

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HİYERARŞİK LİNEER MODELLER VE BİR UYGULAMA

İstatistikçi Serpil KILIÇ

**F.B.E. İstatistik Anabilim Dalı'nda
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İbrahim DEMİR

İSTANBUL, 2008

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	v
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	x
ÖNSÖZ	xi
ÖZET	xii
ABSTRACT	xii
GİRİŞ	1
1. HİYERARŞİK VERİ YAPISI.....	3
2. ÇOK AŞAMALI REGRESYON MODELLERİ	6
3. HİYERARŞİK LİNEER MODELLERİN SINIFLANDIRILMASI.....	10
3.1 Sabit Parametresi Tesadüfi Olarak Değişen Modeller	10
3.1.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli	10
3.1.2 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANCOVA Modeli	12
3.1.3 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli.....	13
3.1.4 Eğim Parametresi Tesadüfi Olarak Değişmeyen Modeller	13
3.2 Eğim ve Sabit Parametresi Tesadüfi Olarak Değişen Modeller	13
3.2.1 Tesadüfi Katsayılı Regresyon Modelleri	14
3.2.2 Sabit ve Eğim Katsayılarının Çıktı Olduğu Modeller	15
3.3 Birden Fazla 1. Aşama (X_s) ve 2. Aşama (W_s) Açıklayıcı Değişkeni İçin Basit Hiyerarşik Lineer Modeller	15
4. HİYERARŞİK LİNEER MODELLERDE TAHMİN PRENSİPLERİ.....	17
4.1 Sabit Etkilerin Tahmini	17
4.1.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modelinde Nokta ve Aralık Tahmini.....	17
4.1.2 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modelinde Nokta ve Aralık Tahmini	19
4.1.3 Genel Modellerde (Tam Hiyerarşik Modeller – Sabit ve Eğim Parametrelerinin Çıktı Olduğu Modeller) Nokta ve Aralık Tahmini.....	21
4.2 Birinci Aşama Tesadüfi Katsayılarının Tahmini.....	24
4.2.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli	24
4.2.2 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli.....	26
4.2.3 Genel Modeller (Tam Hiyerarşik Modeller – Sabit ve Eğim Parametrelerinin Çıktı Olduğu Modeller)	27
4.3 Varyans Kovaryans Bileşenlerinin Tahmini	29
4.3.1 Tam En Çok Olabilirlik (TEÇO) Yöntemi.....	29

4.3.2	Sınırlandırılmış En Çok Olabilirlik (SEÇO) Yöntemi	30
4.3.3	EM (Expectation-Maximization) Algoritması Kullanılarak Yapılan EÇO Tahminleri	31
4.3.4	En Çok Olabilirliğe Bağlı Olarak Varyans Bileşenleri İçin Güven Aralıkları.....	32
5.	HİYERARŞİK LİNEER MODELLER İÇİN HİPOTEZ TESTLERİ	34
5.1	Sabit Etkiler İçin Hipotez Testleri.....	35
5.2	Birinci Aşama Tesadüfi Katsayıları İçin Hipotez Testleri	38
5.3	Varyans Kovaryans Bileşenleri İçin Hipotez Testi	39
6.	HİYERARŞİK LİNEER MODELLERİN VARSAYIMLARININ İNCELENMESİ	41
6.1	Birinci Aşama Modelinin Yeterliliğinin Kontrol Edilmesi.....	42
6.1.1	Birinci Aşama Modelinin Belirlenmesi.....	42
6.1.1.1	İkinci Aşama Tahminleri İçin Birinci Aşamanın Yanlış Belirlenmesinin Sonuçları .	43
6.1.1.2	Birinci Aşama Tahminleri İçin İkinci Aşamanın Yanlış Belirlenmesinin Sonuçları .	44
6.1.2	Birinci Aşama Tesadüfi Etkiler Hakkında Varsayımların Araştırılması.....	45
6.2	İkinci Aşama Modelinin Yeterliliğinin Kontrol Edilmesi.....	47
6.2.1	İkinci Aşama Modelinin Belirlenmesi	47
6.2.2	İkinci Aşama Tesadüfi Etkileri Hakkındaki Varsayımların Araştırılması	47
6.2.3	Robust Standart Hataları	48
6.3	Örneklem Küçük Olduğunda Çıkarsamaların Geçerliliği	51
6.3.1	Sabit Etkiler Üzerindeki Çıkarsamalar.....	51
6.3.2	Varyans Bileşenleri Hakkındaki Çıkarsamalar	53
6.3.3	Birinci Aşama Tesadüfi Katsayıları Hakkında Çıkarsamalar	54
7.	ÜÇ AŞAMALI MODELLER	55
7.1	Tam Koşulsuz Model (A Fully Unconditional Model)	55
7.1.1	Varyans Ayırıştırması ve Güvenilirlikleri	56
7.2	Koşullu Modeller (Conditional Models)	57
7.3	Koşulsuz Modeller (Unconditional Models).....	59
7.4	Üç Aşamalı Modellerde Hipotez Testleri.....	59
7.5	Üç Aşamalı Modellerde Tesadüfi Katsayıların Tahmini	59
8.	GENELLEŞTİRİLMİŞ HİYERARŞİK LİNEER MODELLER	61
8.1	Genelleştirilmiş Hiyerarşik Lineer Modellerin (HGLM) Özel Durumu Olarak İki Aşamalı Hiyerarşik Lineer Modeller.....	62
8.2	İki Değerli Çıktılar İçin İki ve Üç Aşamalı Modeller	62
8.2.1	Birim Özellikli Modeller (Unit- Specific Models).....	63
8.2.2	Anakütle Ortalama Modelleri (Population- Average Models).....	64
8.3	Sayma (Count) Veriler İçin Hiyerarşik Modeller.....	65
8.4	Ordinal (Sıralı) Veriler İçin Hiyerarşik Modeller	66
8.4.1	Tek Aşamalı Veriler İçin Kümülatif Olasılık Modeli	67
8.4.2	İki Aşamalıya Karşı Genişletme (Extension to Two Levels).....	69
8.5	Çokterimli (Multinomial) Veriler İçin Hiyerarşik Modeller	70
9.	UYGULAMA.....	72

9.1	Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (Programme For International Student Assessment, PISA)	72
9.2	Tüm Modeller İçin Bağımlı ve Bağımsız Değişkenlerin Belirlenmesi	73
9.3	İki Aşamalı Modeller.....	78
9.3.1	Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli	78
9.3.2	Tesadüfi Katsayılı Regresyon Modeli	80
9.3.3	Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Model	81
9.4	Üç Aşamalı Model.....	83
9.5	İki Aşamalı Bernoulli Modeli.....	85
9.6	Üç Aşamalı Bernoulli Modeli	87
9.7	İki Aşamalı Ordinal Model.....	89
9.8	Üç Aşamalı Ordinal Model	91
10.	SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	94
KAYNAKLAR.....		98
ÖZGEÇMİŞ.....		101

SİMGE LİSTESİ

ρ	Gruplar içi korelasyon katsayısı
$\bar{n}_{grup}$	Gruplar için ortalama örnek büyüklüğü
τ_{00}	Gruplar arası varyans
σ^2	Gruplar içi varyans (1. aşama varyansı)
n_j	j . gruptaki birim sayısı
J	Grup sayısı
$\mathbf{Y}_{ij}$	j . gruptaki i . birime ait gözlenen çıktı (bağımlı değişken)
X_i	1. aşama açıklayıcı değişkeni
β_0	Sabit parametre ya da kesim noktası
β_1	Eğim parametresi
r_i	Hata terimi
r_{ij}	j . gruptaki i . birim için tesadüfi etki
β_{0j}	j . grup için regresyon sabiti
γ_{00}	Gerçek sabit parametre (β_0 'ın tahmincisi)
γ_{01}	2. aşama değişkeni w_j için eğim parametresi
u_{0j}	j . grubun w_j 'ye göre koşullandırılmış ortalama çıktı üzerindeki etkisi (2. aşama hata payı)
β_{1j}	j . grup için eğim parametresi
γ_{10}	Gerçek eğim parametresi (β_1 'in tahmincisi)
γ_{11}	2. aşama değişkeni w_j için eğim katsayısı
u_{1j}	j . grubun w_j 'ye göre koşullandırılmış eğim parametresi üzerindeki etkisi (2. aşama hata payı)
w_j	2. aşama açıklayıcı değişkeni
τ_{11}	Eğim parametreleri arasındaki ana kütle varyansı
τ_{01}	Eğim ve sabit terimler arasındaki ana kütle kovaryansı
μ_{Y_j}	j . grup için ortalama çıktı
$\bar{Y}_{.j}$	Örnek ortalaması
V_j	Hata varyansı (β_{0j} 'nin tahmini $\bar{Y}_{.j}$ 'nin varyansı)
Δ_j	$\bar{Y}_{.j}$ 'nin kalıntı varyansı, w_j verildiği durumda $\bar{Y}_{.j}$ 'nin koşullu varyansı
$\tilde{\gamma}_{00}$	γ_{00} 'ın tek, minimum varyanslı, yansız tahmin edicisi
Δ_j^{-1}	$\bar{Y}_{.j}$ 'nin kesinliği
$\hat{\gamma}_{00}$	γ_{00} 'ın ağırlıklı en küçük kareler tahmincisi
$\sum \Delta_j^{-1}$	$\hat{\gamma}_{00}$ 'ın kesinliği

$Var(\hat{\gamma}_{00})$	$\hat{\gamma}_{00}$ 'ın varyansı
$\tilde{\gamma}_{01}$	γ_{01} 'ın en küçük kareler tahmincisi
Y_j	$n_j \times 1$ boyutlu bağımlı değişken vektörü
β_j	$n_j \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametre vektörü
I	$n_j \times n_j$ boyutlu birim matris
r_j	$n_j \times 1$ boyutlu tesadüfi hatalara ait vektör
$\hat{\beta}_j$	Katsayılar vektörü β_j 'ye ait en küçük kareler tahmincisi
T	2. aşama tesadüfi etkilerine ait varyans-kovaryans matrisi
$V_{\tilde{\gamma}}$	γ 'nın dağılım matrisi
Z_j	1. aşama açıklayıcı değişkeni X_j 'nin alt kümesi
λ_j	β_{0j} için yapılan en küçük kareler tahmincisi $\bar{Y}_{.j}$ 'nin tahmincisi güvenilirliği
β_{0j}^*	Çekilmiş tahminci (Shrinkage estimator)
u_{0j}^*	β_{0j}^* 'ye karşılık gelen Ampirik Bayes kalıntısı
Λ_j	Çok değişkenli güvenilirlik matrisi
V_{qqj}^*	V_j^* 'ın q . köşegen elemanı
N	1. aşama birimlerinin toplam örnek büyüklüğü
I_{ML}	Tam en çok olabilirlik yöntemi ile en çok olabilirlik fonksiyonu
F	γ sabit etkiler vektöründeki toplam eleman sayısı
$C'\hat{\gamma}$	Contrast vektör
D_i	i . modele ait deviyans istatistiği
m	Modeldeki 1. aşama tesadüfi açıklayıcı değişken sayısı
s_j^2	j . grup için tahmin edilen kalıntı varyansları
d_j	Gruba bağlı kalıntı varyansı s_j^2 'nin standardize edilmiş kalıntı dağılımı ölçüsü
H	1. aşama kalıntıları için homojenlik testi
$\bar{r}_i$	Standardize E.K.K. kalıntıları
ϕ	Tesadüfi kısımdaki tüm parametrelerin vektörü
D_j	j . grup için çok değişkenli kalıntılar
$deff$	Tasarım etkisi
τ_{π}	2. aşama varyansı
τ_{β}	3. aşama varyansı
η_{ij}	Başarı odsunun (oransal olasılık) logaritması
m_{ij}	Denemedeki başarı sayısı
ϕ_{ij}	Her denemedeki başarının olasılığı
λ_{ij}	Olay oranı
Y_{ijk}	Üç aşamalı modele ait gözlenen çıktı (bağımlı değişken)
π_{pjk}	Üç aşamalı modele ait 1. aşama katsayıları
e_{ijk}	Üç aşamalı modelde 1. aşama tesadüfi etkisi

β_{pqk}	Üç aşamalı modele ait 2. aşama katsayıları
r_{pjk}	Üç aşamalı modelde 2. aşama tesadüfi etkisi
γ_{pqs}	Üç aşamalı modele ait 3. aşama katsayıları
u_{pqk}	Üç aşamalı modelde 3. aşama tesadüfi etkisi

KISALTMA LİSTESİ

AB	Ampirik Bayes
E.K.K.	En Küçük Kareler Yöntemi (OLS)
EÇO	En Çok Olabilirlik Yöntemi
EM	Expectation-Maximization Algoritması
G.E.K.K	Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi
HGLM	Genelleştirilmiş Hiyerarşik Lineer Modeller
HLM	Hiyerarşik Lineer Modeller (Hierarchical Linear Models)
MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
OECD	Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü
PISA	Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı
SEÇÖY	Sınırlandırılmış En Çok Olabilirlik Yöntemi
TEÇÖY	Tam En Çok Olabilirlik Yöntemi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1 Aşamalar ve değişkenler için kullanılan alternatif isimler	3
Şekil 1.2 Tek ve çok aşamalı veri setleri için kullanılacak analizler	4
Şekil 2.1 Başarı ve ses arasındaki regresyon doğrusu	6
Şekil 2.2 İki farklı okul için başarı ve ses arasındaki regresyon doğrusu.....	7
Şekil 3.1 Çok aşamalı modellerin (hiyerarşik lineer modellerin) sınıflandırılması.....	10
Şekil 5.1 Hipotez testleri.....	35
Şekil 8.1 Mesleğe bağlılık derecesi ve kümülatif olasılıklar	67

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 5.1 Tek ve çok parametre için hipotez testleri	34
Çizelge 9.1 PISA 2003 çalışmasına katılan ülkeler ve matematik ortalamaları	73
Çizelge 9.2 Matematik puan düzeyleri	74
Çizelge 9.3 Belirleyici istatistikler	77
Çizelge 9.4 Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli çıktısı	79
Çizelge 9.5 Tesadüfi katsayılı regresyon modeli çıktısı	80
Çizelge 9.6 Sabit parametrelerin çıktı olduğu model çıktısı	82
Çizelge 9.7 Üç aşamalı model çıktısı	84
Çizelge 9.8 İki aşamalı bernoulli modeli çıktısı	85
Çizelge 9.9 Üç aşamalı bernoulli modeli çıktısı	87
Çizelge 9.10 İki aşamalı ordinal model çıktısı	89
Çizelge 9.11 Üç aşamalı ordinal model çıktısı	92

ÖNSÖZ

“Hiyerarşik Lineer Modeller ve Bir Uygulama” konulu yüksek lisans tez çalışmam süresince beni maddi ve manevi destekleyen değerli aileme çok teşekkür ediyorum.

Bu çalışmamın hazırlanması aşamasında değerli bilgilerini aktarıp yardım ve desteğini esirgemeyen, çalışmalarımı titizlikle ele alıp inceleyen ve çalışmamın her aşamasında bana yol gösteren kıymetli hocam ve tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. İbrahim DEMİR’e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Her zaman fikir ve önerilerine değer verdiğim değerli YTÜ İstatistik Bölümü hocalarıma da teşekkürü bir borç biliyorum.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim süresince verdiği maddi destekten ötürü TÜBİTAK’a teşekkür ediyorum.

HİYERARŞİK LİNEER MODELLER VE BİR UYGULAMA

Serpil Kılıç
İstatistik, Yüksek Lisans Tezi

Hiyerarşik lineer modeller regresyon yöntemlerinin geliştirilmesidir. Bu modeller kümelenmiş ya da hiyerarşik yapıya sahip verilere uygulanabilmesi ve neden sonuç ilişkilerini daha iyi yansıtabilmesi sebebiyle oldukça önemlidir. Hiyerarşik yapıya sahip verilerde genellikle klasik doğrusal regresyon yönteminin varsayımlarından birisi olan gözlemlerin birbirinden bağımsız olması varsayımı bozulduğundan çok aşamalı regresyon modelleri tercih edilir.

Bir toplumun geleceğini oluşturan gençlerin bilgi düzeyleri o toplumun gelişmişlik düzeyini belirlerken aynı zamanda gelecek için gelişmiş ve kültürlü bir toplumun temellerini de oluşturmaktadır. Bu sebeple öğrencilerin bilgi düzeylerinin ölçülmesi ve başarılarına etki eden faktörlerin belirlenmesi oldukça önemli bir hal almaktadır. Öğrencilerin başarısında, öğrenim gördükleri okulların, bulundukları coğrafi bölgelerin ve öğrencilerin kişisel özelliklerinin etkisinin yüksek olduğu bilinmektedir. Bu amaçla Matematik başarısını ölçen PISA 2003 verisi kullanılarak coğrafi etkilerin, kişisel özelliklerin Matematik başarısı üzerinde etkisinin var olup olmadığı hiyerarşik lineer modeller ile incelenmiştir. İlk olarak iki aşamalı ve üç aşamalı modeller kurularak öğrenci, okul ve bölge gibi özelliklerin Matematik başarısı üzerindeki etkisi ölçülmeye çalışılmıştır. Daha sonra iki ve üç aşamalı modeller için nominal ve ordinal bağımlı değişkenler ele alınarak hangi spesifik özelliklere sahip öğrencilerin başarılı olup olmadığına ve başarı durumuna bakılmıştır. Bu çalışma sonucunda Matematik başarısına etki eden ve etmeyen faktörler ve Türkiye'deki ortaöğretimin kalitesinin yükseltilmesi için uygulanması gereken stratejiler belirlenmeye çalışılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Hiyerarşik Lineer Modeller, Hiyerarşik Lineer Modeller, Logit Modeller, Matematik Başarısı, PISA.

JÜRİ:

1. Yrd. Doç. Dr., İbrahim Demir
2. Prof. Dr., Şahamet Bülbül
3. Yrd. Doç. Dr., Doğan Yıldız

Kabul tarihi: 30.06.2008
Sayfa Sayısı: 114

HIERARCHICAL LINEAR MODELS AND AN APPLICATION

Serpil Kılıç
Statistics, M.S. Thesis

Hierarchical linear models are the generalization of the regression approaches. These types of models are important because they can measure causation and be applied to the data having a hierarchical or clustered structure. When working on a data having a hierarchical cluster, multilevel regression models are preferred because of multicollinearity, which is one of the assumptions of classical linear regression model.

While standards of attainments of young people which to constitute future of the community determine degree of development of community simultaneously, it also constitutes base of developed cultivated community for future. That's why, assessing the level of students' knowledge and determining the affects of students' achievement are very important. It is known that school types, region of the schools and student characteristics effect student achievement. Therefore parameters consisting of school types, region of the schools and student characteristics taken from Programme for International Student Assessment (PISA) 2003 data are used if they effect students' achievement in mathematics or not by using hierarchical linear models. Firstly, two and three level models were used for assessing the effects of student, school and region characteristics on mathematics achievement and secondly, two and three level models with ordinal and nominal dependent variables were used to determine success criteria and the level of success based on specific attributes for the students in the analysis. As a result of this study, factors effectings success in mathematics achievement and strategies to increase quality of education in secondary schools in Turkey will be determined.

Keywords: Generalized Hierarchical Linear Models, Hierarchical Linear Models, Logit Models, Mathematics Achievement, PISA.

JÜRİ:

1. Yrd. Doç. Dr., İbrahim Demir
2. Prof. Dr., Şahamet Bülbül
3. Yrd. Doç. Dr., Doğan Yıldız

Kabul tarihi: 30.06.2008
Sayfa Sayısı: 114

GİRİŞ

Hiyerarşik lineer modeller regresyon yöntemlerinin genelleştirilmesidir. Bu modeller kümelenmiş ya da hiyerarşik yapıya sahip verilere uygulanabilmesi ve neden sonuç ilişkilerini daha iyi yansıtabilmesi sebebiyle oldukça önemlidir. Kümelenmiş yapıya sahip verilerle çalışırken, klasik doğrusal regresyon yönteminin varsayımlarından biri olan gözlemlerin birbirinden bağımsız olması varsayımı bozulduğundan bu tip verilere çok aşamalı regresyon modelleri uygulanmaktadır.

Çok aşamalı modellerde ilk aşama birey ya da birimlerden, ikinci aşama birimlerin meydana getirdiği gruptan, üçüncü aşama ise grupların meydana getirdiği topluluklardan oluşur ve her aşama için ayrı regresyon modelleri kurulur. Modeller birleştirilerek birleştirilmiş model meydana gelir ve istatistiksel analizler yapılır. 2. ve 3. aşama katsayılarındaki değişimler, 1. aşama katsayılarını da etkilediğinden yorumlamaya dikkat edilmesi gerekir.

Gençlerin bilgi düzeyleri o toplumun gelişmişlik düzeyini belirlerken aynı zamanda gelecek için gelişmiş ve kültürlü bir toplumun temellerini de oluşturmaktadır. Bu sebeple öğrencilerin bilgi düzeylerinin ölçülmesi ve başarılarına etki eden faktörlerin belirlenmesi oldukça önemli bir hal almaktadır. Öğrencilerin başarısında, öğrenim gördükleri okulların, bulundukları coğrafi bölgelerin ve öğrencilerin kişisel özelliklerinin etkili olup olmadığı da önemlidir. Uygulamada matematik başarısına etki eden faktörler hiyerarşik bir yapı oluşturduğu için hiyerarşik lineer modeller kullanılarak matematik başarısı analiz edilmiştir.

Bu çalışmanın ilk bölümünde hiyerarşik veri yapısı, tek aşamalı ve çok aşamalı veri setlerinde kullanılacak analizler, çok aşamalı modellerin tanımı ve kullanılma sebepleri incelenmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde hiyerarşik lineer modeller, regresyon ve varyans analizinden faydalanılarak açıklanmaya çalışılmıştır.

Çok aşamalı modellerin özel hallerinden meydana gelen alt modeller ve bu modellerin nasıl kurulacağı üçüncü bölümde incelenmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde iki aşamalı hiyerarşik lineer modellerde, sabit etkiler, 1. aşama tesadüfi katsayılar ve varyans kovaryans bileşenleri için parametrelere bağlı tahminler yapılmıştır.

Sabit etkilerin, 1. aşama tesadüfi katsayılarının ve varyans kovaryans bileşenlerinin tek ya da birden fazla parametre tahminleri için hipotez testleri çalışmanın beşinci bölümünde incelenmiştir.

Hiyerarşik lineer modeller için gerekli varsayımların neler olduğu ve varsayımlar sağlanamadığında düzeltilebilmesi için neler yapılacağı altıncı bölümde açıklanmıştır.

Çalışmanın yedinci bölümünde üç aşamalı modeller, hipotez testleri ve tesadüfi katsayıların tahmini, sekizinci bölümünde ise iki ve üç aşamalı modeller için bağımlı değişkenin nominal (iki değerli), count (sayma), ordinal ve çok terimli veri olması durumunda genelleştirilmiş hiyerarşik lineer modellerin nasıl ve hangi durumlarda kullanılacağı ele alınmıştır.

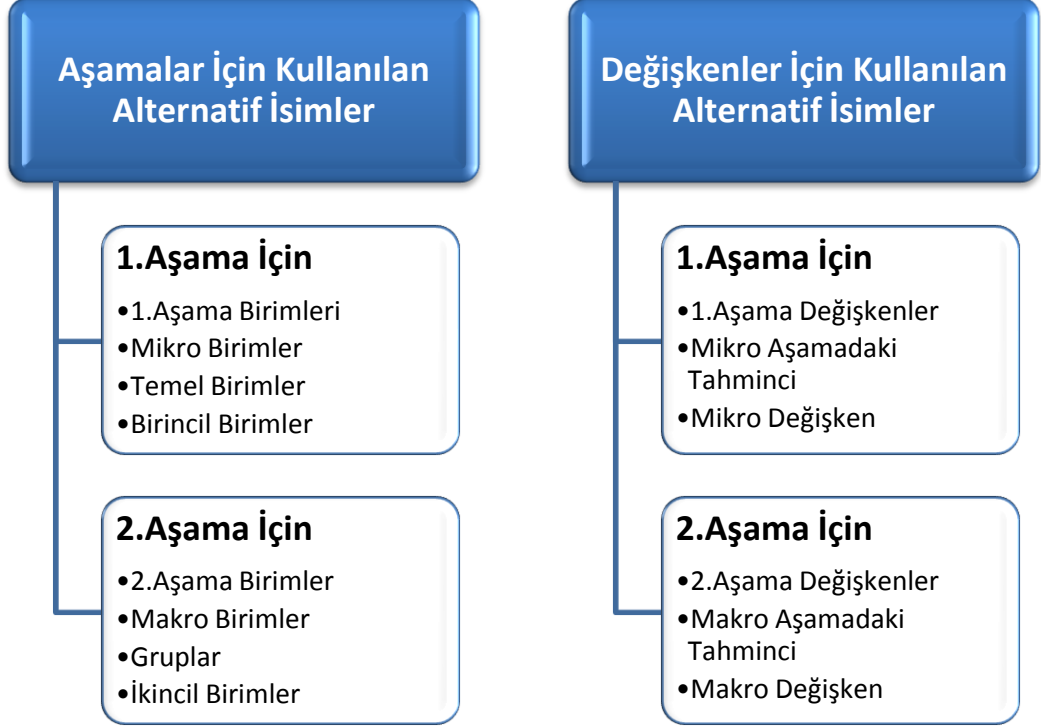
Çalışmanın dokuzuncu bölümünde PISA'nın derlemiş olduğu 2003 yılı Türkiye verileri kullanılarak Matematik başarısında ele aldığımız değişkenlerin ne derece etkili olduğu, okullar ve bölgeler arasında farklılık gösterip göstermediği ve bu değişkenlerin sonuçlarına göre neler yapılması gerektiği iki ve üç aşamalı hiyerarşik lineer modeller kullanılarak incelenmiştir. Ayrıca iki ve üç aşamalı modeller için nominal ve ordinal bağımlı değişkenler ele alınarak hangi spesifik özelliklere sahip öğrencilerin başarılı olup olmadığı ve başarı durumu belirlenmiştir. Bu çalışma sonucunda Matematik başarısına etki eden ve etmeyen

faktörler ve Türkiye’deki ortaöğretimin kalitesinin yükseltilmesi için uygulanması gereken stratejiler belirlenmeye çalışılmıştır.

Son bölümde ise uygulamada elde edilen sonuçların yorumları ve öneriler bulunmaktadır.

1. HİYERARŞİK VERİ YAPISI

Günümüzde hiyerarşik bir veri yapısına sahip birçok sosyal araştırma söz konusudur. Ana kütle etrafında oluşan hiyerarşik yapıdan çekilen örnekler “çok aşamalı örnekler” olarak tanımlanır. Bu çok aşamalı örneklerin ilk olarak yüksek seviyeli birimlerden daha sonra ise alt birimlerden çekildiği varsayılmaktadır. Aşamalar ve aşamalarda bulunan değişkenler için farklı isimler kullanılmaktadır. Bunlar Şekil 1.1 ‘de verilmiştir.



Şekil 1.1 Aşamalar ve değişkenler için kullanılan alternatif isimler (Snijders ve Bosker, 1999; Monette, 2001)

Şekil 1.1’deki yapı bir örnekle açıklanacak olursa; herhangi bir öğretim yılında bir sınıftaki öğrenciler ve öğretmen arasında yapılan çalışma öğrencilerin bireysel gelişimini, kişisel özelliklerini ve öğrenme stratejilerini içermektedir. Bu veri iki aşamalı hiyerarşik bir yapı oluşturur. 1. aşama öğrenciler, 2. aşama ise sınıflardır. Bu tip örneklerde grupların içindeki birimler, ana kütlelerin tamamından basit tesadüfî örnekleme yolu ile çekilmiş birimlere göre daha fazla benzer olma eğilimindedirler (Hox, 1998). Birçok analizde gözlemlerin birbirinden bağımsız olması varsayımı geçerlidir. Çok aşamalı modellerde ise gruplardaki birimler benzer özelliklere sahiptir, bu yüzden de gözlemlerin birbirine bağımlı olma olasılığı yüksektir.

Kümelenmiş veri seti üzerinde klasik doğrusal regresyon analizi uygulandığında aynı gruptan elde edilen hata terimleri arasında korelasyon ortaya çıkar ve bu durumda en küçük kareler

yönteminin temel varsayımlarından biri olan hata terimlerinin birbirinden bağımsız olması varsayımı çiğnenmiş olacaktır. Hiyerarşik verilerde bu varsayım çiğnendiğinden en küçük kareler regresyonu, standart hataları olduğundan daha küçük üretir ve uygun istatistiksel analizlerin kullanıldığı ve verilerin bağımsız gözlemleri içerdiği durumlara göre sıfır hipotezinin red edilme olasılığını artırır. Bu yüzden hiyerarşik ya da kümelenmiş yapıya sahip verilerin istatistiksel analizinde çok aşamalı modellerin kullanılması daha uygun olur (Moerbeek v.d., 2002).

Tek aşamalı ve çok aşamalı veri setlerinde kullanılacak analizler Şekil 1.2 'de gösterilmiştir.



Şekil 1.2 Tek ve çok aşamalı veri setleri için kullanılacak analizler (Heck ve Thomas, 2000)

Çok aşamalı modellerin kullanılma sebepleri başlıca şunlardır:

1. **Doğru sonuçlar:** Geleneksel çok aşamalı regresyon teknikleri, analiz birimlerini bağımsız gözlemler olarak tanımlar. Hiyerarşik yapıda karşılaşılan tek eksiklik; regresyon katsayılarının standart hatalarının küçük çıkmasıdır, bu da istatistiksel anlamlılıkta ve güven aralıklarında sorunlara sebep olur.

2. **Grup etkilerinde sabit etki:** Çok aşamalı modellerde 2. aşama kalıntıları 1. aşama kalıntılarını düzenleyerek bağımlı değişkendeki hatayı minimize eder.
3. **Grup aşamalı tahmincilerin etkileriyle aynı anda grup etkileri tahmini:** Grup etkilerini ayırmak için bir alternatif yol da en küçük karelerle elde edilen regresyon modelinde yer alan gruptaki gölge değişkenlerini kapsamaktır. Böyle bir modele varyans analizi veya sabit etkiler modeli denilir. Bir sabit etki modelinde, grup aşamalı tahmincilerin etkileri grup kuklalarıyla (dummy) karıştırılır.
4. **Grupların ana kütledeki anlamlılığı:** Çok aşamalı modellerde gruptaki örnekler, grupların ana kütlelerinden gelen rasgele örnekler gibi davranır. Çıkarımlar örnekte grupların ötesinde olamaz. (Rasbash, 2008)

Hiyerarşik lineer modeller; sosyolojik araştırmalarda “çok aşamalı lineer modeller”, biyoistatistikte “karma etkili modeller” ve “tesadüfi etkili modeller”, ekonometride “tesadüfi katsayılı regresyon modelleri”, istatistik literatüründe ise “kovaryans bileşenleri modelleri” gibi değişik isimlerle kullanılmaktadır.

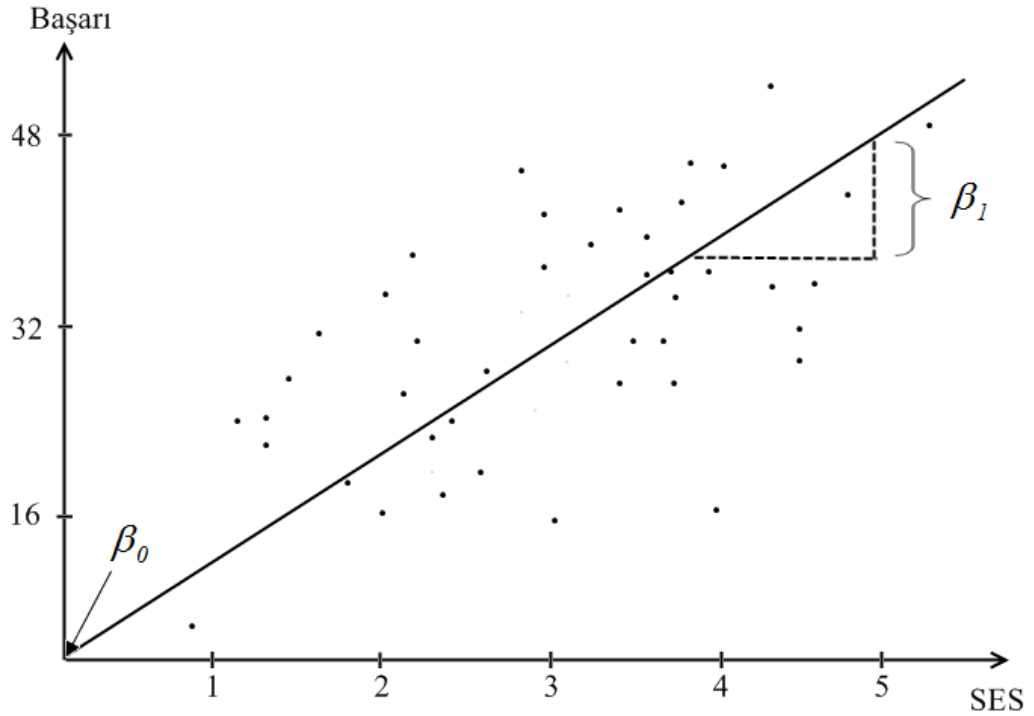
Çok aşamalı modellerin analizinde birçok bilgisayar paket programlarından faydalanılabilir. HLM, SPSS, SAS, M-plus, Lisrel, MLwiN bu programlardan bazılarıdır.

2. ÇOK AŞAMALI REGRESYON MODELLERİ

Çok aşamalı regresyon modellerinde ilk aşama birimlerden, diğer aşamalar ise gruplardan meydana gelir. Bu modellerde; bağımlı değişken birimler arasından seçilirken, açıklayıcı değişkenler tüm aşamalardan seçilebilir, yani herhangi bir kısıt yoktur. Model, regresyon ve varyans analizinden faydalanılarak açıklanmaya çalışılır. Anlatımı kolaylaştırmak amacıyla iki aşamalı regresyon modelleri bir örnek üzerinden incelenecektir.

Bir okuldaki açıklayıcı değişken olan sosyo ekonomik statü (SES) ile öğrenci seviyesindeki bağımlı değişken Matematik başarıları arasındaki ilişkinin regresyon denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + r_i \quad (2.1)$$

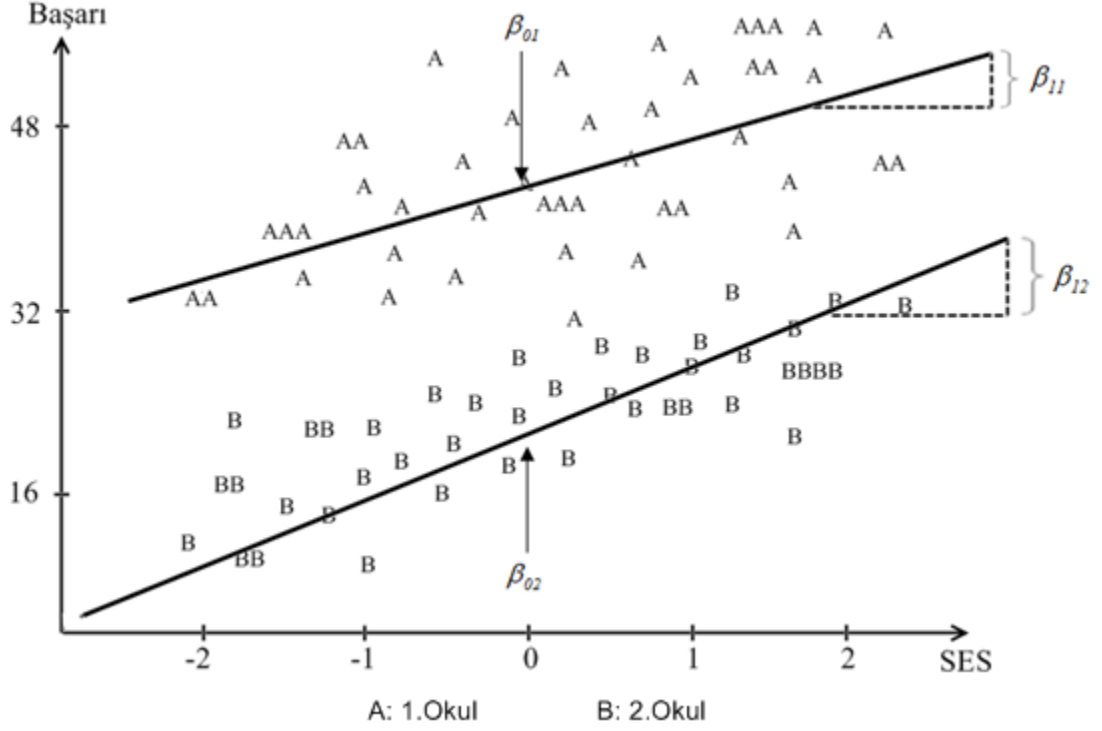


Şekil 2.1 Başarı ve SES arasındaki regresyon doğrusu (Raudenbush ve Bryk, 2002)

Burada serpilme diyagramında da görüleceği gibi β_0 ; SES'i 0 olan öğrencinin beklenen Matematik başarıları, β_1 ise SES'deki bir birimlik artışla Matematik başarılarında beklenen değişimi, eğimi gösterir. r_i ise hata terimidir ve r_i 0 ortalamalı, σ^2 varyanslı normal dağılıma sahiptir, $r_i \sim N(0, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir.

Bağımsız değişken X 'in ortalaması alınarak da regresyon kurulabilir. $\bar{X}$, varsayılan okuldaki SES'in ortalamasıdır. Y_i , $X_i - \bar{X}$ 'nin bir fonksiyonu olarak ele alınırsa eğim (β_1) değişmez, fakat sabit (ortalama Matematik başarısı, β_0) değişir.

Bağımlı değişkeni Matematik başarısı, açıklayıcı değişkeni SES olan modelin serpilme diyagramı iki okul için ayrı ayrı yapılırsa Şekil 2.2 elde edilir.



Şekil 2.2 İki farklı okul için başarı ve ses arasındaki regresyon doğrusu
(Raudenbush ve Bryk, 2002)

Şekil 2.2'ye göre 1. Okul, 2. Okuldan daha yüksek ortalamaya sahiptir, yani $\beta_{01} > \beta_{02}$ 'dir. Ayrıca 1. Okul, 2. Okuldan daha düşük Matematik başarısına sahiptir, $\beta_{11} < \beta_{12}$ 'dir.

J tane okul için 1. aşama denklemi şu şekilde yazılır:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + r_{ij} \quad (2.2)$$

Burada r_{ij} 'nin homojen varyansa sahip ve normal dağıldığı varsayılır. $r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir. Sabit ve eğim parametrelerinin beklenen değeri, varyans ve kovaryansı;

$$E(\beta_{0j}) = \gamma_0, \quad E(\beta_{1j}) = \gamma_1, \quad Var(\beta_{0j}) = \tau_{00}, \quad Var(\beta_{1j}) = \tau_{11}, \quad Cov(\beta_{0j}, \beta_{1j}) = \tau_{01} \quad (2.3)$$

şeklindedir.

γ_0 ; Gruplardan meydana gelen ana kütle için grup ortalamalarının ortalaması (okullardan oluşan ana kütle için ortalama okul ortalaması)

γ_1 ; Ana kütle için ortalama eğitim katsayısı (ana kütle için SES-Matematik Başarısı eğiminin ortalaması)

τ_{00} ; Okul ortalamaları arasındaki ana kütle varyansı, gruplar arası varyans

τ_{11} ; Eğitim parametreleri arasındaki ana kütle varyansı

τ_{01} ; Eğitim ve sabit terimler arasındaki ana kütle kovaryansı

Ortalama ve eğitim katsayıları arasındaki ana kütle korelasyonu şu şekilde hesaplanır:

$$\rho(\beta_{0j}, \beta_{1j}) = \frac{\tau_{01}}{(\tau_{00}\tau_{11})^{1/2}} \quad (2.4)$$

2. aşama denklemi aşağıdaki gibi kurulur.

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j + u_{1j} \quad (2.5)$$

γ_{00} ; 1. aşama çıktılarının ortalama değeri

γ_{01} ; 2. aşama değişkeni w_j için eğitim parametresi

γ_{10} ; 1. aşamadaki eğitim katsayılarının ortalama değeri

γ_{11} ; 2. aşama değişkeni w_j için eğitim katsayısı

u_{0j} ; j. grubun w_j 'ye göre koşullandırılmış ortalama çıktı üzerindeki etkisi

u_{1j} ; j. grubun w_j 'ye göre koşullandırılmış eğitim parametresi üzerindeki etkisi

u_{0j} ve u_{1j} 0 ortalamalı, sırasıyla τ_{00} ve τ_{11} varyanslarına sahip, kovaryansı da τ_{01} olan rastgele (tesadüfi) değişkenlerdir. Varyans kovaryans bileşenleri koşullu veya kalıntı varyans kovaryans bileşenleridir. W_j kontrol edildikten sonra β_{0j} ve β_{1j} 'de arta kalan değişkenliği gösterirler.

Birleştirilmiş model ise;

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + u_{0j} + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + r_{ij} \quad (2.6)$$

şeklinde gösterilir.

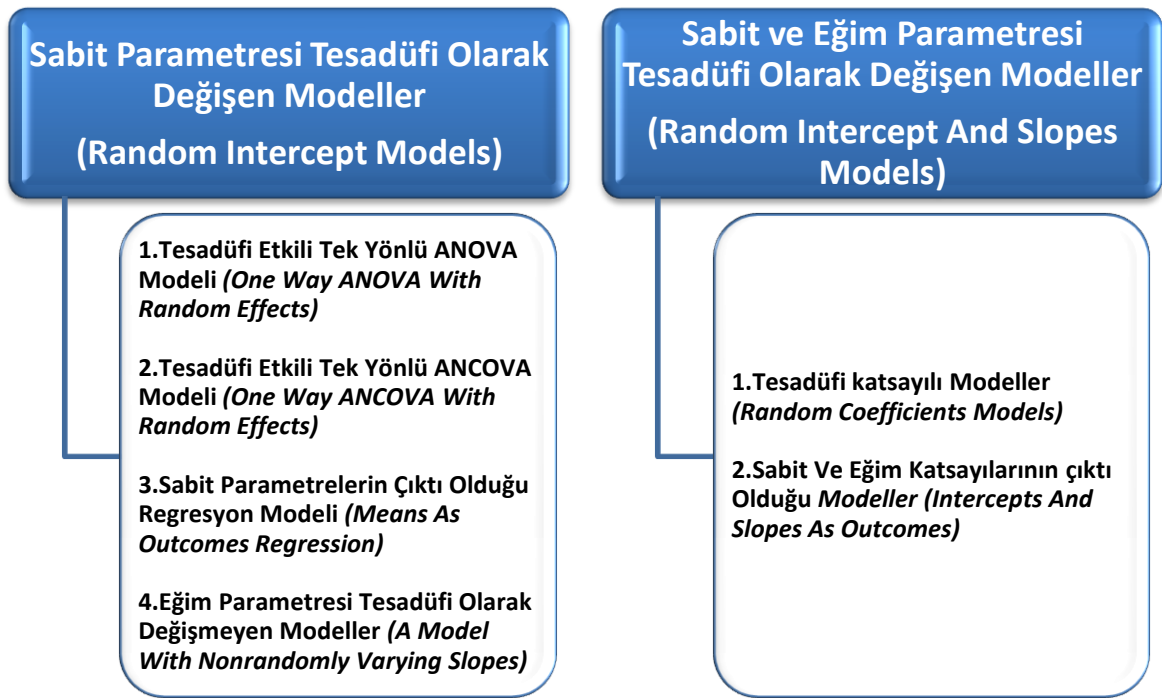
Birleştirilmiş modelin hata terimi (stokastik kısmı); $u_{0j} + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + r_{ij}$, sabit (deterministik) kısmı; $\gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j})$, etkileşim terimi ise $\gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j})$ 'dir.

Verimli tahmin ve doğru hipotez testi yapabilmek için En Küçük Kareler (EKK) yöntemi kullanılır. EKK yönteminde hata terimleri 0 ortalamalı, sabit varyanslı normal dağılıma sahiptir. Hiyerarşik lineer modellerde standart regresyon analizi uygun olmamasına rağmen, bazı modellerde iteratif Maksimum Likelihood süreçleri kullanılabilir.

Görüldüğü üzere çok aşamalı regresyon modellerinde (örneğin yukarıdaki iki aşamalı modelde) 2. aşamadaki katsayılardaki değişimler 1. aşamadaki katsayıları da etkilemektedir. Bu durum çok aşamalı modelleri klasik regresyon modelinden ayıran temel özelliktir. Çok aşamalı regresyon modellerinde, sabit ve eğim katsayılarının gruplara göre değiştiği varsayıldığından bunlar tesadüfi katsayılar olarak adlandırılır (Heck, 2000). Gruplara karşılık gelen eğim ve sabit parametrelerinin, iki değişkenli normal dağılıma sahip oldukları varsayılmaktadır (Raudenbesh ve Bryk, 2002).

3. HİYERARŞİK LİNEER MODELLERİN SINIFLANDIRILMASI

İki aşamalı hiyerarşik veri yapısına göre, birleştirilmiş modelde 1. aşama birimler, 2. aşama gruplardır. r_{ij} 1. aşama tesadüfi etkilerini, $Var(r_{ij})$ 1. aşama varyansını, β parametreleri de 1. aşama katsayılarını gösterir. u_{0j} ve u_{1j} 2. aşama tesadüfi etkileri, $Var(u_{0j})$, $Var(u_{1j})$ ve $Cov(u_{0j}, u_{1j})$ 2. aşama varyans kovaryans bileşenlerini, γ 'lar ise 2. aşamadaki katsayıları gösterir. Çok aşamalı modeller; sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modeller, sabit ve eğim parametresi tesadüfi olarak değişen modeller diye 2'ye ayrılır. Modelin alt modelleri Şekil 3.1'de gösterilmiştir. Bunlardan kısaca bahsedelim.



Şekil 3.1 Çok aşamalı modellerin (hiyerarşik lineer modellerin) sınıflandırılması

3.1 Sabit Parametresi Tesadüfi Olarak Değişen Modeller

Sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modeller; tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli, tesadüfi etkili tek yönlü ANCOVA modeli, sabit parametrelerin çıktı olduğu regresyon modeli ve eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen modellerden meydana gelir.

3.1.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli

Hiyerarşik lineer modellerden en basit olanı, tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modelidir. Bu durumda, tüm j tane grup için 1. aşamadaki β_{1j} 'ler 0'a eşittir. Burada 1. aşama modeli;

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij} \quad (3.1)$$

şeklindedir. 1. aşama hata terimi r_{ij} , 0 ortalamalı ve sabit σ^2 varyanslı normal dağılıma sahiptir. Bu model sayesinde, sadece bir tane 1. aşama parametresi β_{0j} ile 1. aşamadaki çıktılar tahmin edilir. β_{0j} , j. gruplar için ortalama çıktıdır, yani $\beta_{0j} = \mu_{Y_j}$ 'dir.

Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modelinde 2. aşama modeli aşağıdaki gibi yazılır:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \quad (3.2)$$

Bu denklemde γ_{00} ana kütledeki büyük ortalama (J tane grubun ortalamalarının ortalaması), u_{0j} ise j. gruba ait 0 ortalamalı, τ_{00} varyanslı tesadüfi etkiyi gösterir.

Birleştirilmiş model şu şekildedir:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + r_{ij} \quad (3.3)$$

γ_{00} büyük ortalamalı, u_{0j} 2. grup etkili ve r_{ij} birey etkili tek yönlü ANOVA modelini oluşturur. Tesadüfi etkili olmasının sebebi, grup etkilerinin rasgele olarak incelenmesidir.

Çıktıların varyansı:

$$Var(Y_{ij}) = Var(u_{0j} + r_{ij}) = \tau_{00} + \sigma^2 \quad (3.4)$$

şeklinde hesaplanır. Tek yönlü ANOVA modeliyle elde edilen tahmin, hiyerarşik veri analizinin ilk adımını oluşturduğundan önemlidir. Bu model büyük ortalama γ_{00} için, nokta tahmini ve güven aralığı oluşturmada kullanılır. Daha da önemlisi iki aşamalıların her birinde çıktı değişkenliği hakkında bilgi sağlar. σ^2 grup içi varyansı (değişkenliği), τ_{00} gruplar arası varyansı (değişkenliği) gösterir. Birleştirilmiş modelde, 1. aşamaya ya da 2. aşamaya ait hiçbir tahmincinin olmamasından dolayı bu modele “tam koşulsuz model (fully unconditional)” denir. Gruplar içi varyans, grupların kendi ortalamaları etrafındaki dağılım ölçüsü ve gruplar arası varyans ise grup ortalamaları arasındaki varyanstır (Snijders ve Bosker, 1999).

Tek yönlü ANOVA modelinden elde edilebilen yararlı bir parametre ise gruplar içi korelasyon katsayısıdır (intraclass correlation coefficient) ve aşağıdaki formülasyonla hesaplanır:

$$\rho = \frac{\tau_{00}}{(\tau_{00} + \sigma^2)} \quad (3.5)$$

Bu katsayı, 2. aşama grupları arasında çıktıda bulunan varyans oranını ölçer ve böylece grupların toplam değişkenlikteki yüzdesini (payını) gösterir.

3.1.2 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANCOVA Modeli

Tesadüfi etkili tek yönlü ANCOVA modeli, hiyerarşik lineer modelde bulunan 2. aşama katsayıları γ_{01} , γ_{11} ve u_{1j} tesadüfi etkileri tüm j. gruplar için 0'dır. Bu modelde, ortak değişken olarak tek bir 1. aşama tahmincisi bulunur. 1. aşama modeli:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + r_{ij} \quad (3.6)$$

2. aşama modeli ise şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \beta_{0j} &= \gamma_{00} + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} \end{aligned} \quad (3.7)$$

X_{ij} 'nin etkisi her bir 2. aşama birimleri için aynı sabit değere (γ_{10}) sahiptir. Birleştirilmiş model ise aşağıdaki gibidir:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + u_{0j} + r_{ij} \quad (3.8)$$

Yukarıdaki modelin Standart ANCOVA modelinden farkı; buradaki grup etkisi β_{0j} 'nin sabit değil tesadüfi düşünülmesidir.

γ_{00} ; ortalama gruplar içi sabit

γ_{10} ; Y_{ij} 'nin X_{ij} üzerindeki gruplar içi toplanmış regresyon katsayısı

β_{0j} ; X_{ij} 'deki birimler arası farklılığı düzenlenmiş her bir 2. aşama birimi için ortalama çıktıdır. μ_{Y_j} , j. gruptaki ortalama çıktı olup, $\beta_{0j} = \mu_{Y_j} - \gamma_{10}(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})$ 'dir. 1. aşama ortak değişkeni X_{ij} belirlendikten sonra, kalıntı varyansı $Var(r_{ij}) = \sigma^2$ olur. Tesadüfi etkili ANCOVA modeline 2. aşamada bulunan β_{0j} 'ye W_j gibi bir açıklayıcı değişken eklersek birleştirilmiş model aşağıdaki gibi olur:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + u_{0j} + r_{ij} \quad (3.9)$$

Yukarıdaki model Klasik ANCOVA modelinden farklıdır. Klasik ANCOVA modeli 2. aşama açıklayıcı değişkeni γ_{01} 'in her grup için aynı olduğunu varsaymaktadır.

3.1.3 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli

Sabit parametrelerin çıktı olduğu regresyon modelleri, grup özellikleri tarafından tahmin edilir. 1. aşama modeli Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA modelinin ilk aşaması gibidir. 2. aşama modeli ise;

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} \quad (3.10)$$

şeklindedir. Tek bir 2. aşama değişkeni w_j 'yi içermektedir. Birleştirilmiş model de aşağıdaki gibidir:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} + r_{ij} \quad (3.11)$$

Bu eşitlikte u_{0j} farklı bir anlam taşımaktadır. Tesadüfi değişkeni u_{0j} , büyük ortalamadan j. birimin ortalamasının sapmasını gösterir, yani $u_{0j} = \beta_{0j} - \gamma_{00} - \gamma_{01}W_j$ 'dir. u_{0j} 'nin varyansı τ_{00} , W_j 'nin varlığında β_{0j} 'nin koşullu veya kalıntı varyansıdır.

3.1.4 Eğim Parametresi Tesadüfi Olarak Değişmeyen Modeller

Eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen modellerde 1. aşama modeli Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA modelinin ilk aşaması gibidir. 2. aşama modeli şu şekilde gösterilir:

$$\begin{aligned} \beta_{0j} &= \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j \end{aligned} \quad (3.12)$$

Birleştirilmiş model:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + u_{0j} + r_{ij} \quad (3.13)$$

halini alır. Bu modelde eğimler gruptan gruba değişir, fakat bu değişim tesadüfi değildir. Model sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modellere benzemektedir, çünkü β_{0j} 2. aşama birimleri karşısında tesadüfi değişen tek bileşendir.

3.2 Eğim ve Sabit Parametresi Tesadüfi Olarak Değişen Modeller

Eğim ve sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modeller 2 gruptan oluşmaktadır. Bunlar; Tesadüfi katsayılı modeller ve sabit ve eğim parametresi çıktı olan modellerdir.

3.2.1 Tesadüfi Katsayılı Regresyon Modelleri

Tesadüfi katsayılı regresyon modellerinde alt modellerin hepsi sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modeller varsayımı ile ele alınır. Sadece 1. aşama sabit katsayısı β_{0j} tesadüfi olarak gözüktür. 1. aşamadaki eğim katsayısı, tek yönlü ANOVA modeli ve sabit parametresi çıktı olan modellerde yoktur. Tesadüfi etkili ANCOVA modeli β_{1j} 'yi içerir, fakat tüm gruplar için genel bir etkiye sahip olur. Bu modelde hem 1. aşama sabiti hem de bir veya daha fazla 1. aşama eğimleri tesadüfi olarak değişir, bu değişkenliği tahmin etmek pek mümkün değildir. 1. aşama modeli Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA modelinin ilk aşaması gibidir. 2. aşama modelinde γ_{01} ve γ_{11} katsayıları sıfırdır. Bunun sonucu olarak 2. aşama modeli aşağıdaki haliyle yazılır:

$$\begin{aligned}\beta_{0j} &= \gamma_{00} + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} + u_{1j}\end{aligned}\tag{3.14}$$

γ_{00} ; 2. aşama birimleri karşısında ortalama sabit,

γ_{10} ; 2. aşama birimleri karşısında ortalama regresyon eğimi,

u_{0j} ; 2. aşama j. birim ile ilişkili olan sabitte meydana gelen artış,

u_{1j} ; 2. aşama j. birim ile ilişkili olan eğimde meydana gelen artıştır.

2. aşama tesadüfi etkilerinin dağılımı hakkında bilgi edinmek için, varyans kovaryans matrisinden (T) yararlanılır.

$$\text{Var} \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} \\ \tau_{10} & \tau_{11} \end{bmatrix} = T\tag{3.15}$$

$\text{Var}(u_{0j}) = \tau_{00}$; 1. aşama sabitlerinde bulunan koşulsuz varyans

$\text{Var}(u_{1j}) = \tau_{11}$; 1. aşama eğimlerinde bulunan koşulsuz varyans

$\text{Cov}(u_{0j}, u_{1j}) = \tau_{01}$; 1. aşama sabitleri ve eğimleri arasındaki koşulsuz varyans

2. aşamada tahminçiler yoktur. Birleştirilmiş model şu şekildedir:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + u_{0j} + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + r_{ij}\tag{3.16}$$

Bu modelde çıktı Y_{ij} , ortalama regresyon denklemi $\gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j})$ ve tesadüfi hatanın 3 bileşeninin bir fonksiyonudur. Bu üç bileşen şunlardır: u_{0j} ortalamadaki j. birimin rasgele

etkisi, $u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j})$ 'de bulunan u_{1j} , β_{1j} eğimindeki j. birimin tesadüfi etkisi ve r_{ij} 1. aşama hatasıdır.

3.2.2 Sabit ve Eğim Katsayılarının Çıktı Olduğu Modeller

Tesadüfi katsayılı regresyon modelleri, 2. aşama birimleri karşısında hem sabitlerdeki hem de eğimlerdeki değişkenliği tahmin etmemizi sağlar. Daha sonraki adım, değişkenliğin modelinin oluşturulmasıdır. Bu modellerde 1. aşama tahmincisi X_{ij} ve 2. aşama açıklayıcı değişkeni w_j bulunduğundan bu modellere “tam hiyerarşik model (full model)” denilir.

Sonuç olarak bu altı model birkaç farklı yöntemle de sınıflandırılabilir. Sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modeller ve sabit ve eğim parametresi tesadüfi olarak değişen modeller birbirinden ayırt edilirler. Sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modeller; Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli, ortalamaların çıktı olduğu model, tek yönlü ANCOVA modeli ve eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen modellerdir. Bu modellerin varyans bileşenleri; 1. aşama varyansı σ^2 ve 2. aşama varyansı τ_{00} 'dır. ANOVA ve ortalamaların çıktı olduğu modellerde 1. aşama eğim parametresi bulunmazken, ANCOVA modelinde 1. aşama eğim parametresi vardır. Ayrıca ANCOVA modelinde 1. aşama eğimi; 2. aşama birimlerine karşı değişmez, sabittir. Eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen modelde, eğimler tesadüfi bileşenler olmadan w_j 'nin bir fonksiyonu olarak değiştirilebilir.

Çapraz aşamalı etkileşim terimi (cross-level interaction terms) $\gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j})$ 'dir. Genel olarak birleştirilmiş model, eğimdeki varyasyon tahmin edilmek istendiğinde çapraz aşamalı etkileşim terimlerini içerecektir. Bu tip terimler, eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen modeller ve sabit ve eğimlerin çıktı olduğu modellerde görülür.

3.3 Birden Fazla 1. Aşama (X_s) ve 2. Aşama (W_s) Açıklayıcı Değişkeni İçin Basit Hiyerarşik Lineer Modeller

1. aşama modelinde 2 tane açıklayıcı değişken (X_{1ij} ve X_{2ij}), 2. aşama modelinde ise tek açıklayıcı değişken (W_j) olsun. 1. aşama modelindeki X_{1ij} ve X_{2ij} 'nin grup ortalamaları etrafında dağıldığını varsayalım. O halde model aşağıdaki şekilde olur:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \beta_{2j}(X_{2ij} - \bar{X}_{2.j}) + r_{ij} \quad (3.17)$$

β_{2j} 'nin modellenmesinde 3 seçenek vardır. 1. seçenek; X_{2ij} 'nin etkisi 2. aşama birimleri karşısında değişmez ve $\beta_{2j} = \gamma_{20}$ şeklinde gösterilir. Burada γ_{20} tüm 2. aşama birimlerindeki X_{2ij} 'nin ortak etkisidir. 2. aşama birimlerine karşılık β_{2j} 'nin etkisi sabittir. 2. seçenek; eğim β_{2j} , ortalama değer γ_{20} ve her bir 2. aşama biriminin tesadüfi etkisi u_{2j} 'nin toplamıdır, $\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$ 'dir. β_{2j} tahminci içermez, gruplara karşı tesadüfi olarak değişir. 3. seçenek ise; eğim parametresinin çıktı olduğu modeldeki gibidir, $\beta_{2j} = \gamma_{20} + \gamma_{21}W_j + u_{2j}$ şeklinde yazılır. Eğer β_{2j} 'nin varyansı önemsiz ise eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen modeldir, yani $\beta_{2j} = \gamma_{20} + \gamma_{21}W_j$ olur.

2. aşama açıklayıcı değişkeni (W_j) bir tane olabildiği gibi birden fazla da olabilir. Genel olarak 1. aşama regresyon modeli aşağıdaki gibi gösterilir:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \sum_{q=1}^Q \beta_{qj} X_{qij} + r_{ij} \quad r_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.18)$$

Yukarıdaki eşitlikte bazıları sabit, bazıları tesadüfi bazıları ise tesadüfi olmayan $Q+1$ tane katsayı vardır. 2. aşama modelinde her bir β_{qj} şu şekilde modellenir: (2. aşama açıklayıcı değişken sayısı S_q olmak üzere)

$$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{qs} W_{sj} + u_{qj} \quad (3.19)$$

Birleştirilmiş model:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \sum_{q=1}^Q \gamma_{q0} X_{qij} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{0s} W_{sj} + \sum_{s=1}^{S_q} \sum_{q=1}^Q \gamma_{qs} W_{sj} X_{qij} + u_{0j} + \sum_{q=1}^Q u_{qj} X_{qij} + r_{ij} \quad (3.20)$$

şeklinde yazılır.

4. HİYERARŞİK LİNEER MODELLERDE TAHMİN PRENSİPLERİ

2 aşamalı hiyerarşik lineer modellerde, sabit etkiler, 1. aşama tesadüfi katsayılar ve varyans kovaryans bileşenleri için tahmin yapılır. Her birinin tahmini diğer parametrelere bağlıdır. Basit şekilde açıklayacak olursak; varyans kovaryans bileşenleri bilindiği takdirde ilk olarak sabit etkiler ve daha sonra tesadüfi katsayılar tahmin edilebilir. Ardından varyans kovaryans bileşenleri tahmin edilebilir.

4.1 Sabit Etkilerin Tahmini

Üç tane basit model için sabit etkilerin tahmini yapılabilir. Bunlardan ilki, Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modelidir. Bu 2. aşama birimleri j 'den gelen örnek ortalamalarının optimal ağırlıklı ortalaması olarak tahmin edilen tam ortalamadır. İkincisi, 2. aşama regresyon katsayısını bulunduran ortalamaların çıktığı olduğu modeldir. Optimal ağırlıklı prensibi bu modelde de geçerlidir. Üçüncüsü ise, tam hiyerarşik modeldir, burada da optimal ağırlıklı prensibi geçerlidir, fakat ağırlıklandırma çok değişkenlidir ve matris notasyonu gerekir.

4.1.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modelinde Nokta ve Aralık Tahmini

Nokta Tahmini

Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modelinde 1. aşama;

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij} \quad r_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (4.1)$$

şeklinde verilir. 1. aşama birimleri için $i=1,2,3,\dots,n_j$ ve 2. aşama için $j=1,2,3,\dots,J$ dir. J . gruptaki n_j gözleme karşılık örnek ortalamasını çıktığı olarak alan 1. aşama modeli aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{.j} &= \beta_{0j} + \bar{r}_{.j} \\ \bar{r}_{.j} &= \sum_{i=1}^{n_j} \frac{r_{ij}}{n_j} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Örnek ortalaması $\bar{Y}_{.j}$, gerçek grup ortalaması β_{0j} 'nin tahminidir. Tahmin hatası $\bar{r}_{.j}$ 'nin varyansı;

$$Var(\bar{r}_{.j}) = \frac{\sigma^2}{n_j} = V_j \quad (4.3)$$

şeklindedir. Hata varyansı V_j , β_{0j} 'nin tahmincisi olan $\bar{Y}_{.j}$ 'nin varyansıdır.

2. aşama modeli ise;

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \quad (4.4)$$

yazılır. $u_{0j} \sim N(0, \tau_{00})$ varsayılır. Gerçek ortalama β_{0j} 'nin varyansı τ_{00} 'dır. $\bar{Y}_{.j}$ için birleştirilmiş model;

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + u_{0j} + \bar{r}_{.j} \quad (4.5)$$

'dir.

$\bar{Y}_{.j}$ 'nin varyansı 2 bileşenden oluşur:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{Y}_{.j}) &= \text{Var}(u_{0j}) + \text{Var}(\bar{r}_{.j}) \\ &= \tau_{00} + V_j \\ &= \text{parametre varyansı} + \text{hata varyansı} \\ &= \Delta_j \end{aligned} \quad (4.6)$$

u_{0j} 'nin varyansı τ_{00} , 2. aşama birimleri karşısında sabittir. Hata varyansı V_j , her bir 2. aşama birimi için örnek büyüklüğü n_j 'ye bağlı olarak değişir. Eğer 2. aşama birimi aynı örnek büyüklüğüne sahipse, her V_j genel V 'ye eşit ve her Δ_j 'de genel Δ 'ya eşit olur, yani $\Delta = \tau_{00} + V$ 'dir. γ_{00} 'ın tek, minimum varyanslı, yansız tahmin edicisi, $\bar{Y}_{.j}$ 'lerin ortalaması olur ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\tilde{\gamma}_{00} = \sum \frac{\bar{Y}_{.j}}{J} \quad (4.7)$$

Eğer örnek büyüklükleri eşit değilse, $\bar{Y}_{.j}$, $\Delta_j = \tau_{00} + V_j$ şeklinde eşit olmayan varyansa sahiptir. Her $\bar{Y}_{.j}$, γ_{00} 'ın bağımsız, yansız, Δ_j varyanslı tahmin edicisidir. $\bar{Y}_{.j}$ 'nin kesinliği (presicion):

$$\text{Kesinlik}(\bar{Y}_{.j}) = \Delta_j^{-1} = 1/\text{Var}(\bar{Y}_{.j}) \quad (4.8)$$

şeklindedir.

Δ_j 'nin bilindiğini varsayarsak, γ_{00} 'ın tek, minimum varyanslı, yansız tahmin edicisi; kesinliğin ağırlıklı ortalamasıdır.

$$\hat{\gamma}_{00} = \sum \Delta_j^{-1} \bar{Y}_{.j} / \sum \Delta_j^{-1} \quad (4.9)$$

Bu eşitlik γ_{00} 'ın ağırlıklı en küçük kareler tahmincisidir, bu aynı zamanda Maximum Likelihood tahmincisine benzer. Tüm kesinlikler eşit olduğunda, kesinliğin ağırlıklı ortalaması basit ortalamaya yaklaşır.

Aralık Tahmini

$\hat{\gamma}_{00}$ 'ın kesinliği, kesinlikler toplamına eşittir.

$$\text{Kesinlik } (\hat{\gamma}_{00}) = \sum \Delta_j^{-1} \quad (4.10)$$

$\hat{\gamma}_{00}$ 'ın varyansı ise, toplam kesinliğin tersidir.

$$\text{Var}(\hat{\gamma}_{00}) = (\sum \Delta_j^{-1})^{-1} \quad (4.11)$$

$\hat{\gamma}_{00}$ için %95 güven aralığı;

$$\hat{\gamma}_{00} \pm 1,96(\sum \Delta_j^{-1})^{-1/2} \quad (4.12)$$

ile bulunur.

4.1.2 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modelinde Nokta ve Aralık Tahmini

Nokta Tahmini

Sabit parametrelerin çıktı olduğu regresyon modelinde 1. aşama ortalaması, 2. aşama değişkeni tarafından tahmin edilir. 2. aşama modeli, 2. aşama açıklayıcı değişkenleri w_j 'yi alacak şekilde genişletilmiştir. Birleştirilmiş model:

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} W_j + u_{0j} + \bar{r}_{.j} \quad (4.13)$$

şeklinde. W_j verildiğinde, $\bar{Y}_{.j}$ 'nin varyansı aşağıdaki gibidir:

$$\text{Var}(\bar{Y}_{.j}) = \tau_{00} + V_j = \Delta_j \quad (4.14)$$

Bu eşitlikte, $V_j = \sigma^2/n_j$ 'dir.

Δ_j , $\bar{Y}_{.j}$ 'nin kalıntı varyansı yani W_j verildiğinde, $\bar{Y}_{.j}$ 'nin koşullu varyansıdır. u_{0j} ve r_{ij} 'nin bağımsız ve normal dağıldıkları varsayılır.

Eğer her grup aynı örneklem büyüklüğüne sahipse, Δ_j her grupta aynı olur ve γ_{01} 'in tek, minimum varyanslı ve yansız tahmincisi, en küçük kareler tahmincisi olur.

$$\gamma_{01} = \frac{\sum (W_j - \bar{W}.) (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})}{\sum (W_j - \bar{W}.)^2} \quad (4.15)$$

Burada $\bar{W} = \sum W_j / J$ ve $\bar{Y}_{..} = \sum \bar{Y}_{.j} / J$ şekilde hesaplanır. γ_{00} 'in en küçük kareler tahmincisi $\tilde{\gamma}_{00} = \bar{Y}_{..} - \tilde{\gamma}_{01} \bar{W}.$ 'dir.

Eğer örnek büyüklükleri eşit değilse, $\bar{Y}_{.j}$ eşit olmayan varyansa sahip olur ve $\Delta_j = \tau_{00} + V_j$ şeklinde hesaplanır. Her Δ_j 'nin bilindiği varsayılırsa, γ_{01} 'in tek, minimum varyanslı, yansız tahmincisi kendi kesinliği (Δ_j^{-1}) ile orantılı olan ağırlıklı en küçük kareler tahmincisidir.

$$\hat{\gamma}_{01} = \frac{\sum \Delta_j^{-1} (W_j - \bar{W}^*) (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}^*)}{\sum \Delta_j^{-1} (W_j - \bar{W}^*)^2} \quad (4.16)$$

Eşitlikte verilen $\bar{W}^*$ ve $\bar{Y}_{..}^*$ kesinliği ağırlıklandırılmış ortalamadır.

$$\bar{W}^* = \frac{\sum \Delta_j^{-1} W_j}{\sum \Delta_j^{-1}} \quad \bar{Y}_{..}^* = \frac{\sum \Delta_j^{-1} \bar{Y}_{.j}}{\sum \Delta_j^{-1}} \quad (4.17)$$

şeklinde hesaplanır. γ_{00} 'in ağırlıklı en küçük kareler tahmincisi aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\gamma}_{00} = \bar{Y}_{..}^* - \hat{\gamma}_{01} \bar{W}^* \quad (4.18)$$

Aralık Tahmini

Δ_j verildiğinde $\hat{\gamma}_{01}$ 'in örnek varyansı;

$$\text{Var}(\hat{\gamma}_{01}) = \left[\sum \Delta_j^{-1} (W_j - \bar{W}^*)^2 \right]^{-1} \quad (4.19)$$

şeklinde hesaplanabilir. $\hat{\gamma}_{01}$ 'in %95 güven aralığı ise aşağıdaki eşitlikte verilmiştir.

$$\hat{\gamma}_{01} \pm 1.96 \left[\text{Var}(\hat{\gamma}_{01}) \right]^{1/2} \quad (4.20)$$

4.1.3 Genel Modellerde (Tam Hiyerarşik Modeller – Sabit ve Eğim Parametrelerinin Çıktı Olduğu Modeller) Nokta ve Aralık Tahmini

Nokta Tahmini:

1. aşama modelinde Q tane açıklayıcı değişken matris notasyonu ile açıklanabilir.

$$Y_j = X_j \beta_j + r_j \quad r_j \sim N(0, \sigma^2 I) \quad (4.21)$$

Bu eşitlikte;

Y_j ; $n_j \times 1$ boyutlu çıktı (bağımlı değişken) vektörü

X_j ; $n_j \times (Q+1)$ boyutlu açıklayıcı değişken matrisi

β_j ; $(Q+1) \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametre vektörü

I ; $n_j \times n_j$ boyutlu birim matris

r_j ; $n_j \times 1$ boyutlu 0 ortalamalı, köşegen elemanları σ^2 , köşegen dışındaki elemanları ise 0 olan varyans kovaryans matrisine sahiptir ve tesadüfi hataların normal dağıldığı varsayılır.

β_j 'nin en küçük kareler tahmincisi;

$$\hat{\beta}_j = (X_j^T X_j)^{-1} X_j^T Y_j \quad (4.22)$$

şeklindedir.

β_j 'ye ait dağılım matrisi, yani varyans kovaryans matrisi $Var(\hat{\beta}_j)$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$Var(\hat{\beta}_j) = V_j = \sigma^2 (X_j^T X_j)^{-1} \quad (4.23)$$

$\hat{\beta}_j$ 'yi Y_j 'de yerine koyduğumuzda $\hat{\beta}_j$ için model şu hali alır:

$$\hat{\beta}_j = \beta_j + e_j \quad e_j \sim N(0, V_j) \quad (4.24)$$

V_j hata varyans matrisi, β_j 'nin tahmini olan $\hat{\beta}_j$ 'nin hata dağılımını gösterir. 2. aşama modelinde β_j için genel model;

$$\beta_j = W_j \gamma + u_j \quad u_j \sim N(0, T) \quad (4.25)$$

Eşitlikte bulunan W_j ; $(Q+1) \times P$ boyutlu tahminciler, γ ; $P \times 1$ boyutlu sabit etkiler, u_j ; $(Q+1) \times 1$ boyutlu 2. aşama hatalar veya tesadüfi etkiler, T ise $(Q+1) \times (Q+1)$ boyutlu

varyans kovaryans matrisidir. T matrisi $w_j\gamma$ 'nın beklenen değeri ile ilgili β_j 'nin dağılımını gösterir.

Birleştirilmiş model aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\beta}_j = W_j\gamma + u_j + e_j \quad (4.26)$$

w_j verildiğinde $\hat{\beta}_j$ 'nin dağılımı ise şöyledir:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}_j) &= \text{Var}(u_j + e_j) = T + V_j = \Delta_j \\ &= \text{parametre dağılımı (varyansı)} + \text{hata dağılımı (varyansı)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Eğer her gruptaki örnek büyüklükleri sayısı aynıysa ve β_j 'nin her bileşeni için 2. aşama tahminçileri aynı değerleri alıyorsa, her $\hat{\beta}_j$ aynı dağılıma (Δ) sahiptir.

$$\Delta = T + V = T + \sigma^2 (X^T X)^{-1} \quad (4.28)$$

Bu durumda γ 'nın tek, minimum varyanslı, yansız en küçük kareler tahminçisi aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\gamma} = (\sum W_j^T W_j)^{-1} \sum W_j^T \hat{\beta}_j \quad (4.29)$$

Eğer her gruptaki örnek büyüklükleri sayısı farklıysa, Δ_j değerleri gruptan gruba değişiklik gösterir. Her Δ_j değerlerinin bilindiği varsayılırsa, γ 'nın tek, minimum varyanslı, yansız genelleştirilmiş en küçük kareler tahminçisi;

$$\hat{\gamma} = (\sum W_j^T \Delta_j^{-1} W_j)^{-1} \sum W_j^T \Delta_j^{-1} \hat{\beta}_j \quad (4.30)$$

şeklinde hesaplanır.

Genelleştirilmiş en küçük kareler tahminçisi her gruptaki verinin kesinliği, yani varyans kovaryans matrisinin tersi (Δ_j^{-1}) ile ağırlıklandırılır. Ortalamaların çıktığı modelde ağırlıklı en küçük kareler ile genelleştirilmiş en küçük kareler tahminleri birbirine benzemektedir.

Aralık Tahmini:

γ için güven aralığı, $\hat{\gamma}$ 'nın dağılım matrisi $V_{\hat{\gamma}}$ 'ya bağlıdır.

$$V_{\hat{\gamma}} = \text{Var}(\hat{\gamma}) = (\sum W_j^T \Delta_j^{-1} W_j)^{-1} \quad (4.31)$$

Örneğin; γ_h için %95 güven aralığı aşağıdaki gibidir. Eşitlikteki V_{hh} , V_{γ} matrisinin h. köşegen elemanıdır.

$$\hat{\gamma}_h \pm 1.96(V_{hh})^{1/2} \quad (4.32)$$

Özellikle tüm 1. aşama katsayıları tesadüfi ise ve her 2. aşama birimindeki $\hat{\beta}_j$ 'nin en küçük kareler tahmini yeterli örneğe sahipse $\hat{\gamma}$ ve V_{γ} formülleri geçerlidir. 1. aşama değişkenlerinin hepsi (X_j); sabit etkileri (γ) ve tesadüfi etkileri (u_j) birleştirebildiği gibi, bazı 1. aşama değişkenleri de sadece sabit etkilere sahip olabilir.

$$Y_j = X_j W_j \gamma + Z_j u_j + r_j \quad (4.33)$$

Z_j , X_j 'nin bir alt kümesidir. Z_j tesadüfi etkilere sahip 1. aşama değişkenlerini sütunlarında bulundururken, X_j 'nin sütunlarında ise sadece sabit etkileri içeren 1. aşama değişkenleri vardır. Bununla birlikte bazı 1. aşama değişkenleri tesadüfi etkilere sahipken, bazıları da tesadüfi etkilere sahip olmayabilir.

Y_j 'nin marjinal varyansı;

$$Var(Y_j) = V_{y_j} = Z_j T Z_j^T + \sigma^2 I_j \quad (4.34)$$

şeklinde hesaplanır. Bu eşitlikte I_j ; $n_j \times n_j$ boyutlu birim matristir. Sabit etkilerin genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisi aşağıdaki şekildedir:

$$\hat{\gamma} = \left(\sum_{j=1}^J W_j^T X_j^T V_{y_j}^{-1} X_j W_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J W_j^T X_j^T V_{y_j}^{-1} Y_j \quad (4.35)$$

Varyans kovaryans matrisi ise;

$$Var(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J W_j^T X_j^T V_{y_j}^{-1} X_j W_j \right)^{-1} \quad (4.36)$$

Eğer $Z_j = X_j$ ise;

$$X_j^T V_{y_j}^{-1} X_j = \Delta_j^{-1} \quad (4.37)$$

şeklinde hesaplanır.

4.2 Birinci Aşama Tesadüfi Katsayılarının Tahmini

1. aşama modelinde yer alan bağımlı değişken, 2. aşamada bulunan katsayılara bağlıdır. Çünkü 2. aşamadaki değişkenlik 1. aşamadaki katsayıları da etkilemektedir.

4.2.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli

Nokta Tahmini:

1. aşama modelinde örnek ortalamasının çıktığı olduğu model;

$$\bar{Y}_{.j} = \beta_{0j} + \bar{r}_{.j} \quad \bar{r}_{.j} \sim N(0, V_j) \quad V_j = \sigma^2 / n_j \quad (4.38)$$

şekildedir. 2. aşama modeli ise;

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \quad u_{0j} \sim N(0, \tau_{00}) \quad (4.39)$$

şeklinde. Bu modelde β_{0j} için iki seçenek vardır. İlki; 1. aşama modelinde V_j varyanslı β_{0j} 'nin yansız tahmincisi $\bar{Y}_{.j}$ 'dir. İkincisi ise, her β_{0j} 'nin genel bir tahmincisi olan $\hat{\gamma}_{00} = \sum \Delta_j^{-1} \bar{Y}_{.j} / \sum \Delta_j^{-1}$ 'dir. Bayes tahmincisi (β_{0j}^*) bu iki seçeneğin optimal ağırlıklı kombinasyonudur.

$$\beta_{0j}^* = \lambda_j \bar{Y}_{.j} + (1 - \lambda_j) \hat{\gamma}_{00} \quad (4.40)$$

λ_j ; β_{0j} parametresi için $\bar{Y}_{.j}$ 'nin en küçük kareler tahmincisinin güvenilirliğine eşittir.

$$\lambda_j = \text{Var}(\beta_{0j}) / \text{Var}(\bar{Y}_{.j}) = \tau_{00} / (\tau_{00} + V_j) \quad (4.41)$$

$$= (\text{parametre varyansı}) / (\text{parametre varyansı} + \text{hata varyansı})$$

Klasik test teorisinde $\bar{Y}_{.j}$, bilinmeyen parametre β_{0j} 'nin gerçek ölçüsüdür. Parametre varyansının örnek ortalamasının toplam varyansına bölünmesiyle güvenilirlik (λ_j) elde edilir.

Güvenilirlik (λ_j); grup ortalamaları β_{0j} her gruptaki örnek büyüklüğünü sabit tutarak 2. aşama birimlerine karşılık değişirse ve örnek büyüklükleri (n_j) yeterince büyük ise 1'e eşit olabilir. Örnek ortalamaları yüksek güvenilirliğe sahip olduğunda, β_{0j}^* $\bar{Y}_{.j}$ 'nin üzerinde önemli bir ağırlığa sahip olur. Bununla birlikte örnek ortalaması güvenilir değilse, büyük ortalama tahmini (γ_{00}) β_{0j}^* 'nin oluşmasında daha fazla ağırlığa sahip olacaktır. Ağırlıklı ortalama β_{0j}^* aşağıdaki gibi de bilinebilir:

$$\begin{aligned}\lambda_j &= V_j^{-1} / (V_j^{-1} + \tau_{00}^{-1}) \\ 1 - \lambda_j &= \tau_{00}^{-1} / (V_j^{-1} + \tau_{00}^{-1})\end{aligned}\quad (4.42)$$

(4.42)'ye göre β_{0j}^* hesaplanırken $\bar{Y}_{.j}$ 'deki ağırlık olan λ_j , V_j^{-1} ile orantılıdır. $\hat{\gamma}_{00}$ 'a uygun olan $1 - \lambda_j$ 'nin ağırlığı, merkezi eğilim γ_{00} etrafında β_{0j} parametrelerinin yoğunluğu τ_{00}^{-1} ile ters orantılıdır.

Daha küçük beklenen hata kareleri ortalamalarına sahip β_{0j} , ağırlıklı ortalama β_{0j}^* 'den daha optimaldir. Gerçekte, β_{0j}^* γ_{00} 'a oranla sapmalı bir tahmincidir. β_{0j} 'nin gerçek değerleri γ_{00} 'dan büyük olduğunda, β_{0j}^* negatif sapmalı; β_{0j} , γ_{00} 'dan daha küçük olduğunda, β_{0j}^* pozitif sapmalı olur. β_{0j}^* ortalama olarak sapmalı tahminciye ($\bar{Y}_{.j}$ gibi) göre β_{0j} değerinde daha yakındır, β_{0j}^* ile $\bar{Y}_{.j}$ arasındaki ilişki λ_j 'ye yaklaşır. Çünkü β_{0j}^* , $\bar{Y}_{.j}$ 'yi γ_{00} 'a doğru çeker, β_{0j}^* çekilmiş tahminci (shrinkage estimator) olarak adlandırılır.

Büyük ortalama kullanılarak çekilme (shrinkage) yapılır. Bu büyük ortalamaya karşı hatalı grup ortalamaları belirli oranda düzeltilir. Eğer tahminler hatalıysa, sonuçların etkisi de azalabilir. Örneğin her gruptaki gözlem sayısı az ise, hata varyansı büyük olacaktır.

Çekmiş (Shrunk) Grup Ortalaması = Güvenilirlik $\times$ Grup Ortalaması

şeklinde hesaplanır.

Aralık Tahmini:

β_{0j} için güven aralığı V_j^* üzerine kurulmuştur ve V_j^* aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$V_j^* = (V_j^{-1} + \tau_{00}^{-1})^{-1} + (1 - \lambda_j)^2 \text{Var}(\hat{\gamma}_{00}) \quad (4.43)$$

β_{0j} için %95 güven aralığı;

$$\beta_{0j}^* \pm 1.96 V_j^{*1/2} \quad (4.44)$$

şeklinde gösterilir.

τ_{00} ve σ^2 varyansları bilindiğinde, yukarıdaki güven aralığı gerçek anlamda güven sınırlarını ifade etmektedir. Varyanslar bilinmediğinde ise, güven aralığı daha dar olabilmektedir.

4.2.2 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli

Nokta Tahmini:

β_{0j} 'yi tahmin etmek için 2. aşama değişkeni w_j ile ilgili bilgi kullanılabilir. 1. aşama modeli:

$$\bar{Y}_{.j} = \beta_{0j} + \bar{r}_{.j} \quad (4.45)$$

ve 2. aşama modeli:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} \quad u_{0j} \sim N(0, \tau_{00}) \quad (4.46)$$

şeklindedir.

β_{0j} iki farklı şekilde tahmin edilebilmektedir. Birincisi; örnek ortalaması $\hat{\beta}_{0j} = \bar{Y}_{.j}$ 'dir. İkincisi; w_j verildiğinde β_{0j} 'nin tahmini değerleri; $\hat{\beta}_{0j} = \hat{\gamma}_{00} + \hat{\gamma}_{01}W_j$ 'dir. Bu iki tahminciyi birleşik tahminciye bir araya getirirsek aşağıdaki hali alır:

$$\beta_{0j}^* = \lambda_j \bar{Y}_{.j} + (1 - \lambda_j)(\hat{\gamma}_{00} + \hat{\gamma}_{01}W_j) \quad (4.47)$$

β_{0j}^* çekilmiş tahminci (shrinkage estimator) veya ampirik Bayes tahmincisidir. $\bar{Y}_{.j}$ büyük ortalamadan çok açıklayıcı değişkene doğru çekilmiştir. Bu tahmin koşullu çekilme tahmincisidir, çünkü çekilme miktarı w_j 'ye bağlıdır. $\bar{Y}_{.j}$ 'nin uygun ağırlığı V_j^{-1} ile orantılıdır, fakat açıklayıcı değişkenin uygun ağırlığı, regresyon doğrusu $(\hat{\gamma}_{00} + \hat{\gamma}_{01}W_j)$ etrafında β_{0j} değerlerinin yoğunluğu olan τ_{00}^{-1} ile orantılıdır. Eğer w_j ile açıklanan β_{0j} 'deki değişimin oranı büyük ise, regresyon doğrusu etrafındaki kalıntı varyansı τ_{00} küçük olacaktır.

Ampirik Bayes tahmincisi β_{0j}^* 'a karşılık gelen ampirik bayes kalıntısı u_{0j}^* 'dır. Bu kalıntı, 2. aşama modelindeki açıklayıcı değişkenden gelen β_{0j}^* 'ın en küçük kareler tahmincisinin standart sapma tahmincisidir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$u_{0j}^* = \beta_{0j}^* - \hat{\gamma}_{00} - \hat{\gamma}_{01}W_j \quad (4.48)$$

Bu eşitlik en küçük kareler kalıntısı $\hat{u}_{0j}$ ile karşılaştırmak için gereklidir. 2. aşama modelinde açıklayıcı değişkenden gelen β_{0j} 'nin en küçük kareler tahmincisinin standart sapma tahmincisi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\hat{u}_{0j} = \bar{Y}_{.j} - \hat{\gamma}_{00} - \hat{\gamma}_{01}W_j \quad (4.49)$$

u_{0j}^* değeri $\hat{u}_{0j}$ 'nin 0'a doğru çekildiği değerdir.

$$u_{0j}^* = \lambda_j \hat{u}_{0j} \quad (4.50)$$

Güvenilirlik (λ_j) tam ise, çekilme meydana gelmez, ancak $\lambda_j = 0$ ise açıklayıcı değişkene doğru çekilme gerçekleşir.

Aralık Tahmini:

β_{0j} için güven aralığı V_j^* ve açıklayıcı değişken w_j üzerine kurulmuştur.

$$V_j^* = (V_j^{-1} + \tau_{00}^{-1})^{-1} + (1 - \lambda_j)^2 \left[\text{Var}(\hat{\gamma}_{00} + \hat{\gamma}_{01} w_j) \right] \quad (4.51)$$

β_{0j} için %95 güven aralığı şu şekildedir:

$$\beta_{0j}^* \pm 1.96 V_j^{*1/2} \quad (4.52)$$

4.2.3 Genel Modeller (Tam Hiyerarşik Modeller – Sabit ve Eğim Parametrelerinin Çıktı Olduğu Modeller)

Nokta Tahmini:

Amacımız β_j için en iyi tahmini bulmaktır. Bunun için iki seçenek vardır. Birincisi; j . gruptan gelen veriye göre regresyon tahmincisinin ($\hat{\beta}_j$) en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}_j = (X_j^T X_j)^{-1} X_j^T Y_j$ 'dir. İkincisi; w_j 'deki grup özellikleri verilen β_j 'ye ait açıklayıcı değer $\hat{\beta}_j = w_j \hat{\gamma}$ 'dır. Burada $\hat{\gamma}$ genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ile elde edilir. Bu iki tahmincinin uygun birleşimi; $\beta_j^* = \lambda_j \hat{\beta}_j + (1 - \lambda_j) w_j \hat{\gamma}$ 'dır. Formülde yer alan λ_j ise;

$$\lambda_j = T(T + V_j)^{-1} \quad (4.53)$$

şeklinde. λ_j , β_j için parametre dağılım matrisi (T) toplam dağılım matrisi ($T + V_j$) oranına eşittir. λ_j 'ye çok değişkenli güvenilirlik matrisi denilir.

i. Birinci Aşama En Küçük Kareler Katsayılarının Güvenilirliği:

T ve V_j 'nin köşegen elemanları τ_{qq} ve v_{qqj} olarak gösterilir.

$$\text{Güvenilirlik}(\hat{\beta}_{qj}) = \tau_{qq} / (\tau_{qq} + v_{qqj}) \quad q = 0, 1, 2, \dots, Q \quad (4.54)$$

$\hat{\beta}_{qj}$ 'nin örnek varyansı v_{qqj} , j. birimler arasında genelde farklılık gösterir ve her 2. aşama birimi tek güvenilirlik indisine sahiptir. J tane 2. aşama birimine karşılık tam güvenilirlik aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$$\text{Güvenilirlik}(\hat{\beta}_q) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \tau_{qq} / (\tau_{qq} + v_{qqj}) \quad q = 0, 1, 2, \dots, Q \quad (4.55)$$

ii. Kalıntı Tahmini

Her aşamadaki kalıntıların tahmini model varsayımlarının yeterliliğini belirlemek için oldukça yararlıdır. 2. aşama kalıntılarının en küçük kareler tahmini 1. aşama katsayılarının (β_j) en küçük kareler tahmininin bir fonksiyonudur.

$$\hat{u}_j = \hat{\beta}_j - W_j \hat{\gamma} \quad (4.56)$$

Her j birim için 2. aşamadaki Ampirik Bayes kalıntıları:

$$u_j^* = \beta_j^* - W_j \hat{\gamma} \quad (4.57)$$

şeklindedir.

2. aşama kalıntıları gibi, 1. aşama kalıntıları da ya en küçük karelerle ya da ampirik bayes yöntemleriyle tahmin edilir. Bunların tahmininde 1. aşama kalıntılarının dağılımı model varsayımları için önemlidir. En küçük kareler kalıntıları 2. aşama birimlerindeki X_j tam ranka sahipse bulunur ve şu şekildedir:

$$\hat{r}_{ij} = Y_{ij} - X_{ij}^T W_j \hat{\gamma} - Z_{ij}^T \hat{u}_j \quad (4.58)$$

Bu eşitlikte X_{ij}^T ve Z_{ij}^T ; X_j ve Z_j 'nin i. satırının elemanlarını gösterir. Her birim için ampirik bayes kalıntı tahminleri aynı forma sahiptir:

$$r_{ij}^* = Y_{ij} - X_{ij}^T W_j \hat{\gamma} - Z_{ij}^T u_j^* \quad (4.59)$$

Aralık Tahmini:

β_j için güven aralığı varyans kovaryans matrisi V_j^* üzerine kurulabilir.

$$V_j^* = (V_j^{-1} + T^{-1})^{-1} + (1 - A_j) \left[\text{Var}(W_j \hat{\gamma}) \right] (I - A_j)^T \quad (4.60)$$

β_{qj} için %95 güven aralığı:

$$\beta_{qj}^* \pm 1.96(V_{qqj}^*)^{1/2} \quad (4.61)$$

V_{qqj}^* , V_j^* 'nin q. köşegen elemanıdır. Yukarıdaki eşitliğin gerçekleşmesi için; β_j 'nin tüm elemanlarının tesadüfi olması ve en küçük kareler ortalamaları ile $\hat{\beta}_j$ hesaplamalarına yetecek her j grup için yeterli veri olması gerekir. β_j 'nin tüm elemanlarının tesadüfi olduğunu ancak 2. aşama birimi için β_j 'nin tahminlerini en küçük kareler yardımı ile hesaplamada yeterli verinin olmadığını düşünelim bu durumda Ampirik Bayes tahmini şu şekilde olur:

$$\beta_j^* = (X_j^T X_j + \sigma^2 T^{-1})^{-1} (X_j^T Y_j + \sigma^2 T^{-1} W_j \hat{\gamma}) \quad (4.62)$$

4.3 Varyans Kovaryans Bileşenlerinin Tahmini

Varyans kovaryans bileşenlerinin bilindiğini varsayımı sabit ve tesadüfi etkilerin anlaşılmasına imkan vermesine rağmen, varyans ve kovaryans değerleri yaklaşık olarak tahmin edilebilir.

x_{ij} 'lerin normal dağıldığı 2 aşamalı modellerde üç tip bilinmeyen parametre vardır. Bunlar; 1. aşama tesadüfi katsayıları (β), 2. aşama sabit parametreler (γ) ve varyans kovaryans parametreleridir. Varyans kovaryans parametreleri iki bileşenden oluşur. Bunlar; 2. aşama parametrelerinin varyans kovaryans matrisi (T) ve 1. aşama kalıntı varyansı (σ^2)dır. Bu parametreleri tahmin edebilmek için iki tip genel stratejiden yararlanılabilir. Bu stratejilerden birincisi γ , T ve σ^2 'nin Tam En Çok Olabilirlik (TEÇO yani EÇO) ve β 'nin Ampirik Bayes (AB) tahminine dayanmaktadır. İkincisi ise T ve σ^2 'nin Sınırlandırılmış En Çok Olabilirlik (SEÇO) tahminine, γ ve β 'nin Ampirik Bayes tahminine dayanmaktadır (Goldstein, 1986).

4.3.1 Tam En Çok Olabilirlik (TEÇO) Yöntemi

En çok olabilirlik (Maximum Likelihood) yönteminin asıl amacı, ana kütle Y ve ana kütleden çekilen örnek arasındaki benzerlik ilişkisinden yararlanarak bu örneğin elde edilme ihtimalini maksimum yapan γ , T ve σ^2 parametrelerine ait tahmini seçmektir. Bu yaklaşımdaki tahminler kesin özelliklere sahiptir. Bazı genel varsayımlar altında, tutarlı (yeterli veri seçildiğinde, tahminler yüksek olasılıkla doğru parametreye yaklaşır) ve asimtotik olarak etkili (veriden büyük örnek alındığında, en çok olabilirlik tahminleri minimum varyansla yansızdır) tahminler yapılır. En çok olabilirlik tahmincilerinin diğer önemli özelliği; örnek büyüklükleri arttığında örnek dağılımı yaklaşık olarak normal dağılıma uymaktadır. Büyük

J'nin varlığında, 1. aşama katsayıları için Ampirik Bayes tahminleri ortalama için alternatif metotlarla yapılan tahminlerden daha doğru olma eğilimindedirler. Ampirik Bayes tahminlerinin avantajı γ , T ve σ^2 'nin EÇO tahminlerine bağlı olmalarındandır (Morris, 1983; Raudenbush, 1988).

2. aşama birim sayısı küçük olduğunda γ ve T tahminleri hatalı olabilir. Özellikle T 'deki varyans bileşenleri normal dağılıma sahip olmayabilir. Veri dengesiz ise, γ tahminleri ağırlıklandırılır. Bu ağırlıklardaki tesadüfi hatalar, γ 'da yanıltıcı etkilere sebep olabilir. Veri setleri dengesiz ise, ağırlıklar oldukça değişken olur. β 'nın AB tahminleri γ , T ve σ^2 'nin EÇO tahminlerine bağlıdır, bu yüzden de β için güven aralıkları daralır ve β için anlamlılık testleri yanıltıcı olabilir.

Tersi durumda, σ^2 hakkındaki EÇO çıkarsamaları genellikle küçük J ya da dengesiz verilere karşı duyarlı değildir. Çünkü σ^2 tahmininin doğruluğu, 1. aşama birimlerinin toplam örnek genişliğine bağlıdır ($N = \sum n_j$) (Longford, 1993). Deviyans testinden yararlanılmak isteniyorsa TEÇO, SEÇO yöntemine göre daha çok tercih edilir (Sullivan, 1999).

4.3.2 Sınırlandırılmış En Çok Olabilirlik (SEÇO) Yöntemi

Varyans kovaryans tahminlerinin tam en çok olabilirlik (TEÇO) yöntemine göre tek eksiği; sabit etkilerin nokta tahminine bağımlı olmasıdır. Basit regresyon modeli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_q X_{qi} + r_i \quad (4.63)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere r_i 0 ortalama, σ^2 varyansla normal dağılıma sahiptir. $Q+1$ tane regresyon katsayısı $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q$ 'nin bilindiğini varsayalım. Bu durumda σ^2 'nin en çok olabilirlik tahmini;

$$\hat{\sigma}^2 = \sum r_i^2 / n \quad (4.64)$$

şeklinde hesaplanabilir. Regresyon parametreleri bilinmediğinde ve tahmin edilmesi gerektiğinde aşağıdaki formül kullanılır:

$$\hat{r}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_q X_{qi} \quad (4.65)$$

Her $\hat{\beta}_q$ en küçük kareler tahmincisidir. σ^2 'nin yansız tahmin edicisi ise (4.66)'daki gibidir:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum \hat{r}_i^2 / (n - Q - 1) \quad (4.66)$$

Paydadaki $(n - Q - 1)$, $(Q + 1)$ tane regresyon parametresi tahmininde kullanılan serbestlik derecesi düzeltmesidir. Q küçük olduğunda, düzeltme küçük etkiye sahip olacaktır. Q arttığında ise, σ^2 'nin tahmininde ciddi sapmalara neden olabilir. Sapma negatif yani σ^2 tahminleri oldukça küçük olduğunda güven aralıkları dar, hipotez testleri ise yanıltıcı olacaktır. TEÇO ve SEÇO yöntemlerine karşı varyans kovaryans tahminleri arasındaki farklılık basit cebirsel formlarla anlatılamaz. Ayrıca varyans bileşenleri için SEÇO tahminleri sabit etkilerdeki belirsizlikleri düzeltir, ancak TEÇO bunu yapamaz. 2 aşamalı modellerde TEÇO ve SEÇO σ^2 için benzer sonuçları verir. Fakat T 'nin tahmininde önemli farklılıklar oluşur.

4.3.3 EM (Expectation-Maximization) Algoritması Kullanılarak Yapılan EÇO Tahminleri

1. ve 2. aşama katsayıları için varyans bileşenlerini bilmek gerekir, oysaki varyans bileşenlerinin tahminleri de katsayıların bilgisini gerektirir. Bu tahminlerdeki karşılıklı bağımlılık iteratif algoritmalarla çözülebilir. Hiyerarşik modellerde kullanılan ilk prosedür EM (Expectation-Maximization) algoritmasıdır. EM algoritması, en çok olabilirlik tahminlerini hesaplarken 2. aşama tesadüfi parametrelerini kayıp veri olarak adlandırılır (Dempster vd., 1977).

Kayıp veri u_j 'nin gözlemlendiğini varsayalım. En çok olabilirlik yöntemi ile yapılan tüm parametre (γ, T, σ^2) tahminlerinin hesabı daha kolay olacaktır. γ 'yu tahmin etmek için, birleştirilmiş modelin her iki tarafından da u_j çıkarılır. Buna göre γ 'nın en küçük kareler tahmincisi şöyledir:

$$\hat{\gamma} = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - u_j) / \sum_{j=1}^J n_j \quad (4.67)$$

Varyans kovaryans bileşenleri için en çok olabilirlik tahminleri;

$$\hat{\tau} = \sum_{j=1}^J u_j^2 / J$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \hat{\gamma} - u_j)^2 / \sum_{j=1}^J n_j \quad (4.68)$$

2. aşama tesadüfi parametreleri kayıp veri olarak alındığında, parametre tahmini için kullanılan istatistiklere “tamamlanmış veri yeterli istatistikleri” (complete data sufficient statistics) denilir. Y verildiğinde her u_j ’nin u_j^* ortalama ve V_j^* varyansla normal dağıldığı varsayılır. Bu şartlar altında, parametre ilk tahminleri $(\gamma^{(0)}, \tau^{(0)}, \sigma^{2(0)})$ üst indis (0) ile gösterilir.

$$u_j^* = \lambda_j^{(0)}(\bar{Y}_j - \gamma^{(0)}) \quad V_j^* = \tau^{(0)}(1 - \lambda_j^{(0)}) \quad (4.69)$$

Bu tahminler şu şekilde de yapılabilir:

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - u_j) \middle| Y, \gamma^{(0)}, \tau^{(0)}, \sigma^{2(0)} \right] &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - u_j^*) \\ E \left[\sum_{j=1}^J u_j^2 \middle| Y, \gamma^{(0)}, \tau^{(0)}, \sigma^{2(0)} \right] &= \sum_{j=1}^J (u_j^{*2} + V_j^*) \\ E \left[\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \hat{\gamma} - u_j)^2 \middle| Y, \gamma^{(0)}, \tau^{(0)}, \sigma^{2(0)} \right] &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} [(Y_{ij} - \gamma^{(0)} - u_j^*)^2 + V_j^*] \end{aligned} \quad (4.70)$$

Algoritmadaki “E” adımı, Y verisi ve parametre tahminleri verildiği durumdaki şartlı beklenen değer aracılığıyla parametrelere ait ilk tahminler yapılır. “M” adımı ise tahmin E adımı elde edilen tahminler, tam verinin verildiği durumdaki EÇÖ tahminleri için kullanılan formüllerde yerine konulur. Dempster, Laird ve Rubin her bir EM algoritmasının olasılıkları büyüttüğünü ve bununla tahminleri lokal maksimuma yakınsattığını ispatlamışlardır.

EÇÖ-EM yaklaşımının dezavantajı, odak parametreler hakkındaki çıkarımların bilinmeyen parametreler hakkındaki belirsizliği hesaba katmamasıdır. J küçük ve 1. aşama verileri oldukça dengesiz olduğu zaman bu problem çok önemlidir. SEÇÖ yaklaşımı kısmen bu sorunu çözebilmektedir (Goldstein, 2003).

4.3.4 En Çok Olabilirliğe Bağlı Olarak Varyans Bileşenleri İçin Güven Aralıkları

T ’de bulunan her varyans kovaryans terimi için standart hata tahminlerini hesaplamak mümkündür. Temel problem varyans tahminlerinin (τ_{00}) örneklem dağılımının bilinmeyen derecede bir çarpıklığa sahip olmasıdır. Sonuçta, simetrik güven aralıkları ve istatistik testleri oldukça yanıltıcı olabilir. TEÇÖ ve SEÇÖ yöntemlerindeki eksiklikler; varyans kovaryans tahmini yapmak için Bayes yaklaşımlarını kullanmaya mecbur kılar. Sabit etkilerle ilgili

sonuçlar varyans kovaryans parametrelerinin nokta tahminine bağlıdır. Örneğin; ortalamaların çıktığı olduğu modelde $\hat{\gamma}_{01}$ için %95 güven aralığı;

$$\hat{\gamma}_{01} \pm 1.96(V_{\gamma_{01}})^{1/2} \quad (4.71)$$

şeklindedir. Eşitlikteki $V_{\gamma_{01}}$ ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$V_{\gamma_{01}} = Var(\hat{\gamma}_{01}) = \left[\sum \Delta_j^{-1} (W_j - \bar{W}^*)^2 \right]^{-1} \quad (4.72)$$

Yukarıdaki formülde $\hat{\Delta}_j = \hat{\tau}_{00} + \hat{V}_j$ yerine yazıldığını varsayalım. Eğer τ_{00} yetersiz tahmin edilmişse, güven aralığı hatalı olabilir. Sadece $V_{\gamma_{01}}$ bilindiğinde $(\hat{\gamma}_{01} - \gamma_{01}) / (V_{\gamma_{01}})^{1/2}$ 'nin örneklem dağılımı normale yaklaşır. Fotiu's (1989) simülasyon çalışmasında, t kritik değerinin kullanılmasının daha uygun güven aralıkları verdiğini göstermiştir.

$$\hat{\gamma}_{01} \pm t_{0.025}(\hat{V}_{\gamma_{01}})^{1/2} \quad (4.73)$$

5. HİYERARŞİK LİNEER MODELLER İÇİN HİPOTEZ TESTLERİ

Genel olarak 1. aşama regresyon modeli;

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + \dots + \beta_{Qj}X_{Qij} + r_{ij}$$

$$= \beta_{0j} + \sum_{q=1}^Q \beta_{qj}X_{qij} + r_{ij} \quad r_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (5.1)$$

şeklindedir. Bu eşitlikte $(Q+1)$ tane katsayıdan bazıları tesadüfi, bazıları sabit, bazıları ise tesadüfi olmayan parametrelerdir. 2. aşama modelinde her β_{qj} katsayısı şu şekilde modellenebilir:

$$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \gamma_{q1}W_{1j} + \gamma_{q2}W_{2j} + \dots + \gamma_{qs_q}W_{s_qj} + u_{qj}$$

$$= \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{s_q} \gamma_{qs}W_{sj} + u_{qj} \quad (5.2)$$

Çizelge 5.1 Tek ve çok parametre için hipotez testleri

	Hipotez Tipleri	Sabit Etkiler	1.Aşama Tesadüfi Katsayıları	Varyans Bileşenleri
Tek Parametre İçin	H_0	$\gamma_h = 0$	$\beta_{qj} = 0$	$\tau_{qq} = 0$
	H_1	$\gamma_h \neq 0$	$\beta_{qj} \neq 0$	$\tau_{qq} \neq 0$
Birden Fazla Parametre İçin	H_0	$C'\gamma = 0$	$C'\beta = 0$	$T = T_0$
	H_1	$C'\gamma \neq 0$	$C'\beta \neq 0$	$T \neq T_0$

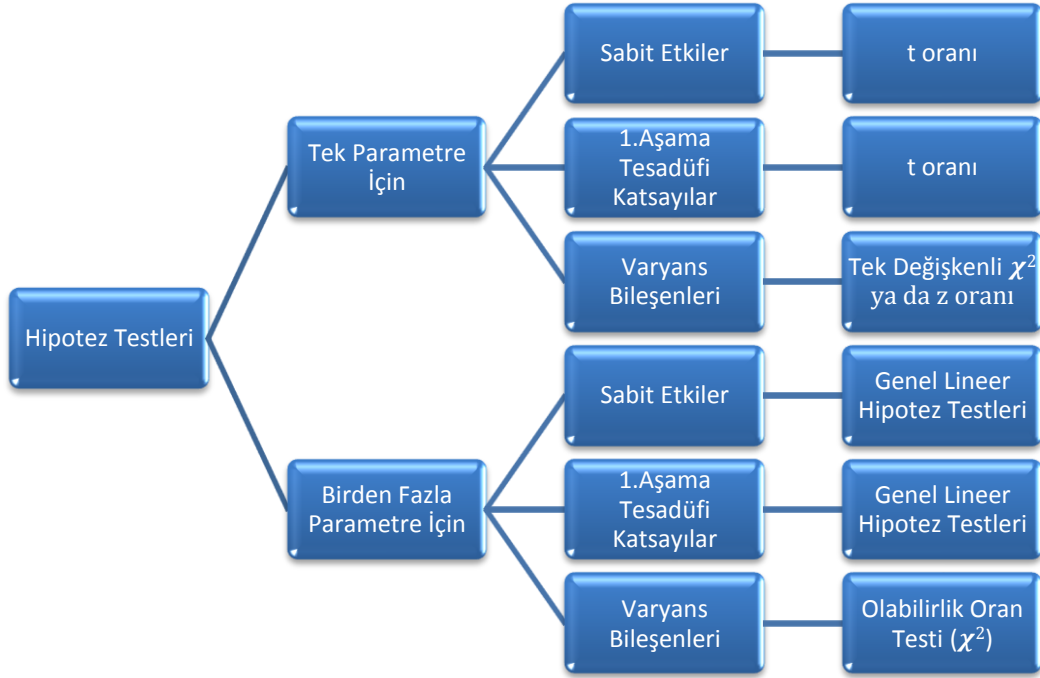
2.aşama modelindeki sabit etkilerin toplamı $F = \sum_q (S_q + 1)$ 'dir. Her tesadüfi eleman u_{qj} çok değişkenli normal dağılıma uyar.

$$Var(u_{qj}) = \tau_{qq} \quad (5.3)$$

$$Cov(u_{qj}, u_{q'j}) = \tau_{qq'} \quad (5.4)$$

Varyans kovaryans parametreleri, 1. aşama tesadüfi katsayılar (her β_{qj}) ve sabit etkiler (her γ_{qs}) için hipotez testleri yapılır. Testler ya tek parametre ya da birden fazla parametre testleri

olabilir. Çizelge 5.1'de de görüldüğü üzere, temelde 2 çeşit hipotez tipi vardır ve bunlarda kendi aralarında 3'e ayrılmaktadır. Şekil 5.1 'de ise bunlara karşılık gelen test istatistikleri bulunmaktadır.



Şekil 5.1 Hipotez testleri

5.1 Sabit Etkiler İçin Hipotez Testleri

i. Tek Parametre İçin Hipotez Testleri:

Tipik sıfır hipotezi;

$$H_0 : \gamma_{qs} = 0 \quad (5.5)$$

γ_{qs} 'in 0 olması, 2. aşama parametreleri (β_{qj}) üzerinde 2. aşama açıklayıcı değişkenlerinin (w_{sj}) etkisini gösterir. Bu tip hipotezler için test aşağıdaki gibidir:

$$t = \hat{\gamma}_{qs} / (\hat{V}_{\hat{\gamma}_{qs}})^{1/2} \quad (5.6)$$

$\hat{\gamma}_{qs}$; γ_{qs} 'in en çok olabilirlik tahmini, $\hat{V}_{\hat{\gamma}_{qs}}$ ise $\hat{\gamma}_{qs}$ 'in tahmin edilen örnek varyansıdır. t istatistiğinin serbestlik derecesi $(J - S_q - 1)$ 'dir.

ii. Birden Fazla Parametre İçin Hipotez Testleri:

j. gruptaki i. birim için, bağımlı değişken Y_{ij} ve açıklayıcı değişken X_{ij} 'nin 1.aşama modeli aşağıdaki gibidir:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij} \quad (5.7)$$

2. aşama modeli:

$$\begin{aligned} \beta_{0j} &= \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j + u_{1j} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Birden fazla parametre testlerinin yaklaşımını anlamak için matris notasyonu ile aşağıdaki gibi formüle edebiliriz:

$$\begin{pmatrix} \beta_{0j} \\ \beta_{1j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & W_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Yani $\beta_j = W_j\gamma + u_j$ 'dir.

Bileşik hipotez testi; $H_0 : C^T\gamma = 0$ şeklindedir. Burada;

$$C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

şeklinde yazılırsa sıfır hipotezi de aşağıdaki gibi olur:

$$H_0 : C^T\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$Var(\hat{\beta}_j) = \Delta_j$ bilindiğinde, $\hat{\gamma}$ 'nın örnek varyansı;

$$Var(\hat{\gamma}) = (\sum W_j^T \Delta_j^{-1} W_j)^{-1} = V_{\hat{\gamma}} \quad (5.12)$$

şeklindedir. Böylece $C'\hat{\gamma}$ 'nın varyansı da;

$$Var(C^T\hat{\gamma}) = C^T V_{\hat{\gamma}} C = (say) V_c \quad (5.13)$$

şeklinde hesaplanır. $V_{\hat{\gamma}}$ bilinmediğinde ise:

$$\hat{V}_{\hat{\gamma}} = \left(\sum W_j^T \hat{\Delta}_j^{-1} W_j \right)^{-1} \quad (5.14)$$

şekilde tahmin edilir. $H_0 : C^T \gamma = 0$ verildiğinde, test edilen C^T 'nin satır sayısı eşit serbestlik derecesinde χ^2 dağılımına sahip test istatistiği:

$$H = \hat{\gamma}^T C \hat{V}_c^{-1} C^T \hat{\gamma} \quad (5.15)$$

şeklindedir.

Birden fazla parametre testleri için çok fazla kullanım vardır ve en önemli yararı da 1. tip hata yapılma olasılığını azaltmasıdır.

Birden fazla parametrenin test edilmesinde diğer bir yaklaşım; olabilirlik oran (likelihood-ratio) testidir. Sabit etkiler durumunda, bu test yaklaşımı sadece TEÇÖ tahmini ile elde edilir. İki modelden gelen karşılaştırma ve tahmin sonuçları temel alınır. Birinci (sıfır) model sabit etkilerin sıfır olduğu modeldir. İkinci veya alternatif model tüm etkileri tahmin eder. Her model için deviyans istatistikleri hesaplanır. Birinci model için deviyans istatistiği:

$$D_0 = -2\log(L_0) \quad (5.16)$$

şeklindedir. Burada, L_0 sıfır hipotezindeki en çok olabilirlik tahminleri ile sağlanan olabilirlik değeridir. Aynı şekilde L_1 'de alternatif modelde hesaplanan en çok olabilirlik tahminleri için olabilirlik değeridir.

$$D_1 = -2\log(L_1) \quad (5.17)$$

Sıfır hipotezi altında deviyansların farkı $D_0 - D_1$ tahmin edilen parametre sayılarındaki farka eşit serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. Deviyans farkının büyük olması veri için birinci modelin çok basit olduğunu gösterir. Hipotez testleri deviyans testine göre bazı avantajlara sahiptir. Bunlar:

- Genel lineer hipotez yaklaşımını kullanırken sadece bir model için tahminler hesaplandıktan sonra test edilebilir. Ancak olabilirlik oran yaklaşımında tüm modeller için tahminler test edilir.
- Genel lineer hipotez yaklaşımında parametreler arasındaki farklılıklar test edilebilir. Fakat olabilirlik oran yaklaşımında parametreler arasında yeni algoritmalara ihtiyaç duyulur.

- SEÇO yöntemi kullanıldığında deviyans testi kullanılmaz.

Sabit etkiler hakkında hipotez testi için olabilirlik oran yaklaşımı kullanılırken, varyans kovaryans bileşenleri sıfır ve alternatif modeller için aynı olmalıdır.

5.2 Birinci Aşama Tesadüfi Katsayıları İçin Hipotez Testleri

i. Tek Parametre İçin Hipotez Testleri:

Tek gruba ait özel regresyon katsayısının sıfır hipotezi şu şekildedir:

$$H_0 : \beta_{qj} = 0 \quad (5.18)$$

Tahmin katsayısının kendi standart sapmasına bölünmesiyle elde edilen z istatistiği ile hesaplanır. Ayrıca Ampirik Bayes veya En Küçük Kareler tahminleri de kullanılabilir. Ampirik Bayes yaklaşımında oran;

$$z = \beta_{qj}^* / V_{qqj}^{*1/2} \quad (5.19)$$

olarak hesaplanır. Burada β_{qj}^* Ampirik Bayes tahmini, V_{qqj}^* β_{qj} katsayılarının artçıl varyans kovaryans (posterior dispersion) matrisinin q. köşegen elemanıdır ve z yaklaşık olarak normal dağılım gösterir. Artçıl varyanslar TEÇO ve SEÇO yöntemine göre daha büyüktür. TEÇO yönteminde sabit etkilerin bilindiği varsayılıyorsa β_{qj} 'nin artçıl varyansı belirsizliği yansıtmaz. Bu durumun olmaması için ancak 2. aşama birim sayısının oldukça büyük olması gerekmektedir. β_{qj} katsayıları en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilmişse ve 1. aşama örneklem büyüklüğü küçük ise t testi kullanılır.

ii. Birden Fazla Parametre İçin Hipotez Testleri:

β $[J(Q+1) \times 1]$ boyutlu tesadüfi parametre vektörü için hipotez;

$$H_0 : C^T \beta = 0 \quad (5.20)$$

şeklindedir.

Ampirik Bayes tahminleri β^* kullanılırsa test istatistiği aşağıdaki gibi olur:

$$H_{EB} = \beta^{*T} C (C^T V^* C)^{-1} C^T \beta^* \quad (5.21)$$

Eşitlikte V^* $[J(Q+1) \times J(Q+1)]$ boyutlu katsayıların varyans kovaryans matrisidir. SEÇO yönteminde V^* tam matristir (full matrix). Ayrıca bu yöntemde farklı 2 aşamalı birimler için Ampirik Bayes tahminleri karşılıklı bağımlıdır, çünkü bunlar sabit etkilerin aynı

tahminine dayanır. Diğer taraftan TEÇO yönteminde farklı 2 aşamalı birimlerde Ampirik Bayes tahminleri bağımsızsa, bu bağımsızlık sabit etkiler bilindiğinde esas alınır. J geniş olmadıkça, hem SEÇO hem de TEÇO yaklaşımları oldukça büyüktür.

Eğer β 'lar en küçük kareler yöntemi ile tahmin ediliyorsa, genel lineer hipotez;

$$H_{OLS} = \hat{\beta}^T C(C^T \hat{V} C)^{-1} C^T \hat{\beta} \quad (5.22)$$

şeklindedir. Burada $\hat{V}$, $(Q+1) \times (Q+1)$ boyutlu blok diyagonal matristir ve şu şekilde hesaplanır:

$$\hat{V}_j = \hat{\sigma}^2 (X_j^T X_j)^{-1} \quad (5.23)$$

5.3 Varyans Kovaryans Bileşenleri İçin Hipotez Testi

i. Tek Parametre İçin Hipotez Testleri:

Hiyerarşik analizlerin hepsinde 1. aşama katsayılarının sabit mi tesadüfi mi yoksa tesadüfi olarak değişmeyen yapıda mı olduğuna karar vermeye ihtiyaç duyulur. Tesadüfi değişim olduğunda, sıfır hipotezi şu şekilde kurulur:

$$H_0 : \tau_{qq} = 0 \quad (5.24)$$

Burada $\tau_{qq} = \text{Var}(\beta_{qj})$ 'dir. Hipotez red edilirse β_q 'deki tesadüfi değişimin olduğuna karar verilir. Eğer tüm gruplar en küçük kareler tahminlerini hesaplamak için yeterli veriye sahipse, en kullanışlı test $H_0 : \tau_{qq} = 0$ hipotezinin testidir. $\hat{V}_{qqj}$, $\hat{V}_j = \hat{\sigma}^2 (X_j^T X_j)^{-1}$ 'nın q. köşegen elemanıdır.

$$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{qs} W_{sj} \quad (5.25)$$

(5.26)'da görüldüğü gibi, modelin $(J - S_q - 1)$ serbestlik dereceli χ^2 dağılan istatistiği;

$$\chi^2 = \sum_j (\hat{\beta}_{qj} - \hat{\gamma}_{q0} - \sum_{s=1}^{S_q} \hat{\gamma}_{qs} W_{sj})^2 / \hat{V}_{qqj} \quad (5.26)$$

şeklindedir. $H_0 : \tau_{qq} = 0$ hipotezinin ikinci testi, tahminin standart hatasını esas alan en çok olabilirlik tahminlerinin büyük örneklem teorisi altında normal dağılan z testidir.

$$z = \hat{\tau}_{qq} / [\text{Var}(\hat{\tau}_{qq})]^{1/2} \quad (5.27)$$

Özellikle τ_{qq} 0'a yaklaştığında, normallik yaklaşımı oldukça zayıflar. En çok olabilirlik mod etrafında simetrik değildir ve bu sebeple τ_{qq} için güven aralığı yanıltıcı olabilir.

ii. Birden Fazla Parametre İçin Hipotez Testleri:

Varyans ve kovaryans için hipotez testlerinin en genel şekli olabilirlik oran testidir. Bu testin yaygın kullanımı olan sıfır hipotezi şu şekildedir:

$$H_0 : T = T_0 \quad (5.28)$$

Alternatifi ise; $H_1 : T = T_1$ 'dir. Buradaki T_0 , T_1 'in indirgenmiş halidir. Hipotezi test etmek için her iki modelin D_0 ve D_1 deviyansları bulunur ve test istatistiği hesaplanır.

$$H_0 = D_0 - D_1 \quad (5.29)$$

Bu istatistik m serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. m iki modeldeki varyans kovaryans bileşenlerinin tahminleri sayısındaki farklılıktır. Varyans kovaryans için olabilirlik oran testi kullanılırsa, karşılaştırılacak modellerdeki açıklayıcı değişkenler aynı olmalıdır.

6. HİYERARŞİK LİNEER MODELLERİN VARSAYIMLARININ İNCELENMESİ

Standart lineer modellerdeki sonuçlar modelin yapısal ve tesadüfi kısmı ile ilgili varsayımların tutarlılığına bağlıdır. Hata terimini içeren bazı elemanlar modeldeki bir veya daha fazla tahminciyi birleştirirken, belirsizlik meydana getirir. Hiyerarşik lineer modellerde, modelin doğru tanımlanması varsayımlarına her aşamada uyulmalıdır. Ayrıca bir aşamadaki belirsizlik, diğer aşamadaki sonuçları da etkileyebilir. Çünkü 2 aşamalı denklemler korelasyon hatalarına sahip olabilir ve bir denklemdeki belirsizlik diğerini de yanıltabilir.

Modelin tesadüfi kısmındaki terimler, en küçük kareler regresyonu ile hataların eşit varyanslı ve bağımsız olduğunu varsayar. Standart hipotez testlerinde hataların normal dağılıma uyması gerekir. Hiyerarşik analizlerde hem 1. aşamada hem de 2. aşamada hatalar normal dağılmalıdır. Bu varsayımdan sapmalar 2. aşama parametrelerinin tahminini etkilediği gibi, standart hata tahminlerini ve sonuç istatistiklerini de etkileyebilir. Benzer olarak, tesadüfi 1. aşama katsayılarının tahmini ve varyans kovaryans bileşenleri yanıltıcı olabilir.

2 aşamalı modellerde 1. aşama modeli;

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \sum_{q=1}^Q \beta_{qj} X_{qij} + r_{ij} \quad (6.1)$$

Her β_{qj} için 2. aşama modeli;

$$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{qs} W_{sj} + u_{qj} \quad (6.2)$$

şeklindedir.

Bu modeller için varsayımlar aşağıda verilmiştir:

1. j. gruptaki i. birim için her r_{ij} ; 0 ortalamalı, σ^2 varyanslı bağımsız ve normal dağılıma sahiptir.
2. 2. aşama tesadüfi bileşenleri u_{qj} 0 ortalamalı τ_{qq} varyanslı çok değişkenli normal dağılıma sahiptir. Ayrıca q ve q' bileşenleri arasındaki kovaryans $\tau_{qq'}$ 'dir. Tesadüfi hata vektörleri 2. aşama birimleri (J) arasında bağımsızdırlar.
3. 1. aşama açıklayıcı değişkenleri X_{qij} , r_{ij} 'lerden bağımsızdır.
4. 2. aşama açıklayıcı değişkenleri W_{sj} , u_{qj} 'lerden bağımsızdır.

5. 1. ve 2. aşama hataları birbirinden bağımsızdır.

6. Her aşamadaki açıklayıcı değişkenler ile diğer aşamadaki tesadüfi etkiler arasındaki korelasyon 0'dır.

3., 4. ve 6. varsayımlar modelin yapısal kısmında bulunan değişkenler (x_{qij} ve w_{sj}) ile tesadüfi terimler (r_{ij} ve u_{qj}) arasındaki ilişkiler model Belirlenmesinin yeterliliği ile ilgilidir.

Bu varsayımlar $E(\hat{\gamma}_{qs}) = \gamma_{qs}$ olup olamayacağı üzerine etkilidir. 1., 2. ve 5. varsayımlar modelin tesadüfi kısmı (r_{ij} ve u_{qj}) ile ilgilidir. Bunlar $\hat{\gamma}_{qs}$ 'in standart sapma tahminlerinin tutarlılığı β_{qj}^* , $\hat{\sigma}^2$ ve $\hat{t}$ 'nin hipotez testleri ve güven aralıklarının doğruluğunda etkilidir.

6.1 Birinci Aşama Modelinin Yeterliliğinin Kontrol Edilmesi

6.1.1 Birinci Aşama Modelinin Belirlenmesi

Hiyerarşik analizde modeli tanımlamak için iki soruya ihtiyaç duyulur. Bunlar;

- x_{qij} 'nin sabit etkisi önemli mi?
- Eğimin heterojenliği ile ilgili bir kanıt var mı? ($Var(\beta_{qj}) > 0$) Eğim parametresi heterojenliğinin istatistiksel ispatı, τ_{qq} 'nin nokta tahmini ve homojenlik test istatistikleri ile bilinebilir.

Güvenilirlik çok küçük olduğunda (<0.05 gibi), tahmin etmek istediğimiz varyanslar 0'a çok yakın olur. Bu durum, varyans kovaryans bileşenleri tahmininde belirli iteratif hesaplamalara bağlı olarak nümerik zorluklara sebep olabilir. Algoritmalar yakınsamazlar ve yavaşlarlar. EM algoritması, eğer modelde oldukça fazla sayıda tesadüfi etki varsa ve veri sayısı az ise, çok sayıda iterasyona ihtiyaç duyabilir.

1. aşama katsayıları arasındaki korelasyonun kontrolü model spesifikasyonu için oldukça önemlidir. Çoklu doğrusal bağlantı veya yüksek derecede doğrusal bağlantı varsa, model basitleştirilmelidir. Bir veya daha fazla tesadüfi etkinin 0 olması, bağlantıyı azaltır.

Genelde tesadüfi olarak 1. aşama katsayılarının belirlenmesinde bazı uyarılara dikkat edilmelidir. İki aşamalı modelde varyans kovaryans bileşenlerinin sayısı $\left[\frac{m(m+1)}{2} + 1 \right]$ 'dir.

Buradaki m , modeldeki 1. aşama açıklayıcı değişkenlerinin sayısıdır. m arttıkça varyans

kovaryans bileşenlerinin sayısı da artar. Tesadüfi etkilerin sayısı arttığında, varyans kovaryans bileşenlerinin tutarlı tahmin edilebilmesi için daha fazla bilgiye ihtiyaç duyulur.

Sonuç olarak 1. aşama modelindeki bir değişkenin modelden çıkartılması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

- a. Eğim parametresinin heterojenliğine ilişkin herhangi bir kanıt olmamalı
- b. Ortalama veya sabit etkilere ait herhangi bir etki olmamalı
- c. Açıklayıcı değişkene karşılık gelen γ_{q0} 'a ait t oranı da anlamsız olmalıdır.

1. aşama açıklayıcı değişkeni ortalama olarak sıfır olmayan sabit etkiye sahip olup olmadığını kontrol etmek için, modele yeni bir açıklayıcı değişken eklenebilir ve katsayının anlamlılığına bakılır. Bu yöntem açıklayıcı değişken ve çıktı arasında lineer bir bağlantı olduğunu varsayar. Doğrusallık varsayımı 1. aşama Ampirik Bayes kalıntıları tarafından açıklayıcı değişkene karşı grafik olarak incelenebilir.

Eğer modelde y_{ij} ve açıklayıcı değişkenlerden (X_{qij}) birisi ile ilişkili ise, 1. aşama açıklayıcı değişkeni model dışında bırakılırsa β_{qj} 'lerden bir veya daha fazlasının tahmini sapmalı olabilir. Ayrıca gruptan gruba değişen ve diğer 1. aşama katsayıları ile ilgili olan değişkenin 1. aşama modeline sabit etkili olarak dahil edilir.

6.1.1.1 İkinci Aşama Tahminleri İçin Birinci Aşamanın Yanlış Belirlenmesinin Sonuçları

i. Sabit Model

1. aşama açıklayıcı değişkenlerinin belirlenmesindeki hatalar, sabitin 2. aşama açıklayıcı değişkenlerinin tahmininde de ciddi sapmalara yol açmaktadır. İki şekilde bu sapmanın önüne geçilebilir:

- ✓ 1. aşama modeline açıklayıcı değişken kendi büyük ortalaması etrafında dağılacak şekilde eklenir. Her birimin sabiti β_{0j} için bu değişkendeki gruplar arasındaki ortalama farklar düzeltilir. Sapmaların kaynağı elimine edilerek, açıklayıcı değişkenin hatasız ölçüldüğü ve bağımlı değişkenle lineer ilişkili olduğu kabul edilir.
- ✓ 1. aşama modeline açıklayıcı değişken grup ortalamaları etrafında dağılacak bir şekilde eklenir. Bu durumda yansızlık, sabitin 2. aşama değişkeni olarak grup ortalamaları tarafından düzeltilir. 2. aşama değişkenine ait eğim tesadüfi olarak görülüyorsa, ikinci yol tercih edilir.

ii. Eğim Modeli

2. aşama modelindeki eğimlerin modellenmesinde 1. aşamanın yanlış belirlenmesinin sonuçları sabit modelden biraz daha karmaşıktır. Eğim modelindeki γ katsayılarının etkilerini tanımlamak için veri yeniden analiz edilir ve 1. aşama açıklayıcı değişkeni eklenir. Bu koşullar altında sabit için model herhangi bir etkiye sahip değildir. Diğer taraftan eğim modelindeki tahmini etkiler oldukça farklıdır. 1. aşama açıklayıcı değişkeninin ihmal edilmesi γ_{10} 'ın tahmininde etkilidir. Çünkü diğer açıklayıcı değişkenler ve eklenen değişken birbirleriyle ve bağımlı değişkenle pozitif ilişkilidir.

γ_{11} ve γ_{12} tahminlerindeki sapmanın kaynağı daha karmaşıktır. Bu iki katsayı, 2. aşama değişkenleri ve 1. aşama değişkenleri arasındaki etkileşimi kapsar. 1. aşama değişkeninin ihmal edilmesinin, aşamalar arası etkileşimler üzerinde etkili olması için 3 koşul sağlanmalıdır. Bunlar:

- a. Modeldeki diğer açıklayıcı değişkenler kontrol edildikten sonra, modelden dışlanan değişken Y ile ilişkili olmalıdır.
- b. Modelde dışlanan değişken modelde var olan bir X değişkeni ile ilişkili olmalıdır.
- c. Modelden dışlanan değişken ve X arasındaki ilişki birimden birime değişmelidir ve X 2. aşama açıklayıcı değişkenleri ile ilişkili olmalıdır.

1. koşul modelden dışlanan değişkenin ve diğer açıklayıcı değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki regresyon analizi incelenebilir. 2. ve 3. koşul ise modelde dışlanan değişken ile açıklayıcı değişken arasında tesadüfi katsayılı model kullanılarak araştırılabilir.

6.1.1.2 Birinci Aşama Tahminleri İçin İkinci Aşamanın Yanlış Belirlenmesinin Sonuçları

Dışlanan 2. aşama değişkeni 1. aşama değişkeni ile ilişkili ise, 1. aşama değişkeni için katsayı sapmalı tahmin edilecektir, yani $Cov(u_{qj}, X_{q'ij}) \neq 0$ 'dır. Bu problem 2. aşama modelinde ayrıntılara inmeden çözülebilir. 2. aşama tesadüfi etkisi ve 1. aşama tahmincileri arasındaki kovaryans, grup ortalamaları $\bar{X}_{qj}$ ve tesadüfi etki arasındaki kovaryans haline dönüşür. 1. aşama açıklayıcı değişkeninin grup ortalamaları etrafında dağılmasıyla kovaryans yok edilebilir. 2. aşama modellerine X_{qij} 'lerin açıklayıcı değişken olarak dahil edilmesi ile kovaryans 0'a eşit olabilir.

Bu yaklaşımlar sabit 1. aşama katsayıları üzerindeki ihmal edilen 2. aşama açıklayıcı değişkenlerinin etkisi için test yapılmasını önermektedir. 1. aşama katsayıları ile grup

ortalamaları etrafında dağılan ya da dağılmayan bir model kurulması gerekir. Model sonucunda 1. aşama açıklayıcı değişkeni ile ilişkili 1. aşama sabit katsayıları değişmiyorsa, model sapmaya neden olmuyor denilebilir (Raudenbush ve Bryk, 2002).

6.1.2 Birinci Aşama Tesadüfi Etkiler Hakkında Varsayımların Araştırılması

i. Değişen Varyanslılık Durumu:

1. aşama modelindeki hataların, eşit σ^2 varyansa sahip olduğu varsayılır. 1. aşama varyansı 2. aşama birimlerinde tesadüfi olarak değiştiği halde varyanslarının eşit olduğunu varsayarsak, 2. aşama katsayıları ile ilgili sonuçlar daha iyimser olacaktır. Diğer taraftan, varyanslar 1. aşama veya 2. aşama açıklayıcı değişkenlerinin fonksiyonu olarak bağımlı ise, sonuçlar daha doğru olabilir. Değişen varyanslılığın çeşitli nedenleri olabilir. Bunlar:

1. Bir veya birden fazla önemli 1. aşama açıklayıcı değişkeni model dışında bırakılmış olabilir. Eğer bir değişken gruplar karşısında eşit olmayan varyansla dağılıyorsa, 1. aşama varyanslarında heterojenliğe neden olabilir.
2. Tesadüfi veya tesadüfi olmadan değişen 1. aşama açıklayıcı değişkenin etkisi sabit olarak ele alınıyorsa ya da modelden dışlanmışsa değişen varyanslılık durumu ortaya çıkar.
3. Bir veya birden fazla birim kötü veriye sahip olabilir. Örneğin; basit bir kod hatası bir veya daha fazla grup içinde şişirilmiş varyansa sebep olabilir, bu da varyansların olduğundan büyük hesaplanmasına neden olabilir.
4. Normal olmayan yani basık verilerde varyansın heterojenliği için anlamlı test istatistikleri ortaya çıkabilir. Parametrik testler nonnormalliğe oldukça hassastır ve basıklık varyansın heterojenliği olarak gösterilebilir.

Bryk ve Raudenbush tarafından ileri sürülen yöntem, 1. aşama kalıntı varyanslarının gruplar arasındaki farklılıklardan yararlanarak heteroskedastinin (Değişen varyans) belirlenmesidir. Bu yöntem her bir grup içi kalıntının en küçük kareler tahminine bağlıdır. Yani en küçük kareler kalıntılarına bağlıdır. Bu yöntem ancak tüm grup sayısı açıklayıcı değişken sayısından fazla ise uygulanabilir. 1. aşama açıklayıcı değişkenlerinin sayısı dahil edilmekte diğer değişkenlerin sayısı ise önemsenmemektedir. Yani bu yöntemin uygulanabilmesi için r açıklayıcı değişken sayısı olmak üzere, minimum $n_j - r - 1$ tane (örnek büyüklükleri n_j , 10 ya da daha fazla) grup olması gereklidir. Tüm bu gruplara ayrı ayrı 1. aşama açıklayıcı değişkenleri ile en küçük kareler regresyonu uygulanır. J grup için tahmin edilen kalıntı

varyansları S_j^2 , serbestlik derecesi ise $df_j = n_j - r - 1$ 'dir. Her j grubu için dağılımın standart ölçüsü;

$$d_j = \frac{\ln(S_j^2) - [\sum df_j \ln(S_j^2) / \sum df_j]}{(2/df_j)^{1/2}} \quad (6.3)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Homojenlik için yaygın kullanılan ve basit olan istatistik testi (6.4)'deki gibidir;

$$H = \sum d_j^2 \quad (6.4)$$

J toplam grup sayısını göstermek üzere H, J-1 serbestlik dereceli χ^2 dağılımı gösterir. Veri normal ve her birimdeki örnek büyüklükleri 10 ve daha fazla ise bu test uygundur.

H testinin avantajı ise, sadece gruplar içi regresyon modeline (1.aşama modeline) bağlı olmasıdır. 2. aşama değişkenleri ve 2. aşama tesadüfi etkilerinin bunda herhangi bir etkisi yoktur, bu yüzden burada sadece 1. aşama modelinin yapısı kontrol edilir. Yine de H ve d_j 'ye ait dağılım 1. aşama varyanslarının normalliğine bağlıdır. Kalıntılar sabit varyansa sahip olsa bile, bu kalıntıların daha kalın kuyruklu dağılımları daha yüksek H değerine neden olur. Bu yüzden H anlamlı sonuçlara neden olduğunda, d_j değerleri incelenerek mümkün heteroskedastite örnekleri ve en küçük kareler yöntemi ile hesaplanan gruplar içi kalıntılarının dağılımı normallik için araştırılmalıdır (Snijders, 2003).

Olabilirlik oran testi 1. aşamadaki heterojenliği belirlemede kullanılabilir. Homojen varyanslı modelin daha genel bir alternatif ile karşılaştırılması için sınırlandırılmış model kullanılabilir.

Heteroskedastitenin test edilebilmesi için bağımsız değişken ya da öngörü değerlerine karşı kalıntı grafiklerinden yararlanılabilir.

Değişen varyanslılığı düzeltmenin en iyi yolu, bağımlı değişkenlere dönüşümler uygulamaktır (Gujarati, 2001). Bunlar karekökünü alma, logaritmasını alma gibi dönüşümlerdir. Tüm bu dönüşümler uygulandıktan sonra kalıntı ve serpilme grafikleri çizilerek dönüşümlerin heteroskedastiteyi yok edip etmediğine bakılır.

ii. Normallik Varsayımı:

1. aşamada gözlenen bağımlı değişken sürekli ve lineer bir modeldir. Normallik varsayımı yine de başarısız olabilir. Bu durumda 1. aşamadaki hataların normal olmaması 2. aşama etkilerinin tahmininde sapmalı olmayacak, fakat aşamalardaki güven aralıkları ve hipotez

testlerinin hesaplanmasında standart hatalar sapmalı olacaktır. Eğer J , birim sayısı, büyükse birimler karşısında kalıntılar için olasılık grafiğine bakılır. Bağımlı değişkendeki veya bir veya daha fazla açıklayıcı değişkenlerdeki dönüşüm, hata dağılımı normalliğini düzeltir.

6.2 İkinci Aşama Modelinin Yeterliliğinin Kontrol Edilmesi

6.2.1 İkinci Aşama Modelinin Belirlenmesi

2. aşama eşitliklerinde $(Q+1)$ tane hata terimi, açıklayıcı değişkenlerin korelasyonsuz olduğunu varsayar. Bunun anlamı ihmal edilen açıklayıcı değişkenlerin modelde bulunan değişkenlerle ilişkisiz olduğudur. Bu varsayımın doğal sonucu tüm açıklayıcı değişkenlerin (w_{sj}) hatasız ölçüldüğüdür. Eğer modelde bulunan 2. aşama açıklayıcı değişkenlerin bir veya daha fazlası anlamlı korelasyona sahipse, bir veya daha fazla 2. aşama katsayılarının tahmini sapmalı olacaktır. Sapmanın derecesi ihmal edilen değişkenin kestirim gücüne ve modeldeki diğer değişkenlerle ilişkisinin büyüklüğüne bağlıdır. Bir modelin yanlış kurulması diğer modelin de yanlış (sapmalı) kurulmasına neden olabilir. Bu durum hatalar arasında korelasyona sebep olur.

$\hat{\beta}_{0j}$ ve $\hat{\beta}_{1j}$ arasındaki örnek kovaryansı ile β_{0j} ve β_{1j} gerçek değerlerinin kovaryansının toplamı 0 ise, eğim ve sabit modeller için katsayı tahminleri birbirinden bağımsız olur. Bu koşul pratikte ortaya çıkmamasına rağmen, Belirlenmesi testinin temeli olarak kullanılır.

2. aşama eşitliğindeki açıklayıcı değişkenlerdeki tahmin hataları diğer 2. aşama eşitliklerinde de hatalı tahminlere yol açabilir. Aynı açıklayıcı değişken tüm $(Q+1)$ denklemlerinde kullanılırsa, iki eşitlik arasındaki korelasyon hataları önlenabilir. Her eşitlikte aynı bağımsız değişkenler varsa ve veri tamamen dengeli ise, eğim modelindeki 2. aşama katsayı tahminleri sabit modelde tahmin edilen katsayılardan asimtotik olarak bağımsız olacaktır.

Hata ölçümü modelin yanlış belirlenmesi olarak görülebilir. Genel olarak 2. aşama açıklayıcı değişkenleri hatalı ölçülürse, onun katsayısı ve diğer 2. aşama katsayıları sapmalı olacaktır. Sapmanın derecesi, bağımsız değişkenin açıklayıcı gücüne, ölçümlerde yapılan hatanın büyüklüğüne ve açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyona bağlıdır.

6.2.2 İkinci Aşama Tesadüfi Etkileri Hakkındaki Varsayımların Araştırılması

i. Değişen Varyanslılık Durumu:

2. aşama tesadüfi etkilerinin dağılımının J tane birim karşısında homojen olduğu varsayılır. Sabit etki parametrelerinin tahmininde, homojenlik varsayımına uyulmadığı durumda bu

etkilerin tahminini optimalden daha az ağırlıklandırmaya sahip olur. Bu şekilde 2. aşama katsayıları tahmin edilir ve sapmasız olur.

Tesadüfi etkiler terimlerinde, sabit varyanslılık varsayımından sapmalar sonucunda β_j^* 'deki çekilme yanlış olabilir ve bu durum β_j tahmini için ortalama hata kareleri artışını sağlayabilir. T 'deki eşit dağılım alternatif hipotezlere karşı test edilebilir. T matrisinin eşit olup olmadığına bakmak için en çok olabilirlik oran testi kullanılır.

ii. Normallik Varsayımı:

Sabit etkilerin tahmini 2. aşamada normallik varsayımındaki başarısızlıklardan etkilenmez. 2. aşama tesadüfi etkilerin dağılımı kalın kuyruklara sahipse yani basıksa, bu durum normalliğe bağlı olan hipotez testlerinin ve güven aralıklarının geçerliliğini etkiler.

2. aşama normallik varsayımının kontrol edilmesi karmaşıktır ve 2. aşama çıktıları β_{qj} tarafından direk gözlemlenemezler. Ampirik Bayes kalıntıları grafikte gösterilebilir, sapan değerlerin araştırılmasında bu grafiklerden yararlanılabilir. Onların marjinal varyansları normal dağılımdan gelen normal sıra istatistiklerinin beklenen değeri ile standardize edilip karşılaştırılabilir. Her gruptaki örnek büyüklükleri n_j küçük olduğunda, varyans tahminleri belirsiz olacaktır.

Normallik varsayımının kontrolü, $Q+1$ tane korelasyonlu tesadüfi etkinin her birimde tahmin edilmesiyle yapılabilir. Her birimdeki Mahalanobis uzaklık ölçüsü*, normallikten gelen tesadüfi etkilerin ayrışma derecesini ve sapan değerlerini bulmaya yardımcı olabilir. 1. aşamada örnek büyüklükleri yeterince büyük verilirse, bu istatistik $(Q+1)$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına uyar. Beklenen sıra istatistiklerine karşı gözlenen Mahalanobis uzaklık istatistiklerinin grafik yardımı ile normal dağılıma uyup uymadığına bakılabilir.

6.2.3 Robust Standart Hataları

2. aşama tesadüfi etkilerinin dağılımı kalın kuyruklara sahipse, sapmalardan daha az etkilenen robust tahmincilerinden yararlanılabilir. Hiyerarşik modellerde, sabit etkiler ile ilgili sonuçlar

* Mahalanobis uzaklığı: $u_j^{*T} V_j^{-1} u_j^*$ şeklindedir ve u_j^* , her J grubu için tesadüfi etki u_j 'nin ampirik bayes tahmin matrisidir, V_j ise bu vektörün hata dağılımıdır. $V_j = \sigma^2 (X_j^T X_j)^{-1} + T - \text{var}(W_j \hat{\gamma})$ 'dır. $\text{var}(W_j \hat{\gamma})$, $(W_j \hat{\gamma})$ 'nın $P+1$ tane elemanına ait dağılım matrisidir.

her aşamadaki tesadüfi etkilerin dağılımı ile ilgili varsayımlara bağlıdır. En yüksek aşamadaki birim sayısı büyükse, robust standart hatalarının tahmini analiz için uygundur.

i. En Küçük Kareler Yöntemi Altında Robust Standart Hataları

Robust standart hatalarının mantığını anlamak için iki aşamalı modelde tek bir açıklayıcı değişken X_{ij} 'nin olduğunu düşünelim. Bu durumda birleştirilmiş model aşağıdaki şekli alır:

$$Y_{ij} = \gamma_0 + \gamma_1 X_{ij} + e_{ij} \quad (6.5)$$

Matris notasyonu ile gösterecek olursak;

$$\begin{pmatrix} Y_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ Y_{n_jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{1j} \\ 1 & . \\ 1 & . \\ 1 & . \\ 1 & X_{n_jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ e_{n_jj} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Kısaca $Y_j = X_j \gamma + e_j$ şeklindedir.

En küçük kareler ve normallik varsayımları altında $e_j \sim N(0, \sigma^2 I_{n_j})$ olur. En küçük kareler tahmincileri;

$$\hat{\gamma} = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J X_j^T Y_j \quad (6.7)$$

$$Var(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J X_j^T [Var(Y_j)] X_j \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \quad (6.8)$$

şeklindedir. En küçük kareler varsayımları altında, $Var(Y_j) = \sigma^2 I$ 'dır. Buna göre $Var(\hat{\gamma})$ şu şekilde de yazılabilir:

$$Var(\hat{\gamma}) = \sigma^2 \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \quad (6.9)$$

Y'nin varyansı bilinmeyen bir yapıya sahipse ve en küçük kareler varsayımları sağlanmıyorsa, her 2. aşama j birimi için sapmasız tahminci şu şekildedir:

$$\widehat{Var}(Y_j) = (Y_j - X_j \hat{\gamma})(Y_j - X_j \hat{\gamma})^T \quad (6.10)$$

Robust varyans tahmincisi;

$$\widehat{Var}(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J X_j^T (Y_j - X_j \hat{\gamma}) (Y_j - X_j \hat{\gamma})^T X_j \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \quad (6.11)$$

şeklindedir. Bu tahmin J grup için tutarlıdır. e_j ile ilgili en küçük kareler varsayımları hatalı olsa bile, J oldukça büyük olduğunda tahminci gerçek standart hataya yakınsar. $(\hat{\gamma}_{qs} - \gamma_{qs}) / [\widehat{Var}(\hat{\gamma}_{qs})]^{1/2}$ her büyük J için 0 ortalamalı, birim varyanslı normal dağılıma sahiptir. Robust tahminlerinden elde edilen kalıntılar e_{ij} normal dağılmasada, bu yöntem güven aralıkları ve testlerin duyarlı hesaplanmalarına olanak verir.

ii. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi Altında Robust Standart Hataları

Hiyerarşik lineer modellerde γ_{qs} tahminleri için genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi kullanılabilir. Kalıntılar (6.12)'deki gibidir:

$$e_{ij} = u_{0j} + u_{1j} X_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (6.12)$$

Matris notasyonu ise; $e_j = X_j u_j + \varepsilon_j$ 'dir. Buradaki u_j 2. aşama tesadüfi etkilerin vektörüdür.

Hiyerarşik lineer model varsayımları ise;

$$u_j \sim N(0, T) \quad \varepsilon_j \sim N(0, \sigma^2 I_{n_j}) \quad (6.13)$$

ve

$$Var(Y_j) = Var(X_j u_j + \varepsilon_j) = V_j = X_j T X_j^T + \sigma^2 I_{n_j} \quad (6.14)$$

ile gösterilir. Tüm bu varsayımlara dayanarak, genelleştirilmiş en küçük kareler tahminleri;

$$\hat{\gamma} = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} Y_j \quad (6.15)$$

şeklinde hesaplanır. Genelleştirilmiş en küçük kareler tahminleri T ve σ^2 'nin yerine geçer.

Bu tahminlerin yaklaşık olarak varyansı:

$$Var(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} [Var(Y_j)] X_j V_j^{-1} \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \quad (6.16)$$

şeklindedir. Genelleştirilmiş en küçük kareler varsayımlarına göre $Var(Y_j) = V_j$ olur. $Var(\hat{\gamma})$

'yı daha basit bir şekilde de şöyle hesaplarız:

$$Var(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \quad (6.17)$$

Genelleştirilmiş en küçük kareler varsayımları hatalı ve Y'nin varyansı bilinmeyen bir yapıda olduğunda robust varyans tahmincileri (6.18)'deki gibidir:

$$\widehat{Var}(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \times \sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} (Y_j - X_j \hat{\gamma})(Y_j - X_j \hat{\gamma})^T X_j V_j^{-1} \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \quad (6.18)$$

Bu durumda robust varyans tahmincisi J için tutarlıdır. Tesadüfi etkilerin dağılımı ve kovaryans yapısı ile ilgili hiyerarşik lineer model varsayımları hatalı olsa bile, güven aralıkları ve hipotez testleri doğru olacaktır. Ayrıca, robust ve normal modelden elde edilen tahmin değerleri arasında büyük farklar olduğu durumda modelin yanlış belirlenme olasılığı oldukça fazladır.

6.3 Örneklem Küçük Olduğunda Çıkarsamaların Geçerliliği

“*Tamamen dengeli veri (completely balanced data)*”^{*} oldukça sınırlandırılmış bir veri setidir. Bu tip veride sabit etkiler hakkındaki çıkarsamalar için küçük örnek teorisi geçerlidir. Sabit etkilerin nokta tahminleri varyans bileşenlerine bağlı değildir, bu yüzden de sabit etkilerle ilgili sonuçların dengeli veride hatasız olması mümkündür.

Dengesiz veriler ise, büyük örnek teorisine bağlıdır. Sabit etkiler ve sabit etkilerin standart hataları modeldeki varyans kovaryans bileşenlerinin her biri nokta tahminleri ile yakından ilgilidir. Sabit etkilerin ve varyans kovaryans bileşenlerinin nokta tahminlerinin karşılıklı ilişkisinden dolayı, tahmincilerin örnekleme dağılımları tam olarak bilinemez. Fakat en çok olabilirlik tahminleri kullanıldığında, en çok olabilirlik tahmincilerinin büyük örnek özellikleri bilinir.

6.3.1 Sabit Etkiler Üzerindeki Çıkarsamalar

Sabit etkiler örnek büyüklüğüne bağlı olmadığından dolayı bu etkilerin tahminleri sapmasızdır. Dengesiz durumlarda, sabit etkilerin standart hata tahminleri genelde küçüktür ve normal dağılıma dayanan güven aralıkları oldukça büyüktür.

^{*} Tamamen dengeli veri oldukça sınırlandırılmış bir veri setidir. 2 aşamalı hiyerarşide, aşağıdaki özellikler geçerli olduğunda tamamen dengeden söz edilebilir:

- Birimler içindeki örnek genişliği eşit olmalıdır.
- Her birim içinde aynı 1. aşama açıklayıcı değişken değerleri bulunmalıdır.
- Q+1 tane 2.aşama eşitliği için, aynı açıklayıcı değişken setleri kullanılmalıdır.
- 1.aşama ve 2.aşama varyans bileşenleri tüm birimler için sabit olmalıdır.

Tesadüfî etkili tek yönlü ANOVA modelinde γ_{00} nokta tahmini:

$$\hat{\gamma}_{00} = \sum (\hat{V}_j + \hat{\tau}_{00})^{-1} \bar{Y}_{.j} / \sum (\hat{V}_j + \hat{\tau}_{00})^{-1} \quad (6.19)$$

şeklindedir. Eşitlikteki $\hat{V}_j$ ve $\bar{Y}_{.j}$:

$$\hat{V}_j = \hat{\sigma}^2 / n_j \quad (6.20)$$

$$\bar{Y}_{.j} = \sum Y_{ij} / n_j \quad (6.21)$$

şeklinde hesaplanır. $\hat{\gamma}_{00}$ 'ın tahmin edilen standart hatası;

$$\left[\hat{V}(\hat{\gamma}_{00}) \right]^{1/2} = \left[\sum (\hat{V}_j + \hat{\tau}_{00})^{-1} \right]^{-1/2} \quad (6.22)$$

gibidir. Genelde γ_{00} 'ın nokta tahmini ve tahmin edilen standart hatası σ^2 ve τ_{00} 'ın tahminlerinin bir fonksiyonudur. Fakat dengeli durumda bu doğru değildir.

$$\hat{\gamma}_{00} = \sum \bar{Y}_{..} / J \quad (6.23)$$

(6.23)'ten de görüleceği gibi dengeli durumlarda $\hat{\gamma}_{00}$, σ^2 ve τ_{00} 'a bağlı değildir. Ayrıca $V(\hat{\gamma}_{00})$ sadece $V + \tau_{00}$ tahminine ihtiyaç duyar ve bileşenlere ayrılmaz. Böylece dengeli durumlarda;

$$(\hat{\gamma} - \gamma_0) / (MS_{between} / nJ)^{1/2} \quad (6.24)$$

formülü kullanılır. Bu $H_0: \gamma = \gamma_0$ hipotezi altında $(J-1)$ serbestlik dereceli t dağılımına sahiptir.

Dengesiz durumlarda σ^2 ve τ_{00} en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilmişse büyük örneklemelerde dağılım normaldir ve Z testi kullanılır. Uygulamada t dağılımı da uygun olabilir.

$$Z = (\hat{\gamma} - \gamma_0) / [V(\hat{\gamma})]^{1/2} \quad (6.25)$$

$V(\hat{\gamma}_{00})$ tahmini negatif sapmalıdır. $\hat{\gamma}_{00}$ 'nın gerçek varyansı:

$$Var(\hat{\gamma}_{00}) = E_m \left[Var_c(\hat{\gamma}_{00} | \hat{\tau}_{00}, \hat{\sigma}^2) \right] + Var_m \left[E_c(\hat{\gamma}_{00} | \hat{\tau}_{00}, \hat{\sigma}^2) \right] \quad (6.26)$$

gibi hesaplanır. E_m ve Var_m , $\hat{\tau}_{00}$ ve $\hat{\sigma}^2$ 'nin birleşik dağılımının; E_c ve Var_c , $\hat{\tau}_{00}$ ve $\hat{\sigma}^2$ verildiğinde $\hat{\gamma}_{00}$ 'ın koşullu dağılımının yerini alır. En çok olabilirlik tahmini altında sapma, dengeli durumda 0'dır ve dengesiz durumlarda J arttıkça 0'a yakınsar. Bazı küçük örneklemelerde, bu terim çok küçük olacaktır.

2. aşamada J örneklem büyüklüğü verildiğinde, $\hat{V}(\hat{\gamma}_{00})$ için sapmanın determinant büyüklüğü farklı ağırlıklarda $\hat{\gamma}_{00}$ tahminlerine göre hassastır. τ_{00} 0'a yaklaştığında, ağırlıkları n_j/σ^2 'ye yaklaşacaktır. $\hat{\gamma}_{00}$ için ağırlıklı ortalama $\sum n_j \bar{Y}_{.j} / \sum n_j$ olur. τ_{00} 0'dan farklı olduğunda ise $\hat{\gamma}_{00} = \sum \lambda_j \bar{Y}_{.j} / \sum \lambda_j$ ve buradaki $\lambda_j = \tau_{00} / [\tau_{00} + (\sigma^2/n_j)]$ şeklinde hesaplanır. τ_{00} arttığında λ_j 1'e yaklaştığında $\hat{\gamma}_{00}$ aritmetik ortalama $\sum \bar{Y}_{.j} / J$ 'ye yaklaşacaktır. Eğer ağırlıklı ortalama ile aritmetik ortalama sonuçları tutarsızsa, sapma büyük olacaktır ve $V(\hat{\gamma}_{00})$ hiyerarşik tahmini oldukça küçük olacaktır.

Bu analizler aşağıdaki genel sonuçlara sahiptir:

1. γ hakkındaki hipotez testlerinde normal dağılım yerine t dağılımı kullanılmalıdır.
2. $\hat{\gamma}$ tahminlerinin ağırlıklı ortalamalı yapıya karşı duyarlı olup olmadığı denenir ve duyarsız ise $V(\hat{\gamma})$ standart hata tahmini olarak kullanılır.
3. Eğer sonuçlar ağırlıklı yapıya göre duyarlı ise $V(\hat{\gamma})$ 'ya bağlı t testleri daha esnektir. Hatasız sonuçlara Bayes yaklaşımı ile ulaşılabilir. Oldukça kapsamlı hesaplamalara ihtiyaç duyan Bayes tahminleri γ_s ve standart hatasının tahmininde σ^2 ve T tahminlerindeki belirsizliği dikkat alır (Raudenbush ve Bryk, 2002).

6.3.2 Varyans Bileşenleri Hakkındaki Çıkarsamalar

σ^2 ve T en çok olabilirlik tahminlerinin büyük örneklem özelliklerine bağlıdır. σ^2 'nin nokta tahmini oldukça doğrudur. Eğer σ^2 'nin her birimde eşit olduğunu varsayarsak, onun tahmininin kesinliği büyük örnek büyüklüğüne ($N = \sum n_j$) bağlı olacaktır.

σ^2 'nin 2. aşama birimlerinde değiştiğini varsayarsak, tahmin edilen her σ^2 'nin gözlem sayısı n_j 'nin yeterince büyük olması gerekmektedir. Diğer taraftan σ_1^2 ve σ_2^2 iki grupta tahmin edilirse, σ^2 tahminlerinin doğruluğu ve güvenilirliklerin anlamlılığı her gruptaki toplam örnek büyüklüğüne bağlıdır. T terimlerindeki tahminin doğruluğu 2. aşama birimi J ile ilgilidir. Özellikle varyansın tahmini 0'a yakınsadığında, büyük örneklem büyüklüğüne ihtiyaç duyulur.

T'nin elemanlarını test etmek için 3 tip test vardır. Bunlar; tek değişkenli χ^2 testi, tahminin kendi standart sapmasına oranını temel alan tek değişkenli test ve en çok olabilirlik oran testidir. Tüm bu testler büyük örnekler için geçerlidir. T elemanlarının tahmin edilen standart hataları için kullanılan testler, örnek genişliği küçük olduğu zaman güvenilmezdir. Bu testlerin merkezlerinde tahminlerin güven aralığı vardır ve model hakkındaki olasılık simetrik olduğunda anlamlıdır. Çoğu durumda olasılık oldukça çarpıktır. Bu durum özellikle varyans çok küçük olduğu durumlarda doğrudur. Genelde küçük varyans bileşenleri ve büyük veriler, testin dayandığı büyük örnek normallik yaklaşımının doğrulanmasına ihtiyaç duyarlar (Reise ve Duan, 2003).

6.3.3 Birinci Aşama Tesadüfi Katsayıları Hakkında Çıkarsamalar

Tesadüfi katsayı β_j 'lerin her birimdeki hipotez testleri ve güven aralıkları için ayrı ayrı en küçük kareler tahminlerini kullanmak mümkündür. Örnek büyüklüğü her birimde yeterince büyük olmadıkça aralıklar geniş, testler ise yanıltıcı olacaktır. Alternatif; Ampirik Bayes tahminleri β_j^* üzerine kurulan güven aralıkları ve hipotez testleridir. Bununla birlikte bu testler ve güven aralıkları varyans kovaryans bileşenleri hakkında belirsizlik yansıtmaz. Böylece σ^2 ve T kesin olarak belirliyse aralıklar küçük, testler ise oldukça esnek yani anlamlı olacaktır.

7. ÜÇ AŞAMALI MODELLER

Üç aşamalı modeller psikoloji, sosyoloji ve eğitim ile ilgili konular üzerine yapılan araştırmalarda kullanılır. Üç aşamalı veri yapısına örnek olarak; coğrafi bölgeler içindeki evler, evlerin içindeki bireyler, farklı endüstriler içindeki firmalar, firmaların içindeki işçiler ya da bölgeler içindeki okullar, okullar içindeki öğrenciler verilebilir.

7.1 Tam Koşulsuz Model (A Fully Unconditional Model)

Üç aşamalı modellerin en basiti; hiçbir aşamada açıklayıcı değişken içermeyen tam koşulsuz modeldir. Model çıktı ölçüsündeki değişikliğinin üç farklı aşamaya karşı nasıl olduğunu gösterir. Eğitim örneğini ele alırsak 1. aşama öğrenciler, 2. aşama sınıflar, 3. aşama okullardır.

1. aşama modeli:

$$Y_{ijk} = \pi_{0jk} + e_{ijk} \quad (7.1)$$

şeklindedir. Formüldeki Y_{ijk} k. okulun j. sınıfındaki i. öğrencinin başarısı, π_{0jk} k. okuldaki j. sınıfın ortalama başarısı, e_{ijk} tesadüfi öğrenci etkisi yani sınıf ortalamasından gelen ijk . öğrenci puanının sapmasıdır. Bu etkiler 0 ortalama σ^2 varyansla normal dağılıma uyar.

i, j, k indisleri şunları ifade eder:

$i = 1, 2, \dots, n_{jk}$ k. okuldaki j. sınıfta bulunan öğrenciler

$j = 1, 2, \dots, J_k$ k. okuldaki sınıflar

$k = 1, 2, \dots, K$ okullar

2. aşama modelinde, her sınıf ortalaması π_{0jk} bağımlı değişkenin bazı okul ortalamaları etrafında tesadüfi olarak değiştiğini belirtir.

$$\pi_{0jk} = \beta_{00k} + r_{0jk} \quad (7.2)$$

Burada β_{00k} k. okuldaki ortalama başarı, r_{0jk} tesadüfi sınıf etkisi yani okul ortalamasından gelen jk . sınıf ortalamasının sapmasıdır. Bu etkilerin 0 ortalama ve τ_π varyansla normal dağılıma uyduğu varsayılır. K tane okulun her birindeki sınıflar arasındaki değişikliğinin aynı olduğu kabul edilir.

3. aşama modeli:

$$\beta_{00k} = \gamma_{000} + u_{00k} \quad (7.3)$$

şeklinde gösterilir. 3. aşama modeli okullar arasındaki değişikliği ifade eder. Okul ortalamaları β_{00k} , büyük ortalama etrafında tesadüfi olarak değişir. Burada γ_{000} büyük ortalama, u_{00k} tesadüfi okul etkisi yani büyük ortalamadan gelen k . okul ortalamasının sapmasıdır. u_{00k} 0 ortalamalı τ_β varyanslı normal dağılıma sahiptir.

7.1.1 Varyans Ayrıştırması ve Güvenilirlikleri

Basit üç aşamalı modellerde Y_{ijk} çıktısındaki toplam varyans üç bileşene ayrılır. Bunlar; 1. aşamadaki σ^2 (sınıflarda bulunan öğrenciler arasındaki), 2. aşamadaki τ_π (okullardaki sınıflar arasında) ve 3. aşamadaki τ_β (okullar arasındaki) varyanslardır. Varyans oranını şu şekilde yazarız:

$$\begin{aligned} \sigma^2 / (\sigma^2 + \tau_\pi + \tau_\beta) \\ \tau_\pi / (\sigma^2 + \tau_\pi + \tau_\beta) \\ \tau_\beta / (\sigma^2 + \tau_\pi + \tau_\beta) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Burada birincisi, sınıflar içindeki öğrenciler arasındaki varyans oranını, ikincisi, okullardaki sınıflar arasındaki varyans oranını ve üçüncüsü ise okullar arasındaki varyans oranını göstermektedir.

İki aşamalı modeldeki gibi en küçük kareler tahmin katsayılarının güvenilirliğini inceleyebiliriz. Ayrıca güvenilirlikler iki aşamalı modellerde tahmin edilir. 2. aşamada her jk . sınıf için güvenilirlik;

$$\text{Güvenilirlik } (\hat{\pi}_{0jk}) = \tau_\pi / [\tau_\pi + \sigma^2 / n_{jk}] \quad (7.5)$$

şeklinde hesaplanır. Yukarıdaki eşitlik aynı okuldaki sınıflar arasında ayırımı belirlemede sınıf örnek ortalamasının güvenilirliğidir. 3. aşamadaki k tane okul için;

$$\text{Güvenilirlik } (\hat{\beta}_{00k}) = \frac{\tau_\beta}{\tau_\beta + \left\{ \sum [\tau_\pi + \sigma^2 / n_{jk}]^{-1} \right\}^{-1}} \quad (7.6)$$

ile hesaplanır. Güvenilirlik $(\hat{\beta}_{00k})$; gerçek ortalamanın tahmini olarak okulun örnek ortalamasının güvenilirliğidir.

7.2 Koşullu Modeller (Conditional Models)

Her aşamadaki varyans (değişkenlik), her bir aşamada ölçülen değişkenler tarafından açıklanabilir ve hesaplanabilir. Bu modelde öğrenci, sınıf ve okul özellikleri açıklayıcı değişkenler olarak kullanılır. Ayrıca sınıf ve okul aşamalarındaki ilişki birimler arasında tesadüfi olarak değişebilir. Öğrencinin cinsiyetinin akademik başarı ile ilişkili olduğunu varsayalım. Cinsiyet etkisini gösteren 1. aşama regresyon katsayısı, 2. aşamadaki öğretmen ve sınıf özelliklerine ait değişkenlere bağlı olarak değişebilir. Benzer şekilde regresyon katsayısı 3. aşamada (okul aşamasında) tesadüfi olarak değişebilir. 3. aşama sabit terimleri tesadüfidir, regresyon eğimleri ise okullar arasında farklılaşabilir.

Genel 1. aşama modeli; her sınıf içindeki öğrenci başarısını 1. aşama açıklayıcı değişkenlerinin ve 1. aşama tesadüfi hatasının bir fonksiyonu olarak modellenir.

$$Y_{ijk} = \pi_{0jk} + \pi_{1jk}a_{1ijk} + \pi_{2jk}a_{2ijk} + \dots + \pi_{pjk}a_{pijk} + e_{ijk} \quad (7.7)$$

Eşitlikteki;

Y_{ijk} k. okulun j. sınıfındaki i. öğrencinin başarısı;

π_{0jk} k. okuldaki j. sınıf için sabit;

a_{pijk} başarıyı etkileyen $p = 1, \dots, P$ tane açıklayıcı değişken (öğrenci özellikleri);

π_{pjk} her öğrenci özelliği a_p ve jk sınıfındaki çıktı arasında birleşme etkinliğini gösteren 1. aşama katsayıları;

e_{ijk} 1. aşama tesadüfi etkisi yani 1. aşama modelinde tahmin edilen puandan gelen ijk . öğrenci puanının sapmasıdır. Kalıntıların 0 ortalama ve σ^2 varyansla normal dağıldığı varsayılır.

Genel 2. aşama modeli; sabit terimi içinde bulunduran öğrenci aşaması modelindeki regresyon katsayılarının her biri ya sabit ya tesadüfi olarak değişen ya da tesadüfi olarak değişmeyen şeklindedir. Her sınıf etkisi π_{pjk} ;

$$\pi_{pjk} = \beta_{p0k} + \sum_{q=1}^{Q_p} \beta_{pqk} X_{qjk} + r_{pjk} \quad (7.8)$$

şeklinde hesaplanır. Formüldeki,

β_{p0k} sınıf etkisi π_{pjk} modelindeki k tane okul için sabit;

X_{qjk} sınıf etkisi π_{pjk} 'nın açıklayıcı değişkeni olarak kullanılan sınıf özellikleri;

β_{pqk} sınıf özellikleri X_{qjk} ve π_{pjk} arasında birleşme etkinliğini gösteren katsayı;

r_{pjk} 2. aşama tesadüfi etkisidir.

2. aşama modelinde $(P+1)$ tane denklem vardır. Bu eşitliklerdeki tesadüfi etkilerin korelasyonlu olduğu varsayılır. r_{pjk} 'nın 0 ortalamalı, τ_{pp} varyanslı, r_{pjk} ve $r_{p'jk}$ elemanları arasındaki kovaryansı $\tau_{pp'}$ olan çok değişkenli normal dağılıma sahiptir. Varyans kovaryans matrisi T_π ile gösterilir, bu matrisin boyutu 1. aşama katsayılarının sayısına bağlıdır. Eğer sınıf etkisi π_{pjk} sabit olarak belirlenirse 2. aşama açıklayıcı değişkenleri modelde yer almaz ve r_{pjk} da 0 olur. π_{pjk} tesadüfi olarak değişmezse X değişkenleri modelde bulunur, fakat r_{pjk} hala 0'dır.

Genel 3. aşama modeli: 3. aşama çıktısının her biri bazı 3. aşama özellikleri tarafından tahmin edilebilir. Model,

$$\beta_{pqk} = \gamma_{pq0} + \sum_{s=1}^{S_{pq}} \gamma_{pqs} W_{sk} + u_{pqk} \quad (7.9)$$

şeklindedir. Burada;

γ_{pq0} , β_{pqk} için 3. aşama (okul) modelindeki sabit terim;

W_{sk} , okul etkisi β_{pqk} için açıklayıcı değişken olarak kullanılan okul özelliği;

γ_{pqs} , okul özelliği W_{sk} ve β_{pqk} arasında birleşme etkinliğini gösteren 3. aşama katsayısı;

u_{pqk} , 3. aşama tesadüfi etkisidir.

Her okul için 3. aşama modelinde $\sum_{p=0}^P (Q_p + 1)$ tane denklem vardır. Bu denklemlerden gelen kalıntıların çok değişkenli normal dağıldığı varsayılır. Varyans kovaryans matrisi T_β ile gösterilir ve bu matrisin boyutu tesadüfi olarak belirtilen 2. aşama katsayılarının sayısına bağlıdır. 2. aşama modelindeki π katsayıları için, β katsayılarının her biri ya sabit ya tesadüfi olarak değişmeyen ya da tesadüfi olabilir. β_{pq} sabit ya da tesadüfi olarak değişmeyen şekilde belirleniyorsa, u_{pqk} 'nın 0 olduğu varsayılır.

7.3 Koşulsuz Modeller (Unconditional Models)

1. aşama modeli;

$$Y_{ijk} = \pi_{0jk} + \sum_{p=1}^P \pi_{pjk} a_{pjk} + e_{ijk} \quad (7.10)$$

2. aşama modeli;

$$\pi_{pjk} = \beta_{p0k} + r_{pjk} \quad (7.11)$$

3. aşama modeli ise;

$$\beta_{p0k} = \gamma_{pq0} + u_{pqk} \quad (7.12)$$

şeklindedir.

7.4 Üç Aşamalı Modellerde Hipotez Testleri

Üç aşamalı modellerde sabit etkiler, tesadüfi katsayılar ve varyans kovaryans bileşenleri ile ilgili hipotezler test edilebilir. Hipotez tiplerinin her biri için hem tek parametrelili hem de çok parametrelili testler uygundur.

Sabit etkiler için tek parametrelili testler araştırmacılara gerekli katsayıların karar verilmesinde yardım eder. Sabit etkiler için çoklu parametre testleri sabit etkiler arasında hem çok amaçlı testler hem de önsel karşılaştırmalar yapmaya olanak verir. Örneğin; okullar; devlet okulları, özel okullar diye iki gölge değişkeni şeklinde sınıflandırılabilir. Çok amaçlı testler gölge değişkenlerin etkileri 0 olduğunda kullanılır. Bu hipotez sağlandığında, okul tipleri modelden atılabilir. Alternatif olarak, tek serbestlik dereceli karşılaştırmalar düşünülebilir.

Varyans bileşenleri için tek parametre testleri hem 2. aşamada hem de 3. aşamada sorun yaratabilir. Hipotez T_{π} ve T_{β} 'nin köşegen elemanlarının her biri 0 olacak şekilde kurulur. Varyans bileşenleri için çoklu parametre testleri 2. ve 3. aşamada bulunan birden fazla varyans bileşenleri ile ilgili hipotezleri sınamada kullanabilir.

7.5 Üç Aşamalı Modellerde Tesadüfi Katsayıların Tahmini

Üç aşamalı model hem 2. aşamadaki hem de 3. aşamadaki tesadüfi katsayıları Ampirik Bayes ile tahmin eder. Üç aşamalı koşulsuz modeller için hiyerarşik analiz, ikinci aşamadaki her sınıf ve üçüncü aşamadaki her okul ortalamalarını Ampirik Bayes tahminleri ile test edilmesine olanak sağlar.

$$\begin{aligned}\pi_{0jk}^* &= \hat{\lambda}_{\pi jk} \bar{Y}_{.jk} + (1 - \hat{\lambda}_{\pi jk}) \beta_{00k}^* \\ \beta_{00k}^* &= \hat{\lambda}_{\beta_k} \hat{\beta}_{00k} + (1 - \hat{\lambda}_{\beta_k}) \hat{\gamma}_{000}\end{aligned}\tag{7.13}$$

Formülde yer alan $\lambda_{\pi jk}$ ve λ_{β_k} , *Güvenilirlik* ($\hat{\pi}_{0jk}$) ve *Güvenilirlik* ($\hat{\beta}_{00k}$)'nın yani 2. ve 3. aşama ortalamalarının güvenilirlikleridir. $\hat{\gamma}_{000}$ büyük ortalama tahmini, $\hat{\beta}_{00k}$, β_{00k} 'nin ağırlıklı en küçük kareler tahmincisidir.

$$\hat{\beta}_{00k} = \frac{\sum_j \left[\hat{\tau}_{\pi} + \hat{\sigma}^2 / n_{jk} \right]^{-1} \bar{Y}_{.jk}}{\sum_j \left[\hat{\tau}_{\pi} + \hat{\sigma}^2 / n_{jk} \right]^{-1}}\tag{7.14}$$

β_{00k}^* büyük ortalama $\hat{\gamma}_{000}$ 'ya karşı $(1 - \hat{\lambda}_{\beta_k})$ orantı miktarı ile klasik ağırlıklı en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}_{00k}$ 'ya yakınsar. Benzer olarak π_{0jk}^* $(1 - \hat{\lambda}_{\pi jk})$ oranı tarafından β_{00k}^* 'ya karşı örnek ortalaması $\bar{Y}_{.jk}$ 'ya yakınsar.

8. GENELLEŞTİRİLMİŞ HİYERARŞİK LİNEER MODELLER

İki ve üç aşamalı hiyerarşik lineer modeller için;

- Her aşamadaki bağımlı değişkenin, regresyon katsayılarının lineer bir fonksiyonu olarak gösterilmesi,
- Her aşamadaki tesadüfi etkilerin normal dağıldığı,

varsayılır. Bağımlı değişken sürekli olduğunda, 1. aşamadaki normallik varsayımı oldukça yerinde olur. Hatta sürekli bir çıktı büyük ölçüde çarpıksa, çıktı değişkenine uygulanacak dönüşüm en azından 1. aşama kalıntı dağılımlarının normal dağılıma uymasını sağlayabilir.

Doğrusallık ve normallik varsayımlarının sağlanamaması ve dönüşümün yapılamaması gibi durumlar da olabilir. Örneğin Y öğrencinin liseden belirlenen öğretim yılında mezun olup olmadığını gösteren iki değerli bir çıktı değişkeni ise (öğrenci belirlenen öğretim yılında mezun olursa $Y=1$, mezun olmazsa $Y=0$) bilinen 1. aşama modelinin kullanımı aşağıdaki sebeplerden dolayı uygun olmaz:

- Hiyerarşik lineer modellerde 1. aşama çıktısının tahmin edilen değerlerinde kısıtlama sözü konusu değildir. Verilen örnekteki iki değerli çıktı olan Y 'nin tahmin edilen değeri $(0,1)$ aralığındadır. Bu değere lineer olmayan transformasyon (logit veya probit dönüşümü gibi) yapılır.
- Çıktıya tahmin edilen değerler verildiğinde, 1. aşama tesadüfi etkisi iki değerden sadece birini alabilir ve normal dağılıma sahip olmayabilir.
1. aşama tesadüfi etkisi, homojen varyansa sahip olmayabilir, bu durumda 1. aşama tesadüfi etkinin varyansı tahmin edilen değere bağlıdır.

Hiyerarşik lineer modeller sayma (count) verileri ile de kullanılabilir. Örneğin; Y bir yıl boyunca bir kişinin suç işleme sayısı ya da bir saatlik ders sırasında bir öğrencinin soru sorma sayısı olabilir. Y 'nin negatif olmayan tamsayı $(0,1,2,...)$ değerlerini alması, verinin pozitif çarpık olmasını meydana getirebilir. Veride sıfır azsa bağımlı değişken olan Y 'ye $Y^* = \log(1+Y)$ veya $Y^* = \sqrt{Y}$ gibi dönüşümler yapılarak çarpıklık sorunu ortadan kaldırılabilir. Ayrıca olay oranlarının düşük olması, belirtilen zamanda istenilen olayın gerçekleşmediğini gösterir. Bu durumda dönüşümler yardımıyla normallik varsayımına yaklaşılabılır.

8.1 Genelleştirilmiş Hiyerarşik Lineer Modellerin (HGLM) Özel Durumu Olarak İki Aşamalı Hiyerarşik Lineer Modeller

Genelleştirilmiş hiyerarşik lineer modellerdeki 1. aşama modeli üç kısımdan oluşur. Bunlar; örnekleme modeli (sampling model), bağ fonksiyonu (link function) ve yapısal model (structural model)dir. Hiyerarşik lineer modeller (HLM), örnekleme modelinin normal, bağ fonksiyonunun benzer ve yapısal modelin lineer olduğu Genelleştirilmiş hiyerarşik lineer modellerin (HGLM) özel bir hali gibi görünür.

1. Aşama Örnekleme Modeli: İki aşamalı hiyerarşik lineer modellerde, örnekleme modeli aşağıdaki gibi yazılır:

$$Y_{ij} | \mu_{ij} \sim NID(\mu_{ij}, \sigma^2) \quad (8.1)$$

Bunun anlamı tahmin değeri olan μ_{ij} bilindiğinde 1. aşama çıktısı Y_{ij} 'nin beklenen değeri, μ_{ij} ortalamalı ve sabit σ^2 varyanslıdır, ayrıca normal ve birbirinden bağımsız dağılıma sahiptir. 1. aşama örnekleme modelinin beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$E(Y_{ij} | \mu_{ij}) = \mu_{ij} \quad Var(Y_{ij} | \mu_{ij}) = \sigma^2 \quad (8.2)$$

1. Aşama Bağ Fonksiyonu: Genelde 1. aşama tahmin değeri μ_{ij} 'yi dönüştürmek ve tahmin değerini verilen aralık içinde tutmak mümkündür. Dönüştürülmüş tahmin değeri η_{ij} ile gösterilir ve bu dönüşüme bağ fonksiyonu denir. Normal durumlarda dönüşüm gerekli değildir. Dönüşüm yapılmazsa $\eta_{ij} = \mu_{ij}$ şeklinde gösterilir. Bu durumdaki bağ fonksiyonunu, benzer bağ fonksiyonu (identity link function) olarak tanımlamak mümkündür (Hosmer ve Lemeshow, 2000).

1. Aşama Yapısal Modeli: Dönüştürülmüş tahmin değeri η_{ij} , lineer yapısal modeldeki tahminciler ile ilişkilidir.

$$\eta_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + \dots + \beta_{pj}X_{pij} \quad (8.3)$$

(8.1), (8.2) ve (8.3)'te verilen modeller birleştirilerek hiyerarşik lineer modelin 1. aşama modeli oluşturulur.

8.2 İki Değerli Çıktılar İçin İki ve Üç Aşamalı Modeller

Hiyerarşik lineer modeller normal örnekleme modeli ve benzer bağ fonksiyonu kullanırken, iki değerli çıktı modelinde binom örnekleme modeli ve logit bağı kullanılır.

8.2.1 Birim Özellikli Modeller (Unit- Specific Models)

1. Aşama Örneklem Modeli: Y_{ij} , m_{ij} denemedeki başarı sayısı, φ_{ij} ise her denemedeki başarının olasılığı olsun. Buna göre model;

$$Y_{ij} | \varphi_{ij} \sim B(m_{ij}, \varphi_{ij}) \quad (8.4)$$

şeklinde gösterilir. Binom dağılımına göre, Y_{ij} 'nin beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibidir:

$$E(Y_{ij} | \varphi_{ij}) = m_{ij} \varphi_{ij} \quad \text{Var}(Y_{ij} | \varphi_{ij}) = m_{ij} \varphi_{ij} (1 - \varphi_{ij}) \quad (8.5)$$

$m_{ij} = 1$ olduğunda, Y_{ij} sıfır ya da bir değerini alan iki değerli bir değişkendir. Bu Bernoulli dağılımı olarak bilinen Binom dağılımının özel halidir. 1. aşama varyansı varsayılandan daha geniş (aşırı yayılım) ya da varsayılandan daha küçük (az yayılım) olabilir. Eğer 1. aşama modelinin açıklama oranı düşükse, aşırı yayılım meydana gelebilir. Bu durumda skaler varyans bileşeni σ^2 tahmin edilebilir. Böylece 1. aşama varyansı $\sigma^2 m_{ij} \varphi_{ij} (1 - \varphi_{ij})$ şeklinde olur.

1. Aşama Bağ Fonksiyonu: 1. aşama örneklem modeli binom olduğunda, birkaç bağ fonksiyonu kullanılması mümkündür (Hedeker ve Gibbons, 1994). En kullanışlı ve yaygın olanı logit bağ modelidir ve gösterimi:

$$\eta_{ij} = \log \left(\frac{\varphi_{ij}}{1 - \varphi_{ij}} \right) \quad (8.6)$$

şeklinde dir. Burada η_{ij} başarı oddsunun (oransal olasılık) logaritmasıdır. Bir olayın oddsu, olayın meydana gelme ihtimalinin gelmeme ihtimaline oranıdır. Eğer başarı olasılığı $\varphi_{ij} = 0.5$ ise, başarı oranı $\varphi_{ij} / (1 - \varphi_{ij}) = 0.5 / 0.5 = 1$ ve log-oddsu yani logiti $\log(1) = 0$ olur. Başarı oddsu 0.5'den az olduğunda oran 1'den az ve logit negatif olacaktır. Olasılık 0.5'den büyük olduğunda ise, oran 1'den büyük ve logit pozitif olacaktır.

1. Aşama Yapısal Modeli: Tahmin edilen log-odds'lar, $\exp(\eta_{ij})$ tarafından oranlara dönüştürülebilir.

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{1 + \exp(-\eta_{ij})} \quad (8.7)$$

η_{ij} 'nin her değeri için φ_{ij} değeri 0 ile 1 arasında olur.

2. Aşama ve 3. Aşama Modelleri: Bu bölümdeki 2. aşama modeli, hiyerarşik lineer modellerdeki 2. aşama modeli ile aynıdır.

$$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{qs} W_{sj} + u_{qj} \quad (8.8)$$

Buradaki tesadüfi etkiler u_{qj} , 0 ortalamalı T varyans kovaryans matrisli çok değişkenli normal dağılıma sahiptir. 3. aşama modelleri de hiyerarşik lineer modellerdeki 3. aşama modeli ile aynıdır.

8.2.2 Anakütle Ortalama Modelleri (Population- Average Models)

Anakütle ortalama ve birim özellikli sonuçlar lineer olmayan bağ fonksiyonları ile modeller oluştururlar. Modellerin sonuçları benzer olmasına rağmen, modeller farklı araştırma amaçlarında kullanılırlar.

Koşulsuz Model

Koşulsuz modelde, $u_{0j} = 0$ olan okul için yinelenen olasılık anakütle ortalama olasılığı değildir. Tesadüfi etkisi sıfır olan okul, tesadüfi etkilerin sahip olduğu dağılımın merkezindedir. Çünkü 2. aşamadaki tesadüfi etkilerin normal dağıldığı varsayılır, bu durumda tesadüfi etkinin ortalama ve medyan değeri özdeştir. Ayrıca olasılık dağılımı pozitif yönde çarpıktır. Maclaurin serisini kullanarak da φ_{ij} 'yi anakütle ortalama olasılığına yaklaştırabiliriz.

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} = \varphi_{ij}(u_{0j}) &= \frac{1}{1 + e^{-(\gamma_{00} + u_{0j})}} \\ &\approx \varphi_{ij}(0) + u_{0j} \varphi'_{ij}(0) + \frac{1}{2} u_{0j}^2 \varphi''_{ij}(0) \end{aligned} \quad (8.9)$$

(8.9)'daki katsayılar;

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(0) &= \frac{1}{1 + e^{-\gamma_{00}}} \\ \varphi'_{ij}(0) &= \varphi_{ij}(0) [1 - \varphi_{ij}(0)] \\ \varphi''_{ij}(0) &= \varphi'_{ij}(0) [1 - 2\varphi_{ij}(0)] \end{aligned} \quad (8.10)$$

(8.10)'daki gibi hesaplanır. u_{0j} 'nin $N(0, \sigma^2)$ 'ye sahip olduğu varsayılarak $E(\varphi_{ij})$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(\varphi_{ij}) \approx \varphi_{ij}(0) + \tau_{00} \varphi_{ij}'(0) [0.5 - \varphi_{ij}(0)] \quad (8.11)$$

Eğer $\varphi_{ij}(0) = 0.5$ veya $\tau_{00} = 0$ ise $E(\varphi_{ij}) = \varphi_{ij}(0)$ olur. $\varphi_{ij}(0) < 0.5$ için anakütle ortalaması $E(\varphi_{ij})$ 0.5'den yukarıya doğru, $\varphi_{ij} > 0.5$ için $E(\varphi_{ij})$ 0.5'den aşağıya doğru çekilecektir. Her bir durumda, farklılığın büyük çoğunluğu, τ_{00} 'ın geniş ve $\varphi_{ij}(0)$ 'ın 0.5'den ne kadar uzak olduğuna bağlıdır.

Koşulsuz modelde, anakütle ortalama modelinin tahmini;

$$Y_{ij} = \frac{1}{1 + e^{-\gamma_{00}^*}} + e_{ij} \quad (8.12)$$

şeklinde gösterilir. 2. aşama tesadüfi etkileri paydadaki üstellikten dolayı e_{ij} 'yi yok edebilir.

γ_{00}^* , γ_{00} 'ın birim özellikli tahmininden gelen anakütle ortalama tahminini ayırt etmek için kullanılır.

$$E(Y_{ij}) = E\left(\frac{1}{1 + e^{-(\gamma_{00}^* + u_{0j})}}\right) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma_{00}^*}} \quad (8.13)$$

Model kalıntıları e_{ij} 'nin gruplardaki birimler arasında korelasyonlu olduğu varsayılır.

Koşullu Model

Anakütle ortalama tahminleri diğer açıklayıcı değişkenler sabit tutularak bir açıklayıcı değişkendeki bir birimlik artışa bağlı olarak log-oddslardaki beklenen farklılığı verir, fakat 2. aşama tesadüfi etkilerinin dağılımı ortalamanın üzerindedir. Birim özellikli ve anakütle ortalama modellerinin ikisinde de istatistiksel anlamlılık yaklaşık olarak aynıdır. Bununla birlikte birim özellik katsayılarındaki karşılaştırmada formül yaklaşımından dolayı anakütle ortalama katsayıları 0'a yaklaşır.

8.3 Sayma (Count) Veriler İçin Hiyerarşik Modeller

Sayma verileri için genelleştirilmiş lineer model Poisson örnek modeli ve logaritma bağ fonksiyonundan oluşur.

1. Aşama Örneklem Modeli: Y_{ij} , m_{ij} zaman aralığı boyunca meydana gelen olay sayısıdır. Örneğin; Y_{ij} beş yıl boyunca j tane suçtan i . bölgedeki bir kişinin suç işleme sayısı ise, $m_{ij} = 5$ olur.

$$Y_{ij} | \lambda_{ij} \sim P(m_{ij}, \lambda_{ij}) \quad (8.14)$$

şeklinde gösterilir. Burada Y_{ij} , m_{ij} ile Poisson dağılımına sahiptir ve λ_{ij} 'nin her zaman periyodundaki olay oranıdır. Poisson dağılımına göre olay oranı λ_{ij} verildiğinde Y_{ij} 'nin beklenen değeri ve varyansı:

$$E(Y_{ij} | \lambda_{ij}) = m_{ij} \lambda_{ij} \quad \text{Var}(Y_{ij} | \lambda_{ij}) = m_{ij} \lambda_{ij} \quad (8.15)$$

şeklinde olacaktır. Burada, varyans ortalamaya eşittir.

1. Aşama Bağ Fonksiyonu: 1. aşama örneklem modeli Poisson olduğundan, bağ fonksiyonu logaritma bağı (log link)dır (Kleinbaum ve Klein, 2002).

$$\eta_{ij} = \log(\lambda_{ij}) \quad (8.16)$$

η_{ij} , olay oranının logaritmasıdır. Böylece olay oranı $\lambda_{ij} = 1$ olduğunda, logaritması 0 olur. Olay oranı 1'den azsa logaritma negatif, olay oranı 1'den büyük ise logaritma pozitifdir.

1. Aşama Yapısal Modeli: β_s 'lerin tahmininde logaritma olay oranı tahmini $\hat{\eta}_{ij}$ 'yi oluşturmak mümkündür. Logaritma olay oranı tahmini, olay oranı $\hat{\lambda}_{ij}$ 'ye aşağıdaki gibi dönüştürülebilir:

$$\hat{\lambda}_{ij} = \exp\{\hat{\eta}_{ij}\} \quad (8.17)$$

$\hat{\eta}_{ij}$ 'nin hiç bir değeri için, $\hat{\lambda}_{ij}$ negatif olmayacaktır.

2. Aşama Modeli: 2. aşama modeli, binom ve normal durumdaki 2. aşama modeli ile aynıdır.

8.4 Ordinal (Sıralı) Veriler İçin Hiyerarşik Modeller

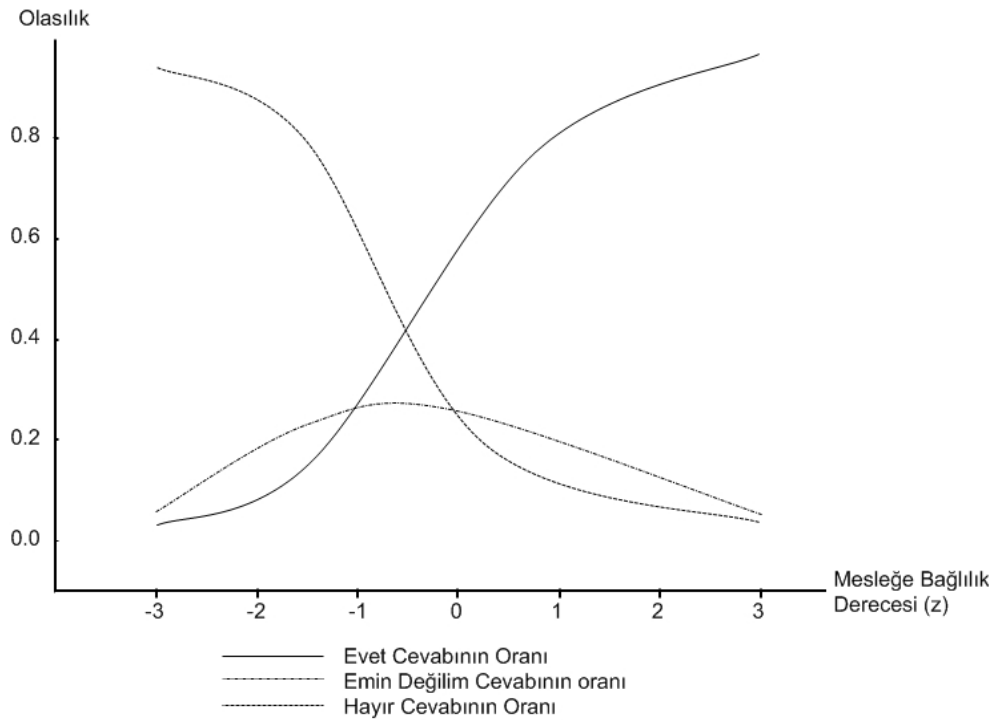
Kategorik çıktılar sosyal bilimlerde ve tıbbi araştırmalarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Örneğin; insanların verilen bir ifade ile ilgili aynı görüşte olup olmadıklarını verdikleri cevaplara göre anlayabiliriz. Cevaplar; Tamamen katılıyorum, Katılıyorum, Ne katılıyorum ne katılmıyorum, Katılmıyorum, Hiç katılmıyorum şeklinde olabilir. Bununla birlikte Bazı çalışmalarda bağımlı değişken sürekli (yıllık veri gibi), fakat uygun veri

kategorilere göre sınıflandırılmış olabilir (yüksek, orta, düşük gibi). Bu bölümde sıralı verilerden oluşan bağımlı değişkenler için HLM analizi incelenecektir.

8.4.1 Tek Aşamalı Veriler İçin Kümülatif Olasılık Modeli

Sıralı regresyon için standart model kümülatif olasılık modelidir. Örneğin, öğretmenlerin meslekleri ile ilgili veriye sahip olduğumuzu varsayalım ve şöyle bir soru olsun: “Eğer lise yıllarına geri dönseydiniz ve her şeye baştan başlasaydınız, meslek olarak öğretmenliği tekrar seçer miydiniz?” Olası cevaplar da 1=Evet, 2=Emin değilim, 3=Hayır şeklinde verilsin. Cevaplara göre öğretmenlerin mesleklerine olan ilgisi tahmin edilebilir.

Sıralı regresyon modelini mesleğe karşı bağlılık derecesi diye belirtilen z sürekli değişkeni ile gösterelim. Z değişkeni ve olası cevaplar arasındaki ilişki Şekil 8.1 ‘de gösterilmektedir.



Şekil 8.1 Mesleğe bağlılık derecesi ve kümülatif olasılıklar (Raudenbush ve Bryk, 2002)

Mesleğe bağlılık derecesi düşük olan öğretmenler, çoğunlukla “Hayır” cevabını seçmişlerdir. Bu sebeple z ’nin düşük değerleri için, “Hayır” olasılığı yüksektir. Bunun anlamı “Emin değilim” ve “Evet” cevaplarının olasılıklarının düşük olduğudur. z oldukça geniş olduğunda “Hayır” olasılığı azalmaktadır, “Emin değilim” ve “Evet” olasılıkları ise artmaya başlamaktadır. z çok yüksek değerler elde ettiğinde, “Hayır” olasılığı “Emin değilim” olasılığından bile daha küçük olmaktadır. Öğretmenler meslekleri ile ilgili tamamen kararsız

değillerse, çoğunlukla Evet=1 yanıtını vereceklerdir ve tekrar öğretmenliği seçeceklerdir. Bu yüzden z 'nin oldukça yüksek değerleri için "Evet" olasılığı yüksektir.

M tane mümkün sıralı kategori ($m=1,...,M$) ve etki (bağımlı) değişkeni R olsun. R , m değerini aldığı anda bunun olasılığı, $\varphi_m = \text{Olasılık}(R=m)$ şeklinde gösterilir. Verilen örnekte $M=3$ 'tür ve (8.18)'deki gibidir:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= P(R=1) = P(\text{"Evet"}) \\ \varphi_2 &= P(R=2) = P(\text{"Emin değilim"}) \\ \varphi_3 &= P(R=3) = P(\text{"Hayır"})\end{aligned}\tag{8.18}$$

Regresyon denklemindeki bağımlı değişkenin yapısı gereği kendi olasılıkları yerine kümülatif olasılıklarla çalışmak daha uygundur. Kümülatif olasılıkların gösterimi ise aşağıdaki gibidir (Long, 1997):

$$\varphi_m^* = P(R \leq m) = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_m\tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^* &= \varphi_1 \\ \varphi_2^* &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi_3^* &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1\end{aligned}\tag{8.20}$$

Kümülatif olasılıklarla çalışma fikri, $m=1,...,M-1$ için kümülatif logit kullanmaya yönlendirir.

$$\eta_m = \log\left(\frac{\varphi_m^*}{1-\varphi_m^*}\right) = \log\left(\frac{P(R \leq m)}{P(R > m)}\right)\tag{8.21}$$

Basit lojistik regresyon modelini $\eta_{mi} = \theta_m + \beta X_i$ şeklinde gösterebiliriz, aynı zamanda bu formüle "oransal odds (proportional odds)" da denir. Model her kategori m için sabit θ_m ve eğim parametresi β 'ya sahiptir. $X = X_1$ ve $X = X_2$ durumlarında beklenen log-odds'ları karşılaştırdığımızı varsayalım. İki durum arasında log-odds'lardaki beklenen fark m 'ye bağlı olmayacaktır.

$$\eta_{m1} - \eta_{m2} = \beta(X_1 - X_2)\tag{8.22}$$

Böylece X 'den farklı olan durumlar arasındaki log-odds'lardaki beklenen farklar belirli kategoriye bağlı değildir. Bu iki durum için ilişki odds'ları (relative odds):

$$\frac{Odds_{m1}}{Odds_{m2}} = e^{\{\beta(X_1 - X_2)\}} \quad (8.23)$$

gibidir.

X her kategori m için olasılık oranını etkiler. Bu varsayım genellikle kontrol edilir ve her X için iki kümülatif logit arasında logaritma olasılıklarındaki farklılık sadece sabitlere bağlıdır, X'e bağlı değildir yani $\eta_1 - \eta_2 = \theta_1 - \theta_2$ şeklindedir.

8.4.2 İki Aşamalı Karşı Genişletme (Extension to Two Levels)

1. aşamada j. gruptaki i. birim için açıklayıcı değişken X_{ij} olsun. 1. aşama modeli;

$$\begin{aligned} \eta_{1ij} &= \theta_{1j} + \beta_{1j} X_{1ij} \\ \eta_{2ij} &= \theta_{2j} + \beta_{1j} X_{1ij} \end{aligned} \quad (8.24)$$

şeklindedir. Üç tane tesadüfi katsayı vardır. Bunlar; X için eğim β_{1j} ve iki tane eşik değer θ_{1j} ve θ_{2j} 'dir. Her iki eşik değerinin tesadüfi olarak değiştiğini hesaba katmak sonuçların yorumunu oldukça zorlaştırır. z_{ij} farklı gruplarda bulunan farklı yöntemdeki kategorilere dönüştürülür. Ayrıca bazı stratejiler her gruptaki tesadüfi etkilerin en azından iki tanesine ihtiyaç duyar ve bunlar oldukça yüksek korelasyonlu olur. Daha fazla kategori eklendiğinde, tahmin ve yorumlama problemleri artar. Tutarlı bir yaklaşım için, $\delta = \theta_1 - \theta_2$ şeklinde fark alınır.

1. aşama modeli;

$$\begin{aligned} \eta_{1ij} &= \beta_{0j} + \beta_{1j} X_{1ij} \\ \eta_{2ij} &= \beta_{0j} + \beta_{1j} X_{1ij} + \delta \end{aligned} \quad (8.25)$$

şeklinde olur. Model gruplar karşısında tesadüfi olarak değişen β_{0j} ve yine tesadüfi olarak değişen ve X'in eğimi olan β_{1j} 'den oluşur.

1. Aşama Yapısal Modeli: M kategorilerine genelleme yaparsak, 1. aşama modeli;

$$\eta_{mij} = \beta_{0j} + \sum_{q=1}^Q \beta_{qj} X_{qij} + \sum_{m=2}^{M-1} D_{mij} \delta_m \quad (8.26)$$

şeklindedir. Formüldeki D_{mij} , m kategorisi için bir göstergedir.

1. Aşama Örneklem Modeli: Veri ordinal olduğunda, i. birimdeki j. grup için $Y_{1ij}, \dots, Y_{m-1ij}$ şeklinde olan $(M-1)$ tane gölge değişken vardır.

Eğer $R_{ij} \leq m$ ise $Y_{mij} = 1$, diğer durumlarda ise 0 olur. Öğretmenlerin mesleklerine karşı ilgisi örneğinde $M=3$ olduğuna göre;

Eğer $R_{ij} = 1$ ise $Y_{1ij} = 1$

Eğer $R_{ij} \leq 2$ ise $Y_{2ij} = 1$ (8.27)

şeklinde gösterilir. $\varphi_{mij}^* = P(Y_{mij} = 1)$ olasılıkları, kümülatif olasılıklardır. φ_{mij}^* verildiğinde Y_{mij} 'nin beklenen değeri, varyansı ve kovaryansı (8.28)'deki gibidir:

$$\begin{aligned} E(Y_{mij} | \varphi_{mij}^*) &= \varphi_{mij}^* \\ \text{Var}(Y_{mij} | \varphi_{mij}^*) &= \varphi_{mij}^* (1 - \varphi_{mij}^*) \\ \text{Cov}(Y_{mij}, Y_{m'ij} | \varphi_{mij}^*, \varphi_{m'ij}^*) &= \varphi_{mij}^* (1 - \varphi_{m'ij}^*) \end{aligned} \quad (8.28)$$

2. Aşama Modeli: 2. aşama modeli genel olarak şu şekildedir:

$$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{qs} W_{sj} + u_{qj} \quad (8.29)$$

Buradaki tesadüfi etki u_{qj} , tüm j'ler için tahmin edilebilir. Ayrıca tesadüfi etkilerin çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğu varsayılmaktadır.

8.5 Çokterimli (Multinomial) Veriler İçin Hiyerarşik Modeller

Bağımlı değişken sıralı olmakla birlikte buradaki sıralı durum net olmayabilir ya da verinin sıralı hali şüpheli olabilir, oran oddslarının varsayımları tartışılabilir. Bu durumda çokterimli regresyon modelleri daha kullanışlıdır. Çıktının M tane mümkün kategorisi vardır. Böylece $M=3$ olduğunda olasılıklar şu şekildedir;

$$\begin{aligned} P(R_{ij} = 1) &= \varphi_{1ij} \\ P(R_{ij} = 2) &= \varphi_{2ij} \\ P(R_{ij} = 3) &= \varphi_{3ij} = 1 - \varphi_{1ij} - \varphi_{2ij} \end{aligned} \quad (8.30)$$

Bütün çıktıları belirlemek için $M-1=2$ tane olasılığa ihtiyaç duyulur.

1. Aşama Örneklem Modeli: 1. aşama örneklem modelini açıklamak için modele gölge (dummy) değişkenleri eklemeliyiz. Eğer $R_{ij} = m$ ise $Y_{mij} = 1$, diğer durumlarda $Y_{mij} = 0$ olur.

Çok terimli dağılıma göre, φ_{mij} verildiğinde Y_{mij} 'nin beklenen değeri ve varyansı ;

$$E(Y_{mij} | \varphi_{mij}) = \varphi_{mij} \quad \text{Var}(Y_{mij} | \varphi_{mij}) = \varphi_{mij}(1 - \varphi_{mij}) \quad (8.31)$$

şeklindedir. Bağımlı değişken Y_{mij} ve $Y_{m'ij}$ arasındaki kovaryansı ise;

$$\text{Cov}(Y_{mij}, Y_{m'ij} | \varphi_{mij}, \varphi_{m'ij}) = -\varphi_{mij}\varphi_{m'ij} \quad (8.32)$$

şeklinde hesaplanır.

1. Aşama Bağ Fonksiyonu: Çok terimli regresyon modelleri için kullanılan bağ fonksiyonu çok terimli logit bağıdır ve $m=1, \dots, M-1$ için;

$$\eta_{mij} = \log\left(\frac{\varphi_{mij}}{\varphi_{Mij}}\right) = \log\left(\frac{P(R_{ij} = m)}{P(R_{ij} = M)}\right) \quad (8.33)$$

şeklinde gösterilir.

1. Aşama Yapısal Modeli: 1. aşamada $m=1, \dots, M-1$ için;

$$\eta_{mij} = \beta_{0j(m)} + \sum_{q=1}^{Q_m} \beta_{qj(m)} X_{qij} \quad (8.34)$$

şeklindedir. Örneğin $M=3$ olduğunda 1. aşamada iki tane denklem yazılır.

$$\begin{aligned} \eta_{1ij} &= \beta_{0j(1)} + \sum_{q=1}^{Q_1} \beta_{qj(1)} X_{qij} \\ \eta_{2ij} &= \beta_{0j(2)} + \sum_{q=1}^{Q_2} \beta_{qj(2)} X_{qij} \end{aligned} \quad (8.35)$$

2. Aşama Modeli: 2. aşama modeli $q=0, \dots, Q_m$ için;

$$\beta_{qj(m)} = \gamma_{q0(m)} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{qs(m)} W_{sj} + u_{qj(m)} \quad (8.36)$$

şeklindedir. $M=3$ olduğunda 2. aşamadaki denklemler 1. aşama yapısal modelinden de görüldüğü gibi iki tane olacaktır.

9. UYGULAMA

Ülkelerin çağdaşlık seviyesine yükselmesinde ve gelişimine katkıda bulunmada gençlerimize ve onları eğiten öğretmenlerimize görevler düşmektedir. Öğrencilerin başarısında, öğrenim gördükleri okulların ve bulundukları coğrafi bölgelerin etkili olup olmadığı önemlidir. Bu sebeple çalışmada sözü geçen faktörlerin başarıda etkisinin olup olmadığı ve var olan etkinin gücünü ölçmek amacıyla hiyerarşik lineer modeller kullanılmıştır. Türkiye'deki öğrencilerin 2003 yılı Matematik başarısını ölçmede ilk olarak iki aşamalı ve üç aşamalı modeller kurulmuştur. Daha sonra iki ve üç aşamalı modeller için nominal ve ordinal bağımlı değişkenler ele alınarak başarı seviyesi belirlenmeye çalışılmıştır. Böylece anlatılan çoğu model uygulamaya konulmuş ve yorumlanmış olacaktır. HLM 6.04 (Student Version) ve SPSS 15.0 (Demo) programlarından yararlanılarak analizler yapılmıştır.

9.1 Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (Programme For International Student Assessment, PISA)

Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA), kurucu üyesi olduğumuz Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü olan OECD'nin üç yıllık aralarla düzenlemekte olduğu ve 15 yaş grubu öğrencilerin kazandıkları bilgi ve becerilerin değerlendirilmesine yönelik yapılan bir tarama araştırmasıdır. Bu proje, zorunlu eğitimin sonunda örgün eğitime devam eden öğrencilerin eğitim programlarında yer alan matematik, fen bilimleri ve okuma becerileri konularında ne dereceye kadar öğrendikleri değil, sahip oldukları bilgi ve becerileri kullanabilme yeteneğini ölçmeyi amaçlamaktadır (MEB, 2003).

Ülkemizin bu projeye katılma amacı; uluslararası düzeyde konumumuzu belirlemek, belirli referans noktalarına göre ülkemizin eğitim alanında hangi düzeyde olduğunu, giderilmesi gereken eksiklikleri ve alınması gereken tedbirleri belirlemek, sonuçları doğrultusunda gerekli düzenlemeleri yaparak eğitimde kaliteyi yükseltmektir. Bu projeden elde edilen sonuçlar; eğitim öğretim programlarının geliştirilmesinde ve eğitim alanında yapılan araştırmalara kaynak olarak kullanılmıştır (MEB, 2003).

PISA Matematik (Geometri, Cebir, Aritmetik ve Olasılık), Fen Bilimleri, Okuma ve Problem Çözme alanlarından oluşmaktadır. PISA 2003 uygulamasına 30 OECD üyesi olan ve 11 OECD üyesi olmayan ülke katılmıştır. Yaklaşık 250000'in üzerindeki öğrencilere matematik, fen bilimleri, okuma ve problem çözme becerilerini ortaya koyacak 2 saatlik bir test uygulanmıştır. PISA 2003 projesinin test ve anketleri, ülkemizde 2003 yılının Mayıs ayında 7 coğrafi bölgeden tesadüfi yöntemle seçilen 12 ilköğretim okulu ve 147 lisede okumakta olan

1987 doğumlu toplam 4855 öğrenciye yapılmıştır. Bu çalışmada PISA'nın derlemiş olduğu Türkiye verileri kullanılarak matematik başarısında ele aldığımız değişkenlerin ne derece etkili olduğu, okullar ve bölgeler arasında farklılık gösterip göstermediği ve bu değişkenlerin sonuçlarına göre neler yapılması gerektiğine bakılmıştır. Hiyerarşik lineer modeller Matematik, Fen ve Okuma ile ilgili başarının sağlanmasında literatürde sıklıkla kullanılan bir yöntemdir.

PISA 2003'te matematik alanına ağırlık verilmiştir. Çizelge 9.1'de ülkeler ve Matematik ortalamaları gösterilmiştir.

Çizelge 9.1 PISA 2003 çalışmasına katılan ülkeler ve matematik ortalamaları (PISA, 2003)

Ülkeler	Matematik Puanı	Ülkeler	Matematik Puanı	Ülkeler	Matematik Puanı
Honkong-Çin	550	İzlanda	515	Letonya	483
Finlandiya	544	Danimarka	514	Rusya Federasyonu	468
Kore	542	İsveç	509	İtalya	466
Holanda	538	Avusturya	506	Portekiz	466
Lihtenştayn	536	Almanya	503	Yunanistan	445
Japonya	534	İrlanda	503	Sırbistan	437
Kanada	532	Slovakya Cumhuriyeti	498	Türkiye	423
Belçika	529	Norveç	495	Uruguay	422
İsviçre	527	Lüksemburg	493	Tayland	417
Macao-Çin	527	Macaristan	490	Meksika	385
Avustralya	524	Polonya	490	Endonezya	360
Yeni Zelanda	523	İspanya	485	Tunus	359
Çek Cumhuriyeti	516	ABD	483	Brezilya	356

9.2 Tüm Modeller İçin Bağımlı ve Bağımsız Değişkenlerin Belirlenmesi

Bu çalışmada kullanılan veriler PISA 2003 çalışmasından alınmıştır ve kayıp verilerin temizlenmesi sonucu analizler yapılmıştır. Bağımlı ve bağımsız değişkenler belirlenirken literatür taraması sonucunda genel kabul görmüş olan değişkenler ile çalışılmıştır. Bu değişkenlerin kapsamı ve neden seçildikleri aşağıda anlatılmıştır.

Bağımlı Değişken

Matematik Başarısı (Y_{ij}), Bir öğrencinin matematik performansı matematiğin 4 alanında ölçülmüştür ve bu alanlar sırasıyla Uzay ve Şekil (Geometri), Değişme ve İlişkiler (Cebir), Sayı (Aritmetik) ve Belirsizlik (Olasılık)'tir. Testlerde öğrencilere gerçek yaşamlarında karışabilecekleri tarzda 85 farklı problem sorulmuştur. Genellikle bir yazı veya şema ile ifade edilen bir matematiksel durum ile ilgili olarak birkaç sorunun cevaplanması istenmiştir.

Matematik puanları öğrencinin bilgi ve becerisine göre bazı düzeylere ayrılmaktadır. Bu düzeyler Çizelge 9.2’de gösterilmektedir.

Çizelge 9.2 Matematik puan düzeyleri (PISA, 2003)

Düzy	Puan Aralığı	
	Minimum	Maksimum
0	-	357.77
1	358.78	420.07
2	420.08	482.38
3	482.39	544.68
4	544.69	606.99
5	607.00	669.30
6	669.31	-

Belirli düzeylere gelebilen öğrenciler belirli karakteristik özelliklere ve kabiliyetlere sahiptir. Kısaca hangi düzeyde neler yapabildikleri aşağıdaki gibi açıklanabilir.

Düzy 1: Bu düzeydeki öğrenciler sorunun açıkça belirtildiği, çözüm için gerekli tüm bilgilerin verildiği soruları yanıtlayabilirler. Kısaca bu düzeydeki bir öğrenci, açık olan ve tek bir uyarıcıyı takip etmekle yapılabilen işlemleri gerçekleştirebilir.

Düzy 2: Bu düzeydeki öğrenciler temel algoritmaları, formülleri ve işlem yollarını kullanabilirler. Doğrudan çıkarım yapabilirler fakat görülenin ötesine geçmeyen yorumlar yapabilirler.

Düzy 3: Bu düzeydeki öğrenciler, ardışık karar verme dahil olmak üzere açıkça belirtilmiş işlemleri yapabilirler. Ayrıca sonuçların yorumunu ve muhakemesini anlatan kısa raporlar hazırlayabilirler.

Düzy 4: Bu öğrenciler kendi yorumlarına, görüşlerine ve hareketlerine dayalı açıklama ve görüşler kurgulayabilirler ve bunları başkalarına anlatabilirler.

Düzy 5: Bu düzeye erişmiş öğrenciler karmaşık durumlarla ilgili modeller geliştirip kullanabilirler, çeşitli stratejiler geliştirerek konu ile ilgili açıklamaları ve yorumları başkalarına anlatabilirler.

Düzy 6: Bu düzeydeki öğrenciler ise, kendi araştırmalarından ve modelleme çalışmalarından elde ettikleri bilgilere dayanarak karmaşık problemleri çözebilirler, genelleme yapabilirler ve gerçek hayatla ilişkilendirebilirler.

Her bir düzey kendinden daha alttaki düzey veya düzeylerin özelliklerini de kapsamaktadır.

Bağımsız Değişkenler

Cinsiyet (C): Literatürdeki çalışmalarda genel olarak matematik başarısının cinsiyete göre farklılık gösterdiği gözlemlenmektedir. Bu sebeple Türkiye’de de matematik başarısının cinsiyete göre değişkenlik gösterebileceği düşüncesiyle bu değişkeni çalışmamızda kullanmaktayız. Öğrenci cinsiyeti 0-Bayan, 1-Bay olarak kodlanmıştır. Toplam örneklemin %43,1’ini bayanlar, %56,9’unu ise baylar oluşturmaktadır.

Ekonomik, Sosyal ve Kültürel Statü (ES): Ülkemizde Ekonomik, Sosyal ve Kültürel Statüsü düşük olan ailelerdeki çocukların küçük yaşlarda çalışmaya mecbur kalmaları okuldaki başarılarını etkilemektedir. Bu durum ülkemizin doğusunda çocukların okula gitmesine bile engel olabilmektedir. Bu sebeplerden dolayı aile altyapısının matematik başarısını etkileyeceğini düşünmekteyiz. Bu indeks hesaplanırken aile altyapısını gösteren 3 farklı değişken kullanılmıştır. Bu değişkenler; en yüksek anne baba eğitim düzeyi, en yüksek anne baba mesleki statüsü ve toplam gelirden oluşmaktadır.

Okul Lokasyonu (OL): Okul Lokasyonu, yani bir okulun köyde veya şehirde bulunmasının o okuldaki başarıyı etkilediği kaçınılmaz bir gerçektir. Ülkemizde gerek köy okullarındaki öğretmen yetersizliği gerekse ulaşım zorluğu o okulun başarısını etkileyeceği için çalışmamızda bu değişkene yer vermekteyiz. Okul lokasyonu 5 farklı düzeyde incelenmiştir ve bu düzeyler 1-Köy (Nüfusu 3000’den az), 2-Küçük Kasaba (Nüfusu 3000 ile 15000 arası), 3-Kasaba (Nüfusu 15000 ile 100000 arası), 4-Şehir (Nüfusu 100000 ile 1000000 arası) ve 5-Büyük Şehir (Nüfusu 1000000’den fazla) şeklinde tanımlanmıştır.

Okul Büyüklüğü (OB): Okul büyüklüğü, bir okuldaki kız ve erkek öğrencilerin toplam sayısını ifade etmektedir. Gereğinden kalabalık bir okulun veya etkin okulların büyüklüğü göz önüne alındığında okul büyüklüğü bir okulun başarısında önemli rol oynamaktadır.

Matematik Aktiviteleri (MA): Bir okulda matematik aktivitelerinin uygulanıp uygulanmadığı veya uygulanma sayısının o okuldaki matematik başarısını büyük oranda etkileyeceğini düşünmekteyiz. 5 farklı matematik aktivitesinin okul tarafından sağlanıp sağlanmadığını Evet şıkkı sayısına göre belirleyen bir değişkendir.

Öğretmen Öğrenci İlişkisi (ÖÖİ): Doğru ve güvenilir bir öğretmen-öğrenci ilişkisi kurulamadığı takdirde bu durum sadece öğrencinin matematik başarısını değil, tüm okul hayatını etkilemektedir. Bu sebeple öğretmen-öğrenci ilişkisini çalışmamıza dahil etmekteyiz. Bu puan öğrenci anketindeki öğretmen öğrenci ilişkilerini ölçmeyi amaçlayan 4’lü likert ölçeğine sahip 5 soruya verilen cevaplardan oluşmaktadır ve okul ortalaması alınarak okul

puanları belirlenmiştir. Hesaplama yapılırken “Kesinlikle Katılmıyorum” cevabı 1, diğer cevaplar 0 olarak kodlanmıştır ve okul bazında ortalaması alınmıştır.

Öğrencilerin morali (ÖM): Öğrencinin morali sadece matematik başarısını değil, okuldaki genel başarısını ve okula karşı duyduğu önemi de etkilemektedir. Bu değişken için okul anketindeki 11.soru için verilen yanıtlar 1-Tamamen katılıyorum, 2-Katılıyorum ve 3-Katılmıyorum/kesinlikle katılmıyorum olacak şekilde tekrar kodlanmıştır. Bu değerler IRT (Etki Tepki Teoremi-Item Response Theory) ölçeği kullanılarak dönüştürülmüştür. Bu değerlerin pozitif ve yüksek olması öğrenci moralinin yüksek olması anlamına gelmektedir.

Öğrencilerin davranışı (ÖD): Öğrenci davranışları o okuldaki başarıyı etkilemektedir. Yani öğrencilerin devamsızlık yapması, derslerden kaçması gibi faktörler bu okulun başarısını olumsuz yönde etkileyecektir. Bu değişken için cevaplar; 0-Tamamen katılıyorum, 1-Katılıyorum, 2-Katılmıyorum ve 3-Tamamen katılmıyorum olarak kodlanmıştır. Her bir şık IRT ölçeği kullanılarak dönüştürülmüştür. Bu değişkenin pozitif ve yüksek olması o okuldaki öğrenci davranışlarının iyi olduğunu göstermektedir.

Okul Yönetimi (OY): İşe alınacak ya da işten atılacak öğretmenlerin seçilmesi gibi okul yönetimi için önemli kararları kimin / kimlerin vereceği okul başarısında önemli bir faktör oluşturabilmektedir ve böylece verilen kararların doğruluğu da sınanmış olacaktır. Bu değişken için "okulun ana sorumlulukları arasında yer almamaktadır" şıkkı 0 ve diğer şıklar 1 olarak kodlanmıştır. Daha sonra IRT ölçeklendirmesi ile dönüşüm yapılmıştır. Bu değerlerin pozitif ve yüksek olması okul kararlarının verilmesinin okul yönetiminin sorumluluğunda olduğu sonucunu doğurur.

Detaylı Öğrenme Stratejileri (DÖS): Öğrencilere sorulan 5 farklı soru ile matematiği kullanma stratejileri belirlenmiştir. (matematiği günlük yaşantıda kullanmak, matematik problemi çözerken farklı yollar düşünmek vs.) Farklı stratejiler kullanmaya çalışmak veya matematiği başka alanlarda kullanmaya çalışmak matematiği sevdiğini veya matematiğin okul tarafından sevirildiğini göstermektedir ve bu da matematik başarısını etkileyecektir.

Matematiğe Olan İlgisi (MOİ): Öğrencilere sorulan 4 ayrı soru ile matematiğe olan ilgi puanı hesaplanmıştır. Matematik ile ilgili bir şeyler okurken eğlenirim ve matematik dersini heyecanla beklerim bu sorulardan birkaçıdır. Cevaplar IRT ile ölçeklendirildikten sonra puan hesaplanır ve bu puanın pozitif ve yüksek olması öğrencinin matematiğe oldukça ilgili olduğunu gösterir. Matematiğe olan ilgi de başarıyı artırır, bu yüzden bu değişkenin etkisi ölçülerek matematiğe olan ilginin artırılması yolları aranılabilir.

Öğretmen Davranışları (ÖGD): Bu değişken ile ilgili puan sorulan 7 farklı soruya verilen cevapların IRT ölçeği ile dönüştürülmesi sonrasında elde edilmiştir. Öğrencilerin öğrenimine engel olacak öğretmen davranışlarını içeren bu değişkenin negatif ve düşük puanlı olması tercih edilir. Pozitif ve yüksek değerler öğrencilerin öğrenimine engel olacak olan öğretmenin derse geç kalması, derste çok katı davranması gibi olumsuz faktörlerin fazla olduğunu gösterir. Öğrenci öğretmen ilişkisi ve öğretmenin davranışları her zaman için öğrencilerin örnek alacağı davranış biçimleri olacağından, öğrencinin okuldaki başarısı açısından bu değişken önemlidir.

Okulun Eğitim Kaynaklarının Kalitesi (OEKK): Okulun kaynaklarının kalitesi için hesaplanan puan ise 7 farklı soruya verilen cevaplardan IRT ölçeklendirmesi yardımı ile hesaplanmıştır. Bu kaynaklara örnek olarak kütüphane dökümanları, bilgisayar olanakları vs. verilebilir. Bir okuldaki materyallerin ve imkânların öğrencilerin eğitime katkıda bulunacağı görüşüyle matematik başarısında etkili olduğu düşünülmektedir.

Kişi Başına Gayri Safi Yurtiçi Hâsıla (GSYİH): Kişi başına gayri safi yurtiçi hâsıla bir ülkenin gelişmişlik düzeyini belirlemede çok önemli bir faktördür. Bir ülkenin gelişmişlik düzeyi ise o ülkenin eğitim seviyesi ile yakından ilişkilidir. Bu yüzden ülke bazında okulların başarısını karşılaştırmada bu değişken önemli bir rol oynamaktadır. 2001 yılı dolar bazında kullandığımız veri TÜİK' ten alınmıştır.

Okul Türü (OT): Ülkemizde matematik başarısının okul türlerine göre dağılışının önemli olduğu düşünülmektedir. Okul türleri 8 farklı kategoriye ayrılmıştır. Bunlar: 1- Genel lise, 2- Meslek lisesi, 3- Anadolu Meslek lisesi, 4- Fen lisesi, 5- Anadolu lisesi, 6- İlköğretim okulu, 7- Özel lise, 8- Polis kolejidir. İlköğretim okulu ortaöğretim düzeyinde bir okul türü değildir. Bu türde verilen matematik puanları, 15 yaş grubunda olduğu halde ilköğretime devam etmekte olan öğrencilere aittir.

Modellerde kullanılan bağımlı ve bağımsız değişkenlerin belirleyici istatistikleri Çizelge 9.3'te gösterilmektedir.

Çizelge 9.3 Belirleyici istatistikler

1. Aşama Belirleyici İstatistikler					
Değişken Adı	N	Ort.	S.Hata	Min	Max
C	4810	-	-	0.00	1.00
ES	4810	-0.96	1.08	-4.57	2.22
DÖS	4493	0.44	1.09	-3.26	3.26
MOİ	4493	0.56	1.06	-1.78	2.37

MATORDİNAL	4810	1.72	0.83	1	3
MATBERNOULLİ	4810	-	-	0	1
MATHACH(Y_{ij})	4810	427.19	97.80	142.65	830.77
2. Aşama Belirleyici İstatistikler					
Değişken Adı	N	Ort.	S.Hata	Min	Max
OL	158	-	-	1.00	5.00
ÖM	152	-0.28	1.22	-2.77	2.59
ÖD	152	-0.43	1.45	-3.61	2.61
ÖGD	158	-0.88	1.25	-4.21	2.49
OY	158	-0.76	0.61	-2.75	1.69
MA	158	0.43	0.73	0.00	3.00
ÖÖİ	158	0.07	0.04	0.00	0.44
3. Aşama Belirleyici İstatistikler					
Değişken Adı	N	Ort.	S.Hata	Min	Max
GSYİH	7	9600.86	7207.57	3389	24943
OB	8	725.15	361.99	253.50	1311.92
OEKK	8	-1.30	0.53	-2.08	-0.28

9.3 İki Aşamalı Modeller

Uygulamamızda sırasıyla Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli, Tesadüfi etkili regresyon modeli ve Sabit parametrelerin çıktığı olduğu model incelenmiştir ve bu modellerden en uygunu belirlenmiştir.

9.3.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli

Hiyerarşik lineer modellerden en basit olanı, tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modelidir. 1. aşama modeli:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij} \quad (9.1)$$

şeklindedir. Öğrenci aşaması (1. aşama) için hata terimi r_{ij} , 0 ortalamalı ve sabit σ^2 varyanslı normal dağılıma sahiptir. Bu model sayesinde, 1. aşama parametresi β_{0j} ile 1. aşamadaki çıktılar tahmin edilir. β_{0j} , j. okul için ortalama matematik başarısıdır, yani $\beta_{0j} = \mu_{Y_j}$ 'dir.

Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modelinde okul aşaması (2. aşama) modeli aşağıdaki gibi yazılır:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \quad (9.2)$$

Bu denklemde γ_{00} ana kütledeki büyük ortalama (J tane okulun matematik başarıları ortalamalarının ortalaması), u_{0j} ise j. okula ait 0 ortalamalı, τ_{00} varyanslı tesadüfi etkiyi gösterir. Birleştirilmiş model şu şekildedir:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + r_{ij} \quad (9.3)$$

Tesadüfi etkili olmasının sebebi, okul etkilerinin rasgele olarak incelenmesidir. Çıktıların varyansı aşağıdaki gibidir:

$$Var(Y_{ij}) = Var(u_{0j} + r_{ij}) = \tau_{00} + \sigma^2 \quad (9.4)$$

Burada σ^2 okul içi varyansı (değişkenliği), τ_{00} okullar arası varyansı (değişkenliği) gösterir. Tek yönlü ANOVA modelinden elde edilen yararlı bir parametre ise gruplar içi korelasyon katsayısıdır (intraclass correlation coefficient). Bu katsayı, okullar arasında matematik başarılarındaki varyans oranını ölçer ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\rho = \frac{\tau_{00}}{(\tau_{00} + \sigma^2)} \quad (9.5)$$

Çizelge 9.4 Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli çıktısı

Sabit Etkiler (Fixed Effects)	Katsayılar (Coefficients)	Standart Hata (SE)	
Büyük Ortalama γ_{00}	406.919760*	9.177287*	
Tesadüfi Etkiler (Random Effects)	Varyans Bileşenleri (Variance Components)	Serbestlik Derecesi (df)	Chi-square (χ^2)
Öğrenci Aşaması r_{ij}	4021.18694		
Okul Aşaması u_{0j}	7182.35859*	157	7855.16332
Deviyans İstatistiği	Serbestlik Derecesi		
54199.514341	2		
*p<.05, **p<.01, ***p<.001			

Toplam değişkenliğin %36'sı öğrenciler arasındaki farklılıktan, %64'ü ise okullar arasındaki farklılıktan kaynaklanmaktadır. Okullar içi (Within School) ve okullar arası (Between School) değişkenlik sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\sigma^2 / (\sigma^2 + \tau_{00}) = 4021.18694 / (4021.18694 + 7182.35859) = 0.36$$

$$\tau_{00} / (\sigma^2 + \tau_{00}) = 7182.35859 / (4021.18694 + 7182.35859) = 0.64$$

Katsayıların ve varyans bileşenlerinin anlamlı olduğu Çizelge 9.4'te gösterilmektedir. Sonuç olarak matematik başarısı öğrenciler ve okullar arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık göstermektedir.

9.3.2 Tesadüfi Katsayılı Regresyon Modeli

Tesadüfi katsayılı regresyon modelinde hem 1. aşama sabiti hem de bir veya daha fazla 1. aşama eğimleri tesadüfi olarak değişir. 1. aşama modeli:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(C_{ij}) + \beta_{2j}(ES_{ij}) + r_{ij} \quad (9.6)$$

şeklinde gösterilir. 2. aşama modeli aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \beta_{0j} &= \gamma_{00} + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} + u_{1j} \\ \beta_{2j} &= \gamma_{20} + u_{2j} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Burada γ_{00} ; büyük ortalama, γ_{10} ; cinsiyetin matematik başarısı üzerindeki ortalama etkisi, γ_{20} ; ekonomik sosyal ve kültürel statünün matematik başarısı üzerindeki ortalama etkisi, u_{0j} ; tesadüfi okul etkisidir.

Bu iki modeli birleştirdiğimizde aşağıdaki model elde edilir:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}(C_{ij}) + \gamma_{20}(ES_{ij}) + u_{0j} + u_{1j}(C_{ij}) + u_{2j}(ES_{ij}) + r_{ij} \quad (9.8)$$

Çizelge 9.5 Tesadüfi katsayılı regresyon modeli çıktısı

Sabit Etkiler (Fixed Effects)		Katsayılar (Coefficients)	Standart Hata (SE)
Büyük Ortalama γ_{00}		386.134259*	9.575972
Cinsiyetin çıktı üzerindeki ortalama etkisi γ_{10}		19.780858*	2.490583
ES'nin çıktı üzerindeki ortalama etkisi γ_{20}		10.004709*	1.338080
Tesadüfi Etkiler (Random Effects)	Varyans Bileşenleri (Variance Components)	Serbestlik Derecesi (df)	Chi-square (χ^2)
Öğrenci Aşaması r_{ij}	3802.86537		
Okul Aşaması u_{0j}	5691.85013*	146	621.66335

Ortalama cinsiyet etkisi u_{1j}	168.45320*	146	201.24838
Ortalama ES etkisi u_{2j}	39.59213*	146	194.59974
Deviyans İstatistiği		Serbestlik Derecesi	
53975.077084		7	
*p<.05, **p<.01, ***p<.001			

Çizelge 9.5'te matematik başarısı üzerinde en fazla cinsiyet değişkeninin etkili olduğu görülmektedir. Cinsiyet değişkeninin yapısına göre erkeklerin kızlardan daha başarılı olduğu söylenebilir. ES değişkenindeki 1 birimlik artış matematik başarısında 10 birimlik artış sağlamaktadır.

Bu modele göre ortalama matematik başarısı okuldan okula istatistiksel açıdan anlamlı bir şekilde değişmektedir. Bununla beraber cinsiyet ve ES değişkenlerinin matematik başarısı değerlendirilirken okuldan okula anlamlı bir farklılık gösterdiği de söylenebilir.

Deviyans istatistiği tek başına yorumlanamaz, ancak aynı veri seti için oluşturulan başka bir model ile yapılan karşılaştırmalarda yorumlanabilir. Deviyans ile ilgili yorum sabit parametrelerin çıktı olduğu regresyon modelinde incelenmiştir.

H_0 =Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli

H_1 =Tesadüfi katsayılı regresyon modeli

χ^2 istatistiği 5 serbestlik dereceli 224.44 elde edilir, yani H_0 red edilir ve Tesadüfi katsayılı regresyon modelinin daha uygun olduğuna karar verilir.

9.3.3 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Model

Sabit parametrelerin çıktı olduğu regresyon modelleri, okul özellikleri tarafından tahmin edilen her bir okuldan gelen ortalamaları kapsar. 1. aşama modeli Tesadüfi Katsayılı Regresyon modelinin ilk aşaması gibidir. 2. aşama modeli ise;

$$\begin{aligned}\beta_{0j} &= \gamma_{00} + \gamma_{01}(OL_j) + \gamma_{02}(MA_j) + \gamma_{03}(\ddot{O}\ddot{O}\ddot{I}_j) + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} + u_{1j} \\ \beta_{2j} &= \gamma_{20} + u_{2j}\end{aligned}\tag{9.9}$$

şeklindedir. Birleştirilmiş model de aşağıdaki gibidir:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}(OL_j) + \gamma_{02}(MA_j) + \gamma_{03}(\ddot{O}\ddot{O}\ddot{I}_j) + \gamma_{10}(C_j) + \gamma_{20}(ES_j) + u_{0j} + u_{1j}(C_j) + u_{2j}(ES_j) + r_{ij}\tag{9.10}$$

Bu eşitlikte u_{0j} farklı bir anlam taşımaktadır. Tesadüfi değişken u_{0j} , büyük ortalamadan j. okulun ortalamasının sapmasını gösterir.

Çizelge 9.6 Sabit parametrelerin çıktığı olduğu model çıktısı

Sabit Etkiler (Fixed Effects)	Katsayılar (Coefficients)	Standart Hata (SE)	
j. Okul Ortalama Matematik Başarısı β_{0j} için;			
Büyük Ortalama γ_{00}	289.836503*	29.770937	
Lokasyonun çıktı üzerindeki ortalama etkisi γ_{01}	29.878892*	6.880646	
MA’ın çıktı üzerindeki ortalama etkisi γ_{02}	30.305368*	10.318813	
ÖÖİ’in çıktı üzerindeki ortalama etkisi γ_{03}	-329.690048*	75.544772	
j. Okulda Cinsiyetin Ayırt Edici Etkisi β_{1j} için;			
Sabit γ_{10}	20.811322*	2.543719	
j. Okulda ES’nin Ayırt Edici Etkisi β_{1j} için;			
Sabit γ_{20}	10.295256*	1.295967	
Tesadüfi Etkiler (Random Effects)	Varyans Bileşenleri (Variance Components)	Serbestlik Derecesi (df)	Chi-square (χ^2)
Öğrenci Aşaması r_{ij}	3804.10839		
Okul Aşaması u_{0j}	4599.42059*	143	548.65483
Ortalama cinsiyet etkisi u_{1j}	164.04780*	146	200.31956
Ortalama ES etkisi u_{2j}	31.95718*	146	194.94910
Deviyans İstatistiği		Serbestlik Derecesi	
53900.925525		7	
*p<.05, **p<.01, ***p<.001			

Çizelge 9.6'da matematik başarısı üzerinde en fazla zayıf öğretmen öğrenci ilişkisi değişkeninin etkili olduğu görülmektedir. Bu değişkenin katsayısının negatif olması beklenen bir sonuçtur. Çünkü değişken negatif bir anlam taşımaktadır. Sırasıyla matematik aktiviteleri ve okul lokasyonu değişkenlerinin anlamlı ve pozitif bir etkiye sahip olduğunu söyleyebiliriz. Matematik aktivitesindeki bir birimlik artış matematik başarısı üzerinde 30.31 birimlik artışa,

lokasyondaki bir birimlik artış ise matematik başarısı üzerinde 29.88 birimlik artışa neden olur. Sonuç olarak okullar arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık vardır.

Sabit parametrelerin çıktığı olduğu regresyon modeli ve Tesadüfi katsayılı regresyon modeli arasındaki deviyans farkı, iki modelde tahmin edilen parametre farkına eşit serbestlik derecesi ile büyük örnek χ^2 dağılımına uymaktadır. χ^2 istatistiğinin büyük değerleri, indirgenmiş modelin uygun olduğunu söyleyen H_0 hipotezinin yanlış olduğunun kanıtıdır.

Deviyans istatistiğine bakılırsa;

H_0 = Tesadüfi katsayılı regresyon modeli

H_1 = Sabit parametrelerin çıktığı olduğu model

χ^2 istatistiği 0 serbestlik dereceli 74.15 elde edilir, yani H_0 red edilir. Yapılan karşılaştırmaların sonucunda kullanılması en uygun modelin Sabit parametrelerin çıktığı olduğu model olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu modelin 1. aşama kalıntıları Kolmogorov Smirnov Testine göre normal dağılıma uymaktadır ($p=0.201>0.05$).

9.4 Üç Aşamalı Model

Mevcut verilerle 3. aşama bölgeler, 2. aşama okullar ve 1. aşama öğrencilerden oluşan üç aşamalı model aşağıdaki gibi kurulur.

1. aşama modeli;

$$Y_{ijk} = \pi_{0jk} + \pi_{1jk}(C) + \pi_{2jk}(ES) + e_{ijk} \quad (9.11)$$

2. aşama modeli;

$$\begin{aligned} \pi_{0jk} &= \beta_{00k} + \beta_{01k}(\text{ÖM}) + \beta_{02k}(\text{ÖD}) + \beta_{03k}(MA) + r_{0jk} \\ \pi_{1jk} &= \beta_{10k} \\ \pi_{2jk} &= \beta_{20k} \end{aligned} \quad (9.12)$$

3. aşama modeli;

$$\begin{aligned} \beta_{00k} &= \gamma_{000} + \gamma_{001}(GSYIH) + u_{00k} \\ \beta_{01k} &= \gamma_{010} \\ \beta_{02k} &= \gamma_{020} \\ \beta_{03k} &= \gamma_{030} \\ \beta_{10k} &= \gamma_{100} \\ \beta_{20k} &= \gamma_{200} \end{aligned} \quad (9.13)$$

şeklindedir. Birleştirilmiş model;

$$Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}(C) + \gamma_{200}(ES) + \gamma_{010}(\ddot{O}M) + \gamma_{020}(\ddot{O}D) + \gamma_{030}(MA) + \gamma_{001}(GSY\ddot{I}H) + e_{ijk} + r_{0jk} + u_{00k} \quad (9.14)$$

Çizelge 9.7 Üç aşamalı model çıktısı

Sabit Etkiler (Fixed Effects)	Katsayılar (Coefficients)	Standart Hata (SE)	
Sabit, γ_{000}	361.037412****	12.705913	
Öğrenci Özellikleri			
Cinsiyet, γ_{100}	22.642081****	1.735085	
ES, γ_{200}	9.917752****	1.035164	
Okul Özellikleri			
Öğrenci Morali, γ_{010}	11.181986****	2.225814	
Öğrenci Davranışları, γ_{020}	8.309269**	4.004561	
Matematik Aktiviteleri, γ_{030}	12.579526**	5.420742	
Bölge Özellikleri			
GSYİH, γ_{001}	0.001224*	0.000485	
Tesadüfi Etkiler (Random Effects)	Varyans Bileşenleri (Variance Components)	Serbestlik Derecesi (df)	Chi-square (χ^2)
Öğrenci Aşaması, e_{ijk}	4013.71783		
Okul Aşaması, r_{0jk}	4103.78809****	142	4074.68685
Bölge Aşaması, u_{00k}	434.78807***	5	20.00814
Deviyans İstatistiği		Serbestlik Derecesi	
52174.585176		10	
*p<.10, **p<.05, ***p<.01, ****p<.001			

Üç aşamalı model sonucuna göre, matematik başarısında modele dâhil edilen tüm değişkenlerin istatistiksel olarak anlamlı olduğu gözlemlenmiştir. Matematik başarısı üzerinde en fazla etkiye sahip olan değişkenin cinsiyet, en az etkiye sahip olan değişkenin ise GSYİH olduğu görülmektedir. Örneğin ES'deki bir birimlik artış matematik başarı puanında 9.92 birimlik bir artış yaratırken, kişi başına düşen gayri safi yurtiçi hasılanın ($p=0.052 < 0.1$ 'e göre anlamlı) 1000\$ artması halinde matematik başarısı 1.2 puan artmaktadır. Doğu Anadolu ve Güneydoğu Anadolu bölgeleri gibi doğu bölgelerindeki kişi başı GSYİH'nın düşük olması bölgeler arasında matematik başarısı açısından farklılık yaratırken, bir okuldaki matematik aktivitelerinin sayısı, öğrencilerin davranışı ve morali okul bazında farklılığa yol açmaktadır.

Öğrenciler arasındaki farklılık ise temelde cinsiyet farklılığından kaynaklanmaktadır, erkeklerin kızlara oranla daha başarılı olduğu görülmektedir. Sosyal ve ekonomik durumun yüksek olmasının matematik başarısıyla ilişkisi ise doğru orantılıdır. Buradan hareketle devletimizin doğu illerindeki yaşam standardını yükseltmek, okullardaki matematik aktiviteleri sayısının artırmak ve öğrencilerin moralini yüksek tutmak adına sosyal aktivitelerin düzenlenmesi sonucunda daha yüksek kültür düzeyine sahip gençler yetiştirilebilir.

9.5 İki Aşamalı Bernoulli Modeli

İki aşamalı bernoulli modelinde bağımlı değişken olan matematik başarısı eğer Türkiye ortalaması altında ise 0, üstünde ise 1 olarak kodlanmıştır. Böylece belirli özelliklerdeki bir öğrencinin başarılı olup olmadığı tespit edilmiştir. Çizelgede katsayılar sütunundaki parantez içindeki değerler standart hataları, odds oranı sütunundaki parantez içindeki değerler ise güven aralıklarını göstermektedir.

1. aşama modeli;

$$\eta_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(ES) + \beta_{2j}(C) \quad (9.15)$$

2. aşama modeli;

$$\begin{aligned} \beta_{0j} &= \gamma_{00} + \gamma_{01}(OL) + \gamma_{02}(MA) + \gamma_{03}(\ddot{O}\ddot{O}\ddot{I}) + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} \\ \beta_{2j} &= \gamma_{20} \end{aligned} \quad (9.16)$$

şeklindedir.

Çizelge 9.8 İki aşamalı bernoulli modeli çıktısı

Sabit Etkiler (Fixed Effects)	Katsayılar (Coefficients)	Odds Oranı
Sabit, γ_{00}	-2.561710** (0.729750)	0.077173 (0.018,0.326)
Öğrenci Özellikleri		
ES, γ_{10}	0.329515*** (0.044359)	1.390294 (1.275,1.517)
Cinsiyet, γ_{20}	0.542452*** (0.095912)	1.720220 (1.425,2.076)

Okul Özellikleri			
Lokasyon, γ_{01}	0.688856*** (0.176220)	1.991436 (1.407,2.819)	
Matematik Aktiviteleri, γ_{02}	0.626757** (0.214814)	1.871532 (1.225,2.859)	
Öğrenci-Öğretmen ilişkisi, γ_{03}	-8.884748* (4.053684)	0.000138 (0.000,0.412)	
Tesadüfi Etkiler (Random Effects)	Varyans Bileşenleri (Variance Components)	Serbestlik Derecesi (df)	Chi-square (χ^2)
Okul Aşaması, u_{0j}	2.39857***	154	1307.29050
*p<.05, **p<.01, ***p<.001			

Çizelge 9.8’den de görüldüğü üzere matematik başarısında en fazla etkili olan değişkenin zayıf öğrenci-öğretmen ilişkisi, daha sonra sırasıyla okul lokasyonu, matematik aktiviteleri ve cinsiyet olduğu görülmektedir. Zayıf öğretmen öğrenci ilişkisi ise matematik başarısı üzerinde beklendiği üzere negatif ve anlamlı bir etki yapmaktadır. Parametresi anlamlı olan cinsiyet değişkenine ait 1.72 olarak bulunan odds oranı, erkeklerin kızlara göre matematikte başarılı olma olasılığını 1.72 kat artırmaktadır. Parametreleri anlamlı ve 1’den büyük odds oranına sahip olan Cinsiyet, Okul Lokasyonu ve Matematik aktiviteleri değişkenlerinin ortalama matematik başarısı üzerinde önemli risk faktörü olduğu söylenebilir. Zayıf öğrenci öğretmen ilişkisi değişkeninde meydana gelecek değişim matematikte başarısız olma olasılığını çok büyük oranda artırmaktadır. ES’deki bir birimlik artış matematik başarısını %51 arttıracaktır. Örneğin; Cinsiyet = Erkek (1), ES= -0.50723, Okul Lokasyonu = Şehir (4), Matematik Aktiviteleri = 1, Öğrenci Öğretmen İlişkisi = 0.1 olan bir öğrencinin başarılı olup olmadığını modelde değerler yerine konularak tahmin edilebilir. Buna göre η_{ij} =0.31 iken başarılı olma olasılığı da 0.58 olarak hesaplanır. Böylece bu öğrencinin başarılı olması beklenir.

Ülkemizde ortalama matematik başarısını arttırmak için öğrenci öğretmen ilişkisine daha çok önem vermeliyiz, bunun için de öğretmen ve öğrencilerin birlikte katılabileceği çeşitli aktiviteler düzenlenmesi önerilebilir. Küçük yerleşim yerlerindeki okulların maddi ve manevi olarak desteklenmesi gerektiği görülmektedir. Ayrıca okullardaki matematik aktivitelerinin artırılması okulların başarı düzeylerini de arttıracaktır.

9.6 Üç Aşamalı Bernoulli Modeli

Üç aşamalı bernoulli modelinde bağımlı değişken olan matematik başarısı eğer Türkiye ortalaması altında ise 0, üstünde ise 1 olarak kodlanmıştır. Böylece belirli özelliklerdeki bir öğrencinin başarılı olup olmadığı tespit edilmiştir. Çizelgede katsayılar sütunundaki parantez içindeki değerler standart hataları, odds oranı sütunundaki parantez içindeki değerler de güven aralıklarını göstermektedir.

1. aşama modeli;

$$\eta_{ijk} = \pi_{0jk} + \pi_{1jk}(C) + \pi_{2jk}(ES) + \pi_{3jk}(DÖS) + \pi_{4jk}(MOİ) \quad (9.17)$$

2. aşama modeli;

$$\begin{aligned} \pi_{0jk} &= \beta_{00k} + \beta_{01k}(OL) + \beta_{02k}(ÖGD) + r_{0jk} \\ \pi_{1jk} &= \beta_{10k} \\ \pi_{2jk} &= \beta_{20k} \end{aligned} \quad (9.18)$$

3. aşama modeli;

$$\begin{aligned} \beta_{00k} &= \gamma_{000} + \gamma_{001}(OB) + u_{00k} \\ \beta_{01k} &= \gamma_{010} \\ \beta_{02k} &= \gamma_{020} \\ \beta_{03k} &= \gamma_{030} \\ \beta_{04k} &= \gamma_{040} \end{aligned} \quad (9.19)$$

şeklindedir.

Çizelge 9.9 Üç aşamalı bernoulli modeli çıktısı

Sabit Etkiler (Fixed Effects)	Katsayılar (Coefficients)	Odds Oranı
Sabit, γ_{000}	2.725765 (1.846561)	15.268091 (0.258,902.184)
Öğrenci Özellikleri		
Cinsiyet, γ_{100}	0.494711*** (0.046523)	1.640025 (1.497,1.797)
ES, γ_{200}	0.289726*** (0.036723)	1.336062 (1.243,1.436)

Detaylı Öğrenme Stratejileri, γ_{300}	-0.133174 ^{***} (0.037366)	0.875313 (0.813,0.942)	
Matematiğe Olan İlgi, γ_{400}	0.506730 ^{***} (0.039287)	1.659854 (1.537,1.793)	
Okul Özellikleri			
Lokasyon, γ_{010}	0.232432 ^{**} (0.073002)	1.261665 (1.093,1.457)	
Öğretmen Davranışları, γ_{020}	-0.164604 ^{**} (0.058236)	0.848230 (0.756,0.951)	
Okul Türü Özellikleri			
Okul Büyüklüğü, γ_{001}	-0.004237 (0.002065)	0.995772 (0.991,1.000)	
Tesadüfi Etkiler (Random Effects)	Varyans Bileşenleri (Variance Components)	Serbestlik Derecesi (df)	Chi-square (χ^2)
Okul Türü Aşaması, u_{00k}	3.97647 ^{***}	6	341.47478
Okul Aşaması, r_{0jk}	1.11130 ^{***}	148	907.27971
*p<.05, **p<.01, ***p<.001			

Çizelge 9.9'a göre matematik başarısına en çok etki eden faktörler öğrencinin matematiğe olan ilgisi ve cinsiyettir. Öğrencinin matematiğe olan ilgisindeki bir birimlik artış matematikte başarılı olmasını %61 arttırıyorken, öğrencinin erkek olması başarıyı 1.64 kat arttırmaktadır. Buna göre erkeklerin kızlardan daha başarılı olduğunu söyleyebiliriz. Okullar ve okul türleri arasında matematik başarısı açısından anlamlı farklılıkların olduğu fakat matematik başarısında okul büyüklüklerinin önemli olmadığı sonucuna varılmıştır. Öğrenme stratejilerinde ise öğrencilerin detaylara fazlaca inmesinin getirdiği bir sorun ile karşı karşıya kalmaktayız. Öğrenci fazla detaylı düşünerek basit problemi zorlaştırabilir. Öğretmen davranışlarının açılımı öğrencilerin öğrenmesine engel olabilecek davranışlardan oluştuğu için bu değişkenin negatif çıkması beklenen bir sonuçtur. Öğretmenin yapacağı olumsuz davranışların engellenmesi sonucunda öğrencilerin başarısız olması %31 azalacaktır. Öğrencinin başarılı olup olmadığı bir önceki modeldeki gibi hesaplanabilir.

Matematik başarısını arttırmada önceki modellerde de olduğu gibi ekonomik sosyal ve kültürel açıdan gelişimi sağlamak ve matematik aktivitelerinin arttırılmasının yanı sıra, küçük yerleşim yerlerine daha fazla ilgi gösterilmelidir. Ayrıca detaylı öğrenme stratejilerinde ve öğretmen davranışlarında iyileştirmelere gidilmesi gerekmektedir.

9.7 İki Aşamalı Ordinal Model

İki aşamalı ordinal modelde bağımlı değişken olan matematik başarısı Türkiye ortalamasının (423) altında ise 1 (Başarısız), Türkiye ortalaması ile OECD ülkeleri ortalaması (489) arasında ise 2 (Orta Başarılı) ve OECD ülkeleri ortalaması üstünde ise 3 (Başarılı) olarak kodlanmıştır. Böylece belirli özelliklerdeki bir öğrencinin başarı derecesi tespit edilmiştir. Çizelgedeki katsayılar sütunundaki parantez içindeki değerler standart hataları, odds oranı sütunundaki parantez içindeki değerler de güven aralıklarını göstermektedir.

1. aşama modeli;

$$\begin{aligned}\eta_{1ij} &= \beta_{0j} + \beta_{1j}(ES) + \beta_{2j}(C) \\ \eta_{2ij} &= \beta_{0j} + \beta_{1j}(ES) + \beta_{2j}(C) + \delta_{2j}\end{aligned}\quad (9.20)$$

2. aşama modeli;

$$\begin{aligned}\beta_{0j} &= \gamma_{00} + \gamma_{01}(OL) + \gamma_{02}(MA) + \gamma_{03}(\ddot{O}\ddot{O}\ddot{I}) + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} \\ \beta_{2j} &= \gamma_{20} \\ \delta_{2j} &= \delta_2\end{aligned}\quad (9.21)$$

şeklindedir.

Çizelge 9.10 İki aşamalı ordinal model çıktısı

Sabit Etkiler (Fixed Effects)	Katsayılar (Coefficients)	Odds Oranı
Sabit, γ_{00}	1.950616** (0.598610)	7.033020 (2.159,22.912)
d(2)	1.646905*** (0.055092)	5.190888 (4.660,5.783)
Öğrenci Özellikleri		
ES, γ_{10}	-0.313769*** (0.036377)	0.730687 (0.680,0.785)

Cinsiyet, γ_{20}	-0.595924*** (0.070021)	0.551053 (0.480,0.632)	
Okul Özellikleri			
Lokasyon, γ_{01}	-0.574704*** (0.136946)	0.562872 (0.430,0.737)	
Matematik Aktiviteleri, γ_{02}	-0.700734** (0.185902)	0.496221 (0.344,0.716)	
Öğrenci Öğretmen İlişkisi, γ_{03}	10.671699* (4.041406)	43118.135126 (14.850,125196224.86)	
Tesadüfi Etkiler (Random Effects)	Varyans Bileşenleri (Variance Components)	Serbestlik Derecesi (df)	Chi-square (χ^2)
Okul Aşaması, u_{0j}	2.42212***	154	1781.46069
*p<.05, **p<.01, ***p<.001			

Çizelge 9.10'dan da görüldüğü üzere bir öğrencinin başarısız olmasında en etkili faktör öğretmen öğrenci ilişkisinin zayıf olmasıdır. Başarılı olmasında en etkili faktörler ise sırasıyla ES, okulun lokasyonu, cinsiyet ve okuldaki uygulanan matematik aktiviteleridir. Ayrıca hem öğrenciler hem de okullar arasında matematik başarıları açısından istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık vardır. Kukla değişkenlerde diğer tüm değişkenler sabit iken $\exp(\beta_k)$; fark oranını veya faktör değişimini verir. Sürekli değişkenlerde ise $(\exp(\beta) - 1) \cdot 100$ işlemi ile yüzde değişime bulunur. Modele göre elde edilen sonuçlar şunlardır:

1. Erkek öğrenciler kız öğrencilere göre daha başarılıdır çünkü erkek öğrencilerin başarısız olma olasılığı kızlara göre 0.55 kat daha azdır.
2. Hiçbir matematik aktivitesi uygulamayan okullar 1 tane matematik aktivitesi uygulayan okullara göre 0.50 kat daha başarısızdır.
3. Küçük yerleşim yerlerinden büyük yerleşim yerlerine geçildikçe matematik başarıları artmaktadır. Örneğin köy okulları kasaba okullarına göre 0.56 kat daha başarısızdır.
4. ES'deki 1 birimlik artış matematikte başarı oranını %27 oranında artırmaktadır.
5. Öğretmen öğrenci ilişkisindeki azalış ise matematik başarısını en fazla azaltan etkidir.

Örneğin bir öğrencinin ve okuduğu okulun özelliklerinin, Cinsiyet= Erkek (1), ES=1, Okul Lokasyonu=3 (Kasaba, Nüfusu 15000 ile 100000 arası), Matematik Aktiviteleri=2 ve Öğretmen Öğrenci İlişkisi=0.07 olduğu durumda bu öğrencinin başarı olasılıkları;

Matematikte Başarısız olma olasılığı: %21

Matematikte Orta Derecede Başarılı olma olasılığı: %37

Matematikte Başarılı olma olasılığı: %42 olarak hesaplanır.

9.8 Üç Aşamalı Ordinal Model

Üç aşamalı ordinal modelde bağımlı değişken olan matematik başarıları Türkiye ortalamasının (423) altında ise 1 (Başarısız), Türkiye ortalaması ile OECD ülkeleri ortalaması (489) arasında ise 2 (Orta Başarılı) ve OECD ülkeleri ortalaması üstünde ise 3 (Başarılı) olarak kodlanmıştır. Böylece belirli özelliklerdeki bir öğrencinin başarı derecesi tespit edilmiştir. Çizelgedeki katsayılar sütunundaki parantez içindeki değerler standart hataları, odds oranı sütunundaki parantez içindeki değerler de güven aralıklarını göstermektedir.

1. aşama modeli;

$$\eta_{ijk} = \pi_{0jk} + \pi_{1jk}(DÖS) + \pi_{2jk}(MOI) \quad (9.22)$$

2. aşama modeli;

$$\begin{aligned} \pi_{0jk} &= \beta_{00k} + \beta_{01k}(OL) + \beta_{02k}(OY) + r_{0jk} \\ \pi_{1jk} &= \beta_{10k} \\ \pi_{2jk} &= \beta_{20k} \end{aligned} \quad (9.23)$$

3. aşama modeli;

$$\begin{aligned} \beta_{00k} &= \gamma_{000} + \gamma_{001}(OEKK) + u_{00k} \\ \beta_{01k} &= \gamma_{010} \\ \beta_{02k} &= \gamma_{020} \\ \beta_{10k} &= \gamma_{100} \\ \beta_{20k} &= \gamma_{200} \end{aligned} \quad (9.24)$$

şeklindedir.

Çizelge 9.11 Üç aşamalı ordinal model çıktısı

Sabit Etkiler (Fixed Effects)	Katsayılar (Coefficients)	Odds Oranı	
Sabit, γ_{000}	-2.433059* (0.640206)	0.087768 (0.021,0.361)	
d(2)	1.734322*** (0.035408)	5.665085 (5.285,6.072)	
Öğrenci Özellikleri			
Detaylı Öğrenme Stratejileri, γ_{100}	0.108963** (0.031607)	1.115121 (1.048,1.186)	
Matematiğe Olan İlgi, γ_{200}	-0.544443*** (0.047457)	0.580165 (0.529,0.637)	
Okul Özellikleri			
Lokasyon, γ_{010}	-0.330987*** (0.072858)	0.718215 (0.622,0.829)	
Okul Yönetimi, γ_{020}	0.237706 (0.246167)	1.268336 (0.781,2.061)	
Okul Türü Özellikleri			
Okulun Eğitim Kaynaklarının Kalitesi, γ_{001}	-2.505528* (0.992868)	0.081632 (0.009,0.732)	
Tesadüfi Etkiler (Random Effects)	Varyans Bileşenleri (Variance Components)	Serbestlik Derecesi (df)	Chi-square (χ^2)
Okul Aşaması, $r_{o\ jk}$	1.35948***	148	1357.33691
Okul Türü Aşaması, u_{00k}	4.57819***	6	195.77519
*p<.05, **p<.01, ***p<.001			

Çizelge 9.11’den de görüldüğü üzere, matematikte başarısızlığa sebep olan etkenler sırasıyla okul yönetimi ve detaylı öğrenme stratejileridir. Fakat okul yönetimi istatistiksel açıdan anlamlı değildir. Matematikte başarıya etki eden etkenler ise okuldaki eğitim kaynaklarının kalitesi, öğrencinin matematiğe olan ilgisi ve okulun lokasyonudur. Ayrıca öğrenciler, okullar ve okul türleri arasında matematik başarıları açısından istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık vardır. Modele göre elde edilen sonuçlar şunlardır:

1. Okulun küçük yerleşim yerinde bulunması başarı için negatif bir etkidir. Örneğin köy okulları kasaba okullarına göre 0.71 kat daha başarısızdır.
2. Öğretmen alımı veya işten çıkarma gibi kararların okul yönetimi tarafından bizzat alınması matematik başarısını %46 oranında düşürmektedir.
3. Öğrencinin matematiğe olan ilgisinin artması matematik başarısını %21 oranında artırmaktadır.
4. Öğrencinin çok fazla detaya inmesi matematik başarısını %41 oranında düşürmektedir.
5. Okuldaki eğitim kaynaklarının kalitesinin artması ise matematik başarısını %3 artırmaktadır.

Örneğin bir öğrencinin, okuduğu okulun ve okul türünün özelliklerinin, Detaylı Öğrenme Stratejileri=0.5, Matematiğe Olan İlgi=1.5, Okul Lokasyonu=3 (Kasaba, Nüfusu 15000 ile 100000 arası), Okul Yönetimi=0.76 ve Eğitim Kaynaklarının Kalitesi=-1.3 olduğu durumda bu öğrencinin başarı olasılıkları;

Matematikte Başarısız olma olasılığı: %33

Matematikte Orta Derecede Başarılı olma olasılığı: %41

Matematikte Başarılı olma olasılığı: %26 olarak hesaplanır.

10. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu uygulamada Türkiye’deki öğrencilerin 2003 yılı Matematik başarısını ölçmek için farklı modeller ve farklı veri setleri kullanılmıştır. İlk olarak iki aşamalı ve üç aşamalı modeller kurulmuştur. Daha sonra iki ve üç aşamalı modeller için nominal ve ordinal bağımlı değişkenler ele alınarak başarı seviyesi belirlenmeye çalışılmıştır. Böylece anlatılan tüm modellerin uygulaması yapılmıştır.

Uygulamada PISA 2003 çalışmasından elde edilen verilerden faydalanılmıştır. Bu verilerdeki kayıp değerlerin silinmesi ve değişkenlerin seçilmesi gibi işlemlerin yapılması sonucunda analizler yapılmıştır. Analizlerde HLM 6.04 ve SPSS 15.0 paket programları kullanılmıştır.

İki aşamalı modellerde 1. aşamayı öğrenciler 2. aşamayı da okullar oluşturmaktadır. Uygulamada ilk olarak iki aşamalı modellerden *Tesadüfî Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli* kullanılmıştır. Bu model sonucunda toplam değişkenliğin %36’sının öğrenciler arasındaki farklılıktan, %64’ünün ise okullar arasındaki farklılıktan kaynaklandığı gösterilmiştir. Sonuç olarak bu modelde matematik başarısının öğrenciler ve okullar arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık gösterdiği görülmüştür.

İkinci olarak iki aşamalı modellerden *Tesadüfî Katsayılı Regresyon Modeli* kullanılmıştır. Bu modelde öğrenci özelliklerinden cinsiyet ve ekonomik, sosyal ve kültürel statünün matematik başarısını etkilediği düşünülerek 1. aşama modeline bu değişkenler dâhil edilmiştir. Bu modelde, matematik başarısı üzerinde en fazla cinsiyet değişkeninin etkili olduğu görülmektedir. Cinsiyet değişkeninin yapısına göre erkeklerin kızlardan daha başarılı olduğu söylenebilir. ES değişkenindeki 1 birimlik artış, ortalama matematik başarısında 10 birimlik artış sağlamaktadır. Bu modele göre ortalama matematik başarısı okuldan okula istatistiksel olarak anlamlı bir şekilde değişmektedir. Bununla beraber cinsiyet ve ES değişkenlerinin matematik başarısı değerlendirilirken okuldan okula anlamlı bir farklılık gösterdiği görülmüştür.

Üçüncü olarak iki aşamalı modellerden *Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Model* kullanılmıştır. Bu modelde 1. aşamada cinsiyet ile ekonomik, sosyal ve kültürel statü, 2. aşamada ise okulun lokasyonu, okuldaki matematik aktivitelerinin sayısı ve öğrenci-öğretmen ilişkisi kullanılmıştır. Bu modelde, matematik başarısı üzerinde en fazla zayıf öğretmen öğrenci ilişkisi değişkeninin etkili olduğu görülmektedir. Bu değişkenin katsayısının negatif olması beklenen bir sonuçtur. Çünkü değişken negatif bir anlam taşımaktadır. Sırasıyla matematik aktivitelerinin sayısı ve okul lokasyonu değişkenlerinin anlamlı ve pozitif bir etkiye sahip olduğu gösterilmiştir. Matematik aktivitesindeki bir birimlik artış matematik

başarısı üzerinde 30.31 birimlik artışa, lokasyondaki bir birimlik artış ise matematik başarısı üzerinde 29.88 birimlik artışa neden olmuştur. Sonuç olarak okullar arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık vardır.

Dördüncü olarak 1. aşama öğrenciler, 2. aşama okullar ve 3. aşama bölgeler olmak üzere **Üç Aşamalı** bir model kurulmuştur. İlk aşamada cinsiyet ile ekonomik, sosyal ve kültürel statü, 2. aşamada öğrencilerin morali, öğrencilerin davranışları ve okuldaki matematik aktivitelerinin sayısı, 3. aşamada da Kişi Başına Düşen Gayri Safi Yurtiçi Hâsıla değişkenleri kullanılmıştır. Üç aşamalı model sonucuna göre, matematik başarısında modele dâhil edilen tüm değişkenlerin istatistiksel olarak anlamlı olduğu gözlemlenmiştir. Matematik başarısı üzerinde en fazla etkiye sahip olan değişkenin cinsiyet, en az etkiye sahip olan değişkenin ise GSYİH olduğu görülmektedir. Örneğin ES'deki bir birimlik artış matematik başarı puanında 9.92 birimlik bir artış yaratırken, kişi başına düşen gayri safi yurtiçi hasılanın ($p=0.052 < 0.1$ 'e göre anlamlı) 1000\$ artması halinde matematik başarısı 1.2 puan artmaktadır. Doğu Anadolu ve Güneydoğu Anadolu bölgeleri gibi doğu bölgelerindeki kişi başı GSYİH'nın düşük olması bölgeler arasında matematik başarısı açısından farklılık yaratırken, bir okuldaki matematik aktivitelerinin sayısı, öğrencilerin davranışı ve morali okul bazında farklılığa yol açmaktadır. Öğrenciler arasındaki farklılık ise temelde cinsiyet farklılığından kaynaklanmaktadır, erkeklerin kızlara oranla daha başarılı olduğu görülmektedir. Sosyal ve ekonomik durumun yüksek olmasının matematik başarısıyla ilişkisi ise doğru orantılıdır.

Beşinci olarak **İki Aşamalı Bernoulli Modeli** kullanılmıştır. Bu modelde matematik başarısında en fazla etkili olan değişkenin öğrenci-öğretmen ilişkisi, daha sonra sırasıyla okul lokasyonu, matematik aktiviteleri ve cinsiyet olduğu gösterilmiştir. Zayıf öğretmen öğrenci ilişkisi ise matematik başarısı üzerinde beklediği üzere negatif ve anlamlı bir etki yapmaktadır. Cinsiyet değişkeninde erkeklerin kızlara göre başarılı olma olasılığını 1.72 kat artırmaktadır. Ekonomik, sosyal ve kültürel statü, Cinsiyet, Okul lokasyonu ve Matematik aktiviteleri değişkenlerinin ortalama matematik başarısı üzerinde önemli risk faktörü olduğu gösterilmiştir. Zayıf öğrenci öğretmen ilişkisi değişkeninde meydana gelecek 1 birimlik artış matematikte başarısız olma olasılığını çok büyük oranda artırdığı gösterilmiştir.

Altıncı olarak **Üç Aşamalı Bernoulli Modeli** kullanılmıştır. Bu modele göre, matematik başarısına en çok etki eden faktörler öğrencinin matematiğe olan ilgisi ve cinsiyettir. Öğrencinin matematiğe olan ilgisindeki bir birimlik artış matematikte başarılı olmasını %61 arttırıyorken, öğrencinin erkek olması başarıyı 1.64 kat artırmaktadır. Buna göre erkeklerin kızlardan daha başarılı olduğunu söylenebilir. Okullar ve okul türleri arasında matematik

başarısı açısından anlamlı farklılıkların olduğu fakat matematik başarısında okul büyüklüklerinin önemli olmadığı sonucuna varılmıştır. Öğrenme stratejilerinde ise detaylara fazlaca inmenin getirdiği bir sorun ile karşı karşıya kalındığı görülmüştür. Öğrenci fazla detaylı düşünürse çok zorlanmaktadır. Öğretmen davranışlarının açılımı öğrencilerin öğrenmesine engel olabilecek davranışlardan oluştuğu için bu değişkenin negatif çıkması beklenen bir sonuçtur. Öğretmenin yapacağı olumsuz davranışların engellenmesi sonucunda öğrencilerin başarısız olması %31 azalacaktır.

Yedinci olarak **İki Aşamalı Ordinal Model** kullanılmıştır. Bu modele göre, bir öğrencinin başarısız olmasında en etkili faktör öğretmen öğrenci ilişkisinin zayıf olmasıdır. Başarılı olmasında en etkili faktörler ise sırasıyla ES, okulun lokasyonu, cinsiyet ve okuldaki uygulanan matematik aktiviteleridir. Ayrıca hem öğrenciler hem de okullar arasında matematik başarıları açısından istatistiksel açıdan anlamlı farklılık olduğu görülmüştür. Modele göre elde edilen sonuçlar şunlardır:

1. Erkek öğrenciler kız öğrencilere göre daha başarılıdır çünkü erkek öğrencilerin başarısız olma olasılığı kızlara göre 0.55 kat daha azdır.
2. Hiçbir matematik aktivitesi uygulamayan okullar 1 tane matematik aktivitesi uygulayan okullara göre 0.50 kat daha başarısızdır.
3. Küçük yerleşim yerlerinden büyük yerleşim yerlerine geçildikçe matematik başarısı artmaktadır. Örneğin köy okulları kasaba okullarına göre 0.56 kat daha başarısızdır.
4. ES'deki 1 birimlik artış matematikte başarı oranını %27 oranında artırmaktadır.
5. Öğretmen öğrenci ilişkisindeki azalış ise matematik başarısını en fazla azaltan etkidir.

Sekizinci olarak **Üç Aşamalı Ordinal Model** kullanılmıştır. Bu modele göre, matematikte başarısızlığa sebep olan etkenler sırasıyla okul yönetimi ve detaylı öğrenme stratejileridir. Matematikte başarıya etki eden etkenler ise okuldaki eğitim kaynaklarının kalitesi, öğrencinin matematiğe olan ilgisi ve okulun lokasyonudur. Ayrıca öğrenciler, okullar ve okul türleri arasında matematik başarısı açısından istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık vardır. Modele göre elde edilen sonuçlar şunlardır:

1. Okulun küçük yerleşim yerinde bulunması başarı için negatif bir etkidir. Örneğin köy okulları kasaba okullarına göre 0.71 kat daha başarısızdır.
2. Öğretmen alımı veya işten çıkarma gibi kararların okul yönetimi tarafından bizzat alınması matematik başarısını %46 oranında düşürmektedir.

3. Öğrencinin matematiğe olan ilgisinin artması matematik başarısını %21 oranında artırmasını sağlamaktadır.
4. Öğrencinin çok fazla detaya inmesi matematik başarısını %41 oranında düşürmektedir.
5. Okuldaki eğitim kaynaklarının kalitesinin artması ise matematik başarısını %3 artırmaktadır.

İncelenen modellerden hareketle, devletimiz doğu illerindeki yaşam standardını yükseltmek, okullardaki matematik aktiviteleri sayısını artırmak ve öğrencilerin moralini yüksek tutmak adına sosyal aktivitelerin düzenlenmesi sonucunda daha yüksek kültür düzeyine sahip başarılı gençler yetiştirebilir. Ayrıca ülkemizde ortalama matematik başarısını arttırmak için zayıf öğrenci öğretmen ilişkisini güçlendirmemiz gerektiği, bunun için de öğretmen ve öğrencilerin birlikte katılabileceği çeşitli okul içi aktiviteler düzenlenmesi önerilebilir. Ülkemizde gerek köy okullarındaki öğretmen yetersizliği gerekse ulaşım zorluğu o okulun başarısını etkilemektedir. Bununla birlikte küçük yerleşim yerlerindeki okulların maddi ve manevi olarak desteklenmesi gerektiği görülmektedir. Bu yerlere eğitim için ayrılan payın artırılması bu sorunu çözmede en büyük etkenlerden biridir. Ekonomik sosyal ve kültürel statüsü düşük olan ailelerdeki çocukların küçük yaşta çalışmaya mecbur kalmaları okuldaki başarılarını etkilemektedir. Bu durum ülkemizin doğusunda çocukların okula gitmesine bile engel olabilmektedir. Bu sebeple ekonomik sosyal ve kültürel açıdan gelişimi sağlanmalıdır. Matematik başarısını arttırmada diğer bir konu da detaylı öğrenme stratejilerinde ve öğretmen davranışlarında iyileştirmelere gidilmesi gerektiğidir. Sonuç olarak, öğretmen seçimlerinde daha dikkatli davranılması ve öğretmen maaşlarında yapılacak olan iyileştirmeler daha başarılı ve aydın bir nesil yetişmesinde çok büyük rol oynamaktadır.

KAYNAKLAR

- Chiu, M. M., Xihua, Z., “Family and motivation effects on mathematics achievement: Analyses of students in 41 countries”, *Learning and Individual Differences*, Pp.1-16, 2007.
- Chow, B. W., Chiu M. M., Mebride-Chang, C., “Universals and specifics in learning strategies: Explaining adolescent mathematics, science and reading achievement across 34 countries”, *Learning and Individual Differences*, 2007.
- Dempster, A.P., Laird, N. M., and Rubin, D. B., (1977), “Maximum Likelihood From Incomplete Data Via The EM Algorithm”, *Journal Of The Royal Statistical Society, Series B*, 39, 1-8.
- Elhan, A. H., ve Atakurt, Y., (2005), “Ölçeklerin değerlendirilmesinde niçin Rasch analizi kullanılmalıdır?”, *Ankara Üniversitesi Tıp Fakültesi Mecmuası*, 58, Pp: 47-50.
- Fox, J. (1997), “Applied Regression Analysis, Linear Models, and Related Methods”, Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Gelbal, S., (1994), “P Madde Güçlük İndeksi ile Rasch. Modelinin b Parametresi ve Bunlara Dayalı Yetenek Ölçüleri Üzerine Bir Karşılaştırma”, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10, Pp: 85-94.
- Goldstein, H., (1986), “Multilevel Mixed Linear Model Analysis Using Iterative Generalized Least Squares”, *Biometrika*, 73, 43-56.
- Goldstein, H., (2003), “Multilevel Statistical Models”, Edward Arnold, (3 Edition), London.
- Gujarati, D. N., (2001), “Temel Ekonometri (2. Baskı)”, Literatür Yayıncılık, İstanbul.
- Hammouri, H. A. M., “Attitudinal and motivational variables related to mathematics achievement in Jordan: findings from the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)”, *Educational Research*, Vol. 46, No. 3, 2004.
- Hardin, J., and Hilbe, J., (2001), “Generalized Linear Models and Extensions”, College Station, Texas: Stata Press.
- Heck, R.H. and Thomas, S. L., (2000), “An Introduction To Multilevel Modeling Techniques”, Lawrence Erlbaum Associates, London.
- Hedeker, D., and Gibbons, R., (1994), “A Random-Effects Ordinal Regression for Multilevel Analysis”, *Biometrics*, Pp. 993-994.
- Hosmer, D. W., and Lemeshow, S., (2000), “Applied Logistic Regression (Second Edition)”, A Wiley Interscience Publication, Canada.
- Hox, J., (2002), “Multilevel Analysis, Techniques And Applications”, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, Nc.
- Hox, J.,(1998), “Multilevel Modeling: When And Why?”, In: Balderjahn, I., Mathar, R., Schader, M. (Eds.), *Classification. Data Analysis, And Data Highways*, Springer, New York, Pp.147-154.
- Kleinbaum, D. G., and Klein, M., (2002), “Logistic Regression A Self-Learning Text (Second Edition)”, Springer-Verlag, New York.
- Long, S., (1997), “Regression Models for Categorical and Limited Dependent Variables”, Sage Publications, Advanced Quantitative Techniques in the Social Sciences Series, V.7, USA,

- Long, S., and Freese, J., "Listing and Interpreting Transformed Coefficients from Regression Models for Categorical and Limited Dependent Variables", May 2000 STBlistcoefV1.tex, Indiana University-Wisconsin University.
- Longford, N., (1993), "Random Coefficient Models", Sage Publications, London.
- MEB, 2003, Available from: <http://earged.meb.gov.tr/pisa/dil/tr/pisanedir.html> [accessed January 5, 2008].
- MEB, 2003, Available from: <http://earged.meb.gov.tr/pisa/dil/tr/sunum.html> [accessed January 5, 2008].
- Moerbeek, M., Breukelen, G.J.Po. and Berger, M.P.F., (2002), "A Comparison Between Traditional Methods And Multilevel Regression For The Analysis Of Multicenter Intervention Studies", *Journal Of Clinical Epidemiology*, 56, 341-350.
- Monette, G., (2002), "A First Look At Multilevel Models", Available from: <http://www.math.yorku.ca/~georges/OptPortFontDeflts.pdf>, [accessed October 1, 2007].
- Morris, C.N., (1983), "Parametric Empirical Bayes Inference: Theory And Applications", *Journal Of The American Statistical Association*, 78, 47-65.
- Noyman, F. (2004), "Çok Aşamalı Modeller Ve Bir Uygulama", Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Osborne, Jason W. (2000), "Advantages of hierarchical linear modeling", *Practical Assessment, Research&Evaluation*, 7(1), Available from: <http://PAREonline.net/getvn.asp?v=7&n=1>, [accessed June 1, 2005].
- OECD, (2003), "The PISA 2003 Framework-Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills", Paris: OECD.
- PISA, 2003, Available from: www.pisa.oecd.org [accessed November 22, 2007].
- Ramirez, M. J., "Understanding the low mathematics achievement of Chilean students: A cross_national analysis using TIMSS data", *International Journal of Educational Research*, 45, Pp. 102-116, 2006.
- Rasbash J., "What are multilevel models and why should I use them?", Available from: <http://www.cmm.bristol.ac.uk/learning-training/multilevel-models/what-why.shtml> [accessed January 15, 2008]
- Raudenbush, S. W., (1988), "Educational Applications Of Hierarchical Linear Models: A Review", *Journal Of Educational Statistics*, 13(2), 85-116.
- Raudenbush, S.W. and Bryk, A. S. (2002), "Hierarchical Linear Models: Applications And Data Analysis Methods (2nd Edition), Thousand Oaks, Ca: Sage Publications.
- Reise, S. P., and Duan, N., (2003), "Multilevel Modeling, Methodological Advances, Issues and Applications", Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, Nc.
- Snijders, A.B., (2003), "Diagnostic Checks For Multilevel Models", Published In: Leeuw, J.D. & Kreft, I. (Eds), *Handbook Of Quantitative Multilevel Analysis*.
- Snijders, T. and Bosker, R., (1999), "An Introduction To Basic And Advanced Multilevel Modeling", Sage Publications, London.
- Sullivan L.M., Dukes, A. K. and Losina, E., (1999), "Tutorial In Biostatistics An Introduction To Hierarchical Linear Modeling", *Statistics In Medicine*, 18, 855-888.
- Wang, D. B., "Family background factors and mathematics success: A comparison of Chinese and US students", *International Journal of Educational Research*, 41, Pp.40-54, 2004.

Wilkins J. L. M., "Mathematics and Science Self-Concept: An International Investigation", The Journal of Experimental Education, 72(4), Pp.331-346, 2004.

Yayan, B., Berberoğlu, G., "A Re-Analysis Of The TIMSS 1999 Mathematics Assessment Data Of The Turkish Students", Studies in Educational Evaluation, Vol: 30, Pp: 87-104, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 08.07.1983

Doğum yeri İstanbul

Lise 1997-2001 Hasan Polatkan Lisesi

Lisans 2001-2006 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fak.
İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans 2006-.... Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum

2007-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi