

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PANEL GARCH MODELİ: İMKB ÜZERİNE BİR
UYGULAMA**

Erdenee NASAN

**FBE İstatistik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali Hakan BÜYÜKLÜ

İSTANBUL, 2008

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	v
KISALTMA LİSTESİ	vii
İngilizce	vii
Türkçe	viii
Hisse Senetlerinin Kodları	ix
ŞEKİL LİSTESİ	x
ÇİZELGE LİSTESİ	xi
ÖNSÖZ	xii
ÖZET	xiii
ABSTRACT	xiv
1. GİRİŞ	1
1.1 Önceki Çalışmalar	1
1.2 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	2
1.3 Tez Metni Düzeni	3
2. MENKUL KIYMET OLARAK HİSSE SENETLERİ	5
2.1 Giriş	5
2.1.1 Menkul Kıymetlerin Tanımı ve Unsurları	5
2.1.2 Diğer Sermaye Piyasası Araçları	6
2.2 Hisse Senetlerinin Tanımı, Ekonomik İşlevleri ve Nitelikleri	6
2.2.1 Pay Kavramı	7
2.3 Hisse Senedi Sahibinin Hakları ve Yükümlülükleri	7
2.4 Hisse Senedi Çıkaracak Kuruluşlar	8
2.5 Hisse Senetlerinin Fiyatı, Değeri ve Türleri	9
2.5.1 Hisse Senedi Fiyat Tanımlamaları	9
2.5.2 Hisse Senedinin Değer Tanımlamaları	9
2.5.3 Hisse Senedi Türleri	11
3. PİYASA VOLATİLİTESİ	13
3.1 Giriş	13
3.1.1 Durağanlık	13
3.1.2 Otokovaryans ve Otokorelasyon Fonksiyonları	14
3.1.3 Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu (PACF)	14
3.1.4 White Noise Serisi	15
3.2 ARMA Modeli	15
3.2.1 AR Modeli	15

3.2.2	MA Modeli	17
3.2.3	ARMA Modeli.....	18
3.2.4	Rasgele Yürüyüş Modeli	18
3.2.5	Birim Kök Testi	19
3.3	Oynaklık Kavramı	19
3.4	ARCH Modeli.....	20
3.5	GARCH Modeli.....	21
3.6	Diğer GARCH Modelleri	22
3.7	GARCH Modelinin Kurulması.....	23
3.8	Yardımcı Test İstatistikleri	24
3.8.1	Portmanteau Testi	24
3.8.2	Bilgi Kriterleri	25
3.8.3	Durbin-Watson İstatistiği.....	25
3.8.4	LM Testi	25
3.8.5	White Değişken Varyans Testi	26
3.8.6	ARCH LM Testi	27
4.	PANEL VERİ	28
4.1	Giriş	28
4.2	Panel Verinin Avantajları ve Kısıtlamaları.....	29
4.3	Statik Panel Regresyonu	31
4.3.1	Gruplar İçi ve Gruplar Arası Moment Matrisleri	34
4.3.2	Sabit Etki Modeli: LSDV	35
4.3.2.1	Bireysel Etkilerin Test Edilmesi.....	37
4.3.3	Rasgele Etki Modeli: Tahmin Yöntemleri.....	37
4.3.3.1	Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi (GLS)	39
4.3.3.2	En Çok Olabilirlik Yöntemi (MLE)	40
4.3.4	Sabit Etki veya Rasgele Etki Model Seçimi	41
4.3.4.1	Hausman Testi	42
4.3.4.2	Breusch-Pagan Testi	43
4.3.4.3	Diğer Testler	43
4.4	Dinamik Panel Regresyon	44
4.4.1	Sabit Etki Modeli: Tahmin Yöntemleri	45
4.4.1.1	En Küçük Kareler Tahmin Edicisi (LS)	45
4.4.1.2	En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi (MLE).....	46
4.4.1.3	En Küçük Aralık Tahmin Edicisi (MDE).....	48
4.4.2	Rasgele Etki Modeli: Tahmin Yöntemleri.....	48
4.4.2.1	En Çok Olabilirlik Yöntemi (MLE)	50
4.4.2.2	Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi (GLS)	53
4.4.2.3	Araç Değişken Yöntemi (IV).....	54
4.4.2.4	Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi (GMM)	56
4.5	Dengesiz Panel.....	57
5.	PANEL GARCH MODELİ.....	60
5.1	Giriş	60
5.2	Modelleme Biçimleri	60
5.2.1	Panel GARCH(1, 1) Modelinin Özellikleri	63
5.3	Model Tahmini: En Çok Olabilirlik Yöntemi	64
5.3.1	Sayısal Analiz	65
5.3.1.1	Newton-Raphson Algoritması	66

5.3.1.2	Levenberg-Marquardt Algoritması	67
5.3.1.3	BHHH Algoritması	68
5.3.2	İterasyon Adım Büyüklüğünün Seçimi	68
5.3.2.1	Altın Oran Yöntemi	68
5.3.2.2	Newton-Raphson Yöntemi	69
5.3.2.3	Karesel Fonksiyon Yöntemi	69
5.3.3	Olabilirlik Fonksiyonunun Gradyan Vektörü	70
5.3.4	Olabilirlik Fonksiyonunun Sayısal Hessian Matrisi	71
5.4	Varyans Denklemindeki Bireysel Etkilerin Test Edilmesi	72
5.4.1	Olabilirlik Oran Testi	72
5.4.2	Wald Testi	72
6.	İMKB ÜZERİNE PANEL GARCH UYGULAMASI	74
6.1	Giriş	74
6.2	Veri Yapısı	75
6.2.1	İsim Değişikliği Yapılan Hisseler	77
6.2.2	Kayıp Veri	77
6.2.3	Bedelli veya bedelsiz sermaye artırımını	79
6.3	Dinamik Panel Model Tahmini	81
6.3.1	Bağımlı Değişken	82
6.3.2	Sabit Etki Modeli	85
6.3.3	Rasgele Etki Modeli	86
6.4	Rasgele Etki Modelinin Hata Terimlerinin Test Edilmesi	88
6.5	Koşullu Değişen Varyansın Modellenmesi	90
6.5.1	Varyans Denklemindeki Bireysel Etkilerin Test Edilmesi	94
6.5.2	Hata Terimlerinin Test Edilmesi	95
7.	SONUÇLAR	98
	KAYNAKLAR	100
	EKLER	103
	Ek 1 Bazı Matematiksel ve Temel İstatistiksel Kavramlar	104
	ÖZGEÇMİŞ	107

SİMGE LİSTESİ

$.l.$	Koşul ifadesi
$B.$	Backshift işlemcisi
$Cov(.,.)$	Kovaryans fonksiyonu
$E(.)$	Beklenen değer fonksiyonu
e_T	$T \times 1$ boyutlu birler vektörü
$F(.)$	Dağılım fonksiyonu
$H(.)$	Hessian matrisi
h_t, h_{it}	Koşullu değişen varyans, veya oynaklık
I_T	$T \times T$ boyutlu birim matrisi
i	Yatay kesit indisi
$L(.)$	Olabilirlik fonksiyonu
N	Panel verinin yatay kesit sayısı
Q	Ljung-Box istatistiği
$Q(.)$	Objektif fonksiyon
R_{it}	Getiri değeri
R_t^*	Endeks getiri değeri
$S.$	Örneklem standart sapması
T	Verinin zaman boyutu
t	Zaman indisi
u_t, u_{it}	Hata terimi
$Var(.)$	Varyans fonksiyonu
v_{it}	Hata terimi
$\bar{x}_i, \bar{y}_i$	i -inci kesitin örneklem ortalaması
x_t, x_{it}	Açıklayıcı değişken
y_t, y_{it}	Bağımlı değişken
α_i	Ortalama denklemindeki bireysel etkiler
Δ	Fark işlemcisi
γ	Otokovaryans fonksiyonu
δ	Ortalama denklemindeki parametreler vektörü
ε	Pozitif bir sayı (iterasyon için)
Θ_{t-l}	$t - l$ zamanında mevcut olan tüm bilgilerin kümesi
θ	Ele alınan model içindeki tüm parametrelerin vektör biçimi
μ	Genel sabit terim (ortalama denkleminde)

$\rho.$	Otokorelasyon fonksiyonu
$\sigma.^2$	Varyans değeri
$\Phi.$	Kısmi otokorelasyon fonksiyonu
ψ	Varyans denklemindeki parametreler vektörü
Ω	Hata terimlerinin varyans matrisi

KISALTMALAR LISTESİ

İngilizce

ACF	Autocorrelation Function
AIC	Akaike Information Criterion
AR	Autoregressive
ARCH	Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
ARIMA	Autoregressive Integrated Moving Average
ARMA	Autoregressive Moving Average
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
BHHH	Berndt-Hall-Hall-Hausman
BHPS	British Household Panel Survey
ECHP	European Community Household Panel
EGARCH	Exponential GARCH
EMH	Efficient Market Hypothesis
FGLS	Feasible Generalized Least Squares
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
GARCH-M	GARCH-In-Mean
GJR	Glosten-Jagannathan-Runkle
GLS	Generalized Least Squares
GMM	Generalized Method of Moments
GQARCH	Generalized Quadratic ARCH
GSOEP	German Social Economics Panel
IGARCH	Integrated GARCH
IV	Instrumental Variable
<i>idd</i>	Independent, Identically Distributed
LM	Lagrange Multiplier
LS	Least Squares
LSDV	Least Squares Dummy Variable
LSTGARCH	Logistic Smooth Transition GARCH
MA	Moving Average
MDE	Minimum Distance Estimator
ML	Maximum Likelihood
MLE	Maximum Likelihood Estimation
NLS	National Longitudinal Surveys

PACF	Partial Autocorrelation Function
PGARCH	Power GARCH
PSELL	Luxembourg Social Economic Panel
PSID	Panel Study of Income Dynamics
RRSS	Restricted Residual Sum of Squares
RSS	Residual Sum of Squares
SC	Schwartz Criterion
SEP	Socio-Economic Panel
SSE	Sum of Squared Errors
SUR	Seemingly Unrelated Regressions
TGARCH	Treshold GARCH
URSS	Unrestricted Residual Sum of Squares
VS-ARCH	Volatility Switching ARCH
WB	World Bank
WN	White Noise

Türkçe

A.Ş.	Anonim Şirket
ABD	Amerika Birleşik Devletleri
AOF	Ağırlıklı Ortalama Fiyat
Arş. Gör.	Araştırma Görevlisi
BDDK	Bankacılık Düzenleme ve Denetleme Kurumu
d.d.	Diğer Durumlarda
EÇO	En Çok Olabilirlik
EKK	En Küçük Kareler
İMKB	İstanbul Menkul Kıymetler Borsası
KİT	Kamu İktisadi Teşekkülleri
md.	Madde
o.ü.	Olmak Üzere
SPK	Sermaye Piyasası Kanunu
TSPAKB	Türkiye Sermaye Piyasası Aracı Kuruluşları Birliği
TTK	Türk Ticaret Kanunu
Ykr	Yeni Kuruş

Hisse Senetlerinin Kodları

AEFES	Anadolu Efes Biracılık ve Malt Sanayii A.Ş.
AGIDA	Anadolu Gıda Sanayi A.Ş.
AKBNK	Akbank T.A.Ş.
ARCLK	Arçelik A.Ş.
DOHOL	Doğan Şirketler Grubu Holding A.Ş.
DYHOL	Doğan Yayın Holding A.Ş.
ENKAI	Enka İnşaat ve Sanayi A.Ş.
EREGL	Ereğli Demir ve Çelik Fabrikaları T.A.Ş.
FINBN	Finansbank A.Ş.
FROTO	Ford Otomotiv Sanayi A.Ş.
GARAN	Türkiye Garanti Bankası A.Ş.
ISCTR	Türkiye İş Bankası A.Ş.
KCHOL	Koç Holding A.Ş.
SAHOL	Hacı Ömer Sabancı Holding A.Ş.
SISE	Türkiye Şişe ve Cam Fabrikaları A.Ş.
TCELL	Turkcell İletişim Hizmetleri A.Ş.
TOASO	Tofaş Türk Otomobil Fabrikası A.Ş.
TUPRS	Tüpraş-Türkiye Petrol Rafinerileri A.Ş.
ULKER	Ülker Gıda Sanayi ve Ticaret A.Ş.
VESTL	Vestel Elektronik Sanayi ve Ticaret A.Ş.
XU030	İMKB Ulusal 30 Endeksi
XU100	İMKB Ulusal 100 Endeksi
YKBNK	Yapı ve Kredi Bankası A.Ş.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 AR(1) modelinin ACF ve PACF grafiği	16
Şekil 3.2 MA(1) modelinin ACF ve PACF grafiği	17
Şekil 5.1 Panel GARCH genel modelleme biçimleri	62
Şekil 6.1 Hisse başına getiri serileri (sermaye artırımını dikkate alınmadan).....	83
Şekil 6.2 Hisse başına getiri serileri (sermaye artırımını dikkate alınarak).....	83
Şekil 6.3 Hata terimlerinin ACF ve PACF grafiği (1. grup)	88
Şekil 6.4 Hata terimlerinin ACF ve PACF grafiği (2. grup)	89
Şekil 6.5 Hata karelerinin ACF ve PACF grafiği (1. grup).....	89
Şekil 6.6 Hata karelerinin ACF ve PACF grafiği (2. grup).....	89
Şekil 6.7 Panel GARCH(1, 1) hata terimlerinin ACF ve PACF grafiği (1. grup).....	96
Şekil 6.8 Panel GARCH(1, 1) hata terimlerinin ACF ve PACF grafiği (2. grup).....	97

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 4.1 Gruplar içi ve gruplar arası moment matrisleri	34
Çizelge 4.2 Sabit etki ile rasgele etki modeli arasındaki fark	42
Çizelge 4.3 Dinamik rasgele etki modelleri için EÇO tahmin edicisinin tutarlılığı.....	52
Çizelge 5.1 Panel GARCH(1, 1) modelinin özellikleri	63
Çizelge 6.1 Bu çalışmada ele alınan hisse kodları ve şirket isimleri.....	76
Çizelge 6.2 Yıl başına borsadaki iş günü sayısı	77
Çizelge 6.3 Hisse senetlerinin 2000 – 2005 yıllarında işlem yapılan toplam iş günü sayısı.....	78
Çizelge 6.4 Hisse senetlerinin 2000 – 2005 yıllarında yapılan sermaye artırımları.....	80
Çizelge 6.5 Gruplara göre genel istatistikler	84
Çizelge 6.6 Birim kök test sonuçları	84
Çizelge 6.7 Dinamik panel sabit bireysel etki modeli (1. grup)	86
Çizelge 6.8 Dinamik panel sabit bireysel etki modeli (2. grup)	86
Çizelge 6.9 Chow Test Sonuçları	86
Çizelge 6.10 Dinamik panel rasgele bireysel etki modeli (1. grup)	87
Çizelge 6.11 Dinamik panel rasgele bireysel etki modeli (2. grup)	87
Çizelge 6.12 Rasgele etki model tahminlere ilişkin istatistikler	87
Çizelge 6.13 Hausman Test Sonuçları.....	87
Çizelge 6.14 Hata terimleri üzerine ARCH-LM test sınanması.....	90
Çizelge 6.15 Panel GARCH(1, 1) modeli: Model C, 1. grup.....	92
Çizelge 6.16 Panel GARCH(1, 1) modeli: Model C, 2. grup.....	92
Çizelge 6.17 Panel GARCH(1, 1) modeli: Model D, 1. grup	93
Çizelge 6.18 Panel GARCH(1, 1) modeli: Model D, 2. grup	93
Çizelge 6.19 Panel GARCH(1, 1) model tahminlere ilişkin istatistikler.....	94
Çizelge 6.20 Olabilirlik oran testi.....	95
Çizelge 6.21 Wald test sınaması.....	95
Çizelge 6.22 ARCH-LM test sonuçları	96

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın amacı, daha yeni irdelenmeye başlayan panel GARCH analizini Türkiye'nin önde gelen firmalarının hisse senetleri verileri üzerine uygulamaktır. Her ne kadar panel veri ile ilgili ilk 1950'li yıllarda çalışılmaya başlanmış olsa bile, panel GARCH konusundaki ilk çalışmalar Cermeno ve Grier tarafından 2001 yılında yapılmış olması ve bu konuda yapılan çoğu çalışmaların 2000 yılından bu yana olması konunun daha çok yol kat edeceğine işaret etmektedir. Ayrıca bu çalışmanın, Türkiye'de panel GARCH konusunda yapılacak çalışmalar için öncü nitelik taşıyacak olmasından mutluluk duymaktayım.

Kişisel anlamda bu çalışmanın, zaman serileri analizine duyduğum ilgimi kuvvetli matematiksel alt yapımla birleştirerek, benim için çok farklı ve ilginç bir deneyim olduğundan hiç şüphem yoktur.

Diğer taraftan bu çalışmanın ilk aşamasından son aşamasına kadar her türlü destek ve yardımı olan ve beni bu konuya yönlendiren tez danışmanım sayın Doç. Dr. Ali Hakan Büyüklü'ye, panel veri analizi hakkında bilgisi ve tecrübeleri ile yardımcı olan Arş. Gör. Elif Öztürk'e, Arş. Gör. Gülşen Kemalbay'a ve YTÜ İstatistik Bölümü'nün personeline teşekkürü bir borç bilirim. Son olarak tez çalışma boyunca desteğini esirgemeyen nişanlım Daniel'e ve yanımda olmazsa bile manevi olarak beni sürekli destekleyen annem Horloo ve babam Nasan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada son zamanlarda çok sık kullanılmaya başlayan panel veri analizi derlenip İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nın verileri üzerine uygulanmaktadır. Ele alınan panel veri seti, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda işlem gören 20 hisse senedinin 2000 ile 2005 yıllarındaki günlük alım ve satım verisi ile Ulusal 100 endeksinin aynı aralık içindeki günlük verisinden oluşmaktadır. Kurulan dinamik (dynamic) panel rasgele etki (random effects) modeli için bağımlı değişken olarak hisse senetlerinin getiri (return) değerleri alınmakta, ve açıklayıcı değişken olarak hisse senetlerinin getiri değerinin bir gecikmeli değeri ile Ulusal 100 endeksinin getiri değeri alınmaktadır. Yapılan incelemeler sonucunda hata terimlerinde GARCH etkisinin mevcut olduğu bulunmakta ve panel GARCH modelinin İMKB verisi uygun model olduğu sonucuna varılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: panel GARCH, İMKB, getiri serileri, en çok olabilirlik.

J JÜRİ:

1. Doç. Dr. Ali Hakan BÜYÜKLÜ
2. Prof. Dr. Işıl AKGÜL
3. Prof. Dr. Melike BİLDİRİCİ

Kabul tarihi: 28.07.2008

Sayfa Sayısı: 107

ABSTRACT

In this paper panel data analysis, which became very popular in recent years, is applied to Istanbul Stock Exchange data. The dataset consists of daily prices of 20 Turkish stocks bargained at Istanbul Stock Exchange in a period 2000 – 2005 and ISE National 100 daily index data in the same period. A dynamic panel model with random effects is fitted where the dependent variable is stock return series and explanatory variables are one-lagged stock return series and return series of ISE National 100 Index. Then it was found that error terms of dynamic panel model has GARCH effects so it was concluded in this paper that panel GARCH model fits Istanbul Stock Exchange data.

Keywords: panel GARCH, ISE, return series, MLE.

J JÜRİ:

1. Doç. Dr. Ali Hakan BÜYÜKLÜ
2. Prof. Dr. Işıl AKGÜL
3. Prof. Dr. Melike BİLDİRİCİ

Kabul tarihi: 28.07.2008

Sayfa Sayısı: 107

1. GİRİŞ

Panel veri hem yatay kesite göre hem de zaman aralığına göre değiştiğinden araştırmacıya çeşitli avantajlar sağlamaktadır. Aynı zamanda panel veri ile ele alınan makro-iktisadi göstergelerinin zaman içindeki dinamikliği daha iyi incelenmekte ve bu dinamikliğin diğer ülke veya şehirlere göre karşılaştırılabilmektedir. Tek yatay kesit veri, bir zaman aralığı incelediği için ele alınan değişkenlerin dinamikliğini gösteremez. Tek başına zaman serileri verisi sadece ele alınan kesit hakkında bilgi verir. Bu yüzden panel veri ile çalışmak birçok açıdan avantaj sağlamaktadır.

Diğer taraftan finansal verilerde GARCH etkisini araştıran sayısız çalışma mevcuttur. Aynı şekilde İMKB verileri üzerinde GARCH etkisinin olabileceği düşünülerek bu çalışmaya başlanmıştır. Bu çalışmada panel veri setinin avantajlarından yararlanarak ileri zaman serileri analizinin ögesi olan GARCH modellenmesi üzerine durulmuştur.

1.1 Önceki Çalışmalar

Panel veri ile yapılan çalışmalar 1950'li yıllara dayanmaktadır. Bu konuda ilk yapılan çalışmalardan biri Grunfeld'in 1955 yılında yaptığı doktora çalışmasıdır. Bu çalışmasında Grunfeld, beş Amerikan firmanın 1935 – 1954 yıllarındaki yatırım, ana sermaye ve piyasa değer verilerini incelenmiştir (Greene, 2003). Ayrıca panel veri seti olarak ABD'de Michigan üniversitesi tarafından yapılan Gelir Dinamikleri Panel Araştırması (PSID) ve Ohio üniversitesi tarafından yapılan İşgücü Piyasa Araştırması (NLS) çok bilinmektedir (Baltagi, 1995).

Koşullu değişen varyans modeli ile ilgili yapılan çalışmalara Engle'in (1982) İngiltere enflasyon verileri üzerine yapılan çalışması kaynak olmuştur. Onun önerdiği modeli Bollerslev (1986) genişleterek GARCH model ailesinin temelini atmıştır. Sonra bu modellere ek olarak Nelson 1991 yılında asimetrik EGARCH modelini önermiştir. Bundan sonra bu konuda yapılan çalışmaların sayısı her geçen gün hızla artmıştır.

Panel GARCH modelini konu alan çalışmalar Cermeno ve Grier'in (2001b) çalışmalarından başlamaktadır. İlk yapılan çalışmada Cermeno ve Grier (2001b) panel ARCH model üzerine durmuştur. Genel olarak Cermeno, çalışmalarına Latin Amerika ülkelerine yer vermektedir. Cermeno ve Sanin (2005) yaptıkları çalışmada, 1970 – 2001 dönemi kapsayan G7 ve 8 Latin Amerika ülkeleri için döviz kurunun serbest olup olmadığı ile reel döviz kurundaki düşüşün değişkenliği arasındaki ilişkiyi panel GARCH modeli ile araştırmıştır. Bakry W. K. (2006)

doktora çalışmasında panel GARCH modellemesini Mısır verilerine üzerine uygulamış, ayrıca Bakry (2006) yaptığı çalışmasında ele alınan verileri sektörlere göre de gruplanmıştır.

Deuskar, Gupta ve Subrahmanyam (2008), çalışmalarında opsiyon piyasadaki likidite etkilerini araştırmak amacı ile gelecek fiyatları üzerine GJR-GARCH(1, 1) modelinin panel versiyonunu uygulamıştır. Plümper ve Troeger (2004) ise çalışmalarında Avrupa ülkelerinin Euro'ya geçmesi ile o ülkelerin para birimlerinin Euro'ya olan faiz oranları üzerine panel havuz GARCH(1, 1)* modelini kurmuştur. Plümper ve Troeger (2006), sonraki çalışmalarında ise bir önceki çalışmalarındaki verilere ABD, Avustralya ve Yeni Zelanda döviz kur bilgilerini ekleyip aynı panel havuz GARCH(1, 1) modelini tahmin etmiştir. Drakos ve Goulas (2006) Avrupa ülkeleri için 10 sanayi sektörünün yatırım, büyüme hızı ve nakit akımı verileri üzerine panel havuz GARCH modelini uygulamıştır.

1.2 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Finans piyasalardaki oynaklık çeşitli çalışmalara konu olmuştur. Hızlı değişen piyasa koşullarında öngörü yapılması imkansız gibi görünür ama mevsimlik, haftanın sonu etkisi, Ocak ayı etkisi gibi piyasa olgularının var oluşu, fiyat hareketlerini öngörülmesi için olanak sağlamaktadır. Piyasa oynaklığını inceleyen çalışmalarda Mandelbrot, fiyatlardaki büyük değişimleri yine büyük değişimler takip etmekte, ve küçük değişimleri ise de küçük değişimler takip etmekte olduğunu saptamıştır. Buradan da fiyattaki değişim bir önceki döneme bağlı olduğu anlaşılmaktadır. Bu oynaklık olgusunu açıklamak için birçok ekonometrik model önerilmiştir.

İlk önerilen model, Fama tarafından önerilen rasgele yürüyüş modelidir. Hisse getiri hareketleri bağımsız ve aynı dağılımına sahip olma şartını genellikle sağlamadığı için bu model artık kullanılmamaktadır. Piyasa oynaklığını açıklayan model olarak GARCH modeller ailesi finans literatüründe çok yaygındır. Bu konu ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. Genellikle bu model, finansal zaman serilerine uygulanmaktadır.

Diğer taraftan son zamanlarda panel veri analizi, istatistik ve ekonometrik çalışmalarda oldukça yoğun bir şekilde kullanılmaya başlanmış. Bu çalışmalarda daha çok gelir dinamiği, veya işsizlik gibi değişkenler incelenirken panel veri analizine başvurulmuştur. Panel veri seti bir çok konuda araştırmacıya zaman serileri veya yatay kesit verisinden daha çok bilgi

* Pooled-panel GARCH(1, 1)

vermektedir.

Bu çalışmanın amacı, panel veri setinin avantajlarından yararlanarak, verilerdeki GARCH etkisini araştırmaktır. Ele alınan veri seti İMKB’de işlem gören 20 hisse senedinin 2000 – 2005 yıllardaki fiyat verisidir. Bu veriler üzerine dinamik panel model tahmini yapıp, tahmin edilen modelin anlamlı olup olmadığı ele alınmaktadır. Daha sonra hata terimlerinin test edilmesi ile GARCH etkileri araştırılmıştır. Bu durumda cevabı aranan soru, panel GARCH modelinin İMKB verileri üzerine uygulanıp uygulanmayacağı olacaktır ki, bu çalışmada panel GARCH modeli anlamlı bulunmuştur.

Genel olarak bu tez çalışması, istatistiksel yöntemlerin matematiksel alt yapısı üzerine odaklanan matematiksel işlem ağırlıklı bir çalışma olmuştur.

Verilerin düzenlenmesi ve model kurma aşamasında yazılım olarak E-Views, SAS ve Matlab paket programları kullanılmıştır. Veri setinin panel veri analizine uygun formata getirilmesi amacı ile Matlab komut dosyalar yazılmıştır. Bu aşamada ayrıca SAS’tan da yararlanılmıştır. Panel veri seti için uygun model belirlendikten sonra, model tahminler E-Views’te yapılmış, ancak E-Views’te panel GARCH modelinin tahmini ile ilgili kısıtlamaların ortaya çıkmasından dolayı, panel GARCH modelinin tahminleri için tekrar Matlab kullanılmıştır. Bu aşamada Würtz, Chalabi ve Luksan’ın (2006) makalesinden yararlanılmıştır.

1.3 Tez Metni Düzeni

İMKB’de işlem gören hisse senetleri verileri üzerine panel GARCH model çalışması yapılacağından ilk önce hukuki ve iktisadi açıdan hisse senedi hakkında bilgi verilmesi daha uygun bulunmuştur. Bölüm 2’de bu konu ele alınmıştır. Burada hisse senedinin ne olduğu, sahibine ne gibi hak ve yükümlükler getirdiği anlatılmış, ayrıca hisse senedinin ekonomik işlevi, fiyat ve değer tanımlamalarına değinilmiştir. Genel olarak borsanın iktisadi yönünü araştıran akademik çalışmalarda bu tanımlamalar sıkça yer aldığı için bu konu dahil edilmiştir. Böylece bu bölümde hisse senedi hakkında genel bir fikrin oluşması amaçlanmıştır.

Bölüm 3’te tek değişkenli zaman serileri analizine değinilmiştir. Panel veri seti için koşullu değişen varyans araştırması yapılacağı için ilk önce tek değişkenli zaman serileri için piyasa oynaklık (volatilite) konusunun anlatılması daha uygun bulunmuştur. Bu bölümde ilk önce basit ARMA modelleri ele alındıktan sonra oynaklık modelleri anlatılmıştır. Burada koşullu değişen varyansın mevcut olup olmadığını araştırmak için önerilen test sınamalarından

başlanarak model seçimi için uygulanan kriterlere kadar, kısaca değinilmiştir. Ayrıca uygulamada en çok kullanılan GARCH modelleri anlatılmıştır.

Bölüm 4'te panel veri analizi ele alınmıştır. İlk önce statik (static) panel model hakkında bilgi verildikten sonra dinamik (dynamic) panel modeli daha detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ele alınan veri seti üzerine dinamik panel model düşünüldüğü için dinamik panel modeline daha çok yer ayrılmıştır. Bunun yanı sıra bu bölümde model seçiminde yararlı olacak test sınamaları konu edilmiştir. Bu bölüm genel hatları ile Hsiao (2002) analizinin izinden gidilmiştir.

Bölüm 5'te panel GARCH konusuna girilmiş ve bu bölümde panel GARCH model türleri kısaca ele alındıktan sonra en çok olabilirlik (maximum likelihood) tahmin yöntemi üzerine durulmuştur. Panel GARCH modeli için bulunan olabilirlik fonksiyonunun teorik olarak maksimize edilemeyeceğinden, bu yöntemin sayısal çözüm yöntemleri detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Bölüm 6'da önceki bölümlerde anlatılan yöntem ve testlerin hisse senetleri verileri üzerindeki uygulanması ele alınmıştır. Bu bölümde ilk önce Bölüm 4'te yer alan yöntemler uygulanarak ortalama denkleminin özellikleri saptanmış, daha sonra GARCH etkilerinin sınanması yapılarak çıkan sonuçlara göre panel GARCH(1, 1) modeli denenmiştir. Model tahmini Bölüm 5'te anlatılan yöntemler ile yapılmıştır.

Bölüm 7'de elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

Ek 1'de tez metninde adı geçen bazı matematiksel ve istatistiksel kavramların tanımları yer almaktadır.

2. MENKUL KIYMET OLARAK HİSSE SENETLERİ

2.1 Giriş

Tez çalışmasına girilmeden önce hisse kavramını ele alınması daha uygun bulunmuştur. Bu bölümde menkul kıymet olarak hisse senedinin tanımı, işlevleri, türleri ve değer tanımlamaları, ayrıca hisse senedi çıkarabilecek kuruluşlar hakkında kısaca anlatılmıştır.

Hisse senedi bir sermaye piyasası aracıdır. Genel anlamda sermaye piyasası araçları, menkul kıymetler ve diğer sermaye piyasası araçları olarak ayrılmaktadır.

2.1.1 Menkul Kıymetlerin Tanımı ve Unsurları

“Menkul kıymetler; ortaklık veya alacaklılık sağlayan, belli bir meblağı temsil eden, yatırım aracı olarak kullanılan, dönemsel gelir getiren, misli nitelikte, seri halinde çıkarılan, ibareleri aynı olan ve şartları Kurul’ca belirlenen kıymetli evraktır.”* Bu tanıma göre menkul kıymetin unsurları aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

- Menkul kıymetlerin, kıymetli evrak olarak, temsil ettiği hak belgeden ayrı olarak kullanılması ve devredilmesi mümkün olmadığı gibi, hakkı elde tutarak belgeyi devretmek de mümkün değildir. Bu hak ancak senet ibraz edilerek kullanılır ve senet devredilerek devredilir.
- Standart ve yuvarlak meblağlı, misli nitelikte, belli şekil şartlarını haiz kıymetlerdir.
- Çok sayıda ihraç edilen ve halka arz edilen kitle senetleridir. Poliçe gibi tek bir ticari ilişkiyi ifade etmez.
- Az veya çok devamlılık arz eder, alacak ya da ortaklık haklarını temsil ederler.
- Dönemsel gelir sağlarlar.
- Her birinin üzerinde yazılı bir nominal değeri, bir de piyasada arz ve talebin oluşturduğu piyasa değeri vardır.
- Menkul kıymetler nama (registered) ve hamiline (bearer) yazılı olabilirler.
- Yatırım amacı ile kullanılır.

Menkul kıymetler olarak aşağıda listelenen belgeler sayılabilir.

- Hisse senetleri, hisse senedi türevleri, geçici ilmhühaberler, yeni pay alma kuponları.
- Tahviller, tahvil türevleri, tahvil faiz kuponları.

* SPK, md. 3

- Hazine bonoları, banka bonoları, banka garantili bonolar, finansman bonoları.
- Katılma intifa senetleri, kar ve zarar ortaklığı belgeleri.
- Varlığa dayalı menkul kıymetler, gelir ortaklığı senetleri, gayrimenkul sertifikaları.
- Tertip halinde çıkarılan ve 2 yıl veya daha uzun süreli ipotekli borç ve irat senetleri.
- Borsa yatırım fonu katılma belgeleri.
- İçtüzüğünde kurucu dışındaki aracı kuruluşlarca serbestçe alım satımı öngörülen A tipi yatırım fonu katılma belgeleri.

Bu çalışmada hisse senetlerinin fiyat oynaklığı (volatilitesi) ele alındığı için bir sonraki alt bölümde hisse senetleri hakkında daha detaylı bilgi verilecektir.

2.1.2 Diğer Sermaye Piyasası Araçları

Menkul kıymetler dışında kalan ve şartları kurulca belirlenen evraktır. Ancak çek, poliçe, nakit, bono ile mevduat sertifikaları sermaye piyasası aracı olarak sayılmamaktadır.

2.2 Hisse Senetlerinin Tanımı, Ekonomik İşlevleri ve Nitelikleri

Hisse senetleri, diğer adlarıyla esham, aksiyon veya pay senedi, anonim ortaklıkların ihraç ettikleri, anonim ortaklık sermaye payını temsil eden kıymetli evrak niteliğine sahip senettir. Sermayesi paylara bölünmüş komandit şirketler (limited partnership) de hisse senedi çıkarabilmekte ancak halka arz yoluyla satılamamaktadır.* Kooperatifler ise kıymetli evrak niteliğine sahip olmayan ortaklık senedi çıkarabilmektedirler.

Hisse senetlerinin ekonomik işlevleri aşağıdaki gibi özetlenebilir.**

- Hisse senetleri, geniş halk kitlelerinin küçük tasarruflarını büyük işletmeler içinde bir araya getirerek hızlı bir kalkınma için gerekli sermaye birikimini sağlar.
- Hisse senetleri, üretim araçlarının ve iktisadi işletmelerin mülkiyetini geniş halk topluluklarına dağıtmak suretiyle iktisadi refahı geniş bir tabana yayarlar, daha dengeli bir gelir dağılımı sağlarlar.
- Hisse senetleri, halkı, ekonomik kararlarda az çok söz sahibi yaparak demokrasinin iktisadi yanını tamamlar.
- Hisse senetleri, halkın tasarruflarına ek gelir sağlarken bunu faiz yoluyla değil, enflasyona karşı dayanıklı, enflasyonla birlikte değerlendirilen bir yatırım yoluyla sağlar, hem yatırım

* SPK, md. 4

** TSPAKB (2006)

hem de gelirinin değerini enflasyona karşı korur.

- Hisse senedi, aracıyı ortadan kaldıran bir finansman aracıdır. Bir şirket, yatırım veya işletme sermayesi olarak büyük meblağlı fonlara ihtiyaç duyduğu zaman, bu fonları hisse senedi ihracından başka hangi yoldan sağlasa, bunun bir aracılık maliyeti vardır.

2.2.1 Pay Kavramı

Ana sermayenin belirli sayıda, eşit itibari değerlere bölünmüş parçalarına pay denir ve şirkette payı olan kimse, pay sahipliği sıfatını kazanır. Ancak TTK'ya göre pay, senede bağlanması zorunlu değildir. Payın senede bağlanmasını ifade eden hisse senedi (pay senedi) düzenlenmeden önce de pay vardır. Tüm haklar ve borçlar paya bağli olup payın senede bağlanması, paya bağli hakların ve borçların kullanımında bir değişiklik yaratmaz.

Pay senede bağlanmadan da kazanılabilir, devredilebilir ve rehnedilebilir. Payın senede bağlanması, aslında devir kabiliyeti bulunan payın, devir şeklini değiştirir ve bağlandığı senedin çeşidine göre devir hızını artırır.

Sermaye Piyasası Kanunu'nda, halka açık anonim ortaklıklarda sermaye piyasası araçlarının satış esnasında alıcıya teslimi şartı getirilmiştir. Buna bağli olarak esas sermaye sistemini kabul etmiş anonim ortaklıklar, hamiline yazılı hisse senetlerini sermaye artırımının tescilini takip eden en geç 30 gün içinde, nama yazılı hisse senetlerini ise 90 gün içinde teslim etmek zorundadırlar.

2.3 Hisse Senedi Sahibinin Hakları ve Yükümlölükleri

Hisse senedi sahibinin hakları ve yükümlölükleri aşağıdaki biçimde sıralanabilir.*

- Kar payı hakkı.
Pay sahibinin en önemli mali haklarından biridir. Kar payı, pay sahibinin, kazanılmış haklarından olmakla birlikte sınırlandırılabilir.
- Yeni pay alma hakkı (Rüçhan hakkı).
Ortaklıkların bedelli sermaye artırımlarına mevcut ortakların öncelikle katılma hakkını ifade etmektedir. Söz konusu hak, hisse senedine bağli “Yeni Pay Alma Kuponları” karşılığında ve ayrıca hisse senedi ibrazına gerek kalmaksızın kullanılır.
- Tasfiye bakiyesine katılma hakkı.
Bu hak, tasfiye sonucunda bir artığın kalması halinde geçerlidir. Her hisse senedi sahibi, bu artığa payı oranında iştirak eder.** Tasfiye artığı olumsuz ise, ödenmeyen pay ile

* TSPAKB (2006)

** TTK, md. 455

sınırlı bir borç yaratır. Pay bedeli tamamen ödenmişse, borç söz konusu değildir.

- Şirket yönetimine katılma hakkı.

Pay sahibinin şirket yönetim kurulunu seçme ve hatta bu kurula seçilme hakkı vardır. Şirket genel kurulu, şirketin ana organı olarak hemen her konuya müdahale edebilir.

- Oy hakkı.

Her hisse senedi sahibine en az bir oy hakkı verir. Bu esasa aykırı olmamak şartıyla hisse senetlerinin sahiplerine vereceği oy hakkının sayısı esas sözleşme ile tayin olunabilir.*

- Bilgi alma hakkı.

Pay sahipleri şüpheli gördükleri konularda müfettişlerin dikkatini çekmeye ve gerekli açıklamaları istemeye yetkili olup genel kurul toplantısından itibaren bir yıl süreyle de kar ve zarar hesabı, bilanço ve yıllık raporu inceleyebilirler.** Ayrıca TTK'ya göre bu hak, esas mukavele veya şirket organlarından birinin kararı ile engellenemez veya sınırlandırılmaz.

- Sır saklama borcu.

Her pay sahibi sonradan ortaklıktan ayrılmış olsa da, şirket sırlarını saklamak zorundadır.

- Sermaye borcu.

Hisse senetleri, bir ortaklık senedi olarak sahibine bazı haklar sağlamakla beraber, bazı mali sorumlulukları da beraberinde getirir. Gerek yeni kuruluşa, gerekse sermaye artırımında, iştirak taahhüdünde bulunan bir ortak taahhüdünü yerine getirmekle yükümlüdür.

2.4 Hisse Senedi Çıkaracak Kuruluşlar

Hisse senetleri, sadece anonim şirketler, anonim şirket statüsünde kurulan diğer şirketler ve özel kanunlarla kurulan bazı kuruluşlar tarafından çıkartılabilir. Hisse senedi ihraç edebilecek şirket ve kuruluşlar aşağıda sıralanmıştır.

- Anonim şirketler.

Anonim şirketleri, hisse senetlerini hangi yolla çıkardıkları göz önüne alınarak üç ana grup halinde tasnif etmek mümkündür.

- Yalnızca Türk Ticaret Kanunu'nun hükümlerine tabi, halka açık olmayan anonim ortaklıklar (Hisse senetleri halka arz edilmemiş anonim ortaklıklar).
- Ticaret ve Sermaye Piyasası Kanunları hükümlerine tabi, Kayıtlı Sermaye Sistemi dışındaki halka açık anonim ortaklıklar (Hisse senetlerini halka arz etmiş veya arz etmiş sayılan anonim ortaklıklar).
- Sermaye artırımını yönünden, yalnızca Sermaye Piyasası Kanunu hükümlerine tabi anonim ortaklıklar (Kayıtlı Sermaye Sistemindeki Anonim Ortaklıklar).
- Sermayesi paylara bölünmüş komandit şirketler.

* TTK, md. 373

** TTK, md. 362 ve 363

“Sermayesi paylara bölünmüş komandit ortaklıkların hisse senetleri halka arz yoluyla satılamaz”^{*}.

- Özel kanunla kurulan kurumlar.

Bazı bankalar, Türkiye Cumhuriyeti Merkez Bankası, sigorta şirketleri, anonim ortaklık halinde kurulmuş bulunan iktisadi devlet teşekkülleri, Kamu İktisadi Teşekkülleri (KİT), bağlı ortaklıklar, yatırım ortaklıkları, aracı kurumlar ve özel finans kuruluşları hisse senedi ihraç edebilirler.

2.5 Hisse Senetlerinin Fiyatı, Değeri ve Türleri

Hisse senetlerinin verimi ölçülürken hisse senetlerinin fiyat ile değer tanımlamalarını ayrı ayrı ele almak gerekmektedir.

2.5.1 Hisse Senedi Fiyat Tanımlamaları

Hisse senedi fiyat kavramındaki başlıca tanımlamalar nominal (itibari) fiyat, ihraç (emisyon) fiyatı, piyasa fiyatı ve borsa fiyatıdır.

- Nominal (İtibari) fiyat.

Pay senedinin üzerinde yazılı olan fiyatıdır. Bu değer ile hisse senedinin ilk çıkarılışı esnasında ortaklık yönetimi, toplam sermayenin miktarını belirleyebilir ve bununla ilgili muhasebe kayıtlarını yapabilir. TTK'ya göre Türkiye’de pay senedinin nominal fiyatı en düşük 1 YKr olabilir.

- İhraç fiyatı.

Hisse senetlerinin, şirket tarafından çıkarılışı aşamasında satışa sunulduğu fiyattır.

- Piyasa fiyatı.

Bir pay senedinin arz ve talep koşullarına göre oluşan ve sermaye piyasasında alınıp satıldığı fiyattır.

- Borsa fiyatı.

Borsadaki arz ve talep koşullarına göre oluşan fiyatıdır. Borsanın işleyişine göre fiyatlar günlük olarak belirlenir ve açılış, kapanış, en düşük, en yüksek, ortalama günlük fiyat gibi türlere ayrılır.

Bu çalışma, ele alınan hisse senetlerinin borsa fiyatı üzerine yapılmıştır.

2.5.2 Hisse Senedinin Değer Tanımlamaları

Hisse senedi değer tanımlamaları, hisse senedinin verimliliğinin saptanmasında kullanılan ölçümlerde ve analizlerde ele alınan tanımlamalardır. Bu tanımlamalar aşağıdaki gibi

^{*} SPK, md. 4

sıralanabilir.*

- Defter değeri.

Bir işletmenin öz sermaye toplamının pay senedi sayısına bölünmesiyle belirlenir. Burada öz sermaye ile, ödenmiş sermaye, ihtiyatlar toplamı, dağıtılmamış karlar, yeniden değerlendirme değer artış fonları ve bu türdeki diğer fonlarla karşılıklar kastedilmektedir. İşletmenin öz sermayesi ödenmiş sermayesinden yüksekse, defter değeri nominal değerden yüksek, aksi durumda yani sermayenin eksiği durumunda ise nominal değerden düşük olacaktır.

- Tasfiye değeri (Likidasyon değeri).

Şirket varlığının belli bir süre içinde zorunlu satışı ile sağlanabilecek değerden tüm borçlar ödendikten sonra kalan miktarın, hisse senedi sayısına bölünmesi sonucu bulunan değerdir. Tasfiye değeri piyasa değerinin araştırılmasında önemlidir. Çünkü şirketin hisse senetlerinin piyasa değeri için, tasfiye değeri alt sınırı oluşturacaktır. Bu durumda hisse senetlerinin piyasa değeri, tasfiye değerinin altına düştüğünde ise, o işletmeyi likide etmek en akılcı yol olacaktır.

- İşleyen teşebbüs değeri.

Burada, işletmenin bir bütün olarak, çalışır durumda devredilmesi halinde bulacağı değer söz konusudur. Bu değer belirlenmesinde işletmenin kazancı ile söz konusu kazanç için gerekli kazanç oranının dikkate alınması gerekir. Tasfiye değeri, piyasa değeri için alt sınırı oluştururken, işleyen teşebbüs değeri de üst sınırı oluşturacaktır.

- Net aktif değeri.

Hisse senedinin belirli bir faaliyet dönemi sonunda düzenlenen bilançoadaki net aktif tutarı ile tanımlanır.

- Alternatif gelir değeri.

Ortaklar tarafından oluşturulan sermayenin, şirket içinde şirket sermayesi şeklinde kullanılmayıp, başka bir yatırım alanında değerlendirilmiş olması halinde, hisse senetlerine yatırılan sermaye miktarı ile elde edilebilecek alternatif gelirden bir hisseye düşen gelir tutarını açıklar. Türkiye'de alternatif gelir değeri belirlemesi, genellikle banka faizi, devlet tahvili gelirleri ile karşılaştırılarak yapılmaktadır. Menkul kıymetler piyasasındaki araçlar çoğaldıkça alternatif gelir hesaplamaları da çeşitlenmiş olmaktadır.

- Gerçek değer.

Bir pay senedinin gerçek değeri, o pay senedinin ait olduğu işletmenin varlıkları, karlılık durumu, dağıtılan kar payları, sermaye yapısı gibi değişkenlerin belirlediği değer olarak tanımlanır. Gerçek değer, bir anlamda yatırımcıların, işletmenin gelecekte gelir yaratma potansiyelini ve kendilerinin bu hisse senedinden bekledikleri kazanç oranını göz önüne alarak, işletmenin pay senedine biçtikleri, mevcut koşullar altında söz konusu hisse senedi için normal buldukları değerdir.

Türkiye'deki aracı kurumlar, hisse fiyatlarını incelerken, genellikle yukarıda verilen değer tanımlamalar üzerine teknik analiz çalışmalarını yapmaktadır.

* TSPAKB (2006)

2.5.3 Hisse Senedi Türleri

Hisse senetleri TTK'nun 409'uncu maddesine göre hamiline veya nama yazılı olmak üzere ikiye ayrılırlar. Bu ayrımın dışında da hisse senetleri çeşitli şekillerde sınıflandırılabilir.

- Hamiline ve nama yazılı hisse senetleri.

Bu ayrımın önemi hisse senetlerinin devir işlemlerinde ortaya çıkmaktadır. Hamiline yazılı hisselerde devir işlemi teslimle tamamlanır. Nama yazılı hisse senetleri ise, esas mukavelede aksine hüküm olmadıkça devir olunabilir. Nama Yazılı hisselerin devri ciro edilmiş senedin devir alana teslimi ve şirketin pay defterine kaydedilmesi ile mümkündür.

- Adi ve imtiyazlı hisse senetleri.

Hisse senetleri, ana sözleşmede aksine bir hüküm yoksa sahiplerine eşit haklar sağlarlar. Bu tip hisse senetlerine adi hisse senetleri denir. Bir kısım hisse senetleri ise adi hisse senetlerine nazaran kâra iştirak ve genel kurulda oy kullanma bakımından TTK'nun 401'inci maddesine dayanılarak ana sözleşme ile sahiplerine imtiyazlı haklar tanıyabilir. Esas sözleşme ile imtiyazlı hisseler kârdan belli oranda özel temettü dağıtımını öngörülebilir, rüçhan hakkı kullanımında, oy hakkında, tasfiye sonucuna katılmada, organ üyeliklerine aday göstermede bazı ayrıcalıklar tanınabilir. Ancak Yatırım Ortaklıkları kurucu intifa senedi, oydan yoksun hisse senedi, yönetim kurulu üyelerinin seçiminde oyda imtiyaz hakkı tanıyan hisse senetleri dışında imtiyaz veren hisse senedi ihraç edemezler.

- Bedelli ve bedelsiz hisse senetleri.

- Yeni taahhüt veya ödeme yolu ile çıkarılan, diğer bir deyişle bedelli artırıma konu olan hisseler ya kuruluş aşamasında çıkarılırlar ya da sermaye artırımlarında, rüçhan hakkı kullanımıyla eski ortaklar tarafından veya halka arz yoluyla üçüncü kişiler tarafından satın alınırlar. Bu hisseler karşılığında ortaklık dışı kaynaklardan ortaklığa ödeme yapılmış olur.
- Yedek akçe, dağıtılmamış kar, yeniden değerlendirme değer artış fonu, gayrimenkul satış kazançları veya iştiraklerdeki değer artışlarının sermayeye eklenmesi nedeniyle çıkarılacak hisse senetleri için yeni bir ödeme veya yeni bir taahhüde gerek yoktur. Burada aslında mevcut payların değerleri yükseltilmekte ve gerçekte iç kaynaklardan bir ödeme yapılmaktadır. Bu durumda yeni hisse senetleri eskisinin uzantısı olduğundan, bedelsiz hisse senetlerini edinme hakkı eski pay sahiplerine aittir.

- Primli ve primsiz hisse senetleri.

Türk hukuk sisteminde nominal değeri bulunmayan hisse senedi ihracı söz konusu değildir. Öte yandan TTK'nun 286'ncı maddesine göre de itibari (nominal) değerinden aşağı bir bedelle hisse senedi ihraç edilememektedir. Üzerinde yazılı değer ile ihraç edilen hisse senetlerine primsiz, nominal değerlerinden yüksek bir bedelle ihraç edilen hisse senetlerine primli hisse senedi denir. Primli hisse senedi ihracı için ya esas sözleşmede hüküm bulunmalı ya da genel kurul tarafından karar alınmalıdır. Kayıtlı Sermaye Sisteminde ise, esas sözleşme ile yetki verilmiş olmak üzere, yönetim kurulu kararı ile primli hisse ihraç edilebilir. Primli hisse senedi ihraç edilmesi halinde oluşacak emisyon primleri vergiye tabi olmaktadır.

- Kurucu ve intifa hisse senetleri.

- Kurucu hisse senetleri, belli bir sermaye payını temsil etmediği gibi, şirketin yönetimine katılma hakkını da vermez. Bu durumda, kuruluş hizmeti karşılığı olmak üzere, ana sözleşme hükümleri gereğince, şirket kârının bir kısmını iştirak hakkı temin

etmek üzere ve daima kurucuların adlarına yazılı olmak şartıyla ihraç edilir.*

- İntifa hisse senetleri, şirket genel kurulunun alacağı kararla bazı kimselere çeşitli hizmetler ve alacak karşılığı olarak kuruluştan sonra verilen ve sermaye payını temsil etmeyen hisse senetleridir. Şirket kârından kanuni yedek akçe ayrıldıktan sonra bütün hisselerle ödenmiş sermayenin %5'i oranında kanuni birinci temettü ödenmeden, gerek imtiyazlı hisselerle, gerekse sermaye payını temsil etmeyen kurucu ve intifa hisse senetlerine özel temettü ödenmez, ödenebilecek miktar da kalan kârın %10'unu geçemez.**

* TTK md. 402

** TTK md. 298

3. PİYASA VOLATİLİTESİ

3.1 Giriş

Finansal piyasa değişkenliği zamanla değişmekte olduğu bilinmesi ile beraber, bu konu, uzun zamandır finansal literatürün ilgi odağı olarak devam etmektedir. İlk çalışmalar Fama tarafından yapılmıştır. Fama'nın çalışmaları, etkin piyasa hipotezi (Efficient Market Hypothesis) ve rasgele yürüyüş (random walk) modelleri üzerindedir.

Ayrıca menkul kıymetlerin getiri verilerinin ince-basık (leptokurtic) olduğu bilinmektedir. Bu özellik Fama ve Mandelbrot tarafından belgelenmesi, finansal getiri verilerinin modellenmesi üzerine yapılan çalışmalara kaynak etmiştir.*

Bunun yanı sıra Mandelbrot, zaman serilerindeki büyük değişimleri büyük değişimler izlemekte, ve küçük değişimleri küçük değişimler izlemekte olduğunu göstermiştir.

Ama oynaklık olayını göstermek için en çok kullanılan yol, Engle (1982) tarafından önerilmiştir. Engle finansal verilerin zamanla değişen koşullu değişen varyansı modelleyerek ARCH modelini sunmuştur. Bollerslev (1986) ise bunu GARCH modeline genişletmiş ve GARCH modeli, finansal verilerin zaman serileri özellikleri anlatan model olarak kabul edilmiştir.

GARCH modellemesi, son 15 yılda zaman serileri analizinin en popüler araçlardan biridir. ARMA metotlarının bir stokastik sürecin koşullu değişen varyansını modelleyebilmesi, risk veya oynaklığın gerçek etkileri hakkında hipotez testlerin ilerlemesine olanak sağlamıştır.

Bu bölümde ilk önce zaman serileri analizinin temel kavramları ve ARMA modelleri ele alındıktan sonra GARCH modelleri anlatılacaktır.

3.1.1 Durağanlık

Tanım 3.1: $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ bir zaman serilerinin gözlem değişkenleri olmak üzere $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ 'nin $F_{Y_1, Y_2, \dots, Y_T}(y_1, y_2, \dots, y_T) = P\{\omega : Y_1(\omega) \leq y_1, Y_2(\omega) \leq y_2, \dots, Y_T(\omega) \leq y_T\}$ birleşik dağılım fonksiyonu her T ve h için $F_{Y_1, Y_2, \dots, Y_T}(y_1, y_2, \dots, y_T) = F_{Y_1+h, Y_2+h, \dots, Y_T+h}(y_1, y_2, \dots, y_T)$ ise $\{Y_t\}$ zaman serilerine *güçlü durağan* denir. Yani birleşik dağılım fonksiyonu zaman değişkenine göre değişmiyor ise $\{Y_t\}$ zaman serilerine *güçlü durağan* denir.

* Bollerslev, T., Engle, R. F. ve Nelson, D. B., (1994), Handbook of Econometrics Volume 4.

Uygulamada güçlü durağanlık koşulu ampirik olarak kontrol edilmesi zordur. O yüzden daha zayıf tanımlaması olan zayıf durağanlık kavramı ele alınmaktadır.

Tanım 3.2: $\{Y_t\}$ zaman serileri her t için $E(Y_t) = \mu$ ve $Cov(Y_t, Y_{t-h})$ kovaryans fonksiyonu sadece h 'nin bir fonksiyonu ise $\{Y_t\}$ zaman serilerine *zayıf durağan*, veya *durağan* denir.

Zaman serileri analizinde durağanlık, birim kök testiyle sınanmaktadır. Bu test hakkında daha sonra bilgi verilecektir. Zaman serileri analizinin yapılması için zaman serilerinin durağan olması gerekir. Eğer ele alınan zaman serileri durağan değilse çeşitli dönüşümler yapılarak seri durağanlaştırılabilir.

3.1.2 Otokovaryans ve Otokorelasyon Fonksiyonları

$\{Y_t\}$ zaman serilerinin otokovaryans fonksiyonu (3.1) şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned}\gamma_h &= Cov(Y_t, Y_{t-h}) = E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t-h} - E(Y_{t-h}))] \\ &= E(Y_t Y_{t-h}) - E(Y_t)E(Y_{t-h})\end{aligned}\quad (3.1)$$

(3.1)'den anlaşılacağı gibi $\{Y_t\}$ zaman serilerinin varyansı (3.2) biçiminde tanımlanır.

$$Var(Y_t) = \gamma_0 = E(Y_t^2) - [E(Y_t)]^2 \quad (3.2)$$

$\{Y_t\}$ zaman serilerinin otokorelasyon fonksiyonu ise (3.3) şeklindedir. İngilizce kaynaklarda ve yazılım paketlerinde bu fonksiyonu için ACF İngilizce kısaltması kullanılır.

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \frac{E(Y_t Y_{t-h}) - E(Y_t)E(Y_{t-h})}{E(Y_t^2) - [E(Y_t)]^2} \quad (3.3)$$

Pratikte otokorelasyon fonksiyon değerleri yerine genellikle örneklem otokorelasyonları hesaplanmaktadır. Örneklem otokorelasyon fonksiyonu (3.4)'teki gibi hesaplanır.

$$\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-h} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad 0 \leq h < T-1 \quad (3.4)$$

Burada $\bar{y}$ örneklem ortalamasıdır.

3.1.3 Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu (PACF)

Y_t 'nin $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h}$ üzerine regresyonu yapıldığında Y_{t-h} 'nin katsayısı, h -inci kısmi

otokorelasyonu olan Φ_h 'nin değerini vermektedir. Diğer deyişle (3.5)'teki regresyon hesaplandığında Φ_h katsayısı h -inci kısmi otokorelasyon değeridir.

$$Y_t = \phi_{0,h} + \phi_{1,h}Y_{t-1} + \dots + \phi_{h-1,h}Y_{t-h+1} + \Phi_h Y_{t-h} \quad (3.5)$$

Aynı şekilde İngilizce kaynaklarda ve yazılım paketlerinde bu fonksiyonu için PACF İngilizce kısaltması kullanılır.

3.1.4 White Noise Serisi

Tanım 3.3: $\{\varepsilon_t\}$ zaman serileri, bağımsız ve aynı dağılımdan alınan sonlu beklenen değerli ve sonlu varyanslı rasgele değişkenlerin serisi ise $\{\varepsilon_t\}$ zaman serilerine *white noise* serisidir denir ve $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ ile gösterilir.

White noise serisinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu yukarıdaki tanıma göre her $h > 0$ için 0 değerini almaktadır.

3.2 ARMA Modeli

3.2.1 AR Modeli

Otoregresif veya AR(m) modeli (3.6)'daki gibi tanımlanır.

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_m Y_{t-m} + u_t \quad (3.6)$$

Burada $u_t \sim WN(0, \sigma^2)$ white noise serisidir.

Durağanlık koşulunun sağlanmasında aşağıda yazılan iki durum söz konusudur.

- $m = 1$ halinde (3.6) modeli $Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + u_t$ şeklini alacaktır. Bu durumda $0 < |a_1| < 1$ şartı sağlanıyor ise seri durağandır.
- $m > 1$ halinde m dereceden $(1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_m B^m) \rho_h = 0$ fark denkleminin kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise seri durağandır. Burada B , backshift işlemcisidir ve $BY_t = Y_{t-1}$ şeklinde tanımlanır. Diğer bir deyişle (3.7) polinom denkleminin kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise seri durağandır.

$$w^m - a_1 w^{m-1} - a_2 w^{m-2} - \dots - a_m = 0 \quad (3.7)$$

Bu polinom denklemin köklerine ters AR kökleri denir.

AR(m) modelinin beklenen değeri (3.8)'deki ve otokovaryansı (3.9)'daki gibi hesaplanır.

$$E(Y_t) = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_m} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \gamma_0 = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \dots + a_m\gamma_m + \sigma^2 \\ \gamma_h = a_1\gamma_{h-1} + a_2\gamma_{h-2} + \dots + a_m\gamma_{h-m} \end{cases} \quad (3.9)$$

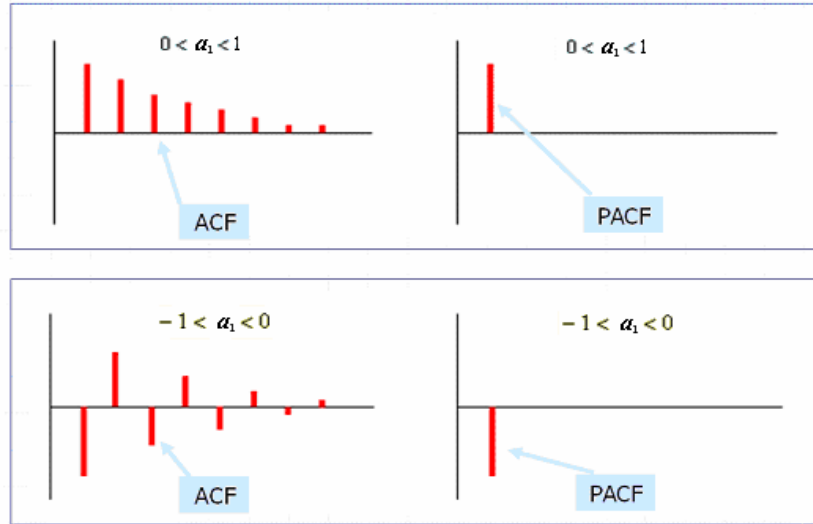
(3.9) otokovaryans denklem sistemine Yule-Walker denklemleri denir.

AR(m) modelinin koşullu beklenen değeri (3.10) ve varyansı (3.11) şeklinde hesaplanır.

$$E(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{t-m}) = a_0 + a_1Y_{t-1} + a_2Y_{t-2} + \dots + a_mY_{t-m} \quad (3.10)$$

$$Var(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{t-m}) = Var(u_t) = \sigma^2 \quad (3.11)$$

Şekil 3.1’de AR(1) modelinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon grafikleri yer almaktadır.



Şekil 3.1 AR(1) modelinin ACF ve PACF grafiği

Şekil 3.1’ten görüldüğü gibi AR(1) modelinin ACF değerleri azalmakta, yalnız eğer $-1 < a_1 < 0$ ise ACF değerleri mutlak değerce azalmakta, otokorelasyon fonksiyonu sırası ile pozitif ve negatif değerler almaktadır. PACF değerleri ise 1-inci gecikmeden sonra 0 değerini almaktadır. Tanım gereği AR(1) modelinin 1 gecikmeli PACF değeri $\Phi_1 = a_1$ ’dir. Genel olarak AR(m) modelinin ACF ve PACF özellikleri aşağıda listelenmiştir.

- ACF değerleri mutlak değerce azalmaktadır.
- PACF değerleri $h > m$ için 0’dır.

AR(m) modelinin m derecesinin belirlenmesinde bu özellikleri kullanılmaktadır.

3.2.2 MA Modeli

Hareketli ortalama veya MA(n) modeli (3.12) biçimindeki gibi tanımlanır.

$$Y_t = \mu + u_t + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + \dots + b_n u_{t-n} \quad (3.12)$$

Burada u_t white noise serisidir. MA serilerin durağan olması için n 'nin sonlu olması yeterlidir.

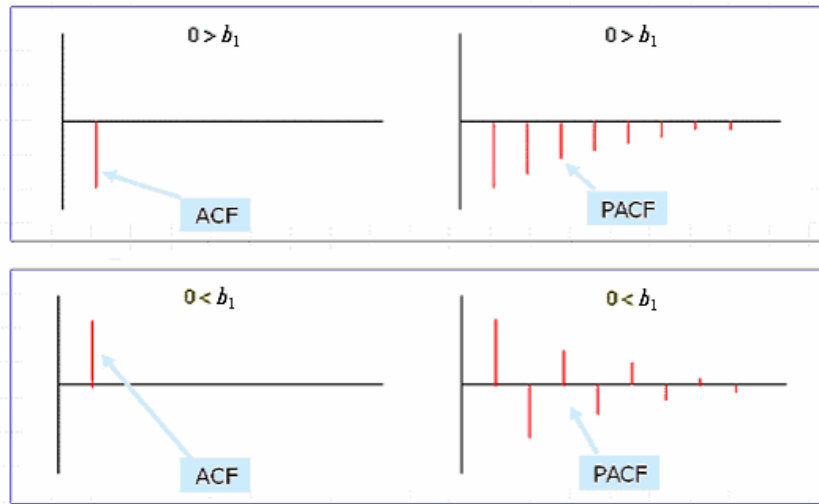
MA(n) modeli için koşulsuz beklenen değer (3.13)'te, varyans (3.14)'te ve otokovaryans fonksiyonu (3.15)'te yer almaktadır.

$$E(Y_t) = \mu \quad (3.13)$$

$$Var(Y_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^n b_j^2, \quad b_0 = 1 \quad (3.14)$$

$$\gamma_h = \sigma^2 \sum_{j=h}^n b_j b_{j-h}, \quad |h| \leq n \quad (3.15)$$

Şekil 3.2'de MA(1) modeli için ACF ve PACF grafikleri verilmiştir.



Şekil 3.2 MA(1) modelinin ACF ve PACF grafiği

Bu grafiklerden ACF ve PACF özellikleri daha iyi anlaşılmaktadır (Şekil 3.2). MA(1) modeli için ACF değerleri 1-inci gecikmeden sonra 0 değerini almakta ve PACF değerleri mutlak değerce azalmaktadır. MA(1) modeli için 1 gecikmeli ACF $\rho_1 = b_1 / (1 + b_1^2)$ değerini almaktadır. Genel olarak MA(n) modelinin ACF ve PACF özellikleri aşağıda yazılmıştır.

- ACF değerleri $|h| > n$ için 0'dır.
- PACF değerleri mutlak değerce azalmaktadır.

Bu özellikler MA modelinin derecesini belirlemede kullanılmaktadır. Ayrıca MA modelinin derecesini belirlemesi için ACF değerleri çok yardımcı olabilir. Buna ters olarak AR modelinin derecesi hakkında PACF değerleri daha çok bilgi verebilir.

3.2.3 ARMA Modeli

ARMA(m, n) modeli AR ile MA modellerinin kombinasyonudur.

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_m Y_{t-m} + u_t + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + \dots + b_n u_{t-n} \quad (3.16)$$

Burada u_t white noise serisidir.

ARMA(m, n) modelinin koşullu beklenen değeri AR(m) modelindeki gibi (3.10) şeklinde ve koşullu varyansı MA(n) modelindeki gibi (3.14) şeklinde hesaplanır.

Bu modelin AR ters kökleri (3.7)'de verilmiştir. MA ters kökleri ise (3.17) şeklindeki polinom denklemden hesaplanır.

$$w^n - b_1 w^{n-1} - b_2 w^{n-2} - \dots - b_n = 0 \quad (3.17)$$

ARMA modelinin durağan olması için bu köklerin mutlak değerce birden küçük olması gerekir.

Son olarak ARMA modeli AR ve MA modellerin birleşimi olduğundan ACF ve PACF grafikleri mutlak değerce azalmaktadır.

3.2.4 Rasgele Yürüyüş Modeli

$\{Y_t\}$ zaman serilerine, (3.18)'deki gibi tanımlanıyorsa rasgele yürüyüş (random walk) modeli denir.

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + u_t \quad (3.18)$$

Rasgele yürüyüş modeli AR(1) modeli olarak ele alınırsa bu durumda $a_1 = 1$ olduğu için durağanlık koşulu sağlanmamaktadır. Bu yüzden rasgele yürüyüş modelleri durağan değil ve birim köklü durağan olmayan zaman serileri olarak tanımlanmaktadır.

Rasgele yürüyüş modeli ayrıca MA şeklinde yazılabilir ve bu modelin MA gösterimi (3.19)

şeklindedir.

$$Y_t = \mu + u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + \dots \quad (3.19)$$

3.2.5 Birim Kök Testi

$\{Y_t\}$ zaman serilerinin durağan olup olmadığı, birim kök testi ile sınıanır. Kolaylık sağlamak için AR(1) modelini ele alalım. $Y_t = a_1 Y_{t-1} + u_t$ olsun. O zaman “ $H_0: a_1 = 1$ ” yokluk hipotezine karşı “ $H_1: |a_1| < 1$ ” alternatif hipotezinin test edilmesinde (3.20) eşitliği ile verilen Dickey-Fuller t istatistiği kullanılır.

$$DF = \frac{\hat{a}_1 - 1}{S_{a_1}} \quad (3.20)$$

H_0 yokluk hipotezi red edilmesi için, yani $|a_1| < 1$ olması için DF test istatistiği negatif değer alıp kritik değerlerden küçük olması gerekir.

Eğer DF test istatistiği değeri pozitif veya negatif olup kritik değerden büyük ise H_0 hipotezi red edilememektedir, yani $\{Y_t\}$ zaman serileri durağan değildir. Bu durumda $\{Y_t\}$ zaman serilerinin birinci farkı ele alınıp tekrar birim kök testi uygulanabilir.

Eğer $\{Y_t\}$ zaman serilerinin birinci farkı durağan ve ARMA(m, n) modeline uygun ise, $\{Y_t\}$ zaman serileri ARIMA($m, 1, n$) modeli olarak tanımlanır. Aynı şekilde eğer $\{Y_t\}$ zaman serilerinin ikinci farkı durağan ve ARMA(m, n) modeline uygun ise, $\{Y_t\}$ zaman serileri ARIMA($m, 2, n$) ile modellenir.

3.3 Oynaklık Kavramı

Oynaklık kavramı, finansal analizinde önemli bir yer edinmektedir. Oynaklık kavramı altında, bir zaman serilerinin geçmiş faktörlere göre koşullu değişen varyansı olduğu kabul edilmektedir. Yalnız verinin oynaklığı zaman serilerinden direkt olarak hesaplanamayabilir. Ancak oynaklık bir takım özelliklere sahiptir.

- Oynaklık belli bir zaman yüksek, belli bir zaman düşük olabilir.
- Oynaklık zaman içinde sürekli olarak değişmektedir. Oynaklık sıçraması nadirdir.
- Oynaklık sonsuz değere gitmemektedir, yani oynaklık belirli bir aralık içinde değer almaktadır.

- Oynaklık büyük fiyat sıçramalarına farklı şekilde tepki göstermektedir.

Bu özellikler oynaklık modellenmesinde büyük rol oynamaktadır.

Başlangıç için $\{Y_t\}$ zaman serileri için bir ARMA(m, n) modeli kurulsun (ortalama denklemi).

Bu durumda (3.16) eşitliği (3.21) gibi de yazılabilir.

$$Y_t = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i Y_{t-i} + u_t + \sum_{j=1}^n b_j u_{t-j} \quad (3.21)$$

Θ_{t-1} , $t-1$ zamanında mevcut olan tüm bilgilerin kümesi olmak üzere *oynaklık* (3.22) şeklinde tanımlanır.

$$h_t = \text{Var}(Y_t | \Theta_{t-1}) = \text{Var}(u_t | \Theta_{t-1}) \quad (3.22)$$

Eğer bu koşullu değişen varyans sabit bir sayı ise, bu durumda oynaklık söz konusu değildir, ve kurulan model sabit varyanslıdır.

Oynaklık regresyon modellerinin tahmin edicilerinin tutarlılığını etkilemez yalnız sonuç çıkarma için sıkıntı olabilir.

3.4 ARCH Modeli

(3.21)'de tanımlanan ARMA modeli kurulmuş olsun. Ayrıca $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$, yani ε_t birbirinden bağımsız beklenen değeri 0, varyansı 1 olan aynı dağılıma sahip olsun. O zaman ARMA modelinin artıkları (3.23) şeklinde olmak üzere, ARCH(q) modelinin koşullu değişen varyans denklemi (3.24)'teki gibi tanımlanır. İngilizce literatürde (3.24)'te verilen denklem için “variance equation” adı kullanılır.

$$u_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t} \quad (3.23)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 \quad (3.24)$$

Burada varyans negatif değer alamayacağı için $\alpha_0 > 0$ ve $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ şartları aranmaktadır. Ayrıca u_t 'nin koşulsuz varyansı (3.25) şeklinde tanımlandığından katsayılar için $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q < 1$ şartı eklenmektedir. Aynı zamanda bu şart, ARCH modelinin durağan olma şartıdır.

$$Var(u_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q} \quad (3.25)$$

Yukarıda belirtildiği gibi $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$ olarak tanımlandığından (3.23) şeklinden hata terimlerinin koşullu dağılımı $u_t | \Theta_{t-1} \sim (0, h_t)$ biçiminde yazılabilir. Genel olarak (3.23) modelindeki ε_t hata terimleri, ya standart normal dağılıma ya da standartlaştırılmış Student-t dağılımına sahip olduğu varsayılmaktadır. Bazı çalışmalarda ise genelleştirilmiş hata dağılımına sahip olduğu varsayılmaktadır. Örneğin; Nelson (1994) EGARCH modelini ilk önerirken hata terimlerinin genelleştirilmiş hata dağılımına sahip olduğunu varsaymıştır. Ayrıca (3.24) modelden anlaşıldığı gibi u_{t-i} geçmiş şokların büyük olması koşullu değişen varyansın büyük olmasına neden olmaktadır.

Diğer taraftan koşullu değişen varyans, Θ_{t-1} geçmiş bilgiler kümesi olarak belirlenirken, genel olarak bu küme u_{t-i} geçmiş şoklardan oluşmaktadır. Bundan dolayı, ARCH veya GARCH hesaplanmasında koşullu değişen varyans, geçmiş şokların karelerinin ağırlıklı toplamı olarak alınmaktadır.

3.5 GARCH Modeli

Bollerslev'in (1986), Engle'in önerdiği ARCH modelini genişleterek önerdiği GARCH(p, q) modeli aşağıdaki gibi tanımlanır.

İlk önce ortalama denklemi (mean equation) kurulsun. Ortalama denklemi için (3.21)'de tanımlanan ARMA modeli ele alınabilir. O zaman (3.23) biçimi için $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$ olmak üzere GARCH(p, q) modelinin koşullu değişen varyansı (3.26) biçimindedir.* ARCH(q) modeli ile aynı olarak, (3.26) denkleminde İngilizce kaynaklarda “variance equation” terimi kullanılır.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (3.26)$$

Burada $i = 1, \dots, q$ ve $j = 1, \dots, p$ olmak üzere $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ ve $\beta_j \geq 0$ şartı, ayrıca koşulsuz varyans tanımından $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p < 1$ şartı aranmaktadır. Bu şart GARCH modeli için durağanlık şartıdır.

* Bollerslev, T., (1986), “Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”

3.6 Diğer GARCH Modelleri

Engle'in (1982) ARCH ve Bollerslev'in (1986) GARCH modelleri GARCH ailesinin temelini oluşturmaktadır. Bu iki modelde koşullu değişen varyans, piyasanın olumlu ve olumsuz etkilerinden aynı derecede etkilenmektedir. Diğer sözlerle bu iki model simetrik modellerdir. ARCH(q) ve GARCH(p, q) modellerin belgelenmesinden sonra çeşitli modeller önerilmiştir.

Ayrıca 1986 yılında Engle ve Bollerslev tarafından önerilen, IGARCH modelinde koşullu değişen varyans, varyans denklemindeki eğim katsayıların toplamı 1 olarak alınmaktadır.* Integrated GARCH(1, 1) veya kısacası IGARCH(1, 1) koşullu değişen varyans (3.27) şeklinde tanımlanır.

$$h_t = \alpha_0 + (1 - \beta_1)u_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (3.27)$$

1987 yılında Engle tarafından önerilen GARCH-M modelinde koşullu değişen varyansın zaman serilerini etkilediği varsayımı temel alınmaktadır. O halde GARCH-M model varsayımı altında, koşullu ortalama oynaklığın bir fonksiyonu olarak yazılır.** Bu durumda GARCH-In-Mean veya kısacası GARCH-M(p, q) modelinin ortalama denklemi, (3.28)'deki gibi tanımlanabilir.

$$Y_t = \mu + \lambda h_{t-1} + u_t \quad (3.28)$$

Menkul kıymetlerin beklenen getirisi, kıymetin beklenen riski ile bağlantılı olan finansal uygulamalarda GARCH-M modeli sık kullanılmaktadır (Tsay, 2002).

Bunun yanı sıra bazı uygulamalarda, ortalama denklemindeki oynaklığın bir gecikmeli değeri yerine aynı zaman aralığındaki oynaklık değeri ele alınmakta ve bu durumda ortalama denklemi $Y_t = \mu + \lambda h_t + u_t$ şeklini alır (Brooks, 2005).

GARCH modeli, oynaklık kümelemesini başarı ile yakalamaktadır. Yalnız GARCH modelinde koşullu varyans, hata karelerinin gecikmeli değerlerinin büyüklüğünün bir fonksiyonu olduğundan; hata terimlerinin işaretine önem verilmemektedir. Bu durumda GARCH modeli kaldıraç etkisini (leverage effect) yansıtamamaktadır.

* Bollerslev, T., Engle, R. F. ve Nelson, D. B., (1994), Handbook of Econometrics Volume 4.

** Bollerslev, T., Engle, R. F. ve Nelson, D. B., (1994), Handbook of Econometrics Volume 4.

Nelson (1991), GARCH modellerinin bazı zayıf taraflarının üstesinden gelmek için önerdiği EGARCH modelinde, pozitif ve negatif getirileri arasındaki asimetrik etkilerini (3.29)'da belirtilen fonksiyon ile açıklamıştır.

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \lambda(|\varepsilon_t| - E|\varepsilon_t|) \quad (3.29)$$

Burada θ ve λ sabittir ve $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$ 'dir. Eğer ε_t standart normal rasgele değişkeni ise $E|\varepsilon_t| = \sqrt{2/\pi}$ 'dir. EGARCH(p, q) modelinin koşullu değişen varyans regresyonu (3.30) şeklinde yazılır. Burada B backshift işlemcisi, α_0 bir sabittir.

$$\ln h_t = \alpha_0 + \left(1 + \sum_{i=1}^q \alpha_i B^i\right) \left(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j B^j\right)^{-1} g(\varepsilon_{t-1}) \quad (3.30)$$

Böylece

Asimetrik GARCH modelleri olarak bu bölümde EGARCH modeli ele alınmıştır. Ancak bunların dışında birçok asimetrik GARCH tanımlaması mevcuttur. Bunlardan bazıları aşağıda listelenmiştir.

- TGARCH – Zakoian, 1994
- GJR – Glosten, Jagannathan ve Runkle, 1993
- QGARCH – Sentana, 1995
- LSTGARCH – Gonzalez ve Rivera, 1998

Ayrıca asimetrik GARCH modellerinin belirlenmesi için çeşitli testler geliştirilmiştir, ancak panel GARCH modeli ele alınacağı için bu konuya girilmemiştir. Ayrıca panel veri seti için, asimetrik GARCH modellerinin tanımlanması ile ilgili çalışmaya henüz rastlanmamıştır.

3.7 GARCH Modelinin Kurulması

Uygulamada GARCH modelinin kurulması için aşağıdaki adımlar izlenir*.

- 1) Veriden ARMA gibi lineer bir model kurulup artıklarının ARCH etkisi test edilir. Burada Ljung-Box Q istatistiği veya Lagrange Multiplier veya kısaca LM testi kullanılır.
- 2) GARCH dereceleri belirlenir. Burada GARCH dereceleri, u_t^2 'nin ACF ve PACF değerlerinden belirlenebilir. Katsayıların bulunmasında ise en çok olabilirlik tahmin

* Tsay, R. S., (2002), Analysis of Financial Time Series.

yöntemi kullanılır. GARCH hesaplanmasında koşullu değişen varyans, genellikle geçmiş şokların karelerinin ağırlıklı toplamı olarak alınmaktadır.

- 3) Kurulan GARCH modelinin sınanması ve iyileştirilmesi yapılır. Bunun için $\tilde{u}_t = u_t / \sqrt{h_t}$ standartlaştırılmış şokların *iid* olma özelliğinden yola çıkarak $\{\tilde{u}_t\}$ serisinin Ljung-Box istatistiği ile ekonometrik modelin tutarlılığı, veya $\tilde{u}_t^2$ ile oynaklık denkleminin doğruluğu sınanabilir. Ayrıca $\{\tilde{u}_t\}$ serisinin çarpıklık, basıklık özellikleri de ele alınabilir.

GARCH modelinin tahmini için sıradan EKK yöntemi tutarlı tahminler vermez. EKK yöntemi, artık karelerinin toplamını minimize ederek tahmin değerlerini bulmaktadır. Ancak bu durumda varyans denklemindeki katsayılar değişse bile hata terimlerinde değişiklik olmaz, çünkü artık kareleri ortalama denklemindeki katsayılarına bağlıdır. Bu yüzden GARCH modelinin tahmini için EÇO yöntemi kullanılmaktadır (Brooks, 2005). Bölüm 5'te panel GARCH modeli için EÇO yöntemi derlenecektir.

3.8 Yardımcı Test İstatistikleri

Kurulan modelin sınanması veya iyileştirilmesi, veya birkaç modellerin karşılaştırılması için çeşitli testler kullanılmaktadır. Bu bölümde bu testler ele alınacaktır.

3.8.1 Portmanteau Testi

Finansal uygulamalarda otokorelasyon değerlerinin sıfır olup olmadığı sıkça test edilmektedir. Bu durumda “ $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$ ” yokluk hipotezine karşı “ $H_1: \rho_i \neq 0; i = 1, 2, \dots, m$ ” alternatif hipotezi test edilmektedir. Yokluk hipotezi altında otokorelasyon değerleri anlamsızdır.

Box ve Pierce bu test için önerdiği Portmanteau istatistiği (3.31)'de verilmiştir.

$$Q^*(m) = T \sum_{j=1}^m \hat{\rho}_j^2 \quad (3.31)$$

Bu test istatistiği asimptotik olarak m serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

Ljung ve Box yukarıdaki test istatistiğini (3.32)'deki gibi değiştirmiştir.

$$Q(m) = T(T+2) \sum_{j=1}^m \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j} \quad (3.32)$$

Finans literatüründe bu test genellikle Ljung-Box testi olarak geçmektedir. Test istatistiği birkaç m değer için hesaplanmakta, ve $m \approx \ln(T)$ olarak seçmesi daha iyi performans verdiği

simülasyon çalışmalarda gösterilmiştir (Tsay, 2002).

3.8.2 Bilgi Kriterleri

Birkaç model karşılaştırılmasında Akaike bilgi kriteri (AIC) veya Schwartz kriteri (SC) kullanılmaktadır. Genellikle bu iki kriterin en küçük değer aldığı model daha uygun sayılmaktadır. Bu kriterler sırasıyla (3.33) ve (3.34)'teki gibi hesaplanır.

$$AIC = -\frac{2}{T}l + \frac{2}{T}K \quad (3.33)$$

$$SC = -\frac{2}{T}l + \frac{K}{T}\ln T \quad (3.34)$$

Burada K , toplam parametre sayısıdır ve olabilirlik fonksiyonu (3.35) biçiminde hesaplanır.

$$l = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \left[\ln h_t + \frac{u_t^2}{h_t} \right] \quad (3.35)$$

3.8.3 Durbin-Watson İstatistiği

Durbin-Watson testi regresyon modelinin hata terimlerde ardışık bağımlılığın olup olmadığını araştırmaktadır. Test istatistiği (3.36)'da verilen şekilde hesaplanmaktadır.

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T u_t^2} \quad (3.36)$$

Test istatistiği 0 ile 4 arasında değer almaktadır. Eğer DW , 2'den küçük ise hata terimleri arasında pozitif seri korelasyon vardır ve eğer DW , 2'den büyük ise negatif seri korelasyon mevcuttur. Eğer DW 2'ye yakın bir değer alıyorsa o zaman seri korelasyon yoktur. Bu aralıklar Durbin-Watson tablo değerlerine bakılarak belirlenir.

3.8.4 LM Testi

Durbin-Watson testi, hata terimlerinin sadece birinci dereceden seri korelasyonunun olup olmadığını belirlemekte, ancak daha yüksek derecedeki seri korelasyonunun var olup olmadığı LM testi ile belirlenir. Bu test için yokluk hipotezi aşağıda verilmiştir.

“ H_0 : m 'den daha yüksek dereceden seri korelasyonu yoktur.”

Teorik olarak LM test istatistiği hata terimlerin olasılık yoğunluk fonksiyonunun olabilirlik fonksiyonundan hesaplanmaktadır. Ama uygulamada ise test istatistiği hesaplanırken; ilk önce regresyon modelinin hata terimleri hesaplanır ve t -inci hata terimi u_t 'nin, regresyon modelinin bağımsız değişkenleri ve $i = 1, \dots, m$ olmak üzere u_{t-i} gecikmeli hata terimleri üzerine yan regresyonu yapılır ve F ve R^2 değerleri ele alınır.

Örneğin, u_t , (3.37) şeklinde tanımlanan bir regresyon modelinin hata terimleri ise, yardımcı regresyon (3.38) şeklinde kurulur. Daha sonra yan regresyonun R^2 değeri hesaplanır.

$$Y_t = c + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_K x_{Kt} + u_t \quad (3.37)$$

$$\hat{u}_t = c^* + \beta_1^* x_{1t} + \dots + \beta_K^* x_{Kt} + \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \dots + \gamma_m \hat{u}_{t-m} \quad (3.38)$$

H_0 yokluk hipotezi altında TR^2 değeri asimptotik olarak m serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

3.8.5 White Değişen Varyans Testi

Hata terimlerindeki değişen varyansın sınanması için 1980 yılında White tarafından önerilen bu testin yokluk hipotezi aşağıda verilmiştir.

“ H_0 : Değişen varyans yoktur.”

Hipotezin sınanması için ilk önce yan regresyon modelinde açıklayıcı değişken olarak, ana regresyonun bağımsız değişkenleri, onların kareleri ve onların ikili çarpımları alınmakta, ve bağımlı değişken olarak ilk regresyonun hata terimlerin kareleri alınmaktadır.

Örneğin, regresyon modeli (3.39) şeklinde kurulsun. O zaman yan regresyon (3.40) şeklinde kurulur.

$$Y_t = c + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t \quad (3.39)$$

$$\hat{u}_t^2 = c^* + \beta_1^* x_{1t} + \beta_2^* x_{2t} + \beta_3^* x_{1t}^2 + \beta_4^* x_{2t}^2 + \beta_5^* x_{1t} x_{2t} \quad (3.40)$$

Yan regresyon modelinin R^2 değeri hesaplanır. TR^2 değeri asimptotik olarak ki-kare dağılımına sahiptir. Serbestlik derecesi ise yan regresyondaki açıklayıcı değişkenlerin sayısına eşittir ki, ele alınan örnekte yokluk hipotezi altında TR^2 değeri 5 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

3.8.6 ARCH LM Testi

ARCH modeli için Engle (1982) tarafından önerilen ARCH LM testinde, u_t^2 artık karelerinin, $i = 1, \dots, m$ olmak üzere u_{t-i}^2 üzerine yan regresyonu (3.41) yapılır, ve aynı şekilde F ve R^2 değerleri ele alınır.* Bu durumda “Hata terimlerinde ARCH etkisi yoktur” yokluk hipotezi altında, TR^2 test istatistiği, asimptotik olarak m serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

$$\hat{u}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \gamma_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \dots + \gamma_m \hat{u}_{t-m}^2 \quad (3.41)$$

* Engle, R. F., (1984), Handbook of Econometrics Volume 2

4. PANEL VERİ

4.1 Giriş

Son zamanda panel veri üzerine yapılan araştırmaların sayısı hızla artmaktadır. Panel veri analizine girmeden önce veri türlerini göz önüne aldığımızda, ampirik analizinde üç çeşit veri türü kullanılmaktadır.*

- Zaman serileri (Time series), bir değişkenin zamanla değişen değerlerinin kümesidir. Bu tür veri eşit aralıklı zaman aralıklarında düzenli olarak toplanabilir. Örneğin; günlük hisse verileri, aylık faiz verileri, üç aylık Gayri Safi Milli Hasıla verileri zaman serileri verileridir. Buradan anlaşıldığı gibi bu tür veriler ekonometrik analizinde sıkça kullanılmaktadır.
- Kesit veriler (Cross-sectional data), zaman içinde belli bir noktada derlenen verilerdir. Örneğin; belli bir zaman noktasında ölçülen hane gelir düzeyi, kira, hane halkı sayısı gibi veriler kesit verilerdir. Bu tür veriler nüfus sayımlarında, kamuoyu araştırmalarında sıkça kullanılır.
- Karma veriler (Pooled data), hem zaman serileri hem de kesit verileri içermektedir. Bazı literatürde birleştirilmiş veri olarak da adlandırılır. Bu veriler hem yatay kesite göre hem zamana göre değişkenlik göstermektedir.
 - Panel veri (Panel, longitudinal, micropanel data), kesit verilerin düzenli zaman aralıklarında toplanan verilerdir. Panel veri, karma verinin özel bir çeşididir. Örneğin; ilçeye göre her ay düzenli olarak toplanan döviz kuru ile ihracat hacmi verileri panel veri türünü oluşturmaktadır.

Buradan anlaşılabileceği gibi panel veri hem kesite göre hem de zamana göre değişen örnekleri içermektedir. Bu yüzden panel veri ile çalışırken kesit verilerle veya zaman serilerle çalışılan yöntemler eksik kalmaktadır. Bundan dolayı çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.

Hane, ülke, şirket gibi kesit verilerin zaman içindeki değişkenliğini araştırmak için çeşitli panel veriler oluşturulmuştur. Bunlardan en bilinenleri ise ABD’de Michigan üniversitesi tarafından yapılan Gelir Dinamikleri Panel Araştırması (PSID) ve Ohio üniversitesi tarafından yapılan İşgücü Piyasa Araştırmasıdır (NLS). Bu panel veriler ABD’deki yoksulluğun özelliklerini ve nedenini araştırmak için oluşturulmuştur. PSID verileri 1968 yılında 4802 hane ile görüşülerek toplanmaya başlanmıştır. NLS verileri ise 1960’ların ortasında çeşitli yaş sınırlamalar yapılarak toplanmaya başlanmıştır. Avrupa’da toplanan panel veri setleri aşağıda listelenmiştir.*

* Gujarati, D. N., (2004), Basic Econometrics.

* Hsiao, C., (2002), Analysis of Panel Data.

- SEP – Sosyo-ekonomik panel, Hollanda
- GSOEP – Alman sosyal ekonomi paneli
- PSELL – Luxembourg’un sosyal ekonomik panel
- BHPS – İngiltere’nin hane panel araştırması
- ECHP – Avrupa Birliği’nin ev hane paneli (Eurostat)

Ayrıca Dünya Bankası (WB) desteği ile gelişmekte olan ülkelerde de panel veri toplanmıştır. Bunlardan biri 1984 – 1990 yıllarında Çin’in 200 büyük şehir ve köyler için yıllık toplanan verilerdir (Hsiao, 2002).

4.2 Panel Verinin Avantajları ve Kısıtlamaları

Kesit veri veya zaman serilerinin yanında panel veri setleri, araştırmacılar için çeşitli avantajlar sağlamaktadır. Panel veri kümesiyle çalışılırken veri boyutunun artması, serbestlik derecelerinin artmasını da beraberinde getirmektedir. Bu da sadece zaman seri, veya sadece yatay kesit verilerinin cevap veremediği önemli iktisadi sorulara yanıt vermektedir.

Zaman serileri analizinde parametre tahminleri genellikle verilerin durağan olması ve şokların bağımsız olması varsayımlarına dayanmaktadır. Kesit veri analizinde rasgele örnekleme ve eksojen veri yapısı esas alınmaktadır. Panel data analiz tüm bu özelliklerden yararlanmaktadır.

Literatürde örneğin; döviz kuru oynaklığı ile dış ticaret hacmi arasındaki ilişkiyi inceleyen birçok çalışma vardır. Önceki çalışmalarda, özellikle 1980 – 1990 yıllarında genellikle zaman serileri verileri ile en küçük kareler yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmalarda döviz kuru oynaklığının dış ticaret hacmi üzerindeki negatif ve anlamlı etkisi saptanmamıştır fakat panel verinin kullanıldığı güncel çalışmalarda bu ilişki saptanmış ve anlamlı olduğu gösterilmiştir (Hondroyannis, Swamy, Tavlak ve Ulan, 2005). Panel veri ile çalışmak birçok yönden avantaj sağlamaktadır. Hsiao (2002) ve Baltagi’nin (1995) belirttikleri avantajlar, aşağıda derlenmiştir.

- Sabit terimdeki heterojenliğin kontrol altında alınması. Örneğin, zamana göre veya kesite göre sabit değişkenler il bazında araştırılan tüketim fonksiyonunu etkileyebilir. Her il için eğitim, gelir gibi değişkenler gözlemlenebilir, ancak tüketimi etkileyebilecek tüm ülkeye yayın yapan televizyon reklamları kesite göre sabittir. Panel veri yapısında bu değişkenler hepsi modellenebilir.
- Daha çok bilgi, daha çok değişkenlik ve daha çok serbestlik derecesinin sağlanması. Panel veri hem kesite hem de zamana göre gözlemlendiğinden, araştırmacılara çok sayıda veri sağlamaktadır. Bundan dolayı kullanılan istatistik testlerinde serbestlik dereceleri

artmaktadır. Ayrıca panel veride daha çok değişkenlik söz konusu olduğu için açıklayıcı değişkenler arasındaki doğrusal bağımlılık azalmaktadır.

- İktisadi göstergelerin dinamikliğinin öğrenilmesi. Makro ve mikro dinamik etkiler sadece kesit veri ile belirlemek mümkün değildir. Zaman serileri, tek başına dinamik katsayıları kesin olarak tahmin edemez. Panel veri ile işsizlik, veya yoksulluk gibi değişkenlerin zaman içindeki dinamiği belirlenerek sonraki dönemler için iktisadi politikalar oluşturulmaktadır, ve bu politikaların etkinliği araştırılmaktadır.
- Yalnız kesit verilerde veya yalnız zaman serilerinde belirlenmeyen etkilerin tanımlanması ve ölçmesi. Örneğin, işçinin sendikaya üye olması gelirini etkileyip etkilemediğini, ve işçinin sendikaya üye iş yerinden çıkıp sendikaya üye olmayan işyerine girmesi gelirin etkisi gösterip göstermediği panel veri ile araştırılabilir.
- Daha karmaşık davranış modellerinin kurulması ve test edilmesi. Eğer bireyin davranışları aynı değişkenlere bağlı ise, panel veri ile başkalarının davranışı üzerine o bireyin davranışı modellenmelidir. Örneğin, teknik yeterlilik panel veri ile modellenmekte ve araştırılmaktadır.
- Birey veya firma verilerinin birleştirmesindeki yanlışlığın giderilmesi. Mikro birim düzeyinde toplanan verilerde değişkenler kesin olarak ölçülebilir, ve bunların birleştirmesinden ortaya çıkan yanlışlık giderilebilir.

Panel verinin getirdiği avantajların yanında bazı kısıtlamalar mevcuttur. Bu kısıtlamalar aşağıda listelenmiştir.*

- Veri toplama ve tasarım sorunu. Panel veri toplama sırasında yanıt almama, doğru yanıtlamama, sabit zaman aralıklarında verinin toplanamaması gibi sorunlar ortaya çıkmaktadır.
- Ölçüm hatalarının çarpıklığı. Ölçüm hataları hatalı yanıt, doğru hatırlayamama, uygun olmayan katılımcı, yanıtları maksatlı çarpıtılması, anketörün etkisi gibi sorunlardan kaynaklanabilir.
- Seçicilik sorunları. Seçicilik sorunları üç alt bölüme ayrılmaktadır.
 - Öz seçicilik. Gelir araştırması için toplanan verilerde gelir dışındaki tüm bilgiler mevcut olduğu halde, geliri yoksa bu gözlem araştırmaya dahil edilmemektedir. Örneğin yoksulluk araştırmasında geliri, yoksulluk seviyesinin 1.5 katı ise örnekleme dahil edilmeyebilir. Sonuç çıkarmada alınmayan veri yanlışlığa sebep olmaktadır.
 - Yanıt vermemesi. Ret, katılımcının yerinde olmaması gibi durumlar söz konusu olabilir.
 - Aşınma. Yanıt almama sorunu kesit veri analizinde de karşımıza çıkmaktadır. Ancak panel veri toplamasında katılımcının ölümü, taşınması, veya vazgeçmesi gibi sorunlar ortaya çıkmaktadır.
- Zaman gözlemlerinin kısa olması. Örneğin, yıllık toplanan panel veri sadece 5 yıl sürebilir. Bu verilere kısa panel denmektedir.

Özetle panel verideki kısıtlamalar, kesit verilerdeki veya zaman serilerindeki kısıtlamalarla aynı olmanın yanı sıra sadece panel veriye özgün kısıtlamalar da mevcuttur.

4.3 Statik Panel Regresyonu

Panel veri hem yatay kesite göre hem de zamana göre değiştiğinden iki indis kullanılmaktadır. Biri $i = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere kesit indisi i , diğeri $t = 1, 2, \dots, T$ olmak üzere zaman indisi t 'dir. Genellikle y_{it} bağımlı değişken ve x_{it} K boyutlu bağımsız değişkenler vektörü olmak üzere panel regresyon modeli aşağıdaki biçimlerdeki gibi yazılır.

- 1) Tüm katsayılar yatay kesit ve zamana göre değişmektedir.

$$y_{it} = \alpha_{it} + \beta'_{it}x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (4.1)$$

- 2) Tüm katsayılar kesite göre değişmektedir. Bu modele SUR modeli denir. Yani her kesit için ayrı denklem kurulmaktadır.

$$y_{it} = \alpha_i + \beta'_i x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (4.2)$$

- 3) Eğim katsayıları sabit, sabit terimler ise kesit ve zamana göre değişmektedir.

$$y_{it} = \alpha_{it} + \beta'x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (4.3)$$

- 4) Eğim katsayıları sabit, sabit terimler kesite göre değişmektedir.

$$y_{it} = \alpha_i + \beta'x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (4.4)$$

- 5) Tüm katsayıları sabit olan modele havuz modeli (pooled regression) denir.

$$y_{it} = \alpha + \beta'x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (4.5)$$

Burada u_{it} hata terimi $u_{it} \sim (0, \sigma_u^2)$ 'dir, yani u_{it} hata terimi 0 ortalamalı ve σ_u^2 varyanslı dağılıma sahiptir.

Uygulamada (4.3) ve (4.4) gibi sabit eğim katsayılı ve değişen sabit terimli modeller ve (4.5) havuz modeli daha çok kullanılmaktadır. İlk iki model tahmininde çok fazla katsayı içerdiği için pek kullanılmamaktadır.

En çok kullanılan (4.4) modeli ele alınsın.

$$y_{it} = \alpha_i + \beta'x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T$$

Burada

- y_{it} : bağımlı değişken, 1×1 boyutlu
- x_{it} : açıklayıcı değişken vektörü, $K \times 1$ boyutlu, $x'_{it} = (x_{1it}, x_{2it}, \dots, x_{Kit})$
- u_{it} : hata terimi, 1×1 boyutlu

* Baltagi, B. H., (1995), Econometric Analysis Of Panel Data.

- α_i : sabit terim, 1×1 boyutlu
- β : eğim katsayıları vektörü, $K \times 1$ boyutlu, yani $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)$ 'dır.

(4.4) modeli (4.6) gibi farklı biçimde de yazılabilir.

$$y_i = e_T \alpha_i + X_i \beta + u_i \quad i = 1, \dots, N \quad (4.6)$$

Burada

- y_i : $T \times 1$ boyutlu vektör, $y'_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iT})$
- X_i : $T \times K$ boyutlu matris, $X'_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iT})$
- u_i : $T \times 1$ boyutlu vektör, $u'_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iT})$
- α_i : 1×1 , sabit terim
- β : $K \times 1$ boyutlu eğim katsayılar vektörü, $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)$
- e_T : $T \times 1$ birler vektörü, $e'_T = (1, 1, \dots, 1)$

Bu durumda (4.4) modeli matris biçimiyle (4.7) şeklini alır.

$$\begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1i1} & x_{2i1} & \dots & x_{Ki1} \\ x_{1i2} & x_{2i2} & \dots & x_{Ki2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1iT} & x_{2iT} & \dots & x_{KiT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iT} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, N \quad (4.7)$$

Ayrıca genel matris biçimiyle (4.8)'deki gibi yazılır.

$$Y = \alpha \otimes e_T + X\beta + U \quad (4.8)$$

Burada

- Y : $NT \times 1$ vektör, $Y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_N)$
- X : $NT \times K$ matris, $X' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_N)$
- U : $NT \times 1$ vektör, $U' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_N)$
- α : $N \times 1$ vektör, $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$
- β : $K \times 1$ vektör, $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)$
- e_T : $T \times 1$ birler vektörü, $e'_T = (1, 1, \dots, 1)$
- $\otimes$: Kronecker çarpımıdır. (Bakınız Ek 1.)

(4.8)'de yazılan modelin açılmış matris biçimi (4.9) şeklini alır.

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2T} \\ \vdots \\ y_{N1} \\ y_{N2} \\ \vdots \\ y_{NT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \alpha_N \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{111} & x_{211} & \dots & x_{K11} \\ x_{112} & x_{212} & \dots & x_{K12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{11T} & x_{21T} & \dots & x_{K1T} \\ x_{121} & x_{221} & \dots & x_{K21} \\ x_{122} & x_{222} & \dots & x_{K22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{12T} & x_{22T} & \dots & x_{K2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1N1} & x_{2N1} & \dots & x_{KN1} \\ x_{1N2} & x_{2N2} & \dots & x_{KN2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1NT} & x_{2NT} & \dots & x_{KNT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1T} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2T} \\ \vdots \\ u_{N1} \\ u_{N2} \\ \vdots \\ u_{NT} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Katsayı tahmin edicilerin matris biçiminde hesaplamasında yardımcı olacak P ve Q kovaryans dönüşüm matrisi tanımlansın. I_T , $T \times T$ birim matrisi olmak üzere P ve Q kovaryans dönüşüm matrisleri sırasıyla (4.10) ve (4.11) şeklindedir.

$$P = \frac{1}{T} e_T e_T' \quad (4.10)$$

$$Q = I_T - \frac{1}{T} e_T e_T' \quad (4.11)$$

P ve Q matrisinin ikisi de $T \times T$ boyutludur. Bu matrislerin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Simetrik: $P = P'$, $Q = Q'$
- İdempotent: $PP = P$, $QQ = Q$

Sırası ile (4.12) ve (4.13)'teki işlemler P ve Q matrisinin işlevini daha iyi açıklamaktadır. Buradan görüldüğü gibi P matrisi, i -inci kesitin $T \times 1$ boyutlu ortalama vektörünü vermekte (4.12) ve Q matrisi, panel verinin her kesit için ortalama olan sapmasını vermektedir (4.13).

$$Py_i = e_T \bar{y}_i \quad (4.12)$$

$$Qy_i = y_i - e_T \bar{y}_i \quad (4.13)$$

Burada kesite göre ortalama (4.14)'teki gibi hesaplanmaktadır.

$$\bar{y}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{it} = \frac{1}{T} e'_T y_i \quad (4.14)$$

Kesite göre ortalamalar diğer değişkenler için de aynı şekilde hesaplanacaktır.

Ayrıca genel örneklem ortalaması (4.15) şeklinde bulunur. Bu şekilde diğer değişkenlerin genel örneklem ortalaması bulunur.

$$\bar{Y} = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{it} \quad (4.15)$$

4.3.1 Gruplar İçi ve Gruplar Arası Moment Matrisleri

Yukarıda ele alınan (4.4) modeli, tekrar göz önüne alınsın.

$$y_{it} = \alpha_i + \beta' x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T$$

Bu durumda bu modelin gruplar içi ve gruplar arası moment matrisleri aşağıdaki tabloda verilmiştir (Çizelge 4.1)*.

Çizelge 4.1 Gruplar içi ve gruplar arası moment matrisleri

	Gruplar İçi	Gruplar Arası
S_{XX}	$S_{XX}^{Within} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{it} - \bar{x}_i)'$	$S_{XX}^{Between} = \sum_{i=1}^N (\bar{x}_i - \bar{X})(\bar{x}_i - \bar{X})'$
S_{XY}	$S_{XY}^{Within} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} - \bar{x}_i)(y_{it} - \bar{y}_i)$	$S_{XY}^{Between} = \sum_{i=1}^N (\bar{x}_i - \bar{X})(\bar{y}_i - \bar{Y})$
EKK Tahmin Edicisi	$\hat{\beta}_{Within} = [S_{XX}^{Within}]^{-1} S_{XY}^{Within}$	$\hat{\beta}_{Between} = [S_{XX}^{Between}]^{-1} S_{XY}^{Between}$

Burada $\bar{y}_i$, (4.14)'te ve $\bar{Y}$, (4.15)'te verilmiştir. Benzer şekilde $\bar{x}_i$ ve $\bar{X}$ değerleri bulunur.

Çizelge 4.1'den görüldüğü gibi gruplar içi moment matrisi, verilerin grup ortalamalarından olan değişkenliği vermekte ve gruplar arası moment matrisi ise, grup ortalamaların genel ortalamadan değişkenliği göstermektedir.

Tanımlanan model tahmininde yöntemler, sabit etki (fixed effects) ve rasgele etki (random effects) modelleri için değişiklik göstermektedir.

* Greene, W. H., (2003), Econometric Analysis.

4.3.2 Sabit Etki Modeli: LSDV

Bazı kaynaklarda sabit etki (fixed effects) modeli bireysel etki modeli diye geçmektedir. Sabit etki modelinde α_i terimler sabit parametre olarak ele alınmaktadır. Genel olarak bu durumda modele dahil olmayan değişkenlerin etkisi kukla (dummy) değişkenler yardımıyla gösterilmektedir. Bağımlı değişkenin i -inci birimin t zamanındaki değeri y_{it} , kesite göre değişkenlik gösteren K eksojen değişkenine bağlıdır. (4.4) modeli tekrar yazılırsın.

$$y_{it} = \alpha_i + \beta'x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T$$

Sabit etki modeli ile ilgili aşağıdaki varsayımlar mevcuttur.*

- 1) $E(u_{it}|X_i, \alpha_i) = 0$. Bu, x_{it} değişkenlerinin eksojenlik varsayımıdır. Yani modelin u_{it} hata terimleri, $(x_{i1}, \dots, x_{iT})$ açıklayıcı değişkenlerle korelasyonsuzdur.
- 2) $\text{rank}[E(X_i'QX_i)] = K$. Eğer x_{it} her i için zamanla değişmeyen eleman içeriyor ise bu varsayım sağlanamaz.
- 3) $E(u_i u_i' | X_i, \alpha_i) = \sigma_u^2 I_T$. Eksojen değişkenler ve sabit etkilerin koşulu altında hata terimleri bağımsız ve ikinci dereceden momenti σ_u^2 'dir.

Birinci ve üçüncü varsayımlardan $\text{Var}(u_i | X_i, \alpha_i) = \sigma_u^2 I_T$ sonucu çıkmaktadır, ayrıca $E(u_i u_i' | X_i, \alpha_i) = E(u_i u_i') = \sigma_u^2 I_T$ 'dir. Yani, bu modelin u_{it} hata terimleri bağımsız ve 0 ortalamalı ve σ_u^2 varyanslı dağılımına sahip, yani $u_{it} \sim (0, \sigma_u^2)$ 'dir.

(4.4) denkleminin vektör formu (4.16) şeklinde yazılabilir.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ e_T \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \alpha_2 + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e_T \end{bmatrix} \alpha_N + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

α_i katsayıların önündeki değişkenler, her kesit için kullanılan dummy değişkenlerdir. Katsayı tahminleri, (4.17) ifadesini minimize edilmesiyle bulunur. Bu yöntemle Dummy Değişkenli En Küçük Kareler (LSDV) yöntemi denir.

* Wooldridge, J. M., (2002), Econometric Analysis Of Cross Section and Panel Data.

$$\sum_{i=1}^N u_i' u_i = \sum_{i=1}^N (y_i - e_T \alpha_i - X_i \beta)' (y_i - e_T \alpha_i - X_i \beta) \quad (4.17)$$

LSDV tahmin edicilerini bulmak için (4.6) denkleminin her iki tarafı (4.11) ile tanımlanan Q matrisi ile çarpılır. $Qe_T = \underline{0}$ olduğu için yeni eşitlik (4.18) şeklini alacaktır.

$$\begin{aligned} Qy_i &= Qe_T \alpha_i + QX_i \beta + Qu_i \\ &= QX_i \beta + Qu_i \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.18)$$

O zaman eğim katsayıların LSDV tahmin edicisi (4.19) ya da (4.20) şeklinde ve sabit terimler (4.21) şeklinde hesaplanır.*

$$\hat{\beta}_{LSDV} = \left[\sum_{i=1}^N X_i' Q X_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N X_i' Q y_i \right] \quad (4.19)$$

$$\hat{\beta}_{LSDV} = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{it} - \bar{x}_i)' \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} - \bar{x}_i)(y_{it} - \bar{y}_i) \right] \quad (4.20)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \beta' \bar{x}_i \quad (4.21)$$

(4.19) ile (4.20) eşitlikleri birbirine özdeştir, yalnız (4.19) matris biçimindedir. Bu tahmin edici, gruplar için tahmin edicisidir.

Bazı kaynaklarda (4.6) modeli (4.22)'deki gibi tanımlanır.

$$y_i = e_T \mu + e_T \alpha_i + X_i \beta + u_i \quad i = 1, \dots, N \quad (4.22)$$

Bu (4.22) model biçiminde bireysel etkilerin yanı sıra, modele genel bir sabit terim (μ) eklenmiştir. Bu durumda genel sabit terim (4.23) ve bireysel etkiler (4.24) şeklinde hesaplanır.

$$\hat{\mu} = \bar{Y} - \beta' \bar{X} \quad (4.23)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \hat{\mu} - \beta' \bar{x}_i \quad (4.24)$$

$\hat{\beta}_{LSDV}$ tahmin edicisi yansızdır. Ayrıca $N \rightarrow \infty$ ve/veya $T \rightarrow \infty$ iken tutarlıdır. LSDV tahmin edicisinin varyans matrisi (4.25)'de yazılmıştır.

* Hsiao, C., (2002), Analysis of Panel Data.

$$Var(\hat{\beta}_{LSDV}) = \sigma_u^2 \left[\sum_{i=1}^N X_i' Q X_i \right]^{-1} \quad (4.25)$$

σ_u^2 değeri biliniyor ise $Var(\hat{\beta}_{LSDV})$ kolaylıkla hesaplanabilir. Eğer σ_u^2 bilinmiyor ise onun yerinde (4.26) şeklinde hesaplanan $\hat{\sigma}_u^2$ tahmin edicisi kullanılır (Wooldridge, 2002).

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{N(T-1) - K} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i' \hat{u}_i \quad (4.26)$$

O zaman varyans tahmin edicisi (4.27) şeklinde hesaplanır.

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_{LSDV}) = \hat{\sigma}_u^2 \left[\sum_{i=1}^N X_i' Q X_i \right]^{-1} \quad (4.27)$$

Sabit terim tahmin edicileri yansız ve $T \rightarrow \infty$ iken tutarlıdır.

4.3.2.1 Bireysel Etkilerin Test Edilmesi

Sabit etki modelinde bireysel etkilerin anlamlılığın test edilmesi, sonuç çıkarma için önemlidir. Bunun için kukla (dummy) değişkenlerin anlamlı olup olmadığı sınanabilir. Bu durumda “ $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N$ ” yokluk hipotezi F testi ile sınanır. Havuz regresyonunun (pooled regression) sıradan EKK ile hesaplanan sınırlanmış, artık karelerin toplamı (RRSS) ve LSDV ile hesaplanan sınırlanmamış artık karelerin toplamı (URSS) üzerine Chow testi yapılır (Baltagi, 1995). Test istatistiği (4.28) eşitliği ile bulunur.

$$F_0 = \frac{(RRSS - URSS)/(N-1)}{URSS/(NT - N - K)} \quad (4.28)$$

(4.28) ile hesaplanan test istatistiği, yokluk hipotezi altında $N-1$ ve $NT - N - K$ serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. Test sonucunda yokluk hipotezi red edilirse bireysel etkiler anlamlı olacaktır.

4.3.3 Rasgele Etki Modeli: Tahmin Yöntemleri

Sabit etki modellerinde bireysel etkiler kukla (dummy) değişkeni ile gösteriliyorsa, rasgele etki (random effects) modellerinde bireysel etkiler u_{it} rasgele değişkenin içerisinde gösterilmektedir. Genellikle regresyon analizinin uygulanmasında açıklayıcı değişken olarak alınmayan, ama bağımlı değişkeni etkileyen etkenler rasgele hata değişkeni altında toplanır. Bu durumda model yeniden tanımlanırsa (4.29) şeklinde veya (4.30) vektör biçiminde yazılır.

$$\begin{aligned} y_{it} &= \mu + \beta'x_{it} + v_{it} \\ v_{it} &= \alpha_i + u_{it} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} y_i &= e_T \mu + X_i \beta + v_i \\ v_i &= e_T \alpha_i + u_i \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.30)$$

Bu iki biçim birbirine özdeştir. Ayrıca kimi durumlarda hata terim ifadesi $v_{it} = \alpha_i + \lambda_t + u_{it}$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda hata değişkenine, kesite göre sabit ve zamana göre değişen λ_t etkileri eklenmektedir. Burada $\lambda_t = 0$ olarak varsayılmıştır.

Hata terimlerinin varyans matrisi (4.31)'deki gibi tanımlanır.

$$\Omega = E(v_i v_i') = E\left[(y_i - e_T \mu - X_i \beta)(y_i - e_T \mu - X_i \beta)'\right] \quad (4.31)$$

Rasgele etki modeli için mevcut olan varsayımlar aşağıda sıralanmıştır.*

1) Ortogonallik varsayımı. Bu varsayım iki bölümden oluşmaktadır.

- a) $E(u_{it}|X_i, \alpha_i) = 0$. Hata terimlerinin koşullu beklenen değeri sıfırdır.
- b) $E(\alpha_i|X_i) = E(\alpha_i) = 0$. Bireysel etkilerin koşullu beklenen değeri sıfırdır. Bu varsayımda, α_i ile X_i 'lerin ortogonal olması aranmaktadır.

2) $rank[E(X_i' \Omega^{-1} X_i)] = K$. $X_i' \Omega^{-1} X_i$ matrisi tam ranklı bir matristir.

3) Varyans yapısı varsayımı. Bu varsayım da iki bölümden oluşmaktadır.

- a) $E(u_i u_i' | X_i, \alpha_i) = \sigma_u^2 I_T$
- b) $E(\alpha_i^2 | X_i) = \sigma_\alpha^2$

Bu varsayımlardan (4.32) ve (4.33)'te yazılan sonuçlar elde edilir.

$$E(u_{it} u_{is}) = \begin{cases} \sigma_u^2, & t = s \\ 0, & t \neq s \end{cases} \quad (4.32)$$

$$E(\alpha_i \alpha_j) = \begin{cases} \sigma_\alpha^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4.33)$$

İlk iki varsayımdan yola çıkarak v_{it} 'lerin varyans ve kovaryans değerleri bulunur. O zaman

* Wooldridge, J. M., (2002), Econometric Analysis Of Cross Section and Panel Data

bu değerler, $E(\alpha_i u_{it}) = 0$ (Varsayım 1a) olduğundan (4.34) biçimini alır.

$$E(v_{it} v_{is}) = \begin{cases} \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2, & t = s \\ \sigma_\alpha^2, & t \neq s \end{cases} \quad (4.34)$$

Bulunan değerler matris biçiminde yazılırsa (4.35) elde edilir.*

$$\Omega = E(v_i v_i') = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 & \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Buradan varyans matrisi, $\sigma_1^2 = \sigma_u^2 + T\sigma_\alpha^2$ olmak üzere kısaca (4.36) şeklinde yazılabilir.

$$\Omega = \sigma_u^2 I_T + \sigma_\alpha^2 e_T e_T' = \sigma_u^2 Q + \sigma_1^2 P \quad (4.36)$$

O zaman bu matrisin tersi (4.37) biçimindedir.

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\sigma_u^2} \left[I_T - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_\alpha^2} e_T e_T' \right] = \frac{1}{\sigma_u^2} Q + \frac{1}{\sigma_1^2} P \quad (4.37)$$

Genel olarak P ve Q matrisinin özelliklerinden dolayı $\Omega^n = (\sigma_u^2)^n Q + (\sigma_1^2)^n P$ eşitliği sağlanmakta ve determinantı $|\Omega| = (\sigma_u^2 + T\sigma_\alpha^2) \sigma_u^{2(T-1)} = \sigma_1^2 \sigma_u^{2(T-1)}$ olarak hesaplanır.

4.3.3.1 Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi (GLS)

Rasgele etki modelinin katsayıların Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (GLS) eğim tahmin edicisi (4.38) ve sabit terim tahmin edicisi (4.39) biçiminde belirlenir ve eğim katsayıların GLS tahmin edicisinin varyans matrisi (4.40) şeklinde hesaplanır (Maddala, 1993).

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left[\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} X_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} y_i \right] \quad (4.38)$$

$$\hat{\mu} = \bar{Y} - \hat{\beta}_{GLS}' \bar{X} \quad (4.39)$$

* Maddala, G. S., (1971), "The Use of Variance Components Models In Pooling Cross Section and Time Series Data".

$$Var(\hat{\beta}_{GLS}) = \sigma_u^2 \left[\sum_{i=1}^N X_i' Q X_i + T \frac{\sigma_u^2}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^N (\bar{x}_i - \bar{X})(\bar{x}_i - \bar{X})' \right]^{-1} \quad (4.40)$$

Yukarıdaki, (4.40) eşitliğinden görüldüğü gibi $\left[\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} X_i \right]$ matrisi, gruplar içi ve gruplar arası moment matrislerin ağırlıklı toplamı olarak yazılabilir.

σ_u^2 ve σ_α^2 değerleri biliniyorsa yukarıdaki eşitlikler yardımı ile tahmin edicilerin değerleri hesaplanabilir. Eğer bu σ_u^2 ve σ_α^2 değerleri bilinmiyorsa yerine $\hat{\sigma}_u^2$ ve $\hat{\sigma}_\alpha^2$ örneklem değerleri kullanılır. Örneklem varyans değerlerini hesaplayan çeşitli yöntemler mevcuttur. Genellikle bağımlı değişkenin bağımsız değişkenleri üzerine regresyonu yapılır ve hesaplanan artık değerler ele alınır. Bu durumda Amemiya (1971) LSDV yöntemini önermiştir. Burada hesaplanan artıklar için $Pv_i \sim (0, \sigma_1^2 P)$ ve $Qv_i \sim (0, \sigma_u^2 Q)$ geçerli olduğundan sırasıyla (4.41) ve (4.42)'den $\hat{\sigma}_u^2$ ve $\hat{\sigma}_1^2$ tahminleri bulunur (Baltagi, 1995). Bu iki değerlerden $\hat{\sigma}_\alpha^2$ tahmini (4.43) ile hesaplanır. Bu şekilde bulunan değerlerden varyans matrisi hesaplanır.

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{T}{N} \sum_{i=1}^N \bar{v}_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i' P v_i \quad (4.41)$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{N(T-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (v_{it} - \bar{v}_i)^2 = \frac{1}{N(T-1)} \sum_{i=1}^N v_i' Q v_i \quad (4.42)$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{T} (\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_u^2) \quad (4.43)$$

Buradan bulunan tahmin değerlerine Uygulanabilir Genelleştirilmiş EKK (FGLS) tahmin edicisi denir.

4.3.3.2 En Çok Olabilirlik Yöntemi (MLE)

EÇO yönteminin uygulanması için hata terimlerinin dağılımı bilinmesi gerekir. Uygulamada genellikle hata terimleri için ya normal dağılım ya da Student-t dağılımı varsayılmaktadır. Eğer hata terimlerinin normal dağıldığı varsayılırsa olabilirlik fonksiyonu (4.44) biçiminde olur.

$$L = -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln |\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i' \Omega^{-1} v_i \quad (4.44)$$

Buradaki Ω (4.35)'te tanımlanmıştır. Hata terimlerinin yerine $y_i - e_T\mu - X_i\beta$ ve Ω 'nın yerine (4.36)'daki ifade konulursa olabilirlik fonksiyonu (4.45) biçimini alır.

$$\begin{aligned}
 L = & -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{N(T-1)}{2} \ln \sigma_u^2 - \frac{N}{2} \ln(\sigma_u^2 + T\sigma_\alpha^2) \\
 & - \frac{1}{2\sigma_u^2} \sum_{i=1}^N (y_i - e_T\mu - X_i\beta)' Q(y_i - e_T\mu - X_i\beta) \\
 & - \frac{T}{2(\sigma_u^2 + T\sigma_\alpha^2)} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \mu - \beta\bar{x}_i)^2
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden değerlerin bulunması için (4.45)'te verilen fonksiyonunun her bir parametreye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek elde edilen denklem çözülür. Hsiao'nun (2002) kitabında bu fonksiyonun kısmi türevleri yer verilmiştir. Yalnız elde edilen denklemin analitik çözümü bulunamadığından Amemiya (1971) iterasyon yöntemini önermiş ve bu şekilde bulunan tahmin edicilerinin tutarlı olduğunu ve hata terimlerinin asimptotik olarak normal dağıldığını göstermiştir.

4.3.4 Sabit Etki veya Rasgele Etki Model Seçimi

Önceki alt bölümlerde α_i terimlerinin sabit veya rasgele varsayımı altında tahmin yöntemleri incelenmiştir. Yalnız T çok büyük ise sabit etki ile rasgele etki arasında fark kalmamakta ve bu durumda LSDV tahmin edicisi ile GLS tahmin edicisi birbirine özdeştir.* Eğer T sonlu ve N çok büyük ise o zaman sabit etki veya rasgele etki modelini seçmek kolay değildir.

- Sabit etki modelinde α_i terimleri sabit terim olarak sayılmakta ve her kesit için ayrı hesaplanmaktadır.

Rasgele etki modelinde α_i terimleri ölçüm hatalarına dahil edilmektedir.

- Değişkenin tüm düzeyleri modele dahil ise sabit etki olarak almak daha doğrudur. Örneğin, bir araştırma sadece A, B ve C ilaçları için yapıyor ise sabit etki modeli daha uygundur, ama başka bir D ilacı için model uygun değildir.

Değişkenin düzeyleri rasgele olarak büyük bir kitleden alındığı zaman rasgele etki modeli uygundur. Örneğin, hastane araştırmaları için rasgele 3 hastane seçildiği takdirde rasgele etki sonuç çıkarma yapılır.

Örneğin, makinelerle bakan teknisyenleri, büyük kitleden alındığı varsayılırsa, rasgele etki modelin kurulması daha uygundur. Ancak eğer bu teknisyenler uzun süredir çalışmakta, ve onların çalışmaları karşılaştırılmak isteniyorsa, o zaman sabit etki modeli kurulur.

* Hsiao, C., (2002), Analysis of Panel Data

Sabit etki ile rasgele etki arasındaki fark Çizelge 4.2’de derlenmiştir. Bu çizelge rasgele etki modeli ile sabit etki modeli arasındaki farkı daha iyi anlaması yardımcı olmaktadır.

Çizelge 4.2 Sabit etki ile rasgele etki modeli arasındaki fark*

	Sabit Etki	Rasgele Etki
B biçim:	$y_{it} = (\mu + \alpha_i) + x_{it}\beta + u_{it}$	$y_{it} = \mu + x_{it}\beta + v_{it}$
Sabit terim:	Kesite (veya zamana) göre değişmekte	Sabit
Hata varyansı:	Sabit	Kesite (veya zamana) göre değişmekte
Eğim katsayıları:	Sabit	Sabit
Tahmin yöntemleri:	LSDV, Grup içi ve gruplar arası etkiler	GLS, FGLS, MLE, GMM
Hipotez testleri:	F testi	Breusch-Pagan Testi

Çizelge 4.2’den görüldüğü gibi rasgele etki ve sabit etki modelleri arasında biçimsel fark daha iyi anlaşılmaktadır. Biçimsel farka dayanarak modellere uygulanacak tahmin yöntemler ile hipotez testleri de değişiklik göstermektedir.

Bunun yanı sıra sabit etki veya rasgele etki modelinin seçmesinde çeşitli test istatistikler kullanılmaktadır. Bunlardan Hausman testi en çok kullanılmaktadır.

4.3.4.1 Hausman Testi

Hausman’ın (1978) önerdiği, test genel anlamda herhangi iki tahmin edicisini karşılaştırmak için kullanılır. Testin yokluk hipotezi “ $H_0: \theta = \theta_0$ ”, yani sözel olarak “Belirttiğimiz model, diğer alternatif modellerin yanında doğru kurulmuştur” şeklinde tanımlanabilir.

Rasgele etkiye karşı sabit etkinin kıyaslanmasında “ H_0 : Rasgele etkiler tutarlı ve yeterlidir” yokluk hipotezine karşı “ H_1 : Rasgele etkiler tutarsızdır” alternatif hipotezi sınanır. Burada iki durum söz konusudur.

- 1) Yokluk hipotezi altında rasgele ve sabit etki modelleri tutarlı, yalnız rasgele etki modeli daha yeterlidir.
- 2) Alternatif hipotezi altında rasgele etki modeli tutarsız, ancak sabit etki modeli tutarlıdır.

* Park, H. M., (2005), “Linear Regression Models for Panel Data Using SAS, STATA, LIMDEP, and SPSS”.

Rasgele etki modelinin eğim katsayıları β_{RE} , ve sabit etki modelinin eğim katsayıları β_{FE} olmak üzere Hausman test istatistiği (4.46) şeklinde hesaplanır. Hausman test istatistiğinin hesaplanmasında sabit terimler ele alınmamaktadır.

$$W = (\beta_{FE} - \beta_{RE})' \Psi^{-1} (\beta_{FE} - \beta_{RE}) \quad (4.46)$$

Burada $\Psi = Var(\beta_{FE} - \beta_{RE}) = Var(\beta_{FE}) - Var(\beta_{RE})$ varyans matrisidir. Ayrıca yokluk hipotezi altında W test istatistiği, regresyon katsayı sayısı olan K serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

Çok büyük T için yokluk hipotezi red edilme eğilimindedir. Ayrıca, her ne kadar rasgele etki modeli doğru olsa bile, eğer regresyon yanlış tanımlanmış ise yokluk hipotezi red edilebilir.

İlk başta belirtildiği gibi Hausman testi herhangi iki tahmin edicisini sınaama testidir. Örneğin, LS ile ML tahmin edicilerin yeterliliği Hausman testi ile sınanabilir.

4.3.4.2 Breusch-Pagan Testi

Breusch ve Pagan, 1980 yılında rasgele etkinin sınanması için LM testini düzenlemişler. Bu testin yokluk hipotezi “ $H_0: \sigma_\alpha^2 = 0$ ” şeklinde tanımlanır. Eğer $\sigma_\alpha^2 = 0$ ise hata terimlerinde bireysel etkiler söz konusu değildir ve bu durumda rasgele etki modeline gerek kalmayacaktır. O zaman v_{it} , $y_{it} = \mu + x'_{it}\beta + v_{it}$ rasgele etki modelinin sıradan EKK artıkları olmak üzere (4.47) biçiminde hesaplanan test istatistiği, yokluk hipotezi altında χ^2 , yani 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir (Greene, 2003).

$$LM = \frac{NT}{2(T-1)} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^N v'_i e_T e'_T v_i}{\sum_{i=1}^N v'_i v_i} \right]^2 \quad (4.47)$$

4.3.4.3 Diğer Testler

Breusch-Pagan testinin alternatif hipotezi iki taraflı tanımlamaktadır. Yalnız varyans negatif olamayacağı için bu durum Breusch-Pagan testinin zayıf noktasıdır. Bu durumda Honda aynı yokluk hipotezi altında HO istatistiğini önermiştir. King ve Wu HO istatistiğini standartlaştırmıştır.

Gourieroux, Holly ve Monfort'tan sonra Baltagi, Chang ve Li başka bir testi istatistiğini

önermiştir, ayrıca Baltagi, Chang ve Li bu konuda iki *LM* test istatistiklerini önermiştir (Baltagi, 1995).

4.4 Dinamik Panel Regresyon

Panel veri hem yatay kesite göre hem de zamana göre değiştiği için ele alındığı değişkenlerin dinamizmi modellenenebilir. Çoğu iktisadi ilişkiler özünde dinamiktir ve bu konuda panel veri avantaj sağlamaktadır. Bu dinamik ilişkiler bağımlı değişkenin gecikmeli değerlerinin açıklayıcı değişken olarak alınması ile açıklanır. Genel biçimde $|\gamma| < 1$ olmak üzere dinamik panel regresyonu (4.48)'deki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} y_{it} &= \mu + \gamma y_{i,t-1} + \beta' x_{it} + v_{it} \\ v_{it} &= \alpha_i + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (4.48)$$

Bazen hata terimi ifadesi $v_{it} = \alpha_i + \lambda_t + u_{it}$ şeklinde yazılır. Burada λ_t zamana özgü terimdir ve (4.48) modeli için $\lambda_t = 0$ olarak alınmaktadır. Yukarıda tanımlanan model vektör biçimiyle (4.49) olarak yazılır.

$$\begin{aligned} y_i &= e_T \mu + y_{i,-1} \gamma + X_i \beta + v_i \\ v_i &= e_T \alpha_i + u_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.49)$$

Burada

- y_i : bağımlı değişken, $T \times 1$ boyutlu, $y'_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iT})$
- $y_{i,-1}$: bağımlı değişkenin 1 gecikmeli değerleri, $T \times 1$ boyutlu, $y'_{i,-1} = (y_{i0}, y_{i1}, \dots, y_{i,T-1})$
- X_i : açıklayıcı değişken matrisi, $T \times K$ boyutlu, $X'_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iT})$
- v_i : hata terimi vektörü, $T \times 1$ boyutlu, $v'_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iT})$
- u_i : hata terimi, $T \times 1$ boyutlu, $u'_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iT})$
- μ : sabit terim, 1×1 boyutlu
- γ : gecikmeli değişkenin katsayısı, 1×1 boyutlu
- β : katsayı vektörü, $K \times 1$ boyutlu, $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)$
- α_i : bireysel terim, 1×1 boyutlu
- e_T : $T \times 1$ birler vektörü, $e'_T = (1, 1, \dots, 1)$

Eğer eksojen değişkenler modele alınmadıysa model $y_i = e_T \mu + \gamma y_{i,-1} + v_i$ biçimini alır ki, bu

AR(1) modelidir.

Dinamik panel modeli için sabit etki veya rasgele etki fark olmaksızın sıradan EKK veya LSDV yöntemleri tutarsızdır. Ayrıca hata terimdeki α_i bileşeninin sabit veya rasgele olarak alınması ile tahmin yöntemler değişiklik göstermektedir.

4.4.1 Sabit Etki Modeli: Tahmin Yöntemleri

Dinamik panel sabit etki modeli (4.50) biçiminde tanımlanır.

$$y_{it} = \gamma_{i,t-1} + \beta'x_{it} + \alpha_i + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (4.50)$$

Bazı kaynaklarda (4.50) modeline genel sabit terim eklenmekte, ama bu durum sonuç çıkarma için bir sorun yaratmaz.

Sabit etki modellerinde $T \rightarrow \infty$ iken güçlü eksojenlik koşulu sağlanmazsa bile $E(u_{it} | y_{i,t-1}, y_{i,t-2}, \dots; \alpha_i) = 0$ zayıf eksojenlik sağlanmakta, bu yüzden EKK tahmin edicisi tutarlıdır. T sabit ve $N \rightarrow \infty$ iken bireysel etki değişken sayısı arttığından yan parametre sorununa yola açmaktadır. Statik panel sabit etki modelinde güçlü eksojenlik varsayımı altında EKK veya ML tahmin edicileri tutarlıdır. Ancak dinamik panel modelinde durum farklıdır, ML tahmin edicisinin tutarlılık koşulu bozulmaktadır. ML tahmin edicisi tutarsız olsa bile IV veya GMM tahmin edicisi tutarlıdır (Hsiao, 2002).

4.4.1.1 En Küçük Kareler Tahmin Edicisi (LS)

Dinamik panel modeli, $u_{it} \sim iid(0, \sigma_u^2)$ olmak üzere ve y_{i0} başlangıç değerleri biliniyor varsayımı altında (4.51) şeklinde yazılırsa LSDV eğim tahmin edicisi (4.52) şeklinde ve bireysel etkiler (4.53) şeklinde hesaplanır ve $T \rightarrow \infty$ iken tutarlıdır. Ancak yansız değildir.

$$y_{it} = \gamma_{i,t-1} + \alpha_i + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (4.51)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{it} - \bar{y}_i)(y_{i,t-1} - \bar{y}_{i,-1})}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{i,t-1} - \bar{y}_{i,-1})^2} \quad (4.52)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{\gamma}_{i,-1} \quad (4.53)$$

Burada $\bar{y}_i$ (4.14)'teki gibi ve $\bar{y}_{i,-1}$ (4.54)'teki gibi bulunur.

$$\bar{y}_{i,-1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{i,t-1} \quad (4.54)$$

4.4.1.2 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi (MLE)

(4.50) modelinin birinci farkı alınırsa bireysel etkiler modelden çıkar ve $\Delta y_{it} = y_{it} - y_{i,t-1}$ olmak üzere (4.55) elde edilir.

$$\Delta y_{it} = \gamma \Delta y_{i,t-1} + \beta' \Delta x_{it} + \Delta u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 2, \dots, T \quad (4.55)$$

Yalnız bu durumda y_{i0} ve x_{i0} başlangıç değerleri biliniyor varsayımı altında $\Delta y_{i1} = y_{i1} - y_{i0}$ için (4.55) modeli tanımlanamadığından, Δy_{i1} (4.56) biçimindeki gibi yazılabilir.*

$$\Delta y_{i1} = a_{i1} + \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j \Delta u_{i,1-j} \quad (4.56)$$

Burada $a_{i1} = \beta' \sum_{j=0}^{\infty} \Delta x_{i,1-j} \gamma^j$ şeklinde, yalnız $j = 1, 2, \dots$ için $\Delta x_{i,1-j}$ değerleri mevcut değildir.

Bu değerler bir parametre olarak ele alınırsa yine yan parametre sorunu ile karşılaşılır. Bu yüzden $i = 1, \dots, N$ olmak üzere $E(a_{i1} | \Delta x_i) = c^* + \pi' \Delta x_i$ şeklindeki koşullu beklenen değer tanımlansın. Burada π , $TK \times 1$ katsayı vektörüdür.

Hsiao, Pesaran ve Tahmiscioglu (2002), eğer $\xi_{it} \sim iid(0, \Lambda)$, yani bağımsız, 0 ortalamalı ve sabit varyans matrisli aynı dağılıma sahip olmak üzere x_{it} 'ler (4.57) şeklinde yazılabiliyor ise $E(a_{i1} | \Delta x_i) = c^* + \pi' \Delta x_i$ koşulu sağlandığını göstermiştir.

$$x_{it} = \mu_i + gt + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \xi_{i,t-j}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| < \infty \quad (4.57)$$

Bu durumda (4.56)'da verilen denklem $\Delta y_{i1} = c^* + \pi' \Delta x_i + v_{i1}$ biçiminde yazılabilir. Burada

$v_{i1} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j u_{i,1-j} + [a_{i1} - E(a_{i1} | \Delta x_i)]$ 'dir ve ayrıca aşağıda yazılan şartlar sağlanır.

- $E(v_{i1} | \Delta x_i) = 0$

* Hsiao, C., Pesaran, M. H. ve Tahmiscioglu, A. K., (2002), "Maximum Likelihood Estimation Of Fixed Effects Dynamic Panel Data Models Covering Short Time Periods".

- $E(v_{it}^2) = \sigma_v^2$
- $E(v_{it}\Delta u_{it}) = -\sigma_u^2$
- $E(v_{it}\Delta u_{it}) = 0; \quad t = 3, \dots, T$

O zaman $\Delta u_i^* = (v_{i1}, \Delta u_i')'$ olarak tanımlanan hata terimlerinin varyans matrisi $\omega = \sigma_v^2 / \sigma_u^2$ olmak üzere (4.58) şeklinde yazılır.

$$\Sigma = E\left[(\Delta u_i^*)(\Delta u_i^*)'\right] = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \omega & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \Sigma^* \quad (4.58)$$

Buradan determinanti $|\Sigma| = \sigma_u^{2T} [1 + T(\omega - 1)]$ şeklinde hesaplanır. Bunun yanı sıra $\delta' = (c^*, \pi', \gamma, \beta')$, $\Delta y_i^* = (\Delta y_{i1}, \dots, \Delta y_{iT})'$ ve X_i^* (4.59) şeklinde tanımlanırsa, hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı altında ML fonksiyonu (4.60) şeklinde yazılır.

$$X_i^* = \begin{bmatrix} 1 & \Delta x_i' & 0 & \underline{0'} \\ 0 & \underline{0'} & \Delta y_{i1} & \Delta x_{i2}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \underline{0'} & \Delta y_{iT-1} & \Delta x_{iT}' \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$l = -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\Delta y_i^* - X_i^* \delta)' \Sigma^{-1} (\Delta y_i^* - X_i^* \delta) \quad (4.60)$$

Bu fonksiyonu maksimize eden değerleri, ML tahmin edicileridir. Katsayıların ML tahminleri (4.61)'de, varyans tahmin edicisi (4.62)'de ve $J' = (T, T-1, \dots, 1)$ olmak üzere ω 'nın tahmin edicisi (4.63)'te verilmiştir.

$$\hat{\delta} = \left[\sum_{i=1}^N (X_i^*)' (\hat{\Sigma}^*)^{-1} X_i^* \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N (X_i^*)' (\hat{\Sigma}^*)^{-1} \Delta y_i^* \right] \quad (4.61)$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N (\Delta y_i^* - X_i^* \hat{\delta})' (\hat{\Sigma}^*)^{-1} (\Delta y_i^* - X_i^* \hat{\delta}) \quad (4.62)$$

$$\hat{\omega} = \frac{T-1}{T} + \frac{1}{NT^2 \hat{\sigma}_u^2} \sum_{i=1}^N (\Delta y_i^* - X_i^* \hat{\delta})' (JJ') (\Delta y_i^* - X_i^* \hat{\delta}) \quad (4.63)$$

Ayrıca Newton-Raphson iterasyon yöntemi ile tahmin edicilerin değerleri bulunabilir. (Bakınız Bölüm 4.3.2.2)

4.4.1.3 En Küçük Aralık Tahmin Edicisi (MDE)

En küçük aralık tahmin edicisi, veya MDE genel olarak (4.64) şeklinde bulunur.

$$\hat{\delta}_{MDE} = \min \sum_{i=1}^N (\Delta u_i^*)' \Sigma^{-1} \Delta u_i^* \quad (4.64)$$

(4.64) ifadesinin minimize eden tahmin değerler (4.61) ile bulunabilir. Σ varyans matrisine bağlı olarak MDE tahmin edicisi MLE ile özdeş olabilir. Eğer Σ bilinmiyorsa $\hat{\sigma}_v^2$, EKK hata terimlerinden (4.65) ile ve $\hat{\sigma}_u^2$, IV hata terimlerinden (4.66) ile hesaplanabilir.

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{N - TK - 1} \sum_{i=1}^N \hat{v}_{il}^2 \quad (4.65)$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{N(T-1)} \sum_{i=1}^N \Delta \hat{u}_i' A^{-1} \Delta \hat{u}_i \quad (4.66)$$

Burada A matrisi (4.67)'de tanımlanmıştır.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}_{(T-2) \times (T-2)} \quad (4.67)$$

MDE tahmin edicilerinin varyans matrisi (4.68) şeklinde verilmiştir.

$$Var(\hat{\delta}_{MDE}) = \left[\sum_{i=1}^N (X_i^*)' \Sigma^{-1} X_i^* \right]^{-1} \quad (4.68)$$

4.4.2 Rasgele Etki Modeli: Tahmin Yöntemleri

Bireysel etkiler rasgele olarak alındığında bu etkiler açıklayıcı değişkenle korelasyonsuz veya korelasyonlu olabilir. Rasgele etkilerin açıklayıcı değişken ile korelasyonlu olduğu durumda, statik modeldeki gibi bu korelasyon yok sayılarak elde edilen tahminler geçerli olma özelliğini koruyamayacaktır.

Rasgele etki modelinin tanımlanması için ilk önce (4.48) ve (4.49)'da verilen denklemler

tekrar yazılsın.

$$y_{it} = \mu + \gamma y_{i,t-1} + \beta' x_{it} + v_{it}$$

$$v_{it} = \alpha_i + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T$$

$$y_i = e_T \mu + y_{i,-1} \gamma + X_i' \beta + v_i$$

$$v_i = e_T \alpha_i + u_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Burada $|\gamma| < 1$ 'dir ve aşağıda verilen koşullar doğru olduğu varsayılmaktadır.

- $E(\alpha_i) = 0, \quad E(u_{it}) = 0$
- $E(\alpha_i z_i) = 0, \quad E(\alpha_i x_{it}) = 0$
- $E(\alpha_i u_{jt}) = 0, \quad i \neq j$
- $E(\alpha_i \alpha_j) = \begin{cases} \sigma_\alpha^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- $E(u_{it} u_{js}) = \begin{cases} \sigma_u^2, & i = j, \quad t = s \\ 0, & d.d. \end{cases}$

Ayrıca (4.48) modeli (4.69)'daki gibi yazılabilir.

$$w_{it} = \mu + \gamma w_{i,t-1} + \beta' x_{it} + u_{it}$$

$$y_{it} = w_{it} + \eta_i, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (4.69)$$

Burada $\eta_i = \alpha_i / (1 - \gamma)$ şeklinde hesaplanır. Bu durumda $E(\eta_i) = 0$ ve $Var(\eta_i) = \sigma_\alpha^2 / (1 - \gamma)^2$ olarak bulunur.

Matematiksel olarak (4.48) ve (4.69) modelleri birbirine özdeştir. Yalnız modellerin nasıl hesaplandığı yorumu farklılık göstermektedir. (4.48) modelinde bireysel etkiler genel regresyondan ayrı olarak ölçülemeyen α_i 'lerle gösterilmektedir. İkinci, (4.69) modelinde ise $\{w_{it}\}$ dinamik süreci, η_i bireysel etkilerden bağımsızdır.

Bu modelin başlangıç değerleri ile ilgili Anderson ve Hsiao'nun (1982) belirlediği dört varsayım durumu söz konusudur. Genellikle bu varsayımlarda başlangıç değeri ya sabit ya da rasgele sayılmaktadır.

- 1) y_{i0} başlangıç değerleri sabittir. Bu durumda yatay kesit birimi, y_{i0} değerinden başlayarak 0 ortalamalı ve σ_α^2 varyanslı kitleden alınan α_i rasgele etkileri ve eksojen değişkenler (x_{it}) ile belirlenen düzeye gelir. Eğer $E(\alpha_i y_{i0}) = 0$ olarak varsayılırsa α_i etkiler 0

zamanında modele dahil değildir, ve 1 ve sonraki zamanlarda süreç bundan etkilenir. Eğer süreç her hangi bir zamandan başladıysa y_{i0} 'ı y_{it} 'den farklı biçimde ele almanın bir nedeni yoktur.

- 2) y_{i0} başlangıç değerleri μ_{y_0} ortalamalı $\sigma_{y_0}^2$ varyanslı kitleden alınmış olsun. Yani $y_{i0} = \mu_{y_0} + \xi_i$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda y_{i0} ile α_i arasında korelasyonun olup olmadığına göre iki durum söz konusudur.
 - a) $Cov(\xi_i, \alpha_i) = 0$ durumunda ise başlangıç değerlerin etkileri zamanla azalmakta ve kaybolmaktadır.
 - b) $Cov(\xi_i, \alpha_i) \neq 0$ durumunda $Cov(\xi_i, \alpha_i) = \phi \sigma_{y_0}^2$ olarak varsayılabilir. Bu durumda başlangıç değerler, α_i ile olan korelasyondan dolayı tüm y_{it} değerlerini etkilemektedir.
- 3) (4.69) modelindeki w_{i0} başlangıç değerleri sabittir. Ölçülemeyen bireysel süreç $\{w_{it}\}$, keyfi başlangıç değeri almaktadır.
- 4) w_{i0} başlangıç değerleri rastsal. Bu başlangıç değerlerin ortalama ve varyans hesaplanmasına göre dört durum ortaya çıkmaktadır.
 - a) w_{i0} başlangıç değerleri, μ_w ortalamalı $\sigma_u^2 / (1 - \gamma^2)$ varyanslı bir kitleden alınmıştır.
 - b) w_{i0} başlangıç değerleri, μ_w ortalamalı keyfi $\sigma_{w_0}^2$ varyanslı bir kitleden alınmıştır.
 - c) w_{i0} başlangıç değerleri, θ_{i0} ortalamalı $\sigma_u^2 / (1 - \gamma^2)$ varyanslı bir kitleden alınmıştır.
 - d) w_{i0} başlangıç değerleri, θ_{i0} ortalamalı $\sigma_{w_0}^2$ varyanslı bir kitleden alınmıştır.

Dördüncü durum için ilk iki şıkta w_{i0} 'lar aynı kitleden alınmıştır, son iki şıkta ise w_{i0} 'ların her biri ayrı kitleden alınmıştır.

Anderson ve Hsiao'dan (1982) ayrı olarak, Bhargava ve Sargan (1983), y_{i0} başlangıç değerini eksojen ve endojen olarak ayrı ayrı ele almıştır, ve başlangıç y_{i0} değerlerinin endojen durumunda bu değeri, x_{it} değerlerinin doğrusal dönüşümü olarak tanımlanmıştır.

4.4.2.1 En Çok Olabilirlik Yöntemi (MLE)

Genel olarak sıfır ortalamalı ve varyans matrisi Ω olan normal dağılımına sahip hata terimlerin olabilirlik fonksiyonu (4.44)'teki biçimde yazılır.

$$L = -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln |\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i' \Omega^{-1} v_i$$

Başlangıç değerlerin farklı varsayımlarına göre olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.*

Anderson ve Hsiao'nun (1982) belirttiği birinci durum için, yani başlangıç y_{i0} değerleri sabit varsayılan modelin olabilirlik fonksiyonu (4.70)'te verilmiştir.

$$L_1 = -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln |\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_i - e_T \mu - y_{i,-1} \gamma - X_i' \beta)' \Omega^{-1} (y_i - e_T \mu - y_{i,-1} \gamma - X_i' \beta) \quad (4.70)$$

Burada Ω matrisi (4.36)'da tanımlanan matris ile aynıdır.

$$\Omega = \sigma_u^2 I_T + \sigma_\alpha^2 e_T e_T' = \sigma_u^2 Q + (\sigma_u^2 + T \sigma_\alpha^2) P$$

İkinci durum için olabilirlik fonksiyonları (4.71) ve (4.72)'de verilen biçimlerde yazılır.

$$L_{2a} = L_1 - \frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \sigma_{y0}^2 - \frac{1}{2\sigma_{y0}^2} \sum_{i=1}^N (y_{i0} - \mu_{y0})^2 \quad (4.71)$$

İkinci durumun b şıkkı için, yani y_{i0} rasgele bir kitleden alınmış ve y_{i0} ile bireysel etkiler korelasyonlu durumunda olabilirlik fonksiyonu $\sigma_2^2 = \sigma_\alpha^2 - \phi^2 \sigma_{y0}^2$ olmak üzere (4.72)'te verilmiştir.

$$\begin{aligned} L_{2b} = & -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{N(T-1)}{2} \ln \sigma_u^2 - \frac{N}{2} \ln (\sigma_u^2 + T \sigma_2^2) - \\ & - \frac{1}{2\sigma_u^2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [y_{it} - \mu - \gamma_{i,t-1} - \beta' x_{it} - \phi(y_{i0} - \mu_{y0})]^2 + \\ & + \frac{\sigma_2^2}{2\sigma_u^2 (\sigma_u^2 + T \sigma_2^2)} \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{t=1}^T [y_{it} - \mu - \gamma_{i,t-1} - \beta' x_{it} - \phi(y_{i0} - \mu_{y0})] \right\}^2 - \\ & - \frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \sigma_{y0}^2 - \frac{1}{2\sigma_{y0}^2} \sum_{i=1}^N (y_{i0} - \mu_{y0})^2 \end{aligned} \quad (4.72)$$

Olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden değerler en çok olabilirlik tahmin değerleridir. Bunun için olabilirlik fonksiyonunun her parametreye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek bulunan denklem çözülür. Bu denklemler çok karmaşık hal aldıkları için tahmin ediciler Newton-Raphson iterasyon yöntemiyle bulunabilir (Hsiao, 2002).

* Anderson ve Hsiao (1982) analizinin yalnız ilk iki durum ele alınmıştır.

$$\hat{\delta}^{(j+1)} = \hat{\delta}^{(j)} - \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \delta \partial \delta'} \right]_{\delta=\hat{\delta}^{(j)}}^{-1} \frac{\partial L}{\partial \delta} \Big|_{\delta=\hat{\delta}^{(j)}} \quad (4.73)$$

Newton-Raphson iterasyon prosedürü (4.73)'teki biçimde yinelenir. δ parametreler vektörü olmak üzere bir başlangıç değerinden başlayarak (4.73) biçiminde sonraki iterasyon değerleri hesaplanır ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $|\hat{\delta}^{(j+1)} - \hat{\delta}^{(j)}| < \varepsilon$ şartı sağlanırsa iterasyon durdurulur.

Çizelge 4.3 Dinamik rasgele etki modelleri için EÇO tahmin edicisinin tutarlılığı *

Durum	Parametreler	<i>N</i> sabit,	<i>T</i> sabit,
		<i>T</i> çok büyük	<i>N</i> çok büyük
Durum 1: y_{i0} sabit	$\mu, \gamma, \beta, \sigma_u^2$	Tutarlı	Tutarlı
	σ_α^2	Tutarsız	Tutarlı
Durum 2: y_{i0} rasgele			
2a: y_{i0} ile α_i bağımsız	$\mu, \gamma, \beta, \sigma_u^2$	Tutarlı	Tutarlı
	$\mu_{y0}, \sigma_\alpha^2, \sigma_{y0}^2$	Tutarsız	Tutarlı
2b: y_{i0} ile α_i korelasyonlu	$\mu, \gamma, \beta, \sigma_u^2$	Tutarlı	Tutarlı
	$\mu_{y0}, \sigma_\alpha^2, \sigma_{y0}^2, \phi$	Tutarsız	Tutarlı

Çizelge 4.3'te ilk iki durum için tutarlılık özellikleri derlenmiştir. Böylece $N \rightarrow \infty$ iken EÇO tahmin edicileri tutarlıdır. Ama $T \rightarrow \infty$ iken ancak ana parametrelerin tahmin edicileri tutarlıdır. EÇO tahmin edicilerinin tutarlılığı başlangıç şartlarına bağlıdır.

Birinci durum için olabilirlik fonksiyonu ele alınsın. $\delta' = (\mu, \gamma, \beta')$ parametre vektörü ve $x'_{it} = (x_{1it}, x_{2it}, \dots, x_{Kit})$ olmak üzere X_i (4.74)'teki gibi tanımlanırsa olabilirlik fonksiyonu (4.75) şeklinde yazılır.

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 & y_{i0} & x'_{i1} \\ 1 & y_{i1} & x'_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{iT-1} & x'_{iT} \end{bmatrix}_{T \times (2+K)} \quad (4.74)$$

* Anderson, T. W. ve Hsiao, C., (1982), "Formulation and Estimation of Dynamic Models Using Panel Data".

$$L_1 = -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln |\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_i - X_i \delta)' \Omega^{-1} (y_i - X_i \delta) \quad (4.75)$$

Buradan δ 'ya göre kısmi türevi sıfıra eşitlenirse (4.76) denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial L_1}{\partial \delta} = + \frac{2}{2} \sum_{i=1}^N (y_i - X_i \delta)' \Omega^{-1} X_i = 0 \quad (4.76)$$

Bu denklemin çözümü (4.77) şeklinde bulunur. Bu da GLS tahmin edicisidir.

$$\hat{\delta}_{MLE} = \left(\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} y_i \right) \quad (4.77)$$

Ayrıca (4.37)'den $\Omega^{-1} = 1/\sigma_u^2 \cdot Q + 1/\sigma_1^2 \cdot P$ ve $|\Omega| = \sigma_1^2 \sigma_u^{2(T-1)}$ ifadeleri (4.75) denkleminde yerine konulursa olabilirlik fonksiyonu (4.78) biçimini alır.

$$L_1 = -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \sigma_1^2 - \frac{N(T-1)}{2} \ln \sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2} \sum_{i=1}^N v_i' Q v_i - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^N v_i' P v_i \quad (4.78)$$

Buradan σ_u^2 ve σ_1^2 'e göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse σ_u^2 ve σ_1^2 sırası ile (4.79) ve (4.80) şeklinde bulunur. Buradan σ_α^2 'nin tahmin edicisi (4.43) şeklinde bulunur.

$$\hat{\sigma}_{u MLE}^2 = \frac{1}{N(T-1)} \sum_{i=1}^N v_i' Q v_i \quad (4.79)$$

$$\hat{\sigma}_{1 MLE}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i' P v_i \quad (4.80)$$

4.4.2.2 Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi (GLS)

Olabilirlik fonksiyonu sabit sayıdaki parametrelere bağlıdır. Varyans bileşenlerine bağlı olarak ML ile GLS aynı sonucu verebilir. Nerlove'un (1971) gösterdiği yöntem ele alınsın.

- $x'_{it} = (x_{1it}, x_{2it}, \dots, x_{Kit})$ olmak üzere X_i (4.74) eşitliğindeki gibi tanımlansın.

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 & y_{i0} & x'_{i1} \\ 1 & y_{i1} & x'_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{iT-1} & x'_{iT} \end{bmatrix}_{T \times (2+K)}$$

- $y'_i = (y_{i1}, \dots, y_{iT})$

- $v'_i = (v_{i1}, \dots, v_{iT})$ ve $u'_i = (u_{i1}, \dots, u_{iT})$
- $\delta' = (\mu, \gamma, \beta')$

olarak tanımlanırsa (4.48) modeli aşağıdaki (4.81) biçiminde olacaktır.

$$\begin{aligned} y_i &= X_i \delta + v_i \\ v_i &= e_T \alpha_i + u_i \end{aligned} \quad (4.81)$$

Hata terimlerin kovaryans matrisi (4.35)'teki gibidir.

$$\Omega = E(v_i v'_i) = \sigma_u^2 Q + \sigma_1^2 P$$

Bu durumda GLS tahmin edicisi (4.82) biçiminde bulunur.

$$\hat{\delta}_{GLS} = \left(\sum_{i=1}^N X'_i \Omega^{-1} X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X'_i \Omega^{-1} y_i \right) \quad (4.82)$$

(4.82) biçimi farklı (4.83) şeklinde yazılabilir. Bu biçim (4.37)'deki ifadeyi Ω^{-1} yerine konulması ile bulunur.

$$\hat{\delta}_{GLS} = \left(\frac{1}{\sigma_u^2} \sum_{i=1}^N X'_i Q X_i + \frac{T}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^N X'_i P X_i \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sigma_u^2} \sum_{i=1}^N X'_i Q y_i + \frac{T}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^N X'_i P y_i \right) \quad (4.83)$$

Eğer Ω bilinmiyorsa (4.48) modeli (4.84) biçiminde yazılıp hesaplanan α_i ve u_{it} değerlerden (4.85) ve (4.86) ile varyans değerleri bulunur ve (4.83) ile regresyon parametreler bulunur.

$$y_{it} = \mu + \gamma_{i,t-1} + \beta' x_{it} + \alpha_i + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (4.84)$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 \quad (4.85)$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T u_{it}^2 - \hat{\sigma}_\alpha^2 \quad (4.86)$$

4.4.2.3 Araç Değişken Yöntemi (IV)

Olabilirlik fonksiyonu çeşitli başlangıç şartlarına göre değişiklik gösterdiği için çok sayıdaki kesit ile kısa zaman aralığında toplanan verilerde yanlış seçimler doğru olmayan tahminlere götürebilir. Başlangıç şartlarına bağlı olmayan yöntem bu durumda kolaylık sağlar.

(4.84) modeli tekrar yazılsın.

$$y_{it} = \mu + \gamma_{i,t-1} + \beta'x_{it} + \alpha_i + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T$$

İlk önce (4.84) denkleminin birinci farkı alınsın. Bu durumda zamana göre sabit μ ve α_i terimleri modelden çıkar ve yeni model (4.87) şeklini alır.

$$\Delta y_{it} = \gamma \Delta y_{i,t-1} + \beta' \Delta x_{it} + \Delta u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 2, \dots, T \quad (4.87)$$

(4.87)'de toplam $T-1$ sayıda birinci fark denklemi mevcuttur. $y_{i,t-2}$ veya $\Delta y_{i,t-2}$ değerleri $\Delta y_{i,t-1}$ ile korelasyonlu ama Δu_{it} ile korelasyonsuz olduğu, yani regresyon modelinin birinci varsayım sağlandığından $\Delta y_{i,t-1}$ için araç olarak kullanılabilir. Bu durumda IV tahmin edicileri (4.88) veya (4.89) şeklinde hesaplanır ve ikisi de tutarlıdır.

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{IV} \\ \hat{\beta}_{IV} \end{pmatrix} = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=3}^T \begin{pmatrix} \Delta y_{i,t-1} \Delta y_{i,t-2} & \Delta y_{i,t-2} \Delta x_{it}' \\ \Delta x_{it} \Delta y_{i,t-2} & \Delta x_{it} \Delta x_{it}' \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=3}^T \begin{pmatrix} \Delta y_{i,t-2} \\ \Delta x_{it} \end{pmatrix} \Delta y_{it} \right] \quad (4.88)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{IV} \\ \hat{\beta}_{IV} \end{pmatrix} = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} y_{i,t-2} \Delta y_{i,t-1} & y_{i,t-2} \Delta x_{it}' \\ y_{i,t-2} \Delta x_{it} & \Delta x_{it} \Delta x_{it}' \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} y_{i,t-2} \\ \Delta x_{it} \end{pmatrix} \Delta y_{it} \right] \quad (4.89)$$

(4.88)'de $\Delta y_{i,t-2}$, araç değişkeni olarak alınmakta ve (4.89)'da ise $y_{i,t-2}$, araç değişkenidir.

Bulunan değerlerden $\bar{y}_{i,-1}$, (4.54) şeklinde olmak üzere σ_u^2 ve σ_α^2 varyans tahmin değerleri sırası ile (4.90) ve (4.91) biçiminde hesaplanır.

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{2N(T-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T (\Delta y_{it} - \gamma \Delta y_{i,t-1} - \hat{\beta}' \Delta x_{it})^2 \quad (4.90)$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{\gamma}_{i,-1} - \hat{\beta}' \bar{x}_i)^2 - \frac{1}{T} \hat{\sigma}_u^2 \quad (4.91)$$

Tahmin edicilerin tutarlığı başlangıç şartlardan bağımsızdır. T ve/veya N sonsuza giderken γ , β ve σ_u^2 'nin tahmin edicileri tutarlıdır. Diğer σ_α^2 'nin tahmin edicileri sadece $N \rightarrow \infty$ iken tutarlıdır; N sabit ve $T \rightarrow \infty$ iken bu tahmin edici tutarsızdır.

IV yönteminin uygulanması basittir. Ama eğer başlangıç koşulların test edilmesi gerekiyorsa, o zaman ML yöntemi daha uygundur.

4.4.2.4 Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi (GMM)

Dinamik panel regresyon tahmininde kullanılan Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi (GMM) için Arellano ve Bond'un (1991) çalışması ele alınacaktır.

Genel olarak momentler topluluğu, örneğin birinci ve ikinci dereceden momentler kümesi $m(y, x; \theta)$ 'nin örneklem değeri $\hat{m}(y, x; \theta)$ olmak üzere $\hat{\theta}_{MM}$ momentler tahmin edicisi (4.92) denklem sisteminin çözülmesi ile bulunur.

$$\hat{m}(y, x; \hat{\theta}_{MM}) = m(y, x; \theta) \quad (4.92)$$

Eğer denklem sayısı parametre sayısından büyük ise denklemin çözümü yoktur. Momentler tahmin edicisini bulunması için $\hat{m}(y, x; \theta) - m(y, x; \theta)$ normu minimize edilir. O zaman A pozitif tanımlı bir matris olmak üzere $[\hat{m}(y, x; \theta) - m(y, x; \theta)]' A [\hat{m}(y, x; \theta) - m(y, x; \theta)]$ şeklindeki ifade minimize edilebilir. Bu durumda Hansen, A matrisini (4.93)'teki biçimde tanımladı (Hsiao, 2002).

$$A = \left\{ E[\hat{m}(y, x; \theta) - m(y, x; \theta)][\hat{m}(y, x; \theta) - m(y, x; \theta)]' \right\}^{-1} \quad (4.93)$$

Dinamik panel modelinin (4.87)'de verilen birinci fark biçimi tekrar yazılsın.

$$\Delta y_{it} = \gamma \Delta y_{i,t-1} + \beta' \Delta x_{it} + \Delta u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 2, \dots, T$$

Burada $T-1$ sayıda birinci fark denklemi mevcuttur. Bu denklem sistemi, $Z_i = [\Delta y_{i,-1} \quad \Delta x_i]$ ve $\delta' = (\gamma, \beta)$ olmak üzere (4.94) şeklinde yazılabilir.

$$\Delta y_i = Z_i \delta + \Delta u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.94)$$

Tüm x_{it} 'ler eksojen değil ve $s < t$ için $E(x_{it} \Delta u_{is}) \neq 0$ ise $s = 1, \dots, T-2$ olmak üzere $q_{is} = (y_{i1}, \dots, y_{is}, x'_{i1}, \dots, x'_{i,s+1})$ olarak tanımlanır ve $E(q_{is} \Delta u_{is}) = 0$ eşitliği sağlanır. O halde W_i matrisi (4.95)'teki gibi tanımlansın.

$$W_i = \begin{bmatrix} q_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_{i,T-2} \end{bmatrix}_{(T-2) \times (T-2)(T-1+(T+1)K)/2} \quad (4.95)$$

Bu durumda $(T-2)(T-1+(T+1)K)/2$ sayıdaki ortogonalite (veya moment) koşulu

$E(W_i \Delta u_i) = 0$ şeklinde yazılır ve (4.95)'te tanımlanan W_i ile sağlanır. Arellano ve Bond (1991) yaklaşımına göre (4.81)'de tanımlanan dinamik modelin birinci evre GMM tahmin edicisi (4.96) ile bulunur.

$$\hat{\delta}_{GMM} = \left[\left(\sum_{i=1}^N Z_i' W_i \right) \Psi^{-1} \left(\sum_{i=1}^N W_i' Z_i \right) \right]^{-1} \left[\left(\sum_{i=1}^N Z_i' W_i \right) \Psi^{-1} \left(\sum_{i=1}^N W_i' \Delta y_i \right) \right] \quad (4.96)$$

Burada A matrisi (4.97) biçiminde olmak üzere Ψ matrisi (4.98) biçiminde hesaplanır. İkinci evre GMM tahmin edicisi için Ψ matrisi (4.99) şeklinde yazılır.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}_{(T-2) \times (T-2)} \quad (4.97)$$

$$\Psi = \sum_{i=1}^N W_i' A W_i \quad (4.98)$$

$$\Psi = \sum_{i=1}^N W_i' (\Delta u_i) (\Delta u_i)' W_i \quad (4.99)$$

Bulunan GMM tahmin edicisinin varyans matrisi, (4.99)'da tanımlanan Ψ matrisi göz önüne alınarak (4.100) şeklinde bulunur.

$$\text{Var}(\hat{\delta}_{GMM}) = \left[\left(\sum_{i=1}^N Z_i' W_i \right) \Psi^{-1} \left(\sum_{i=1}^N W_i' Z_i \right) \right]^{-1} \quad (4.100)$$

Bunun dışında dinamik panel regresyon modelinin GMM tahmininde Arellano ve Bover, Ahn ve Schmidt, ve Keane ve Runkle'in çalışmaları kabul görmüştür (Baltagi, 1995).

4.5 Dengesiz Panel

Dengeli panel veri setinde, ele alınan her kesit veri için her zaman aralığında gözlem bulunmaktadır. Ancak ekonometrik çalışmalarda dengesiz panel (unbalanced panel) daha çok karşılaşılmaktadır. Örneğin, araştırma sırasında araştırmaya katılan birey ölebilir, veya başka yere taşınabilir. Belirli bir sektör üzerine araştırma yapılırken göz önüne alınan firma batabilir, veya yeni firmalar ortaya çıkabilir (Baltagi, 1995).

Bu tez için ele alınan veri setinde iki hisse senedi 2000 yılının ortasından işlem görmeye başlamıştır. Ayrıca birçok hisse senedinin çeşitli nedenlerden dolayı kimi günlerde işlem sırası kapatılmıştır, bu durumda bu hisseler için her bir iş günü veri bulunmamaktadır.

İlk önce kolaylık açısından 2 kesit için dengesiz panel veri setini ele alınsın. O zaman $i = 1, 2$ ve $t = 1, \dots, T_i$ olmak üzere (4.101) ile tanımlanan model ele alınsın.

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1T_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{111} & x_{211} & \dots & x_{K11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{11T_1} & x_{21T_1} & \dots & x_{K1T_1} \\ x_{121} & x_{221} & \dots & x_{K21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{12T_2} & x_{22T_2} & \dots & x_{K2T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1T_1} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{2T_2} \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

Burada $v_{it} = \alpha_i + u_{it}$ 'dir. N kesit için bu model $i = 1, \dots, N$ ve $t = 1, \dots, T_i$ olmak üzere (4.102) şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned} y_{it} &= \mu + \beta' x_{it} + v_{it} \\ v_{it} &= \alpha_i + u_{it} \end{aligned} \quad (4.102)$$

O zaman Ω varyans-kovaryans matrisi (4.103) şeklinde olacak ki, burada $i = 1, \dots, N$ ve $t = 1, \dots, T_i$ olmak üzere Ω_i (4.104)'te verilmiştir.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Omega_N \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

$$\Omega_i = \sigma_u^2 I_{T_i} + \sigma_\alpha^2 e_{T_i} e_{T_i}' = \sigma_u^2 Q_i + (T_i \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2) P_i \quad (4.104)$$

O zaman, burada Q_i ve P_i matrisleri $i = 1, \dots, N$ ve $t = 1, \dots, T_i$ olmak üzere sırası ile (4.105) ve (4.106) şeklinde tanımlanır.

$$Q_i = I_{T_i} - \frac{e_{T_i} e_{T_i}'}{T_i} \quad (4.105)$$

$$P_i = \frac{e_{T_i} e_{T_i}'}{T_i} \quad (4.106)$$

Burada e_{T_i} , $T_i \times 1$ birler vektörü, ve I_{T_i} , $T_i \times T_i$ birim matrisidir.

(4.102) ile verilen modelin OLS tahmin edicisi (4.107) ile, ve GLS tahmin edicisi (4.108) ile bulunur.

$$\beta_{OLS} = \left[\sum_{i=1}^N X_i' Q_i X_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N X_i' Q_i y_i \right] \quad (4.107)$$

$$\beta_{GLS} = \left[\sum_{i=1}^N X_i' \Omega_i X_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N X_i' \Omega_i y_i \right] \quad (4.108)$$

Bu nedenle GLS tahmin edicisi, dengeli panel verideki ağırlıklı EKK gibi elde edilir. Yalnız dengesiz panel veride ağırlıklar, her kesit için farklı olan T_i zaman serileri boyutuna bağlıdır (Baltagi, 1995).

(4.102) ile tanımlanan modelin olabilirlik fonksiyonu (4.109) şeklinde yazılır.

$$L = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln |\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i' \Omega_i^{-1} v_i \quad (4.109)$$

Burada varyans-kovaryans matrisi (4.103) ve (4.104) ile verilmiştir. Bu fonksiyon Bölüm 4.4.1.2' de anlatılan iterasyon yöntemi ile maksimize edilebilir (Baltagi, 1995).

5. PANEL GARCH MODELİ

5.1 Giriş

Panel GARCH konusunu ele alan çalışmalardan yaygın olarak Rodolfo Cermeno ve Kevin B. Grier'in (2001a, 2001b) çalışmaları bulunmaktadır. Ayrıca Walid K. Bakry (2006), doktora tezinde Mısır'ın borsa verileri üzerine panel GARCH model tahminini yaparken model formülasyonu için Cermeno ve Grier'i (2001b) referans göstermiştir. Bunun yanı sıra Deuskar, Gupta ve Subrahmanyam (2008), Plümper ve Troeger (2004, 2006), Drakos ve Goulas'ın (2006) panel GARCH modelini konu alan çalışmaları da yayınlanmıştır.

İlk çalışmaların birinde Cermeno ve Grier (2001b), Grunfeld yatırım panel veri üzerine panel ARCH(1) modelini tahmin etti. Grunfeld panel veri, 1935 – 1954 yıllarında toplanan beş Amerikan firmanın (GE, W, GM, C, US)* yatırım, piyasa değeri ve ana sermaye verilerinden oluşmaktadır. Verinin orijinal versiyonu, Grunfeld Y.'in 1958 yılında yapılan doktora çalışması idi. Cermeno ve Grier'in (2001b), Grunfeld veri seti üzerine tahmin edilen beş farklı model tahminleri aşağıda açıklanmıştır.

- 1) Sıradan EKK yöntemi ile basit regresyon (havuz regresyonu – pooled regression)
- 2) LSDV ile sabit etkili panel regresyon
- 3) ARCH(1) – havuz regresyonu (pooled regression)
- 4) Panel ARCH(1) – bireysel etkiler sadece ana denkleminde
- 5) Panel ARCH(1) – bireysel etkiler hem ana hem de varyans denkleminde

Bunun yanı sıra yapılan testlerle “Ana denkleminde bireysel etki yok” ve “Varyans denkleminde bireysel etki yok” yokluk hipotezleri 0.01 düzeyinde red edildiği için Cermeno ve Grier (2001b) beşinci modelde karar kılmıştır.

5.2 Modelleme Biçimleri

Panel veride ortalama denklemi (mean equation) genel olarak, X_i i -inci yatay kesit için açıklayıcı değişkenler kümesi ve δ parametreler vektörü olmak üzere (5.1) veya (5.2) şeklinde tanımlanırsa; $u_{it} | \Theta_{t-1} \sim (0, h_{it})$, yani hata terimler 0 koşullu beklenen değerli ve h_{it} koşullu varyanslı olmak üzere koşullu değişen varyans (variance equation), (5.3) veya (5.4)

* Firmalar: GE – General Electrics, W – Westinghouse, GM – General Motors, C – Chrysler, US – US Steel.

biçiminde tanımlanır.

$$y_i = e_T \mu_i + X_i \delta + u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.1)$$

$$y_i = e_T \mu + X_i \delta + u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.2)$$

$$h_{it} = \omega_i + \sum_{h=1}^q \alpha_h u_{i,t-h}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{i,t-j}; \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.3)$$

$$h_{it} = \omega + \sum_{h=1}^q \alpha_h u_{i,t-h}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{i,t-j}; \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.4)$$

Burada $h = 1, \dots, q$ ve $j = 1, \dots, p$ olmak üzere $\omega_i > 0$, $\alpha_h \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ koşulları aranmakta ve Θ_{t-1} , $(t-1)$ zamanında mevcut olan tüm bilgilerin kümesidir.

Bunun yanı sıra (5.1) denklemi, bireysel etkilerin mevcut olduğu sabit etki modelidir. Bu biçim statik model için (4.6) ve dinamik model için (4.50) ile tanımlanan model ile eşdeğerdir. (5.2) denklemi ise bireysel etkilerin hata terimleri içinde sayılan rasgele etki modelidir ve statik model için (4.30) ve dinamik model için (4.49) ile eşdeğerdir.

Varyans denklemini modelleyen (5.3) denkleminde bireysel etkiler mevcuttur, ama (5.4) eşitliğinde bireysel etkilerin olmadığı varsayılmaktadır.

Bu durumda Cermeno ve Grier'in (2001b) tanımladığı dört farklı model söz konusudur.

- 1) Model A. Hem ortalama denkleminde hem de varyans denkleminde bireysel etkiler heterojen: (5.1) ve (5.3).

$$y_i = e_T \mu_i + X_i \delta + u_i$$

$$h_{it} = \omega_i + \sum_{h=1}^q \alpha_h u_{i,t-h}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{i,t-j}; \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.5)$$

Bu durumda X_i K tane parametre içeriyor ise tahmin edilecek parametre sayısı $K + 2N + p + q$ olacaktır. Bu yüzden N ve K küçük ise bu model tahmin edilebilmektedir. Örneğin, sadece 5 yatay kesit ve 3 açıklayıcı değişken ile kurulan panel GARCH(1, 1) modeli için toplam 15 parametre tahmin edilmesi gerekecek ki, eğer N büyük ve T küçük ise bu, yan parametre sorununa yol açacaktır.

- 2) Model B. Ortalama denkleminde bireysel etkiler heterojen (5.1), varyans denkleminde bireysel etkiler homojen (5.4).

$$y_i = e_T \mu_i + X_i \delta + u_i$$

$$h_{it} = \omega + \sum_{h=1}^q \alpha_h u_{i,t-h}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{i,t-j}; \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.6)$$

Bu model için ele alınacak parametre sayısı $K + N + 1 + p + q$ 'dür.

- 3) Model C. Ortalama denkleminde bireysel etkiler homojen (5.2), varyans denkleminde bireysel etkiler heterojen (5.3).

$$y_i = e_T \mu + X_i \delta + u_i$$

$$h_{it} = \omega_i + \sum_{h=1}^q \alpha_h u_{i,t-h}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{i,t-j}; \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.7)$$

Bu model için de Model B'deki gibi $K + N + 1 + p + q$ parametre tahmini yapılacaktır.

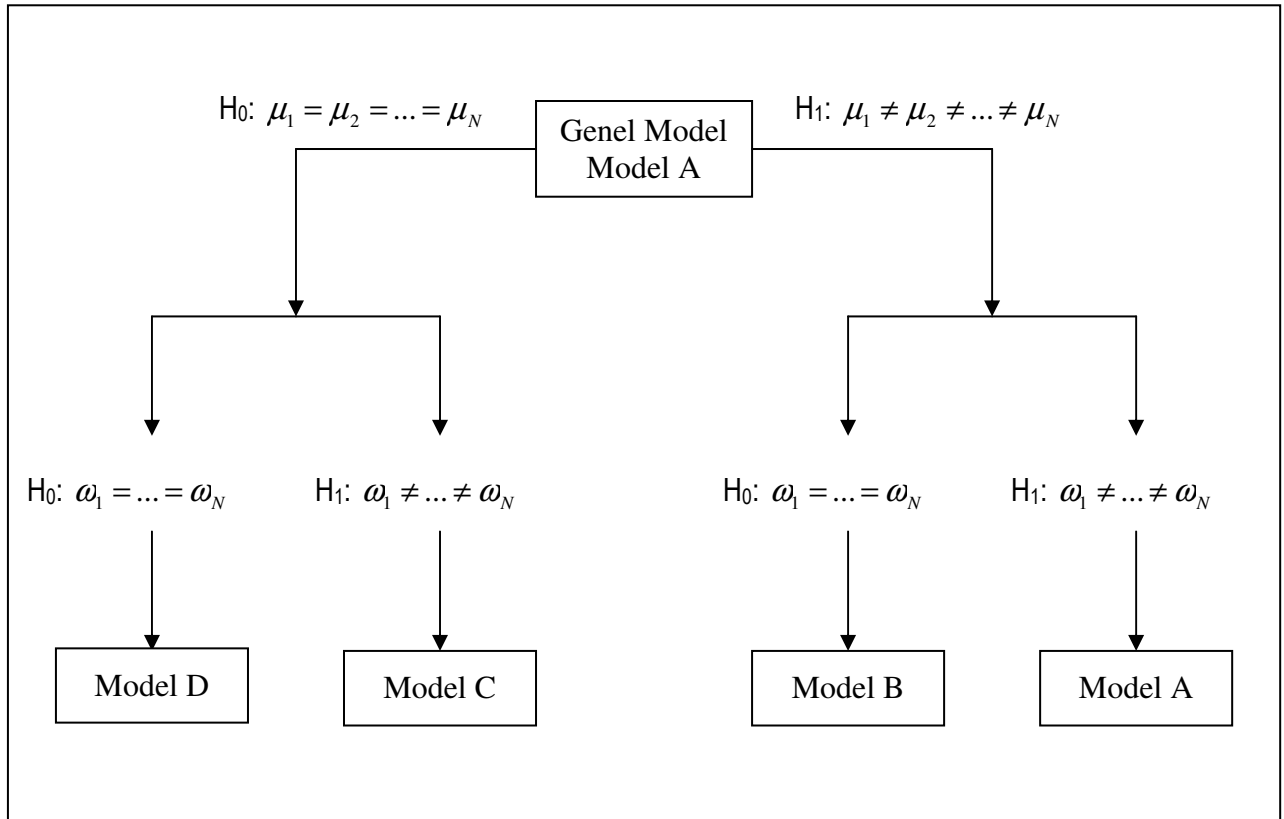
- 4) Model D. Hem ortalama denkleminde hem de varyans denkleminde bireysel etkiler homojen: (5.2) ve (5.4).

$$y_i = e_T \mu + X_i \delta + u_i$$

$$h_{it} = \omega + \sum_{h=1}^q \alpha_h u_{i,t-h}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{i,t-j}; \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.8)$$

En son modelde toplam parametre sayısı $K + 2 + p + q$ 'dür.

Böylece model seçimine göre tahmin edilecek parametre sayısı değişmektedir.



Şekil 5.1 Panel GARCH genel modelleme biçimleri

Bu durumda model seçiminde ortalama denklemi ve varyans denklemindeki bireysel etkilerin test edilmesi önemlidir. Şekil 5.1'de bu konu ele alınmıştır. Buna göre eğer ana denklemdeki bireysel etkiler test edildikten sonra varyans denklemindeki bireysel etkiler test edilir ve uygun model seçilir. Ana denklemindeki bireysel etkilerin anlamlılığı test edilmesinde Chow testi kullanılır. Aynı şekilde varyans denklemindeki bireysel etkiler de test edilebilir.

5.2.1 Panel GARCH(1, 1) Modelinin Özellikleri

GARCH(1, 1) modeli zaman serileri analizinde çok sık kullanılmaktadır. Bollerslev (1986) ilk GARCH modelini önerirken ABD enflasyon verileri üzerine GARCH(1, 1) modelini kurmuştur. Panel GARCH konuyu ele alan çalışmaların hemen hemen hepsinde panel GARCH(1, 1) veya panel ARCH(1) modeli ele alınmaktadır.

Model tahmini için hem kolaylık açısından hem de verinin yapısından dolayı panel GARCH(1, 1) modeli ele alınacaktır. Buna göre ortalama denklemi modelleri (5.9) veya (5.10)'daki gibi olmak üzere panel GARCH(1, 1) modelinin varyans denklemi (5.11) veya (5.12) şeklinde tanımlanabilir.

$$y_{it} = \mu_i + \mathcal{N}_{i,t-1} + \varphi z_t + u_{it} \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.9)$$

$$y_{it} = \mu + \mathcal{N}_{i,t-1} + \varphi z_t + u_{it} \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.10)$$

$$h_{it} = \omega_i + \alpha u_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1} \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.11)$$

$$h_{it} = \omega + \alpha u_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1} \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.12)$$

Yukarıdaki biçimlerden anlaşılacağı gibi (5.11) modeli varyans denkleminde bireysel etkiler mevcut olan Model A ve C'ye uygundur; eğer ortalama denklemi (5.9) ile verilmişse Model A, eğer ortalama denklemi (5.10) ile verilmiş ise Model B'dir. (5.12)'da verilen varyans modeli ise havuz modelidir (Model B ve D).

Çizelge 5.1'de bu modeller için hata terimlerin koşulsuz beklenen değer ve koşulsuz varyans değerleri yer almaktadır.

Çizelge 5.1 Panel GARCH(1, 1) modelinin özellikleri

İstatistikler	Model A ve C	Model B ve D
Varyans denklemi	$h_{it} = \omega_i + \alpha u_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1}$	$h_{it} = \omega + \alpha u_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1}$
Koşulsuz beklenen değer	$E(u_{it}) = 0$	$E(u_{it}) = 0$
Koşulsuz varyans	$E(u_{it}^2) = \frac{\omega_i}{1 - \alpha - \beta}$	$E(u_{it}^2) = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$
Basıklık (Kurtosis)	$\frac{E(u_{it}^4)}{[E(u_{it}^2)]^2} - 3 = \frac{6\alpha^2}{1 - 2\alpha^2 - (\alpha + \beta)^2}$	$\frac{E(u_{it}^4)}{[E(u_{it}^2)]^2} - 3 = \frac{6\alpha^2}{1 - 2\alpha^2 - (\alpha + \beta)^2}$

Çizelge 5.1’de koşulsuz varyans denkleminde görüldüğü gibi, parametrelerin pozitif olma ($h = 1, \dots, q$ ve $j = 1, \dots, p$ olmak üzere $\omega_i > 0$, $\alpha_h \geq 0$, $\beta_j \geq 0$) koşulunun yanı sıra, $\alpha + \beta < 1$ koşulu eklenmektedir. Ayrıca çoğu oynaklık hesaplanmasında oynaklığın başlangıç değerinin yerine koşulsuz varyans değeri alınmaktadır. Basıklığın pozitif olması için paydadaki ifadenin pozitif olması yeterlidir.

5.3 Model Tahmini: En Çok Olabilirlik Yöntemi

(5.9) ve (5.10)’da tanımlanan ortalama denklemi ve (5.11) ve (5.12)’de verilen varyans modelleri tekrar ele alınsın.

$$y_{it} = \mu_i + \gamma_{i,t-1} + \varphi_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T$$

$$y_{it} = \mu + \gamma_{i,t-1} + \varphi_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T$$

$$h_{it} = \omega_i + \alpha u_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1} \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T$$

$$h_{it} = \omega + \alpha u_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1} \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T$$

Buradan hata terimi $i = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, T$ olmak üzere (5.9) için $u_{it} = y_{it} - \mu_i - \gamma_{i,t-1} - \varphi_{it}$ ve (5.10) için $u_{it} = y_{it} - \mu - \gamma_{i,t-1} - \varphi_{it}$ şeklinde bulunur ve $u_{it} | \Theta_{t-1} \sim N(0, h_{it})$ olarak varsayılırsa yani hata terimlerinin koşullu dağılımı normal dağılım olduğu varsayılırsa olasılık yoğunluk fonksiyonu (5.13) şeklinde tanımlanır.

$$f(u_{it} | \Theta_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_{it}}} \exp\left(-\frac{u_{it}^2}{2h_{it}}\right) \quad (5.13)$$

Burada θ parametreler vektörü her bir model için aşağıdaki gibi tanımlanır.

- Model A: $\theta' = (\mu_1, \dots, \mu_N, \gamma, \varphi, \omega_1, \dots, \omega_N, \alpha, \beta)$
- Model B: $\theta' = (\mu_1, \dots, \mu_N, \gamma, \varphi, \omega, \alpha, \beta)$
- Model C: $\theta' = (\mu, \gamma, \varphi, \omega_1, \dots, \omega_N, \alpha, \beta)$
- Model D: $\theta' = (\mu, \gamma, \varphi, \omega, \alpha, \beta)$

(5.13) tanımlandığına göre olabilirlik fonksiyonu (5.14)’teki gibi bulunur.

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ln f(u_{it} | \Theta_{t-1}; \theta) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln h_{it} - \frac{u_{it}^2}{2h_{it}} \right] \quad (5.14)$$

EÇO tahmin edicileri, $L(\theta)$ olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden değerlerdir. Bunun için $L(\theta)$ olabilirlik fonksiyonun her bir θ 'ya göre kısmi türevi alınıp 0'a eşitlenir. Denklemin çözümleri EÇO tahmin değerlerini verir. Yalnız (5.14)'te verilen olabilirlik fonksiyonu için söz konusu denklemlerin analitik çözümü olmadığından sayısal yöntemlere başvurulmaktadır.

Sonuç çıkarmada EÇO tahmin edicisinin varyans-kovaryans matrisi lazım olacaktır.

$$F^{-1} = -E \left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]^{-1} \quad (5.15)$$

F^{-1} (5.15)'teki gibi, olabilirlik fonksiyonunun hessian matrisinin tersinin beklenen değerinin negatifi olarak tanımlanırsa* EÇO tahmin edicisi asimptotik olarak θ ortalamalı $(NT)^{-1} F^{-1}$ varyans matrisli normal dağılımına sahiptir, yani bu durum (5.16) ile ifade edilebilir (Margiora ve Panaretos, 2001).

$$\sqrt{NT}(\hat{\theta}_{MLE} - \theta) \xrightarrow{D} N(0, F^{-1}) \quad (5.16)$$

Pratikte teorik hessian matrisinin hesaplanması imkansızdır ve bu yüzden onun yerine nümerik hessian matrisi kullanılmaktadır. Bu konu daha sonra ele alınacaktır.

5.3.1 Sayısal Analiz

En çok olabilirlik tahmin edicilerin bulunmasında genellikle Newton-Raphson, Levenberg-Marquardt ve BHHH algoritmaları kullanılmaktadır. Bu durumda (5.17)'de tanımlanan $l_{it}(\theta)$ fonksiyonu (Cermeno ve Grier, 2001b) çok sık göz önüne alınacaktır.

$$l_{it}(\theta) = \ln f(u_{it} | \Theta_{t-1}; \theta) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln h_{it} - \frac{u_{it}^2}{2h_{it}} \quad (5.17)$$

O halde olabilirlik fonksiyonu $l_{it}(\theta)$ fonksiyonlarının hem zamana göre hem de kesite göre toplamı olarak, yani (5.18) şeklinde yazılabilir.

* Bollerslev, T., (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity".

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T l_{it}(\theta) \quad (5.18)$$

Sayısal yöntemlerde (5.19) şeklinde tanımlanan objektif fonksiyonu da sık kullanılmaktadır.

$$Q(\theta) = -L(\theta) = \frac{NT}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[\ln h_{it} + \frac{u_{it}^2}{h_{it}} \right] \quad (5.19)$$

Bu durumda EÇÖ tahmin edicileri, olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden, ama objektif fonksiyonunu minimize eden değerlerdir.

Genel olarak EÇÖ tahmin edicileri bulmak için kullanılan sayısal metotlar, parametrelerin $\theta^{(0)}$ başlangıç değerlerinden başlayarak (5.20)'de verilen formül ile iterasyon değerleri bulunur ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $|\theta^{(h+1)} - \theta^{(h)}| < \varepsilon$ şartı sağlanırsa iterasyon durdurulur.

$$\theta^{(h+1)} = \theta^{(h)} + \lambda_h \cdot d_h = \theta^{(h)} + \lambda_h \cdot A_h \nabla L(\theta^{(h)}) \quad (5.20)$$

Burada

- λ_h : iterasyon adım büyüklüğü (step size)
- $d_h = A_h \nabla L(\theta^{(h)})$: iterasyon adım uzunluğudur (step length).

Sayısal yöntemler bu ikinin aldığı değerine göre değişiklik göstermektedir. En basit yöntemlerden birinde iterasyon adım uzunluğundaki $A_h = I$, yani birim matrisi olarak alınmaktadır.

5.3.1.1 Newton-Raphson Algoritması

Taylor açılımından yola çıkarak geliştirilen bu yöntemde parametrelerin $\theta^{(0)}$ başlangıç değerleri verilmiş ise bir sonraki iterasyon tahmin değerleri (5.21) şeklinde hesaplanır.

$$\theta^{(h+1)} = \theta^{(h)} - \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 l_{it}(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]_{\theta=\theta^{(h)}}^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_{it}(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta^{(h)}} \quad (5.21)$$

Burada λ_h , A_h ve $\nabla L(\theta^{(h)})$ değerleri sırasıyla (5.22), (5.23) ve (5.24) biçimindedir.

$$\lambda_h = 1 \quad (5.22)$$

$$A_h = - \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 l_{it}(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]_{\theta=\hat{\theta}^{(h)}}^{-1} \quad (5.23)$$

$$\nabla L(\theta^{(h)}) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_{it}(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}^{(h)}} \quad (5.24)$$

Adım uzunluğunun ilk bileşeni olabilirlik fonksiyonunun hessian matrisini verir, ikinci bileşeni ise olabilirlik fonksiyonunun gradyan vektörüne eşittir. O zaman basit matematiksel biçimiyle (5.21) ifadesi (5.25) şeklini alacaktır.

$$\theta^{(h+1)} = \theta^{(h)} - \left[\nabla^2 L(\theta^{(h)}) \right]^{-1} \nabla L(\theta^{(h)}) = \theta^{(h)} - [H(L)]^{-1} \nabla L \Big|_{\theta=\theta^{(h)}} \quad (5.25)$$

Bu şekilde hesaplanan parametrelerin asimptotik varyans matrisi son M -inci iterasyondaki hessian matrisinin tersine eşittir.

$$Var(\hat{\theta}_{MLE}) = - \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 l_{it}(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]_{\theta=\theta^{(M)}}^{-1} \quad (5.26)$$

Olabilirlik fonksiyonunun 3-üncü basamaktan gradyanları 0 veya 0'a yakınsıyor ise bu yöntem çok kullanışlıdır.

5.3.1.2 Levenberg-Marquardt Algoritması

Levenberg, hessian matrisine ek toplanan ekleyerek Newton-Raphson yöntemini genişletmiştir. Bu durumda parametreler (5.27) iterasyon yöntemi ile hesaplanır (Ranganathan, 2004).

$$\begin{aligned} \theta^{(h+1)} &= \theta^{(h)} - \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 l_{it}(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} - \lambda I \right]_{\theta=\theta^{(h)}}^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_{it}(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta^{(h)}} \\ &= \theta^{(h)} - [H(L) - \lambda I]^{-1} \nabla L \Big|_{\theta=\theta^{(h)}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Yalnız bu durumda eğer λ göreceli büyük ise hessian matrisi neredeyse kullanılmamakta ki bu, Levenberg algoritması için bir dezavantajdır. Bu durumda Marquardt'ın önerdiği iterasyon biçimi (5.28) şeklindedir.

$$\theta^{(h+1)} = \theta^{(h)} - [H(L) - \lambda \text{diag}[H(L)]]^{-1} \nabla L \Big|_{\theta=\theta^{(h)}} \quad (5.28)$$

Parametrelerin varyans matrisi (5.26)'daki gibi bulunur.

5.3.1.3 BHHH Algoritması

Berndt, Hall, Hall ve Hausman adını taşıyan 1974'te önerilen bu algoritmada hessian matrisinin negatifi yerine gradyan vektörünün dış çarpımı ele alınmaktadır. Bu durumda BHHH algoritması (5.29) şeklinde işlenir ve parametrelerin asimptotik varyans matrisi son iterasyondaki A_M matrisine eşittir, yani (5.30) biçiminde bulunur (Bollerslev, 1986).

$$\theta^{(h+1)} = \theta^{(h)} + \lambda_h \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_{it}(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial l_{it}(\theta)}{\partial \theta'} \right]_{\theta=\theta^{(h)}}^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_{it}(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta^{(h)}} \quad (5.29)$$

$$Var(\theta) = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_{it}(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial l_{it}(\theta)}{\partial \theta'} \right]_{\theta=\theta^{(M)}}^{-1} \quad (5.30)$$

5.3.2 İterasyon Adım Büyüklüğünün Seçimi

EÇO tahmininin sayısal çözümünde adım uzunluğu, bir önceki iterasyonda hesaplanan parametrelerin olabilirlik fonksiyonunun hessian matrisinin tersi, veya gradyan vektörünün dış çarpımının tersi ile gradyan vektörünün çarpımı olarak hesaplanır. Ancak adım büyüklüğünü de optimize etmesi gerekir. Genel biçimde adım büyüklüğünün optimal değeri $\lambda_{opt} = \max_{\lambda} L(\theta + \lambda d)$ veya $\lambda_{opt} = \min_{\lambda} Q(\theta + \lambda d)$ şeklinde bulunur. Burada $Q(\theta + \lambda d)$, (5.19)'da tanımlanan objektif fonksiyondur. Olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden veya objektif fonksiyonunu minimize eden λ değerinin bulunması için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.

5.3.2.1 Altın Oran Yöntemi

Adım büyüklüğünün bir $[\lambda_{bas}, \lambda_{son}]$ aralığının içinde olduğu bilinsin. Bu durumda λ_{h1} ve λ_{h2} değerleri sırası ile (5.31) ve (5.32) şeklinde bulunur.

$$\lambda_{h1} = \lambda_{bas} + 0.392(\lambda_{son} - \lambda_{bas}) \quad (5.31)$$

$$\lambda_{h2} = \lambda_{bas} + 0.618(\lambda_{son} - \lambda_{bas}) \quad (5.32)$$

Burada $0.618 = (\sqrt{5} - 1)/2$ olarak hesaplanan sayıya altın oran denir ki, buradan yöntem adını almaktadır. Bulunan değerlerin her birine göre objektif fonksiyon değeri hesaplanır.

$$Q_{h1} = Q(\lambda_{h1}) = Q(\theta^{(h)} + \lambda_{h1} d_h) \quad (5.33)$$

$$Q_{h2} = Q(\lambda_{h2}) = Q(\theta^{(h)} + \lambda_{h2} d_h) \quad (5.34)$$

Bu halde iki durum söz konusudur:

- $Q_{h1} < Q_{h2}$ ise objektif fonksiyonunun minimumu $[\lambda_{bas}, \lambda_{h2}]$ aralığının içindedir.
- $Q_{h1} > Q_{h2}$ ise objektif fonksiyonunun en küçük değeri $[\lambda_{h1}, \lambda_{son}]$ aralığının içindedir.

Böylece adım büyüklüğü için yeni aralık sınırları ile iterasyon yinelenir.

5.3.2.2 Newton-Raphson Yöntemi

Objektif fonksiyonu λ 'ya göre birinci ve ikinci basamaktan türevlenebiliyor ise λ_0 başlangıç değerinden başlayarak, bir sonraki iterasyon değeri (5.35) şeklinde hesaplanır.

$$\lambda_{h+1} = \lambda_h - \frac{Q'(\lambda_h)}{Q''(\lambda_h)} \quad (5.35)$$

Yakınsayana kadar iterasyon yinelenir.

5.3.2.3 Karesel Fonksiyon Yöntemi

Adım büyüklüğünün bir $[\lambda_{bas}, \lambda_{son}]$ aralığının içinde olduğu bilinsin ve bu aralığın içinde bir λ_{h0} noktası verilmiş olsun. Bu durumda $\lambda_{bas} \leq \lambda_{h0} \leq \lambda_{son}$ olarak yazılabilir. O zaman $q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ biçimindeki karesel fonksiyonu tanımlanırsa objektif fonksiyon değerleri (5.36), (5.37) ve (5.38)'deki gibi yazılabilir.

$$Q_{bas} = Q(\lambda_{bas}) = Q(\theta^{(h)} + \lambda_{bas} d_h) = a\lambda_{bas}^2 + b\lambda_{bas} + c \quad (5.36)$$

$$Q_{h0} = Q(\lambda_{h0}) = Q(\theta^{(h)} + \lambda_{h0} d_h) = a\lambda_{h0}^2 + b\lambda_{h0} + c \quad (5.37)$$

$$Q_{son} = Q(\lambda_{son}) = Q(\theta^{(h)} + \lambda_{son} d_h) = a\lambda_{son}^2 + b\lambda_{son} + c \quad (5.38)$$

Geometrik olarak, (λ_{bas}, Q_{bas}) , (λ_{h0}, Q_{h0}) ve (λ_{son}, Q_{son}) olmak üzere verilen 3 nokta üzerine karesel fonksiyon çizilip bu fonksiyonun en küçük değeri bulunacaktır ki, bu değer (5.39) ile bulunur.

$$\lambda_{h1} = \frac{1}{2} \frac{(\lambda_{h0}^2 - \lambda_{son}^2)Q_{bas} + (\lambda_{son}^2 - \lambda_{bas}^2)Q_{h0} + (\lambda_{bas}^2 - \lambda_{h0}^2)Q_{son}}{(\lambda_{h0} - \lambda_{son})Q_{bas} + (\lambda_{son} - \lambda_{bas})Q_{h0} + (\lambda_{bas} - \lambda_{h0})Q_{son}} \quad (5.39)$$

Objektif fonksiyonun en büyük değer aldığı λ değeri çıkarılıp yeni 3 nokta ile iterasyon

yenilenir.

5.3.3 Olabilirlik Fonksiyonunun Gradyan Vektörü

EÇO tahmininde kullanılan sayısal yöntemlerde olabilirlik fonksiyonun gradyan vektörü bulunması gerekir. Burada (5.17)'de tanımlanan $l_{it}(\theta)$ fonksiyonun gradyan vektörü bulunması yeterlidir. Bollerslev'in (1986) belirttiği gradyan vektörü, panel veri için aşağıdaki gibi yazılabilir.

Ana denklemindeki parametreler vektörüne δ denirse (5.9) için $\delta' = (\mu_1, \dots, \mu_N, \gamma, \varphi)$ ve (5.10) için $\delta' = (\mu, \gamma, \varphi)$ şeklinde olacaktır. Varyans denklemindeki parametreler vektörüne ψ denirse, (5.11) için $\psi' = (\omega_1, \dots, \omega_N, \alpha, \beta)$ ve (5.12) için $\psi' = (\omega, \alpha, \beta)$ biçimini alacaktır. O zaman parametreler vektörü $\theta' = (\delta', \psi')$ şeklinde tanımlanır.

İlk önce olabilirlik fonksiyonunun δ 'ya göre gradyan vektörü incelensin. (5.17) denklemi tekrar yazılsın.

$$l_{it}(\theta) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln h_{it} - \frac{u_{it}^2}{2h_{it}}$$

Ortalama denklemindeki açıklayıcı değişkenler, (5.9) için $x'_{it} = (d'_i, y_{i,t-1}, z_t)$ ve (5.10) için $x'_{it} = (1, y_{i,t-1}, z_t)$ olarak vektör biçiminde yazılırsa hata terimleri $u_{it} = y_{it} - x'_{it}\delta$ şeklinde bulunur. Burada d_i , i -inci elemanı 1 ve diğer elemanları 0 olan $N \times 1$ dummy vektörüdür. O zaman l_{it} 'nin δ 'ya göre gradyan vektörü (5.40) şeklinde hesaplanır.

$$\frac{\partial l_{it}}{\partial \delta} = \frac{u_{it} x_{it}}{h_{it}} + \frac{1}{2h_{it}} \left(\frac{u_{it}^2}{h_{it}} - 1 \right) \frac{\partial h_{it}}{\partial \delta} \quad (5.40)$$

Bu biçim (5.9) ve (5.10) denklemleri için aynıdır, yalnız elde edilen gradyan vektörün boyutu (5.9) için $N+2$ ve (5.10) için 3'tür. (5.12) ele alınırsa yani $h_{it} = \omega + \alpha u_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1}$ ise h_{it} 'nin δ 'ya göre gradyan vektörü (5.41) şeklinde hesaplanır ki, bu (5.11) için de aynı sonucu verir.

$$\frac{\partial h_{it}}{\partial \delta} = -2\alpha u_{i,t-1} x_{i,t-1} + \beta \frac{\partial h_{i,t-1}}{\partial \delta} \quad (5.41)$$

Olabilirlik fonksiyonunun ψ 'ye göre gradyan vektörü (5.11) ve (5.12) için farklılık gösterir.

- (5.11) için i -inci elemanı 1 ve diğer elemanları 0 olan τ_i dummy değişkeni tanımlansın.

Yani $\tau'_i = (\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots, \tau_{iN})$ olmak üzere $i = j$ ise $\tau_{ij} = 1$ ve diğer durumlarda $\tau_{ij} = 0$ olacaktır. O zaman $v'_{it} = (\tau'_i, u_{i,t-1}^2, h_{i,t-1})$ olarak tanımlanırsa varyans denklemi $h_{it} = v'_{it}\psi$ şeklinde yazılır.

- (5.12) için $v'_{it} = (1, u_{i,t-1}^2, h_{i,t-1})$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda varyans denklemi aynı $h_{it} = v'_{it}\psi$ biçiminde yazılır.

Bu durumda gradyan vektörü, Model A ve C için $N + 2$ boyutlu, Model B ve D için 3 boyutlu vektördür. O zaman gradyan vektörü (5.42) olarak bulunur.

$$\frac{\partial l_{it}}{\partial \psi} = \frac{1}{2h_{it}} \left(\frac{u_{it}^2}{h_{it}} - 1 \right) \frac{\partial h_{it}}{\partial \psi} \quad (5.42)$$

Burada h_{it} 'nin ψ 'ye göre gradyan vektörü (5.43) biçimindedir.

$$\frac{\partial h_{it}}{\partial \psi} = v_{it} + \beta \frac{\partial h_{i,t-1}}{\partial \psi} \quad (5.43)$$

O zaman $\theta' = (\delta', \psi')$ olduğuna göre gradyan vektörü (5.44) şeklinde yazılabilir.

$$\nabla l_{it}(\theta) = \frac{\partial l_{it}(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_{it}}{\partial \delta} \\ \frac{\partial l_{it}}{\partial \psi} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Bazı yazılım paketlerinde teorik diferansiyel yerine sayısal diferansiyel kullanılmaktadır. Sayısal diferansiyel yöntemi diferansiyel tanımına dayanmaktadır. (Bakınız Ek 1.)

5.3.4 Olabilirlik Fonksiyonunun Sayısal Hessian Matrisi

Bir önceki alt bölümde olabilirlik fonksiyonun gradyan vektörü ele alınmıştır. Olabilirlik fonksiyonunun δ 'ya kısmi türevi (5.40)'ta ve ψ 'ye göre kısmi türevi ise (5.42)'de verilmiştir. Varyans denkleminin δ 'ya kısmi türevi (5.41)'de ve ψ 'ye göre kısmi türevi ise (5.43)'te verilmiştir.

Buradan görüldüğü gibi hessian matrisinin bulunması daha çok karışık olacaktır. O yüzden pratikte hessian matrisinin sayısal çözümüne başvurulmaktadır. Bunun için ilk önce aşağıdaki iki vektör değişkeni tanımlansın.

- $s_h = \theta^{(h+1)} - \theta^{(h)}$: $h+1$ iterasyondaki ile h -inci iterasyondaki parametrelerin farkı
- $g_h = \nabla L(\theta^{(h+1)}) - \nabla L(\theta^{(h)})$: $h+1$ iterasyondaki ile h -inci iterasyondaki gradyan

vektörlerinin farkı olsun.

O zaman H_0 başlangıç hessian matrisi verilmiş ise (5.45) iterasyon formülü ile bir sonraki iterasyon hessian matrisi bulunur (Lombardi ve Gallo, 2002).

$$H_{h+1} = H_h + \frac{g_h g_h'}{g_h' g_h} - \frac{H_h s_h s_h' H_h}{s_h' H_h s_h} \quad (5.45)$$

Bu yönteme BFGS metodu denir.

5.4 Varyans Denklemindeki Bireysel Etkilerin Test Edilmesi

Bu bölümün başlangıcında belirtildiği gibi ortalama denklemindeki bireysel etkiler Chow testi ile test edilebilir. Varyans denklemindeki bireysel etkiler Chow testinin yanı sıra Olabilirlik Oran testi, veya Wald testi ile de test edilebilir (Cermeno ve Grier, 2001b).

5.4.1 Olabilirlik Oran Testi

$L(\theta)$ olabilirlik fonksiyonu olmak üzere, sınırlanmış ve sınırlanmamış parametre tahminleri sırasıyla $\hat{\theta}_R$ ve $\hat{\theta}_U$ olsun. Varyans denklemindeki bireysel etkilerin olmadığı model sınırlanmış modeldir, ve varyans denklemindeki bireysel etkilerin mevcut olduğu model sınırlanmamış modeldir. O zaman olabilirlik fonksiyon değerleri sırasıyla $L(\hat{\theta}_R)$ ve $L(\hat{\theta}_U)$ şeklinde hesaplanır. Bu durumda (5.46) ile tanımlanan test istatistiği, sınırlama sayısına eşit serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

$$LR = -2(L(\hat{\theta}_R) - L(\hat{\theta}_U)) \quad (5.46)$$

5.4.2 Wald Testi

Sınırlanmamış parametre tahmini $\hat{\theta}_U$ olsun. Bu parametreler üzerine bir $g(\theta_0) = 0$ sınırlama mevcut ise EÇÖ yöntemi tutarlı olduğundan $g(\hat{\theta}_U)$, (5.47) şeklinde yazılabilir ve varyansı (5.48) ile bulunur.

$$g(\hat{\theta}_U) \approx g(\theta_0) + g'(\theta_0)(\hat{\theta}_U - \theta_0) \quad (5.47)$$

$$Var(g(\hat{\theta}_U)) \approx g'(\theta_0)^2 Var(\hat{\theta}_U) \quad (5.48)$$

O zaman Wald test istatistiği, (5.49) ile bulunur ve sınırlama sayısına eşit serbestlik dereceli

ki-kare dağılımına sahiptir.

$$W = \frac{g(\hat{\theta}_U)}{g'(\theta_0)\sqrt{Var(\hat{\theta}_U)}} \quad (5.49)$$

6. İMKB ÜZERİNE PANEL GARCH UYGULAMASI

6.1 Giriş

Hemen hemen her finansal çalışmada olduğu gibi, bu çalışmada da verilerin getiri değerleri ele alınmıştır. Finansal araştırmalarda fiyat veya varlık değerleri yerine getiri değerleri daha çok kullanılmaktadır. Getiri değerleri, yatırımcıya yatırım fırsatı için net bir şekilde istediği bilgiyi vermektedir. Ayrıca getiri serilerinin bazı istatistiksel özelliklerinden dolayı, fiyat gibi diğer serilerin yanında bu verilerin ele alınması daha çok kolaylık sağlamaktadır. Basit bir anlamda eğer getiri değeri pozitif ise hissenin fiyatı arttığı, ve negatif ise fiyat azaldığı anlamındadır.

Bir hisse senedinin t zamanındaki fiyatı P_t olmak üzere R_t getiri değeri, (6.1) eşitliğinde belirtildiği gibi hesaplanır.

$$R_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (6.1)$$

Getiri değerleri, ardışık fiyat değerlerinin oran değerleri ifade ettiği için enflasyon etkisinden arınmış durumda ve birçok çalışmada durağan olduğu varsayılmaktadır (Tsay, 2002).

Diğer taraftan piyasa yükseldiği zaman hisse fiyatlarının genel olarak arttığı, ve piyasa düşme eğilimde iken fiyatların düştüğü, günlük gözlemlerden açıkça görülmektedir. O zaman hisse getirisinin genel piyasa ile ilişkisi, hisse getirisinin piyasa endeks getirisi üzerine ilişkilendirilerek açıklanabilir. O halde bu ilişki $i = 1, \dots, N$ olmak üzere (6.2) ile ifade edilebilir (Elton ve Gruber, 1995).

$$R_i = \mu_i + \beta_i R^* + u_i \quad (6.2)$$

Burada yer alan simgeler aşağıda açıklanmıştır.

- R_i : i -inci hisse senedinin getirisi.
- R^* : endeks getiri değeri.
- μ_i : i -inci hisse senedinin getiri değerinin piyasa değişkenliğinden bağımsız bileşeni.
- β_i : R^* endeks getirisinin R_i hisse getirisi üzerindeki beklenen değişkenlik.

Bu (6.2) modeli, tek-endeks (single-index) modelidir. Bu denklem ile hisse getirisi, piyasadan bağımsız ve piyasaya bağımlı olmak üzere iki bileşene ayrılmaktadır. Buradaki β_i katsayısı,

hisse getirisinin piyasa getirisine ne kadar hassas olduğunu göstermektedir. Örneğin, $\beta_i = 0.5$ olması durumunda, piyasa getirisinin %1 yükselişi ile ele alınan hissenin %0.5 yükselmesi beklenecektir.

Ayrıca $Cov(R^*, u_i) = 0$ ve $i \neq j$ için $E(u_i u_j) = 0$ koşulları aranmaktadır. Genel anlamda $Cov(R^*, u_i) = 0$ olması, bir hissenin getirisi ile piyasa getirisinin bağımsızlığı (6.2) denklem ile ne kadar iyi ifade edildiğini göstermektedir. İkinci, $E(u_i u_j) = 0$ koşulunun sağlanması durumunda, hisselerin birlikte hareket etmesinin tek nedeni piyasanın genel değişkenliği olduğu söylenebilir (Elton ve Gruber, 1995).

Yukarıda verilen (6.2) modeli yatay kesit için tanımlanmış olup panel veri için bu model (6.3) şeklinde olacaktır.

$$R_{it} = \mu_i + \beta_i R_t^* + u_{it} \quad (6.3)$$

Ele alınan veri seti ile hisse getirilerinin dinamikleri de araştırılmak amacı ile (6.3) denkleminde hisse getirilerinin bir gecikmeli değerleri dahil edilmiştir. Bu durumda model (6.4) biçimini alacaktır.

$$R_{it} = \mu_i + \gamma_i R_{i,t-1} + \beta_i R_t^* + u_{it} \quad (6.4)$$

O halde tahmin edilecek parametre sayısı $3N$ olacaktır ki, N büyük olduğu durumda yan parametre sorunu ile karşılaşılabilir. Yan parametre sorununun engellenmesi için, (6.4) modelindeki eğim katsayılarının kesite göre sabit olduğu varsayılabilir. Diğer taraftan, varyans denklemindeki katsayı ile bir karışıklığın önüne geçilmesi için, β yerine ϕ simgesi kullanılacaktır. Bu durumda model (6.5) şeklini alır.

$$R_{it} = \mu_i + \gamma_i R_{i,t-1} + \phi R_t^* + u_{it} \quad (6.5)$$

6.2 Veri Yapısı

Bu çalışmada panel veri analizinin uygulanması için, 2000 ile 2005 yılları arasında İMKB’de işlem gören 20 şirketin günlük ağırlıklı ortalama fiyat verileri, ve Ulusal 30 ve Ulusal 100 olmak üzere iki endeks verileri incelenmektedir. Veriler İMKB arşivinden kaynak alınmıştır.

Çalışmada adı geçen hisse senedi isimler ve firma adları Çizelge 6.1’de verilmiştir.

Çizelge 6.1 Bu çalışmada ele alınan hisse kodları ve şirket isimleri

Hisse Kodu	Şirket Resmi Adı	Sektör
AEFES	Anadolu Efes Biracılık ve Malt Sanayii A.Ş.	Gıda, İçki ve Tütün
AKBNK	Akbank T.A.Ş.	Bankalar ve Özel Finans Kurumları
ARCLK	Arçelik A.Ş.	Metal Eşya, Makine ve Gereç Yapım
DOHOL	Doğan Şirketler Grubu Holding A.Ş.	Holdingler ve Yatırım Şirketleri
DYHOL	Doğan Yayın Holding A.Ş.	Holdingler ve Yatırım Şirketleri
ENKAI	Enka İnşaat ve Sanayi A.Ş.	İnşaat ve Bayındırlık
EREGL	Ereğli Demir ve Çelik Fabrikaları T.A.Ş.	Metal Ana Sanayi
FINBN	Finansbank A.Ş.	Bankalar ve Özel Finans Kurumları
FROTO	Ford Otomotiv Sanayi A.Ş.	Metal Eşya, Makine ve Gereç Yapım
GARAN	Türkiye Garanti Bankası A.Ş.	Bankalar ve Özel Finans Kurumları
ISCTR	Türkiye İş Bankası A.Ş.	Bankalar ve Özel Finans Kurumları
KCHOL	Koç Holding A.Ş.	Holdingler ve Yatırım Şirketleri
SAHOL	H.Ö. Sabancı Holding A.Ş.	Holdingler ve Yatırım Şirketleri
SISE	Türkiye Şişe ve Cam Fabrikaları A.Ş.	Holdingler ve Yatırım Şirketleri
TCELL	Turkcell İletişim Hizmetleri A.Ş.	Haberleşme
TOASO	Tofaş Türk Otomobil Fabrikası A.Ş.	Metal Eşya , Makine ve Gereç Yapım
TUPRS	Tüpraş-Türkiye Petrol Rafinerileri A.Ş.	Kimya , Petrol , Kauçuk ve Plastik Ürünler
ULKER	Ülker Gıda Sanayi ve Ticaret A.Ş.	Gıda , İçki ve Tütün
VESTL	Vestel Elektronik Sanayi ve Ticaret A.Ş.	Metal Eşya , Makine ve Gereç Yapım
YKBK	Yapı ve Kredi Bankası A.Ş.	Bankalar ve Özel Finans Kurumları
XU030	İMKB Ulusal 30 Endeksi	
XU100	İMKB Ulusal 100 Endeksi	

Buradan görüldüğü gibi bu çalışmada toplam 2 gıda, 5 banka, 4 metal eşya, 5 holding, 1 inşaat, 1 metal ana sanayi, 1 haberleşme ve 1 kimya sanayi firmaları ele alınmıştır.

Yapı ve Kredi Bankası'nın 2007 yılının Ocak ayında sonuçlanan Koç Bankası'na devir işleminden önce bu tez çalışması için İMKB'ye veri talebinde bulunmuştu. Nihayetinde tez çalışması 2000 – 2005 yılları kapsadığından ve o döneme göre güncel ve geçerli olacağından Yapı ve Kredi Bankası'nın verileri tez çalışmasına dahil edilmeye karar verilmiştir.

Bundan sonra bu çalışmada kolaylık sağlamak amacıyla, hisse senetlerinin kodları kullanılacaktır. Ayrıca 2000 – 2005 yıllarında tatil günleri hariç işlem yapılan toplam gün sayısı Çizelge 6.2'de yer almaktadır.

Çizelge 6.2 Yıl başına borsadaki iş günü sayısı

Yıl	İş Günü Sayısı
2000	246
2001	248
2002	252
2003	246
2004	249
2005	254
Toplam	1495

Buradan tez çalışması 1495 iş gününü kapsadığı için her bir hisse senedi için en fazla 1495 gözlem değeri bulunmaktadır.

6.2.1 İsim Değişikliği Yapılan Hisseler

2000 ve 2005 yılları arasında yukarıda adı geçen hisse senetlerinde isim değişikliği yapılan hisse senetler aşağıda yer almaktadır (İMKB Günlük Bülten, 2000 – 2005).

- ENKA – ENKAI. 19.07.2002 tarihli Borsa Başkanlığı Duyurusunda yer aldığı gibi Enka Holding Yatırım A.Ş.’nin Enka İnşaat ve Sanayi A.Ş. tarafından tüm aktif ve pasifiyle birlikte devralınarak Enka İnşaat bünyesinde birleşmesi nedeniyle, Enka İnşaat tarafından ihraç edilen ve Enka Holding ortaklarına verilen hisse senetlerinin dağıtımına 22.07.2002 tarihinden itibaren başlanmıştır.

Enka İnşaat’ın 22.07.2002 tarihinde birinci seansta referans olarak alınabilecek fiyatı, Enka Holding hisse senetlerinin en son işlem gördüğü ikinci seans ağırlıklı ortalama fiyatının, 1 adet Enka Holding hisse senedi karşılığında verilecek olan Enka İnşaat hisse senedi sayısına (1.1382 adet) bölünmesi suretiyle bulunacaktır.

22.07.2002 tarihinden itibaren ENKA hisse senedinin sırası kapatılmıştır.

- AGIDA – ULKER. 20.02.2004 tarihli Borsa Başkanlığı Duyurusunda yer aldığı gibi Anadolu Gıda Sanayi A.Ş. ile Ülker Gıda Sanayi ve Ticaret A.Ş.’nin, Ülker Gıda bünyesinde birleşmesi nedeniyle Anadolu Gıda ortaklarına verilen Ülker Gıda hisse senetlerinin dağıtımına 23.02.2004 tarihinden itibaren başlanmıştır.

Ülker Gıda’nın 23.02.2004 tarihinde birinci seansta referans olarak alınabilecek fiyatı, Anadolu Gıda hisse senetlerinin en son işlem gördüğü seans ağırlıklı ortalama fiyatının, 1 adet Anadolu Gıda hisse senedi karşılığında verilecek olan Ülker Gıda hisse senedi sayısına (2,91917 adet) bölünmesi suretiyle bulunacaktır.

23.02.2004 tarihinden itibaren AGIDA’nın işlem sırası kapanmıştır.

Bu tez çalışmasında güncel olan hisse kodları, yani Enka İnşaat ve Sanayi için ENKAI ve Ülker Gıda Sanayi ve Ticaret için ULKER kodu kullanılacaktır.

6.2.2 Kayıp Veri

İstatistiksel araştırmalarda veriler ile ilgili en büyük sorunlardan biri, kayıp verinin oluşmasıdır. Bu çalışmada kullanılan verilerde de bazı hisse senetler için çeşitli nedenlerden

dolayı işlem görmediği günler mevcuttur. Hisse senedinin işlem görmediği günün verileri bu çalışma için kayıp veri niteliğindedir. Bu durumlar her hisse için ayrı ayrı ele alınmıştır. Çizelge 6.3'te 2000 – 2005 yıllarında hisse senetlerin işlem görmediği günler belirtmiştir. Buradan anlaşıldığı gibi (Çizelge 6.3) AKBNK, ARCLK, DYHOL, ENKA, FINBN, FROTO, GARAN, ISCTR, SAHOL, SISE, TOASO, ULKER ve VESTL hisse senetlerinin, ve XU030 ve XU100 endekslerinin verilerinde bir eksiklik yoktur.

Çizelge 6.3 Hisse senetlerinin 2000 – 2005 yıllarında işlem yapılan toplam iş günü sayısı

Hisse Kodu	İşlem Yapılan Gün Sayısı	İşlem Görmeyen Gün Sayısı	Açıklama (İşlem Yapılmayan Tarihler)
AEFES	1358	137	24.07.2000'de işlem görmeye başladı
AKBNK	1495	–	
ARCLK	1495	–	
DOHOL	1494	1	11.04.2005
DYHOL	1495	–	
ENKA	1495	–	
EREGL	1494	1	04.10.2005
FINBN	1495	–	
FROTO	1495	–	
GARAN	1495	–	
ISCTR	1495	–	
KCHOL	1493	2	01.02.2005, 12.09.2005
SAHOL	1495	–	
SISE	1495	–	
TCELL	1362	133	11.07.2000'de başladı. 19.06.2002, 03.02.2003, 13-14.10.2004, 01.02.2005
TOASO	1495	–	
TUPRS	1484	11	03-12.04.2000, 12-13.01.2004, 12.09.2005
ULKER	1495	–	
VESTL	1495	–	
YKBNK	1487	8	19-21.06.2002, 03.02.2003, 13-14.10.2004, 01.02.2005, 28.10.2005

Kalan hisse senetlerin işlem sırası kapalı olduğu günlerde o hisseye ilişkin veri bulunmamaktadır. AEFES, DOHOL, EREGL, KCHOL, TCELL, TUPRS ve YKBNK hisselerinin işlem sıraları genellikle, Çizelge 6.4'te belirtildiği günlerde aşağıdaki nedenlerden dolayı kapanmıştır.*

* İMKB, (2000 – 2005), Günlük Bültenler

- AEFES ve TCELL hisseleri 2000 yılının Temmuz ayında işlem görmeye başlamıştır.
- Borsada işlem gören şirketin başka bir şirketi satın alması ile ilgili açıklama borsaya gelene kadar o şirketin hisse işlem sırası İMKB Başkanlığı tarafından kapatılmıştır.
- Borsada işlem gören şirketin alt şirketlerinden biri başka bir şirkete devri yapılmasından dolayı BDDK'dan konuya ilişkin açıklama gelene kadar o şirketin hisse işlem sırası İMKB Başkanlığı tarafından kapatılmıştır.
- Şirketin özelleştirme ihalesi nedeniyle ihale sonuçlarının borsaya ulaşana kadar o şirketin hisse işlem sırası İMKB Başkanlığı tarafından kapatılmıştır.
- Borsada işlem gören şirketin başka bir şirketin özelleştirme ihalesine teklif vermesi nedeniyle ihale sonuçlarının borsaya ulaşana kadar o şirketin hisse işlem sırası İMKB Başkanlığı tarafından kapatılmıştır.
- Borsada işlem gören şirket ile ilgili haberler basında yer alması nedeniyle şirketten konuya ilişkin açıklama gelene kadar işlem sırası İMKB Başkanlığı tarafından kapatılmıştır.
- Borsada işlem gören şirketin halka arz yolu ile özelleştirilmesi ile ilgili sonuçların gelene kadar o şirketin işlem sırası İMKB Başkanlığı tarafından kapatılmıştır.

Bu çalışmada kayıp veriler, model kurma aşamasında göz ardı edilecektir.

6.2.3 Bedelli veya bedelsiz sermaye artırımı

Araştırma için ele alınan hisse senetleri üzerine 2000 – 2005 yıllarında bedelli veya bedelsiz sermaye artırımı yapılmıştır. Yapılan sermaye artırımların yüzdeleri Çizelge 6.4'te verilmiştir.

Bedelli veya bedelsiz, yapılan sermaye artırımlar bir sonraki günün fiyatını etkilemektedir.

Yeni baz fiyat (6.6)'da verilen formül ile hesaplanmaktadır.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Yeni Baz} \\ \text{Fiyat} \end{array} \right) = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Hisse} \\ \text{Senedinin} \\ \text{AOFiyatı} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Rüçhan} \\ \text{Hakkı} \\ \text{Tutarı} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} \text{Eski Hisse} \\ \text{Senedi} \\ \text{Adeti} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Bedelli} \\ \text{Olar. Al.} \\ \text{H.Adedi} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Bedelsiz} \\ \text{Olar. Al.} \\ \text{H.Adedi} \end{array} \right)} \quad (6.6)$$

Örneğin, 17.07.2001 tarihinde DOHOL hisse senedi üzerine %50 bedelsiz ve %120 bedelli sermaye artırımı yapılmıştır. Bir önceki günün ağırlıklı ortalama fiyatı (AOF) 3177 (lot) olarak hesaplanmıştır. O zaman yeni baz fiyat (6.7) şeklinde hesaplanacaktır.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Yeni Baz} \\ \text{Fiyat} \end{array} \right) = \frac{3177 + 1.2}{1 + 1.2 + 0.5} = 1177 \quad (6.7)$$

Çizelge 6.4 Hisse senetlerinin 2000 – 2005 yıllarında yapılan sermaye artırımları*

Hisse	Tarih	Sermaye Artırımı (%)	
		Bedelsiz	Bedelli
AEFES	24.09.2001	100	
	29.09.2003	125	
AKBNK	07.06.2000	100	
	06.07.2001	60	
	12.11.2002	2	
	23.06.2003	47.05882	
	07.06.2004	25	
	01.07.2005	20	
ARCLK	09.06.2000	50	
	31.05.2001	50	
	31.05.2002	60	
	28.05.2003	175	
DOHOL	16.10.2000	40	
	17.07.2001	50	120
	19.11.2002		80
	20.08.2003		30
	25.06.2004	25	
DYHOL	03.07.2000	33	
	05.09.2001	47.4	52.6
	26.08.2002	14	
	29.08.2003	30	
	10.01.2005	83.94244	
ENKAI	22.12.2000	40	
	28.12.2001	42.857	
	22.11.2002	123.16	
	24.12.2003	98.58767	
	10.01.2005	100	
	31.05.2005	50	
EREGL	14.06.2004	800	200
FINBN	29.05.2000	90	
	31.05.2001	61.5977	
	14.09.2001		41.60659
	07.11.2002	29.05644	
	24.12.2003	19.80856	
	27.09.2004	38.7517	
	11.10.2005	61.01694	
FROTO	31.05.2001	150	
	30.09.2003	300	
GARAN	16.07.2001	188.46153	
	09.09.2002	5.56637	
	02.07.2003	3.82571	
	04.10.2004	45.97869	
	11.07.2005	75	
ISCTR	15.05.2000	74	26

* İMKB, (2000 – 2005), Günlük Bültenler.

	15.05.2001	29.5	15.5
	29.12.2003	76	
	13.08.2004	15	
	22.07.2005	20	
KCHOL	31.05.2000	100	
	07.05.2001	33.33333	
	08.05.2002	100	
	04.06.2003	20	
	19.01.2004	187.43788	
	15.08.2005		15
SAHOL	29.03.2000	126	134
	09.02.2001	28.33333	5
	06.05.2002	33.33333	
	24.02.2003	25	
	19.04.2004	20	
SISE	17.01.2000	83.29466	
	16.06.2000	1.4	5.06329
	04.02.2002	160.516	78.342
	10.05.2004	41.4035	
TCELL	04.06.2001	9.9026	
	23.07.2001		89.5618
	30.07.2004	194.92787	
	31.05.2005	25.78582	
TOASO	12.12.2001	150	
	26.05.2003	164.06455	
	18.07.2005	11.11111	
TUPRS	24.09.2001	235	
ULKER	02.07.2001	100	
	30.05.2003	150	
	23.12.2005	1	
VESTL	20.12.2000	3400	
YKBNK	31.05.2000	100	
	30.05.2001	50	

17.07.2001 tarihinde yapılan işlemler sonunda DOHOL hisse senedinin AOF 1566 olarak bulunmuştur. Bu durumda sermaye artırımını dikkate alınmadan hesaplanan getiri değeri - 0.7133, sermaye artırımını ilgili işlemler yapıldıktan sonra hesaplanan getiri değeri ise 0.2795 olarak bulunur.

Eğer sadece %120 bedelli sermaye artırımını yapılmış olsa idi, o zaman yeni baz fiyat 1445 olacaktı ve buna bağlı olarak getiri değeri 0.0804 olarak değişir. Dolayısı ile bundan getiri verileri de, sermaye artırımların yüzdesi ile orantılı olarak etkilenmektedir.

6.3 Dinamik Panel Model Tahmini

Daha önce belirtildiği gibi ele alındığı panel veri 20 yatay kesitten ve en fazla 1495 zamana

göre değişen gözlem sayısından oluşmaktadır. Bu sayı her hisse için kayıp verinin var olmasından dolayı değişmektedir.

Düzenlenen fiyat verilerinden (6.1)'de verilen formül ile hisselerin ve endekslerin getiri verileri hesaplanmıştır ve bu verileri üzerine (6.5) ile verilen model kurulmuştur.

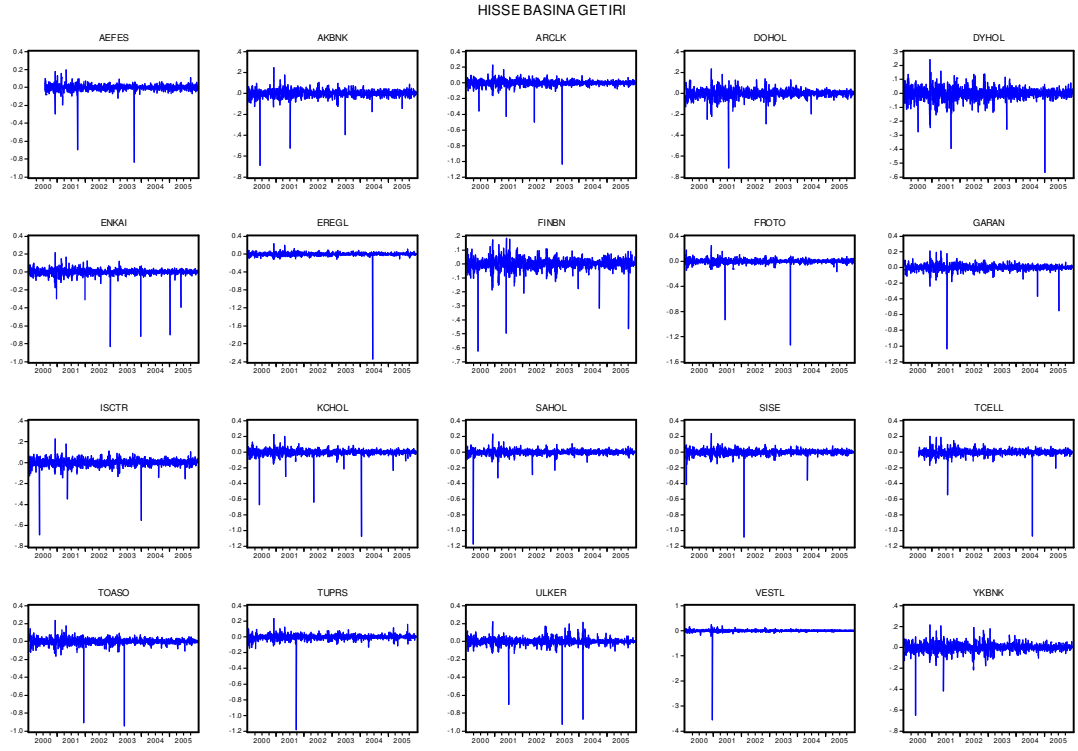
Bu bölümde ilk önce sabit etki panel modeli tahmin edilecektir. Sonra rasgele etki modeli tahmin edilecek. Bulunan sonuçlardan Chow testi ile sabit etki modelindeki bireysel etkiler test edilecek. Ayrıca İMKB'de işlem gören yüzlerce hisse senedinden sadece 20 tanesi ele alınmıştır. Bu durumda rasgele etki modeli daha uygun olacaktır. Bu düşüncenin doğru olup olmadığı Hausman testi ile gösterilecektir.

Yapılan basit regresyon modeli ile Ulusal 30 ve Ulusal 100 getiri değerleri arasında güçlü doğrusal ilişkinin mevcut olduğu gösterilmiştir. Bulunan model $R(XU030)_t = -0.00000251 + 1.0306R(XU100)_t$ şeklinde, ve eğim katsayısı istatistiksel olarak anlamlıdır. F test sonucuna (p-değeri 0'dır) göre modelin anlamlı olduğu belirlenmektedir. Açıklayıcı değişkeninin açıklama oranı (R^2) %99.49 çıkmıştır. Bu yüzden tanımlanan dinamik panel regresyondaki açıklayıcı değişkenlerin içine sadece Ulusal 100 endeksi dahil edilmiştir.

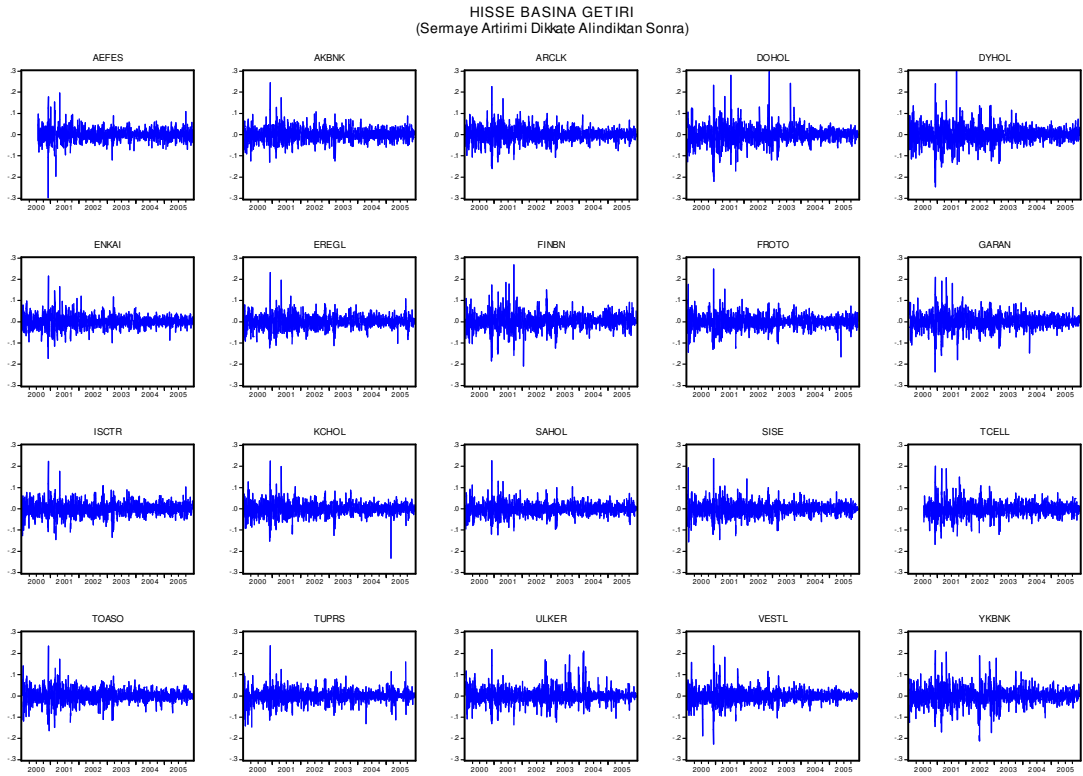
6.3.1 Bağımlı Değişken

Dinamik panel model kurulmasında bağımlı değişken olarak hisse senetlerin getiri verileri ele alınmıştır. Bu değerlerin her kesite göre zaman serileri grafiği Şekil 6.1'de yer almaktadır. Yalnız daha önce belirtildiği gibi yapılan sermaye artırımlar getiri değerlerini etkileme ve sermaye artırımları dikkate alındıktan sonra hesaplanan getiri değerlerin hisseleri göre zaman serileri grafiği Şekil 6.2'de verilmektedir.

Şekil 6.1'de görüldüğü gibi sermaye artırımını dikkate alınmadan getiri verileri hesaplandığı için, sermaye artırımını yapılan günlerde getiri değerleri, normalden göreceli olarak negatif yönde saplantı göstermiştir. Şekil 6.2'de ise bu durum düzelmiştir. Aynı zamanda Şekil 6.2'den görüldüğü gibi DOHOL, DYHOL, FINBN, GARAN, ULKER ve YKBNK hisselerin getiri grafikleri diğerlerine göre daha fazla saplantı göstermektedir. Bu durumda hisse senetleri iki grup olarak ele alınabilir. Birinci grupta AEFES, AKBNK, ARCLK, ENKAI, EREGL, FROTO, ISCTR, KCHOL, SAHOL, SISE, TCELL, TOASO, TUPRS ve VESTL hisse senetleri yer alacaktır. İkinci grupta ise DOHOL, DYHOL, FINBN, GARAN, ULKER ve YKBNK hisse senetleri yer alacaktır.



Şekil 6.1 Hisse başına getiri serileri (sermaye artırımını dikkate alınmadan)



Şekil 6.2 Hisse başına getiri serileri (sermaye artırımını dikkate alınarak)

Bu durumda her bir grup için ve tüm hisseler için genel istatistikler Çizelge 6.5'te yer almaktadır.

Çizelge 6.5 Gruplara göre genel istatistikler

Stats	Genel	Grup1	Grup2
Mean	0.000740	0.000628	0.000997
Median	0.000657	0.000629	0.000737
Maximum	0.298177	0.248772	0.298177
Minimum	-0.296301	-0.296301	-0.246419
Std. Dev.	0.032095	0.029825	0.036798
Skewness	0.172028	0.142095	0.195659
Kurtosis	9.770500	9.270811	9.463052
Sum	21.88962	12.95993	8.929688
Sum Sq. Dev.	30.47713	18.35201	12.12427
Observations	29587	20632	8955

Çizelge 6.5'ten görüldüğü gibi, örneklem ortalamalar pozitif çıkmıştır, yani 2000 – 2005 yıllarında ele alınan hisse senetlerin fiyatları, genel olarak %0.074 artmıştır. Diğer taraftan ikinci grubun örneklem ortalaması birinci gruptaki ortalamadan daha büyük çıkmıştır. Ayrıca ikinci grup için standart sapması biraz daha yüksek çıkmıştır.

Hemen hepsinde çarpıklık 0'a yakın çıkmıştır. Ancak basıklık istatistiği, hepsinde 9'a yakın değer almıştır. Bu da getiri verilerin ince-basık (leptokurtic) özelliğinden kaynaklanmaktadır.

Çizelge 6.6 Birim kök test sonuçları

Method	Genel		Grup1		Grup2	
	Statistic	Prob.	Statistic	Prob.	Statistic	Prob.
Cross-sections	20		14		6	
Null: Unit root						
Levin, Lin & Chu t	-81.4749	0.0000	-69.1259	0.0000	-43.2946	0.0000
Breitung t-stat	-42.4221	0.0000	-37.6275	0.0000	-20.8018	0.0000
Null: Unit root						
Im, Pesaran & Shin W-stat	-81.6875	0.0000	-69.2193	0.0000	-43.4061	0.0000
ADF - Fisher Chi-square	3565.67	0.0000	2522.46	0.0000	1043.21	0.0000
PP - Fisher Chi-square	3447.70	0.0000	2413.15	0.0000	1034.55	0.0000
Null: No unit root						
Hadri Z-stat	1.7867	0.0370	0.5863	0.2789	1.8106	0.0351

Getiri verilere ilişkin birim kök test sonuçları Çizelge 6.6'da verilmiştir. Buna göre “Birim kök vardır” şeklinde kurulan yokluk hipotezi red edilmektedir, yani getiri verileri durağandır. Yalnız en sonunda yazılan Hadri Z istatistiğine göre “Birim kök yoktur” şeklinde kurulan

yokluk hipotezi, tüm hisseler ve ikinci grup için %5 düzeyinde red edilmekte, fakat birinci grup için kabul edilmektedir.

6.3.2 Sabit Etki Modeli

Dinamik sabit bireysel etki modeli biçimi (6.8)'da verilmiştir.

$$R_{it} = \mu_i + \gamma R_{i,t-1} + \varphi R_t^* + u_{it} \quad (6.8)$$

Burada

- R_{it} : i -inci hissenin t zamanındaki getiri değeri,
- R_t^* : XU100 endeksinin t zamanındaki getiri değeri, kesite göre sabit,
- u_{it} : hata terimi,
- μ_i, γ, φ : katsayılarıdır.

Yani (6.8) eşitliği, i -inci hissenin t zamanındaki getiri değerinin, bir gecikmeli değer ile XU100 endeksinin t zamanındaki getiri değeri üzerindeki bireysel etkili panel regresyon modelidir. Bağımlı değişkenin gecikmeli değeri, açıklayıcı değişken olarak alındığı için bu, bir dinamik panel modelidir.

Yukarıda (6.8) ile verilen modelinin LSDV yöntemiyle yapılan tahminleri birinci grup için Çizelge 6.7'de ve ikinci grup için Çizelge 6.8'de yer almaktadır. Buna ek olarak R^2 değeri, birinci grup için 0.437276, ikinci grup için 0.361342 olarak çıkmıştır. Birinci grup için F test istatistiği 1067.28, ve ikinci grup için 722.67 değerini almıştır. Her iki grup için yapılan regresyon modeli, F test istatistiğine göre anlamlıdır. Yalnız (6.8) denkleminin bireysel etkiler t test istatistiğine göre anlamsızdır (Çizelge 6.7 ve Çizelge 6.8s).

Diğer taraftan (6.8) modelindeki bireysel etkiler Chow testi ile sınanabilir. Chow testi ile teorik bilgi Bölüm 4.2.2'de verilmiştir. Bu testin sonuçları Çizelge 6.9'da yer almaktadır. Chow testinin F istatistiği birinci grup için 0.28 ve ikinci grup için 0.61 olarak bulunmuştur. Serbestlik dereceleri ise sırasıyla birinci grup için 14 ve 20602, ve ikinci grup için 6 ve 8941 olmak üzere, test istatistiğine ilişkin p-değeri, her iki grup için sırası ile 0.9961 ve 0.7222 olarak çıkmaktadır. Bu durumda “Bireysel etkiler yoktur” şeklinde kurulan yokluk hipotezi red edilemez, yani bireysel etkiler anlamsızdır.

Çizelge 6.7 Dinamik panel sabit bireysel etki modeli (1. grup)

Variable	Estimate	Std.Error	t Value	Pr > t
AEFES	0.000455	0.000608	0.75	0.4541
AKBNK	0.000468	0.000579	0.81	0.4190
ARCLK	0.000107	0.000579	0.18	0.8539
ENKAI	0.000434	0.000579	0.75	0.4532
EREGL	0.000342	0.000579	0.59	0.5549
FROTO	0.000402	0.000579	0.69	0.4875
ISCTR	0.000141	0.000579	0.24	0.8074
KCHOL	-0.000240	0.000579	-0.42	0.6760
SAHOL	0.000003	0.000579	0.00	0.9962
SISE	0.000120	0.000579	0.21	0.8355
TCELL	-0.000290	0.000607	-0.48	0.6346
TOASO	0.000179	0.000579	0.31	0.7577
TUPRS	-0.000330	0.000581	-0.57	0.5663
VESTL	-0.000330	0.000579	-0.57	0.5672
Getiri(-1)	0.206173	0.005220	39.47	<.0001
XU100	0.657553	0.005490	119.67	<.0001

Çizelge 6.8 Dinamik panel sabit bireysel etki modeli (2. grup)

Variable	Estimate	Std.Error	t Value	Pr > t
DOHOL	0.000116	0.000762	0.15	0.8788
DYHOL	0.000396	0.000761	0.52	0.6031
FINBN	0.001111	0.000761	1.46	0.1447
GARAN	0.000378	0.000761	0.50	0.6199
ULKER	0.000682	0.000761	0.90	0.3703
YKBNK	-0.000340	0.000763	-0.44	0.6584
Getiri(-1)	0.210512	0.008450	24.91	<.0001
XU100	0.723124	0.010900	66.10	<.0001

Çizelge 6.9 Chow Test Sonuçları

F Test for No Fixed Effects				
Grup	Num DF	Den DF	F Value	Pr > F
1.	14	20602	0.28	0.9961
2.	6	8941	0.61	0.7222

6.3.3 Rasgele Etki Modeli

Dinamik panel rasgele etki modelinin biçimi (6.9) ile ifade edilebilir.

$$R_{it} = \mu + \gamma R_{i,t-1} + \phi R_t^* + u_{it} \quad (6.9)$$

Çizelge 6.10 ve Çizelge 6.11’de (6.9) ile verilen rasgele etki modelinin tahminleri yer almaktadır. Tahminlere ilişkin istatistikler Çizelge 6.12’de derlenmiştir. Ayrıca her iki grup için yapılan Hausman test sonuçları Çizelge 6.13’te yer almaktadır.

Çizelge 6.10 Dinamik panel rasgele bireysel etki modeli (1. grup)

Variable	Estimate	Std. Error	t Value	Pr > t
Intercept	0.000104	0.000156	0.67	0.5032
Getiri(-1)	0.206289	0.00522	39.50	<.0001
XU100	0.657552	0.00549	119.70	<.0001

Çizelge 6.11 Dinamik panel rasgele bireysel etki modeli (2. grup)

Variable	Estimate	Std. Error	t Value	Pr > t
Intercept	0.000391	0.000311	1.26	0.2084
Getiri(-1)	0.210705	0.00845	24.94	<.0001
XU100	0.723116	0.01090	66.11	<.0001

Çizelge 6.12 Rasgele etki model tahminlere ilişkin istatistikler

	1. GRUP	2. GRUP
Fit Statistics		
R-Square	0.4372	0.3612
DFE	20615	8946
SSE	10.3134	7.7365
MSE	0.0005	0.0009
Root MSE	0.0224	0.0294
F stat.	1000.90	632.30
Durbin Watson	2.4497	2.4172
Variance Component Estimates for		
CrossSections	0	0
Error	0.000501	0.000865

Çizelge 6.13 Hausman Test Sonuçları

Hausman Test for Random Effects			
Grup	DF	m Value	Pr > m
1.	2	0.81	0.6686
2.	2	0.90	0.6377

İlk önce Hausman test sonuçları ele alınırsa (Çizelge 6.13) her iki grup için “Rasgele etki modeli daha uygundur” şeklinde kurulan yokluk hipotezi kabul edilmekte ve bu durumda her iki grup için rasgele etki modeli daha uygundur. Diğer taraftan İMKB’de işlem gören yüzlerce hisse senedinden sadece 20 tanesinin ele alınması, rasgele etki modelinin anlamlı olacağının göstergesidir ki, bu durum test sonuçları ile ispatlanmış oldu.

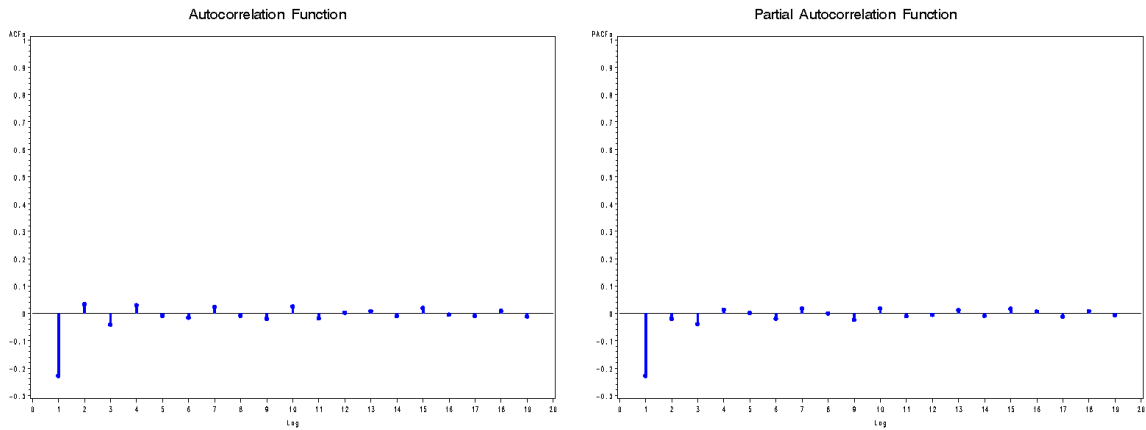
Çizelge 6.10 ve Çizelge 6.11’den görüldüğü gibi iki grubun tahminleri karşılaştırılırsa; ikinci gruptaki getiri değerlerini, Ulusal 100 endeksinin getiri değerleri daha fazla etkilemektedir. Yani piyasa getirisi %1 arttığında, birinci gruptaki hisselerin %0.6576 yükselmesi ve ikinci gruptaki hisselerin %0.7231 yükselmesi beklenecektir. Ayrıca birinci gruptaki hisseler fiyatına, bir önceki dönem fiyatı %20.63 oranında etkilemektedir. Aynı şekilde ikinci gruptaki hisselerin fiyatı %21.07 oranında bir önceki döneme bağlıdır.

Çizelge 6.12’de belirtildiği gibi iki grup için tahmin edilen rasgele etki modellerin R^2 değerleri sırasıyla 0.4372 ve 0.3612’dir. F test istatistikleri ise sırası ile 1001 ve 632 değerler almaktalar ve bu değerler, “Kurulan model anlamsızdır” şeklinde tanımlanan yokluk hipotezini red etmesi yeteri derecede büyüktürler.

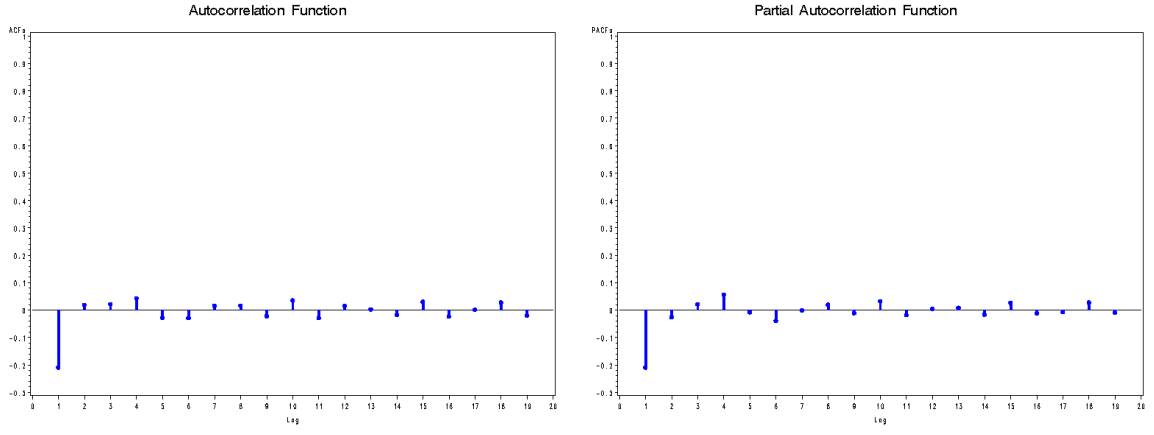
Çizelge 6.12’deki son iki satırda ise rasgele etki modele ilişkin varyans bileşenleri yer almaktadır. Buna göre σ_α^2 bileşeni her iki grup için 0 değerini almakta; ve σ_u^2 bileşeni, birinci grup için 0.000501 ve ikinci grup için 0.000865 değerini almaktadır. İkinci gruba daha fazla sapması olan hisseler dahil edildiği için ikinci grubun hata varyansı daha büyük çıkmıştır.

6.4 Rasgele Etki Modelinin Hata Terimlerinin Test Edilmesi

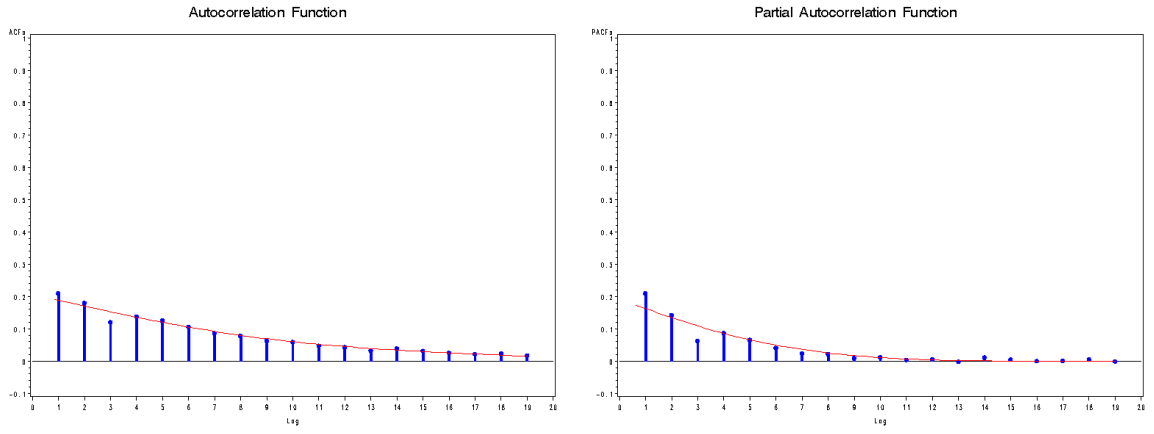
Kurulan modeldeki hata terimlerinde seri korelasyonun ve değişen varyansın var olup olmadığı, hata terimlerinin test edilmesiyle belirlenir. Bu durumda hata terimlerin ve hata karelerinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon değerleri ile ARCH LM testi sonuçları ele alınacaktır.



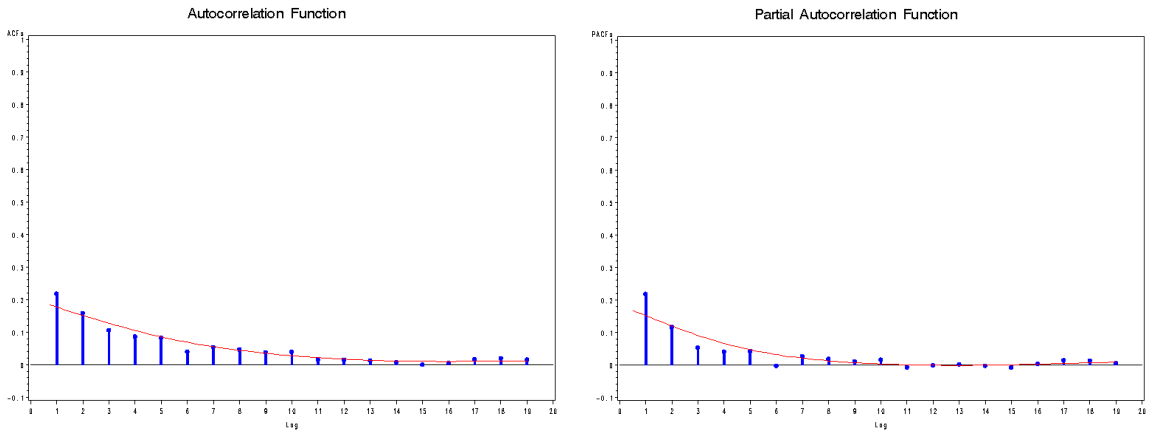
Şekil 6.3 Hata terimlerinin ACF ve PACF grafiği (1. grup)



Şekil 6.4 Hata terimlerinin ACF ve PACF grafiği (2. grup)



Şekil 6.5 Hata karelerinin ACF ve PACF grafiği (1. grup)



Şekil 6.6 Hata karelerinin ACF ve PACF grafiği (2. grup)

İlk önce hata terimlerinin ACF ve PACF grafiklerin ele alınsın. Her iki grup için hem 1 gecikmeli otokorelasyon, hem de 1 gecikmeli kısmi otokorelasyon değerleri mutlak değerce büyük çıkmıştır. Hepsinde bu değer negatiftir. Ayrıca model istatistiklere bakılırsa (Çizelge 6.12) Durbin Watson istatistiği her iki grup için 2.4'e yakın değer almıştır. Bu durumda hata terimleri arasında ardışık negatif korelasyon vardır, yani tahmini yapılması gereken modelin tanımına MA(1) sürecinin dahil edilmesi daha uygundur.

Şekil.6.5 ve Şekil 6.6'da hata karelerinin ACF ve PACF grafikleri yer almaktadır. Grafiklerden görüldüğü gibi (Şekil 6.5 ve Şekil 6.6), her iki grup için otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon değerleri genel olarak azalmaktadır. Bu da ARMA(1, 1) sürece işaret etmektedir; ve buna göre hata terimlerinin GARCH(1, 1) modeline uygun olduğu söylenebilir.

Çizelge 6.14 Hata terimleri üzerine ARCH-LM test sınanması

1. GRUP			2. GRUP	
Order	LM	Pr > LM	LM	Pr > LM
1	915.93	<.0001	427.20	<.0001
2	1318.17	<.0001	543.68	<.0001
3	1392.92	<.0001	567.80	<.0001
4	1538.67	<.0001	581.81	<.0001
5	1621.88	<.0001	597.13	<.0001
6	1653.78	<.0001	597.18	<.0001
7	1665.85	<.0001	603.25	<.0001
8	1675.60	<.0001	606.25	<.0001
9	1677.48	<.0001	607.22	<.0001
10	1680.02	<.0001	609.35	<.0001
11	1680.40	<.0001	609.80	<.0001
12	1681.01	<.0001	609.82	<.0001

Hata terimlerinin ARCH-LM test sonuçlarına (Çizelge 6.14) göre hata terimlerinde GARCH etkisinin var olduğu söylenebilir. “Hata terimlerinde ARCH etkisi yoktur” yokluk hipotezi red edilmektedir. Her iki grubun test istatistikleri, gecikme değerleri arttıkça artmaktadır, bu durumda p-değerleri daha da azalacaktır. Dolayısı ile ARCH-LM test tanımına göre hata kareleri, sonsuz gecikmeli değerlerin lineer bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Diğer taraftan GARCH(1, 1) modeli ARCH(∞) şeklinde yazılabildiğine göre, hata terimlerinin GARCH(1, 1) modeline uygun olduğu sonucuna varılmaktadır.

6.5 Koşullu Değişen Varyansın Modellenmesi

Bir önceki alt bölümde elde edilen sonuçlara göre panel veri setine uygun panel GARCH

modeli (6.10) ve (6.11)'de verilmiştir. Bu iki model tanımı sırasıyla Bölüm 5'te tanımlanan Model C ve Model D'ye özdeştir. Sadece değişkenler farklı biçimde yazılmıştır.

$$\begin{aligned} R_{it} &= \mu + \gamma R_{i,t-1} + \phi R_t^* + u_{it} - bu_{i,t-1}; & i=1,...,20, & t=1,...,T \\ h_{it} &= \omega_i + \alpha u_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} R_{it} &= \mu + \gamma R_{i,t-1} + \phi R_t^* + u_{it} - bu_{i,t-1}; & i=1,...,N, & t=1,...,T \\ h_{it} &= \omega + \alpha u_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1} \end{aligned} \quad (6.11)$$

(6.10) modelinin varyans denkleminde bireysel etkiler mevcuttur. (6.11) modelinin varyans denklemi ortak sabit terimlidir.

Model tahminleri Bölüm 5'te anlatılan EÇO yöntemi ile yapılmıştır. Sayısal analiz için Levenberg-Marquardt algoritması kullanılmıştır. Tahmin sonuçları Model C (6.10) için sırasıyla Çizelge 6.15 ve Çizelge 6.16'da; Model D (6.11) için sırasıyla Çizelge 6.17 ve Çizelge 6.18'de ve bu sonuçlara ilişkin istatistikler Çizelge 6.19'da yer almaktadır.

Varyans denklemindeki bireysel etkilerin mevcut olduğu (6.10) modelinde $i = 1, ..., N$ olmak üzere her iki grup için tüm ω_i 'ler sıfıra çok yakın değer almış olmasına rağmen sıfırdan büyük ve t test istatistiğine göre anlamlıdır (Çizelge 6.15 ve Çizelge 6.16). Ayrıca varyans denkleminin kalan iki katsayısı da pozitifdir. Bu durumda varyans denklemi için katsayıların pozitif olma koşulu sağlanmaktadır. Varyans denklemindeki eğim katsayıların toplamı birinci grup için 0.904492 ve ikinci grup için 0.947432 olup 1'den küçüktür. Bu durumda GARCH(1, 1) modelinde aranan $\alpha + \beta < 1$ koşulu da sağlanmaktadır.

Ortalama denklemindeki katsayılar ele alınırsa hisselerin bir gecikmeli getiri değerlerinin önündeki katsayı 1. grup için 0.37454 ve 2. grup için 0.405809 olarak bulunması, hissenin bir önceki değerinin bir sonraki değerini pozitif yönde sırasıyla %37.45 ve %40.58 yüzdesi ile etkilediğini göstermektedir. Endeks getiri değişkeninin katsayısı iki grup sırası ile 0.67100 ve 0.755955 olarak çıkması, endeks verilerinin hisse değerlerini pozitif yönde %67.1 ve %75.6 oranı ile etkilediğinin göstergesidir. Yani endeksin %1 artması durumunda hisse fiyatı, 1. grup için %1'in %67.1, yani %0.671 artması, ve 2. grup için %0.756 artması beklenecektir. MA(1) terimin katsayısı ise sırasıyla 0.3888 ve 0.4089 olarak bulunmuştur ve anlamlıdır. Yalnız ortalama denklemindeki sabit terim t test istatistiğine göre 1. grup için anlamlı ama ikinci grup için anlamsız çıkmıştır.

Çizelge 6.15 Panel GARCH(1, 1) modeli: Model C, 1. grup

Variable	Estimate	Std. Error	t Value	Pr > t
Mean Equation				
Intercept	-0.00027	0.000075	-3.52	0.0004
Getiri(-1)	0.37454	0.00537	69.75	<.0001
XU100	0.67100	0.00508	132.00	<.0001
MA(1)	0.388802	0.00818	47.50	<.0001
Variance Equation				
AEFES	0.000062	6.28E-06	9.90	<.0001
AKBNK	0.000041	4.08E-06	10.13	<.0001
ARCLK	0.000048	4.59E-06	10.39	<.0001
ENKAI	0.000049	4.89E-06	10.12	<.0001
EREGL	0.000044	4.13E-06	10.74	<.0001
FROTO	0.000046	4.60E-06	10.01	<.0001
ISCTR	0.000037	3.80E-06	9.74	<.0001
KCHOL	0.000055	4.69E-06	11.73	<.0001
SAHOL	0.000031	3.07E-06	10.13	<.0001
SISE	0.000044	4.25E-06	10.32	<.0001
TCELL	0.000057	5.64E-06	10.04	<.0001
TOASO	0.000046	4.74E-06	9.63	<.0001
TUPRS	0.000053	5.02E-06	10.61	<.0001
VESTL	0.000030	3.15E-06	9.37	<.0001
ERR(-1)^2	0.172605	0.00847	20.39	<.0001
GARCH(-1)	0.731887	0.01330	55.20	<.0001

Çizelge 6.16 Panel GARCH(1, 1) modeli: Model C, 2. grup

Variable	Estimate	Std. Error	t Value	Pr > t
Mean Equation				
Intercept	-0.00009	0.000127	-0.73	0.4664
Getiri(-1)	0.405809	0.00877	46.28	<.0001
XU100	0.755955	0.00997	75.82	<.0001
MA(1)	0.408877	0.0132	30.87	<.0001
Variance Equation				
DOHOL	0.000053	7.38E-06	7.16	<.0001
DYHOL	0.000082	0.000011	7.26	<.0001
FINBN	0.000068	9.25E-06	7.40	<.0001
GARAN	0.000065	7.88E-06	8.30	<.0001
ULKER	0.000079	0.000010	7.69	<.0001
YKBNK	0.000078	9.65E-06	8.11	<.0001
ERR(-1)^2	0.303655	0.0211	14.39	<.0001
GARCH(-1)	0.643777	0.0240	26.78	<.0001

Çizelge 6.17 Panel GARCH(1, 1) modeli: Model D, 1. grup

Parameter	Estimate	Std. Error	t Value	Pr > t
Mean Equation				
Intercept	-0.00025	0.000077	-3.21	0.0013
Getiri(-1)	0.374806	0.00543	69.03	<.0001
XU100	0.669304	0.00511	130.88	<.0001
MA(1)	0.386583	0.00823	46.97	<.0001
Variance Equation				
Intercept	0.000041	3.08E-06	13.44	<.0001
GARCH(-1)	0.167040	0.00836	19.97	<.0001
ERR(-1)^2	0.746353	0.0131	57.17	<.0001

Çizelge 6.18 Panel GARCH(1, 1) modeli: Model D, 2. grup

Parameter	Estimate	Std. Error	t Value	Pr > t
Mean Equation				
Intercept	-0.00011	0.000128	-0.82	0.411
Getiri(-1)	0.406165	0.00879	46.22	<.0001
XU100	0.754596	0.00993	75.99	<.0001
MA(1)	0.408045	0.0132	30.83	<.0001
Variance Equation				
Intercept	0.000066	7.40E-06	8.98	<.0001
GARCH(-1)	0.291322	0.0205	14.22	<.0001
ERR(-1)^2	0.658730	0.0235	27.99	<.0001

Çizelge 6.17 ve Çizelge 6.18’de yer alan Model D’ye göre yapılan tahminlerde de varyans denklemindeki katsayılar pozitif olma koşulu sağlanmaktadır. Ayrıca GARCH(1, 1) modeli için aranan $\alpha + \beta < 1$ koşulu da sağlanmakta; iki katsayının toplamı, birinci grup için 0.913393 ve ikinci grup için 0.950052 olup birden küçüktür. Varyans denklemindeki tüm katsayılar t istatistiğine göre anlamlıdır.

Ortalama denklemindeki rasgele etki modelinin birinci eğim katsayısı 0.3748 ve 0.4062 olarak bulunmuştur. Bu durumda hisselerin 1 gecikmeli değeri, bir sonraki değerini pozitif yönde %37.48 ve %40.62 oranı ile etkilemektedir. Yani hisse fiyatı %1 artması durumunda bir sonraki fiyatın, birinci grup için %0.3748 artması ve ikinci grup için %0.4062 artması beklenir. Ayrıca endeks verileri, hisse değerlerini aynı yönde %66.93 ve %75.46 oranında etkilemektedir. MA(1) terimleri her iki grup için anlamlı bulunmuştur. Yalnız Model C’de olduğu gibi, burada da ortalama denklemindeki sabit terim birinci grup için anlamlı ve ikinci grup anlamsız çıkmıştır.

Çizelge 6.19 Panel GARCH(1, 1) model tahminlere ilişkin istatistikler

Statsitics	1. GRUP		2. GRUP	
	Model C (Çizelge 6.15)	Model D (Çizelge 6.17)	Model C (Çizelge 6.16)	Model D (Çizelge 6.18)
Total Obs.	20618	20618	8949	8949
DF Model	20	7	12	7
DF Error	20598	20611	8937	8942
R-Square	0.4870	0.4870	0.4214	0.4214
Adj. R-Square	0.4865	0.4869	0.4207	0.4210
SSR	8.9238	8.9239	5.1036	5.1037
SSE	9.4002	9.4003	7.0074	7.0076
MSE	0.000456	0.000456	0.000784	0.000784
Root MSE	0.0214	0.0214	0.0280	0.0280
F stat.	977.70	2795.20	542.41	930.36
Log likelihood	51929.64	51873.62	20678.53	20669.41
AIC	-5.0354	-5.0312	-4.6187	-4.6178
SC	-5.0277	-5.0285	-4.6092	-4.6123
Durbin Watson	2.0067	2.0009	2.0048	2.0036

Her iki modelinin karşılaştırılması yapılırsa, aşağı yukarı katsayı değerleri birbirine çok yakın çıkmaktadır. Aynı zamanda diğer istatistikler de birbirine çok yakın değer almaktadır (Çizelge 6.19). Yalnız çok az bir fark ile Model D'nin düzeltilmiş R^2 değeri biraz daha büyüktür, ancak diğer taraftan çok az bir fark ile Model C'nin Akaike enformasyon kriteri daha küçük değer almakta ve olabilirlik fonksiyonu daha büyük değer almakta (Çizelge 6.19). Akaike enformasyon kriteri, model seçiminde bir kriter olduğuna göre bu değerler göz önüne alınırsa Model C (6.10) daha uygundur sonucuna varılır. Diğer taraftan (6.10) modelindeki varyans denklemindeki bireysel etkiler test edilip çıkan sonuçlara göre uygun model seçilebilir.

6.5.1 Varyans Denklemindeki Bireysel Etkilerin Test Edilmesi

Çizelge 6.15 – Çizelge 6.18'de verilen tahminler arasında seçim yapmak için Çizelge 6.15 ve Çizelge 6.16'da tahmin değerleri verilen bireysel etkilerin test edilmiştir. Genel olarak $i = 1, \dots, N$ olmak üzere " $\omega_i = 0$ " şeklinde, yani "Varyans denkleminde bireysel etkiler yoktur" biçiminde tanımlanan yokluk hipotezini sınamak için olabilirlik oran testi ile Wald testi uygulanmıştır.

Olabilirlik oran test sonuçları Çizelge 6.20'de yer almaktadır. Test sonuçlarına göre "Varyans denkleminde bireysel etkiler yoktur" şeklinde kurulan yokluk hipotezi her iki grup için red edilmekte, bu durumda varyans denkleminde bireysel etkiler anlamlıdır.

Çizelge 6.20 Olabilirlik oran testi

Grup	DF	LR	Pr > LR
1.	14	112.04	0.0000
2.	6	18.24	0.0057

Çizelge 6.21 Wald test sınaması

Grup	Cross ID	DF	W	Pr > W
1	AEFES	1	9.8997	0.0017
1	AKBNK	1	10.1260	0.0015
1	ARCLK	1	10.3877	0.0013
1	ENKAI	1	10.1235	0.0015
1	EREGL	1	10.7424	0.0010
1	FROTO	1	10.0096	0.0016
1	ISCTR	1	9.7379	0.0018
1	KCHOL	1	11.7325	0.0006
1	SAHOL	1	10.1345	0.0015
1	SISE	1	10.3187	0.0013
1	TCELL	1	10.0421	0.0015
1	TOASO	1	9.6270	0.0019
1	TUPRS	1	10.6094	0.0011
1	VESTL	1	9.3708	0.0022
2	DOHOL	1	7.1596	0.0075
2	DYHOL	1	7.2614	0.0070
2	FINBN	1	7.4018	0.0065
2	GARAN	1	8.2998	0.0040
2	ULKER	1	7.6905	0.0056
2	YKBK	1	8.1053	0.0044

Wald test sonuçlarına göre yokluk hipotezi red edilmekte (Çizelge 6.21). Bu durumda varyans denkleminde bireysel etkiler mevcuttur. O zaman (6.10) modeli ele alınan veri için en uygun model olacaktır. Aynı sonuç Akaike enformasyon kriteri ile elde edilmiştir (Çizelge 6.19).

6.5.2 Hata Terimlerinin Test Edilmesi

Bir önceki alt bölümde bireysel etkiler test edildikten sonra anlamlı olduğu sonucuna varılmıştır. Bu durumda her iki grup için uydu model olarak Model C seçilmiştir.

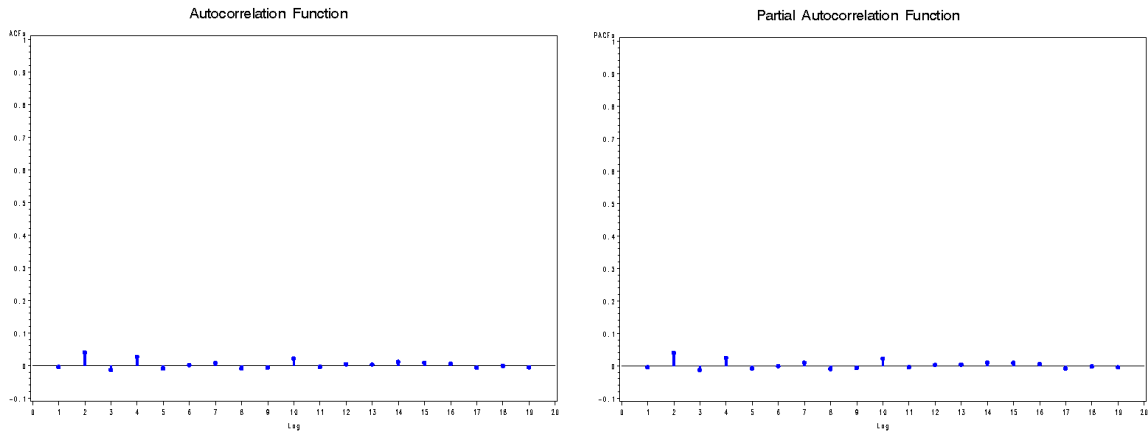
Model C için yapılan tahminler Çizelge 5.15 ve Çizelge 6.16'da yer almaktadır. Bu tahminlere göre hesaplanan standartlaştırılmış hata terimleri üzerine yapılan ARCH-LM test sonuçları Çizelge 6.22'de yer almaktadır.

Çizelge 6.22 ARCH-LM test sonuçları

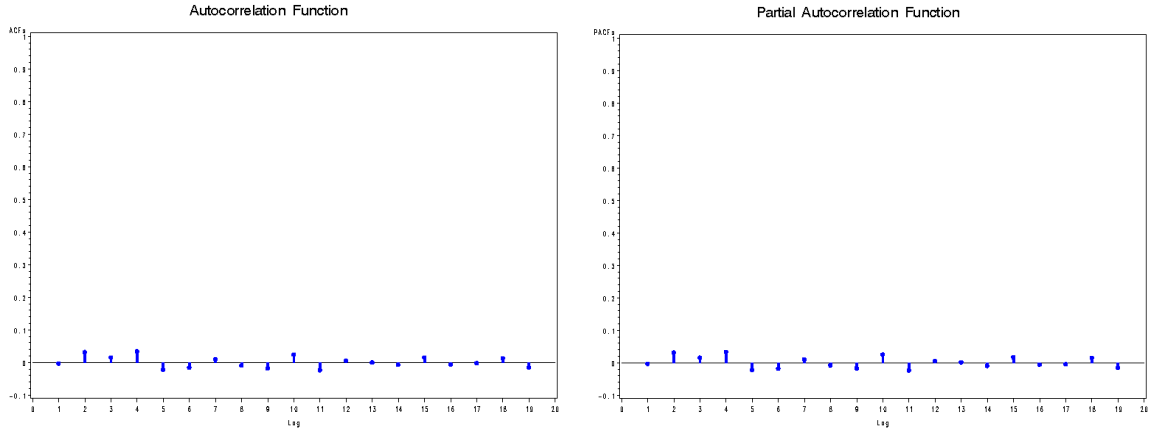
Order	1. GRUP		2. GRUP	
	LM	Pr > LM	LM	Pr > LM
1	0.8491	0.3568	0.0432	0.8354
2	1.3478	0.5097	0.5637	0.7544
3	4.8714	0.1815	1.6444	0.6494
4	5.9294	0.2045	2.6300	0.6215
5	6.0921	0.2974	3.4792	0.6265
6	6.5422	0.3653	3.4852	0.7459
7	6.5425	0.4780	3.8130	0.8010
8	6.5910	0.5813	3.9599	0.8607
9	6.7780	0.6602	3.9951	0.9117
10	7.5684	0.6709	4.5342	0.9200
11	8.7748	0.6427	4.5509	0.9510
12	8.8890	0.7124	4.9118	0.9609

Test sonuçlarına göre her iki grup için “Hata terimlerde ARCH etkisi yoktur” şeklinde tanımlanan yokluk hipotezi kabul edilmektedir. GARCH(1, 1) modellenmeden önce yapılan ARCH-LM test sonuçlarına (Çizelge 6.14) göre hata terimlerde ARCH etkisi anlamlı bulunmuştu. Bu durumda ele alınan verideki oynaklık GARCH(1, 1) ile modellenmektedir.

Şekil 6.7 ve Şekil 6.8’de panel GARCH(1, 1) modelinin standartlaştırılmış hata terimlerinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon grafikleri yer almaktadır. Bu grafiklerde görüldüğü gibi ACF ve PACF çok küçük değerler almaktadır. Ayrıca Çizelge 6.19’da verilen Durbin-Watson test istatistikleri 2’ye çok yakın bir değer almakta, yani hata terimlerde ardışık bağımlılık yoktur. Bu durumda MA(1) süreci, hata terimlerdeki seri korelasyonunu yeterli derecede açıklayabilmektedir.



Şekil 6.7 Panel GARCH(1, 1) hata terimlerinin ACF ve PACF grafiği (1. grup)



Şekil 6.8 Panel GARCH(1, 1) hata terimlerinin ACF ve PACF grafiği (2. grup)

7. SONUÇLAR

Çalışma dönemi, 2000 – 2005 yıllarını kapsamaktadır. Bu yıllar, 2001 krizini içerdiğinden, bundan sonraki yıllar, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nın kendini toparlama yılları olarak görülebilir. Yalnızca ekonomik unsurlar değil, siyasi bazı olayların da borsa üzerinde ciddi etkileri olduğu görülmektedir. Bu etkilerin borsa üzerinde derin izlenimlerinin olması, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nın 23 yıldır faaliyet gösteren, daha genç bir borsa olmasına ve en önemlisi, Türkiye'nin ekonomi alanında gelişen bir ülke olmasına bağlanabilir.

Bu çalışmada İMKB'den alınan 20 hisse senedinin 2000 – 2005 yıllarındaki fiyat getiri verileri ele alınmıştır. Bu verilerin getiri değerleri üzerine yapılan incelemede, veri setinin genel ortalamasının sıfırdan büyük olduğu görülmekte, ve bu durum, hisse senetlerinin fiyatlarının genel eğiliminde artış olduğunu göstermektedir. Ayrıca hisse getirilerinin sapmalarına göre hisseler iki gruba ayrılmıştır. Model tahminler ve test istatistikleri bu iki gruba göre yapılmıştır.

Ele alınan veri seti üzerine dinamik panel regresyon modeli kurulmuş, ve yapılan testler ile dinamik panel modelinin, rasgele etki modeline uygun olduğu sonucuna varılmıştır. Bu model için bağımlı değişken olarak hisselerin getiri değerleri ele alınmıştır. Açıklayıcı değişken olarak bağımlı değişkeninin bir gecikmeli değerleri ve Ulusal 100 endeksinin getiri değerleri alınmıştır. Ulusal 30 ve Ulusal 100 endeksinin verileri arasında aynı yönde güçlü doğrusal ilişki saptandığından modele sadece birinin, Ulusal 100 endeksinin verileri dahil edilmiştir. Ele alınan hisseler, 2000 – 2005 döneminde genellikle Ulusal 100 endeksinin içinde yer almıştır.

Tahmin edilen modelde GARCH etkisinin olup olmadığı araştırılırken hata terimlerinde koşullu değişen varyansın mevcut olduğu ve bu koşullu değişen varyansın GARCH(1, 1) modeline uygun olduğu saptanmıştır.

Model tahmini, en çok olabilirlik yöntemi için geliştirilen Levenberg-Marquardt algoritma ile yapılmıştır. Burada en çok olabilirlik yönteminin teorik tahmin edicileri bulunamayacağından sayısal çözüme başvurulmuştur.

Bu çalışmada model seçimi için, ilk önce ortalama denklemindeki bireysel etkiler test edilmiş ve anlamsız bulunmuştur. Daha sonra varyans denklemindeki bireysel etkiler test edilmiş ve varyans denkleminde bireysel etkilerin mevcut olduğu neticesi elde edilmiştir. Bu durumda en uygun görülen modelin tahminleri, birinci grup için Çizelge 6.15'te ve ikinci grup için Çizelge

6.16'da yer almaktadır. Kısaca, ortalama denklemiindeki sabit terimlerin homojen olan ve varyans denklemiindeki sabit terimlerin heterojen olan, aşağıda biçimi verilen, Model C üzerine karar kılınmıştır.

$$R_{it} = \mu + \gamma R_{i,t-1} + \phi R_t^* + u_{it} - bu_{i,t-1}; \quad i = 1, \dots, 20, \quad t = 1, \dots, T$$

$$h_{it} = \omega_i + \alpha u_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1}$$

Böylece oynaklık olgusunun, İMKB verileri üzerinde panel GARCH modeli ile açıklanabilmesi, yapılan model tahminleri ile oynaklık için öngörü yapılmasına olanak sağlamaktadır.

Bu çalışma, İMKB için, bundan sonra yapılacak panel GARCH modellemelerine öncülük etmesi beklenebilir. Farklı hisse senetleri için bu çalışma genişletilebilir ve farklı modeller için farklı kodlar yazılarak çalışma geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- Amemiya, T., (1971), "The Estimation of the Variances in a Variance-Components Model", *International Economic Review*, 12(1):1-13.
- Anderson, T. W. ve Hsiao, C., (1982), "Formulation and Estimation of Dynamic Models Using Panel Data", *Journal of Econometrics*, 18:47-82.
- Arellano, M. ve Bond, S., (1991), "Some Tests of Specification for Panel Data: Monte Carlo Evidence and an Application to Employment Equations", *The Review of Economic Studies*, 58(2):277-297.
- Bakry, W. K., (2006), "A Panel in GARCH Analysis of Stock Return Volatility in an Emergency Market: A Case Study of Egypt", Doktora Tezi, University Of Western Sydney, School of Economics and Finance, (yayınlanmamış).
- Baltagi, B. H., (1995), *Econometric Analysis Of Panel Data*, John Wiley & Sons, New York.
- Bhargava, A. ve Sargan, J. D., (1983), "Estimating Dynamic Random Effects Models from Panel Data Covering Short Time Periods", *Econometrica*, 51(6):1635-1659.
- Bollerslev, T., (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, 31:307-327.
- Bollerslev, T., Engle, R. F. ve Nelson, D. B., (1994), *Handbook of Econometrics Volume 4*, (Derl. R. F. Engle ve D. L. McFadden), Elsevier, North-Holland.
- Brooks, C., (2005), *Introductory Econometrics For Finance*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Cermeno, R. ve Grier, K. B., (2001a), "Modeling GARCH Processes in Panel Data: Monte Carlo Simulations and Applications to the Cases of Investment and Inflation", (yayınlanmamış).
- Cermeno, R. ve Grier, K. B., (2001b), "Modeling GARCH Processes in Panel Data: Theory, Simulations and Examples", LACEA 6th Annual Meeting, 18-20 Oct. 2001, Montevideo.
- Cermeno, R. ve Sanin, M. E., (2005), "Exchange Rate Arrangements and Volatility of Real Exchange Rate Depreciation: Panel Evidence for the G7 and 8 Latin American Countries", LACEA 10th Annual Meeting, 27-29 Oct. 2005, Paris.
- Deuskar, P., Gupta, A. ve Subrahmanyam, M. G., (2008), "Liquidity Effect in OTC Options Markets: Premium or Discount?", *Social Science Research Network*, (1095372).
- Drakos, K. ve Goulas, E., (2006), "Investment and Conditional Uncertainty: The Role of Market Power, Irreversibility, and Returns-to-Scale", *Economics Letters*, 93(2):169-175.
- Elton, J. E. ve Gruber, M. J., (1995), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Engle, R. F., (1982), "Autoregressive Condition Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50:987-1008.
- Engle, R. F., (1984), *Handbook of Econometrics Volume 2*, (Derl. Z. Griliches ve M. D. Intriligator), Elsevier, North-Hollnad.
- Greene, W. H., (2003), *Econometric Analysis*, Pearson Education, New Jersey.

- Gujarati, D. N., (2004), Basic Econometrics, The McGraw-Hill Companies, New York.
- Hausman, J. A., (1978), "Specification Tests in Econometrics", *Econometrica*, 46(6):1251-1271.
- Hondroyannis, G., Swamy, P.A.V.B., Tavlasi, G. ve Ulan, M., (2005), "Some Further Evidence on Exchange-Rate Volatility and Exports", Bank of Greece, Working Paper (28).
- Hsiao, C., (2002), Analysis of Panel Data, Cambridge University Press, New York.
- Hsiao, C., Pesaran, M. H. ve Tahmiscioglu, A. K., (2002), "Maximum Likelihood Estimation Of Fixed Effects Dynamic Panel Data Models Covering Short Time Periods", *Journal of Econometrics*, 109:107-150.
- İMKB, (2000 – 2005), Günlük Bülten, İMKB, İstanbul.
- Lombardi, M. J. ve Gallo, G. M., (2002), "Analytic Hessian Matrices and the Computation of FIGARCH Estimates", Università degli Studi di Firenze, Working Papers 2002(3).
- Maddala, G. S., (1971), "The Use of Variance Components Models In Pooling Cross Section and Time Series Data", *Econometrica*, 39(2):341-358.
- Maddala, G. S., (1993), The Econometrics of Panel Data Volume I, Edward Elgar Publishing, Vermont.
- Maddala, G. S., (1993), The Econometrics of Panel Data Volume II, Edward Elgar Publishing, Vermont.
- Margiora, P. ve Panaretos, J., (2001), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models and the Dynamic Structure of the Athens Stock Exchange", Munich Personal RePEc Archives, 2007(6358).
- MathWorks, (2001), Using MATLAB Version 6, The MathWorks Inc., Massachusetts.
- Nerlove, M., (1971), "Further Evidence on The Estimation Of Dynamic Economic Relations From A Time Series Of Cross Sections", *Econometrica*, 39(2):359-382.
- Park, H. M., (2005), "Linear Regression Models for Panel Data Using SAS, STATA, LIMDEP, and SPSS", (yayınlanmamış).
- Plümper, T. ve Troeger, V. E., (2004), "External Effects of Currency Unions", Wissenschaftszentrum Berlin, 2004(06).
- Plümper, T. ve Troeger, V. E., (2006), "Fear of Floating and the External Effects of Currency Unions", The Institute for International Integration Studies Discussion Paper Series, (181).
- Ranganathan, A., (2004), "The Levenberg-Marquardt Algorithm", (yayınlanmamış).
- Sermaye Piyasası Kanunu, (1981), Resmi Gazete (17416), 30 Temmuz 1981.
- TSPAKB, (2006), "Menkul Kıymetler ve Diğer Sermaye Araçları", İleri Düzey Lisanslama Eğitim Notları, TSPAKB.
- Tsay, R. S., (2002), Analysis of Financial Time Series, John Wiley & Sons, New York.
- Türk Ticaret Kanunu, (1956), Resmi Gazete, (9353), 09 Temmuz 1956.
- Wooldridge, J. M., (2002), Econometric Analysis Of Cross Section and Panel Data, The MIT

Press, London.

Würtz, D., Chalabi, Y. ve Luksan, L., (2006), “Parameter Estimation of ARMA Models with GARCH/APARCH Errors An R and SPlus Software Implementation”, Journal of Statistical Software, baskıda.

EKLER

Ek 1 Bazı Matematiksel ve Temel İstatistiksel Kavramlar

Ek 1 Bazı Matematiksel ve Temel İstatistiksel Kavramlar

- *Artık (veya Hata) Karelerinin Toplamı (RSS).* Y rasgele değişkeninin X üzerine regresyon modeli kurulduğunda artık terimleri vektörü U olmak üzere hata terimlerin karelerinin toplamı aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$RSS = U'U = \sum_{i=1}^N u_i^2$$

- *Beklenen Değer Fonksiyonu.* Y rasgele değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f_Y(y)$ olarak tanımlanırsa Y 'nin beklenen değer fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $E(Y)$ ile gösterilir.

$$E(Y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy, & Y \text{ sürekli} \\ \sum_{y_i} y_i f_Y(y_i), & Y \text{ kesikli} \end{cases}$$

- *Çok Değişkenli Normal Dağılım.* $Y' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)$, $T \times 1$ boyutlu rasgele değişkenlerinin vektörü $\mu' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T)$ ortalama vektörlü ve Ω varyanslı normal dağılımına sahip ise Y 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{T}{2}} \sqrt{|\Omega|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y - \mu)' \Omega^{-1} (y - \mu) \right\}$$

- *Diferansiyel (Tek Değişkenli).* $\varepsilon > 0$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

- *Gamma Fonksiyonu.* x bir reel sayı olmak üzere gamma fonksiyonu $\Gamma(x)$ ile gösterilip aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

- *Genelleştirilmiş Hata Dağılımı.* Y rasgele değişken olmak üzere, ν serbestlik dereceli genelleştirilmiş hata dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f_Y(y) = \frac{\nu}{\lambda_\nu 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{y}{\lambda_\nu} \right|^\nu \right\}$$

Burada Γ gamma fonksiyonu ve λ_ν aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\lambda_\nu = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{2^{\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}}$$

- *Gradyan vektörü.* $f(x_1, x_2, \dots, x_n): \Re^n \rightarrow \Re$ bir fonksiyon ise bu fonksiyonunun gradyan

vektörü aşağıdaki şekilde tanımlanır ve ∇f ile gösterilir.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- *Hessian matrisi.* $f(x_1, x_2, \dots, x_n): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyonunun hessian matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $H(f)$ ile gösterilir. Hessian matrisi simetrik bir matristir.

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

- *Korelasyon Fonksiyonu.* X ve Y rasgele değişkenlerinin korelasyon fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{E[X - E(X)][Y - E(Y)]}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

- *Koşullu Beklenen Değer.* X rasgele değişkeninin değerleri bilindiğinde Y rasgele değişkeninin koşullu olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f_{Y|X}(y|x)$ olarak tanımlanırsa Y 'nin koşullu beklenen değer fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $E(Y|X)$ ile gösterilir.

$$E(Y|X = x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy, & Y \text{ sürekli} \\ \sum_{y_i} y_i f_{Y|X}(y_i|x), & Y \text{ kesikli} \end{cases}$$

- *Koşullu Varyans Fonksiyonu.* X verildiğinde Y rasgele değişkeninin koşullu varyans fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $\text{Var}(Y|X)$ ile gösterilir.

$$\text{Var}(Y|X = x) = E(Y^2|X = x) - [E(Y|X = x)]^2$$

- *Kovaryans Fonksiyonu.* X ve Y rasgele değişkenlerinin kovaryans fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$\text{Cov}(X, Y) = E[X - E(X)][Y - E(Y)]$$

- *Kronecker Çarpımı.* Kronecker çarpımı, $\otimes$ ile gösterilen özel bir matris çarpım işlemidir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{mp \times nq}$$

- *Örneklem Ortalaması.* Y rasgele değişkeni $y_1, y_2, \dots, y_N$ değerleri alıyor ise örneklem ortalama fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

- *Örneklem Standart Sapması.* Y rasgele değişkeni $y_1, y_2, \dots, y_N$ değerleri alıyor ise örneklem standart sapması, örneklem varyansının kare köküdür, yani $S = \sqrt{S^2}$ şeklinde tanımlanır.
- *Örneklem Varyansı.* Y rasgele değişkeni $y_1, y_2, \dots, y_N$ değerleri alıyor ise örneklem varyans değeri aşağıdaki şekillerdeki gibi tanımlanır. Uygulamada her ikisi kullanılmakta, yalnız ilki yansız, ikincisi yanlıdır.

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

$$S_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 - \bar{y}^2$$

- *Student-t Dağılımı.* Y rasgele değişken olmak üzere, v serbestlik dereceli Student-t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \left(1 + \frac{y^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

- *Varyans Fonksiyonu.* Y rasgele değişkeninin varyans fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $Var(Y)$ ile gösterilir.

$$Var(Y) = E[Y - E(Y)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 19.11.1980

Doğum yeri Moğolistan

Lise 1988-1998 Özel Rus Lisesi No.19
Erdenet, Moğolistan

Lisans 2001-2005 Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans 2005-2008 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı, İstatistik Programı