



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

konveks olmayan ayırma teoremleri..

Yüksek Lisans Tezi

seken nazik

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS OLMAYAN AYIRMA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Matematikçi Serkan NAZİK

FBE İstatistik Ana Bilim Dalı Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Abbas AZİMLİ (YTÜ)

İSTANBUL, 2005

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC): R 360
12

Kayıt No : 3209

Geldiği Yer : Fen Bilim Enst.

Tarih : 7.11.06

Fiyat : 5.20

Fatura No :

Ayniyat No : 1-14

Ek :

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ

D.B. No: 77013

763

KONVEKS OLMAYAN AYIRMA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Matematikçi Serkan NAZİK

FBE İstatistik Ana Bilim Dalı Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Abbas AZİMLİ (YTÜ)

Prof. Dr. Elimham MAHMOUD

[Signature]

İSTANBUL, 2005

Yard. Doç. Dr.

Ahif Evren

[Signature]

Prof. Dr. Abbas Azimli

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1 GİRİŞ	1
2 KONVEKS ANALİZ.....	3
2.1 Konveks Kümeler	3
2.2 Konveks Örtün	4
2.2.1 Karateodori Teoremi	4
2.2.2 Bir kümenin içi ve kapanışındaki noktalar arasındaki doğru parçası	6
2.3 Konveks fonksiyonlar	9
2.3.1 Konveks fonksiyonların Sürekliliği	10
2.3.1 Konveks fonksiyonun yön türevi	11
2.3.2 Bir fonksiyonun Epigrafiği ve hipografiği	12
3 KONVEKS KÜMELERİ AYIRMA VE DESTEKLEME	14
3.1 Hiperdüzlemler	14
3.2 Bir nokta ile konveks kümenin ayrılması	17
3.3 Sınır noktalarda kümenin hiperdüzlem ile desteklenmesi	18
3.4 Konveks kümenin ayrılması	20
3.5 Konveks Koniler	23
3.6 Konjuget fonksiyonu	25
3.7 Subdiferansiyel	28
4 KONVEKS OLMAYAN KÜMELERİ AYIRMA	30
4.1 Ayırma Teoremleri.....	32
4.1.1 İlk Ayırma Teoremi.....	35
4.1.2 İkinci Ayırma Teoremi.....	41
5 KONVEKS OLMAYAN VEKTÖR OPTİMİZASYONDA SKALARAZYON.....	44
6 UYGULAMA(Konveks ve konveks olmayan kümelerle ilgili örnekler)	55
7 SONUÇLAR	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	63

SİMGE LİSTESİ

clC	C kümesinin kapanışı	3
$epif$	f fonksiyonunun epigrafiği	4
$Eff(F, R_+^n)$	Efficient (efektif) noktalar	6
f^*	f fonksiyonunun konjuget fonksiyonu	9
f^{**}	f fonksiyonunun ikincil konjuget fonksiyonu	13
H	Hiperdüzlem	15
H^+	Kapalı yarı hiperdüzlem	19
H^-	Kapalı yarı hiperdüzlem	20
$H(S)$	S Kümesinin konveks örtene	21
$hipof$	f fonksiyonunun hipografiği	23
$int C$	C kümesinin iç noktalarının kümesi	24
K^*	Polar (kutupsal koni)	28
N	Doğal sayılar kümesi	30
R	Reel sayılar kümesi	31
R_+	Pozitif reel sayılar kümesi	33
$\bar{R}$	Reel sayılar kümesine pozitif sonsuz ve negatif sonsuz değerlerinin dahil edilmesi ile elde edilen kümesi	39
R_+^n	Negatif olmayan koni	46
S_α	S kümesinin α düzey kümesi	46
∂f	f fonksiyonunun subgradyanı	52
$weff(F, R_+^n)$	Weakly efficient (zayıf efektif) noktalar	55
Z	Tamsayılar kümesi	56
Z^+	Pozitif tamsayılar kümesi	56
∂S	S kümesinin sınır noktaları	57
$\in$	Elemanı olma, Ait olma	57
$\emptyset$	Boş küme	58
$\Rightarrow$	Gerektirme	58
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul	58

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Konveks küme ile konveks olmayan kümenin farkı.....	3
Şekil 2.2	Konvesk örten örnekleri.....	4
Şekil 2.3	Bir kümenin içi ve kapanışındaki noktalar arasındaki doğru parçası.....	6
Şekil 2.4	Konveks ve konkav örnekleri.....	9
Şekil 2.5	Epigrafik ve hipografik örnekleri.....	13
Şekil 3.1	Hiperdüzlem ve yarı uzayların gösterilmesi.....	15
Şekil 3.2	Kapalı konveks konide minimum uzaklık.....	15
Şekil 3.3	Hiperdüzlemle desteklenmesi ile ilgili örnekler.....	18
Şekil 3.4	Konveks kümelerin hiperdüzlemlerle ayrılması.....	20
Şekil 3.5	İki kümenin ayrılması.....	21
Şekil 3.6	Güçlü ayırma.....	22
Şekil 3.7	İki koni örneği.....	23
Şekil 3.8	Konveks koni ve polar koninin örneklendirilmesi.....	24
Şekil 3.9	Subgradyantharın geometrik yorumu.....	28
Şekil 4.1	R^2 'in C kümesi ilişkisinin gösterilmesi.....	30
Şekil 4.2	Örnek 4.4 'in geometrik yorumu.....	31
Şekil 4.3	Keyfi bir $k^0 \in K$ geçerli olmadığının gösterilmesi.....	33
Şekil 4.4	C kümesinin konveks olmayan küme olabileceğinin gösterilmesi.....	39
Şekil 5.1	$Eff(f, R_+^2)$ kümesinin gösterilmesi.....	45
Şekil 5.2	$Eff(f, R_+^2)$ boş küme olduğı halde $weff(f, R_+^2)$ boş kümeden değildir.....	46
Şekil 5.3	Efficient (efektif) ve weakly efficient (zayıf efektif) noktalar.....	46
Şekil 5.4	zy fonksiyonun geometrik yorumu.....	52
Şekil 6.1	İki farklı hiperdüzlemin F kümesi ile ilişkisinin gösterilmesi	55
Şekil 6.2	F kümesinin $p - R_+^2$ 'dan ayrılması	56
Şekil 6.3	z -fonksiyonu tarafından F ile $C = p - R_+^2$ kümelerinin ayrımı gösterilmesi.....	57
Şekil 6.4	Konveks olmayan F kümesinin geometrik yorumu	57
Şekil 6.5	$Fff(F, R_+^2)$ kümesinin geometrik olarak gösterilmesi	58
Şekil 6.6	Konveks olmayan F kümesi ile $(-\frac{1}{7}, \frac{13}{7})$ noktasının hiperdüzlemlerle ayrılmamasının geometrik yorumu.....	58
Şekil 6.7	Konveks olmayan F kümesi ile $(-\frac{1}{7}, \frac{13}{7})$ noktasının ayrılması	59
Şekil 6.8	F ile $C = k^0 - R_+^2$ kümelerinin z fonksiyonu ile ayrılması	60

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı, kendimi geliştirmek ve uzmanlaşmak istediğim alana temel oluşturması amacıyla hazırladım.

Tez çalışmam boyunca konunun belirlenmesi, konunun anlaşılması ve ilerlemesinde benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Sayın Prof. Dr. Abbas AZİMLİ 'ye teşekkür ederim.

Mayıs, 2006

Serkan NAZİK

ÖZET

Bu çalışmada, öklid uzayda, konveks olması zorunlu olmayan iki kümenin ayrılması için yapılar sunulmuştur. Bu yapılar, hiperdüzlemlerle ayrılamayan kümelere çeşitli yaklaşımlar oluşturarak ayrılmasına dayanmaktadır. Bunun için negatif olmayan koniler seçilerek iyi tanımlanmış fonksiyon üzerine inşaa edilmiştir.

İlk olarak, konveks kümeler ele alınmıştır. Hiperdüzlemler ile iki konveks kümenin ayrılması ve sınır noktalarında hiperdüzlemler ile desteklenmesi sunulmuştur. Sonra, konveks olması zorunlu olmayan kümelerin koniler yardımıyla iyi tanımlanmış fonksiyon ile ayrılması sağlanmıştır. En son olarak, konveks olmayan vektör optimizasyonda skalarizasyon sonuçları kullanılarak bir uygulama sunulmuştur.

Anahtar kelime: Konveks kümeler, konveks olmayan kümeler, ayırma teoremleri, efektif noktalar, zayıf efektif noktalar

ABSTRACT

In this study, structures for separation of two sets which are not to be necessary convex in euclidean space are presented. These structures depend on combining different approaches for the sets which cannot be separated by hyperplanes. Because of that, nonnegative cones are selected and built on well defined function.

First of all, convex sets are taken into consideration and hyperplanes separation of two convex sets and hyperplanes presented by supporting with hyperplanes at boundary point. Then, separation of not necessarily convex sets that are provided by well defined function. Finally, an application by using the scalarization result in nonconvex vector optimization is presented.

Key words: convex sets, nonconvex sets, hyperplane separation of sets, efficient point, weakly efficient point

1 GİRİŞ

Konveks analizde yapılan bir çok uygulama, ayırma (separation) teoremlerine dayanır. Bu nedenle, ayırma teoremleri konveks analizde önemli bir rol oynar. İki konveks kümenin ayrımı; basitçe, kapalı bir konveks küme ile bu kümeye ait olmayan bir noktanın ayrımı temeline dayanır. Bir nokta ile bir konveks kümenin ayrılması, konveks iki kümenin ayrılması olarak genelleştirilebilir. Bunun için, iki konveks kümenin kesişiminin boş küme olması ya da sınır noktalarının kesişimi belirli öngörüler altında lineer fonksiyonlar ile ayrılması üzerine ayırma teoremleri inşaa edilmiştir. Bu ayırma teoremleri için geometrik olarak, hiperdüzlemler kullanılmıştır.

Hiperdüzlem ile bir konveks kümenin desteklenmesi ya da iki konveks kümenin ayrılması konveks analizde çeşitli teorilerle gösterilmiştir. Ayrıca, hemen hemen tüm optimallik koşulları ve dualite sonuçlarında, konveks kümelerin ayrılması ya da desteklenmesi teoremleri kullanılır. Konveks kümelerin sınır noktalarında destek hiperdüzleme sahip oldukları bilinen bir gerçektir. Bu destek hiperdüzlemler, konveks analizin en önemli kavramlarından olan subgradyant kavramını ortaya çıkarmıştır.

Konveks olmayan optimizasyon teorisinin gelişmesiyle konveks olmayan ayırma teoremlerine ihtiyaç ortaya çıkmıştır. Konveks küme ile konveks olmayan bir kümenin sürekli konveks fonksiyonlar ile ayırma teoremleri Nehse (1981) ve Hildenbrandt (1984) tarafından gösterilmiştir.

Konveks olması zorunlu olmayan kümelerin, lineer fonksiyonlarla sınır noktasında negatif olmayan koni yardımıyla genel çerçevesi oluşturulabilir. Konveks olması zorunlu olmayan kümelerin ayırma teoremleri, sadece lineer fonksiyonların değil, bunun dışındaki yapıları da dikkate almayı gerekli kılan durumları da formülize etmemizi sağlar.

Konveks olmayan vektör optimizasyon teorisinde, ayırma teoremleri efficient (efektif) ve weakly efficient (zayıf efektif) noktalarda uygulanabilir. Minimumuna, efficient (efektif) bir noktada ulaşan fonksiyonun aynı zamanda weakly efficient (zayıf efektif) noktası ile ilişkisi açıklanabilir. Ayırma teoremleri ile oluşturulan skaler fonksiyonlar, her reel değerde hedefine ulaşır.

2.1 KONVEKS KÜMELER

Teoremi 2.1

Konveks olmayan vektör optimizasyon problemlerin, weakly efficient (zayıf efektif) noktalarda ayırma teoremleri için belirlenen şekil, skalarizasyon fonksiyonlardır. Ama normalde bu lineer fonksiyonlar (hiperdüzlemler) ile olmaz. Özellikle zayıf ve tam efektif noktalar, vektör optimizasyonda uygulanırken genelleştirilmiş efektif teoremlerini ortaya çıkarmamızı sağlar. Ayırma teoremlerini yapısındaki yeterlilik konsepti Weidner (1985) 'e dayanır ve zorunlu olarak koni olmaları gerekli olan egemen kümeler ile ilişkilidir. Fonksiyonların özellikleri, noktanın efektif kümenin özelliklerine bağımlı olarak gösterilir.

(a) konveks

(b) konveks olmayan

Şekil 2.1 Konveks küme ile konveks olmayan kümenin farkı

Örnek 2.1

Konveks küme S , $\mathbb{R}^n$ da belirli bazı özellikler taşır:

1. S konveks küme ve α reel bir sayı olmak üzere,

$$\alpha S = \{\alpha x \mid x \in S, \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ konvektir.}$$

2. S_1 ve S_2 konveks kümeler ise

$$S_1 \cup S_2 = \{x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2\} \text{ konvektir.}$$

3. Konveks kümelerin kesişimi yine konvektir.

$$S_1 \text{ ve } S_2 \text{ konveks kümeler ise } S_1 \cap S_2 \text{ konvektir.}$$

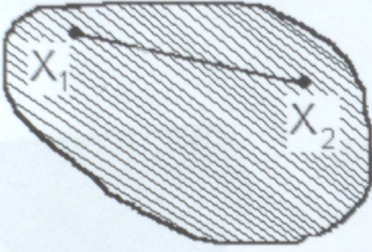
2. KONVEKS ANALİZ

Konveks Analiz, optimizasyon teorisinin inşasında çok önemli bir yere sahiptir. Bu bölümde; konveks kümeler, konveks örten ve konveks fonksiyonlar yapılarını tanıtacağız.

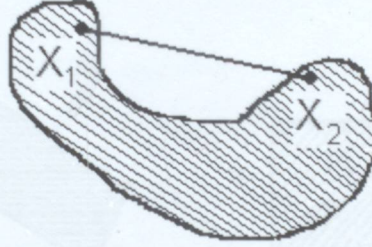
2.1 KONVEKS KÜMELER

Tanım 2.1

S , boş kümeden farklı E_n ' de bir küme olsun. S kümesinin herhangi iki elemanını birleştiren doğru parçası, S kümesine ait ise veya başka bir ifadeyle $\forall x_1, x_2 \in S$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ ise S kümesine *konveks küme* denir.



(a) konveks



(b) konveks olmayan

Şekil: 2.1 Konveks küme ile konveks olmayan kümenin farkı

Önerme 2.2

Konveks kümelerin E_n ' de önemli bazı özellikleri şunlardır:

1. S konveks küme ve α reel bir sayı olmak üzere,

$$\alpha S = \{\alpha x \mid x \in S, \alpha \in R\} \text{ konvektir.}$$

2. S_1 ve S_2 konveks kümeler ise

$$S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\} \text{ konvektir.}$$

3. Konveks kümelerin kesişimi yine konvektir.

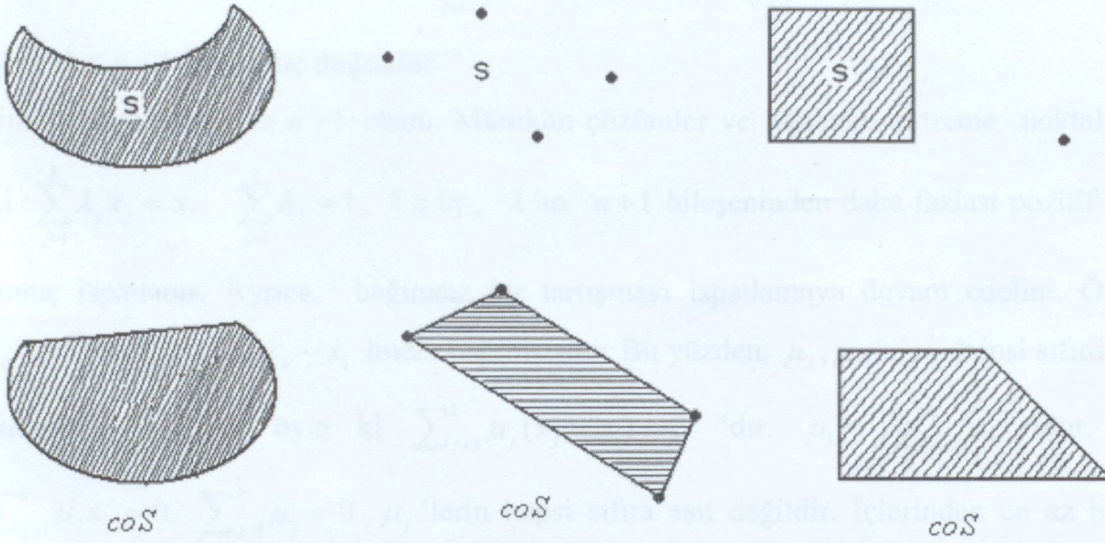
$$S_1 \text{ ve } S_2 \text{ konveks kümeler} \Rightarrow S_1 \cap S_2 \text{ konvektir.}$$

2.2 KONVEKS ÖRTEN

Tanım 2.3

S , boş kümeden farklı E_n ' de keyfi bir küme olsun. S kümesinin sonlu sayıda elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının topluluğuna, S kümesinin *konveks örteni* denir ve coS ile gösterilir.

$$coS = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \mid \forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda_j \geq 0 : \sum \lambda_j = 1, \forall x_j \in S \right\}$$



Şekil 2.2 Konveks Örten örnekleri

Önerme 2.4

S , E_n ' de keyfi bir küme olsun. coS , S 'i içeren en küçük konveks kümedir veya başka bir ifadeyle coS , S kümesini içeren tüm konveks kümelerin kesişimidir.

2.2.1 KARATEODORİ TEOREMİ

Tanım 2.3 'den, bir kümenin konveks örteninin bir noktası, küme içindeki sonlu sayıda noktaların konveks kombinasyonu olarak gösterilebilir. Teorem 2.5 ' de, S kümesinin konveks örtenindeki herhangi bir x noktası, S 'deki en fazla $n+1$ noktanın konveks kombinasyonu olarak gösterilebilir.

Teorem 2.5

S , E_n 'de keyfi bir küme olsun. $x \in \text{co}S$ ise o halde $x_1, \dots, x_{n+1} \in S$, $\forall \lambda_i \geq 0$ ve $\sum \lambda_i = 1$

için $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ olarak gösterilebilir.

İspat:

Tanım 2.3' de x 'i $\text{co}S$ 'in bir elemanı olarak seçelim.

Burada $x_j \in S$, $j = 1, \dots, k$ için $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$ ve $\lambda_j > 0$ için $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ 'dir.

Eğer $k \leq n+1$ ise sonuç doğrudur.

Şimdi, farzedelim $k > n+1$ olsun. Mümkün çözümler ve kümenin extreme noktaları, yani

$\{\lambda : \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j = x, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda \geq 0\}$, λ 'ın $n+1$ bileşeninden daha fazlası pozitif değildir.

Sonuç ispatlanır. Ayrıca, bağımsız bir tartışmayı ispatlamaya devam edelim. Öncelikle,

$x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1$ lineer bağımsızdır. Bu yüzden, $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k$ hepsi sıfırdan farklı

skalerler bulunur öyle ki $\sum_{j=2}^k \mu_j (x_j - x_1) = 0$ 'dır. $\mu_1 = -\sum_{j=2}^k \mu_j$ olur. Burada

$\sum_{j=1}^k \mu_j x_j = 0$, $\sum_{j=1}^k \mu_j = 0$ μ_j 'lerin hepsi sıfıra eşit değildir. İçlerinden en az bir tanesi sıfırdan farklıdır.

O zaman, herhangi bir reel α için

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j + 0 = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^k \mu_j x_j = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j \text{ 'dir}$$

Şimdi α şöyle ifade edelim,

$$\text{bazı } i \in \{1, \dots, k\} \text{ için } \alpha = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} : \mu_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \quad \alpha > 0 \text{ 'dır.}$$

Eğer $\mu_j \leq 0$ olsa, o zaman $\lambda_j - \alpha \mu_j > 0$ 'dır veya $\mu_j \geq 0$ o halde $\lambda_j / \mu_j \geq \lambda_i / \mu_i = \alpha$ ve bu

yüzden $\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0$ 'dür. Başka bir ifadeyle $x = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j$, her $j = 1, \dots, k$ için

$\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0$ 'dır. Özel olarak $j = 1, \dots, k$ için $\lambda_j - \alpha \mu_j = 0$ olsun. O halde

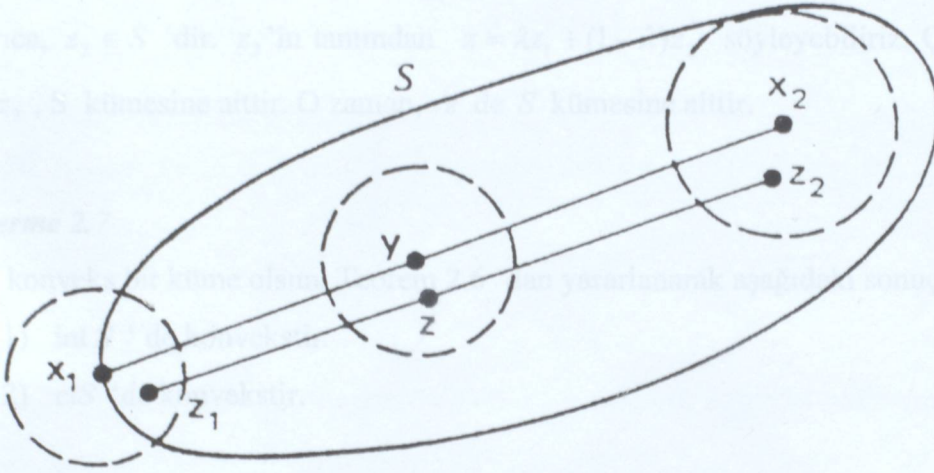
$\sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) = 1$ ve bunun yanında $\lambda_i - \alpha \mu_i = 0$ 'dır. Yani x , S içinde en fazla $k-1$ tane

noktanın bir konveks kombinasyonu olarak gösterilebilir. Oluşum x , S içinde en fazla $n+1$

tane noktanın bir konveks kombinasyonu olarak gösterilene kadar tekrarlandırılır.

2.2.2 BİR KÜMENİN İÇİ VE KAPANIŞINDAKİ NOKTALAR ARASINDAKİ DOĞRU PARÇASI

İçi boş olmayan bir konveks küme verildiğinde, kümenin içindeki bir nokta ile kümenin kapanışındaki bir noktayı birleştiren doğru parçası (bitiş noktaları hariç) kümenin içine aittir. Bu sonucun ispatı teorem 2.6 verilecektir.



Şekil 2.3 Bir Kümenin içi ve kapanışındaki noktalar arasındaki doğru parçası

Teorem 2.6

S , içi boş olmayan E_n 'de konveks bir küme olsun. $x_1 \in cl S$ ve $x_2 \in int S$ olsun.

O halde, $\forall \lambda \in (0,1)$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $int S$ 'in bir elemanıdır.

İspat:

$x_2 \in int S$ olduğundan bir $\varepsilon > 0$ bulunur öyle ki $\{z : \|z - x_2\| < \varepsilon\} \subset S$ 'dir. y 'i şöyle

tanımlayalım: $\lambda \in (0,1)$ için $y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ olsun. (2.1)

İspat, y 'nin $int S$ ait olmasıdır. Özel olarak $\{z : \|z - y\| < (1-\lambda)\varepsilon\} \subset S$ gösterelim.

$\|z - y\| < (1-\lambda)\varepsilon$ olacak şekilde z 'i seçelim. $x_1 \in cl S$ olduğundan,

$$\left\{x : \|x - x_1\| < \frac{(1-\lambda)\varepsilon - \|z - y\|}{\lambda}\right\} \cap S \text{ boş küme değildir.}$$

Özel olarak bir $z_1 \in S$ bulunur öyle ki $\|z_1 - x_1\| < \frac{(1-\lambda)\varepsilon - \|z - y\|}{\lambda}$ 'dir. (2.2)

Şimdi, $z_2 = \frac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda}$ olduğunu (2.1) 'den söyleriz. Üçgen eşitsizliğinden ve (2.2) 'den

$$\begin{aligned} \|z_2 - x_2\| &= \left\| \frac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda} - x_2 \right\| = \left\| \frac{(z - \lambda z_1) - (y - \lambda x_1)}{1 - \lambda} \right\| \\ &= \frac{1}{1 - \lambda} \|(z - y) + \lambda(x_1 - z_1)\| \leq \frac{1}{1 - \lambda} (\|z - y\| + \lambda\|x_1 - z_1\|) < \varepsilon \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Ayrıca, $z_2 \in S$ 'dir. z_2 'in tanımından $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2$ söyleyebiliriz. Çünkü hem z_1 hem de z_2 , S kümesine aittir. O zaman, z de S kümesine aittir.

Önerme 2.7

S , konveks bir küme olsun. Teorem 2.6 'dan yararlanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- 1) $\text{int } S$ 'de konvektir.
- 2) $\text{cl } S$ 'de konvektir.

Önerme 2.8

S , içi boş olmayan konveks bir küme olsun. O halde, $\text{cl}(\text{int } S) = \text{cl } S$ 'dir

İspat:

$\text{cl}(\text{int } S) \subset \text{cl } S$ olduğu açıktır. Şimdi $x \in \text{cl } S$ olsun ve $y \in \text{int } S$ seçelim ($\text{int } S \neq \emptyset$).

O zaman, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{int } S$ her bir $\lambda \in (0,1)$ için sağlanır. $\lambda \rightarrow 1^-$ ye yeterince yakınlştırırsak $x \in \text{cl}(\text{int } S)$ gösterilir.

Örnek 2.9

S kümesini, konveks olmayan bir küme seçelim. S , Q rasyonel sayılar kümesi olsun.

O halde,

$$\text{cl}(\text{int } S) = \text{cl}(\text{int } Q) = \text{cl } \emptyset = \emptyset \text{ 'dir.} \quad (2.3)$$

$$\text{cl } S = \text{cl } Q = R \text{ dir.} \quad (2.4)$$

(2.3) ve (2.4) elde ettiğimiz sonuçlar birbirine eşit değildir. S konveks küme olmayan bir küme olduğundan $\text{cl}(\text{int } S) \neq \text{cl } S$ dir. Çünkü $R \neq \emptyset$ dir.

Önerme 2.10

S , içi boş olmayan konveks bir küme olsun. O halde, $\text{int}(clS) = \text{int } S$ 'dir.

İspat:

$\Leftarrow \text{int } S \subset \text{int}(clS)$ olduğu aşikardır.

$\Rightarrow x_1 \in \text{int}(clS)$ olsun. $x_1 \in \text{int } S$ olduğunu göstermeliyiz.

Bir $\varepsilon > 0$ mevcuttur öyle ki $\|y - x_1\| < \varepsilon$ bu da ima eder ki $y \in clS$ 'dir. Şimdi $x_2 \neq x_1$, $\text{int } S$ ait olsun. $y = (1 + \Delta)x_1 - \Delta x_2$ olsun. Burada $\|y - x_1\| = \varepsilon / 2$ olduğu için $\Delta = \varepsilon / (2\|x_1 - x_2\|)$ 'dir.

O zaman $y \in clS$ dir. Ama $x_1 = \lambda y + (1 - \lambda)x_2$ olduğundan $\lambda = 1/(1 + \Delta) \in (0, 1)$ 'dir.

Çünkü $y \in clS$ ve $x_2 \in \text{int } S$, o zaman teorem 2.6 ile $x_1 \in \text{int } S$ böylece ispat tamamlanır.

Örnek 2.11

Örnek 2.9 olduğu gibi bu örneğimizde de S kümesini, konveks olmayan bir küme seçelim ve S , Q rasyonel sayılar kümesi olsun.

O halde,

$$\text{int}(clS) = \text{int}(clQ) = \text{int } R = R \text{ 'dir.} \quad (2.5)$$

$$\text{int } S = \text{int } Q = \emptyset \text{ 'dir.} \quad (2.6)$$

(2.5) ve (2.6) elde ettiğimiz sonuçlar birbirine eşit değildir. S konveks olmayan bir küme seçildiğinde $\text{int}(clS) \neq \text{int } S$ dir. Çünkü $R \neq \emptyset$ 'dir.

2.3 KONVEKS FONKSİYONLAR

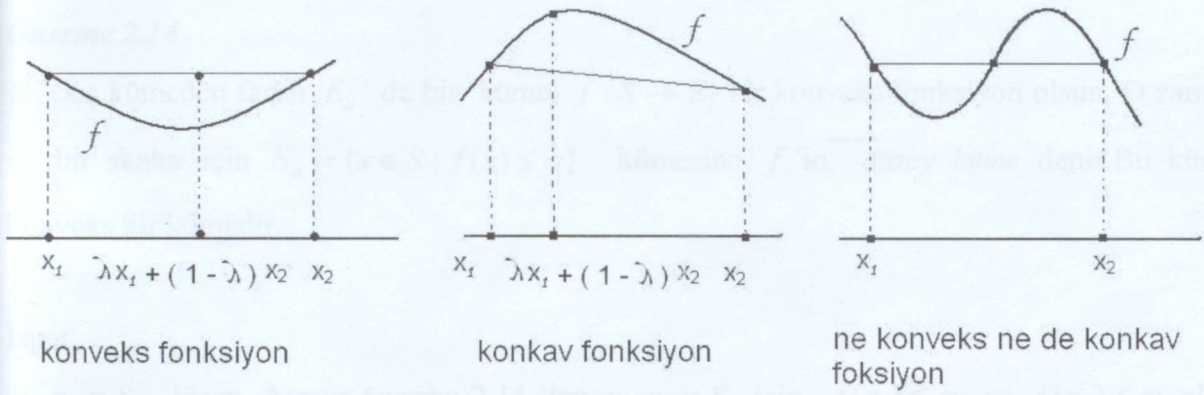
Tanım 2.12

$f: S \rightarrow E_1$ bir fonksiyon ve S , boş kümeden farklı konveks bir küme olsun.

$\forall x_1, x_2 \in S$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

şartını sağlıyorsa, f 'ye S üzerinde *Konveks* bir fonksiyon denir.

Eğer $-f$, S üzerinde konveks ise f 'ye S üzerinde *konkav* bir fonksiyon denir.



Şekil 2.4 Konveks ve konkav fonksiyon örnekleri

Önerme 2.13

Konveks fonksiyonların önemli bazı özellikleri şunlardır:

1. $f_1, f_2, \dots, f_k: E_n \rightarrow E_1$ konveks fonksiyonlar olsun. O zaman

- $f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x)$ $\alpha_i > 0$ $j = 1, 2, \dots, k$ konveks fonksiyondur
- $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$ bir konveks fonksiyondur.

2. $g: E_n \rightarrow E_1$ konkav bir fonksiyon olduğunu farzedelim.

$S = \{x: g(x) > 0\}$ ve $f: S \rightarrow R$ olmak üzere $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ tanımlansın.

O zaman f , S üzerinde konvektir.

3. $g: E_1 \rightarrow E_1$ azalmayan, konveks fonksiyon ve $h: E_n \rightarrow E_1$ konveks bir fonksiyon olsun.

O zaman Bileşik fonksiyon $f: E_n \rightarrow R$ olarak tanımlanan $f(x) = g(h(x))$ bir konveks fonksiyondur.

4. $g: E_m \rightarrow E_1$ bir konveks fonksiyon olsun ve $h: E_n \rightarrow E_m$ tanımlı $h(x) = Ax + b$ formunun afin fonksiyonu olsun. A bir $m \times n$ matris ve b, $m \times 1$ vektördür. O zaman bileşik fonksiyon $f: E_n \rightarrow E_1$ tanımlı $f(x) = g(h(x))$ konveks fonksiyondur.

Önerme 2.14

S , boş kümeden farklı E_n ' de bir küme, $f: S \rightarrow E_1$ bir konveks fonksiyon olsun. O zaman α bir skaler için $S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$ kümesine f 'in *düzey küme* denir. Bu küme konveks bir kümedir.

İspat:

$x_1, x_2 \in S_\alpha$ olsun. Ayrıca önerme 2.14 'ten $x_1, x_2 \in S$ için $f(x_1) \leq \alpha$ ve $f(x_2) \leq \alpha$ olur.

Şimdi $\lambda \in (0,1)$ için $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ olsun. S konveks küme olduğundan, $x \in S$ 'dir.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) & f, \text{ konveks fonksiyon} \\ &\leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \\ &\leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha \end{aligned}$$

2.3.1 Konveks fonksiyonun yön türevi

Tanım 2.17

S , boş kümeden farklı E_n ' de bir küme ve $f: S \rightarrow E_1$ konveks bir fonksiyon olsun. $\bar{x} \in S$ ve d sıfırdan farklı öyle bir vektör olsun ki yeteri kadar küçük pozitif tüm λ değerleri için $\bar{x} + \lambda d \in S$ olsun.

Eğer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda}$ var ise o halde $\bar{x}$ noktasında, d vektörü yönündeki f fonksiyonun yönsel türevi $f'(\bar{x}, d)$ ile gösterilir.

$$f'(\bar{x}; d) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda}$$

Önerme 2.18

$f: S \rightarrow E_1$ bir konveks fonksiyon olsun. $\bar{x} \in E_n$ her hangi bir nokta ve $d \in E_n$ sıfırdan farklı türev olduğunu düşünelim. O zaman, $f'(\bar{x}, d)$ yönsel türevi, f 'in $\bar{x}$ ' te d yönünde bulunur.

İspat

$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ olsun.

f 'in konveksliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \lambda_1 d) &= f\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\bar{x} + \lambda_2 d) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\bar{x}\right] \\ &\leq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f(\bar{x} + \lambda_2 d) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) f(\bar{x}) \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikten,

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda_1 d) - f(\bar{x})}{\lambda_1} \leq \frac{f(\bar{x} + \lambda_2 d) - f(\bar{x})}{\lambda_2}$$

$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in [0, 1]$ ve $\lambda \rightarrow 0^+$ yakınlştırılırsa $[f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})]/\lambda$ diferansiyeli aktarımı f

fonksiyonu monoton azalmayan olduğunu gösterir

O halde,

$\lambda > 0$ ve f , konveks olsun.

$$f(\bar{x}) = f\left[\frac{\lambda}{1+\lambda}(\bar{x} - d) + \frac{1}{1+\lambda}(f(\bar{x} + \lambda d))\right]$$

$$\leq \frac{\lambda}{1+\lambda} f(\bar{x}-d) + \frac{1}{1+\lambda} f(\bar{x}+\lambda d)$$

Böylece

$$\frac{f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x})}{\lambda} \geq f(\bar{x})-f(\bar{x}-d) \text{ 'dir.}$$

$\lambda \rightarrow 0^+$ yakınlştırılırsa $[f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x})]/\lambda$ değeri monoton azalmayan dizisi $f(\bar{x})-f(\bar{x}-d)$ sabit değerinden dolayı sınırlıdır.

Her iki tarafın limit alınırsa

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x})}{\lambda} = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x})}{\lambda}$$

2.3.2 Konveks Fonksiyonların sürekliliği

Konveks fonksiyonların önemli bir özelliği, iç bölgelerinde sürekli fonksiyonlar olmalarıdır.

Teorem 2.16

S , boş kümeden farklı E_n 'de bir küme ve $f: S \rightarrow E_1$ konveks bir fonksiyon olsun.

O halde, $\text{int } S$ boş kümeden farklı olmak üzere, f fonksiyonu $\text{int } S$ 'de süreklidir.

2.3.3 Bir fonksiyonun Epigrafiği ve hipografiği

Tanım 2.19

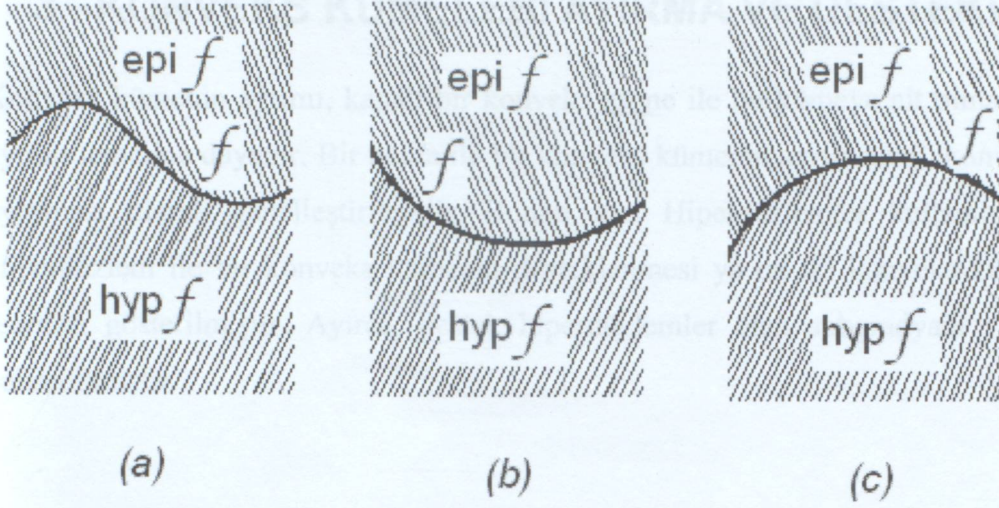
S, E_n 'de boş kümeden farklı bir küme olsun.

$f: S \rightarrow E_1$ bir fonksiyon olsun.

O halde;

f 'in epigrafi: $epif = \{(x, y) : x \in S, y \in E_1, y \geq f(x)\}$ ve

f 'in hipografiği: $hipof = \{(x, y) : x \in S, y \in E_1, y \leq f(x)\}$ olarak tanımlanır.



Şekil 2.5 Epigrafik ve hipografik örnekleri

Teorem 2.20

S, E_n 'de boş kümeden farklı bir konveks küme olsun. $f: S \rightarrow E_1$ bir fonksiyon olsun. O halde f konveks $\Leftrightarrow \text{epi } f$ konveks kümedir.

İspat

$\Rightarrow (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{epi } f$ olsun.

O halde $x_1, x_2 \in S$ seçilirse $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ olacaktır.

Tanım 2.19' den $y_1 \geq f(x_1)$ ve $y_2 \geq f(x_2)$ söyleyebiliriz.

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$\geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \text{ 'dir}$$

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in \text{epi } f$$

$\Rightarrow \text{epi } f$ konvektir.

$\Leftarrow x_1, x_2 \in S$ ve $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \text{epi } f$ olsun.

O halde;

$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in \text{epi } f$ olduğundan $\text{epi } f$ konveksliğinden yararlanarak

$$\lambda \in [0, 1] \text{ olmak üzere } \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \text{ 'dir}$$

f , konvektir.

3. KONVEKS KÜMELERİ AYIRMA VE DESTEKLEME

Konveks kümenin ayrımı, kapalı bir konveks küme ile bu kümeye ait olmayan bir noktanın ayrımı temeline dayanır. Bir nokta ile bir konveks kümenin ayrılmasını, konveks iki kümenin ayrılması olarak genelleştirilebilir. Bunun için Hiperdüzlemler kullanılır. Bu bölümde, Hiperdüzlem ile bir konveks kümenin desteklenmesi ya da iki konveks kümenin ayrılması teorileri gösterilmiştir. Ayrıca, destek hiperdüzlemler olan subgradyant kavramından da bahsedilmiştir.

3.1 HİPERDÜZLEMLER

Tanım 3.1

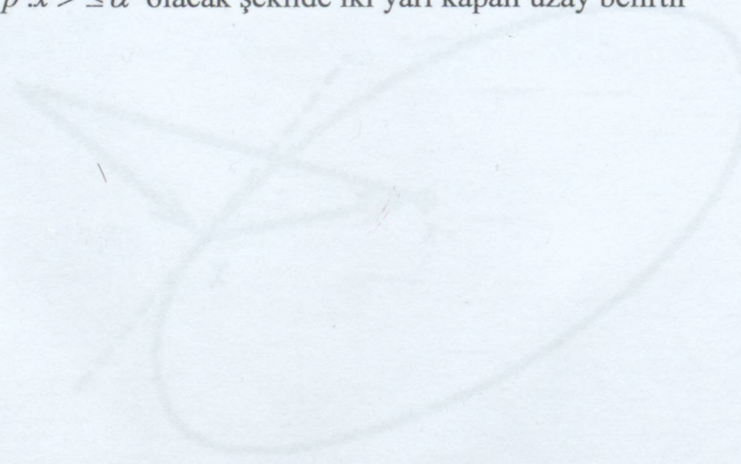
p, E_n 'de sıfırdan farklı bir vektör ve α bir skaler olsun.

$$H = \{ x \in E_n \mid \langle p, x \rangle = \alpha \}$$

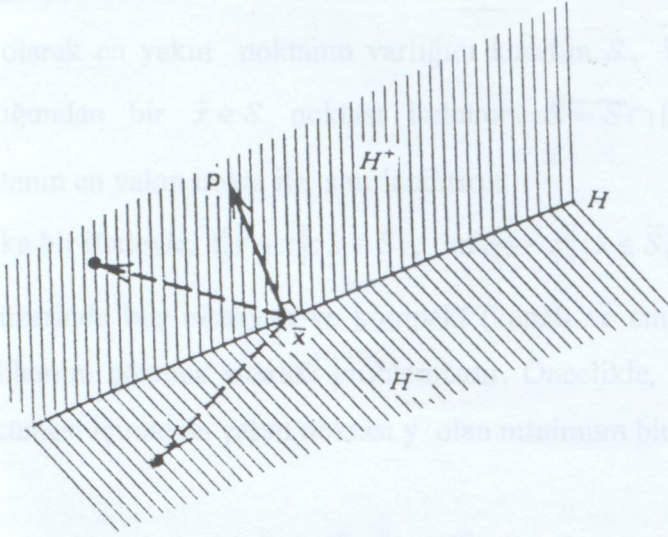
H, E_n 'de *hiperdüzlem* olarak adlandırılır. $H(p, \alpha)$ olarak ifade edilir.

E_2 'de bir hiperdüzlem, bir *doğrudur*. Örneğin, p, R^2 'de bir vektör ve $\alpha \in R$ için E_2 'de seçilen (y_1, y_2) noktaları için hiperdüzlem $p_1 \cdot y_1 + p_2 \cdot y_2 = \alpha$ şeklinde bir doğrudur. E_3 'de hiperdüzlem ise bir *düzlemdir*.

p vektörü, hiperdüzlemin normalidir. Bir H hiperdüzlemi, $H^+ = \{x \mid \langle p', x \rangle \geq \alpha\}$ ve $H^- = \{x \mid \langle p', x \rangle \leq \alpha\}$ olacak şekilde iki yarı kapalı uzay belirtir



Şekil 3.2. Kapalı bir konveks kümenin desteklenmesi



Şekil 3.1 Hiperdüzleme bir örnek ve yarı uzayların gösterilmesi

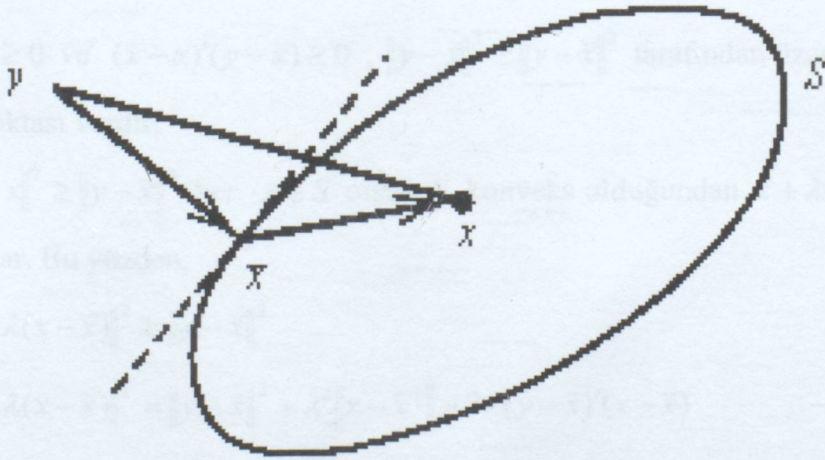
H hiperdüzlemi, $\{x | \langle p, x \rangle > \alpha\}$ ve $\{x | \langle p, x \rangle < \alpha\}$ şekilde açık yarı uzay olarak tanımlar.

Teorem 3.2 (En yakın nokta Teoremi)

S , E_n 'de boş olmayan kapalı bir konveks küme ve $y \notin S$ olsun. O halde, S kümesinde, y noktasına uzaklığı minimum olan yalnız bir nokta vardır.

Ayrıca,

$$\forall x \in S \text{ için } (x - \bar{x})'(y - \bar{x}) \leq 0 \text{ 'dür.}$$



Şekil 3.2 Kapalı bir konveks kümede minimum uzaklık

İspat:

İlk olarak en yakın noktanın varlığını kuralım. S , boş olmayan kapalı bir konveks küme olduğundan bir $\hat{x} \in S$ noktası bulunur. $\bar{S} = S \cap \{x : \|y - x\| \leq \|y - \hat{x}\|\}$ için hedefimizi noktanın en yakın nokta ile sınırlandırırız.

Başka bir ifadeyle, $\{\|y - x\| : x \in S\}$, $\inf\{\|y - x\| : x \in \bar{S}\}$ ifadeleri birbirine eşittir.

$\bar{S}$ üzerinde boş olmayan ve kompakt (kapalı ve sınırlı) bir kümenin sürekli fonksiyonun problemini çözmek sonraki problemizdir. Öncelikle, Weierstrass Teoreminden yararlanarak S kümesi içinde en yakın noktası y olan minimum bir $\bar{x}$ noktası vardır.

$\bar{x}' \in S$ olsun öyle ki $\|y - \bar{x}\| = \|y - \bar{x}'\| = \gamma$ dir. S , konveks olduğundan $(\bar{x} + \bar{x}')/2 \in S$ üçgen eşitsizliğinden

$$\left\|y - \frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\|y - \bar{x}\| + \frac{1}{2}\|y - \bar{x}'\| = \gamma$$

bir $\bar{x}$ noktasını içerir ve en yakın nokta ise y 'dir. Ayrıca bazı λ için $y - \bar{x} = \lambda(y - \bar{x}')$ eşitliği sağlanır. Çünkü $\|y - \bar{x}\| = \|y - \bar{x}'\| = \gamma$, $|\lambda| = 1$ dir. $\lambda \neq -1$ olduğu açıktır, çünkü aksi takdirde $y = (\bar{x} + \bar{x}')/2 \in S$ 'dür. Böylece $y \notin S$ öngörüsü ortaya çıkar. Bu yüzden $\lambda = 1$, $\bar{x}' = \bar{x}$ eşitliği ve tekliği kurulabilir.

İspatı tamamlamak için $(y - \bar{x})'(x - \bar{x}) \leq 0$ her $x \in S$ için sağladığını göstermeliyiz. Hem gerek hem yeter koşul için S kümesi içinde bir $\bar{x}$ noktasının en yakın noktası y olmalıdır.

$\Rightarrow x \in S$ olsun. O zaman,

$$\|y - x\|^2 = \|y - \bar{x} + \bar{x} - x\|^2 = \|y - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - x\|^2 + 2(\bar{x} - x)'(y - \bar{x}).$$

$\|\bar{x} - x\|^2 \geq 0$ ve $(\bar{x} - x)'(y - \bar{x}) \geq 0$, $\|y - x\|^2 \geq \|y - \bar{x}\|^2$ tarafından üzerine alınır ve minimum bir $\bar{x}$ noktası vardır.

$\Leftarrow \|y - x\|^2 \geq \|y - \bar{x}\|^2$ her $x \in S$ olsun. S konveks olduğundan $\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}) \in S$, $0 \leq \lambda \leq 1$ için sağlar. Bu yüzden,

$$\|y - \bar{x} - \lambda(x - \bar{x})\|^2 \geq \|y - \bar{x}\|^2 \quad (3.1)$$

$$\|y - \bar{x} - \lambda(x - \bar{x})\|^2 = \|y - \bar{x}\|^2 + \lambda^2\|x - \bar{x}\|^2 - 2\lambda(y - \bar{x})'(x - \bar{x}) \quad (3.2)$$

(3.1) ve (3.2) den

$$2\lambda(y - \bar{x})'(x - \bar{x}) \leq \lambda^2 \|x - \bar{x}\|^2 \quad (3.3)$$

bütün $0 \leq \lambda \leq 1$ için elde ederiz.

(3.3) 'ün eşitsizliğinden yararlanarak ve $\lambda > 0$ bölünerek ve $\lambda \rightarrow 0^+$ yaklaştırarak sonucu bulunur.

3.2 BİR NOKTA İLE KONVEKS KÜMENİN AYRILMASI

Ayırma teoremleri oluştururken, öncelikle bir nokta ile kapalı bir konveks kümenin ayrılması yapısı oluşturulur. Oluşturulan ayırma teoremi, hiperdüzlemler ile iki konveks kümenin ayrılması veya konveks kümenin sınır noktalarında hiperdüzlemlerle desteklenmesi olarak genelleştirilecektir.

Teorem 3.3

S , boş kümeden farklı, kapalı konveks bir küme ve $y \notin S$ olsun. O halde, sıfırdan farklı bir p vektörü ve bir α skaleri için $\langle p, y \rangle > \alpha$ ve $\langle p, x \rangle \leq \alpha$ olacak şekilde her bir $x \in S$ vardır.

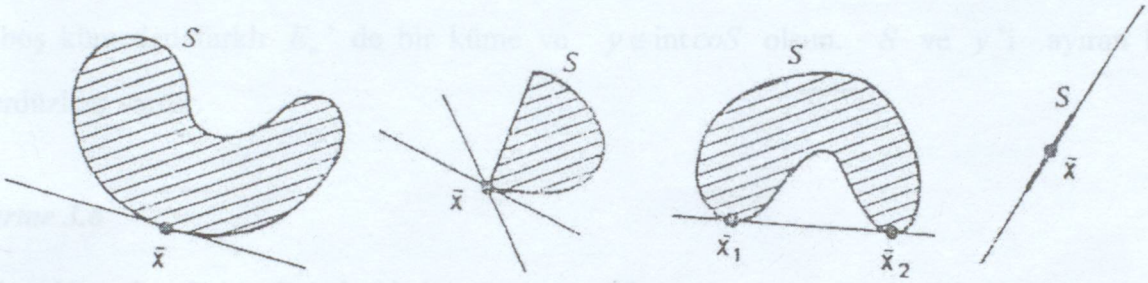
İspat:

S , boş kümeden farklı, kapalı konveks küme ve $y \notin S$ seçilirse Teorem 3.2 'den bir tek nokta $\bar{x} \in S$ bulunur öyle ki her bir $x \in S$ için $(x - \bar{x})'(y - \bar{x}) \leq 0$ 'dir. $p = (y - \bar{x}) \neq 0$ ve $\alpha = \langle \bar{x}, (y - \bar{x}) \rangle \equiv \langle p, \bar{x} \rangle$, her bir $x \in S$ için $\langle p, x \rangle \leq \alpha$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece $p'y - \alpha = (y - \bar{x})' = \|y - \bar{x}\|^2 > 0$ 'dir.

3.3 SINIR NOKTALARDA KÜMENİN HİPERDÜZLEM İLE DESTEKLENMESİ

Tanım 3.4

S , boş kümeden farklı E_n 'de bir küme ve $\bar{x} \in \partial S$ olsun. $H = \{x \mid \langle p, (x - \bar{x}) \rangle = 0\}$ şeklindeki bir hiperdüzlem için S 'in $\bar{x}$ 'de H , hiperdüzlemi ile desteklenmesi olarak adlandırılır.



Şekil 3.3 Hiperdüzlemler ile desteklenmesi ile ilgili örnekler

Teorem 3.5

S , boş kümeden farklı E_n 'de bir küme ve $\bar{x} \in \partial S$ olsun. Her bir $x \in cS$ ve sıfırdan farklı bir p vektörü için $\langle p, (x - \bar{x}) \rangle \leq 0$ olacak şekilde $\bar{x}$ noktasında S 'i destekleyen bir hiperdüzlem bulunur.

İspat :

$\bar{x} \in \partial S$ ise cS içinde bir $\{y_k\}$ dizisi bulunur ve $y_k \rightarrow \bar{x}$ yaklaşsın. Teorem 3.3' de her hangi normu 1 olan y_k dizisi uyduurulabilir ve bir p_k için her bir $x \in cS$ olmak üzere Teorem 3.3 kullanarak $p_k' y_k > p_k' x$ sağlanır. $\|p_k\| = 1$ olacak şekilde normal vektör normu tarafından normalize edilir, çünkü $\{p_k\}$ sınırlandırılmıştır.

Ayrıca, bir $\{p_k\}_\infty$ alt dizisiyle, limiti p ve normu 1 eşit olur. Alt dizisinin uyumluluğu kullanarak her bir $x \in cS$ için $p_k' y_k > p_k' x$ dir. Öyle $x \in cS$ olacak şekilde seçilebilir

$k \in \mathbb{N} \rightarrow \infty$ yaklaşır. Böylece $\langle p, (x - \bar{x}) \rangle \leq 0$ elde ederiz. Çünkü bu, her bir $x \in clS$ için doğrudur.

Önerme 3.6

S , boş kümeden farklı E_n 'de bir küme ve $\bar{x} \notin \text{int } S$ olsun. Sıfırdan farklı p vektörü ve her $x \in clS$ için $\langle p, (x - \bar{x}) \rangle \leq 0$ bulunur.

Önerme 3.7

S , boş kümeden farklı E_n 'de bir küme ve $y \notin \text{int } coS$ olsun. S ve y 'i ayıran bir hiperdüzlem vardır.

Önerme 3.8

S , boş kümeden farklı E_n 'de bir küme ve $\bar{x} \notin \partial S \cap coS$ olsun. $\bar{x}$ 'de S ' destekleyen bir hiperdüzlem vardır.

3.4 KONVEKS KÜMELERİN AYRILMASI

Bir konveks küme ile bu kümenin içinde olmayan bir noktanın ayrılmasını incelerken sınır noktasında kümenin hiperdüzlemler ile desteklendiğini düşündük. İlave olarak, iki konveks kümeyi birleştiren parçalar, H hiperdüzlemi tarafından ayrılabilirliğini ve ayrılan bu kümelerden birinin H^+ 'a ait ise diğeri küme H^- 'a ait olmalıdır.



Şekil 3.4 Konveks kümelerin ayrılmasına örnekler

Teorem 3.9

S_1 ve S_2 , E_n 'de boş olmayan konveks iki küme ve $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ olsun. O zaman E_n 'de sıfırdan farklı bir p vektörü için S_1 ve S_2 'yi ayıran bir hiperdüzlem bulunur.

$$\inf\{\langle p, x \rangle \mid x \in S_1\} \geq \sup\{\langle p, x \rangle \mid x \in S_2\}$$

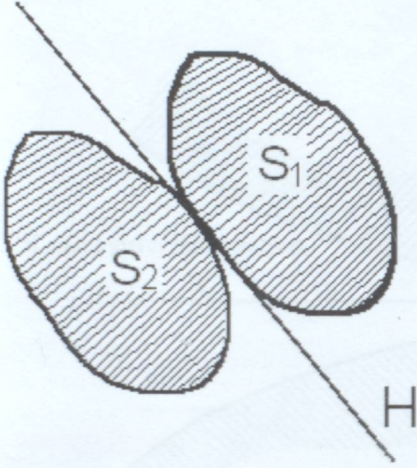
İspat:

$S = S_1 - S_2 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \in S_1 \text{ ve } x_2 \in S_2\}$ olsun. S , konveks olduğundan $0 \notin S$ 'dir. Aksi durumda $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ olacaktır. Teorem 3.5 ve Önerme 3.8 'den öyle bir $p \in E_n$ mevcuttur ki bütün $x \in S$ için $\langle p, x \rangle \geq 0$ sağlanır. Buradan yararlanarak bütün $x \in S_1$ ve $x \in S_2$ için $\langle p, x_1 \rangle \geq \langle p, x_2 \rangle$ 'dir.

Önerme 3.10 (Güçlü ayrılma)

S_1 ve S_2 , E_n 'de boş olmayan konveks kümeler ve $\text{int} S$, boş kümeden farklı ve $S_1 \cap \text{int} S_2 = \emptyset$ olsun. O halde, E_n 'de sıfırdan farklı bir p vektörü için S_1 ve S_2 'yi ayıran bir hiperdüzlem bulunur.

$$\inf\{p'x \mid x \in S_1\} \geq \sup\{p'x \mid x \in S_2\}$$



Şekil 3.5 İki kümenin ayrılması

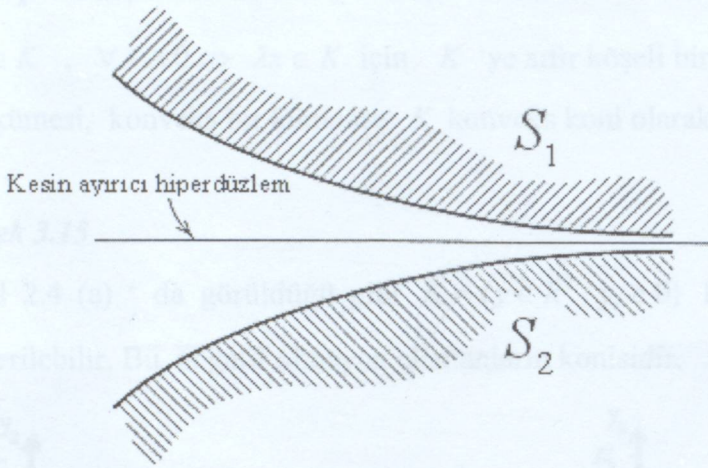
Önerme 3.11

S_1 ve S_2 , E_n 'de boş olmayan bir küme ve $\text{co}S_i$ ($i=1,2$ için) boş kümeden farklı olsun. $\text{int} \text{co}S_1 \cap \text{int} \text{co}S_2$ boş kümeden farklı ise S_1 ve S_2 'yi ayıran bir hiperdüzlem bulunur.

Teorem 3.12 (Güçlü ayırma)

S_1 ve S_2 , kapalı konveks kümeler ve S_1 sınırlı olsun. Eğer $S_1 \cap S_2$ boş küme ise o zaman, S_1 ve S_2 güçlü ayıran sıfırdan farklı p vektörü ve $\varepsilon > 0$ olacak şekilde bir hiperdüzlem bulunur.

$$\inf\{\langle p, x \rangle \mid x \in S_1\} \geq \varepsilon + \sup\{\langle p, x \rangle \mid x \in S_2\}$$



Şekil 3.6 Güçlü ayırma

İspat:

$S = S_1 - S_2$ olsun. S 'in konveks olduğunu biliyoruz. Şimdi S 'nin kapalı bir konveks küme olduğunu göstermeliyiz. x 'de S ' e doğru $\{x_k\}$ şeklinde bir noktada birleşen bir dizi tanımlayalım. S 'in tanımından , $y_k \in S_1$ ve $z_k \in S_2$ için $x_k = y_k - z_k$ 'dir. Çünkü S_1 kompakttır (kapalı ve sınırlı). S_1 'in içinde limiti y olan $\{y_k\}_{\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. $y_k \rightarrow z_k \rightarrow x$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $z_k \rightarrow z$, $k \in \mathbb{N}$ için sağlanır. Çünkü S_2 kapalıdır ve $z \in S_2$ 'dir. Ayrıca $x = y - z$ ile $y \in S_1$ ve $z \in S_2$ 'dir. Bundan dolayı, $x \in S$ ve S kapalıdır.

Teorem 3.3 'den sıfırdan farklı p vektörü mevcuttur ve her bir $x \in S$ ve ε için $\langle p, x \rangle \geq \varepsilon$ ve $\langle p, 0 \rangle < \varepsilon$ ' dir. Bu yüzden $\varepsilon > 0$ ' dir. S 'in tanımından, her bir $x_1 \in S_1$ ve $x_2 \in S_2$ için $\langle p, x_1 \rangle \geq \varepsilon + \langle p, x_2 \rangle$ olduğu gösterilir.

Önerme 3.13

S_1 ve S_2 , E_n 'de boş olmayan kümeler ve S_1 sınırlı olsun. Eğer $clcoS_1 \cap clcoS_2$ boş küme ise S_1 ve S_2 'yi güçlü ayıran bir hiperdüzlem bulunur.

3.5 KONVEKS KONİ

Tanım 3.14

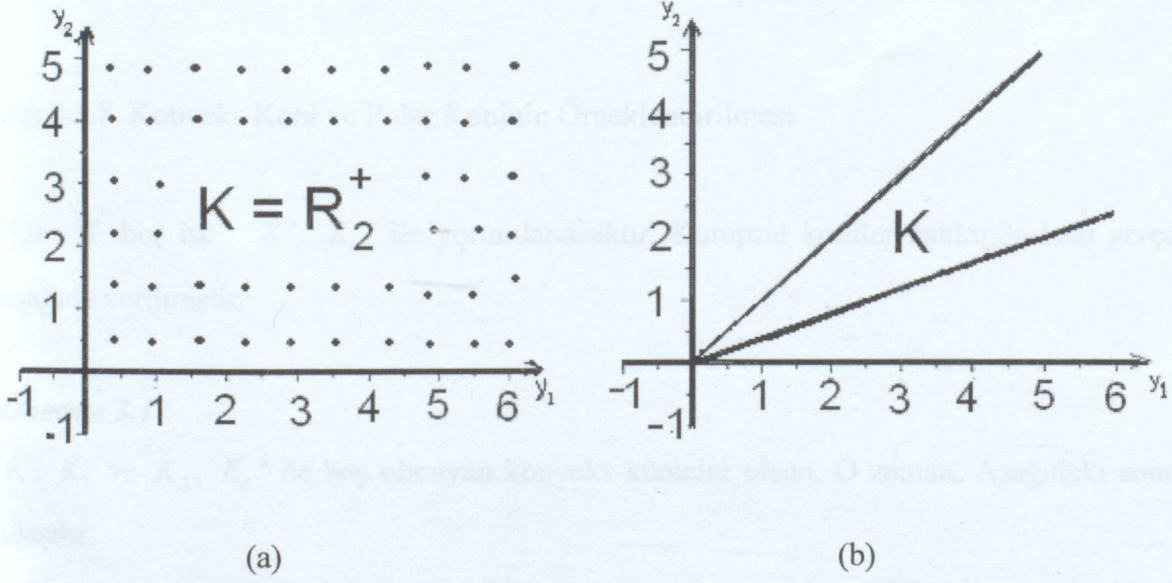
K , E_n 'de boş kümeden farklı bir küme olsun.

$\forall x \in K$, $\forall \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in K$ için K 'ye sıfır köşeli bir *koni* denir

K kümesi, konveks bir küme ise K konveks koni olarak adlandırılır.

Örnek 3.15

Şekil 2.4 (a) 'da görüldüğü gibi $K = \{y \in R^2 : y_i \geq 0\}$ konisi, konveks koni olarak örnek gösterilebilir. Bu, negatif olmayan elemanların konisidir.

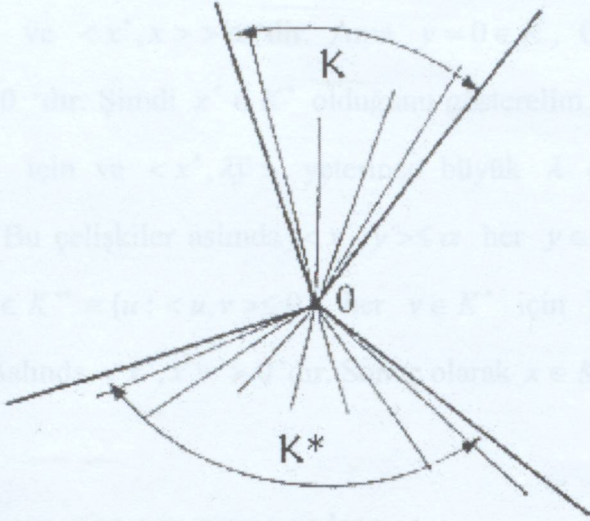


Şekil 3.7 İki koni örneği

Tanım 3.16

K, E_n 'de boş olmayan bir küme olsun. O zaman, K 'nın *kutupsal konisi*, K^* olarak ifade edilir. O halde ,

$$K^* = \{x^* \mid \langle x, x^* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K\}$$



Şekil 3.8 Konveks Koni ve Polar Koninin Örneklendirilmesi

Eğer K boş ise K^*, E_n 'ile yorumlanacaktır. Kutupsal koniler hakkında bazı gerçekler aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.17

K, K_1 ve K_2, E_n 'de boş olmayan konveks kümeler olsun. O zaman, Aşağıdaki sonuçlar ulaşılır.

1. K^* , kapalı konveks bir konidir.
2. $K \subseteq K^{**}$ 'dir. Burada K^* 'nın kutupsal konisi K^{**} 'dir.
3. $K_1 \subseteq K_2$ ise $K_2^* \subseteq K_1^*$ gerektirir.

Şimdi kapalı konveks koniler için önemli teoremi ispatlayacağız.

Teorem 3.18

K , boş olmayan kapalı konveks koni olsun. O zaman $K = K^{**}$ 'dır.

İspat :

Önermeden $K \subseteq K^{**}$ açıktır. Şimdi $x \in K^{**}$ olsun ve çelişkiyi varsayalım, Bu $x \in K$ 'dir.

Teorem 3.3 , sıfırdan farklı bir x^* vektörü ve bir α skaleri bulunur öyle ki $\langle x^*, y \rangle \leq \alpha$ her $y \in K$ için ve $\langle x^*, x \rangle > \alpha$ 'dır. Ama $y = 0 \in K$, O halde $\alpha \geq 0$ ve bununla birlikte $\langle x^*, x \rangle > 0$ 'dır. Şimdi $x^* \in K^*$ olduğunu gösterelim. Eğer değilse ,o zaman $\langle x^*, \bar{y} \rangle > 0$ bazı $\bar{y} \in K$ için ve $\langle x^*, \lambda \bar{y} \rangle$ yeterince büyük λ değerleri için keyfi büyük değerler yapılabilir. Bu çelişkiler aslında $\langle x^*, y \rangle \leq \alpha$ her $y \in K$ içindir. Bu yüzden $x^* \in K^*$ 'dir. Çünkü $x \in K^{**} \equiv \{u : \langle u, v \rangle \leq 0 \text{ her } v \in K^* \text{ için} \}$. O halde $\langle x^*, x \rangle \leq 0$ ' dir. Bu çelişkidir. Aslında $\langle x^*, x \rangle > 0$ 'dır. Sonuç olarak $x \in K$ ' dır.

3.6 KONJUGET FONKSİYONU**Tanım 3.19**

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. f 'in konjuget fonksiyonu $f^* : E_n \rightarrow \bar{R}$ şöyle tanımlıdır.

Her $x^* \in E_n$

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \}$$

Önerme 3.20

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ fonksiyonu ve $f^* : E_n \rightarrow \bar{R}$ f 'in konjuget fonksiyonu olsun. O halde,

$$\forall x \in E_n \quad f(x) \leq g(x) \Rightarrow f^*(x^*) \geq g^*(x^*) \text{ 'dir.}$$

İspat :

Tanım 3.19 'dan

$$\forall x \in E_n \text{ için } f(x) \leq g(x) \Rightarrow -f(x) \geq -g(x)$$

$$\Rightarrow \langle x, x^* \rangle - f(x) \geq \langle x, x^* \rangle - g(x)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \} \geq \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - g(x) \}$$

$$\Rightarrow f^*(x^*) \geq g^*(x^*)$$

Önerme 3.21

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$, $f^* : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. O halde aşağıdakilerden doğrudur.

$$(i) (\lambda f)^*(x^*) = \lambda f^*\left(\frac{x^*}{\lambda}\right), \quad \forall \lambda > 0$$

$$(ii) (f + \alpha)^*(x^*) = f^*(x^*) - \alpha, \quad \forall \alpha \in R$$

İspat:

(i) Tanım 3.19 'dan,

$$(\lambda f)^*(x^*) = \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - \lambda f(x) \}$$

$$= \lambda \sup_{x \in E_n} \left\{ \langle x, \frac{x^*}{\lambda} \rangle - f(x) \right\}$$

$$= \lambda f^*\left(\frac{x^*}{\lambda}\right)$$

(ii) Tanım 3.19 'den,

$$(f + \alpha)^*(x^*) = \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - (f + \alpha)(x) \}$$

$$= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) - \alpha \}$$

$$= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \} - \alpha$$

$$= f^*(x^*) - \alpha$$

Tanım 3.22

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. f 'in konjuget fonksiyonu $f^* : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. f 'in ikincil konjuget fonksiyonu $f^{**} : E_n \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere

Her $x \in E_n$

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \}$$

Önerme 3.23

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. $f^*(x^*)$ ve $f^{**}(x)$ fonksiyonları konvektir.

İspat:

$x_1^*, x_2^* \in E_n$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun.

$$\begin{aligned}
 f^*(\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*) &= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* \rangle - f(x) \} \\
 &= \sup_{x \in E_n} \{ \lambda \langle x, x_1^* \rangle + (1-\lambda) \langle x, x_2^* \rangle + \lambda f(x) - \lambda f(x) - f(x) \} \\
 &= \sup_{x \in E_n} \{ \lambda \langle x, x_1^* \rangle + (1-\lambda) \langle x, x_2^* \rangle - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(x) \} \\
 &= \sup_{x \in E_n} \{ \lambda [\langle x, x_1^* \rangle - f(x)] + (1-\lambda) [\langle x, x_2^* \rangle - f(x)] \} \\
 &\leq \sup_{x \in E_n} \{ \lambda [\langle x, x_1^* \rangle - f(x)] \} + \sup_{x \in E_n} \{ (1-\lambda) [\langle x, x_2^* \rangle - f(x)] \} \\
 &= \lambda \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x_1^* \rangle - f(x) \} + (1-\lambda) \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x_2^* \rangle - f(x) \} \\
 &= \lambda f^*(x_1^*) + (1-\lambda) f^*(x_2^*)
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $f^{**}(x)$ fonksiyonun da konveks olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.24

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. O halde

$$\forall x \in E_n \text{ için } f^{**}(x) \leq f(x) \text{ 'dir.} \quad (3.4)$$

ispat:

$$\begin{aligned}
 \forall x, x^* \in E_n \text{ için } \langle x, x^* \rangle - f(x) &\leq f^*(x^*), \\
 \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) &\leq f(x),
 \end{aligned}$$

x noktasını sabitleyip supremum alırsak,

$$\sup_{x^* \in E_n} \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \leq f(x)$$

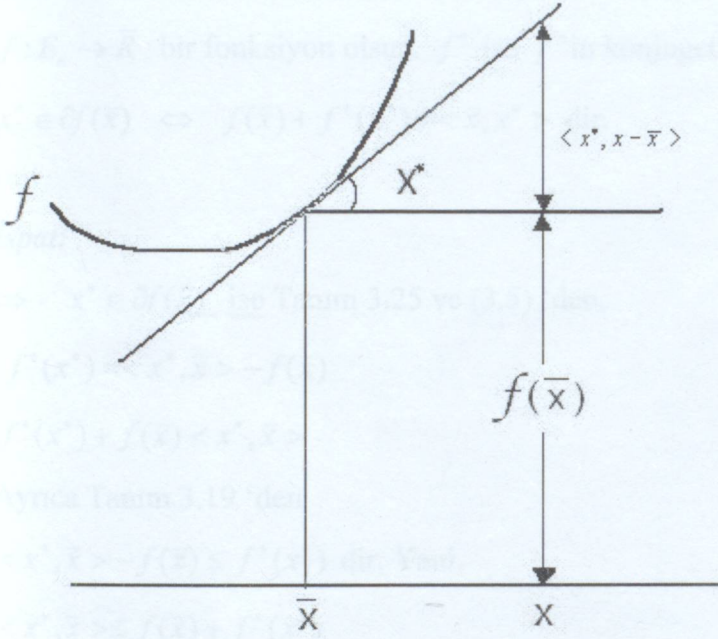
$$f^{**}(x) \leq f(x)$$

3.7 SUBDİFERANSİYEL

Tanım 3.25

$f: E_n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

$f(x)$ sınırlı ve $\forall x \in E_n$ için $\langle x^*, x - \bar{x} \rangle + f(\bar{x}) \leq f(x)$ olacak şekilde $x^* \in E_n$ var ise x^* vektörüne f 'in $\bar{x}$ 'daki subgradyantı denir. f 'in $\bar{x}$ 'daki subgradyantlarının kümesine f 'in subdiferansiyeli denir ve $\partial f(\bar{x})$ ile gösterilir.



konveks fonksiyon

Şekil 3.9 Subgradyantların geometrik yorumu

Teorem 3.26

$f: E_n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. O halde,

$\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$ ise $f(\bar{x}) = f^{**}(\bar{x})$ ' dir.

İspat:

$\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$ olduğundan $\exists x^* \in E_n: x^* \in \partial f(\bar{x})$ ' dir.

Tanım 3.25 'den,

$$\langle x^*, x - \bar{x} \rangle + f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in E_n$$

$$\langle x^*, x \rangle - f(x) \leq \langle x^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}), \quad \forall x \in E_n$$

$$f^*(x^*) \leq \langle x^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}) \quad (3.5)$$

$$f(\bar{x}) \leq \langle x^*, \bar{x} \rangle - f^*(x^*) \leq f^{**}(\bar{x}) \quad (3.6)$$

(3.4) ve (3.6) 'dan $f(\bar{x}) = f^{**}(\bar{x})$ dir.

Teorem 3.27

$f: E_n \rightarrow \bar{R}$ bir fonksiyon olsun. f^* ise f 'in konjuget fonksiyonu olsun. O halde,

$$x^* \in \partial f(\bar{x}) \Leftrightarrow f(\bar{x}) + f^*(x^*) = \langle \bar{x}, x^* \rangle \text{ dir.}$$

İspat:

$\Rightarrow x^* \in \partial f(\bar{x})$ ise Tanım 3.25 ve (3.5) 'den,

$$f^*(x^*) = \langle x^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x})$$

$$f^*(x^*) + f(\bar{x}) = \langle x^*, \bar{x} \rangle \quad (3.7)$$

Ayrıca Tanım 3.19 'den

$$\langle x^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}) \leq f^*(x^*) \text{ dir. Yani,}$$

$$\langle x^*, \bar{x} \rangle \leq f(\bar{x}) + f^*(x^*) \quad (3.8)$$

(3.6) ve (3.8) 'dan

$$f(\bar{x}) + f^*(x^*) = \langle \bar{x}, x^* \rangle \text{ dir.}$$

$\Leftarrow$ Tanım 3.19 'dan,

$$\langle x^*, \bar{x} \rangle - f(x) \leq f^*(x^*), \quad \forall x \in E_n$$

$$\langle x^*, \bar{x} \rangle - f(x) \leq f^*(x^*) = \langle \bar{x}, x^* \rangle - f(\bar{x}), \quad \forall x \in E_n \text{ (hipotez)}$$

$$\langle x, x^* \rangle - \langle \bar{x}, x^* \rangle + f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in E_n$$

$$\langle x - \bar{x}, x^* \rangle + f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in E_n$$

$x^* \in \partial f(\bar{x})$ 'dir.

4. KÜMELERİN AYRILMASI

İki konveks kümenin birbirinden ayrılmasında ve sınır noktalarında desteklenmesinde hiperdüzlemlerin kullanılabileceğini, 3.bölümde çeşitli teorilerle gösterdik. Ama bu kümelerin konveks küme olma zorunluluğu vardı. Bu bölümde ise bu zorunluluğu ortadan kaldıracak şekilde yapılar oluşturulacaktır. Bu yapıların inşası; n boyutlu E_n öklid uzayında yapılacaktır.

R^n , n boyutlu vektör uzayı ve C , E_n 'de keyfi ve açık bir küme olmak üzere ayırma teoremleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

Önerme 4.1

k^0 , R^n 'de bir vektör olmak üzere, C 'in sınırından (∂C) , E_n 'in her bir ögesi için k^0 ve $-k^0$ 'a doğru uzanır veya başka bir ifadeyle;

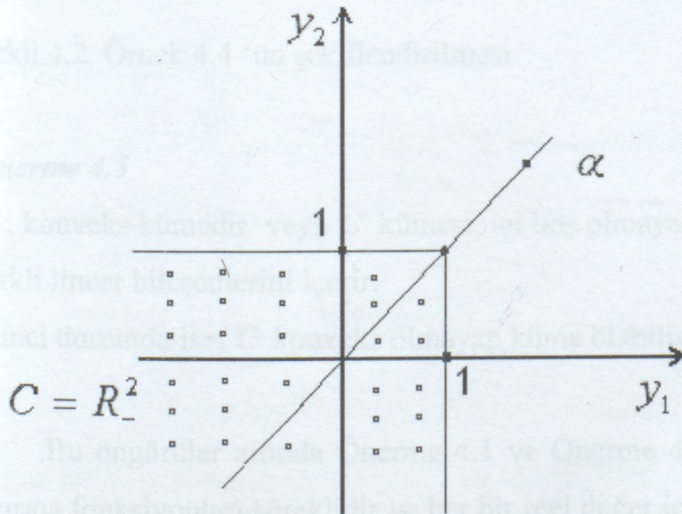
$$\exists k^0 \in R^n : R^n = \cup \{ \partial C + \alpha k^0 \mid \alpha \in R \} \text{ 'dir.}$$

Örnek 4.2

E_2 'de çalışalım.

$C = \text{int } R_-^2$ olmak üzere, $k^0 = (1,1)^T$ vektörünü seçelim.

O zaman $R^2 = \cup \{ \partial C + \alpha (1,1) \mid \alpha \in R \}$ olduğu gösterilebilir.



Şekil 4.1 R^2 'in C kümesi ile ilişkilendirilmesi

Önerme 4.3

k^0 , R^n 'de bir vektör olmak üzere, C 'in sınırından (∂C) , $-k^0$ vektörü yönüne doğru ulaşabilen bütün vektörlerin kümesi C olarak ifade edilir veya başka bir ifadeyle;

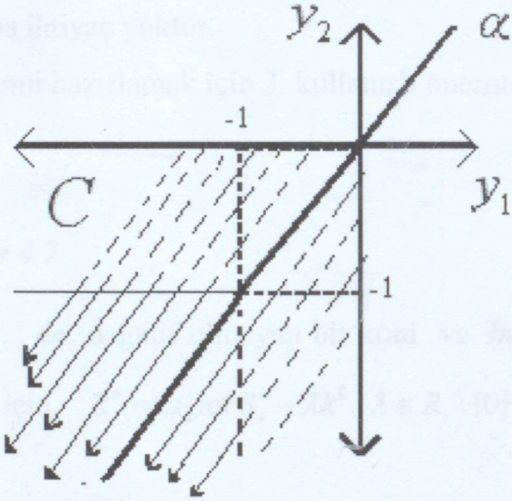
$$C = \cup \{ \delta C - \alpha k^0 \mid \alpha \in R_+ \setminus \{0\} \}$$

Örnek 4.4

E_2 'de çalışalım.

$C = \text{int } R_-^2$ olmak üzere, $k^0 = (1,1)'$ ve $-k^0 = (-1,-1)'$ vektörünü seçelim.

O zaman C 'nin sınırından (∂C) , $-k^0$ vektörü yönüne doğru ulaşabilen bütün vektörlerin kümesi C 'tir. $C = \cup \{ \delta C - \alpha(1,1) \mid \alpha \in R_+ \setminus \{0\} \}$ olarak gösterilebilir.



Sekil 4.2 Örnek 4.4 'ün şekillendirilmesi

Önerme 4.5

C , konveks kümedir veya C kümesi, içi boş olmayan bir konveks koni ile onun kapanışının farklı lineer bileşenlerini içerir.

İkinci durumda ise, C konveks olmayan küme olabilir.

Bu öngörüler altında Önerme 4.1 ve Önerme 4.5 üzerine oluşturacağımız yapılar için ayırma fonksiyonları süreklidir ve her bir reel değer için hedefe ulaşılır. Ayrıca, clC konveks ise $\partial C + \partial C \subset clC$ mevcuttur.

Ayrırma teoremlerinden önemli bir yere sahip olan monotonluk kavramını tanımlayalım.

Tanım 4.6

D , E_n 'de boş olmayan bir kümesi olsun.

- (a) $z : E_n \rightarrow E_1$ bir fonksiyon olmak üzere $y^1 \in y^2 + D$ için $zy^1 \geq zy^2$ ise D -monoton olarak adlandırılır.
- (b) $z : E_n \rightarrow E_1$ bir fonksiyon olmak üzere $y^1 \in y^2 + (D \setminus \{0\})$ için $zy^1 > zy^2$ ise D , kesinlikle monoton olarak adlandırılır.

4.1 AYIRMA TEOREMLERİ

İki kümenin ayrılması için iki teorem verilecek öyle ki bu kümelerden en az biri konveks olmasına ihtiyaç yoktur.

İlk teoremi hazırlamak için 3 kullanışlı önerme aşağıda verilmiştir.

Önerme 4.7

R_+^n , E_n 'de negatif olmayan bir koni ve $\text{Int}R_+^n$ boş kümeden farklıdır. R_+^n 'un, her k^0 iç noktası için $R^n = \cup \{\text{int } R_+^n - \lambda k^0 \mid \lambda \in R_+ \setminus \{0\}\}$ 'dir.

İspat:

$k^0 \in \text{int } R_+^n$ olsun.

$V := \text{Int}R_+^n - k^0 \in E_n$ olmak üzere R_+^n , bir koni olduğundan $0 \in V$ 'dür.

her $\lambda \in R_+ \setminus \{0\}$ için $\lambda V = \lambda(\text{int } R_+^n - k^0) \subset \text{int } R_+^n - \lambda k^0$ 'dir.

Ayrıca;

$\cup \{\lambda V \mid \lambda \in R_+ \setminus \{0\}\} \subset \cup \{\text{Int}R_+^n - \lambda k^0 \mid \lambda \in R_+ \setminus \{0\}\}$ olduğunu söyleyebiliriz.

$\lambda k^0 \in \text{int } R_+^n$ olduğu için $R^n = \cup \{\text{int } R_+^n - \lambda k^0\}$ 'dir. (Kantorowitch ve Akilow, 1978)

Sonuç olarak; $R^n = \cup \{\text{int } R_+^n - \lambda k^0 \mid \lambda \in R_+ \setminus \{0\}\}$ 'dir.

Önerme 4.7 'in iddiası bir keyfî $k^0 \in R_+^n$ için geçerli kalmaz.

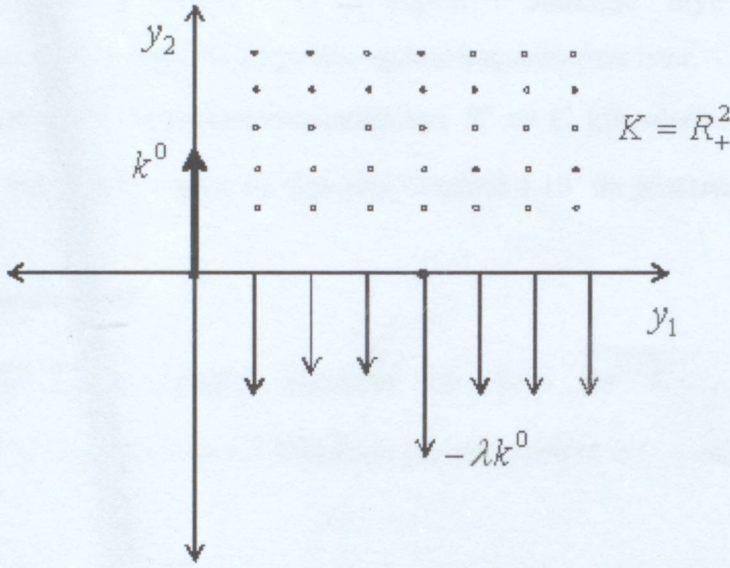
Örnek 4.8

E_2 'de çalışalım.

R_+^2 ,negatif olmayan bir koni ve $k^0 = (0,1)'$ seçelim.

Gösterilebilir ki ;

$$\cup \{ \text{int } R_+^n - \lambda k^0 \mid \lambda \in R_+ \setminus \{0\} \} = \{y \in E_2 \mid y_1 > 0\} \neq R^2 \text{ 'dür.}$$



Şekil 4.3 Önerme 4.7 'de keyfî bir $k^0 \in R_+^n$ için geçerli olmadığının gösterilmesi

Önerme 4.9

R_+^n , E_n 'de negatif olmayan konveks bir koni ve C , E_n 'in bir alt kümesi ve $\text{int } R_+^n$ ise boş kümeden farklıdır.

$y^0 \in E_n$ olacak şekilde bir eleman ve $y^0 - \text{int } R_+^n \subset C$ varsa her bir $k^0 \in \text{int } R_+^n$ için

$$R^n = \cup \{ C + \lambda k^0 \mid \lambda \in R_+ \setminus \{0\} \} \text{ bulunur.}$$

İspat:

$y \in E_n$ olacak şekilde keyfî bir eleman ve $k^0 \in \text{int } R_+^n$ verilsin. Önerme 4.7 'ten dolayı

$\lambda \in R_+ \setminus \{0\}$ için $k \in \text{int } R_+^n$ bulunur. Öyle ki $y^0 - y = k - \lambda k^0$ 'dır.

$y = y^0 - k + \lambda k^0 \in C + \lambda k^0$ 'dur. Çünkü $y^0 - \text{int } R_+^n \subset C$ 'dür.

Bu yüzden

$y \in \cup \{C + \lambda k^0 \mid \lambda \in R_+ \setminus \{0\}\}$ 'dir.

Böylece $R^n = \cup \{C + \lambda k^0 \mid \lambda \in R_+ \setminus \{0\}\}$ söyleyebiliriz veya değişik bir ifadeyle küme yerine parametreler kullanarak, $Y = \cup \{Q - \lambda k^0 \mid \lambda \in P\}$ şekline getirerek Gerstwitz ve Ivanow (1985) 'un ayırma teoremine benzetilebilir.

Gerstwitz ve Ivanow "Q ile ilişkili Y yönünde" diye adlandırılır. Ama Önerme 4.7 ve Önerme 4.9 öyle bir koşuldaki açıkça kaçınmamızı ister.

Önerme 4.9' in açıklamalarından biri R_+^n ve C kümelerinin arasındaki bir ilişkiyi ifade eder.

C 'nün etkili yapısı ile ilişkisini Önerme 4.10' da göstereceğiz.

Önerme 4.10

R_+^n , E_n 'de negatif olmayan bir koni ve C , E_n 'in bir alt kümesi olsun.

$clC - \text{int } R_+^n \subset cl(\text{int } C)$ koşulunu yerine getirirse $clC = cl(\text{int } C)$ 'dür.

İspat:

$c \in clC$ olacak şekilde keyfi bir eleman düşünelim.

$c - cl(\text{int } R_+^n) = cl(c - \text{int } R_+^n) \subset cl(clC - \text{int } R_+^n) \subset cl(cl(\text{int } C)) = cl(\text{int } C)$ olur.

$\text{int } R_+^n \cup \{0\}$ şeklinde bir koni verilirse $0 \in cl(\text{int } R_+^n)$ için $c = c - 0 \in cl(\text{int } C)$ 'dür.

4.1.1 İLK AYIRMA TEOREMİ

Teorem 4.11

R_+^n E_n 'de negatif olmayan bir koni ve C , E_n 'in içi boş olmayan tamamıyla alt kümesi öyle ki $clC - \text{Int}R_+^n \subset \text{int}C$ olsun. A , E_n 'de boş kümeden farklı bir küme olsun.

O halde;

$z: E_n \rightarrow E_1$ bir fonksiyon, $\text{Int}R_+^n$ $(-\infty, +\infty)$ aralığında kesin monoton olduğundan $A \cap \text{int}C = \emptyset$ olacak şekilde yalnız ve yalnız sürekli bir fonksiyon bulunur ve aşağıdaki ilişkiler geçerlidir:

$$z(A) \geq 0, \quad z(\text{int}A) > 0, \quad z(C) < 0, \quad z(\delta A) = 0, \quad z(\text{int}C) < 0$$

Ayrıca;

B , E_n 'de bir küme ve z -fonksiyonu için

- clC bir konveks küme ise fonksiyonda konvektir.
- z fonksiyonu, B -monotonluğu için her bir $B \subset E_n$ kümesi ile $\partial C - B \subset clC$ ve $clC - (B \setminus \{0\}) \subset \text{int}C$ ise B , kesinlikle monotondur.
- $\partial C + \partial C \subset clC$ ise z fonksiyonu E_n 'in alt kümelerini ilavesi ihtiva eder.

İspat:

z - fonksiyonunun tanımı;

$z: E_n \rightarrow E_1$ olmak üzere keyfî bir eleman $k^0 \in \text{int}R_+^n$ seçelim.

Şimdi her bir $\lambda \in R$ ve her $y \in E_n$ için $S_\lambda := clC + \lambda k^0$ olacak şekilde $y \in S_\lambda$ bulunur.

Çünkü, Önerme 4.7' de $R^n = \cup \{clC + \alpha k^0 \mid \alpha \in R\}$ olduğunu biliyoruz. Eğer $y \in S_\lambda$ ise o

zaman her bir $\mu > \lambda$ için $y \in \text{int}C + \mu k^0$ geçerlidir. Öyle ki $y \in S_\mu$ olduğunu ima eder.

Buradan yararlanarak $y - \mu k^0 = y - \lambda k^0 + (\lambda - \mu)k^0 \in clC - \text{int}R_+^n \subset \text{int}C$ 'dür. (4.1)

Her $y \in E_n$ için $\lambda \in R$ olmak üzere $y \notin S_\lambda$ olduğunu göstermeliyiz. Farz edelim ki $y^0 \in E_n$ 'in her bir eleman ve aynı zamanda her $\lambda \in R$ için S_λ 'a ait olsun.

O zaman (4.1)' den yararlanarak her $\lambda \in R$ için $y^0 \in \text{int } C + \lambda k^0$ 'dır.

Böylece $\{y^0 - \lambda k^0 \mid \lambda \in R\} \subset \text{int } C$ söylenir.

Önerme 4.7 'ten yararlanarak $R^n = \cup \{\text{int } R_+^n - \alpha k^0 \mid \alpha \in R_+ \setminus \{0\}\}$ her $y \in E_n$ için $k \in \text{int } R_+^n$

'un varlığı bu verir. Ayrıca, $\alpha \in R_+ \setminus \{0\}$ ile $-y = k - \alpha k^0$ için

$$y = -k + \alpha k^0 + y^0 - y^0 = (y^0 + \alpha k^0) - k - y^0 \in \text{int } C - \text{int } R_+^n - y^0 \subset C - y^0$$

Böylece,

$E_n \subset C - y^0$ öyle ki $E_n = C$ 'dür. Bu çelişkidir. $C \neq E_n$ 'dür.

(4.1)' dan dolayı eğer $y \in E_n$ ve S_λ ait değilse o zaman $\mu < \lambda$ için S_μ ait olmadığı söyleyebiliriz. Bu gerçekler gösterir ki;

$z: E_n \rightarrow E_1$ fonksiyonu $zy := \inf\{\lambda \mid y \in S_\lambda\}$ iyi tanımlanmıştır.

Çünkü sadece o sınırlı değerler hedefine ulaşılır.

- **Fonksiyon aralığı tanımlayalım;**

Her bir $r \in R$ için

$$zy < r \Leftrightarrow y \in \text{int } C + rk^0 \quad (4.2)$$

$$zy \leq r \Leftrightarrow y \in \text{cl } C + rk^0 \quad (4.3)$$

$$zy = r \Leftrightarrow y \in \delta C + rk^0 \quad (4.4)$$

$$zy \geq r \Leftrightarrow y \notin \text{int } C + rk^0 \quad (4.5)$$

$$zy > r \Leftrightarrow y \notin \text{cl } C + rk^0 \quad (4.6)$$

Şimdi bu özellikleri gösterelim:

(4.2) En az bir $\lambda < r$ için $y \in S_\lambda$ 'dan $zy < r$ olduğu verilir. Bu yüzden (4.1)'den $y \in \text{int } C + rk^0$ 'dır. Eğer $y \in \text{int } C + rk^0$ ise $c \in \text{int } C$ ve $y = c + rk^0$ bulunur

Çünkü E_n 'de $t > 0$ bir reel değer için $\lambda := r - t.c + tk^0 \in \text{int } C$ söylenebilir. $\lambda := r - t$ için

$$y = c + rk^0 = c + (r - d)k^0 + \lambda k^0 = (c + tk^0) + k^0 \in \text{int } C + k^0 \text{ 'dır.}$$

Bundan dolayı $\lambda < r$ için $y \in S_\lambda$ ' den $zy < r$ olduğu gösterir.

(4.3) Farz edelim $zy \leq r$ ' dir.

rk^0 ' in U gibi keyfi bir komşuluğunu düşünelim.

$\lambda < r$ ve $\lambda k^0 \in U$ bulunsun. $zy \leq r \Rightarrow y \in S_\lambda = clC + \lambda k^0$ ' dir.

Bu yüzden λk^0 , $y - clC$ ve U komşuluğuna aittir.

Sonuç olarak; $rk^0 \in cl(y - clC) = y - clC$ ' dir. Burada. z 'in tanımından $y \in intC + rk^0$ olmalıdır Burada $zy \leq r$ 'dir.

Benzer şekillerde (4.5),(4.2)' den (4.5),(4.3) ve (4.4)'den (4.3) ve (4.5)' den yararlanarak gösterilir.

z 'in tanımında sadece sınırlı değerleri için hedefine ulaştığını göstermiştik. Şimdi (4.5) 'den dolayı artık z 'in her bir değeri için hedefine ulaştığını söyleyebiliriz.

• Fonksiyonun ayırma özelliği;

$r = 0$ için

(4.3)' den $z(clC) \leq 0$,

(4.4)' den $z(\bar{cl}C) = 0$,

(4.5) ' den $z(intC) \leq 0$ 'dir.

$A \cap intC = \emptyset$ olduğundan dolayı (4.5)' ten $z(A) \geq 0$ ' dir. $intA \cap intC = \emptyset$ için $intA \cap cl(intC) = \emptyset$ olduğu söylenir.

Önerme 4.10 "den $A \cap clC = \emptyset$ " dir. (4.6)' dan $z(A) \geq 0$ ' dir.

• Fonksiyonun monotonluğu;

Eğer $y^1 \in y^2 + intR_+^n$ ve $r = zy^1$ ise

O zaman

$y^2 \in y^1 - intR_+^n \subset (clC + rk^0) - intR_+^n \subset intC + rk^0$ ve (4.2)' den dolayı

$zy^2 < r = zy^1$ ' dir. Böylece, $intR_+^n$ kesinlikle monotonudur.

- **Fonksiyonun sürekliliği;**

(4.2) ve (4.6) 'den dolayı aşıkardır.

- **Fonksiyonun konveksliliği;**

Eğer clC konveks ise (4.3) 'den z 'in konveksliği gösterilir.

- **Fonksiyonun B-monotonluğu;**

$y^1, y^2 \in E_n$ ile $y^1 \in y^2 + (B \setminus \{0\})$ ve $r := zy^1$ ' dır. (4.4)' den dolayı $y^1 = \bar{c} + rk^0$ olacak şekilde en az bir $\bar{c} \in \partial C$ vardır.

Bu yüzden ;

Eğer $\partial C - B \subset clC$ ise

$$y^2 \in y^1 - B \subset (\bar{c} + rk^0) - B \subset (\partial C - B) + rk^0 \subset clC + rk^0$$

Buradan yararlanarak $zy^2 < r$ olduğunu (4.3)' den söyleyebiliriz.

Eğer $\partial C - (B \setminus \{0\}) \subset \text{int } C$ ise

$$y^2 \in y^1 - (B \setminus \{0\}) \subset (\bar{c} + rk^0) - (B \setminus \{0\}) \subset (\bar{c} + rk^0) - (B \setminus \{0\}) \subset \text{int } C + rk^0$$
 ' dır.

Buradan yararlanarak $zy^1 < r$ olduğunu (4.2) 'den söyleyebiliriz.

- **Fonksiyonun altkümeleri ihtiva etmesi;**

İfadeler;

$$zy^1 = r_1 \Leftrightarrow y^1 \in \partial C + rk^0$$

$$zy^2 = r_2 \Leftrightarrow y^2 \in \partial C + rk^0$$

ima et,

$$y^1 + y^2 \in \partial C + \partial C + (r_1 + r_2)k^0 \subset clC + (r_1 + r_2)k^0$$

eğer

$\partial C + \partial C \subset clC$ ve bu yüzden

$$z(y^1 + y^2) \leq r_1 + r_2 = zy^1 + zy^2 \text{ bütün } y^1, y^2 \in E_n \text{ için}$$

(4.4) ve (4.3) 'den dolayı sağlanır.

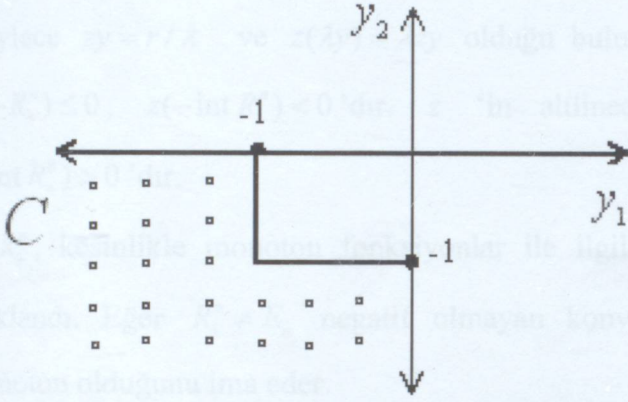
Önerme 4.12

İlk Ayırma Teoremi (Teorem 4.10) 'in C 'in konveksliğini ima etmez.

Örnek 4.13

E_2 'de çalışalım.

R_+^2 , negatif olmayan koni ve $C = -R_+^2 \mid \{(y_1, y_2) \in R^2 \mid y_1 > -1, y_2 > -1\}$ koşullar tanımlayalım. Görüldüğü gibi burada C kümesi konveks değildir.



Şekil 4.4 C kümesinin konveks olmayan bir küme olabileceğinin gösterilmesi

Önerme 4.14

$R_+^n \subset E_n$ negatif olmayan konveks koni ve A, E_n 'in boş olmayan bir kümesi olmak üzere;

$z: E_n \rightarrow E_1$ bir fonksiyon, $\text{int } R_+^n$ $(-\infty, +\infty)$ aralığında kesinlikle monoton olduğundan

$A \cap -\text{int } R_+^n = \emptyset$ olacak şekilde yalnız ve yalnız sürekli bir fonksiyon bulunur ve aşağıdaki

ilişkiler geçerlidir:

$$z(A) \geq 0$$

$$z(\text{int } A) > 0$$

$$z(-R_+^n) \leq 0$$

$$z(-\delta R_+^n) = 0$$

$$z(-\text{int } R_+^n) < 0$$

$$z(R_+^n) \geq 0$$

$$z(\text{int } R_+^n) > 0$$

İspat:

Teorem 4.11' da $C = -R_+^n$ olsun. Teoremin ispatında (10.4)' in sonucundan yararlanarak $z(0) = 0$ 'dır. Çünkü $0 \in R_+^n - \text{int } R_+^n \subset \partial C$ olduğunu söyleyebiliriz. Teorem 4.11' de fonksiyonun altkümeleri ihtiva etmesinden dolayı z , altkümeleridir.

(10.4)' den yararlanarak $z(\lambda y) = r$ ve $\lambda \in R_+ \setminus \{0\}$ için $\lambda y \in \partial C + rk^0$ ima edebiliriz.

Ayrıca $y \in 1/\lambda \cdot \partial C + r/\lambda \cdot k^0 \subset \partial C + r/\lambda \cdot k^0$ 'dır.

Çünkü C , konveks konidir.

Böylece $zy = r/\lambda$ ve $z(\lambda y) = \lambda zy$ olduğu bulunur. Bu yüzden, z , altlineerdir. Aslında $z(-R_+^n) \leq 0$, $z(-\text{int } R_+^n) < 0$ 'dır. z 'in altlineer sonucundan yararlanarak $z(R_+^n) \geq 0$, $z(\text{int } R_+^n) > 0$ 'dır.

$\text{Int } R_+^n$, kesinlikle monoton fonksiyonlar ile ilgili yapısı, Teorem 4.11 ve Önerme 3.14 açıklandı. Eğer $R_+^n \neq E_n$ negatif olmayan konveks koni olduğundan, $\text{Int } R_+^n$ kesinlikle monoton olduğunu ima eder.

Örnek 4.15

$0 \notin \text{int } R_+^n$ ve $R_+^n \subset \text{cl}(\text{int } R_+^n)$ özelliğiyle birlikte R_+^n kümesini düşünelim. O zaman, her fonksiyon, sürekli ve $\text{Int } R_+^n$, kesinlikle monoton olduğundan R_+^n 'da monotondur.

4.1.2 İKİNCİ AYIRMA TEOREMİ

Teorem 4.16

C , konveks ve açık, E_n 'in tamamıyla alt kümesi ve k^0 , E_n 'in bir elemanı olsun. E_n 'de her $\alpha \in R_+$ için $clC - \alpha k^0 \subset \text{int } C$ bulunsun. $R^n = \cup \{clC + \alpha k^0 \mid \alpha \in R\}$ olarak ifade edilsin. A , E_n 'de boş kümeden farklı bir küme olsun.

O halde;

$A \cap C = \emptyset$ olmak üzere, yalnız ve yalnız $(-\infty, +\infty)$ aralığında $z: E_n \rightarrow E_1$ sürekli bir fonksiyon bulunur ve aşağıdaki ilişkiler geçerlidir:

$$z(A) \geq 0, \quad z(\text{int } A) > 0, \quad z(C) \leq 0, \quad z(\delta A) = 0$$

Ayrıca;

B , E_n 'de bir küme, z - fonksiyonu için

$\Rightarrow$ Eğer $B \subset E_n$ ve $\delta C - B \subset clC$ ise o zaman B 'de monotondur.

$\Rightarrow$ Eğer $B \subset E_n$ ve $\delta C - (B \setminus \{0\})$ ise o zaman B 'de kesinlikle monotondur.

$\Rightarrow$ Eğer $\partial C + \partial C \subset clC$ ise o zaman z fonksiyonu, alt kümelerini ihtiva eder.

İspat:

z -Fonksiyonun tanımı;

Her $\lambda \in R$ için $S_\lambda := clC + \lambda k^0$ tanımlayalım. Her $y \in E_n$ için λ reel değeri olmak üzere $y \in S_\mu$ bulunur. Çünkü $R^n = \cup \{clC + \alpha k^0 \mid \alpha \in R\}$ 'dır. Eğer $y \in S_\lambda$ olursa O zaman her bir $\mu > \lambda$ için $y \in C + \mu k^0$ geçerlidir. Bu, $y \in S_\mu$ olduğunu ima eder.

Her $\alpha \in R_+$ için $clC - \alpha k^0 \subset clC$ ve $R^n = \cup \{clC + \alpha k^0 \mid \alpha \in R\}$ yararlanarak $R^n = \cup \{clC + \alpha k^0 \mid \alpha \in R_+\}$ söyleyebiliriz. Şimdi, $\lambda \in R$ ile $y \in S_\lambda$ ve $t_1 := \mu - \lambda > 0$ için $c^1 := y - \lambda k^0 \in clC$ düşünelim. O zaman k^0 , E_n 'in bir elemanı ve E_n 'de her $\alpha \in R_+$ için $clC - \alpha k^0 \subset clC$ 'den dolayı $c^2 := y - \mu k^0 = c^1 - t_1 k^0 \in clC$ ' dir.

y^1, E_n 'de keyfi bir eleman için $y^2 := y^1 + c^2$ düşünelim. O zaman $r_1 \in R_+$ olmak üzere $y^2 = c^3 + r_1 k^0$ için $c^3 \in clC$ bulunur.

Eğer $r_1 = 0$ ise o zaman $y^2 = c^2 + y^1 \in clC$ 'dır.

Eğer $r_1 > 0$ ise tanımdan $t_2 := r_1 / (t_1 + r_1) \in (0,1)$ 'dır.

O zaman,

$$t_2 c^2 + (1-t_2)y^2 = t_2(c^1 - t_1 k^0) + (1-t_2)(c^3 + r_1 k^0) = t_2 c^1 + (1-t_2)c^3 \in clC$$

Ayrıca, $t_3 := 1-t_2 \in (0,1)$ için $c^2 + t_3 y^1 \in clC$ 'dır. Çünkü clC , konvektir. Her $y^1 \in E_n$ için $t_4 > 0$ bulunur öyle ki her $t_5 \in [0, t_4]$ için $c^2 + t_5 y^1 \in clC$ 'dır. Bu eşitlikten $c^2 \in cor(clC)$ söyleyebiliriz. Çünkü C , açık ve konvektir. Ayrıca, $\text{int}(clC) = \text{int} C = C \neq \emptyset$ olmak üzere $Cor(clC) = \text{int}(clC) = C$ olduğu söylenir. (Holmes, 1975)

$c^2 \in C$ olduğunu düşünelim. Bu nedenle $y \in C + \mu k^0$, dır. (4.1) ifade bize $R^n = \cup \{clC + \alpha k^0 \mid \alpha \in R_+\}$ olduğunu gösterir.

Her $\lambda \in R$ reel değer olmak üzere $y \in E_n$ için $y \notin S_\lambda$ olduğunu göstermeliyiz.

Varsayalım $\lambda \in R$ olmak üzere E_n 'in y^0 elemanı aynı zamanda S_λ ait olacak şekilde bulunsun. O zaman (4.1)' den yararlanarak her $\lambda \in R$ için $y^0 \in C + \lambda k^0$ olduğu gösterilebilir. $y \in E_n$ olacak şekilde keyfi bir eleman düşünelim ve $y^1 := 2y - y^0$ olsun. öyle ki $R^n = \cup \{C + \alpha k^0 \mid \alpha \in R\}$ olmak üzere $c \in C$ ve $r \in R$ için $y^1 = c + rk^0$ olduğu gösterilir.

Buradan gösterebiliriz ki,

$$\begin{aligned} y &= 1/2(2y - y^0 - rk^0) + 1/2(y^0 + rk^0) \\ &= 1/2(y^1 - rk^0) + 1/2(y^0 + rk^0) = 1/2 c + 1/2(y^0 + rk^0) \in C \end{aligned}$$

Çünkü $y^0 + rk^0 \in C$ ve C , konvektir.

Böylece $E_n \subset C$ olduğu söylenir. Aksine $C \neq E_n$ olmalıdır.

- **Fonksiyonun ayırma özelliği;**

$r = 0$ için söyleyebiliriz ki

(4.2)' den $z(C) < 0$ ve (4.4)' den dolayı $z(\mathcal{C}) = 0$ olduğunu gösterebiliriz. $A \cap C = \emptyset$ olduğundan $z(A) \geq 0$ söylenir. $\text{Int}A \cap C = \emptyset$ ise $\text{Int}A \cap \text{cl}C = \emptyset$ ' dir. Bu yüzden (4.6)' dan $z(\text{int} A) > 0$ olduğunu ima edilir.

Teorem 4.11 ' de ispatladığımız fonksiyonun monotonluğu, sürekliliği, konveksliği ve alt kümeleri ilave etmesi gibi sonuçlar benzer şekilde Teorem 4.16 ispatlarız.

5. KONVEKS OLMAYAN VEKTÖR OPTİMİZASYONDA SKALARAZYON

Ayırma teoremlerinin yapısı, 3. Bölümde konveks kümeler için ve 4. Bölümde ise konveks olmayan kümeler için oluşturuldu. Bu bölümde, özellikle 4. Bölümde oluşturulan teoremlerin, konveks olmayan vektör optimizasyon içindeki optimal noktalarda uygulanmasına çalışacağız. Öncelikle E_n 'de sıralama tanımını verelim.

Tanım 5.1

a ve b , E_n 'nin iki elemanı olmak üzere, aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- i) Eğer a 'nın her bir bileşeni, b 'den büyük ise a , b 'den *büyüktür* denir ya da başka ifadeyle

$$\exists a, b \in E_n \text{ ve } a_i > b_i \quad i=1,2,\dots,n \text{ ise } a > b \text{ 'dır.}$$

- ii) Eğer a , b 'den farklı, a 'nın bileşenleri, b 'den küçük değilse a , b 'den *yeterince büyük değildir* denir ya da başka ifadeyle

$$\exists a, b \in E_n, a_i \geq b_i \quad i=1,2,\dots,n \text{ ve } a \neq b \text{ ise } a \geq b \text{ 'dır.}$$

F , E_n 'de boş kümeden farklı ve mümkün noktaların kümesi ve R_+^n negatif olmayan koniyi düşünelim. Yalnız ve yalnız $y^2 \in y^1 - (R_+^n \setminus \{0\})$ olursa $y^2 \in F$ için $y^1 \in F$ tercih edilir. O zaman, F 'in en çok tercih edilen noktaları aşağıda tanımlanan efficient (efektif) nokta kümesine ait olmalıdır.

Tanım 5.2 Efficient (Efektif) Nokta

y^1 ve y^2 , E_n 'in elemanları olsun. y^1 , yalnız ve yalnız $y^2 \in F$ ile $y^2 \in y^1 - R_+^n$ olacak şekilde F 'in bir elemanı olmazsa y^1 , F 'in bir efficient (efektif) noktası olarak adlandırılır

Başka bir ifadeyle;

$\exists y^2 \in F$ ve $y^2 \neq y^1$ yoktur ki $y^2 \leq y^1$ olsun. Ayrıca, $(y^1 - R_+^n) \cap F = \{y^1\}$ olmak üzere $y^2 \in y^1 - R_+^n$ için $y^2 \neq y^1$ ve $y^2 \in F$ 'dir.'

F 'in efficient (efektif) noktalar kümesi R_+^n , negatif olmayan koni için $Eff(F, R_+^n)$ olarak tanımlanır.

Örnek 5.3

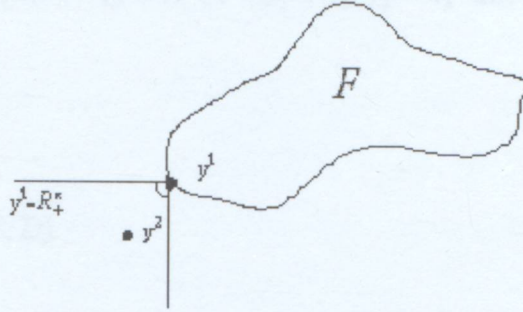
R_+^n , negatif olmayan koni olsun.

$y^1 \in y^2 + R_+^n$ ise

$$\Rightarrow y^1 = y^2 + d, d \in R_+^n$$

$$\Rightarrow y^2 = y^1 - d \in y^1 - R_+^n$$

$$\Rightarrow y^2 \in y^1 - R_+^n \text{ 'dır}$$



Şekil 5.1 $Eff(F, R_+^2)$ kümesinin gösterilmesi

Tanım 5.4 Weakly Efficient point (zayıf efektif nokta)

y^1 ve y^2 , E_n 'in elemanları olsun. y^1 , yalnız ve yalnız $y^2 \in F$ ile $y^2 \in y^1 - \text{int } R_+^n$ olacak şekilde F 'in bir elemanı bulunmazsa y^1 , F 'in bir weakly efficient (zayıf efektif) noktası olarak adlandırılır

Başka bir ifadeyle;

$\exists y^2 \in F$ ve $y^2 \neq y^1$ yoktur ki $y^2 < y^1$ olsun. Ayrıca, $(y^1 - \text{int } R_+^n) \cap F = \emptyset$ olmak üzere $y^2 \in y^1 - \text{int } R_+^n$ için $y^2 \neq y^1$ ve $y^2 \in F$ 'dir.

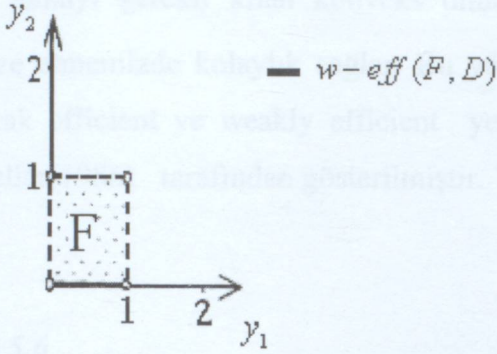
R_+^n , negatif olmayan koni, F 'in tüm weakly efficient (zayıf efektif) noktaları kümesi $weff(F, R_+^n)$ olarak gösterilmiştir.

Örnek 5.5

$F = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y_1 < 1, 0 \leq y_2 \leq 1\}$ ve $\mathbb{R}_+^2$ negatif olmayan koni olsun.

O zaman

$\text{Eff}(F, \mathbb{R}_+^2) = \emptyset$ ve $\text{weff}(F, \mathbb{R}_+^2) = (0,1) \times \{0\} = \{y \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 < y_1 < y_2, y_2 = 0\}$ 'dir.

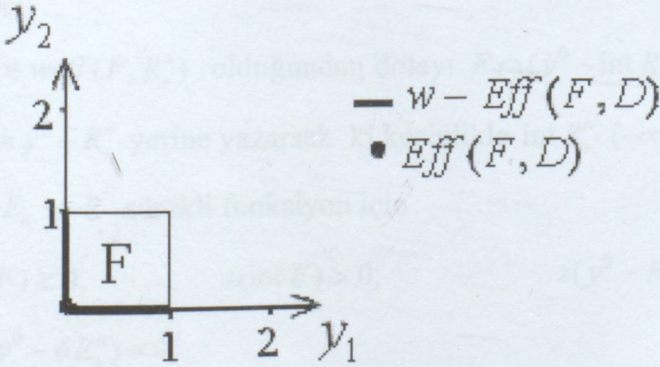


Şekil 5.2 $\text{Eff}(F, \mathbb{R}_+^2)$ boş küme olduğu halde $\text{weff}(F, \mathbb{R}_+^2)$ boş küme değildir.

Şimdi kapalı kareye bakalım

$F = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y_1 \leq 1\}$ ve $\mathbb{R}_+^2$ negatif koni olsun.

$\text{Eff}(F, \mathbb{R}_+^2) = \{0\}$ ve $\text{weff}(F, \mathbb{R}_+^2) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid y_1 = 0 \text{ veya } y_2 = 0\}$ 'dir.



Şekil 5.3 Efficient(efektif) ve weakly efficient (zayıf efektif) noktalar

Weidner, efficient ve weakly efficient arasındaki ilişkiyi açıklamıştır. Bu çalışmada Jahn (1984), Weidner(1985) ve Rockafellar (1986) 'ın referansların yanında efficient nokta ve weakly efficient nokta kümesi için F , R_+^n , $F + R_+^n$ veya F 'in kapanışı için konveks öngörülerini altında lineer fonksiyonların optiması olarak karakterize edilmiştir.

4. Bölümdeki ayırma teoremleri, sadece lineer fonksiyonların dışındaki kesin sınıfları dikkate almayı gerekli kılan konveks olmayan F , R_+^n kümeleri için bu tip durumları formülize etmemizde kolaylık sağlar. Bu yüzden Lineer olmayan fonksiyonların optimayı kullanarak efficient ve weakly efficient yeterli şartları Jahn (1984), Weidner(1985) ve Rockafellar(1986) tarafından gösterilmiştir.

Teorem 5.6

R_+^n , E_n ' de negatif olmayan koni ve $0 \in R_+^n - \text{int } R_+^n$ için $clR_+^n + \text{int } K \subset \text{int } R_+^n$ olacak şekilde içi boş olmayan bir K konisi bulunur.

O halde;

$y^0 \in \text{weff}(F, R_+^n)$, kesinlikle $\text{int } R_+^n$ $(-\infty, +\infty)$ aralığında monoton olduğundan yalnız ve yalnız $y^0 \in F$ olacak şekilde sürekli bir fonksiyon bulunur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\begin{aligned} zy^0 &= 0, & z(F) &\geq 0, & z(\text{int } F) &> 0, \\ z(y^0 - R_+^n) &\leq 0, & z(y^0 - \text{int } R_+^n) &< 0, & z(y^0 - \delta R_+^n) &= 0, \end{aligned}$$

İspat:

$y^0 \in \text{weff}(F, R_+^n)$ olduğundan dolayı $F \cap (y^0 - \text{int } R_+^n) = \emptyset$ 'dır. Teorem 4.11 ' da $A = F$ ve $C = y^0 - R_+^n$ yerine yazarsak ki kesinlikle $\text{int } R_+^n$ $(-\infty, +\infty)$ aralığında monoton olduğundan $z: E_n \rightarrow R$ sürekli fonksiyon için

$$\begin{aligned} z(F) &\geq 0, & z(\text{int } F) &> 0, & z(y^0 - R_+^n) &\leq 0, & z(y^0 - \text{int } R_+^n) &< 0, \\ z(y^0 - \delta R_+^n) &= 0, \end{aligned}$$

Çünkü $y^0 \in F$ ve $0 \in R_+^n$ için $zy^0 = 0$ olduğu söylenebilir. Bu eşitliğin etrafında diğer ispatlar sağlanır.

$z(y^0 - \text{int } R_+^n) < 0$ ve $z(F) \geq 0$ için $F \cap (y^0 - \text{int } R_+^n) = \emptyset$ olduğunu düşünelim.

O halde Teorem 4.11 'den diğer kısımlarda gösterilebilir. Bunun için Teorem 4.11 'da $B = \text{int } R_+^n$ ve $B = R_+^n$ seçilerek ispatlanır.

Örnek 5.7

E_n ' de R_+^p seçilmek üzere , fonksiyon ispatı $k^0 \in \text{int } R_+^p$ ile $zy = \inf\{t \in R \mid y \in y^0 - R_+^p + tk^0\}$ için verilir. Weakly efficient (zayıf efektif) noktalar için skalarizasyon sonuçları ve bu ifadenin anlamı Bernau (1987) ve $k^0 = (1, \dots, 1)^T$ için Brosowski (1987) tarafından ispatlanmıştır.

Önerme 5.8

R_+^n , negatif olmayan konveks koni olsun.

$y^0 \in \text{weff}(F, R_+^n)$, kesinlikle $\text{int } R_+^n$ $(-\infty, +\infty)$ aralığında monoton ise yalnız ve yalnız $y^0 \in F$ için $z: E_n \rightarrow E_1$ sürekli bir konveks fonksiyon bulunur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\begin{aligned} zy^0 &= 0, & z(F) &\geq 0, & z(\text{int } F) &> 0, \\ z(y^0 - R_+^n) &\leq 0, & z(y^0 - \text{int } R_+^n) &< 0, & z(y^0 - \delta R_+^n) &= 0, \end{aligned}$$

Eğer $y^0 = 0$ ise

Ayrıca,

$y^0 \in \text{weff}(F, R_+^n)$, $\text{int } R_+^n$ $(-\infty, +\infty)$ aralığında monoton, yalnız ve yalnız $y^0 \in F$ için $z: E_n \rightarrow E_1$ sürekli bir altlineer fonksiyon bulunur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\begin{aligned} z(F - y^0) &\geq z(y^0 - y^0) = 0 & z(\text{int } F - y^0) &> 0, & z(-R_+^n) &\leq 0, \\ z(-\delta R_+^n) &= 0, & z(-\text{int } R_+^n) &< 0, & z(R_+^n) &\geq 0, & z(\text{int } R_+^n) &> 0, \end{aligned}$$

İspat:

Teorem 5.6 ' de $K = R_+^n$ yerine konur.

Ayrıca, $A = F - y^0$ ve R_+^n negatif olmayan koni seçilerek önerme 4.14 ' de yerine konularak ispat tamamlanır.

Bölüm 4' de İkinci Ayırma Teoreminin (Teorem 4.16) sonuçlarını inceleyelim.

Teorem 5.9

R_+^n , E_n ' de negatif olmayan bir koni ve $0 \in cl(int R_+^n) - int R_+^n$ olmak üzere E_n ' de k^0 gibi bir elemanı vardır. Öyle ki $cl(int R_+^n) + \alpha k^0 \subset cl(int R_+^n)$ ve her bir $\alpha \in R_+$ için $R^n = \cup \{cl(int R_+^n) + \alpha k^0 \mid \alpha \in R\}$ olsun.

O halde,

$y^0 \in weff(F, R_+^n)$ ise $(-\infty, +\infty)$ aralığında, yalnız ve yalnız $y^0 \in F$ için $z : E_n \rightarrow E_1$ sürekli bir konveks fonksiyon bulunur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\begin{aligned} zy^0 &= 0, & z(F) &\geq 0, & z(int F) &> 0, \\ z(y^0 - int R_+^n) &< 0, & z(y^0 - \delta(int R_+^n)) &= 0, \end{aligned}$$

İspat:

$y^0 \in weff(F, R_+^n)$ olduğu için $F \cap (y^0 - int R_+^n) = \emptyset$ 'dır. $A = F$ ve $C = y^0 - int R_+^n$ koyarsak fonksiyonun Teorem 4.16 gibi sağlanması isteriz. $z(y^0 - \delta(int R_+^n)) = 0$ ve $0 \in \delta(int R_+^n)$ için $zy^0 = 0$ olduğunu ima eder. Diğer kısım Teorem 4.16 'den $B = int R_+^n$ ile izlenir ve yine Teorem 4.16 ' de $z(F) \geq 0$ yerine yazılarak sonuçlandırılır.

Önerme 5.10

Eğer R_+^n , negatif olmyan konveks koni ise clR_+^n ve δR_+^n için Teorem 5.9 yararlanarak , $cl(int R_+^n)$ ve $\delta(int R_+^n)$ 'in yerleri değiştirilebilir.

Şimdiye kadar weakly efficiently (zayıf efektif) üzerinde durduk.

Teorem 4.11 ve Teorem 4.16 'ta eğer $C = F$ ve $A = y^0 - (R_+^n \setminus \{0\})$ olacak şekilde yerine konursa açık küme F 'in efficient (efektif) elemanlarını karakterize etmek için -fakat daha önceki teoremlere karşılık- y^0 , z fonksiyonun optimumunu, F 'den aldığı noktada gerekli değildir. Eğer bu nokta, $R_+^n \setminus \{0\}$ 'in kapanışına ait değilse açık küme F 'in efficient (efektif) noktalarının R_+^n ile ilişkili olarak var olduğunu vurgulamak zorundayız. Bu Weidner tarafından gösterilmiştir.

Bu bölümün kalanında ise R_+^n monotonun fonksiyonelleri, F 'de optimumlarına ulaşırken, F 'in $H \supset R_+^n \setminus \{0\}$ kümelerindeki olduğu gibi F 'in elemanlarının R_+^n ile olan ilişkilerini tasvir edeceğiz. Bu araştırma Lampe (1981), Getr , Ivanov (1985) 'un proper efficient (tamamen efektif), kesin düşünceleriyle bağlantılıdır.

Genel olarak proper efficient (tamamen efektif) noktayı aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Tanım 5.11

F 'in E_n 'de boş kümeden farklı bir küme, y^1 bir elemanı , eğer $H \in Z$ olacak şekilde kümesi var ise Z 'in ailesi ile $H \supset R_+^n \setminus \{0\}$ kümesi ve R_+^n kümesi ilişkileri ile F 'in properly efficient (tamamen efektif) noktası olarak adlandırılır. F 'in R_+^n ile ilişkili her properly efficient (tamamen efektif) noktası ayrıca R_+^n ile ilişkili olarak $y^1 \in \text{Eff}(F, H)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 5.12

R_+^n , negatif olmayan konveks koni, monoton fonksiyon z olsun ve onun, F minimumda $y^0 \in F$ bir nokta ki z de hedefine ulaşır. O zaman şu sonuçlar elde edilir.

- y^0 , R_+^n ile alakalı, F 'in bir elemanıdır.
- Eğer z sürekli ise, bir açık küme $H \supset R_+^n \setminus \{0\}$ ile $cIH + (R_+^n \setminus \{0\}) \subset H$ ve $y^0 \in \text{Eff}(F, H)$ bulunur.

- Eğer z , konveks ise, bir konveks küme $H \supset R_+^n \setminus \{0\}$ öyle ki $y^0 \in \text{Eff}(F, H)$ bulunur.
- Eğer z , konveks ve süreklidir, bir açık konveks küme $H \supset R_+^n \setminus \{0\}$ ile $\text{cl}H + (R_+^n \setminus \{0\}) \subset H$ bulunur öyle ki $y^0 \in \text{Eff}(F, H)$ 'dir.
- Eğer $0 \in \text{cl}(R_+^n \setminus \{0\})$ varsa $0 \in \text{cl}H - H$ ' dir.
- Eğer z , lineer ise bir küme $H \supset R_+^n \setminus \{0\}$ bulunur öyle ki $H \cup \{0\}$ bir konveks koni ve $y^0 \in \text{Eff}(F, H)$ 'dir.
- z , lineer ve sürekli ise $H \cup \{0\}$ bir konveks konidir

İspat:

$\bar{z}y := z(y + y^0)$, her bir $y \in E_n$ için ve $H := \{y \in E_n \mid z(-y + y^0) < zy^0\}$.

Gösteririz ki $\bar{z}(F - y^0) = z(F) \geq zy^0 = \bar{z}(0)$ ve $\bar{z}(-H) < \bar{z}(0)$ buda ima eder ki $(F - y^0) \cap -H = \emptyset$ ' dir.

O zaman, $y^0 \in \text{Eff}(F, H)$ 'dır. $y^0 \in R_+^n \setminus \{0\}$ $\bar{z}$ 'in kesinlikle R_+^n - monoton olduğundan $0 \in -y + (R_+^n \setminus \{0\})$ ve $\bar{z}(-y) < \bar{z}(0)$ verir. Bu yüzden $R_+^n \setminus \{0\} \subset H$ olmalıdır. Eğer z konveks ise H ' da bu yüzden konvektir. Ayrıca $\bar{z}$ sürekli ise H , açıktır.

$y \in \text{cl}H$ ve $x \in -y + (R_+^n \setminus \{0\})$ düşünelim. $\bar{z}$ 'in R_+^n ' de monotonluğu ve $y \in \text{cl}H \subset \{y \mid \bar{z}(-y) \leq \bar{z}(0)\}$ 'den dolayı $-y \in x + (R_+^n \setminus \{0\})$ ve $\bar{z}(-x) < \bar{z}(-y) \leq \bar{z}(0)$ eşitsizliği sağlanır.

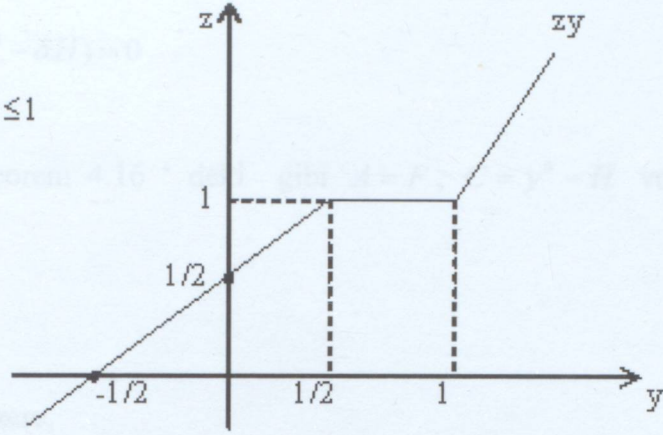
Örnek 5.13

$0 \in \text{cl}(R_+^n \setminus \{0\})$ olduğundan, O zaman Teorem 5.12 ' da oluşturulan H kümesi $0 \in \text{cl}H$ ' unu yerine getirmekte başarısız olabilir.

Örneğin;

$E_n = R$, $R_+ \setminus (0,1)$ için koni olmak üzere $F=[1,4]$ tanımlayalım:

$$zy = \begin{cases} y+1/2, & y < 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq y \leq 1 \\ y, & y > 1 \end{cases}$$



Şekil 5.4 zy fonksiyonun geometrik yorumu

z , sürekli ve $R_+ \setminus (0,1)$ de monotondur. F 'in minimum değeri için $y^0 := 1$ hedefine ulaşır.

Bu arada "0" kümenin bir grup noktası değildir.

$$H = \{y \in R_+^n \mid z(-y + y^0) < zy^0\} = (1/2, \infty)$$

Örnek 5.14

Teorem 5.12 oluştururken R_+^n 'nin yerine $\text{int } R_+^n \cup \{0\}$ kullanalım.

Sonuç olarak, Teorem 5.6 ve Önerme 5.8 öngörülleri altında bu noktaya ulaşırız veya

Teorem 5.10, bazı noktalar $\text{int } R_+^n$ de monoton fonksiyonelinin minimumunu F 'te hedefine

ulaşır. Ayrıca $\text{weff}(F, R_+^n)$, F 'deki bütün noktaların kümesidir.

Teorem 5.15

$y^0 \in \text{Eff}(F, H)$ her bir açık konveks küme $H \supset R_+^n \setminus \{0\}$ olsun öyle ki $0 \in \text{cl}H - H$ ve bir eleman $k^0 \in R_+^n$ ile $\text{cl}H + \alpha k^0 \subset \text{cl}H$ her $\alpha \in R_+$ için $R_+^n = \bigcup \{\text{cl}H + \alpha k^0 \mid \alpha \in R\}$ olsun.

O zaman sonuçları elde ederiz:

$z: E_n \rightarrow E_1$ sürekli bir konveks fonksiyon, $(-\infty, +\infty)$ aralığında bulunur ve

$$zy^0 = 0, \quad z(F) \geq 0, \quad z(\text{int } F) > 0,$$

$$z(y^0 - H) \leq 0, \quad z(y^0 - \delta H) = 0$$

İspat:

Teorem 5.9 'deki iddiamız Teorem 4.16 ' deki gibi $A = F$, $C = y^0 - H$ ve $B = R_+^n$ yazılarak sonuçlanır.

Teorem 5.16

R_+^n pozitif konveks koni olmak üzere,

$y^0 \in \text{Eff}(F, H)$ her bir açık konveks küme için $H \supset R_+^n \setminus \{0\}$ olsun. O halde, $0 \in \text{cl}H - H$ ve $\text{cl}H + \text{int } R_+^n \subset H$ bulunsun.

Sürekli bir z -fonksiyonu, $(-\infty, +\infty)$ aralığında kesinlikle $\text{int } R_+^n$ monoton için aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$zy^0 = 0, \quad z(F) \geq 0, \quad z(\text{int } F) > 0,$$

$$z(y^0 - H) \leq 0, \quad z(y^0 - \delta H) = 0.$$

İspat :

Teorem 4.11 'de $A = F$ ve $C = y^0 - H$, $B = K = R_+^n$ yerine yazılır. Ayrıca iddiamız Önerme 4. 10 'da yer verilir.

Önerme 5.17

Her $\alpha \in R_+$, $k^0 \in E_n$ ve $\alpha k^0 \in R_+^n$ için $R_+^n = \bigcup \{ \text{cl}R_+^n + \alpha k^0 \mid \alpha \in R \}$ olsun. O zaman $y^0 \in F$ öyle bir nokta ki bazı sürekli konveks z fonksiyonu için kesinlikle R_+^n -monoton ile onun F üzerinde minimumu yalnız ve yalnız $y^0 \in \text{Eff}(F, H)$ verir. Ayrıca bazı açık konveks kümeler için $H \supset R_+^n \setminus \{0\}$ ile $0 \in \text{cl}H - H$ ve $\text{cl}H + (R_+^n \setminus \{0\}) \subset H$ 'dır.

İspat :

Eşitliğin ilk yönü , Teorem 5.12 ' den yola çıkılarak elde edilir.

$R_+^n = U\{clH + \alpha k^0 \mid \alpha \in R\}$ olduğundan $H \supset R_+^n - \{0\}$ ve $R_+^n = U\{clR_+^n + \alpha k^0 \mid \alpha \in R\}$ için $\alpha k^0 \in R_+^n$ ve $clH + (R_+^n \setminus \{0\}) \subset H$ olacaktır.

Sonuç olarak Teorem 5.16' de eşitliklerden bir başka yönünü verir

Örnek 5.18

R_+^n , negatif olmayan konveks koni olmak üzere, Önerme 4.7 'den dolayı, Önerme 5.17 'in öngörülleri gerçekleşir .

Önerme 5.19

R_+^n , E_n ' de negatif olmayan konveks bir koni olsun. O zaman $y^0 \in F$ öyle bir nokta ki bazı sürekli konveks z fonksiyonu ile kesinlikle R_+^n -monoton için onun F üzerinde minimumu verir. Öyle ki $H \supset R_+^n - \{0\}$ ile $0 \in clH - H$, $clH + \text{int } R_+^n \subset H$ ve $\delta H + (R_+^n \setminus \{0\}) \subset H$ yalnız ve yalnız bazı açık kümeler için $y^0 \in \text{Eff}(F, H)$ elde ederiz.

İspat:

Teorem 5.12 ve Teorem 5.16 yararlanarak ispatlanır.

Bitran ve Manganti , R_+^n konveks koni için tanımlar vermiştir. F ' in R_+^n ile alakalı bir noktası y^1 , properly efficient (tamamıyla efektif) nokta olarak adlandırılır. Eğer $z : E_n \rightarrow E_1$ bir lineer sürekli fonksiyon ve E_n 'de kesinlikle R_+^n -monoton ise onun minimumu F üzerinde y^1 için hedefine ulaşır.

Ayrıca E_n , öklid uzayı ve bu uzay içinde R_+^n , negatif olmayan koni ise o zaman properly efficieny (tamamıyla efektif) tarafından Bitran ve Manganti , Önerme 5.17 ve Önerme 5.19 olduğu gibi properly efficient (tamamıyla efektif) noktalarının tanımı, konveks olmayan F ve R_+^n kümeleri için bile mümkün olan kesin R_+^n -monoton fonksiyonelleri vasıtasıyla olduğunu göstermiştir.

6. UYGULAMA

Örnek 6.1 (Konveks Küme)

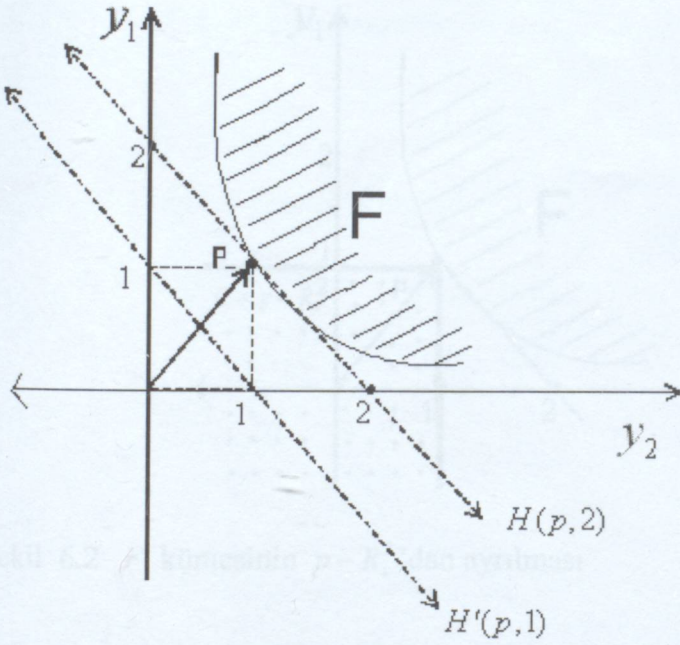
F, E_2 ' de konveks bir küme olsun.

$F = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid y_1 \cdot y_2 \geq 1\}$ kümesini tanımlayalım.

p vektörünü $(1,1)$ olacak şekilde seçelim. $\alpha = 2$ olsun.

O halde Hiperdüzlem,

$$H(p, 2) = \{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 + y_2 = 2\}$$



Şekil 6.1 İki farklı hiperdüzlemin F kümesi ile ilişkisinin gösterilmesi

F 'in sınırları için $y_1 \cdot y_2 \geq 1$ ve $y_1, y_2 \geq 0$ ise

O halde $y_1 + y_2 \geq y_1 + \frac{1}{y_1} \geq 2$ olduğunu gösterebiliriz

$H(p, 2)$ hiperdüzlemi $(1,1)$ noktasında F 'i destekler. Çünkü $F \cap H(p, 2)$ boş kümeden farklıdır.

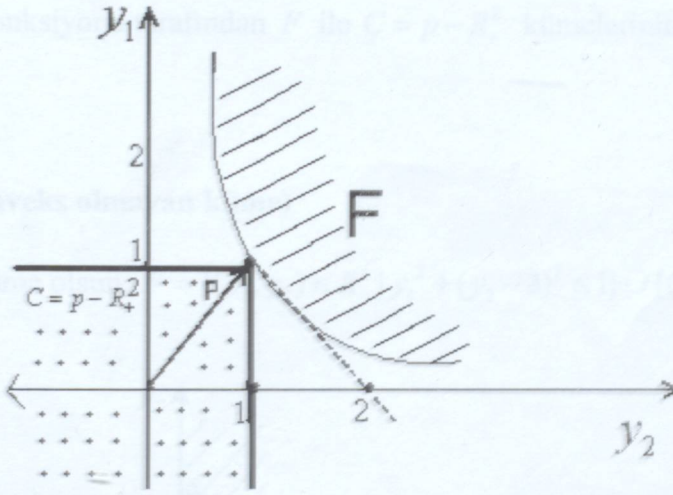
Ayrıca $\alpha = 1$ için $H'(p,1)$ hiperdüzlemi, F kümesi ile $C = -R_+^2$ kümesini birbirinden kesinlikle ayıran hiperdüzlemdir.

F kümesinin $p - R_+^2$ 'den ayırabiliriz.

Bunun için ayırma teoremlerini kullanabiliriz.

$$F = \{(y_1, y_2) \in R_+^2 \mid y_1 \cdot y_2 \geq 1\}$$

$C = p - R_+^2$ seçilerek birbirinden 4. ve 5. Bölümde oluşturulan yapıları kullanarak birbirinden ayırabiliriz



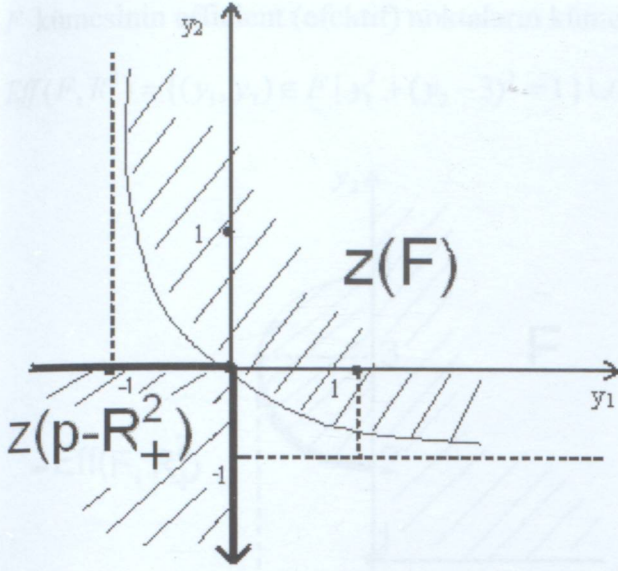
Şekil 6.2 F kümesinin $p - R_+^2$ 'den ayrılması

z , fonksiyonu oluşturalım.

$$z(F) \geq 0 \text{ ve } z(p - R_+^2) \leq 0 \text{ 'dır.}$$

$$z(F) = \{(y_1, y_2) \in F \mid y_1^* = y_1 + 1 \text{ ve } y_2^* = y_2 + 1, y_1^* \cdot y_2^* \geq 0\}$$

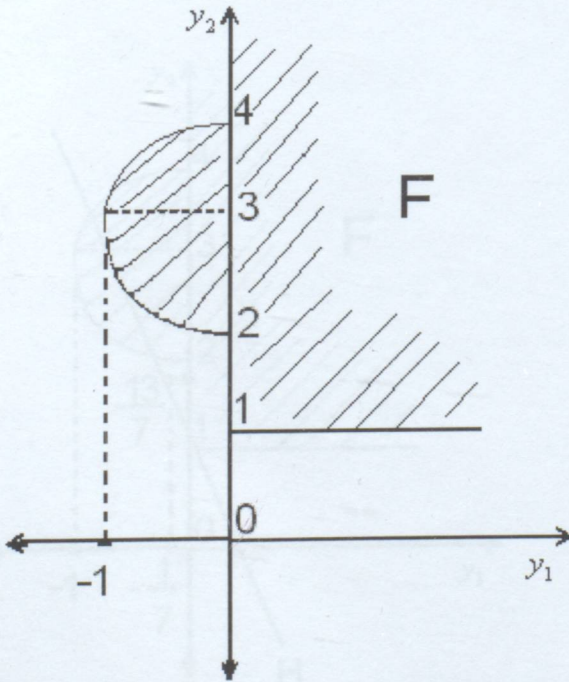
$$z(p - R_+^2) = -R_+^2 \leq 0 \text{ olacaktır.}$$



Şekil 6.3 z -fonksiyonu tarafından F ile $C = p - R_+^2$ kümelerinin ayırımı gösterilmesi

Örnek 6.2 (konveks olmayan küme)

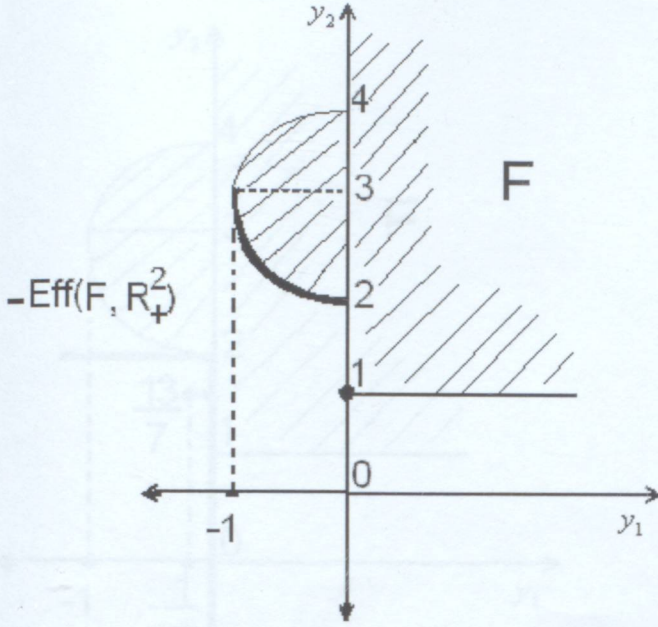
F, E_n 'de bir küme olsun. $F = \{(y_1, y_2) \in R^2 \mid y_1^2 + (y_2 - 3)^2 \leq 1\} \cup \{(y_1, y_2) \in R^2 \mid y_1 \geq 0, y_2 \geq 1\}$



Şekil 6.4 Konveks olmayan F kümesinin geometrik yorumu

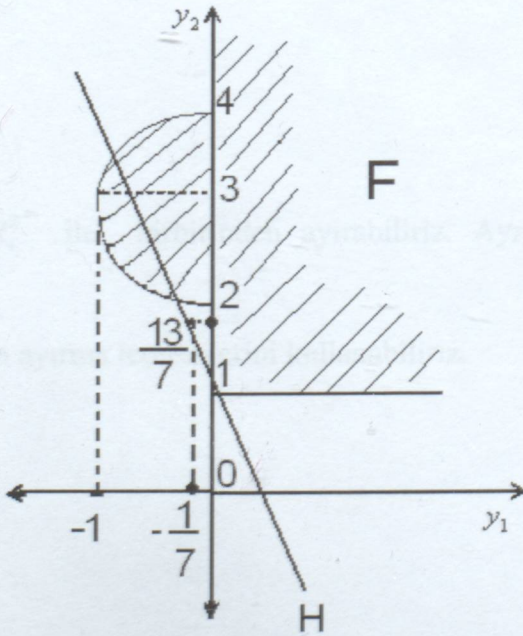
F kümesinin efficient (efektif) noktaların kümesi $Eff(F, R_+^2)$ ile gösterirsek

$$Eff(F, R_+^2) = \{(y_1, y_2) \in F \mid y_1^2 + (y_2 - 3)^2 = 1\} \cup \{(0, 1)\}$$



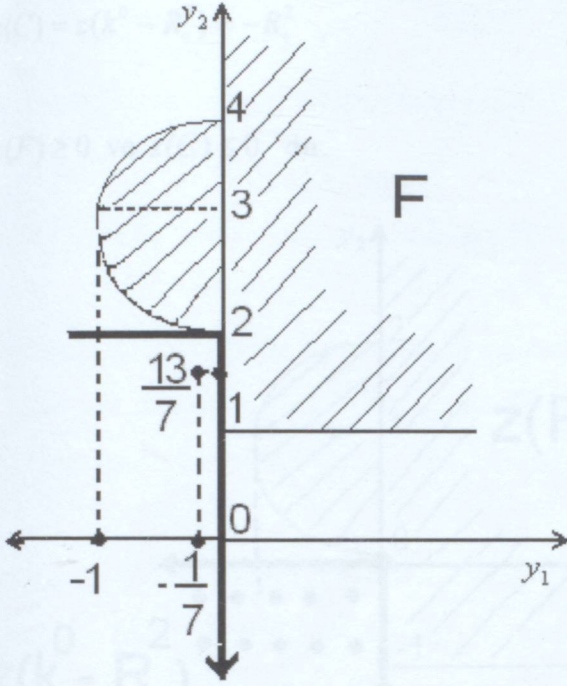
Şekil 6.5 $Eff(F, R_+^2)$ kümesinin geometrik olarak gösterilmesi

Örneğin F , konveks olmayan kümesini hiperdüzlemler yardımıyla $(-\frac{1}{7}, \frac{13}{7})$ noktasından ayırlamaz.



Şekil 6.6 Konveks olmayan F kümesi ile $(-\frac{1}{7}, \frac{13}{7})$ noktasının hiperdüzlemlerle ayırlanamamasının geometrik yorumu

Ama k^0 vektörünü $(0,2)$ olacak şekilde $C = k^0 - R_+^2$ kümesi seçilerek F kümesi ile $(-\frac{1}{7}, \frac{13}{7})$ noktasını birbirinden ayırılır.



Şekil 6.7 Konveks olmayan F kümesi ile $(-\frac{1}{7}, \frac{13}{7})$ noktasının ayrılması

Şekil 6.8 F ile $C = k^0 - R_+^2$ kümelerinin z fonksiyonu ile ayrılması

$C = k^0 - R_+^2$ ile birbirinden ayrabiliriz. Ayrıca burada $(0,2)$ noktası efficient(efektif) noktadır.

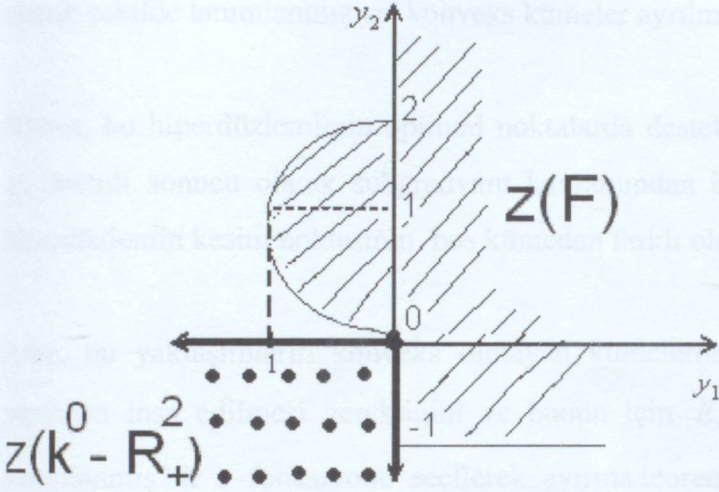
Bunun için ayırma teoremlerini kullanabiliriz.

Genel olarak $C = k^0 - R_+^2$ seçilerek birbirinden 4. ve 5. Bölümde oluşturulan yapıları kullanarak birbirinden ayırabiliriz

$$z(F) = \{(y_1, y_2) \in R^2 \mid y_1^2 + (y_2 - 2)^2 < 1\} \cup \{(y_1, y_2) \in R^2 \mid y_1 \geq 0, y_2 \leq 1\}$$

$$z(C) = z(k^0 - R_+^2) = -R_+^2$$

$z(F) \geq 0$ ve $z(C) \leq 0$ 'dır.



Şekil 6.8 F ile $C = k^0 - R_+^2$ kümelerinin z -fonksiyonu ile ayrılması

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ilk olarak n boyutlu E_n , öklid uzayı kullanılarak konveks kümelerin hiperdüzlemler ile ayırma teoremlerini ve sınır noktalarında desteklenmesini gösterdik.

Bu hiperdüzlem, E_n öklid uzayında, sıfırdan farklı bir p vektör ve α reel değeri için

$$H(p, \alpha) = \{x \in E_n \mid \langle p, x \rangle = \alpha\}$$

olacak şekilde tanımlanmış ve konveks kümeler ayrılmasında kullanılmıştır.

Ayrıca, bu hiperdüzlemlerin optimal noktalarda destek noktası olacağını vurguladık. Bunun en önemli sonucu olarak subgradyant kavramından bahsettik. Konveks kümenin sınırı ile hiperdüzlemin kesim noktasının boş kümeden farklı olduğu gösterdik.

Ama, bu yaklaşımların konveks olmayan kümelerde olmayacağını ve bu nedenle farklı yapıların inşa edilmesi gerektiğini ve bunun için E_n 'de negatif olmayan koni ile iyi tanımlanmış bir z -fonksiyonu seçilerek ayırma teoremleri oluşturduk.

$C = k^0 - R_+^n$ olmak üzere, E_n 'de sıfırdan farklı bir k^0 vektörü ve R_+^n , negatif olmayan koni için $clC - \text{Int}R_+^n \subset \text{int}C$ olacaktır.

$S_\lambda := clC + \lambda k^0$ ve $\lambda \in R$ olmak üzere $z: E_n \rightarrow E_1$ fonksiyonu için $zy := \inf\{\lambda \mid y \in S_\lambda\}$ iyi tanımlanmıştır. Çünkü sadece o sınırlı değerler hedefine ulaşılır.

Ayrıca, bu fonksiyonun aralığını $zy \leq r \Leftrightarrow y \in clC + rk^0$ olacak şekildeki oluşturulmuştur.

Oluşturulan bu form, konveks olmayan vektör optimizasyon teorisinde, ayırma teoremlerinin effecient point (efektif nokta) ve weakly efficient (zayıf efektif) noktalarda, S_λ ve z -fonksiyonu yardımıyla kullanılabileceğini gösterdik.

KAYNAKLAR

Antoni C., (1997), “ Dual Problems and Separation of Sets: Langrange and Fenchel Duality”, “Journal of optimization theory and applications: Vol.93, No.1” , April 1997, 227-231.

Bazaraa M. S., Sheralli H. D. , Shetty C. M. (1991), “ Nonlinear Programming Theory and algorithms”, New York.

Ehrgott M., (2000), “Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems ”, 491, Springer.

Ekeland I, Temam R, (1976), “Convex Analysis and Variational Problems”, 109:70-93.

Gerth C., Weidner P., (1990) “ Nonconvex Separation Theorems and Some Applications in Vector Optimization”, “Journal of optimization theory and applications: Vol.67, No.2”, November 1990, 297-319.

Jahn J, (2003) “ Vector optimization theory, applications, and extensions”, Springer.

Luc D.T, (1989), “Theory of vector optimization” , Spinger, Berlin.

Sundaram R. K. (1996), “A first course in optimization theory”, Cambridge University Pres.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	01.07.1979	
Doğum yeri	ELAZIĞ	
Lise	1993-1997	Balakgazi Yabancı Dil Ağırlıklı Lise
Lisans	1997-2001	Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2002-devam ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum

2001-devam ediyor MEB Ressam Şevket Dağ İlköğretim Okulu
Matematik öğretmeni

