanık hedef programlama probleminin tek bir problem olarak çözülebilmesini sağlayacaktır. Bulanık hedeflerin üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi olsun.

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0 & ; 30x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 15000 \\ \left(1 - \frac{20000 - (30x_1 + 40x_2 + 50x_3)}{5000}\right)^\psi & ; 15000 \leq 30x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 20000 \\ 1 & ; 30x_1 + 40x_2 + 50x_3 = 20000 \\ \left(1 - \frac{30x_1 + 40x_2 + 50x_3 - 20000}{10000}\right)^\psi & ; 20000 \leq 30x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 30000 \\ 0 & ; 30x_1 + 40x_2 + 50x_3 \geq 30000 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0 & ; 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geq 1900 \\ \left(1 - \frac{2000 - (3x_1 + 3x_2 + 8x_3)}{100}\right)^\psi & ; 1900 \leq 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 2000 \\ 1 & ; 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 2000 \end{cases}$$

$$\mu_3(x) = \begin{cases} 0 & ; 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq 2000 \\ \left(1 - \frac{4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 1800}{200}\right)^\psi & ; 1800 \leq 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 2000 \\ 1 & ; 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 1800 \end{cases}$$

Bu durumda, söz konusu tercih öncelikli bulanık hedef programlama problemi, $[\mu_i(x)]^\psi \geq \lambda$ ilişkisinden hareketle tek bir problem olarak ifade edilebilir. Şöyle ki;

max λ

Kısıtlayıcılar

$$\left(1 - \frac{20000 - (30x_1 + 40x_2 + 50x_3)}{5000}\right)^\psi \geq \lambda_1 \quad \text{Birinci tercih önceliği}$$

$$\left(1 - \frac{30x_1 + 40x_2 + 50x_3 - 20000}{10000}\right)^\psi \geq \lambda_1 \quad \text{Birinci tercih önceliği}$$

$$\left(1 - \frac{2000 - (3x_1 + 3x_2 + 8x_3)}{100}\right)^\psi \geq \lambda_2 \quad \text{İkinci tercih önceliği}$$

$$\left(1 - \frac{4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 1800}{200}\right)^\psi \geq \lambda_3 \quad \text{Üçüncü tercih önceliği}$$

$$x_1 \geq 90$$

$$x_2 \geq 90$$

$$x_3 \geq 90$$

$$3x_1 - 2x_3 = 0$$

$$\lambda' + \lambda_1 \geq 1$$

Birinci tercih önceliği

$$1000\lambda' + \lambda_2 \geq 1$$

İkinci tercih önceliği

$$1000000\lambda' + \lambda_3 \geq 1$$

Üçüncü tercih önceliği

$$\lambda' + \lambda \leq 1$$

Birinci tercih önceliği

$$1000\lambda' + \lambda \leq 1$$

İkinci tercih önceliği

$$1000000\lambda' + \lambda \leq 1$$

Üçüncü tercih önceliği

$$\lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

Eğer karar vericinin riske karşı duyarsız olduğu kabul edilirse, $\psi = 1$ değeri ile bir doğrusal programlama problemine ulaşılır. Söz konusu, doğrusal programlama problemi ve bu problemin optimal çözüm değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\max \lambda$$

Kısıtlayıcılar

$$\left(1 - \frac{20000 - (30x_1 + 40x_2 + 50x_3)}{5000}\right) \geq \lambda_1$$

$$\left(1 - \frac{30x_1 + 40x_2 + 50x_3 - 20000}{10000}\right) \geq \lambda_1$$

$$\left(1 - \frac{2000 - (3x_1 + 3x_2 + 8x_3)}{100}\right) \geq \lambda_2$$

$$\left(1 - \frac{4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 1800}{200}\right) \geq \lambda_3$$

$$x_1 \geq 90$$

$$x_2 \geq 90$$

$$x_3 \geq 90$$

$$3x_1 - 2x_3 = 0$$

$$\lambda' + \lambda_1 \geq 1$$

$$1000\lambda' + \lambda_2 \geq 1$$

$$1000000\lambda' + \lambda_3 \geq 1$$

$$\lambda' + \lambda \leq 1$$

$$1000\lambda' + \lambda \leq 1$$

$$1000000\lambda' + \lambda \leq 1$$

$$\lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

$$\max \lambda$$

Kısıtlayıcılar

$$30x_1 + 40x_2 + 50x_3 - 5000\lambda_1 \geq 15000$$

$$30x_1 + 40x_2 + 50x_3 + 10000\lambda_1 \leq 30000$$

$$3x_1 + 3x_2 + 8x_3 - 100\lambda_2 \geq 1900$$

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 200\lambda_3 \leq 2000$$

$$x_1 \geq 90$$

$$x_2 \geq 90$$

$$x_3 \geq 90$$

$$3x_1 - 2x_3 = 0$$

$$\lambda' + \lambda_1 \geq 1$$

$$1000\lambda' + \lambda_2 \geq 1$$

$$1000000\lambda' + \lambda_3 \geq 1$$

$$\lambda' + \lambda \leq 1$$

$$1000\lambda' + \lambda \leq 1$$

$$1000000\lambda' + \lambda \leq 1$$

$$\lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

Optimal
Çözüm

$$x_1 = 90$$

$$x_2 = 263.7499$$

$$x_3 = 135$$

$$\lambda = 0.19375$$

$$\lambda' = 0$$

$$\lambda_1 = 0.9999$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 0.19375$$

Eğer karar vericinin riski seven bir karar verici olduğu düşünülürse, $\psi = 0.5$ değerinin seçilmesi gerekir. Bu durumda, $[\mu_i(x)]^{0.5} \geq \lambda$ eşitsizliği $[\mu_i(x)] \geq \lambda^2$ olarak düzenlenebilir. Karar vericinin bulanık hedeflere ilişkin öncelikli tercih yapısının değişmemesi halinde, doğrusal olmayan bir programlama problemine ulaşılır. Söz konusu problem ve bu problemin LINGO paket programıyla elde edilen optimal çözümü aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{l}
 \max \lambda \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 \left(1 - \frac{20000 - (30x_1 + 40x_2 + 50x_3)}{5000}\right) \geq \lambda_1^2 \\
 \left(1 - \frac{30x_1 + 40x_2 + 50x_3 - 20000}{10000}\right) \geq \lambda_1^2 \\
 \left(1 - \frac{2000 - (3x_1 + 3x_2 + 8x_3)}{100}\right) \geq \lambda_2^2 \\
 \left(1 - \frac{4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 1800}{200}\right) \geq \lambda_3^2 \\
 x_1 \geq 90 \\
 x_2 \geq 90 \\
 x_3 \geq 90 \\
 3x_1 - 2x_3 = 0 \\
 \lambda' + \lambda_1 \geq 1 \\
 1000\lambda' + \lambda_2 \geq 1 \\
 1000000\lambda' + \lambda_3 \geq 1 \\
 \lambda' + \lambda \leq 1 \\
 1000\lambda' + \lambda \leq 1 \\
 1000000\lambda' + \lambda \leq 1 \\
 \lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1 \\
 x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 \max \lambda \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \\
 30x_1 + 40x_2 + 50x_3 - 5000\lambda_1^2 \geq 15000 \\
 30x_1 + 40x_2 + 50x_3 + 10000\lambda_1^2 \leq 30000 \\
 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 - 100\lambda_2^2 \geq 1900 \\
 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 200\lambda_3^2 \leq 2000 \\
 x_1 \geq 90 \\
 x_2 \geq 90 \\
 x_3 \geq 90 \\
 3x_1 - 2x_3 = 0 \\
 \lambda' + \lambda_1 \geq 1 \\
 1000\lambda' + \lambda_2 \geq 1 \\
 1000000\lambda' + \lambda_3 \geq 1 \\
 \lambda' + \lambda \leq 1 \\
 1000\lambda' + \lambda \leq 1 \\
 1000000\lambda' + \lambda \leq 1 \\
 \lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1 \\
 x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Optimal} \\
 \text{Çözüm} \\
 x_1 = 90 \\
 x_2 = 263.749 \\
 x_3 = 135 \\
 \lambda = 0.44017 \\
 \lambda' = 0 \\
 \lambda_1 = 0.9999 \\
 \lambda_2 = 1 \\
 \lambda_3 = 0.44017
 \end{array}$$

5. UYGULAMA

Çalışmada uygulama olarak X danışmanlık firması incelenmiştir. X Danışmanlık, yeni kurulmuş bir danışmanlık firması olup, bünyesinde 4 danışman çalışmaktadır. Proje yöneticisi firmanın bu kaynak kısırı altında ideal olarak 3 adet projeye danışmanlık verilebileceğini düşünmektedir. Fakat proje yöneticisi, proje miktarını kesin olarak üç olarak belirlemekten kaçınmakta ve yapılabilir proje miktarı için ± 1 toleransa izin vermektedir. Aynı hafta içinde, yapılan pazarlama çalışmaları sonucunda, firmaya altı adet projeye danışmanlık etmeleri önerisi gelmiştir. Bu durum, proje yöneticisini hangi projelerin seçileceği konusunda çalışmalar yapmaya itmektedir. Proje Yöneticisi, projelerin seçimi için beş kriter belirlemiştir. Bu kriterler; maliyet, risk, zaman, müşteriye kazandırılacak etkinlik ve kazanılacak prestijdir. Proje yöneticisi, verilerin kesin olmaması nedeniyle, bulanık karar verme yöntemlerinden faydalanmak istemektedir.

Proje yöneticisi -karar verici- öncelikle kriterlerin birbirine göre önemlerini bulmak üzere, geçmiş bilgi ve tecrübelerini kullanarak kriterler için ikili karşılaştırma matrisi oluşturmuştur. Karar verici, bu matrisin verilerini Saaty'nin ölçeğinden faydalanarak oluşturmuştur.

Çizelge 5-1: Kriterler İçin İkili Karşılaştırma Matrisi

	MALİYET	RİSK	ZAMAN	ETKİNLİK	PRESTİJ
MALİYET	(1,1,1)	(1,2,3)	(3,4,5)	(3/2,2,5/2)	(5/2,3,7/2)
RİSK	(1/3,1/2,1)	(1,1,1)	(5/2,3,7/2)	(3/2,2,5/2)	(3/2,2,5/2)
ZAMAN	(1/5,1/4,1/3)	(2/7,1/3,2/7)	(1,1,1)	(1/3,1/2,1)	(1,2,3)
ETKİNLİK	(2/5,1/2,2/3)	(2/3,1/2,2/5)	(1,2,3)	(1,1,1)	(2/7,1/3,2/5)
PRESTİJ	(2/7,1/3,2/5)	(2/5,1/2,2/5)	(1/3,1/2,1)	(5/2,3,7/2)	(1,1,1)

Proje yöneticisi, ikinci aşamada her bir kritere göre, tüm projelere Saaty'nin ölçeğine göre önem ağırlıkları atamıştır.

Çizelge 5-2: Karar Vericinin Oluşturduğu Kriterlere Göre Projelerin Değerlendirilme Verileri .

	PROJE 1	PROJE 2	PROJE 3	PROJE 4	PROJE 5	PROJE 6
MALİYET	(6,7,8)	(5,6,7)	(2,3,4)	(8,9,9)	(1,1,2)	(2,3,4)
RİSK	(2,3,4)	(7,8,9)	(1,1,2)	(4,5,6)	(1,1,2)	(8,9,9)
ZAMAN	(2,3,4)	(6,7,8)	(6,7,8)	(6,7,8)	(4,5,6)	(5,6,7)
ETKİNLİK	(4,5,6)	(3,4,5)	(1,1,2)	(8,9,9)	(4,5,6)	(2,3,4)
PRESTİJ	(8,9,9)	(2,3,4)	(1,1,2)	(6,7,8)	(2,3,4)	(4,5,6)

Bu veriler oluşturulduktan sonra, her bir kritere göre tüm projelerin birbirine göre önem derecelerini bulmak üzere bu bulanık sayıları birbirinden çıkarmak suretiyle birbirine göre önemlerini bulabiliriz. Aşağıda maliyet kriterine göre projelerin birbirine göre önemleri bulanık üçgensel sayılarla verilmektedir.

Çizelge 5-3: Maliyet Kriterine göre Projelerin birbirine göre önem dereceleri.

	PROJE 1	PROJE 2	PROJE 3	PROJE 4	PROJE 5	PROJE 6
PROJE 1	(1,1,1)	(1,2,3)	(5,6,7)	(1/5,1/4,1/3)	(6,7,8)	(5,6,7)
PROJE 2	(1/3,1/2,1)	(1,1,1)	(3,4,5)	(1/4,1/3,1/2)	(4,5,6)	(2,3,4)
PROJE 3	(1/7,1/6,1/5)	(1/5,1/4,1/3)	(1,1,1)	(1/6,1/5,1/4)	(1,2,3)	(1,1,1)
PROJE 4	(3,4,5)	(2,3,4)	(4,5,6)	(1,1,1)	(7,8,9)	(4,5,6)
PROJE 5	(1/8,1/7,1/6)	(1/6,1/5,1/4)	(1/3,1/2,1)	(1/9,1/8,1/7)	(1,1,1)	(1/3,1/2,1)
PROJE 6	(1/7,1/6,1/5)	(1/4,1/3,1/2)	(1,1,1)	(1/6,1/5,1/4)	(1,2,3)	(1,1,1)

Örneğin; Poje 1'in önemi (6,7,8) bulanık üçgensel sayısıyla, Proje 2'nin önemi ise, (5,6,7)) bulanık üçgensel sayısıyla ifade edilmektedir. O halde, maliyet kriterine göre Proje 1'in Proje 2'ye göre önemi (1,1,2) olacaktır. Dolayısıyla, maliyet kriterine göre Proje 2'nin Proje 1'e göre önemi de (1/2,1,1) olacaktır.

Çizelge 5-4: Risk Kriterine göre Projelerin birbirine göre önem dereceleri.

	PROJE 1	PROJE 2	PROJE 3	PROJE 4	PROJE 5	PROJE 6
PROJE 1	(1,1,1)	(1/6,1/5,1/4)	(1,2,3)	(1/3,1/2,1)	(1,2,3)	(1/7,1/6,1/5)
PROJE 2	(4,5,6)	(1,1,1)	(6,7,8)	(2,3,4)	(6,7,8)	(1,1,1)
PROJE 3	(1/3,1/2,1)	(1/8,1/7,1/6)	(1,1,1)	(1/5,1/4,1/3)	(1,1,1)	(1/9,1/8,1/7)
PROJE 4	(1,2,3)	(1/4,1/3,1/2)	(3,4,5)	(1,1,1)	(3,4,5)	(1/5,1/4,1/3)
PROJE 5	(1/3,1/2,1)	(1/8,1/7,1/6)	(1,1,1)	(1/5,1/4,1/3)	(1,1,1)	(1/9,1/8,1/7)
PROJE 6	(5,6,7)	(1,1,1)	(7,8,9)	(3,4,5)	(7,8,9)	(1,1,1)

Çizelge 5-5: Zaman Kriterine göre Projelerin birbirine göre önem dereceleri.

	PROJE 1	PROJE 2	PROJE 3	PROJE 4	PROJE 5	PROJE 6
PROJE 1	(1,1,1)	(1/6,1/5,1/4)	(1/6,1/5,1/4)	(1/6,1/5,1/4)	(1/4,1/3,1/2)	(1/5,1/4,1/3)
PROJE 2	(4,5,6)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,2,3)	(1,1,2)
PROJE 3	(4,5,6)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,2,3)	(1,1,2)
PROJE 4	(4,5,6)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,2,3)	(1,1,2)
PROJE 5	(2,3,4)	(1/3,1/2,1)	(1/3,1/2,1)	(1/3,1/2,1)	(1,1,1)	(1,1,2)
PROJE 6	(3,4,5)	(1/2,1,1)	(1/2,1,1)	(1/2,1,1)	(1/2,1,1)	(1,1,1)

Çizelge 5-6: Etkinlik Kriterine göre Projelerin birbirine göre önem dereceleri.

	PROJE 1	PROJE 2	PROJE 3	PROJE 4	PROJE 5	PROJE 6
PROJE 1	(1,1,1)	(1,1,2)	(3,4,5)	(1/5,1/4,1/3)	(1,1,1)	(1,2,3)
PROJE 2	(1/2,1,1)	(1,1,1)	(2,3,4)	(1/6,1/5,1/4)	(1/2,1,1)	(1,1,2)
PROJE 3	(1/5,1/4,1/3)	(1/4,1/3,1/2)	(1,1,1)	(1/9,1/8,1/7)	(1/5,1/4,1/3)	(1/3,1/2,1)
PROJE 4	(3,4,5)	(4,5,6)	(7,8,9)	(1,1,1)	(3,4,5)	(5,6,7)
PROJE 5	(1,1,1)	(1,1,2)	(3,4,5)	(1/5,1/4,1/3)	(1,1,1)	(1,2,3)
PROJE 6	(1/3,1/2,1)	(1/2,1,1)	(1,2,3)	(1/7,1/6,1/5)	(1/3,1/2,1)	(1,1,1)

Çizelge 5-7: Prestij Kriterine göre Projelerin birbirine göre önem dereceleri.

	PROJE 1	PROJE 2	PROJE 3	PROJE 4	PROJE 5	PROJE 6
PROJE 1	(1,1,1)	(5,6,7)	(7,8,9)	(1,2,3)	(5,6,7)	(3,4,5)
PROJE 2	(1/7,1/6,1/5)	(1,1,1)	(1,2,3)	(1/5,1/4,1/3)	(1,1,1)	(1/3,1/2,1)
PROJE 3	(1/9,1/8,1/7)	(1/3,1/2,1)	(1,1,1)	(1/7,1/6,1/5)	(1/3,1/2,1)	(1/5,1/4,1/3)
PROJE 4	(1/3,1/2,1)	(3,4,5)	(5,6,7)	(1,1,1)	(3,4,5)	(1,2,3)
PROJE 5	(1/7,1/6,1/5)	(1,1,1)	(1,2,3)	(1/5,1/4,1/3)	(1,1,1)	(1/3,1/2,1)
PROJE 6	(1/5,1/4,1/3)	(1,2,3)	(3,4,5)	(1/3,1/2,1)	(1,2,3)	(1,1,1)

Bu ikili karşılaştırma matrisleri elde edildikten sonra, Chang'ın boyut analizi metoduyla bu verilere bulanık analitik hiyerarşi prosesi yönteminin uygulanmasına karar verilmiştir. Boyut analizindeki ilk adım olan bulanık sentetik boyut değeri (s) bulunur. Bulanık sentetik değerin bulunmasının ardından sentetik değerlerin karşılaştırması yapılır ve bu karşılaştırmada her bir alternatifin/kriterin diğer bir alternatiften/kriterden daha iyi olması ihtimali incelenir. Ardından, elde edilen konveks bulanık sayının diğer bir konveks bulanık sayıdan büyük olması ihtimali incelenir ve bu sayılardan en küçük olanı seçilir. Artık elde edilen sayılar birer bulanık sayı değildir. Bunlar normalize edilmemiş önem ağırlıklarıdır. Son adım olan dördüncü adım da ise; bu değerler normalize edilir. Elde edilen normalize edilmiş ağırlıklar kıyaslanan alternatiflerin ya da kriterlerin birbirine göre önem ağırlıklarını verir. Yukarıdaki

ikili karşılaştırma matrisleri için hesaplanan sentetik boyut değerleri normalize edilmemiş ağırlıklar ve normalize ağırlıklar aşağıdaki çizelgelerde verilmektedir.

Çizelge 5-8: Boyut Analizi sonucunda elde edilen kriterlerin önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
MALİYET	(0.21,0.35,0.57)	1,00	0,52
RİSK	(0.16,0.25,0.40)	0,65	0,34
ZAMAN	(0.06,0.12,0.22)	0,05	0,03
ETKİNLİK	(0.07,0.13,0.22)	0,05	0,03
PRESTİJ	(0.10,0.16,0.25)	0,18	0,09

Çizelge 5-9: Boyut Analiziyle projelerin maliyet kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
PROJE 1	(0.20,0.30,0.45)	0,81	0,38
PROJE 2	(0.12,0.19,0.30)	0,14	0,14
PROJE 3	(0.04,0.06,0.10)	0,00	0,00
PROJE 4	(0.23,0.35,0.53)	0,47	0,47
PROJE 5	(0.02,0.03,0.06)	0,00	0,00
PROJE 6	(0.04,0.06,0.10)	0,00	0,00

Çizelge 5-10 Boyut Analiziyle projelerin risk kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
PROJE 1	(0.04,0.08,0.14)	0,00	0,00
PROJE 2	(0.22,0.31,0.45)	0,75	0,43
PROJE 3	(0.03,0.04,0.06)	0,00	0,00
PROJE 4	(0.09,0.15,0.24)	0,00	0,00
PROJE 5	(0.03,0.04,0.06)	0,00	0,00
PROJE 6	(0.26,0.38,0.55)	1,00	0,57

Çizelge 5-11: Boyut Analiziyle projelerin zaman kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
PROJE 1	(0.10,0.15,0.23)	0,00	0,00
PROJE 2	(0.20,0.33,0.53)	0,27	0,11
PROJE 3	(0.20,0.33,0.53)	1,00	0,41
PROJE 4	(0.17,0.28,0.47)	0,16	0,07
PROJE 5	(0.13,0.22,0.39)	0,00	0,00
PROJE 6	(0.40,0.67,1.03)	1,00	0,41

Çizelge 5-12: Boyut Analiziyle projelerin etkinlik kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
PROJE 1	(0.10,0.18,0.28)	0,00	0,00
PROJE 2	(0.07,0.12,0.21)	0,00	0,00
PROJE 3	(0.07,0.12,0.19)	0,00	0,00
PROJE 4	(0.31,0.46,0.69)	1,00	0,81
PROJE 5	(0.11,0.17,0.28)	0,00	0,00
PROJE 6	(0.14,0.23,0.38)	0,24	0,19

Çizelge 5-13: Boyut Analiziyle projelerin prestij kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
PROJE 1	(0.26,0.41,0.63)	1,00	0,56
PROJE 2	(0.04,0.08,0.14)	0,00	0,00
PROJE 3	(0.03,0.05,0.09)	0,00	0,00
PROJE 4	(0.16,0.26,0.43)	0,54	0,30
PROJE 5	(0.04,0.08,0.15)	0,00	0,00
PROJE 6	(0.11,0.19,0.33)	0,25	0,14

Çizelge 5-14: Bulanık AHP uygulanmasının sonucunda elde edilen skorlar ve projeler için öncelik sıralaması.

	Bulanık AHP Skoru	Öncelik Sırası
PROJE 1	0,248	2
PROJE 2	0,2223	4
PROJE 3	0,0123	5
PROJE 4	0,2978	1
PROJE 5	0	6
PROJE 6	0,2244	3

Çizelge 5-15: Kriterlerin önem ağırlıkları. (Bulanık R-AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
MALİYET	(0.60,1.00,1.67)	1,00	0,51
RİSK	(0.46,0.71,1.17)	0,66	0,34
ZAMAN	(0.19,0.34,0.64)	0,05	0,03
ETKİNLİK	(0.21,0.36,0.64)	0,05	0,03
PRESTİJ	(0.30,0.44,0.73)	0,19	0,10

Çizelge 5-16: Projelerin maliyet kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık R-AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
PROJE 1	(0.59,0.86,1.25)	0,80	0,39
PROJE 2	(0.34,0.53,0.83)	0,25	0,12
PROJE 3	(0.11,0.18,0.28)	0,00	0,00
PROJE 4	(0.68,1.00,1.48)	1.00	0,49
PROJE 5	(0.07,0.09,0.17)	0,00	0,00
PROJE 6	(0.11,0.18,0.28)	0,00	0,00

Çizelge 5-17 Projelerin risk kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık RAHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
PROJE 1	(0.11,0.20,0.35)	0,00	0,00
PROJE 2	(0.59,0.83,1.17)	0,73	0,42
PROJE 3	(0.08,0.10,0.15)	0,00	0,00
PROJE 4	(0.25,0.40,0.62)	0,00	0,00
PROJE 5	(0.08,0.10,0.15)	0,00	0,00
PROJE 6	(0.71,1.00,1.42)	1,00	0,58

Çizelge 5-18: Projelerin zaman kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık R-AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
PROJE 1	(0.16,0.23,0.35)	0,00	0,00
PROJE 2	(0.32,0.48,0.81)	0,25	0,11
PROJE 3	(0.32,0.48,0.81)	1,00	0,42
PROJE 4	(0.27,0.42,0.72)	0,13	0,06
PROJE 5	(0.21,0.32,0.60)	0,00	0,00
PROJE 6	(0.64,1.00,1.57)	1,00	0,42

Çizelge 5-19: Projelerin etkinlik kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık R-AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
PROJE 1	(0.24,0.39,0.57)	0,00	0,00
PROJE 2	(0.16,0.27,0.43)	0,00	0,00
PROJE 3	(0.17,0.26,0.39)	0,00	0,00
PROJE 4	(0.71,1.00,1.40)	1,00	0,90
PROJE 5	(0.24,0.36,0.57)	0,00	0,00
PROJE 6	(0.32,0.50,0.78)	0,11	0,10

Çizelge 5-20: Projelerin prestij kriterine göre önem ağırlıkları. (Bulanık R-AHP)

	S Değerleri	Ağırlık (W)	Normalize Ağırlık (w)
PROJE 1	(0.68,1.00,1.47)	1,00	0,62
PROJE 2	(0.11,0.19,0.33)	0,00	0,00
PROJE 3	(0.08,0.12,0.21)	0,00	0,00
PROJE 4	(0.42,0.65,1.00)	0,48	0,29
PROJE 5	(0.11,0.20,0.34)	0,00	0,00
PROJE 6	(0.30,0.47,0.77)	0,15	0,09

Çizelge 5-21: Bulanık R-AHP uygulanmasının sonucunda elde edilen skorlar ve projeler için öncelik sıralaması.

	Bulanık R-AHP Skoru	Öncelik Sırası
PROJE 1	0,2547	2
PROJE 2	0,2073	4
PROJE 3	0,0126	5
PROJE 4	0,3097	1
PROJE 5	0	6
PROJE 6	0,2209	3

Bu aşamada, bulanık AHP ile R-AHP mevcut verilere uygulandıktan sonra, Bulanık TOPSIS metodu da uygulanarak, hem metodun hem de çözümün doğruluğu test edilmeye çalışılacaktır. Görüldüğü gibi; Bulanık AHP ve Bulanık R-AHP birbiriyle tutarlı sonuçlar vermiştir. Aynı mevcut probleme TOPSIS metodunun uygulanması aşağıda gösterilmektedir.

Burada; karar vericinin bulanık AHP metodu ile elde ettiği ağırlıkları kullanarak, bu ağırlıklardan en çok $\pm$ %5 tolerans verilebileceğini kabul edelim. Karar vericinin yeniden bulanıklaştırdığı ağırlıklar böylece $w_m = (0.405, 0.450, 0.495)$, $w_r = (0.270, 0.300, 0.330)$, $w_z = (0.135, 0.150, 0.165)$, $w_e = (0.018, 0.020, 0.022)$ ve $w_p = (0.072, 0.080, 0.088)$ olur.

Çizelge 5-22: TOPSIS metodunun kullanılacağı ham karar matrisi

	MALİYET	RİSK	ZAMAN	ETKİNLİK	PRESTİJ
	w_m	w_r	w_z	w_e	w_p
PROJE 1	(6,7,8)	(2,3,4)	(2,3,4)	(4,5,6)	(8,9,9)
PROJE 2	(5,6,7)	(7,8,9)	(6,7,8)	(3,4,5)	(2,3,4)
PROJE 3	(2,3,4)	(1,1,2)	(6,7,8)	(1,1,2)	(1,1,2)
PROJE 4	(8,9,9)	(4,5,6)	(6,7,8)	(8,9,9)	(6,7,8)
PROJE 5	(1,1,2)	(1,1,2)	(4,5,6)	(4,5,6)	(2,3,4)
PROJE 6	(2,3,4)	(8,9,9)	(5,6,7)	(2,3,4)	(4,5,6)

Adım 1: Normalize Edilmiş Bulanık Karar Matrisinin Yapılandırılması: Her bir kritere göre tüm projelerin performanslarını gösteren bulanık üçgensel sayıların toplamı (Sütun Toplamı) alınır. Her bir kritere göre her bir projenin performansı bu toplam değerine bölünür. Normalize edilmiş karar matrisi oluşturulur.

Çizelge 5-23: Normalize Edilmiş Bulanık Karar Matrisi.

PROJE	MALİYET	RİSK	ZAMAN	ETKİNLİK	PRESTİJ
	w_m	w_r	w_z	w_e	w_p
1	(0.518,0.515,0.525)	(0.172,0.223,0.268)	(0.162,0.204,0.234)	(0.381,0.399,0.426)	(0.611,0.682,0.716)
2	(0.432,0.441,0.462)	(0.595,0.602,0.604)	(0.467,0.475,0.485)	(0.286,0.319,0.355)	(0.179,0.227,0.272)
3	(0.173,0.221,0.264)	(0.074,0.086,0.134)	(0.467,0.475,0.485)	(0.080,0.095,0.142)	(0.076,0.089,0.136)
4	(0.593,0.662,0.691)	(0.344,0.372,0.403)	(0.467,0.475,0.485)	(0.640,0.718,0.763)	(0.531,0.537,0.543)
5	(0.074,0.086,0.132)	(0.074,0.086,0.134)	(0.323,0.229,0.351)	(0.381,0.399,0.426)	(0.179,0.227,0.272)
6	(0.173,0.221,0.264)	(0.604,0.669,0.689)	(0.404,0.407,0.409)	(0.191,0.239,0.284)	(0.358,0.379,0.407)

Adım 2: Bulanık Ağırlıklandırılmış Normalize Karar Matrisinin Yapılandırılması: w_i ağırlıklarıyla her projenin ilgili kritere göre önem derecesini -performansını- gösteren bulanık üçgensel sayıyla çarpılarak ağırlıklandırılmış normalize edilmiş bulanık karar matrisi yapılandırılır.

Çizelge 5-24: Bulanık Ağırlıklandırılmış Normalize Karar Matrisinin Yapılandırılması

PROJE	MALİYET	RİSK	ZAMAN	ETKİNLİK	PRESTİJ
1	(0.210,0.232,0.261)	(0.046,0.067,0.089)	(0.022,0.031,0.039)	(0.007,0.008,0.009)	(0.044,0.055,0.063)
2	(0.175,0.199,0.228)	(0.161,0.181,0.199)	(0.063,0.071,0.080)	(0.005,0.006,0.008)	(0.013,0.018,0.024)
3	(0.070,0.099,0.131)	(0.020,0.026,0.044)	(0.063,0.071,0.080)	(0.001,0.002,0.003)	(0.005,0.007,0.012)
4	(0.240,0.298,0.342)	(0.093,0.111,0.133)	(0.063,0.071,0.080)	(0.012,0.014,0.017)	(0.038,0.043,0.048)
5	(0.030,0.039,0.065)	(0.020,0.026,0.044)	(0.044,0.051,0.058)	(0.007,0.008,0.009)	(0.013,0.18,0.24)
6	(0.070,0.099,0.131)	(0.163,0.201,0.227)	(0.055,0.061,0.067)	(0.003,0.005,0.006)	(0.026,0.030,0.036)

Adım 3: Bulanık İdeal ve Negatif-İdeal Çözümlerin Belirlenmesi: Tüm kriterler –sütunlar- için en büyük ve en küçük değerler seçilir. En büyük değerler ideal çözümü, en küçük değerler ise negatif ideal çözümü temsil eder.

Çizelge 5-25: Bulanık İdeal ve Bulanık Negatif İdeal Çözümlerin Belirlenmesi.

A^*	(0.030,0.039,0.065)	(0.020,0.026,0.044)	(0.022,0.031,0.039)	(0.012,0.014,0.017)	(0.044,0.055,0.063)
A^-	(0.240,0.298,0.342)	(0.163,0.201,0.227)	(0.063,0.071,0.080)	(0.001,0.002,0.003)	(0.005,0.007,0.012)

Adım 4: Bulanık Ayırma Ölçüsünün hesaplanması: (2.31) ve (2.32) denkleminde gerekli işlemler yapılarak bulanık ayırma ölçüsü hesaplanır.

Çizelge 5-26: Bulanık Ayırma Ölçüsü

	S*	S-
PROJE 1	(0.182,0.197,0.201)	(0.146,0.162,0.174)
PROJE 2	(0.209,0.229,0.232)	(0.102,0.118,199)
PROJE 3	(0.070,0.088,0.094)	(0.174,0.265,0.280)
PROJE 4	(0.227,0.276,0.294)	(0.097,0.102,0.308)
PROJE 5	(0.038,0.042,0.044)	(0.145,0.313,0.333)
PROJE 6	(0.153,0.189,0.199)	(0.052,0.200,0.213)

Adım 5: Bulanık İdeal Çözüme Bağlı Yakınlığın Hesaplanması: Bulanık İdeal Çözüme bağlı yakınlık (2.33) denkleminde faydalanılarak hesaplanır.

Çizelge 5-27: TOPSIS metodunun verdiği öncelik sıralaması

	C	ALDIĞI DEĞER	ÖNCELİK SIRALAMASI
PROJE 1	C1*	(0.389,0.451,0.530)	4
PROJE 2	C2*	(0.236,0.340,0.641)	5
PROJE 3	C3*	(0.466,0.751,1.146)	2
PROJE 4	C4*	(0.161,0.270,0.952)	6
PROJE 5	C5*	(0.384,0.881,1.819)	1
PROJE 6	C6*	(0.125,0.514,1.040)	3

Görüldüğü gibi; TOPSIS metodu, bulanık analitik hiyerarşi prosesi ve bulanık düzeltilmiş analitik hiyerarşi prosesi metotlarıyla uyumlu sonuç vermemektedir. Daha öncede, Triantaphyllou (2000)'nin incelediği gibi en mantıklı çözümü bulanık düzeltilmiş analitik hiyerarşi prosesi ve analitik hiyerarşi prosesi vermektedir.

Bu çalışmada, bu aşamadan itibaren hangi yöntemin diğerinden daha iyi sonuçlar verdiğini görmek üzere, Bulanık AHP ve Bulanık R-AHP yöntemiyle elde edilen önem ağırlıkları, bu problem için oluşturulan bulanık hedef programlama modelinde kullanılmıştır. Tiwari, Dharmar ve Rao'nun geliştirdiği toplamsal model yaklaşımı kullanılarak, çözümler elde edilmiştir.

Öncelikle tüm hedefler için üyelik fonksiyonları belirlenmiştir. Bunlar;

Maliyet kriteri için 0.06 toleransla hedef değer 0.95 olarak belirlenmiştir.

$$0,38x_1 + 0,14x_2 + 0,47x_4 \lesseqgtr 0,95$$

$$\mu_m = \begin{cases} 0 & ; \quad 0,38x_1 + 0,14x_2 + 0,47x_4 \geq 1,01 \\ 1 - \frac{0,38x_1 + 0,14x_2 + 0,47x_4 - 0,95}{0,06} & ; \quad 0,95 \leq 0,38x_1 + 0,14x_2 + 0,47x_4 \leq 1,01 \\ 1 & ; \quad 0,38x_1 + 0,14x_2 + 0,47x_4 \leq 0,95 \end{cases}$$

Risk kriteri için 0.08 toleransla hedef değer 0.40 olarak belirlenmiştir.

$$0,43x_2 + 0,57x_6 \lesseqgtr 0,40$$

$$\mu_r = \begin{cases} 0 & ; \quad 0,43x_2 + 0,57x_6 \geq 0,48 \\ 1 - \frac{0,43x_2 + 0,57x_6 - 0,40}{0,08} & ; \quad 0,40 \leq 0,43x_2 + 0,57x_6 \leq 0,48 \\ 1 & ; \quad 0,43x_2 + 0,57x_6 \leq 0,40 \end{cases}$$

Zaman kriteri için 0.04 toleransla hedef değer 0.15 olarak belirlenmiştir.

$$0,11x_2 + 0,41x_3 + 0,07x_4 + 0,41x_6 \lesseqgtr 0,15$$

$$\mu_z = \begin{cases} 0 & ; \quad 0,11x_2 + 0,41x_3 + 0,07x_4 + 0,41x_6 \geq 0,19 \\ 1 - \frac{0,11x_2 + 0,41x_3 + 0,07x_4 + 0,41x_6 - 0,15}{0,04} & ; \quad 0,15 \leq 0,11x_2 + 0,41x_3 + 0,07x_4 + 0,41x_6 \leq 0,19 \\ 1 & ; \quad 0,11x_2 + 0,41x_3 + 0,07x_4 + 0,41x_6 \leq 0,15 \end{cases}$$

Etkinlik kriteri için 0.05 toleransla hedef değer 0.80 olarak belirlenmiştir.

$$0,81x_4 + 0,19x_6 \lesseqgtr 0,85$$

$$\mu = \begin{cases} 0 & ; \quad 0,81x_4 + 0,19x_6 \leq 0,80 \\ 1 - \frac{0,80 - (0,81x_4 + 0,19x_6)}{0,05} & ; \quad 0,80 \leq 0,81x_4 + 0,19x_6 \leq 0,85 \\ 1 & ; \quad 0,81x_4 + 0,19x_6 \geq 0,80 \end{cases}$$

Prestij kriteri için 0.08 toleransla hedef değeri 0.85 olarak belirlenmiştir.

$$0,56x_1 + 0,30x_4 + 0,14x_6 \geq 0,85$$

$$\mu_p = \begin{cases} 0 & ; \quad 0,56x_1 + 0,30x_4 + 0,14x_6 \leq 0,78 \\ 1 - \frac{0,85 - (0,56x_1 + 0,30x_4 + 0,14x_6)}{0,08} & ; \quad 0,78 \leq 0,56x_1 + 0,30x_4 + 0,14x_6 \leq 0,85 \\ 1 & ; \quad 0,56x_1 + 0,30x_4 + 0,14x_6 \geq 0,85 \end{cases}$$

Projelerin yapılabilirliklerini x_i temsil etsin. Bulanık AHP ile elde edilen ağırlıklar projelerin yapılabilirliklerinin katsayılarını oluşturmak üzere;

$$\text{Max } V(\mu_i) = 0.52*\mu_1 + 0.34*\mu_2 + 0.03*\mu_3 + 0.03*\mu_4 + 0.09*\mu_5$$

$$0.38*x_1 + 0.14*x_2 + 0.47*x_4 + 0.05*\mu_1 = 1.05$$

$$0.43*x_2 + 0.57*x_6 - 0.10*\mu_2 = 0.50$$

$$0.11*x_2 + 0.41*x_3 + 0.07*x_4 + 0.41*x_6 + 0.10*\mu_3 = 0.40$$

$$0.81*x_4 + 0.19*x_6 - 0.05*\mu_4 = 0.70$$

$$0.56*x_1 + 0.30*x_4 + 0.14*x_6 - 0.15*\mu_5 = 0.75$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 4$$

$$\mu_i \leq 1 \quad (i=1,2,\dots,5)$$

$$\mu_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,5)$$

$$x_k \geq 0 \quad (k=1,2,\dots,6)$$

Bu model çözüldüğünde aşağıdaki tabloda verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 5-28: Bulanık AHP + Bulanık Hedef Programlama uygulandığında elde edilen sonuçlar

X_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	$\text{Max}V(\mu)$
0,858	0,942	0,00	0,977	0,397	0,044	0,544	1,00	0,00	1,00	0,00	0,653

Bulanık AHP metodundan alınan veriler bulanık hedef programlama modelinde çözümlendikten sonra, Bulanık R-AHP metodundan elde edilen verileri de benzer şekilde aynı modelin içinde inceleyelim. Böylece iki metodun da birbirine olan üstünlüklerini incelenmiş olacaktır.

Bulanık düzeltilmiş AHP'den alınan ağırlıklarla oluşturulan hedeflerin bulanık üyelik fonksiyonları aşağıda verilmektedir. Bulanık AHP'den ağırlıkların alınarak, bulanık hedeflerin üyelik dereceleri için verilen hedef değer ve tolerans miktarı aynı kalmaktadır.

Maliyet kriteri için 0.06 toleransla hedef değer 0.95 olarak belirlenmiştir.

$$0,39x_1 + 0,12x_2 + 0,49x_4 \lesseqgtr 0,95$$

$$\mu_m = \begin{cases} 0 & ; \quad 0,39x_1 + 0,12x_2 + 0,49x_4 \geq 1,01 \\ 1 - \frac{0,39x_1 + 0,12x_2 + 0,49x_4 - 0,95}{0,06} & ; \quad 0,95 \leq 0,39x_1 + 0,12x_2 + 0,49x_4 \leq 1,01 \\ 1 & ; \quad 0,39x_1 + 0,12x_2 + 0,49x_4 \leq 0,95 \end{cases}$$

Risk kriteri için 0.08 toleransla hedef değer 0.40 olarak belirlenmiştir.

$$0,42x_2 + 0,57x_6 \lesseqgtr 0,40$$

$$\mu_r = \begin{cases} 0 & ; \quad 0,42x_2 + 0,57x_6 \geq 0,48 \\ 1 - \frac{0,42x_2 + 0,57x_6 - 0,40}{0,08} & ; \quad 0,40 \leq 0,42x_2 + 0,57x_6 \leq 0,48 \\ 1 & ; \quad 0,42x_2 + 0,57x_6 \leq 0,40 \end{cases}$$

Zaman kriteri için 0.04 toleransla hedef değer 0.15 olarak belirlenmiştir.

$$0,11x_2 + 0,42x_3 + 0,06x_4 + 0,42x_6 \lesseqgtr 0,15$$

$$\mu_z = \begin{cases} 0 & ; \quad 0,11x_2 + 0,42x_3 + 0,06x_4 + 0,42x_6 \geq 0,19 \\ 1 - \frac{0,11x_2 + 0,42x_3 + 0,06x_4 + 0,42x_6 - 0,15}{0,04} & ; \quad 0,15 \leq 0,11x_2 + 0,42x_3 + 0,06x_4 + 0,42x_6 \leq 0,19 \\ 1 & ; \quad 0,11x_2 + 0,42x_3 + 0,06x_4 + 0,42x_6 \leq 0,15 \end{cases}$$

Etkinlik kriteri için 0.05 toleransla hedef değer 0.80 olarak belirlenmiştir.

$$0,90x_4 + 0,10x_6 \lesseqgtr 0,85$$

$$\mu_e = \begin{cases} 0 & ; \quad 0,90x_4 + 0,10x_6 \leq 0,80 \\ 1 - \frac{0,80 - (0,90x_4 + 0,10x_6)}{0,05} & ; \quad 0,80 \leq 0,90x_4 + 0,10x_6 \leq 0,85 \\ 1 & ; \quad 0,90x_4 + 0,10x_6 \geq 0,85 \end{cases}$$

Prestij kriteri için 0.08 toleransla hedef değeri 0.85 olarak belirlenmiştir.

$$0,62x_1 + 0,29x_4 + 0,09x_6 \gtrsim 0,85$$

$$\mu_p = \begin{cases} 0 & ; \quad 0,62x_1 + 0,29x_4 + 0,09x_6 \leq 0,78 \\ 1 - \frac{0,85 - (0,62x_1 + 0,29x_4 + 0,09x_6)}{0,08} & ; \quad 0,78 \leq 0,62x_1 + 0,29x_4 + 0,09x_6 \leq 0,85 \\ 1 & ; \quad 0,62x_1 + 0,29x_4 + 0,09x_6 \geq 0,85 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } V(\mu_i) = & 0.51*\mu_1 + 0.34*\mu_2 + 0.03*\mu_3 + 0.03*\mu_4 + 0.10*\mu_5 \\ & 0.39*x_1 + 0.12*x_2 + 0.49*x_4 + 0.05*\mu_1 = 1.05 \\ & 0.42*x_2 + 0.58*x_6 - 0.10*\mu_2 = 0.50 \\ & 0.11*x_2 + 0.42*x_3 + 0.06*x_4 + 0.42*x_6 + 0.10*\mu_3 = 0.40 \\ & 0.90*x_4 + 0.10*x_6 - 0.05*\mu_4 = 0.70 \\ & 0.62*x_1 + 0.29*x_4 + 0.09*x_6 - 0.15*\mu_5 = 0.75 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 4 \\ & \mu_i \leq 1 \quad (i=1,2,\dots,5) \\ & \mu_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,5) \\ & x_k \leq 1 \quad (k=1,2,\dots,6) \\ & x_k \geq 0 \quad (k=1,2,\dots,6) \end{aligned}$$

Bu model çözüldüğünde aşağıdaki tabloda verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 5-29: Bulanık R-AHP + Bulanık Hedef Programlama uygulandığında elde edilen sonuçlar

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	$\text{Max}V(\mu)$
0,595	0,622	0,512	0,267	0,0	0,0	0,780	0,359	0,0	1,0	1,0	0,954

Böylece; mevcut problemin çözümü için beş çeşit yöntem kullanılmıştır. Bu yöntemler; sırasıyla sadece Bulanık AHP, sadece Bulanık R-AHP, TOPSIS, Bulanık AHP ve Bulanık

Hedef Programlama metotlarının entegrasyonu ve son olarak da Bulanık R-AHP ve Bulanık Hedef Programlama metotlarının entegrasyonudur. Bu yöntemlerle elde edilen sonuçlar Çizelge 5-30'da verilen özet tabloda gösterilmektedir

Çizelge 5-30: Özet Tablo

	F-AHP	F- R-AHP	F-TOPSIS	F-AHP + FGP	F-R-AHP + FGP
Proje₁	0,248 / 2	0,2547/ 2	4	0,858 / 3	0,595/ 2
Proje₂	0,2223 / 4	0,2073/ 4	5	0,942 / 2	0,622 / 1
Proje₃	0,0123 / 5	0,0126/ 5	2	0,00 / 6	0,512 / 3
Proje₄	0,2978 / 1	0,3097/ 1	6	0,977 / 1	0,267 /4
Proje₅	0 / 6	0/ 6	1	0,397 / 4	0,00 / 5
Proje₆	0,2244 / 3	0,2209 / 3	3	0,044 / 5	0,00 / 6
μ_1	-	-	-	0,544	0,780
μ_2	-	-	-	1,00	0,359
μ_3	-	-	-	0,00	0,00
μ_4	-	-	-	1,00	1,00
μ_5	-	-	-	0,00	1,00
MaxV(μ)	-	-	-	0.653	0.954

Bu sonuçlardan iki farklı şekilde faydalanılabilir. İlki; bu sıralama sonuçlarına göre, tüm bu çözümlerin uzlaşık olanına ulaşmak için ortalama sıra numaralarının göz önüne alınarak karar verilebilir. Çizelge 5-30'da özetlenen tüm sonuçlar incelendiğinde, TOPSIS metodunun diğer metotlardan tamamen farklı sonuçlar vermesi nedeniyle, karar aşamasında göz ardı edilebilir. Bu durumda sıralama, Proje 4 > Proje 1 > Proje 2 > Proje 6 > Proje 5 > Proje 3 şeklinde olur. İkincisi ise, en yüksek üyelik maksimizasyonunu elde eden ve karar vericiyi daha net bir şekilde karara yönlendiren metot seçilebilir. Bu çalışmada bu yaklaşımlardan ikincisinin daha uygun olduğu kabul edilmiştir. Bu metot ise; düzeltilmiş analitik hiyerarşi prosesi metodunun

uygulanmasıyla elde edilen çözümün bulanık hedef programlamaya verilmesiyle elde edilen çözümdür. Bu sıralama ise, Proje 2 > Proje 1 > Proje 3 > Proje 4 > Proje 5 > Proje 6' dır.



6. SONUÇ

Hızla değişen iş dünyamızın değişmeyen problemlerinden biri olan kaynak kıtlığı problemi, kaynak tahsisi, kaynak seviyelendirmesi ve kaynak kullanımı gibi pek çok problem alanının oluşmasına zemin hazırlamıştır. Kaynak tahsisi problemi, günümüzde gerek akademik çevrelerde gerekse iş hayatında yöneticilerde büyük ilgi uyandırmaktadır.

İşletmeler sürekli olarak sistemlerinden elde ettikleri getirileri enbüyüklemeye, kullandıkları kaynak miktarını enküçüklemeye ve kaynak kullanımı arttırmaya çalışırlar. Bu durum, kaynak tahsisi probleminin her zaman güncelliğini koruması ve sürekli olarak yeni boyutlara yeni durumlara uyarlanmasını getirmektedir.

Son yıllarda yoğun ilgi gören çok kriterli karar verme metotları, problemlerin çözümünde gösterdikleri performans nedeniyle, akademisyenler tarafından yoğun ilgi görmektedir. Bu metotların çeşitliliği göz önünde bulundurulduğunda, sadece kaynak tahsisi problemi için bile uygulamada çeşitli sonuçlar elde edilmekte ve hangi çok kriterli karar verme metodunun hangi tür problemin çözümü için uygun olduğu tesbit edilmeye çalışılmaktadır.

Karar verme konusundaki en önemli kriter, kaynaklardır. Kaynakların hiçbir zaman sonsuz olamayacağı düşünüldüğünde, kısıtlı kaynaklarla en iyi sonucu almak iş dünyasının da en önemli problemidir. Kısıtlı kaynakların mevcudiyeti, kaynakların kullanımında belirli amaç işlevlerini veya işlevleri en iyileyecek kaynak tahsislerini de önemli kılar.

Bu çalışmada, çok kriterli karar verme metotları bünyesinde pek çok metot incelenmiş ve bunların bulanık versiyonları açıklanmıştır. Çok kriterli karar verme metotlarının birbirine göre, üstünlükleri incelenmiş ve bu doğrultuda kaynak tahsisi problemleri için hangisinin daha iyi sonuçlar verdiği incelenmiştir. Bu doğrultuda yapılan uygulamalarda, aynı kaynak tahsisi problemi için 5 farklı teknik kullanılmış ve sonuçları karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, en mantıklı ve yönlendirici sonuçları bulanık düzeltilmiş analitik hiyerarşi prosesi metodu ile elde edilen ağırlıkların bulanık hedef programlamaya konulmasıyla elde edildiği görülmüştür. Bu metot, en yüksek üyelik derecesini vererek karar vericinin bu kararı almasını kolaylaştırmakta ve sonuçlara olan güvenini arttırmaktadır. Bulanık TOPSIS metodu dışında uygulanan tüm metotların sonuçlarının birbiriyle aşırı tutarsız olmadığı, fakat TOPSIS'in analitik hiyerarşi prosesi metoduyla tamamen ayrı sonuçları ürettiği görülmektedir. Buradan çıkarılabilecek sonuç, kaynak tahsisi problemleri için TOPSIS metodunun uygun olmamasıdır.

Çok kriterli karar verme metotlarının en büyük dezavantajı matrislerin oluşturulmasında uzmanlara ve/veya anketlere danışılması sırasında uzman seçimidir. Gelişen metotlar, uzmanların sonuç üzerindeki etkisini artırmakta ve uzmana olağanüstü sorumluluk yüklemektedir. Bu nedenle, veriler olabildiğince kantitatif elde edilmeye çalışılmalıdır. Bunun mümkün olmadığı durumlarda, birden çok uzmana danışılarak alınan risk paylaşılmalı ve optimum karara yaklaşılmaya çalışılmalıdır.

Bu çalışma, çok kriterli kaynak tahsisi problemlerinin çözümü için aydınlatıcı bir çalışma olmuştur. İleride çok kriterli kaynak tahsisi problemlerinin çözümünü kolaylaştırmak için, tüm sistem verilerinin kullanılacağı yeni modellerin geliştirilmesi sonuçların güvenilirliği açısından çok faydalı olacaktır.



KAYNAKLAR

- Chen, L., and Tsai, F., 2001, "Fuzzy Goal Programming with Different Importance and Priorities", *European Journal Of Operational Research*, 133, 548-556.
- Ehrgott, M. and Gandibleux, X., 2002, "Multiple Criteria Optimization: The State of Art Annotated Bibliography Surveys", 179-197, Kluwer Academic Publishers, USA.
- Erol, I. and Ferrell W.G., 2003, "A Methodology for Selection Problems with multiple Conflicting Objectives and Both Qualitative and Quantitative Criteria, *International Journal of Production Economics*, 86, 187-199.
- Kahraman., C., Cebeci, U. ve Ruan, D., 2004, "Multi-attribute Comparison of Catering Service Companies Using Fuzzy AHP: The Case of Turkey", *International Journal of Production Economics* 87, 171-184.
- Kwong, C.,K. and Bai, H., 2002, "A Fuzzy AHP Approach to The Determination of Importance Weights of Customers Requirements in Quality Function Deployment", *Journal of Intelligent Manufacturing*, 13, 367-377, Netherlands.
- Lai, K.K. and Li, L., 1999, "A Dynamic Approach to Multiple-Objective Resource Allocation Problem", *European Journal Of Operational Research*, 117, 293-309.
- Lehto, M.R. and Salvendy, G., 2000, "Decision Making Models", *Handbook of Industrial Engineering-Technology and Operations Management*, Wiley Interscience Publication, Third Edition, New York.
- Ozkan, M.M., 2003, *Bulanik Hedef Programlama*, Ekin Yayinlari, 155-228, Istanbul.
- Pomerol, J. and Barba-Romero, S., 2000, *Multicriterion Decision in Management- Principles and Practice*, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts.
- Saaty, T.L., Vargas. L.G. and Dellman, K., 2003, "The Allocation of Intangible Resources: The Analytic Hierarchy Process and Linear Programming", *Socio-Economic Planning Sciences*, 37, 169-184.
- Triantaphyllou, E., 2000, *Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Study*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi 29.11.1980

Doğum Yeri İstanbul

Lise 1994-1998 Üsküdar Fen Lisesi

Lisans 1998-2002 Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi
Endüstri Mühendisliği Bölümü

Çalıştığı Kurumlar

2002- Devam Ediyor Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

