

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÇOK AŞAMALI MODELLER VE BİR UYGULAMA

İstatistikçi Fatma NOYAN

F.B.E. İstatistik Anabilim Dalı'nda
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Doğan YILDIZ

Osman Çetinkaya
Ahf Evren
Doğan Yıldız

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	v
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	x
ÖNSÖZ.....	xi
ÖZET	xii
ABSTRACT	xiii
GİRİŞ	1
1 ÇOK AŞAMALI ANALİZ TEKNİKLERİ	2
2 ÇOK AŞAMALI REGRESYON MODELLERİ.....	5
2.1 Çok Aşamalı Modellerin Sınıflandırılması.....	9
2.1.1 Sabit Parametresi Tesadüfi Olarak Değişen Modeller (Random Intercept Models).....	11
2.1.1.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli (One Way ANOVA With Random Effects Models).....	11
2.1.1.2 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANCOVA Modeli (One Way ANOVA With Random Effects Models).....	14
2.1.1.3 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli (Means- As- Outcomes Regression)	16
2.1.1.4 Eğim Parametresi Tesadüfi Olarak Değişmeyen Modeller (A Model With Nonrandomly Varying Slopes	17
2.1.2 Eğim ve Sabit Parametresi Tesadüfi Olarak Değişen Modeller (Random Intercept And Slopes Models- Random Slopes Models).....	17
2.1.2.1 Tesadüfi Katsayılı Regresyon Modeli(Random-Coefficients Regression Model).18	
2.1.2.2 Sabit Ve Eğim Parametresi Çıktı Olan Modeller: (Intercepts And Slopes-As- Outcomes Models).....	19
2.1.3 Birden Fazla 1.Aşama (X_s) Ve 2.Aşama (W_s) Açıklayıcı Değişkeni İçin Basit Hiyerarşik Lineer Modeller	20
3 HİYERARŞİK LİNEER MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNLERİ.....	24
3.1 Sabit Etkilerin Tahmini	24
3.1.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli	24
3.1.2 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli (Regression With Means- As- Outcomes)	27

3.1.3	Genel Modeller (Tam Hiyerarşik Modeller/ Sabit Ve Eğim Parametresi Çıktı Olan Modeller)	30
3.2	Birinci Aşama Tesadüfi Katsayılarının Tahmini	35
3.2.1	Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli	35
3.2.2	Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli (Regression With Means-As- Outcomes)	38
3.2.3	Genel Modeller (Tam Hiyerarşik Modeller/ Sabit Ve Eğim Parametresi Çıktı Olan Modeller)	40
3.3	Varyans- Kovaryans Bileşenlerinin Tahmini	44
3.3.1	Tam En Çok Olabilirlik Yöntemi	44
3.3.2	Sınırlandırılmış En Çok Olabilirlik Yöntemi	46
3.3.3	EM Algoritması Kullanılarak Yapılan EÇO Tahminleri.....	48
4	HİYERARŞİK LİNEER MODELLER İÇİN HİPOTEZ TESTLERİ.....	51
4.1	Sabit Etkiler İçin Hipotez Testleri	52
4.2	Birinci Aşama Tesadüfi Katsayıları İçin Hipotez Testleri	57
4.3	Varyans ve Kovaryans Bileşenleri İçin Hipotez Testi.....	59
5.	HİYERARŞİK LİNEER MODELLERE İLİŞKİN VARSAYIMLARIN İNCELENMESİ.....	62
5.1	Birinci Aşama Modelinin Yeterliliğinin Kontrol Edilmesi	64
5.1.1	Birinci Aşama Modelinin Spesifikasyonu	64
5.1.1.1	Birinci Aşama Modelinin Yanlış Belirlenmesinin 2. Aşama Tahminleri Üzerindeki Etkisi	66
5.1.1.2	İkinci Aşama Modelinin Yanlış Belirlenmesinin 1. Aşama Tahminleri Üzerindeki Etkisi	67
5.1.2	Birinci Aşama Tesadüfi Etkileri Hakkındaki Varsayımların Araştırılması.....	68
5.1.2.1	Birinci Aşama Modelinde Değişen Varyanslılık Durumu.....	68
5.1.2.2	Birinci Aşama Kalıntıların Kontrolü	71
5.2	İkinci Aşama Modelinin Yeterliliğinin Kontrol Edilmesi	73
5.2.1	İkinci Aşama Modelinin Spesifikasyonu.....	73
5.2.2	İkinci Aşama Tesadüfi Etkileri Hakkındaki Varsayımların Araştırılması	75
5.2.2.1	İkinci Aşama Modelinde Değişen Varyanslılık Durumu	75
5.2.2.2	İkinci Aşamada Normallik Varsayımı	76
5.2.2.3	İkinci Aşama Kalıntıların Kontrolü.....	76
5.2.2.3.1	E.K.K Yöntemi Altında Robust Standart Hatalar.....	77
5.2.2.3.2	G.E.K.K Yöntemi Altında Robust Standart Hatalar.....	79
5.2.2.3.3	İkinci Aşamada Etkili Gözlemlerin Araştırılması	81
5.3	Küçük Örnekler İçin Çıkarsamaların Geçerliliği.....	85
5.3.1	Sabit Etkiler Üzerindeki Çıkarsamalar	86
5.3.2	Varyans Bileşenleri Hakkındaki Çıkarsamalar.....	88
5.3.3	Tesadüfi 1.Aşama Katsayıları Hakkındaki Çıkarsamalar.....	89
6.	UYGULAMA	90
6.1	Koşulsuz Modeller	92
6.1.1	Tesadüfi Etkili Tek Yönlü Anova Modeli.....	92
6.2	Koşullu Modeller	97
6.2.1	Tesadüfi Katsayılı Modeller	97
6.2.2	Sabit ve Eğim Parametrelerinin Çıktı Olduğu Modeller	106
7.	SONUÇLAR	110

KAYNAKLAR.....113

EKLER115

Ek 1 YTÜ veri setine uygulanan 2 aşamalı hiyerarşik lineer modeller115

Ek 2 Anket Formu117

ÖZGEÇMİŞ.....118



SİMGE LİSTESİ

ρ	Gruplar içi korelasyon katsayısı
$\tilde{n}_{grup}$	Gruplar için ortalama örnek büyüklüğü
τ_{00}	Gruplar arası varyans
σ^2	Gruplar içi varyans (1. aşama varyansı,)
n_j	j . gruptaki birim sayısını
J	Grup sayısı
Y_{ij}	j . gruptaki i . birime ait gözlenen çıktı (bağımlı değişken)
X_i	1. aşama açıklayıcı değişkeni
β_0	Sabit parametre ya da kesim noktası
β_1	Eğim parametresi
r_i	Hata terimi
r_{ij}	j . gruptaki i . birim için tesadüfi etki
β_{0j}	j . grup için regresyon sabitidir
γ_{00}	gerçek sabit parametre β_0 'ın tahmincisi ($E(\beta_0) = \gamma_0$)
γ_{01}	2. aşama değişkeni W_j için eğim parametresi
u_{0j}	j . grubun W_j 'ye göre koşullandırılmış, ortalama çıktı üzerindeki etkisi (2. aşama hata payı)
β_{1j}	j . grup için eğim parametresi
γ_{10}	1. aşamadaki eğim katsayılarının ortalama değeri, (gerçek eğim parametresi β_{1j} 'nin tahmincisi/ $E(\beta_1) = \gamma_1$)
γ_{11}	2. aşama değişkeni W_j için eğim katsayısı ve
u_{1j}	j . grubun W_j 'ye göre koşullandırılmış eğim parametresi üzerindeki etkisi (2. aşama hata payı/ tesadüfi etkisi)
W_j	2. aşama açıklayıcı değişkeni
τ_{11}	Eğim parametreleri arasındaki ana kütle varyansı.
τ_{01}	Eğim ve sabit terimler arasındaki ana kütle kovaryansı
μ_{Y_j}	j . grup için ortalama çıktı
$\bar{Y}_{\bullet j}$	Örnek ortalaması
V_j	hata varyansı (β_{0j} 'nin tahmini $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin varyansı)
Δ_j	$\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin kalıntı varyansıdır yani W_j verildiği durumda $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin koşullu varyansı
$\tilde{\gamma}_{00}$	γ_{00} 'ın tek, minimum varyanslı, yansız tahmin edicisi
Δ_j^{-1}	$\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin kesinliği
$\hat{\gamma}_{00}$	γ_{00} 'ın ağırlıklı en küçük kareler tahmincisi (aynı zamanda en çok benzerlik tahmincisi)
$\Sigma \Lambda_j^{-1}$	$\hat{\gamma}_{00}$ 'in kesinliği
$\text{Var}(\hat{\gamma}_{00})$	$\hat{\gamma}_{00}$ 'in varyansı [$\text{Var}(\hat{\gamma}_{00}) = (\sum \Delta_j^{-1})^{-1}$]
$\tilde{\gamma}_{01}$	γ_{01} 'in en küçük kareler tahmincisi
$\hat{\gamma}_{01}$	γ_{01} 'in ağırlıklı en küçük kareler tahmincisi

Y_j	$n_j \times 1$ boyutlu bağımlı değişken vektörü
β_j	$n_j \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametre (katsayılar) vektörü
I	$n_j \times n_j$ boyutlu birim matris olarak tanımlanır.
r_j	$n_j \times 1$ boyutlu tesadüfi hatalara ait vektör
$\hat{\beta}_j$	Katsayılar vektörü, β_j 'ye ait sıradan en küçük kareler tahmincisi
T	2. aşama tesadüfi etkilerine ait varyans-kovaryans matrisi
$V_{\hat{\gamma}}$	γ 'nın dispersion (dağılım) matrisi
Z_j ,	1. aşama açıklayıcı değişkeni X_j 'nin alt kümesi
λ_j	β_{0j} için yapılan en küçük kareler tahmincisi ($\bar{Y}_{\cdot j}$)'nin güvenilirliği
β_{0j}^*	çekilmiş tahminci (shrinkage estimator)
u_{0j}^*	Ampirik Bayes tahmincisine β_{0j}^* 'ye karşılık gelen ampirik Bayes kalıntısı
Λ_j	Çok değişkenli güvenilirlik matrisi
$V_{qq_j}^*$	V_j^* 'nin q. köşegen elemanı
N	1. aşama birimlerinin toplam örnek büyüklüğü
l_{ML}	Tam en çok olabilirlik yöntemi ile en çok olabilirlik fonksiyonunu
F	γ sabit etkiler vektöründeki toplam eleman sayısı
$C'\hat{\gamma}$	Contrast vektör
D_i	i. modele ait deviyans istatistiği
L_0	Sıfır hipotezindeki en çok olabilirlik tahminleri için olabilirlik değeri
D_1	Alternatif modeldeki en çok olabilirlik tahminleri için olabilirlik değeri
m	Modeldeki 1. aşama tesadüfi açıklayıcı değişken sayısı
ls_{tot}	j . grup için tahmin edilen kalıntı varyanslarının logaritmasının ağırlıklı ortalaması
s_j^2	j grup için tahmin edilen kalıntı varyansları
df_j	Serbestlik derecesi
d_j	Gruba bağlı kalıntı varyansı s_j^2 'nin standardize edilmiş kalıntı dağılımı ölçüsü
H	1. aşama kalıntıları için heterojenlik istatistiği
$\bar{r}_i$	Standardize E.K.K kalıntıları
C_j^{OF}	Verilen veri seti için tahmin edilen sabit etkiler ile j. birim çıkarılarak elde edilen veri seti için tahmin edilen sabit etkiler arasındaki fark (etkili gözlem teşhis değerleri)
$\hat{\Sigma}_F$	Sabit etkilere ait tahmin vektörünün kovaryans matrisi
φ	Tesadüfi kısımdaki tüm parametrelerin vektörü
$\hat{\varphi}_{(-j)}$	Tesadüfi kısımdaki j. birim silindiğinde elde edilen tahminler yani birinci adım tahminleri
C_j^R	Tesadüfi kısımdaki parametre tahminleri üzerinde j. birimin etkisi için teşhis değerleri
C_j	Modelin sabit ve tesadüfi kısmındaki parametreler üzerinde j. grubun birleştirilmiş teşhis etkisi

D_j	j. grup için çok değişkenli kalıntılar
S_j^2	Standardize çok değişkenli kalıntılar
$deff$	Tasarım etkisi



KISALTMA LİSTESİ

AB	Ampirik Bayes
E.K.K.	En Küçük Kareler Yöntemi (OLS)
EM	Expectation-Maximization Algoritması
TEÇOY	Tam En Çok Olabilirlik Yöntemi
G.E.K.K	Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi
HLM	Hiyerarşik Lineer Modeller (Hierarchical Linear Models)
EÇO	En Çok Olabilirlik Yöntemi
SEÇOY	Sınırlandırılmış En Çok Olabilirlik Yöntemi



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Çok aşamalı modellerin (Hiyerarşik lineer modellerin) sınıflandırılması	10
Şekil 6.1	2 aşamalı hiyerarşik lineer model için YTÜ veri setinin yapısı : YTÜ veri seti içinde yer alan 23 bölüm ve her bölümdeki öğrenciler.....	90
Şekil 6.2	YTÜ veri setinde kullanılan çok aşamalı modellere ait akış diyagramı	91
Şekil 6.3	J=23 tane bölüme ait öğretim üyesinin etkinliği için regresyon doğruları	98
Şekil 6.4	23 bölüm için en küçük kareler ve ampirik bayes sabit ve eğim parametreleri	104
Şekil 6.5	1. aşama kalıntıları için normal olasılık grafiği	106



ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 1.1	Veri analizinde kullanılan alternatif yöntemler	3
Çizelge 1.2	Aşamalara verilen alternatif isimler	4
Çizelge 1.3	Değişkenlerin bulundukları aşamalara göre alternatif isimleri	4
Çizelge 2.1	İki aşamalı hiyerarşik lineer model spesifikasyonları	23
Çizelge 4.1	Hiyerarşik modellerde test edilebilir hipotez tipleri	52
Çizelge 4.2	Hiyerarşik lineer modeller için genel hipotez testleri	53
Çizelge 6.1	2002-2003 eğitim-öğretim yılı YTÜ öğretim üyesi etkinliğine yönelik çalışmada kullanılacak değişken tanımları	92
Çizelge 6.2	YTÜ veri seti için 2 aşamalı tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli sonuçları	94
Çizelge 6.3	Öğretim üyelerinin etkinliği için tesadüfi katsayılı regresyon modeli sonuçları	100
Çizelge 6.4	Ortalama ve eğitim parametrelerinin çıktı olduğu modeller: bölüm ve fakülte yerleşim biriminin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki etkisi için	107
Çizelge 6.6	Tesadüfi katsayılı regresyon modeli sonuçlarına göre, bölümlerin ortalama öğretim üyesi etkinliği en yüksek bölümden en düşük bölüme doğru sıralanması	111



ÖNSÖZ

‘Çok Aşamalı Modeller ve Bir Uygulama’ konulu tez çalışmam sırasında ve tüm hayatım boyunca gösterdikleri sabır, hoşgörü, maddi ve manevi destekleri için annem, babam ve Meleğim’e

Çalışmalarımın her aşamasında büyük desteğini ve yardımlarını gördüğüm, karşılaştığım tüm zorlukları çözümleyen, teşvik ve önerileriyle bana her konuda yardımcı olan değerli hocam Yrd.Doç.Dr.Doğan YILDIZ’a

YTÜ İstatistik bölümündeki hocalarıma, çalışma arkadaşlarıma ve tüm çalışanlara bana doğru yerde olduğumu hissettirdikleri için ve özellikle de Elif’e hep yanımda olduğu ve sonsuz sabrı için çok teşekkür ediyorum.

Deniz, Kevser, Nejla ve Arzu iyiki varsınız.....



ÖZET

Çok aşamalı modeller, özellikle hiyerarşik ya da kümelenmiş yapıya sahip verilerin istatistiksel analizinde kullanılırlar. Hiyerarşik yapıya sahip verilerde, standart istatistiksel testler için gerekli olan gözlemlerin birbirinden bağımsızlığı varsayımı bozulduğundan çok aşamalı regresyon modellerine başvurulur.

Bu çalışmada, 2002 – 2003 Eğitim Öğretim yılı YTÜ “Öğretim Elemanı Değerlendirme Anketi” baz alınarak öğrenci gözüyle öğretim üyesinin etkinliği değerlendirilmiştir. Bölümler ve bölümler içindeki öğrencilerden meydana gelen kümelenmiş veri seti 2 aşamalı hiyerarşik bir sistem meydana getirmektedir. Ve bu sistem içinde bölümler arasında öğretim üyesi etkinliğinin anlamlı farklılıklar gösterdiği görülmüştür.

Bölümler arasında bu farklılıkları açıklayabilmek amacıyla, hiyerarşik lineer modellerin özel hallerinden meydana gelen çeşitli alt modellerden yararlanılmıştır. Kurulan bu modellerin ikili karşılaştırılmaları sonucunda hiyerarşik yapıya sahip veri seti için en uygun modelin tesadüfi katsayılı regresyon modeli olduğuna karar verilmiştir. Bu modele göre ise, YTÜ’de öğrenci gözüyle öğretim üyesi etkinliğinin bölümler arasında anlamlı farklılıklar gösterdiğine karar verilebilir.

Anahtar kelimeler: Çok aşamalı regresyon modelleri, Hiyerarşik lineer modeller, Tesadüfi katsayılı regresyon modelleri

ABSTRACT

Multilevel modeling which is often used in social sciences for analyzing data has a hierarchical or clustered structure, for instance in educational research where pupils nested within schools. A crucial problem in the statistical analysis of hierarchically structured data is the dependence of the observations at the lower levels. Multilevel models account for this dependence and in recent years these models have been widely accepted.

We apply the multilevel analysis approach to the YTÜ 2002-2003 educational data and the aim is to ‘investigate the academicians’ performance in Yıldız Technical University. These data with a two level structure consisting of students nested within different departments. The objective of this analysis is to assess whether there is a significant difference in mean academicians effectiveness across departments.

Our study illustrated multilevel approach with different submodels which viewed as special cases of the hierarchical linear models. We discuss submodels and decide to using the random coefficient models for explain to academicians performance. The results from the random coefficient regression model indicated that academicians performance varies across the departments.

Keywords: Multilevel regression models, hierarchical linear models, random coefficient models



GİRİŞ

Çok aşamalı modeller, kümelenmiş yada hiyerarşik yapıya sahip verilerin istatistiksel analizinde kullanılırlar. Hiyerarşik yapıya sahip verilerde, standart istatistiksel testler için gerekli olan gözlemlerin birbirinden bağımsızlığı varsayımı bozulduğundan çok aşamalı regresyon modellerine başvurulur.

Çok aşamalı modellerde, birey veya birim aşamasından başlayarak, birimler, birimlerin meydana getirdiği gruplar, grupların meydana getirdiği topluluklar vb. şeklinde devam eden hiyerarşik yapının her aşaması için ayrı ayrı modeller kurulur. Ve daha sonra bu modeller birleştirilerek birleşik modele ulaşılır. Çok aşamalı modellerde, birleştirilmiş model çok kompleks bir yapıya sahiptir ve yorumlanması oldukça zordur. Bu yüzden, hesaplamalarda ve yorumlamalarda kolaylık sağlaması amacıyla alt modellerden yararlanılabilir. Kurulan alt modellerin adım adım karşılaştırılması yolu ile kümelenmiş veri seti için en uygun çok aşamalı modele karar verilir.

Bu çalışmada ilk bölümde, çok aşamalı modellerin hangi durumlarda kullanılabileceği ve çok aşamalı analiz tekniklerinin genel yapısı açıklanmıştır.

Çok aşamalı modellerde klasik regresyon analizinden farklı olarak parametreler sabit değil gruplara göre değişen bir yapıya sahiptir. Parametrelerdeki bu değişim ise hiyerarşinin diğer aşamaları için kurulan modeller yardımı ile açıklanmaya çalışılır. Çalışmanın ikinci bölümünde, her aşama için bu modellerin nasıl kurulacağı açıklanır. Çok aşamalı modellerin özel hallerinden meydana gelen alt modeller de bu bölümde anlatılmıştır.

İki aşamalı modellerde, 1. aşama tesadüfi parametreleri, 2. aşama sabit parametreleri ve varyans kovaryans bileşenleri olmak üzere üç tip bilinmeyen parametre vardır. Bunlara ait parametre tahminleri üçüncü bölümde açıklanmıştır.

Veri setine uygun çok aşamalı modelin belirlenmesi için kullanılacak hipotez testleri ise dördüncü bölümde ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Beşinci bölümde, hiyerarşik veri seti için kurulan modelin varsayımları sağlayıp sağlamadığının nasıl kontrol edileceği ve varsayımlardan sapmaların düzeltilmesi için uygun yollar açıklanmıştır.

Altıncı bölümde ise YTÜ'de öğrenci gözüyle öğretim üyesi etkinliği iki aşamalı modeller yardımı ile değerlendirilmiştir.

1.ÇOK AŞAMALI ANALİZ TEKNİKLERİ

Çok aşamalı problemler hiyerarşik yapıdaki ana kütle etrafında oluşur. Hiyerarşik yapıdaki ana kütleden elde edilen örnekler çok aşamalı (kademeli) örnekler olarak adlandırılır ve ilk olarak yüksek seviyeli birimlerden (gruplardan), daha sonra ise alt birimlerden (gruplar içindeki birimlerden) örnek çekildiği varsayılır. (Heck & Thomas, 2000) Bu tip örneklerde grupların içindeki birimler, ana kütlelerin tamamından basit tesadüfi örnekleme yolu ile çekilmiş birimlere göre daha fazla benzer olma eğilimindedirler. (Hox,1998) Gruplardaki birimlerin benzer karakteristiklere sahip olmaları (çevre, deneyim, demografik özellikler gibi.) bu birimlerden elde edilen gözlemlerin birbirine bağımlı olmasına neden olur. Sonuç olarak, kümelenmiş verilerde bir çok analitik teknik için gerekli olan gözlemlerin birbirinden bağımsızlığı varsayımı çiğnenmektedir. (Osborne, 2004)

Kümelenmiş veri seti üzerinde klasik doğrusal regresyon analizi uygulandığında aynı gruptan elde edilen hata terimleri arasında korelasyon ortaya çıkar bu durumda en küçük kareler yönteminin temel varsayımlarından biri olan hata paylarının birbirinden bağımsız olması varsayımı çiğnenmiş olacaktır. Hiyerarşik verilerde bu varsayım çiğnendiğinden sıradan en küçük kareler regresyonu, standart hataları olduğundan daha küçük üretir ve uygun istatistiksel analizlerin kullanıldığı ve verilerin bağımsız gözlemleri içerdiği durumlara göre sıfır hipotezinin gereğinden fazla red edilmesine neden olur. Bu yüzden hiyerarşik ya da kümelenmiş yapıya sahip verilerin istatistiksel analizinde çok aşamalı modellere başvurulur.(Moerbeek v.d., 2002)

Farklı okullardaki öğrenciler üzerinde yapılan eğitim çalışmaları, farklı ailelerin fertleri üzerinde yapılan sosyolojik çalışmalar, şirketlerin farklı birimlerinde çalışan personel üzerinde yapılan performans çalışmaları ve hastanelerin farklı kliniklerindeki hastalar üzerinde yapılan sağlık çalışmaları gibi kümelenmiş veri seti üzerinde yapılan çalışmalar çok aşamalı modellere örnek oluşturabilir.

Verinin tek aşamadan (normal veri seti) ya da birden fazla aşamadan (kümelenmiş veri seti) meydana gelmesine göre analizlerde kullanılabilecek yaklaşımlar Çizelge 1.1’de verilmiştir.

Çizelge 1.1 Veri analizinde kullanılan alternatif yöntemler (Heck vd., 2000)

<i>Tek Aşamalı Veri Setleri</i>	<i>Analizler</i>
1. Tek Değişkenli (Tek Bağımlı Değişken)	Korelasyon, Varyans Analizi, Regresyon
2.Çok Değişkenli (İki ya da Daha Fazla Bağımlı Değişken)	Kanonik Korelasyon, Çok Değişkenli Varyans Analizi, Diskriminant Analizi, Faktör Analizi, Path Analizi, Zaman Serileri Analizi, Yapısal Denklem Modelleri
<i>Çok Aşamalı Veri Setleri</i>	<i>Analizler</i>
1. Tek Değişkenli (Tek Bağımlı Değişken)	Çok Aşamalı Regresyon ya da Tesadüfi Katsayılı Modeller, Varyans Bileşenleri Modeli, Karma Lineer Modeller, Growth-Cure Modelleri
2.Çok Değişkenli (İki ya da Daha Fazla Bağımlı Değişken)	Çok Aşamalı Faktör Analizleri, Çok Aşamalı Yapısal Teklem Modelleri, Çok Aşamalı Varyans Bileşenleri Modeli, Çok Aşamalı Çok Değişkenli Regresyon, Zaman Serileri Analizleri, Latent Growth-Cure Modeller

Çizelge 1.1 de görüldüğü üzere birden fazla aşamadan meydana gelen kümelenmiş veri setinde, gözlemlerin birbirine bağımlı olmasının yaratacağı olumsuz etkilerden kurtulmak için çok aşamalı modellemeden yararlanılabilir.

Çok aşamalı modeller araştırma literatürlerinde, “ tesadüfi katsayılı modeller- random coefficient models”, “ varyans bileşenleri modelleri-variance component models”, “hiyerarşik lineer modeller- hierarchical linear models”, “çok aşamalı regresyon modelleri- multilevel regression models” ve “karma lineer modeller- linear mixed models” gibi çeşitli isimler altında bulunurlar.

Çok aşamalı modeller için grupların sınırlarının temiz yani belirgin olması gerekir. Eğer düzensiz değişkenler varsa bu değişkenler kendileri için uygun seviyelere yerleştirilmelidir. (Heck & Thomas, 2000) Çok aşamalı veri setinde, ilk aşamada birimler diğer aşamalarda ise birimlerin içinde bulunduğu gruplar, grupların içinde bulunduğu toplumlar şeklinde devam eden bir hiyerarşik bir yapı vardır. Bu hiyerarşik yapı içerisinde aşamalar farklı şekillerde

adlandırılabilir. Çizelge 1.2’de 2 aşamalı veri yapısında aşamalara verilen farklı isimler verilmiştir.

Çizelge 1.2 Aşamalara verilen alternatif isimler (Snijders & Bosker, 99; Monette, 01)

1.Aşama İçin	2.Aşama İçin
Mikro Aşamadaki Birimler	Makro Aşamadaki Birimler
Mikro Birimler	Makro Birimler
Birincil Birimler	İkincil Birimler
Temel Birimler	Gruplar
1. Aşama Birimleri	2. Aşama Birimleri

Çok aşamalı modellerde, klasik regresyon analizinden farklı olarak sadece birimler bazında değil gruplar bazında da değişkenlerden yararlanılmaktadır. Ve çok aşamalı modellerde kullanılan tüm bu değişkenler bulundukları aşamalara göre farklı şekillerde adlandırılabilirler. Çizelge 1.3’ de değişkenlerin bulundukları aşamalara göre aldıkları farklı isimler verilmiştir.

Çizelge 1.3 Değişkenlerin bulundukları aşamalara göre alternatif isimleri (Monette,2001)

1. Aşama için	2.Aşama için
Mikro Değişken	Makro Değişken
Mikro Aşamadaki Tahminci	Makro Aşamadaki Tahminci
İçerideki Değişkenler	Dışarıdaki Değişkenler
1. Aşamadaki Değişkenler	2.Aşamadaki Değişkenler

Çok aşamalı modellerde, birey veya birim aşamasından başlayarak, birimler, birimlerin meydana getirdiği gruplar, grupların meydana getirdiği topluluklar vb. şeklinde devam eden hiyerarşik yapının her aşaması için ayrı ayrı modeller kurulur. Ve daha sonra bu modeller birleştirilerek birleşik modele ulaşılır. Kavramsal olarak, hiyerarşik lineer model, regresyon modelinin hiyerarşik bir sistemi olarak ifade edilebilir. (Nigel&Andrew, 1997)

Çok aşamalı modeller için, HLM, MLWIN, M-plus, Lisrel, SPSS, SAS gibi paket programlarından yararlanılabilir.

2. ÇOK AŞAMALI REGRESYON MODELLERİ

Tüm çok aşamalı regresyon modelleri, hiyerarşik veri setleri ile en düşük seviyede ölçülmüş tek bağımlı değişken ve varolan tüm seviyelerde ölçülmüş açıklayıcı değişkenlerin varlığı varsayımına dayanmaktadır. Çok aşamalı regresyon modellerinde, bağımlı değişken en düşük aşamadan (birimler aşamasından) seçilirken, açıklayıcı değişkenler ise tüm aşamalardan seçilebilir yani açıklayıcı değişken için herhangi bir kısıt yoktur. Çok aşamalı regresyon modellerinde ilk aşamayı birimler bazında kurulan modeller oluştururken, diğer aşamaları ise gruplar bazında kurulan modeller meydana getirir. Kavramsal olarak, model regresyon eşitliğinin hiyerarşik bir sistemi olarak görünmektedir. Tezde, iki aşamalı modeller üzerinde durulacaktır.

İki aşamalı modelde, 1. aşama birimleri “birimler”, 2. aşama birimleri ise “gruplar” olarak tanımlanabilir. $i=1,2,\dots,n_j$ olmak üzere i indisi 1. aşama birimlerini; $j=1,2,\dots,J$ olmak üzere j indisi ise 2. aşama birimlerini yani grupları göstermektedir. n_j , j . gruptaki birim sayısını, J ise grup sayısını gösterir. Gruplardaki birim sayıları farklı olabilir. ($j \neq k$ için $n_j = n_k$ olmak zorunda değildir.) (Sullivan, 1999)

Y_{ij} , j . gruptaki i . birime ait bağımlı değişken, X_i ise 1. aşama açıklayıcı değişkeni olmak üzere 1. aşama modeli için regresyon eşitliği (1. aşama modeli) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_i + r_i \quad (2.1)$$

Eşitlikte;

β_0 , sabit parametre olarak adlandırılır ve 1. aşama X_i açıklayıcı değişken değerleri 0 olduğunda, bağımlı değişkenin aldığı değerleri gösterir. (Regresyon doğrusunun y eksenini kestiği noktayı gösterir.)

β_1 ise eğim parametresidir ve X_i değişkeninde meydana gelen bir birim artışa yada azalışa karşılık Y_{ij} değişkeninde beklenen değişikliği göstermektedir. Diğer taraftan, β_1 , 1. aşama

açıklayıcı değişkenlerinin, Y_{ij} 'nin tahminine (kestirimine) yaptıkları göreceli katkıyı gösterdiklerinden kısmi regresyon katsayısı olarak da adlandırılabilirler.

Hata terimi r_i , i. 1. aşama birimi için tesadüfi etkiyi göstermektedir ve çok aşamalı regresyon modellerinde r_i 'nin 0 ortalama ve σ^2 varyans ile normal ve birbirinden bağımsız dağıldığı varsayılır. ($r_i \sim N(0, \sigma^2)$)

J yeterince büyük bir sayı olmak üzere, ana kütlede J tane gruba (2. aşama birimini) basit tesadüfi örnekleme yöntemi ile çektiğimizi varsayalım. Bu durumda 1. aşama modeli

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - \bar{X}) + r_{ij} \quad (2.2)$$

şeklinde dir.

r_{ij} , j. gruptaki i. birim için tesadüfi etkiyi gösterir ve r_{ij} 'nin her grup (2. aşama birimi) için homojen varyansa sahip olduğu ve normal dağıldığı varsayılır. ($r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$)

(2.2)'de görüldüğü üzere, klasik regresyon analizinden farklı olarak çok aşamalı regresyon modellerinde 2. aşama birimleri (gruplar) değiştikçe onlara ait olan parametre tahminleri de değişecektir. Modelde eğim ve sabit parametreler hangi gruba ait olduklarını gösteren j indisine sahiptir. Çok aşamalı regresyon modellerinde, sabit ve eğim katsayılarının gruplara göre değiştiği varsayıldığından bunlar tesadüfi katsayılar olarak adlandırılır. (Heck, 2000) Gruplara karşılık gelen eğim ve sabit parametrelerinin, iki değişkenli normal dağılıma sahip oldukları varsayılmaktadır. (Raudenbesh & Bryk, 2002)

γ_0 , gruplardan meydana gelen ana kütle için, grup ortalamalarının ortalamasını gösterir ve gerçek sabit parametre β_0 'in tahmincisidir. [$E(\beta_0) = \gamma_0$] (Snijders & Bosker, 1999)

τ_{00} , grup ortalamaları arasındaki ana kütle varyansıdır (gruplar arası varyans) [$Var(\beta_0) = \tau_{00}$] (Snijders & Bosker, 1999)

γ_1 , ana kütle için ortalama eğim katsayısıdır ve gerçek regresyon katsayısı (eğim parametresi) β_1 'in tahmincisidir. [$E(\beta_1) = \gamma_1$]

τ_{11} , eğim parametreleri arasındaki ana kütle varyansıdır. [$Var(\beta_1) = \tau_{11}$]

τ_{01} , eğim ve sabit terimler arasındaki ana kütle kovaryansıdır. $[\text{cov}(\beta_{0j}, \beta_{1j}) = \tau_{01}]$

Ortalamalar(sabitler) ve eğim katsayıları arasındaki ana kütle korelasyon katsayısı aşağıdaki gibi hesaplanır. (Raudenbesh & Bryk, 2002)

$$\rho(\beta_{0j}, \beta_{1j}) = \frac{\tau_{01}}{(\tau_{00}\tau_{11})^{1/2}} \quad (2.3)$$

Gerçekte ana kütle için parametre değerleri bilinmediğinden veriden bunlar tahmin (kestirimde bulunulmaya) edilmeye çalışılır.

Kümelenmiş verilerde, her grup için eğim ve sabit parametrelerin değiştiği varsayılır. Bu yüzden hiyerarşik regresyon modelinin ikinci adımını, (2. aşama) grup seviyesinde tanımlanan açıklayıcı değişken ile regresyon katsayılarındaki (β_j) değişimlerin tahmin edilmesi oluşturur. 2. aşama modeli (2.4) de verilmiştir.

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} \quad (2.4a)$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j + u_{1j} \quad (2.4b)$$

β_{0j} , j. grup için regresyon sabitidir ve (2.4a) da bu sabitin gruplara karşı tesadüfi olarak değiştiği ve bu değişimin bir kısmının gruplara ait değişkenlerle açıklanabildiği model kurulmuştur. Bu modelde;

γ_{00} : 1. aşama çıktılarının ortalama değeri,

γ_{01} : 2. aşama değişkeni W_j için eğim parametresi,

u_{0j} : j. grubun W_j 'ye göre koşullandırılmış ortalama çıktı üzerindeki etkisini göstermektedir.

β_{1j} : j. grup için eğim parametresidir ve bu parametrede gruplara karşı meydana gelen değişimlerin bir kısmı gruplara ait özellikler bir kısmı ise tesadüfi etkiler ile açıklanmaktadır. (2.4b) de ;

γ_{10} : 1. aşamadaki eğim katsayılarının ortalama değeri,

γ_{11} : 2. aşama değişkeni W_j için eğim katsayısı ve

u_{1j} : j. grubun W_j 'ye göre koşullandırılmış eğim parametresi üzerindeki etkisidir.

u_{0j} ve u_{1j} 0 ortalamalı, sırasıyla τ_{00} ve τ_{11} varyanslarına sahip ve kovaryansları τ_{01} olan tesadüfi değişkenler olduğu varsayılır. (2.4) deki varyans-kovaryans bileşenleri şu anda, tesadüfi ya da koşullu bileşenlerdir. Yani W_j (2. aşama açıklayıcı değişkeni) için yapılan kontrollerden sonra β_{0j}, β_{1j} de arta kalan değişkenliği gösterirler.

(2.4a) ve (2.4b) de regresyon parametreleri olan γ 'ların gruptan gruba değişmediği varsayılır. (γ 'lar hangi gruba ait olduklarını gösteren j alt indisine sahip değildirler yani tüm gruplar için aynı değere sahiptirler.) Bu yüzden γ 'lar sabit katsayılar (fixed coefficients) olarak adlandırılırlar. Hata payı terimleri u_j lerin (hangi gruba ait olduklarını gösteren j indisine sahip) varlığında 2. aşama değişkeni W_j ile yapılan tahmin işlemlerinden sonra, β katsayıları gruplar arası değişimlerden arındırılmış olur.

Bu durum (2.4a) ve (2.4b) deki eşitlikler (2.2) de yerine konulduğunda birleştirilmiş modele ulaşılır. 2 aşama için birleştirilmiş model (2.5) deki eşitlikte verilmiştir:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Sabit kısım} & & \text{Tesadüfi kısım} \\
 \underbrace{\hspace{10em}} & & \underbrace{\hspace{10em}} \\
 Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet j}) + \underbrace{\gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet j})}_{\text{Etkileşim terimi}} + u_{0j} + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet j}) + r_{ij} & & (2.5)
 \end{array}$$

(2.5) deki eşitliğin $\gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j}) + \gamma_{01}W_j + \gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})$ kısmı tüm sabit katsayıları içerdiğinden, modelin sabit kısmı (deterministik) olarak tanımlanır. $u_{0j} + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j}) + r_{ij}$ ise modelin tüm tesadüfi katsayılarını içerdiğinden, modelin tesadüfi (stokastik) kısmı olarak adlandırılır. Etkileşim terimi olarak adlandırılan $W_j X_{ij}$ terimi ise, 1.aşama açıklayıcı değişkeni X_{ij} ' e ait çeşitli regresyon eğim katsayılarının, 2.aşama açıklayıcı değişkeni W_j ile modellenmesi sonucunda ortaya çıkmıştır. Bağımlı değişken Y ile açıklayıcı değişken X arasındaki ilişki üzerinde W'in etkisi aşamalar arası etkileşim ile açıklanabilir.

Sonuç olarak, bu bölümde, 1. aşama açıklayıcı değişkeni X_{ij} , ve 2. aşama açıklayıcı değişkeni W_j den meydana gelen basit hiyerarşik lineer model ele alınmıştır. 1. aşama modeli sabit ve eğim olmak üzere iki parametreye sahiptir. 2. aşamada ise, tüm bunlar, 2. aşama açıklayıcı değişkeni W_j ile tahmin edilmeye çalışılır ve her biri (2.4a) ve (2.4b) de olduğu gibi tesadüfi bileşenlere sahip olabilir. (2.5) de ise tam model verilmiştir. (Raudenbesh & Bryk, 2002)

2.1 Çok Aşamalı Modellerin (Hiyerarşik Lineer Modellerin) Sınıflandırılması

Kullandığımız terminolojiyi iki aşamalı hiyerarşik modellere uygun hale getirirsek, (2.2) deki eşitlik 1. aşama modeli, (2.4) deki eşitlik ise 2. aşama modelini ve (2.5) deki eşitlik ise birleştirilmiş modeli gösterir. 1. aşamadaki birimler, 2. aşamada ise gruplar vardır. r_{ij} , 1. aşama tesadüfi etkileri, u_{0j} ve u_{1j} ise 2. aşama tesadüfi etkilerdir. Bundan başka, $\text{Var}(r_{ij})$ 1. aşama varyansını, $\text{Var}(u_{0j})$, $\text{Var}(u_{1j})$ ve $\text{Cov}(u_{0j}, u_{1j})$ ise 2. aşama varyans kovaryans bileşenlerini gösterir. 1. aşamadaki β parametreleri 1. aşama katsayılarını, γ 'lar ise 2. aşama katsayılarını gösterir.

1.aşama açıklayıcı değişkeni X_{ij} ve 2. aşama açıklayıcı değişkeni W_j ile oluşturulan, (2.2), (2.4) ve (2.5) modelleri tam hiyerarşik modellerin basit bir örneğidir. Çok aşamalı modellerde, eşitlik (2.5) de görüldüğü üzere birleştirilmiş model çok kompleks bir yapıya sahiptir ve yorumlanması oldukça zordur. Çok aşamalı analizde hesaplamalarda ve yorumlamalarda kolaylık sağlaması amacıyla alt modellerden yararlanılabilir. Çizelge 2.1 de çok aşamalı modellerin sınıflandırılması görülmektedir.

HİYERARŞİK LİNEER MODELLER
(ÇOK AŞAMALI MODELLER)

Sabit Parametresi Tesadüfi Olarak Değişen Modeller
(Random Intercept Models)

1. Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli
(One Way ANOVA With Random Effects)
2. Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANCOVA Modeli
(One Way ANCOVA with Random Effects)
3. Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli
(Meas-As Outcomes Regression)
4. Eğim Parametresi Tesadüfi Olarak Değişmeyen Modeller
(A Model With Nonrandomly Varying Slopes)

Sabit ve Eğim Parametresi Tesadüfi Olarak Değişen Modeller
(Random Intercept and Slopes Models)

1. Tesadüfi Katsayılı Modeller (Random Coefficients Models)
2. Sabit (Ortalama) ve Eğim Parametrelerinin Çıktı Olduğu Modeller
(Intercepts and Slopes As Outcomes)

Şekil 2.1 Çok aşamalı modellerin (Hiyerarşik lineer modellerin) sınıflandırılması

Çok aşamalı modeller, sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modeller ve sabit ve eğim parametresi tesadüfi olarak değişen modeller olmak üzere ikiye ayrılır. Bu ayrım Bryk ve Raudenbush tarafından yapılmıştır ve tezde bu sınıflandırma ve buna bağlı olarak oluşturulan notasyondan yararlanılmıştır.

Çok aşamalı modeller, tesadüfi etkileri içeren tek yönlü ANAVO modeli, ortalamaların çıktı olduğu regresyon modeli, tesadüfi etkileri içeren tek yönlü ANCOVA modeli, tesadüfi katsayılı regresyon modeli ve sabit ve eğim parametrelerinin çıktı olduğu model gibi alt modellerden meydana gelir. Kompleks modelin basitleştirilmiş hali olan bu alt modellerin

adım adım oluşturulup hipotez testlerinin yapılması yolu ile birleştirilmiş modele karar verilir. Bu bölümde bu alt modeller Şekil 2.1 deki sınıflama dahilinde açıklanacaktır.

2.1.1 Sabit Parametresi Tesadüfi Olarak Değişen Modeller (Random Intercept Models)

Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli, tesadüfi etkili tek yönlü ANCOVA modeli, ortalamaların çıktı olduğu regresyon modeli ve eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen modeller, sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modelleri meydana getirir.

2.1.1.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli (One Way ANOVA With Random Effects Models)

Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli, hiyerarşik lineer modellerin mümkün en basit halidir ve varyans modelinin tesadüfi etkili analizidir. Uygulamada hiyerarşik lineer modellerin özel hallerinden meydana gelen çeşitli alt modellerden yararlanarak, hiyerarşik yapıya sahip veri seti için en uygun model kurulmaya çalışılır. İlk olarak tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli kurularak çok aşamalı modellere başlanılır amaç bağımlı değişkendeki değişkenliği hiyerarşinin farklı aşamalarına göre ayırmaktır. Bu model sadece tesadüfi gruplar ve bu gruplar içerisindeki varyasyonları içerir.

Y_{ij} , j. gruptaki i. birime ait bağımlı değişken olmak üzere 1. aşama modelinde bağımlı değişken, grup ortalamaları artı tesadüfi hatanın fonksiyonu olarak modellenir. 1. aşama modeli (birim aşaması modeli);

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij} \quad (2.6)$$

şeklindedir.

Her 1. aşama hata terimi r_{ij} 'nin, 0 ortalama ve σ^2 1. aşama sabit varyansı ile normal ve birbirinden bağımsız dağıldığını varsayılır. β_{0j} , j. grup için ortalama çıktıyı gösterir, yani

$$\beta_{0j} = \mu_{Y_j}.$$

2. aşama modeli bölümlerin sabit parametreleri arasındaki değişkenliği ifade eder. β_{0j} , yani bölümlere ait ortalama çıktı, büyük ortalama etrafında tesadüfi olarak değişmektedir.

Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA için 2. aşama modeli aşağıdaki gibidir: ($\gamma_{01}=0$ olan)

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \quad (2.7)$$

γ_{00} , ana kütle için büyük ortalama (J tane grubun ortalamalarının ortalaması)

u_{0j} ise, j. gruba ait 0 ortalamalı ve τ_{00} varyanslı tesadüfi etkiyi gösterir.

(2.7) deki eşitliği (2.6) da yerine koyduğumuzda ise;

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + r_{ij} \quad (2.8)$$

şeklindeki γ_{00} büyük ortalamalı, u_{0j} (2. aşama) grup etkili ve r_{ij} (1. aşama) birey etkili tek yönlü ANOVA modeli elde edilir. Bu model tesadüfi etkili modeldir(random-effects) çünkü grup etkileri tesadüfi olarak yorumlanır. Bağımlı değişkene ait varyans ise;

$$Var(Y_{ij}) = Var(u_{0j} + r_{ij}) = \tau_{00} + \sigma^2 \quad (2.9)$$

şeklindedir.

(2.6) ve (2.7) deki hiyerarşik model eşitlikleri, 1. yada 2. aşamaya ait hiçbir tahminci içermedikleri için “tam koşulsuz model” (fully unconditional) ya da “boş model” (empty model) olarak da adlandırılırlar.

Tek yönlü ANOVA modelinin tahmini, hiyerarşik veri analizinin hazırlayıcı adımı olarak yararlıdır. Büyük ortalama γ_{00} , için nokta ve güven aralığı tahmini yapar. Her iki aşamada çıktıdaki değişkenlikle ilgili bilgi verir. σ^2 parametresi gruplar içi değişkenliği (gruplar içi varyans), τ_{00} ise gruplar arası değişkenliği (gruplar arası varyans) gösterir. Gruplar içi

varyans, grupların kendi ortalamaları etrafındaki dağılım ölçüsü ve gruplar arası varyans ise grup ortalamaları arasındaki varyanstır. (Snijders & Bosker, 1999)

Tek yönlü ANOVA modelinden elde edilen yararlı bir parametre ise, gruplar içi korelasyon katsayısıdır.(intraclass correlation coefficient). Ve aşağıdaki gibi hesaplanır. (Sheslen vd.,2004)

$$\rho = \rho(Y_{ij}, Y_{tj}) = \frac{\tau_{00}}{(\tau_{00} + \sigma^2)} \quad (2.10)$$

yani;

ρ = gruplar arasındaki ana kütle varyansı/ toplam varyanstır. (2.aşama değişkenliğinin toplam değişkenliğe oranı) Bu parametre “gruplar içi korelasyon katsayısı” olarak adlandırılır. Çünkü, tesadüfi olarak seçilen aynı makro birimlerden (2. aşama birimleri/ gruplar) tesadüfi olarak seçilen mikro birimler (1.aşama birimleri) arasındaki korelasyona eşittir.

Gruplar içi korelasyon katsayısından tasarım etkisini (design effect, $deff$) hesaplamak için yararlanılır. Tasarım etkisi, kümelenmiş verilerin örnek varyansı üzerindeki etkisini ölçer. $deff$, basit tesadüfi örnekleme ile elde edilen örnek varyansının gerçek örnek varyansına bölünmesiyle elde edilen bir orandır. Kümelenmiş örneklerde $deff$ aşağıdaki şekilde hesaplanır: (Yu, 2000)

$$deff = 1 + \rho(\tilde{n}_{grup} - 1)$$

eşitlikte

$\tilde{n}_{grup}$ = gruplar için ortalama örnek büyüklüğüdür, ρ ise gruplar içi korelasyon katsayısıdır $\rho = 0$ yada $n_{grup} = 1$ olduğunda $deff = 1$, diğer tüm durumlarda ise $deff > 1$ olur yani standart istatistiksel formüller örnek varyansını olduğundan küçük tahmin ederler ve bu da I. tip hatanın gerçekleşme olasılığını artırır.

Sonuç olarak bakıldığında, $deff > 1$ olması, kümeleniş veri seti için klasik regresyon analizi yerine çok aşamalı modellerin uygun olduğunu gösterir.

2.1.1.2 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANCOVA Modeli: (One Way ANCOVA With Random Effects)

Tesadüfi etkili tek yönlü ANCOVA modeli, hiyerarşik lineer modeldeki (2.2 ve 2.4 eşitliğindeki), 2. aşama parametrelerinin τ_{01} ve γ_{11} 'in ve tesadüfi etkilerin u_{1j} 'nin 0'a eşit olduğu modeldir. (2.2) deki 1. aşama modeli geçerlidir.

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + r_{ij} \quad (2.11)$$

2. aşama modeli ise;

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \quad (2.12a)$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} \quad (2.12b)$$

şeklinde yazılabilir. (2.12b) de görüldüğü üzere X_{ij} , her 2. aşama birimi için sabit aynı etkiye sahiptir.

Birleştirilmiş model ise (2.13) de verilmiştir.

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + u_{0j} + r_{ij} \quad (2.13)$$

Standart ANCOVA modeli ile (2.13) deki eşitlik arasındaki fark; buradaki grup etkisi u_{0j} nin, sabit değil tesadüfi gibi tasarlanmasıdır. Gruplar bir bütün olarak değil de, ana kütleden çekilen örnekler gibi düşünüldüğünde ana kütle hakkında bilgi almak amacıyla, standart ANCOVA yerine tesadüfi katsayılı modeller kullanılır. Özellikle de küçük grup genişliğinde ($2 \leq n_j \leq 50(100)$) tesadüfi katsayılı modeller, standart ANCOVA modellerine göre daha avantajlıdır. (Snijders & Bosker, 1999)

(2.13) deki eşitlikte, γ_{00} ortalama gruplar içi sabittir.

γ_{10} , Y_{ij} 'nin X_{ij} üzerindeki regresyonunda, X_{ij} 'nin gruplar içi toplanmış regresyon katsayısıdır ve X_{ij} de meydana gelecek bir birimlik değişikliğe karşılık Y_{ij} de meydana gelecek değişikliği gösterir.

β_{0j} , X_{ij} içindeki birimler arası farklılıklar için düzenlenmiş 2. aşama birimleri için çıktı ortalamasıdır. μ_{Y_j} , j. gruptaki çıktı ortalaması olduğu zaman; $\beta_{0j} = \mu_{Y_j} - \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{..})$ 'dir. X_{ij} değişkenine bağlı kalıntı varyansı,

$$Var(Y_{ij} | X_{ij}) = Var(u_{0j}) + Var(r_{ij}) = \tau_{00} + \sigma^2 \text{ 'dir.} \quad (2.14)$$

Farklı iki birim arasındaki kovaryans;

$$Cov(Y_{ij}, Y_{i'j} | X_{ij}, X_{i'j}) = Var(u_{0j}) = \tau_{00} \quad (2.15)$$

Aynı gruptaki iki birim arasındaki kovaryans yada korelasyonun bir kısmı X değerleri ile açıklanabilirken bir kısmı ise açıklanamaz. Bu iki birim arasındaki açıklanamayan korelasyon ise “gruplar içi kalıntı korelasyon katsayısı” (residual intraclass correlation coefficient) olarak adlandırılır ve aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$\rho(Y|X) = \frac{\tau_{00}}{(\tau_{00} + \sigma^2)}$$

Tesadüfi olarak seçilen bir grup içinden tesadüfi olarak seçilen iki Y değeri arasındaki korelasyondur. $\rho=0$ yada $u_{0j}=0$ ise, X değişkenine bağlı olan Y değişkeni için gruplar önemsizdir, yani sıradan doğrusal regresyon kullanılabilir. Eğer, ρ pozitif ise, yani τ_{00} pozitif ise, hiyaraşik lineer modeller sıradan E.K.K'e göre daha uygundur, çünkü doğrusal regresyon analizi ile elde edilen katsayı tahminleri güvenilir değildir. (Snjders & Bosker,1999) Tesadüfi etkili ANCOVA modeli, 2.aşama açıklayıcı değişkenlerinin bilgisi için de izin vermektedir. Birleştirilmiş model ise aşağıdaki hali alır:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + u_{0j} + r_{ij} \quad (2.16)$$

Bu model klasik ANCOVA modelinden farklıdır. Klasik ANCOVA modeli 2. aşama açıklayıcı değişken etkisi γ_{01} 'in her grup için aynı olduğunu varsayar. (Snjders & Bosker, 1999)

2.1.1.3 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli (Means- As- Outcomes Regression)

Sabit parametrelerin çıktı olduğu regresyon modellerinde, her bir grup ortalaması grup karakteristikleri yolu ile tahmin edilir. Yani, modelde tahmin amacıyla, 2.aşama açıklayıcı değişkenleri kullanılmaktadır. Sabit parametrelerin çıktı olduğu regresyon modelinde, “çıktı” kelimesi, ortalamada meydana gelen değişkenliği tahmin etmek amacıyla 2.aşama açıklayıcı değişkeninin kullanıldığına dikkat çekmektedir. Bu alt model için, (2.6) daki 1.aşama modeli geçerlidir.

2. aşama modeli ise;

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} \quad (2.17)$$

şeklindedir.

Sadece bir tane 2.aşama açıklayıcı değişkeni W_j içermektedir. (2.17)'i (2.6) da yerine koyarsak birleştirilmiş model ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} + r_{ij} \quad (2.18)$$

u_{0j} , (2.7) deki eşitlikten farklı bir anlam içermektedir. Tesadüfi değişken u_{0j} , j. birim ortalamasının ana kütle ortalamasından sapmasını gösterirken, şimdi ise $u_{0j} = \beta_{0j} - \gamma_{00} - \gamma_{01}W_j$ 'yi göstermektedir.

u_{0j} 'nin varyansı τ_{00} , 2. aşama açıklayıcı değişkeni W_j 'nin varlığında β_{0j} deki koşullu varyansdır; yani; $Var(\beta_{0j}|W_j) = \tau_{00}$ 'dır.

2.1.1.4 Eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen modeller (A Model With Nonrandomly Varying Slopes)

1. aşama modeli (2.2) ile aynıdır, 2. aşama modeli ise aşağıda verilmiştir:

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j \quad (2.22)$$

ve model (2.2) ve (2.20) ile birleştirildiğinde, birleşik model

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet j}) + \gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet j}) + u_{0j} + r_{ij} \quad (2.23)$$

halini alır.

Bu modelde, eğim parametresi gruptan gruba değişir fakat bu değişim tesadüfi değildir. Model ilk bakışta sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modellere benzese de bu modellerden eğim parametresinin de gruptan gruba değişmesi nedeniyle farklılık gösterir. Sabit ve eğim parametresi tesadüfi olarak değişen modellerden de farklıdır, çünkü eğim parametresi gruptan gruba değişmekte fakat tesadüfi olarak değişmemektedir.

2.1.2 Eğim Ve Sabit Parametresi Tesadüfi Olarak Değişen Modeller (Random Intercept And Slopes Models- Random Slopes Models)

Tesadüfi katsayılı modeller ve sabit ve eğim parametresi çıktı olan modeller, sabit ve eğim parametresi tesadüfi olarak değişen modelleri meydana getirir.

2.1.2.1 Tesadüfi Katsayılı Regresyon Modeli (Random-Coefficients Regression Model)

Sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modellerde, 1. aşama sabit katsayısı β_{0j} tesadüfi olarak gözüktür. 1. aşama eğim parametresi tek yönlü ANOVA modeli yada sabit parametresi çıktı olan modelde yoktur. Tesadüfi etkili ANCOVA modeli β_{1j} yi içerir, fakat tüm gruplar için genel bir etkiye sahiptir. Tesadüfi katsayılı regresyon modelinde ise, 1. aşama sabit ve bir yada daha fazla eğim parametresi tesadüfidir.

1. aşama modeli (2.2) deki modelin aynısıdır. 2. aşama modeli ise (2.4) deki modelin basitleştirilmiş halidir. Tesadüfi katsayılı regresyon modelinde, 1. aşama parametreleri 2. aşama birimleri yani gruplara karşı değişir fakat bu değişim 2. aşama birimlerine ait özelliklere bağlı değildir tesadüfidir. 2.aşama model aşağıdaki verilmiştir:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \quad (2.24a)$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j} \quad (2.24b)$$

γ_{00} , 2. aşama birimlerinin karşısında ortalama sabit,

γ_{01} , 2. aşama birimlerine karşılık ortalama regresyon eğim parametresi,

u_{0j} , 2. aşama j. birim ile ilişkisi bulunan sabitte meydana gelen artış,

u_{1j} , 2. aşama j. birim ile ilişkisi bulunan eğim parametresinde meydana gelen artış,

2. aşama tesadüfi etkilerden etkilerine ait varyans- kovaryans matrisi T ile ifade edilir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$Var \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} \\ \tau_{01} & \tau_{11} \end{bmatrix} = T \quad (2.25)$$

$Var(u_{0j}) = \tau_{00} = 1$. aşama sabit parametresi için koşulsuz varyans,

$\text{Var}(u_{1j}) = \tau_{11} = 1$. aşama eğim parametresi için koşulsuz varyans,

$\text{Cov}(u_{0j}, u_{1j}) = \tau_{01} = 1$. aşama eğim ve sabit parametreleri arasındaki koşulsuz varyans.

Bu varyanslar koşulsuz varyans olarak adlandırılırlar, çünkü 2. aşama tahmincileri ne (2.24a) ve (2.24b) eşitliklerinde yoktur.

(2.24a) ve (2.24b)' yi (2.2) deki modelde yerine koyduğumuzda birleştirilmiş model:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet j}) + u_{0j} + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet j}) + r_{ij} \quad (2.26)$$

şeklinde dir. Bu modele göre bağımlı değişken, u_{0j} (j. birimin ortalama üzerindeki tesadüfi etkisi), u_{1j} 'nin β_{1j} eğim parametresi üzerindeki tesadüfi etkisi olduğu $u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet j})$ ve 1. aşama hatası r_{ij} şeklindeki üç bileşenden meydana gelen tesadüfi hata bileşenleri ile ortalama regresyon eşitliğinin $(\gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet j}))$ toplamının bir fonksiyonudur.

2.1.2.2 Sabit Ve Eğim Parametresi Çıktı Olan Modeller: (Intercepts And Slopes-As-Outcomes)

Tesadüfi etkili regresyon modeli, 2. aşama birimlerine karşılık gelen regresyon katsayılarındaki (eğim ve sabit) değişkenliği tahmin etmemize izin verir. Bundan sonraki adım ise; değişkenliğin modelinin kurulmasıdır. Bu model ise 2. aşama açıklayıcı değişkenleri ile kurulur. Yani, modelde sabit ve eğim parametresindeki değişkenliği açıklamak amacıyla 2. aşama açıklayıcı değişkenlerinden yararlanılır. Bu duruma dikkat çekmek amacıyla da model, sabit ve eğim parametrelerinin “çıktı” olduğu modeller olarak adlandırılır. Bu modellere tam hiyerarşik lineer modeller de denilmektedir ve (2.2) ve (2.4)deki modeller geçerlidir.

Sonuç olarak, çok aşamalı modeller, sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modeller, sabit ve eğim parametresi tesadüfi olarak değişen modeller iki başlık altında incelenebilir. Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli, ortalamaların çıktı olduğu model, tek yönlü ANCOVA modeli ve eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen modeller, sabit parametresi tesadüfi olarak değişen modellerdir. Bu modellerde, varyans bileşenleri 1. aşamada σ^2 ve 2. aşamada ise τ_{00} 'dır. ANOVA ve ortalamaların çıktı olduğu modelde, 1. aşama eğim parametresi

yoktur. ANCOVA modelinde ise, 1. aşama eğimi vardır fakat 2. aşama birimlerine karşı sabittir değişmez. Eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen modelde, toplamsal tesadüfi bileşenler olmadan W_j nin bir fonksiyonu olarak sabitler çeşitlendirilir. Ters olarak, tesadüfi katsayılı modeller ve sabit ve eğimlerin çıktığı olduğu modeller, hem sabit hem eğim için tesadüfi varyasyonlara izin verirler ve sabit ve eğim parametresinin tesadüfi olarak değiştiği modelleri meydana getirirler.

Çapraz aşamalı etkileşim terimi ise, $\gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})$ 'dir. Genelde, sabitteki varyasyon tahmin edilmek istendiğinde, birleştirilmiş modellerde çapraz aşamalı etkileşim terimleri bulunur. Bu tip terimler, sabitler ve eğimlerin çıktığı olduğu modeller ve tesadüfi olmayan eğim parametrelili modellerde vardır.

2.1.3 Birden Fazla 1.Aşama (X_s) Ve 2.Aşama (W_s) Açıklayıcı Değişkeni İçin Basit Hiyerarşik Lineer Modeller

Basit hiyerarşik lineer modellerde birden fazla 1 ve 2. aşama açıklayıcı değişken olduğu durumu açıklayabilmek amacıyla, bu bölümde iki tane 1.aşama açıklayıcı değişkeni için model kuracağız. Modelde sadece bir tane 2.aşama açıklayıcı değişkeni (W_j) ve iki tane 1.aşama açıklayıcı değişkeninin (X_{1ij}, X_{2ij}) bulunduğunu kabul edelim. Grup ortalamaları etrafında dağılan X_{1ij}, X_{2ij} için 1.aşama modeli (2.27) de verilmiştir. (Raudenbesh & Bryk, 2002)

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1\cdot j}) + \beta_{2j}(X_{2ij} - \bar{X}_{2\cdot j}) + r_{ij} \quad (2.27)$$

Gruplara göre farklılık gösteren β_{2j} 'nin 2. aşamada modellenmesi için üç tane seçenek vardır.

- Bunlardan birincisi, β_{2j} 'nin 2.aşama birimlerine karşı sabit etkiye sahip olduğu durumda kurulacak modeldir ve 2. aşama modeli $\beta_{2j} = \gamma_{20}$ şeklindedir. γ_{20} , X_{2ij} 'nin 2.aşama birimlerine karşı genel etkisini gösterir.

- İkinci seçenek de, β_{2j} 'i, ortalama değer (γ_{20}) ile her 2.aşama birimine ait tesadüfi etkinin toplamının bir fonksiyonudur. $\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$ şeklinde gösterilir ve β_{2j} 'i gruplara karşı tesadüfi olarak değişmektedir.
- Üçüncü bir seçenek ise eğim parametresinin çıktı olduğu modeldir yani β_{2j} 'i 2.aşama açıklayıcı değişkeninin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Yani $\beta_{2j} = \gamma_{20} + \gamma_{21}W_j + u_{2j}$ şeklindedir. Diğer taraftan, β_{2j} deki kalıntı varyansı yani $Var(u_{2j}) = \tau_{22}$ önemsiz olabilir bu durumda model de eğim parametresi tesadüfi olarak değişmeyen model olur. Yani $\beta_{2j} = \gamma_{20} + \gamma_{21}W_j$ şeklindedir.

Birden fazla 2.aşama açıklayıcı değişkeni kullanıldığı durumda ise 2.aşama modelleri birbirinden farklı şekilde belirlenebilir. Yani parametreleri açıklamak amacıyla farklı 2.aşama açıklayıcı değişkenlerine başvurulabilir, bu durumda yorumlara çok dikkat edilmelidir. 2.aşama açıklayıcı değişkenleri doğrudan grup aşamasında tanımlanabileceği gibi, 1.aşamada tanımlanan değişkenlerin birleştirilmesinden de elde edilebilirler. Bir çok araştırmada grup genişliği, n_j de gruplar arası değişken olarak yani 2.aşama açıklayıcı değişkeni olarak kullanılmıştır. (Snijders & Bosker, 1999)

Genel olarak 1 .aşama regresyon modeli;

$$\begin{aligned}
 Y_{ij} &= \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + \dots + \beta_{Qj}X_{Qij} + r_{ij} \\
 &= \beta_{0j} + \sum_{q=1}^Q \beta_{qj}X_{qij} + r_{ij} \quad r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

şeklindedir. (2.28) deki eşitlikte bazıları sabit, bazıları tesadüfi bazıları ise tesadüfi olmayan $Q+1$ tane katsayı vardır. 2. aşama modelinde her bir β_{qj} aşağıdaki gibi modellenir (2. aşama açıklayıcı değişkenler $W_{sj}=1,2,\dots,S_q$ olmak üzere)

$$\begin{aligned}
\beta_{qj} &= \gamma_{q0} + \gamma_{q1}W_{1j} + \gamma_{q2}W_{2j} + \dots + \gamma_{qs_q}W_{s_qj} + u_{qj} \\
&= \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{s_q} \gamma_{qs}W_{sj} + u_{qj}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Birleştirilmiş model ise (2.30)' da verilmiştir.

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \sum_{q=1}^Q \gamma_{q0}X_{qij} + \sum_{s=1}^{s_q} \gamma_{0s}W_{sj} + \sum_{s=1}^{s_q} \sum_{q=1}^Q \gamma_{qs}W_{sj}X_{qij} + u_{0j} + \sum_{q=1}^Q u_{qj}X_{qij} + r_{ij} \tag{2.30}$$

Çizelge 2.1'de Çok aşamalı modelleri meydana getiren alt modeller, iki aşama için özet olarak verilmiştir.

Model	1. Aşama Modeli	2. Aşama Modeli	Birleştirilmiş Model	Sabit Etkiler	Tesadüfi Etkiler
SABİT PARAMETRESİ TESADÜFİ OLARAK DEĞİŞEN MODELLER (RANDOM INTERCEPT MODELS)					
1. Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli	$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij}$	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$	$Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + r_{ij}$	γ_{00}	u_{0j}
2. Ortalamaların Çıktı Olduğu Regresyon Modeli	$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij}$	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j}$	$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} + r_{ij}$	γ_{00}, γ_{01}	u_{0j}
3. Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANCOVA	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + r_{ij}$	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10}$	$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + u_{0j} + r_{ij}$	$\gamma_{00}, \gamma_{01}, \gamma_{10}$	u_{0j}
4. Tesadüfi Olarak Değişmeyen Eğim Parametrelili Modeller	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + r_{ij}$	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j$	$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{11}W_jX_{ij} + u_{0j} + r_{ij}$	$\gamma_{00}, \gamma_{01}, \gamma_{10}, \gamma_{11}$	u_{0j}
EĞİM VE SABİT PARAMETRESİ TESADÜFİ OLARAK DEĞİŞEN MODELLER					
1. Tesadüfi Katsayılı Regresyon Modeli	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij}$	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$	$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}X_{ij} + u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + r_{ij}$	γ_{00}, γ_{01}	u_{0j}
2. Sabit Ve Eğim Parametresi Çıktı Olan Modeller	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij}$	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j + u_{1j}$	$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{11}W_jX_{ij} + u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + r_{ij}$	$\gamma_{00}, \gamma_{01}, \gamma_{10}, \gamma_{11}$	u_{0j}

3.HİYERARŞİK LİNEER MODELLER İÇİN TAHMİN PRENSİPLERİ

2 aşamalı hiyerarşik lineer modellerde 3 tip parametre için tahmin yapılır. Bunlar; 2. aşama sabit etkileri için genelleştirilmiş en küçük kareler tahminleri, 1. aşama tesadüfi katsayıları için ampirik bayes tahminleri ve varyans-kovaryans bileşenleri için en çok olabilirlik tahminleridir. Her bir parametrenin tahmini bir diğerine bağlıdır. Varyans-kovaryans bileşenlerinin bulunduğu varsayımı altında, ilk olarak tesadüfi katsayılar ile sabit etkiler tahmin edilebilir. Daha sonra ise, bunların ışığında varyans-kovaryans bileşenlerini tahmin edebiliriz.

3.1 Sabit Etkilerin Tahmini

Bu bölümde, tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli, ortalamaların çıktı olduğu regresyon modeli ve genel modeller (sabit ve eğim parametresi çıktı olan modeller) için sabit etkilerin tahmini gösterilecektir.

İlk olarak tek yönlü ANOVA modelini ele alırız. Bu model tek sabit etkiye yani j. seviyeden meydana gelen 2. aşama birimleri için örnek ortalamasının ağırlıklı ortalaması olarak tahmin edilen, büyük ortalamaya ihtiyaç duyar.

İkinci olarak, 2. aşama regresyon katsayılarını içeren ortalamaların çıktı olduğu modeli ele alırız. Optimal ağırlıklandırma prensibi yine geçerlidir.

Üçüncü olarak ise tam hiyerarşik lineer modeller ele alınır. Optimal ağırlıklandırma prensibi geçerlidir fakat, burada ağırlıklandırma çok değişkenlidir ve matris notasyonu gerektirir.

3.1.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA Modeli

i.Nokta Tahmini

Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA 1. aşama modeli (3.1)'de verilmiştir.

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij} \quad (3.1)$$

1. aşama birimleri için $i = 1, 2, 3, \dots, n_j$ ve 2. aşama için $j = 1, 2, \dots, J$ 'dir $r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

j. gruptaki n_j gözleme karşılık örnek ortalamasını çıktı olarak alan 1. aşama modeli

$$\bar{Y}_{\bullet j} = \beta_{0j} + \bar{r}_{\bullet j} \quad (3.2)$$

şeklindedir. Ve modelde yer alan

$$\bar{r}_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{r_{ij}}{n_j}, \quad \bar{Y}_{\bullet j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

(3.2) deki eşitlik, örnek ortalaması $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin ,gerçek grup ortalaması β_{0j} 'nin, tahmini olduğunu gösterir. Tahminin hatası $\bar{r}_{\bullet j}$ 'nin varyansı ise;

$$Var(\bar{r}_{\bullet j}) = \frac{\sigma^2}{n_j} = V_j \quad (3.3)$$

şeklinde hesaplanabilir.

V_j hata varyansıdır, yani β_{0j} 'nin, tahmini $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin varyansıdır.

2. aşama modeli ise (3.4) de verilmiştir.

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \text{ 'dir.} \quad (3.4)$$

ve $u_{0j} \sim N(0, \tau_{00})$ olduğu varsayılır. τ_{00} , gerçek ortalamanın (β_{0j} 'nin) varyansıdır. τ_{00} parametre varyansı yerine geçer.

2. aşama modelini (3.4), 1. aşama modelinde (3.2), yerine koyarsak $\bar{Y}_{\bullet j}$ için elde edilen birleştirilmiş model (3.5) deki gibi olur.

$$\bar{Y}_{\bullet j} = \gamma_{00} + u_{0j} + \bar{r}_{\bullet j} \quad (3.5)$$

$\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin varyansı iki elemandan oluşur;

$$\begin{aligned}\text{Var}(\bar{Y}_{\bullet j}) &= \text{Var}(u_{0j}) + \text{Var}(\bar{r}_{\bullet j}) \\ &= \tau_{00} + V_j \\ &= \text{parametre varyansı} + \text{hata varyansı} \\ &= \Delta_j\end{aligned}\tag{3.6}$$

Parametre varyansı τ_{00} , 2. aşama birimleri için sabittir. Hata varyansı $V_j = \sigma^2 / n_j$ ise 2. aşama birimlerinin (n_j) örnek büyüklüğüne bağlıdır.

Eğer 2. aşama birimleri eşit örnek büyüklüğüne sahip olurlarsa, her V_j genel V ye eşit olur ve her Δ_j de genel Δ ya eşittir, yani $\Delta = \tau_{00} + V$ 'dir. γ_{00} 'ın tek, minimum varyanslı, yansız tahmin edicisi, $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'lerin ortalaması olur ve (3.7)'de verilmiştir.

$$\tilde{\gamma}_{00} = \sum \bar{Y}_{\bullet j} / J \tag{3.7}$$

Eğer örnek büyüklükleri eşit değilse, $\bar{Y}_{\bullet j}$, $\Delta_j = \tau_{00} + V_j$ şeklinde eşit olamayan varyansa sahiptir. Her $\bar{Y}_{\bullet j}$, γ_{00} 'ın Δ_j varyanslı, bağımsız, yansız tahmin edicisidir, $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin kesinliği (precision) ise;

$$\text{Kesinlik}(\bar{Y}_{\bullet j}) = \Delta_j^{-1} = 1/\text{var}(\bar{Y}_{\bullet j}) \tag{3.8}$$

şeklindedir.

Δ_j 'nin bilindiği varsayımı altında γ_{00} 'in tek, minumum varyanslı, yansız tahmin edicisi kesinliğin ağırlık olarak alındığı ortalamadır.

$$\hat{\gamma}_{00} = \sum \Delta_j^{-1} \bar{Y}_{\bullet j} / \sum \Delta_j^{-1} \quad (3.9)$$

(3.9) daki eşitlik γ_{00} 'in ağırlıklı en küçük kareler tahmincisi olarak adlandırılır. (Bu aynı zamanda en çok benzerlik tahmincisidir.).

ii. Aralık Tahmini

$\hat{\gamma}_{00}$ 'in kesinliği ise, kesinliklerin toplamına eşittir. Yani;

$$\text{Kesinlik } (\hat{\gamma}_{00}) = \sum \Delta_j^{-1} \text{ 'dir.} \quad (3.10)$$

$\hat{\gamma}_{00}$ ' in varyansı ise kesinliğin (toplam kesinliğin) tersidir.

$$\text{Var}(\hat{\gamma}_{00}) = (\sum \Delta_j^{-1})^{-1} \quad (3.11)$$

$\hat{\gamma}_{00}$ için 95% güven aralığı ise;

$$\hat{\gamma}_{00} \pm 1,96 (\sum \Delta_j^{-1})^{-1/2} \quad (3.12)$$

ile hesaplanabilir.

3.1.2 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli (Regression With Means-As-Outcomes)

i. Nokta Tahmini

1.aşama ortalamasının 2. aşama açıklayıcı değişkeni ile tahmin edildiği ortalamaların çıktı olduğu regresyon modelinde. 1. aşama modeli (3.1) deki eşitliktir. 2. aşama modeli ise içine

2. aşama açıklayıcı değişkenleri W_j 'yi alacak şekilde genişletilmiştir. 2. aşama modelinin, 1. aşamada yerine konulmasıyla elde edilen birleştirilmiş model ise (3.13) de verilmiştir.

$$\bar{Y}_{\bullet j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} + \bar{r}_{\bullet j} \quad (3.13)$$

Modelde W_j bulunduğu durumda, $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin varyansı aşağıdaki eşitlik yardımı ile hesaplanabilir:

$$\text{Var}(\bar{Y}_{\bullet j}) = \tau_{00} + V_j = \Delta_j \quad (3.14)$$

Eşitlikte $V_j = \sigma^2 / n_j$ 'dir.

$\Delta_j, \bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin kalıntı varyansısıdır yani W_j verildiği durumda $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin koşullu varyansısıdır. r_{ij} ile u_{0j} 'nin normal dağıldıkları ve bağımsız oldukları varsayılır.

Eğer her grup eşit örnek büyüklüğüne sahip olursa, Δ_j her grup için aynı olur ve γ_{01} 'in tek, yansız, minimum varyanslı tahmincisi de en küçük kareler tahmincisi olur.

$$\tilde{\gamma}_{01} = \frac{\sum (W_j - \bar{W}_{\bullet})(\bar{Y}_{\bullet j} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})}{\sum (W_j - \bar{W}_{\bullet})^2} \quad (3.15)$$

eşitlikte yer alan $\bar{W}_{\bullet} = \sum W_j / J$, $\bar{Y}_{\bullet\bullet} = \sum \bar{Y}_{\bullet j} / J$ şeklinde hesaplanır.

γ_{00} 'ın en küçük kareler tahmincisi ise (3.16) da verilmiştir.

$$\tilde{\gamma}_{00} = \bar{Y}_{\bullet\bullet} - \tilde{\gamma}_{01}\bar{W}_{\bullet} \quad (3.16)$$

Eğer örnek büyüklüğü eşit değilse, istatistik $\bar{Y}_{\cdot j}$ eşit olmayan varyansa sahiptir, yani $\Delta_j = \tau_{00} + V_j$ 'dir. Her Δ_j 'nin bilindiği varsayımı altında, γ_{01} 'in tek, minimum varyanslı, yansız tahmin edicisi her grup için kendi kesinliği ile (Δ_j^{-1}) orantılı, ağırlıklı en küçük kareler tahmincisidir. (Candel, 2004)

$$\hat{\gamma}_{01} = \frac{\sum \Delta_j^{-1} (W_j - \bar{W}_{\cdot}^*) (\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}^*)}{\sum \Delta_j^{-1} (W_j - \bar{W}_{\cdot}^*)^2} \quad (3.17)$$

$\bar{W}_{\cdot}^*$ ve $\bar{Y}_{\cdot\cdot}^*$ ise kesinliği ağırlık olarak alan ortalamalardır ve;

$$\bar{W}_{\cdot}^* = \frac{\sum \Delta_j^{-1} W_j}{\sum \Delta_j^{-1}} \quad (3.18a)$$

$$\bar{Y}_{\cdot\cdot}^* = \frac{\sum \Delta_j^{-1} Y_{\cdot j}}{\sum \Delta_j^{-1}} \quad (3.18b)$$

Eşitlikleri ile hesaplanabilir.

γ_{00} 'ın ağırlıklı en küçük kareler tahmincisi ise (3.19) da verilmiştir.

$$\hat{\gamma}_{00} = \bar{Y}_{\cdot\cdot}^* - \tilde{\gamma}_{01} \bar{W}_{\cdot}^* \text{ 'dır.} \quad (3.19)$$

ii. Aralık Tahmini

Δ_j 'nin bilindiği varsayımı altında, örnek istatistiği $\hat{\gamma}_{01}$ 'in varyansı;

$$\text{Var}(\hat{\gamma}_{01}) = [\sum \Delta_j^{-1} (W_j - \bar{W}^*)^2]^{-1} \quad (3.20)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$\hat{\gamma}_{01}$ için 95% güven aralığı ise (3.21) deki eşitlikte verilmiştir.

$$\hat{\gamma}_{01} \pm 1,96[\text{Var}(\hat{\gamma}_{01})]^{1/2} \quad (3.21)$$

3.1.3 Genel Modeller (Tam Hiyerarşik Modeller – Sabit Ve Eğim Parametrelerinin Çıktı Olduğu Modeller)

i. Nokta Tahmini

Q tane açıklayıcı değişkene sahip 1. aşama modeli matris notasyonu ile aşağıdaki gibi açıklanabilir.

$$Y_j = X_j \beta_j + r_j, \quad r_j \sim N(0, \sigma^2 I) \quad (3.22)$$

$$Y_j = \begin{bmatrix} Y_{1j} \\ Y_{2j} \\ \vdots \\ Y_{n_jj} \end{bmatrix}, \quad X_j = \begin{bmatrix} 1 & X_{1j} & \dots & X_{1j,p-1} \\ 1 & X_{2j} & \dots & X_{2j,p-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_{n_jj} & \dots & X_{n_jj,p-1} \end{bmatrix}, \quad \beta_j = \begin{bmatrix} \beta_{0j} \\ \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{n_j-1j} \end{bmatrix}, \quad r_j = \begin{bmatrix} r_{1j} \\ r_{2j} \\ \vdots \\ r_{n_jj} \end{bmatrix}$$

Burada;

Y_j : $n_j \times 1$ boyutlu çıktı (bağımlı değişken) vektörü

X_j : $n_j \times (Q+1)$ boyutlu açıklayıcı değişken matrisi (bu matrisin ilk sütunu 1'lerden diğer sütunları x'lerden oluşur.)

β_j : $n_j \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametre (katsayılar) vektörü

I : $n_j \times n_j$ boyutlu birim matris olarak tanımlanır.

r_j , $n_j \times 1$ boyutlu, 0 ortalama ile köşegen elemanları σ^2 , diğer elemanları 0 olan varyans-kovaryans matrisine sahip ve normal dağıldığı varsayılan tesadüfi hatalara ait vektördür.

β_j ' ye ait sıradan en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}_j$ (katsayılar vektörü)'dir ve bu katsayılar

$$\hat{\beta}_j = (X_j^T X_j)^{-1} X_j^T Y_j \quad (3.23)$$

ile bulunur.

Ve $\hat{\beta}_j$ 'ya ait dağılım matrisi; (parametre tahminlerinin parametre etrafındaki dağılım matrisi) yani $\hat{\beta}_j$ 'ya ilişkin varyans-kovaryans matrisi $Var(\hat{\beta}_j)$ yardımı ile hesaplanır.

$$Var(\hat{\beta}_j) = V_j = \sigma^2 (X_j^T X_j)^{-1} \quad (3.24)$$

(3.22) de (3.23) ü yerine koyduğumuzda 1. aşama modeli aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{\beta}_j = \beta_j + e_j, \quad e_j \sim N(0, V_j) \quad (3.25)$$

V_j , hata varyans matrisidir (error-variance matrix) ve β_j ' yi tahmin eden $\hat{\beta}_j$ 'nin dağılım matrisinden meydana gelir.

β_j için 2. aşama genel modeli:

$$\beta_j = W_j \gamma + u_j, \quad u_j \sim N(0, T) \quad (3.26)$$

olarak verilebilir.

$$w'_j = (1, W_{j1}, \dots, W_{j,Q-1}), \quad \gamma_p = (\gamma_{0p}, \gamma_{1p}, \dots, \gamma_{Q-1,p})$$

$$W_j = \begin{bmatrix} w'_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w'_j & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & w'_j \end{bmatrix}_{P \times PQ}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ . \\ . \\ \gamma_{P-1} \end{bmatrix}_{PQ \times 1},$$

$$\text{var}(u_j) = T = \begin{bmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} & \dots & \tau_{0,p-1} \\ \tau_{10} & \tau_{11} & \dots & \tau_{1,p-1} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \tau_{p-1,0} & \tau_{p-1,1} & \dots & \tau_{p-1,p-1} \end{bmatrix}$$

(3.26)'yı (3.25) de yerine koyduğumuzda birleştirilmiş model;

$$\hat{\beta}_j = W_j \gamma + u_j + e_j \quad (3.27)$$

olarak yazılır. (Zhang vd., 2000)

W_j verildiği durumda $\hat{\beta}_j$ 'nin dağılımı yani $\hat{\beta}_j$ 'ye ilişkin koşullu varyans-kovaryans matrisi

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \text{Var}(u_j + e_j) = T + V_j = \Delta_j \quad (3.28)$$

= parametre varyansı (dağılımı)+ hata varyansı (dağılımı- dispersion)

şeklinde yazılır.

- Eğer her grup eşit sayıda gözleme sahipse ve β_j 'nin her bir bileşenini için 2. aşama açıklayıcı değişkenleri aynı değerleri alıyorsa, her $\hat{\beta}_j$ de aynı dağılıma (Δ) sahip olur.

$$\Delta = T + V = T + \sigma^2 (X^T X)^{-1} \quad (3.29)$$

Bu durumda γ için tek, minimum varyanslı, yansız sıradan en küçük kareler regresyon tahmincisi (3.30) daki gibidir.

$$\hat{\gamma} = (\sum W_j^T W_j)^{-1} \sum W_j^T \hat{\beta}_j \quad (3.30)$$

- Eğer her gruptaki örnek büyüklükleri farklı ise, Δ_j gruptan gruba farklılık gösterir ve her Δ_j 'nin bilindiği varsayımı altında γ 'nın tek, minimum varyanslı, yansız genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisi;

$$\hat{\gamma} = (\sum W_j^T \Delta_j^{-1} W_j)^{-1} \sum W_j^T \Delta_j^{-1} \hat{\beta}_j \quad (3.31)$$

ile hesaplanır.

Genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisi, ağırlıkları her gruptaki verinin kesinliğine (Δ_j^{-1}) yani varyans-kovaryans matrisinin tersi olan matrise göre belirler. Genelleştirilmiş en küçük kareler tahmini ile ortalamaların çıktığı olduğu model için yapılan ağırlıklı en küçük kareler tahmini (3.17 deki) birbirine benzemektedir. (3.22) ve (3.26) daki eşitlikler için normallik varsayımı geçerli olduğu durumda (3.31) deki γ 'nın en çok olabilirlik tahminidir. (Raudenbesh & Bryk, 2002)

ii. Aralık Tahmini

γ için güven aralığı γ 'nın dispersion (dağılım) matrisi $V_{\hat{\gamma}}$ ye bağlıdır.

$$V_{\hat{\gamma}} = Var(\hat{\gamma}) = (\sum W_j^T \Delta_j^{-1} W_j)^{-1} \quad (3.32)$$

Örneğin, belirli bir γ_h elemanı için %95 güven aralığı;

$$Var(\gamma_h) \pm 1,96(V_{hh})^{1/2} \quad (3.33)$$

$V_{hh}, V_{\hat{\gamma}}$ matrisinin h. köşegen elemanıdır.

Tüm 1. aşama katsayılarının tesadüfi olması ve her 2. aşama biriminin en küçük kareler tahmini ($\hat{\beta}_j, 3.23$) için yeterli örneği içermesi durumunda $\hat{\gamma}$ 'nin formülü (3.31) ve $V_{\hat{\gamma}}$ 'nin formülü (3.32) geçerlidir. Fakat, bazı 1. aşama değişkenleri sabit etkilere sahipken, tesadüfi etkilere sahip olmayabilir. (3.34) deki modelde bazı 1. aşama değişkenleri sabit etkilere sahip fakat tesadüfi etkilere sahip değildir.

$$Y_j = X_j W_j \gamma + Z_j u_j + r_j \quad (3.34)$$

Z_j, X_j 'nin alt kümesidir ve Z_j 'nin sütunları tesadüfi etkilere sahip 1. aşama değişkenlerinden meydana gelirken, X_j 'nin sütunlarında ise sadece sabit etkiler sahip 1. aşama değişkenleri vardır.

Y_j 'nin marjinal varyansı;

$$Var(Y_j) = V_{y_j} = Z_j T Z_j^T + \sigma^2 I_j \quad (3.35)$$

şeklindedir.

I , $(n_j \times n_j)$ boyutunda birim matristir. Sabit etkiler için genelleştirilmiş en küçük kareler tahmini ise aşağıdaki hale dönüşür.

$$\hat{\gamma} = \left(\sum_{j=1}^J W_j^T X_j^T V_{y_j}^{-1} X_j W_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J W_j^T X_j^T V_{y_j}^{-1} Y_j \quad (3.36)$$

Varyans- kovaryans matrisi ise;

$$Var(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J W_j^T X_j^T V_{y_j}^{-1} X_j W_j \right)^{-1} \quad (3.37)$$

ile hesaplanabilir.

Eğer $Z_j = X_j$ ise

$$X_j^T V_{y_j}^{-1} X_j = \Delta_j^{-1} \quad (3.38)$$

eşitliği geçerli olacak ve (3.37) deki eşitlik (3.32) tüm 1. aşama değişkenlerinin tesadüfi etkilere sahip olduğu hale dönüşecektir.

3.2 Birinci Aşama Tesadüfi Katsayılarının Tahmini

1. aşama modellerinde, çıktılar 2.aşama birimlerine karşı değişen katsayılara bağlıdır. 2. aşama birimleri olan gruplara göre değişen 1.aşama katsayılarının tahmini bu bölümde açıklanacaktır.

3.2.1 Tek yönlü ANOVA durumu

i. Nokta tahmini

İki aşamalı basit modeller (3.1) ve (3.4) de verilmiştir. Örnek ortalamasının çıktı olduğu model ise (3.2) de verilmiştir.

$$\bar{Y}_{\bullet j} = \beta_{0j} + \bar{r}_{\bullet j} \quad \bar{r}_{\bullet j} \sim N(0, V_j), \quad V_j = \sigma^2 / n_j \quad (3.39)$$

2 .aşama modeli ise;

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \text{ 'dir.} \quad u_{0j} \sim N(0, \tau_{00}) \quad (3.40)$$

şeklindedir.

Bu model β_{0j} için iki alternatif tahminci önermektedir. Birincisi, 1. aşama modelinde

$$\beta_{0j} \text{ 'nin yansız tahmincisi } V_j \text{ varyanslı } \bar{Y}_{\bullet j} \text{ 'dir. Bununla birlikte } \hat{\gamma}_{00} = \frac{\sum \Delta_j^{-1} \bar{Y}_{\bullet j}}{\sum \Delta_j^{-1}} \text{ ise her } \beta_{0j}$$

için genel bir tahminci görünümündedir. Bayes tahmincisi (β_{0j}^*) bu iki yolun ağırlıklı kombinasyonunu meydana getirir. Ve

$$\beta_{0j}^* = \lambda_j \bar{Y}_{\bullet j} + (1 - \lambda_j) \hat{\gamma}_{00} \quad (3.41)$$

Şeklinde hesaplanabilir.

Ağırlık olarak verilen λ_j , β_{0j} için yapılan en küçük kareler tahmincisi ($\bar{Y}_{\bullet j}$)'nin güvenilirliğine (reliability) eşittir.

$$\lambda_j = Var(\beta_{0j}) / Var(\bar{Y}_{\bullet j}) = \tau_{00} / (\tau_{00} + V_j) \quad (3.42)$$

$$= (\text{parametre varyansı}) / (\text{parametre varyansı} + \text{hata varyansı})$$

Klasik test teorisine ait dilde, $\bar{Y}_{\bullet j}$ bilinmeyen parametre β_{0j} 'nin gerçek ölçüsüdür. λ_j güvenilirliğin yerine konulur çünkü, gerçek skor yada parametre varyansının, gözlenen skor yada örnek ortalamasının toplam varyansına bölünmesi ile bulunur.

Güvenirlik (λ_j);

a) Her grup için örnek büyüklüğü eşit olduğu durumda grup ortalaması 2. aşama birimlerine göre tatmin edici değişimler gösterdiğinde ve

b) Gruplardaki veri sayısı yeterince büyük olduğu durumda

1'e eşit olabilir.

Örnek ortalaması yüksek güvenilirliğe sahip bir tahmin ise, $\bar{Y}_{\bullet j}$, β_{0j}^* 'nin üzerinde büyük bir ağırlığa sahip olur. Örnek ortalaması güvenilir değilse, büyük ortalama tahini γ_{00} , β_{0j}^* 'nin üzerine olduğundan büyük bir ağırlık verecektir.

Ağırlıklı ortalama β_{0j}^* , aşağıdaki gibi de anlaşılabilir;

$$\lambda_j = V_j^{-1} / (V_j^{-1} + \tau_{00}^{-1}) \quad (3.43a)$$

ve

$$1 - \lambda_j = \tau^{-1}_{00} / (V_j^{-1} + \tau^{-1}_{00}) \quad (3.43b)$$

Yukarıdaki eşitliklere göre λ_j yani β^*_{0j} nin tahmini için $\bar{Y}_{\bullet j}$ deki ağırlık, β_{0j} nin tahmini olan $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin kesinliği V_j^{-1} ile orantılıdır. $\hat{\gamma}_{00}$ uygun olarak verilen, $1 - \lambda_j$ ağırlığı, parametrelerin (β_{0j}) kendi merkezi eğilimleri γ_{00} etrafındaki yoğunlukları τ_{00}^{-1} ile orantılıdır. $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'nin daha kesin β_{0j} tahmini, daha fazla uygun ağırlık gerektirir. Yada, β^*_{0j} değerlerinin kendi merkezi eğilimleri γ_{00} etrafındaki daha yoğun olduklarında, $\hat{\gamma}_{00}$ için daha fazla ağırlık uygun olur.

Yani, ağırlıklı ortalama β^*_{0j} , daha küçük hata kareleri ortalamasına sahip β_{0j} tahminlerinden daha optimal değildir. Aslında, β^*_{0j} γ_{00} 'a göre sapmalıdır. Gerçek β_{0j} değeri γ_{00} ' dan büyük olduğunda β^*_{0j} negatif sapmaya sahip (sapmalı), gerçek β_{0j} değeri γ_{00} ' dan küçük olduğunda ise β^*_{0j} pozitif sapmaya (sapmalı) sahiptir. Yinede, herhangi bir sapmalı tahmin ediciye ($\bar{Y}_{\bullet j}$ gibi) göre, β^*_{0j} ortalama olarak β_{0j} değerlerine daha yakındır. $\bar{Y}_{\bullet j}$ ile β_{0j} arasındaki ilişkinin verimliliği, yaklaşık olarak bütünlüğü bozmayan λ_j ' ye eşittir. Çünkü, β^*_{0j} , $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'yi γ_{00} a doğru çeker, bu yüzden β^*_{0j} çekilmiş tahminci (shrinkage estimator) olarak adlandırılır. (Raudenbush, 1988) β^*_{0j} tahmini Bayes tahmini olarak da adlandırılır. Varyanslar bilinmediğinde ve β^*_{0j} (3.41) deki gibi λ_j ' ye bağlı olduğunda ise β^*_{0j} 'ye ampirik bayes tahmini denilebilir. (Morris, 1983)

ii. Aralık Tahmini.

β_{0j} için güven aralığı V_j^* üzerine kurulabilir.

$$V_j^* = (V_j^{-1} + \tau_{00}^{-1})^{-1} + (1 - \lambda_j)^2 \text{var}(\hat{\gamma}_{00}) \quad (3.44)$$

β_{0j} için 95% güven aralığı ise

$$\beta_{0j}^* \pm 1,96 V_j^{*1/2} \quad (3.45)$$

ile verilir.

σ^2 ve γ_{00} bilindiği durumda, güven aralığı kesindir. Varyanslar bilinmediği durumda ise sadece tahmindir ve güven aralığı olduklarından daha dar olabilir. J yeterince büyük olmazsa, güven aralıkları tedbirli kullanılmalıdır.

3.2.2 Sabit Parametrelerin Çıktı Olduğu Regresyon Modeli (Regression With Means-As- Outcomes)

i. Nokta Tahmini

Bu bölümde, β_{0j} tahmini için 2. aşamaya ait bilgileri, değişkenleri (W_j) kullanmak istediğimiz durum için β_{0j} 'nin en iyi tahmincisi açıklanacaktır.

1 . aşama modeli (3.2) deki gibidir ve 2 aşama modeli ise (3.46)' da verilmiştir.

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j}, \quad u_{0j} \sim N(0, \tau_{00}) \quad (3.46)$$

Yine β_{0j} için iki tahminci ile karşılaşırız. Birincisi, örnek ortalamamız $\hat{\beta}_{0j} = \bar{Y}_{\bullet j}$ 'dir. İkincisi ise, W_j verildiği durumda β_{0j} için tahmin edilen değerler;

$$\hat{\beta}_{0j} = \hat{\gamma}_{00} + \hat{\gamma}_{01}W_j \quad (3.47)$$

şeklindedir.

Bu iki tahmini birleşik tahminde bir araya getirirsek;

$$\hat{\beta}_{0j} = \lambda_j \bar{Y}_{\bullet j} + (1 - \lambda_j)(\hat{\gamma}_{00} + \hat{\gamma}_{01} W_j) \quad (3.48)$$

için en iyi tahmine ulaşmış oluruz.

Yine, β_{0j}^* çekilmiş tahminci (shrinkage estimator) yada ampirik Bayes tahmincisi olarak adlandırılır. $\bar{Y}_{\bullet j}$, büyük ortalamadan çok açıklayıcı değişkene doğru çekilmiştir. Bu tahminden, koşullu çekilmiş tahminci (conditional shrinkage estimator) olarak bahsedebiliriz, çünkü çekilme miktarı W_j 'ye bağlıdır. $\bar{Y}_{\bullet j}$ 'ye uygun ağırlık burada da onun kesinliği olan V_j^{-1} ile orantılıdır fakat burada açıklayıcı değişkene uygun ağırlık, β_{0j} 'nin regresyon doğrusu $(\hat{\gamma}_{00} + \hat{\gamma}_{01} W_j)$ etrafındaki yoğunluğu ile (τ_{00}^{-1}) orantılıdır. Eğer, β_{0j} deki varyasyonun büyük oranı, W_j ile açıklanırsa, regresyon doğrusu etrafındaki hata varyansı (τ_{00}) küçük olacaktır. Ve bunun sonucu olarak, β_{0j} 'nin regresyon doğrusu etrafındaki yoğunluğu, τ_{00}^{-1} , büyük olabilir.

Ampirik Bayes tahmincisine β_{0j}^* 'ye karşılık gelen ampirik Bayes kalıntısı u_{0j}^* 'dir . Ve bu kalıntı, β_{0j}^* 'nin 2. aşama modeli ile tahmin edilen değerden sapmasının tahminidir. (3.49)'daki eşitlikte de açıkça görülmektedir.

$$u_{0j}^* = \beta_{0j}^* - \hat{\gamma}_{00} - \hat{\gamma}_{01} W_j \quad (3.49)$$

Bu en küçük kareler kalıntıları $(\hat{u}_{0j})$ ile karşılaştırma açısından gereklidir. $\hat{u}_{0j}$, β_{0j} 'nin sıradan en küçük kareler tahmininin, 2. aşama modelinden elde edilen tahmininden sapmasının tahminidir. (3.50) deki formül ile ifade edilebilir.

$$\hat{u}_{0j} = \bar{Y}_{\bullet j} - \hat{\gamma}_{00} - \hat{\gamma}_{01} W_j \quad (3.50)$$

u_{0j}^* değeri, $\hat{u}_{0j}$ değerinin 0'a doğru çekildiği değerdir.

$$u_{0j}^* = \lambda_j \hat{u}_{0j} \quad (3.51)$$

Buna göre eğer λ_j 'nin güvenilirliği tam ise çekilmeye gerek yoktur. Eğer $\lambda_j=0$ ise, açıklayıcı değişkene doğru çekilme (3.45 gibi) tamamlanmıştır.

ii. Aralık Tahmini

β_{0j} için güven aralığı, V_j^* ve açıklayıcı değişken W_j 'ye göre oluşturulabilir. V_j^*

$$V_j^* = (V_j^{-1} + \tau_{00}^{-1})^{-1} + (1 - \lambda_j)^2 [\text{var}(\hat{\gamma}_{00} + \hat{\gamma}_{01} W_j)] \quad (3.52)$$

şeklinde hesaplanırken; β_{0j} için 95% güven aralığı ise (3.53) de verilmiştir.

$$\beta_{0j}^* \pm 1,96 V_j^{*1/2} \quad (3.53)$$

3.2.3 Genel Modeller (Tam Hiyerarşik Modeller / Sabit Ve Eğim Parametrelerinin Çıktı Olduğu Modeller)

i. Nokta Tahminleri

β_j için en iyi tahminçileri bulmak amacıyla çekilme (shrinkage) prensiplerini (3.22) ve (3.26) deki eşitlikler yani tam hiyerarşik lineer modeller için genelleştirebiliriz. Yine β_j tahmini için iki alternatif vardır. Birinci tahminci, j. grup verisine esas alan basit sıradan en küçük kareler tahmincisidir. ($\hat{\beta}_j$) Tam hiyerarşik lineer modeller için (3.54) deki eşitlik yardımı ile hesaplanabilir.

$$\hat{\beta}_j = (X_j^T X_j)^{-1} X_j^T Y_j \quad (3.54)$$

İkinci tahminci, W_j deki grup karakterlerinin verildiği durumda, β_j 'ye ait açıklayıcı değerdir.

$$\hat{\hat{\beta}}_j = W_j \hat{\gamma} \quad (3.55)$$

$\hat{\gamma}$, genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi (3.31 deki) ile tahmin edilmiştir. Bu iki tahmincinin optimal kombinasyonu ise

$$\beta_j^* = \Lambda_j \hat{\beta}_j + (I - \Lambda_j) W_j \hat{\gamma} \quad (3.56)$$

yardımları ile hesaplanır ve formülde yer alan Λ_j ise;

$$\Lambda_j = T(T + V_j)^{-1} \quad (3.57)$$

ile elde edilir. Λ_j , β_j için parametre dağılım matrisinin, toplam dağılım matrisine oranıdır.

Λ_j , çok değişkenli güvenirlik matrisi (multivariate reliability matrix) olarak adlandırılır.

ii. Birinci Aşama Sıradan En Küçük Kareler Katsayılarının Güvenirliği

τ_{qq} ve v_{qqj} olarak gösterilen T ve V_j 'nin köşegen elemanları, sırasıyla Q+1 tane sıradan en küçük kareler 1 .aşama katsayılarının güvenirliğinin hesaplanması için kullanılır.

$$güvenirlilik(\hat{B}_{qj}) = \tau_{qq} / (\tau_{qq} + v_{qqj}), \quad q=0,1,2,...,Q \quad (3.58)$$

$\hat{\beta}_{qj}$ 'nin örnek varyansı v_{qqj} , J birim arasında farklılık gösterebilir, her bir 2. aşama biriminin güvenirliliği farklı indise sahiptir. J tane 2. aşama birimlerine karşılık toplam güvenirlilik (3.59) daki gibi hesaplanabilir.

$$güvenirlilik(\hat{B}_q) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \tau_{qq} / (\tau_{qq} + v_{qqj}), \quad q=0,1,2,...,Q \quad (3.59)$$

iii. Kalıntı Tahmini

2. aşama kalıntılarının sıradan en küçük kareler tahmini, 1 .aşama tesadüfi parametreleri β_j lerin sıradan en küçük kareler tahmininin bir fonksiyonudur.

$$\hat{u}_j = \hat{\beta}_j - W_j \hat{\gamma} \quad (3.60)$$

Ampirik Bayes kalıntıları her j. birim için;

$$u_j^* = \beta_j^* - W_j \hat{\gamma} \quad (3.61)$$

Şeklindedir.

2.aşama kalıntılara benzer olarak, 1. aşama kalıntıları da hem en küçük kareler hem de ampirik Bayes yöntemleri ile tahmin edilebilir. Bu tahminler 1. aşama verilerinin dağılım varsayımlarının kontrolü için gereklidir.

(3.35) deki genel modele göre en küçük kareler kalıntılarının tahmini;

$$\hat{r}_{ij} = Y_{ij} - X_{ij}^T W_j \hat{\gamma} - Z_{ij}^T \hat{u}_j \quad (3.62)$$

şeklindedir. X_{ij}^T ve Z_{ij}^T sırasıyla X_j ve Z_j nin i. satır elemanlarını içerir. Her birim için ampirik Bayes kalıntı tahmini ise aynı forma sahiptir;

$$r_{ij}^* = Y_{ij} - X_{ij}^T W_j \hat{\gamma} - Z_{ij}^T u_j^* \quad (3.63)$$

iv. Aralık Tahmini.

β_j için güven aralığı, koşullu varyans-kovaryans matrisi V_j^* ye göre oluşturulur.

$$V_j^* = (V_j^{-1} + T^{-1})^{-1} + (1 - \Lambda_j)[Var(W_j \hat{\gamma})](I - \Lambda_j)^T \quad (3.64)$$

Herhangi bir β_{qj} için ,95% güven aralığı;

$$\beta_{qj}^* \pm 1,96(V_{qqj}^*)^{1/2} \quad (3.65)$$

şeklinde verilir. V_{qqj}^* , V_j^* 'nin q. köşegen elemanıdır. (3.65) deki eşitliğin geçerli olması için;

a) β_j 'nin tüm elemanlarının tesadüfi olması ve

b) Her j grubun , sıradan en küçük kareler ortalamaları ile $\hat{\beta}_j$ hesaplamalarına yetecek veriye sahip olması gereklidir.

Tüm β_j elemanlarının tesadüfi olduğunu fakat, 2 .aşama j. biriminin , β_j 'nin sıradan en küçük kareler tahmini için yeterli veriye sahip olmadığını farz edelim. Bu durumda da, Ampirik Bayes tahmincisi (3.66) da verildiği gibi hesaplanır:

$$\beta_j^* = (X_j^T X_j + \sigma^2 T^{-1})^{-1} (X_j^T Y_j + \sigma^2 T^{-1} W_j \hat{\gamma}) \quad (3.66)$$

3.3 Varyans- Kovaryans Bileşenlerinin Tahmini

Yij'lerin normal dağıldığı iki aşamalı modellerde, bilinmeyen üç tip parametre vardır. Bunlar; 1) 1. aşama tesadüfi katsayıları β lar, 2) 2. aşama sabit parametreleri γ lar ve 3) varyans kovaryans parametreleridir. Daha önceki dönemlerde, sadece gruptaki birim sayısı eşit olduğu durumlarda varyans kovaryans bileşenleri için tahmin yapılabilirdi. Bu yüzden hiyerarşik lineer modellerin kullanımı sınırlıydı. Günümüzde ise, gruptaki örnek büyüklükleri farklı olduğu durumlarda iteratif sayısal prosedürlere verimli tahminler için başvurulmasıyla (en çok olabilirlik yöntemi gibi) hiyerarşik lineer modellerin kullanımı artmıştır.

Varyans kovaryans parametreleri de, 1. aşama parametrelerinin varyans kovaryans matrisi T ve 1. aşama kalıntı varyansı σ^2 den meydana gelir. Bu parametrelerin tahminlerine ulaşabilmek için iki tip genel stratejiden yararlanılabilir. Bu stratejilerden birincisi, γ , T ve σ^2 'nin tam en çok olabilirlik tahmini (TEÇOT yani EÇOT) ve β 'nin ampirik Bayes (AB) tahminine dayanmaktadır. İkincisi ise, T ve σ^2 'nin sınırlandırılmış en çok olabilirlik tahmini (SEÇOT) ve γ , β 'nin ise ampirik Bayes tahminine dayanmaktadır. (Goldstein, 1986)

3.3.1 Tam En Çok Olabilirlik Yöntemi

En çok olabilirlik yönteminin (Full Maximum Likelihood) temel fikri, ana kütle Y ve ana kütlede çekilen örnek arasındaki benzerlik ilişkisinden yararlanarak bu örneğin elde edilme ihtimalini maksimum yapan γ, T ve σ^2 parametrelerine ait tahmini seçmektir. γ , T ve σ^2 için EÇO tahminlerinin verildiği durumda, 1. aşama katsayıları β 'lar için ampirik Bayes tahminlerini hesaplayabiliriz.

Tahminin dayandığı yaklaşım bazı özelliklere sahiptir. Bunlar:

- i. Genel koşullar altında, γ , T ve σ^2 'nin EÇO tahminleri tutarlıdır: 2. aşama örnek büyüklüğü J arttığında, EÇO tahminleri gerçek parametre değerlerine yakınsar. Bu da, EO tahminlerinin asimptotik olarak yansız olması yani, sapmaların J arttığında ortadan kaybolmasını beraberinde getirmektedir. (Yeterli veriye sahip olduğunda, bu tahminler yüksek olasılıkla gerçek parametrelere yaklaşır.)

- ii. Bu tahminler asimptotik etkinliğe sahiptirler.(Veriye ait büyük örnekler verildiğinde, en çok olabilirlik tahminleri minumum varyans ile yansızdırlar.)
- iii. Büyük J için, bu tahminlerin örnek dağılımı yaklaşık olarak normaldir, bu da T'nin EÇO tahminlerinin pozitif tanımlı olmasını sağlar.
- iv. Büyük J nin varlığında, 1. aşama katsayıları için Ampirik Bayes tahminleri ortalama için alternatif metotlarla yapılan tahminlerden daha doğru olma eğilimindedirler. (Daha düşük ortalama hata karelerine sahiptirler.) Ampirik Bayes tahminlerinin avantajı γ , T ve σ^2 'nin EÇO tahminlerine bağlı olmalarındandır. (Morris 1989; Raudenbush, 1988)

Tüm bu açıklanan özellikler, 2. aşama birimin sayısı J'nin büyük olması durumunda geçerlidir. J yani 2.aşama birim sayısı (grup sayısı) küçük olduğu durumlarda ise aşağıda sıralanan durumlar meydana gelebilir:

- i. γ ve T tahminleri küçük örneklerde hatalı olabilir. Ayrıca, her iki tahmin ve özellikle T deki varyans elemanları normal dağılıma sahip olmayabilirler. Bu durum istatistiksel çıkarsamalarda bir çok hataya neden olabilir
- ii. Eğer veri dengesiz ise, γ tahminleri ağırlıklandırılır, yani T'nin ML tahminlerinin fonksiyonları olurlar. Bu ağırlıklardaki tesadüfi hatalar , γ da belirsizliklere neden olur ve bu durumda EÇO yaklaşımını kullanan yazılımlar standart hataları hesaplamayabilir. Bu yüzden de γ için güven aralıkları olması gerektiğinden daha dar, anlamlılık testleri yanıltıcı olabilir. Küçük j verildiği durumda, çok fazla dengesiz veriler çok ciddi problemlere neden olur, çünkü veri setleri dengesiz olduğunda ağırlıklar oldukça değişken olur. Yardımcı veriler hakkındaki belirsizlik (T) odak parametreler(γ) hakkında yalnız çıkarsamalar üretebilir.
- iii. T hakkındaki çıkarsamalar γ hakkındaki belirsizlikleri göz önünde bulundururlar. Çünkü, β 'nın AB tahminleri , γ , T ve σ^2 'nin EÇO tahminlerine bağlıdır. Bu durumda, β için güven aralıkları daralır ve β için anlamlılık testleri yanıltıcı olabilir.

Tersi durumda, σ^2 hakkındaki EÇO çıkarsamaları genellikle küçük J yada dengesiz verilere karşı duyarlı değildir. Çünkü, σ^2 tahmininin doğruluğu, 1. aşama birimlerinin toplam örnek genişliğine bağlıdır. ($N = \sum n_j$) (Longford, 1993)

Tam en çok olabilirlik yöntemi ile (3.67) deki en çok olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapacak σ^2 ve T tahmin edilmeye çalışılır.

$$l_{ML}(\sigma^2, T) = -\frac{1}{2} \log |V| - \frac{N}{2} \log r^T V^{-1} r - \frac{N}{2} \left[1 + \log \frac{2\pi}{N} \right] \quad (3.67)$$

ve fonksiyondaki $r = Y - A(A^T V^{-1} A)^T A^T V^{-1} Y$ 'dir.

$$A_j = X_j W_j = \begin{bmatrix} 1 & W_j & X_{1j} & \cdots & W_j X_{1j} \\ 1 & W_j & X_{2j} & \cdots & W_j X_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_j & X_{n,j} & \cdots & W_j X_{n,j} \end{bmatrix}$$

Deviyans testinden yararlanılmak isteniyorsa TEÇO, SEÇO yöntemine göre daha çok tercih edilir. (Sullivan, 1999)

3.3.2 Sınırlandırılmış En Çok Olabilirlik Yöntemi

TEÇO'nin eksik yanı, varyans ve kovaryans tahminlerinin sabit etkilerin nokta tahminine bağımlı olmasıdır. Basit regresyon modeli;

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_Q X_{Qi} + r_i$$

$i=1,2,\dots,n$ olmak üzere r_i , hatalar 0 ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağılmaktadır. $Q+1$ tane regresyon katsayısı $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_Q$ nun bilindiğini varsayalım. Daha sonra σ^2 ye ait en çok olabilirlik tahmini;

$$\sigma^2 = \sum r_i^2 / n \quad (3.68)$$

şeklinde hesaplanabilir. Regresyon katsayılarının bilinmediğini ve tahmin edileceğini varsayalım. Kalıntılar;

$$\hat{r}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \beta_Q X_{Qi} \quad (3.69)$$

şeklindedir.

$\hat{\beta}_q$ sıradan en küçük kareler tahminidir. σ^2 , 'ye ait sıradan yansız tahminci ise

$$\sigma^2 = \sum \hat{r}_i^2 / (n - Q - 1) \quad (3.70)$$

ile hesaplanır.

Paydadaki $(n-Q-1)$, $(q+1)$ tane regresyon parametresi tahmininde kullanılan serbestlik derecesi düzeltilmesidir. q küçük olduğunda, düzeltmenin çok küçük etkisi olur. Q büyüdüğünde, (3.68) deki eşitliğin kullanımı σ^2 nin tahmininde ciddi sapmalara sahip olur. Sapma negatif olabilir, bu yüzden σ^2 tahmini oldukça küçük olacaktır, güven aralığı daralacaktır ve bu da yanıltıcı hipotez testlerine neden olacaktır. (3.68) ve (3.70) arasındaki fark TEÇO ve SEÇO arasındaki kesin farkı göstermektedir.* Hiyerarşik lineer modeller için, TEÇO yada SEÇO yöntemine göre yapılmış varyans- kovaryans tahminleri arasındaki fark basit cebirsel formlarla açıklanamaz. Varyans bileşenleri için SEÇO tahminleri sabit etkiler hakkındaki belirsizlikleri düzeltir fakat TEÇO düzeltmez. İki aşamalı model için TEÇO ve SEÇO σ^2 için, birbirine yakın sonuçlar verirken T'nin tahmininde önemli farklar ortaya çıkar. 2. aşama birimlerinin sayısı J büyük olduğunda, iki yöntem oldukça yakın sonuçlar verirler. J küçük olduğunda, TEÇO varyans tahminleri $\hat{\tau}_{qq}$, SEÇO'dan daha küçük olur.

Sınırlandırılmış en çok olabilirlik yöntemi ile (3.71) deki en çok olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapacak σ^2 ve T tahmin edilmeye çalışılır.

$$l_{ML}(\sigma^2, T) = -\frac{1}{2} \log |V| - \frac{1}{2} \log |A^T V^{-1} A| - \frac{(N-p)}{2} \log r^T V^{-1} r - \frac{(N-p)}{2} \left[1 + \log \frac{2\pi}{(N-p)} \right] \quad (3.71)$$

ve fonksiyondaki $r = Y - A(A^T V^{-1} A)^T A^T V^{-1} Y$ ve $p = \text{rank}(A)$ 'dır.

* RML, FML γ ya göre integralinin alınmış halidir.

3.3.3 EM Algoritması Kullanılarak Yapılan EÇO Tahminleri

Büyük örneklerde, varyans kovaryans bileşenleri tahminleri için en çok olabilirlik ve sınırlandırılmış en çok olabilirlik yöntemi birbirine yakın sonuçlar verir. Örneklem küçük olduğunda ise, en çok olabilirlik fonksiyonunu maksimize edecek tahminleri bulmak için bazı yardımcı algoritmalara ihtiyaç duyulabilir. 2 aşamalı hiyerarşik lineer modellerde EÇO tahminleri için genellikle EM (Expectation-Maximization) algoritması tahmin edilmektedir. EM algoritması, en çok olabilirlik tahminlerini hesaplarırken 2. aşama tesadüfi parametrelerini kayıp veri olarak adlandırır. (Dempster, 1977)

Kayıp veri, u_j nin gözlendiği varsayımı altında, en çok benzerlik yöntemi ile tüm parametre (γ, T, σ^2) tahminlerinin hesaplanması daha kolay olacaktır. γ tahmini, birleştirilmiş modelin $(Y_j = \gamma + u_j + r_{ij})$ her iki tarafından u_j nin çıkarılması ile elde edilebilir. Daha sonra γ için sıradan en küçük kareler tahmini aşağıdaki hali alır; (Kreft & Leeuw, 1998)

$$\hat{\gamma} = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - u_j) / \sum_{j=1}^J n_j \quad (3.72)$$

varyans bileşenleri için en çok olabilirlik tahminleri daha basittir;

$$\hat{\tau} = \sum_{j=1}^J u_j^2 / J \quad (3.73)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \hat{\gamma} - u_j)^2 / \sum_{j=1}^J n_j \quad (3.74)$$

2. aşama tesadüfi parametrelerinin kayıp veri olarak alındığı durumda, parametre tahmini için kullanılacak istatistikler “ tamamlanmış veri yeterli istatistikleri (complete data sufficient statistics ” olarak adlandırılır. Bu değerler, Y verildiği durumda tahmin edilebilir ve parametre ilk tahminleridir. Y verildiği durumda, her u_j nin, u_j^* ortalama ve V_j^* varyans ile normal dağıldığı varsayımı altında, parametre ilk tahminleri $(\gamma^{(0)}, \tau^{(0)}, \sigma^{2(0)})$ üst indis (0) ile gösterilirler.

$$\begin{aligned} u_j^* &= \lambda_j^{(0)} (\bar{Y}_j - \gamma^{(0)}), \\ V_j^* &= \tau^{(0)} (1 - \lambda_j^{(0)}) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Bu tahminler aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$E\left[\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - u_j) \middle| Y, \gamma^{(0)}, \tau^{(0)}, \sigma^{2(0)}\right] = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - u_j^*) \quad (3.76)$$

ve

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{j=1}^J u_j^2 \middle| Y, \gamma^{(0)}, \tau^{(0)}, \sigma^{2(0)}\right] &= \sum_{j=1}^J (u_j^{*2} + V_j^*), \\ E\left[\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \hat{\gamma} - u_j)^2 \middle| Y, \gamma^{(0)}, \tau^{(0)}, \sigma^{2(0)}\right] &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} [(Y_{ij} - \gamma^{(0)} - u_j^*)^2 + V_j^*] \end{aligned} \quad (3.77)$$

Algoritmadaki “E adımı”, Y verisi ve parametre tahminleri verildiği durumdaki şartlı beklenen değer aracılığıyla parametrelere ait ilk tahminler yapılır. (3.75) “M adımı” ise tahmin E adımı elde edilen tahminler, tam verinin verildiği durumdaki EÇO tahminleri için kullanılan formüllerde yerine konulur. Dempster, Laird, ve Rubin her bir EM algoritmasının olasılıkları büyüttüğünü ve bununla tahminleri lokal maksimuma yakınsattığını ispatlamışlardır.

EÇO-EM yaklaşımının dezavantajı, odak parametreler hakkındaki çıkarımların bilinmeyen parametreler hakkındaki belirsizliği hesaba katmamasıdır. J küçük ve 1. aşama verileri oldukça dengesiz olduğu zaman bu problem çok önemlidir. SEÇO yaklaşımı kısmen bu sorunu çözebilir. (Goldstein, 2003)

i.En Çok Olabilirliğe Bağlı Olarak Varyans Bileşenleri İçin Güven Aralıkları

T deki her bir varyans ve kovaryans bileşeni için standart hata tahmini hesaplanabilir. En çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen bu tahminlerin kullanılmasında bazı problemler vardır. Anahtar problem, varyans tahminlerinin ($\hat{\tau}_{qq}$) örneklem dağılımının bilinmeyen bir derecede çarpıklığa sahip olmasıdır. Sonuç olarak simetrik güven aralıkları ve hipotez testleri oldukça yanıltıcı olabilir. (Hox, 2002)

TEÇO ve SEÇO yöntemlerin deki eksiklikler, varyans ve kovaryans tahminleri için Bayes yaklaşımının kullanılması ile düzeltilebilir. Güven aralıkları ve hipotez testleri ile sabit etkiler hakkında sonuç çıkarma, varyans ve kovaryans parametrelerinin nokta tahminlerinin doğruluğuna bağlıdır. Örneğin sabit parametrenin çıktığı olduğu modeldeki $\hat{\gamma}_{01}$ için 95% güven aralığı;

$$\hat{\gamma}_{01} \pm 1,96(V_{\hat{\gamma}_{01}})^{1/2} \quad (3.78)$$

şeklindedir ve eşitlikteki

$$V_{\hat{\gamma}_{01}} = Var(\hat{\gamma}_{01}) = [\sum \Lambda_j^{-1} (w_j - \bar{W}_{\bullet}^*)^2]^{-1} \quad (3.79)$$

ile hesaplanabilir.

τ_{00} yanlış tahmin edildiyse, güven aralıkları da kusurlu olacaktır. Fotiu's simülasyonu(1989), t değerinin çarpan olarak kullanıldığı güven aralıklarının daha uygun olduğunu bulmuştur. Yani güven aralıkları

$$\hat{\gamma}_{01} \pm t_{0,025} (\hat{V}_{\hat{\gamma}_{01}})^{1/2} V_{\hat{\gamma}_{01}} \text{ şeklini alır.}$$

4. HİYERARŞİK LİNEER MODELLER İÇİN HİPOTEZ TESTLERİ

3. bölümde, Y_{ij} 'lerin normal dağıldığı iki aşamalı modeller için bilinmeyen üç tip parametre 1. aşama tesadüfi parametreleri β 'lar, 2. aşama sabit parametreleri γ 'lar ve varyans kovaryans parametreleri için tahmin prosedürlerini açıklanmıştır. Bu bölümde ise iki aşamalı hiyerarşik lineer modeller için hipotez testleri ele alınacaktır.

1 .aşama regresyon modeli;

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + \dots + \beta_{Qj}X_{Qij} + r_{ij} \quad (4.1)$$

$$= \beta_{0j} + \sum_{q=1}^Q \beta_{qj}X_{qij} + r_{ij} \quad r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

şeklinde gösterilir.

(4.1) deki eşitlikte bazıları sabit, bazıları tesadüfi bazıları ise tesadüfi olmayan $Q+1$ tane parametre vardır. 2. aşama modelinde her bir β_{qj} aşağıdaki gibi modellenir (2. aşama açıklayıcı değişkenler $W_{sj}=1,2,\dots,S_q$ olmak üzere)

$$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \gamma_{q1}W_{1j} + \gamma_{q2}W_{2j} + \dots + \gamma_{qS_q}W_{S_qj} + u_{qj} \quad (4.2)$$

$$= \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{qs}W_{sj} + u_{qj}$$

Birleştirilmiş model ise (4.3) de verilmiştir.

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \sum_{q=1}^Q \gamma_{q0}X_{qij} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{0s}W_{sj} + \sum_{s=1}^{S_q} \sum_{q=1}^Q \gamma_{qs}W_{sj}X_{qij} + u_{0j} + \sum_{q=1}^Q u_{qj}X_{qij} + r_{ij} \quad (4.3)$$

Çizelge 4.1 Hiyerarşik modellerde test edilebilir hipotez tipleri (Raudenbush & Bryk, 2002)

<i>Hipotez Tipleri</i>	<i>Sabit Etkiler</i>	<i>1.Aşama Tesadüfi Katsayıları</i>	<i>Varyans Bileşenleri</i>
<i>Tek Parametre için</i>			
H ₀	$\gamma_h = 0$	$\beta_{qj} = 0$	$\tau_{qq} = 0$
H ₁	$\gamma_h \neq 0$	$\beta_{qj} \neq 0$	$\tau_{qq} \neq 0$
<i>Birden fazla parametre için</i>			
H ₀	$C'\gamma = 0$	$C'\beta = 0$	$T = T_0$
H ₁	$C'\gamma \neq 0$	$C'\beta \neq 0$	$T \neq T_0$

(4.2) de her β_{qj} için $S_q + 1$ tane sabit etki vardır ve 2. aşama modeli için toplam tesadüfi etki $F = \sum_q (S_q + 1)$ 'dir. Her bir tesadüfi bileşen u_{qj} nin çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında;

$$\text{Var}(u_{qj}) = \tau_{qq} \quad (4.4)$$

$$\text{Ve } \text{Cov}(u_{qj}, u_{q'j'}) = \tau_{qq'} \text{ 'dir.} \quad (4.5)$$

Sabit etkiler (her bir γ_{qs}), 1. aşama tesadüfi katsayıları (her β_{qj}) ve varyans-kovaryans parametreleri için hipotez testleri formüle edilebilir. Bu testler tek parametre yada birden fazla parametre için olabilir. Çizelge (4.1) de , 6 çeşit hipotez tipi vardır. Bunlara karşılık gelen test istatistikleri ise Çizelge (4.2) de verilmiştir.

Çizelge 4.2 Hiyerarşik lineer modeller için genel hipotez testleri (Raudenbush & Bryk, 2002)

<i>Hipotez Tipleri</i>	<i>Sabit Etkiler</i>	<i>1. Aşama Tesadüfi Katsayıları</i>	<i>Varyans Bileşenleri</i>
Tek Parametre için	t oranı	t oranı	Tek değişkenli X^2 yada z oranı
Birden Fazla Parametre için	Genel lineer hipotez testleri	Genel lineer hipotez testleri	Olabilirlik oran testi(X^2)

4.1 Sabit Etkiler İçin Hipotez Testleri

i. Tek bir parametre için hipotez testleri:

H_0 hipotezi (4.6) daki gibidir:

$$H_0 : \gamma_{qs} = 0 \quad (4.6)$$

γ_{qs} 'in 0 olması, 2. aşama açıklayıcı değişkenlerinin (Wsj), 2. aşama parametreleri üzerinde etkisini gösteren, katsayıların geçersiz olduğu anlamına gelir. Bu tip hipotezler için test istatistiği

$$t = \hat{\gamma}_{qs} / (\hat{V}_{\hat{\gamma}_{qs}})^{1/2} \quad (4.7)$$

ile hesaplanabilir. $\hat{\gamma}_{qs}$, γ_{qs} 'in en çok olabilirlik tahmini, $\hat{V}_{\hat{\gamma}_{qs}}$ ise $\hat{\gamma}_{qs}$ 'in tahmin edilen örnek varyansdır. Ve (J-S_q-1) serbestlik derecesine sahiptir.

ii. Birden fazla parametre için hipotez testleri:

j. gruptaki i. birim için bağımlı değişken, X_{ij} 'nin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij} \quad (4.8)$$

2.aşama modeli ise (4.9)'da verilmiştir:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} \quad (4.9a)$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j + u_{1j} \quad (4.9b)$$

Eşitlikte, γ_{01}, γ_{11} in 0'a eşit olduğunu varsayan H_0 hipotezi test edilebilir. Alternatif hipotez ise W_j 'nin modele dahil edilmesi gerektiğini ileri sürer.

Birden fazla parametrenin birlikte testi için (4.9) daki eşitliğin matris notasyonu ile tekrar formüle edilmesine gerekir.

$$\begin{pmatrix} \beta_{0j} \\ \beta_{1j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & W_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

yani $\beta_j = W_j\gamma + u_j$ şeklinde gösterilebilir.

Bileşik hipotez testi ise;

$$H_0 : C^T \gamma = 0, \quad (4.11)$$

şeklindedir. $C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere göre H_0 hipotezi (4.2)' de verilmiştir.

$$H_0 : C^T \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$Var(\hat{\beta}_j) = \Lambda_j$ bilindiği durumda $\hat{\gamma}$ örnek varyansı:

$$Var(\hat{\gamma}) = (\sum W_j^T \Lambda_j^{-1} W_j)^{-1} = V_{\hat{\gamma}} \quad (4.13)$$

olarak yazılabilir.

Contrast vektör $C^T \hat{\gamma}$ 'nın varyansı ise:

$$Var(C^T \hat{\gamma}) = C^T V_{\hat{\gamma}} C = (say) V_c \quad (4.14)$$

$V_{\hat{\gamma}}$ bilinmiyorsa tahmini aşağıdaki gibi yapılır;

$$\hat{V}_{\hat{\gamma}} = (\sum W_j^T \hat{\Lambda}_j^{-1} W_j)^{-1} \quad (4.15)$$

$H_0 = C^T \gamma = 0$, hipotezi için, test edilen C^T 'nin satır sayısı eşit serbestlik derecesinde X^2 dağılımına sahip yaklaşık test istatistiği:

$$H = \hat{\gamma}^T C \hat{V}_c^{-1} C^T \hat{\gamma} \quad (4.16)$$

ile hesaplanabilir.

Buradaki örnekte C^T , 2 satıra sahiptir yani serbestlik derecesi 2'dir.

Birden fazla parametrenin birlikte test edilebilmesi için diğer bir yaklaşım ise olabilirlik oran (likelihood-ratio test- deviyans testi) testidir. Bu test ancak TEÇÖ tahminleri elde edildiğinde kullanılabilir. Test, iki modelden elde edilen tahmin ve sonuçların karşılaştırılmasına dayanmaktadır. Birinci model sabit etkilerin 0 olduğu modeldir ve H_0 hipotezini meydana getirir. Alternatif model ise, tüm etkileri içermektedir ve H_1 hipotezini meydana getirir. Her model için deviyans istatistikleri hesaplanır ve çok değişkenli hipotez testi için kullanılır. Deviyans modelin uygunluk ölçüsü olarak da kullanılır: yüksek deviyans, modelin veriye uygun olmadığını gösterir. (Raudenbush & Bryk, 2002)

$$\text{Birinci model için deviyans istatistiği } D_0 = -2 \log(L_0) \quad (4.17)$$

şeklinde. L_0 ise, sıfır hipotezindeki en çok olabilirlik tahminleri için olabilirlik değeridir.

D_1 ise, alternatif modeldeki en çok olabilirlik tahminleri için olabilirlik değeridir:

$$D_1 = -2 \log(L_1) \quad (4.18)$$

Sıfır hipotezi altında, deviyans farkı $D_0 - D_1$, tahmin edilen parametre sayıları arasındaki farka eşit serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. Büyük deviyans farkı, veri için birinci modelin çok basit olduğunu gösterir. Daha önce anlattığımız genel lineer hipotez testleri deviyans testine göre bazı avantajlara sahiptir. Bunlar:

- i. Genel lineer hipotez testleri kullanılırken sadece bir model (alternatif model) için tahminlerin hesaplaması yeterlidir. Oysa, deviyans testinde tüm modeller için tahminlerin yapılmasını gerektirir.
- ii. 2. genel lineer hipotez testleri ile parametreler arasındaki farklılıklar test edilebilir oysa, deviyans testinin bu tür bir test için yeniden düzenlemesi gereklidir.
- iii. SEÇO yöntemi kullanıldığında, deviyans testinden yararlanılamaz.

Sabit etkiler hakkındaki hipotez testleri için en çok olabilirlik oran testine başvurulduğunda, varyans kovaryans bileşenlerinin spesifikasyonları, indirgenmiş ve alternatif model için aynı olmalıdır. Bu test, sadece modeldeki varyans kovaryans elemanlarının testi için değil sabit etkilerle varyans kovaryans elemanlarının birlikte testi içinde kullanılabilir.

4.2 Birinci Aşama Tesadüfi Katsayıları İçin Hipotez Testleri

Tesadüfi katsayılar vektöründeki 2 yada daha fazla bileşenin karşılaştırılması tek parametre ve birden fazla parametre için hipotez testleri olmak üzere iki başlık altında ele alınabilir.

i. Tek bir parametre için hipotez testleri:

Tek bir gruba özel regresyon katsayısının geçersizliğine ilişkin hipotez;

$$H_0 : \beta_{qj} = 0 \quad (4.19)$$

olarak yazılabilir.

Bu hipotez tahmin edilen parametrenin kendi standart hatasına bölünmesi ile elde edilen z istatistiği ile sınanır. Tahmin olarak araştırmacı ampirik Bayes tahminini yada sıradan en küçük kareler tahminini kullanabilir.

Ampirik Bayes tahmini β_{qj}

$$z = \beta_{qj}^* / V_{qqj}^{*1/2} \quad (4.20)$$

ile test edilir. Eşitlikte;

β_{qj}^* ; ampirik Bayes tahmini,

$V_{qqj}^{*1/2}$, β_{qj}^* katsayılarına ait artçıl varyans kovaryans matrisinin (posterior dispersion) q. köşegen elemanıdır ve z yaklaşık olarak normal dağılmaktadır.

SEÇÖY'de TEÇÖY'e göre artçıl varyans (posterior varyans) daha büyük ve gerçeğe daha yakındır. Bu durum özellikle 2.aşama birim sayısı küçük olduğu zaman geçerlidir. TEÇÖY de sabit etkilerin bilindiği varsayılır, bu yüzden TEÇÖ sabit etkilerle ilgili herhangi bir belirsizlik yansıtmaz. Bu durum ancak 2. aşama birimleri, J'ler yeterince büyük olduğu zaman geçerlidir.

β tahminleri sıradan en küçük kareler tahmincileri ile hesaplandığında, t testleri yanıltıcı olabilir.

ii. Birden fazla parametre için hipotez testleri:

β , $[J(Q+1) \times 1]$ boyutlu tesadüfi parametre vektörü β için hipotez;

$$H_0 : C^T \beta = 0 \quad (4.21)$$

şeklinde oluşturulabilir.

Eğer β 'lar ampirik bayes yöntemi ile tahmin ediliyorsa, test istatistiği

$$H_{EB} = \beta^{*T} C (C^T V^* C)^{-1} C^T \beta^* \quad (4.22)$$

olarak yazılabilir.

V^* , parametrelere ait $[J(q+1) \times J(Q+1)]$ boyutlu varyans-kovaryans matrisidir.

Eğer β 'lar sıradan en küçük kareler yöntemi ile tahmin ediliyorsa, test istatistiği (4.21) de verilen genel lineer hipotez istatistik ortalamaları ile hesaplanabilir.

$$H_{KK} = \hat{\beta}^T C (C^T \hat{V} C)^{-1} C^T \hat{\beta} \quad (4.23)$$

$\hat{V}$, blok diyagonal matristir ve $(Q+1)*(Q+1)$ için blok:

$$\hat{V}_j = \hat{\sigma}^2 (X_j^T X_j)^{-1} \quad (4.24)$$

ile hesaplanabilir.

4.3 Varyans Ve Kovaryans Bileşenleri İçin Hipotez Testi

i. Tek bir parametre için hipotez testleri:

Hiyerarşik analizlerde, araştırmacılar, 1. aşama parametrelerinin sabit mi, tesadüfi mi ya da tesadüfi olarak değişmeyen yapıda mı olduğuna varyans bileşenleri için yapılan hipotez testleri yardımı ile karar verilebilir.

Tesadüfi varyasyonlar için test edeceğimiz hipotez:

$$H_o : \tau_{qq} = 0 \text{ dir.} \quad (4.25)$$

şeklinde kurulabilir ve $\tau_{qq} = Var(\beta_{qj})$

Eğer sıfır hipotezi red edilirse, araştırmacılar β_q da tesadüfi varyasyon olduğuna karar verirler. Tüm gruplar (en azından büyük bir kısmı) sıradan en küçük kareler tahminleri için yeterli veriye sahipse, en basit ve gerekli test, $H_o : \tau_{qq} = 0$ hipotezinin testidir. $\hat{V}_{qqj}$,

$\hat{V}_j = \hat{\sigma}^2 (X_j^T X_j)^{-1}$ matrisinin q. diyagonal elemanıdır.

$$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{qs} W_{sj} \quad (4.26)$$

modeli altında, (J-Sq-1) serbestlik derecesi ile yaklaşık χ^2 dağılan istatistik

$$\sum_j (\hat{\beta}_{qj} - \hat{\gamma}_{q0} - \sum_{s=1}^{S_q} \hat{\gamma}_{qs} W_{sj})^2 / \hat{V}_{qqj} \quad (4.27)$$

şeklinde hesaplanır.

$H_o = \tau_{qq} = 0$ hipotezi, tahminin standart hatasını temel alan z istatistiği ile de test edilebilir.

$$z = \hat{\tau}_{qq} / [\text{Var}(\hat{\tau}_{qq})]^{1/2} \quad (4.28)$$

Bu oran, en çok olabilirlik tahminlerinin büyük örnek teorisi altında yaklaşık normal dağılmaktadır. Çoğu zaman, özellikle τ_{qq} sifıra çok yakın olduğunda, normallik yaklaşımı oldukça zayıflar. Teknik olarak, en çok olabilirlik, mod etrafında simetrik değildir (asimptotik normallik başaramamıştır) ve simetrik güven aralıklarına dayalı testlerde yanıltıcı olabilir. (Mass & Hox, 2004)

ii. Birden fazla parametre için hipotez testleri:

Varyans ve kovaryans için genel hipotez testinin temelini, en çok olabilirlik oran testi oluşturmaktadır. Bu test, MLF ve MLR tahminleri altında elde edilebilir. Bu test için H_o hipotezi ;

$$H_o : T = T_0 \quad (4.29)$$

Alternatifi ise;

$$H_1 : T = T_1 \text{ dir.} \quad (4.30)$$

To, T_1 'in indirgenmiş halidir. Örneğin, T_1 deki q.satır ve sütunun (bazı satır ve sütunların) geçersiz olması gibi. Yazılan hipotezin testi, ilk olarak iki model için tahminleri yapar, D_0 ve D_1 deviyanslarını hesaplar ve sonra test istatistiğini hesaplar:

$$H = D_0 - D_1 \quad (4.31)$$

Bu istatistik m serbestlik derecesi ile yaklaşık χ^2 dağılır. m, iki modelden elde edilen varyans ve kovaryans tahminlerinin sayısı arasındaki farktır. Varyans ve kovaryanslar için en çok olabilirlik oran testi kullanıldığında, karşılaştırılacak modeller, sabit etkilerin spesifikasyonu bakımından aynı olmalıdır. (Aynı açıklayıcı değişkenlere sahip olmalıdır.)

5. HİYERARŞİK LİNEER MODELLERE İLİŞKİN VARSAYIMLARIN İNCELENMESİ

Hiyerarşik lineer modeller belli varsayımlara sahiptir. Standart doğrusal modellere dayandırılan çıkarsamaların geçerliliği, modelin hem tesadüfi hem de yapısal kısımlarını hakkındaki varsayımların geçekleşmesine bağlıdır.

Modelin yapısal kısmı için, EKK, bağımsız değişkenlerin regresyon parametrelerinin doğrusal bir fonksiyonu olduğu modelin belirlenmesini gerektirir. Yani modelin fonksiyonel şeklinin belirlenmesi gerekir. Yanlış fonksiyonel ilişkinin kurulması ise matematiksel biçimleme hatası olarak adlandırılır ve böyle hataların varlığı hata payı ile gösterilir. Önemli bağımsız değişken yada değişkenlerin modele dahil edilmemesi, değişkenler arasında uygun olmadığı halde doğrusal bir fonksiyonel ilişkinin kurulması, modele uygun olmayan bağımsız değişkenlerin modele dahil edilmesi ve modele dahil edilecek değişkenlere ait katsayıların sabit, tesadüfi yada tesadüfi olarak değişmediği hakkında yanlış karara varılması yapılması gibi nedenlerden dolayı bu tip hatalar meydana gelebilir. (Snijders & Bosker, 1999)

Hiyerarşik lineer modellerde, spesifikasyon varsayımlarına her aşamada uyulmalıdır. Çünkü, bir aşamadaki matematiksel biçimleme hatası diğer aşamaları da etkileyebilir.

Modelin tesadüfi kısmında ise, EKK regresyonu, hataların eşit varyansla bağımsız olması varsayımına sahiptir. Hiyerarşik analizlerde, hem birinci hem de ikinci aşamada hataların normal dağıldığı varsayımı geçerlidir. Bu varsayımdan sapmalar 2. aşama parametrelerinin tahminini etkilemez, tahminlerin standart hatalarını etkiler. Benzer olarak, 1. aşama parametreleri tahmin edilir fakat varyans kovaryans bileşenlerinde yanlışlıklar olabilirler.

İyi bir veri analizi için modelin varsayımlarına dikkat edilmelidir.

Genel olarak iki aşamalı modeli ele alırsak, 1. aşama modeli:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \sum_{q=1}^{Q-1} \beta_{qj} X_{qij} + r_{ij} \quad (5.1)$$

olarak yazılır. İkinci aşama modeli ise:

$$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{s_q} \gamma_{qs} W_{sj} + u_{qj}, \quad q = 0, 1, \dots, Q \quad (5.2)$$

şeklindedir.

Hiyerarşik lineer modeller için varsayımlar aşağıda verilmiştir:

1. j. gruptaki i. birim için her r_{ij} , ortalaması 0 ve varyansı σ^2 ile bağımsız normal dağılıma sahiptir. $r_{ij} \sim IN(0, \sigma^2)$
2. 1.aşama açıklayıcı değişkenleri, X_{qij} , r_{ij} 'lerden bağımsızdır. Yani tüm q lar için $Cov(X_{qij}, r_{ij}) = 0$ 'dır.
3. 2. aşama tesadüfi bileşenleri u_{qj} ler, ortalaması 0 ve varyansı $Var(u_{qj}) = \tau_{qq}$ ile çok değişkenli normal dağılıma sahiptir ve q ve q' tesadüfi bileşenleri arasındaki kovaryans ise $\tau_{qq'}$ dir. $[Cov(u_{qj}, u_{q'j}) = \tau_{qq'}]$ Tesadüfi hata vektörleri J tane 2. aşama birimleri arasında bağımsızdır. $[u_j = (u_{0j}, \dots, u_{Qj})' = IN(0, T)]$
4. 2. aşama açıklayıcı değişkenleri W_{sj} , u_{qj} 'lerden bağımsızdır. Yani her W_{sj} ve u_{qj} için $Cov(W_{sj}, u_{qj}) = 0$ dir.
5. 1 .aşama ve 2. aşama hataları da birbirinden bağımsızdır. (tüm q lar için $Cov(r_{ij}, u_{qj}) = 0$)
6. Her aşamadaki açıklayıcı değişkenin diğer aşamalardaki tesadüfi etkilerle arasındaki korelasyon 0 a eşittir. Yani, tüm q ve q' için $Cov(X_{qij}, u_{q'j}) = 0$ ve $Cov(W_{sj}, r_{ij}) = 0$ 'dır.

* 2.,4. ve 6. varsayımlar, modelin yapısal kısmındaki değişkenler (X_s ve W_s) ile tesadüfi kısımlar (r_{ij} ve u_{qj}) arasındaki ilişkilerle ve model spesifikasyonunun yeterliliği ile ilgilidir. Bu varsayımlar γ_{qs} tahmininin, sapmasız bir tahminci olup olmayacağı üzerinde etkilidir yani, $E(\hat{\gamma}_{qs}) = \gamma_{qs}$ olup olamayacağı üzerinde etkilidir. (γ_{qs} 'in sistematik hatasız tahmin edilip edilemeyeceği üzerinde etkilidir.)

* 1.,3. ve 5. varsayımlar ise modelin sadece tesadüfi kısmıyla (r_{ij} ve u_{qj}) ilgilidir. Bunlar ise, $\hat{\gamma}_{qs}$ tahmininin tutarlılığı, β_{qj}^* , $\hat{\sigma}^2$ ve $\hat{T}$ 'nin ve hipotez testleri ve güven aralıklarının doğruluğu üzerinde etkilidirler. (Raudenbesh & Bryk, 2002)

5.1. Birinci Aşama Modelinin Yeterliliğinin Kontrol Edilmesi

5.1.1 Birinci Aşama Modelinin Spesifikasyonu

Model belirlemenin erken safhaları, teorik ve ampirik (deneysel) düşüncelerin karşılıklı etkileşimini gerektirmektedir. 1. aşama modeli belirlenirken, bağımlı değişkeni “en iyi” şekilde açıklayacak bağımsız değişkenlerin belirlenmesi, önemsiz değişkenlerin modelden çıkartılması yani 1. aşama için en uygun değişken seçiminin yapılması gerekir. Yani, X_q modelde yer alacak mı yer alacaksa, tesadüfi, sabit yada tesadüfi olarak değişmeyen bir katsayıya mı sahip olacağının belirlenmesi gerekir.

Çok aşamalı modellerde, 1.aşama değişken seçimi amacıyla, adımsal yöntemlerden geriye doğru eleme ve adım adım regresyon yönteminden de yararlanılabilir.

Hiyerarşik lineer modellerde,

- 1) X_{qij} 'nin sabit etkisinin anlamlı olup olmadığı ve
- 2) Eğim parametresinin heterojenliği ile ilgili herhangi bir delil olup olmadığı araştırılır. ($\text{var}(\beta_q) > 0$) Eğimin heterojenliği ile ilgili istatistiksel delil, $\hat{\tau}_{qq}$ 'ya ait nokta tahmini ve buna karşılık gelen homojenlik testidir. (χ^2 ve en çok olabilirlik oran testinden yararlanılabilir.) Aynı amaçla, E.K.K sabit ve eğim parametreleri için tahmin edilen güvenilirlik istatistikleri de kullanılabilir.

Güvenirlik çok küçük olduğunda (<0.05 gibi), tahmin etmek istediğimiz varyanslar 0'a çok yakın olur. (Yada teknik olarak parametre uzayının sınırlarına) Bu durum, varyans kovaryans elemanlarının tahmini için başvuru iteratif hesaplama prosedürlerinde çok çeşitli nümerik sorunlara neden olabilir: Algoritmalar yavaşlar ve yakınsamazlar. Güvenirlik hakkında yapılan çalışmalar böyle durumlarda, 1. aşama tesadüfi katsayılarının, sabit yada tesadüfi olarak değişmeyen şekilde yeniden belirlenmesini önerirler. Yeniden belirlenmiş model hızla yakınsarsa model spesifikasyonu düzelmiş olur.

EM algoritması için yakınsama oranı yani iterasyon sayısı kendisi için bir teşhistir. Eğer veri yeterli ise, EM algoritması hızla yakınsar. (10 iterasyondan daha az) Eğer model çok büyük sayıda tesadüfi etkiye sahipse ve yeterli açıklayıcı değişkene sahip değilse , çok fazla sayıda iterasyona ihtiyaç duyulabilir.

1. aşama katsayıları arasındaki korelasyonun araştırılması da model spesifikasyonunun kontrolü açısından önemlidir. Yüksek derecede doğrusal bağlantı yada çoklu doğrusal bağlantı bulunmuşsa, model basitleştirilmelidir. Bu işlem, tesadüfi etkiler 0 olarak tespit edildiğinde, hiç yada çok az değişkenlik varken yapılabilir.

İki aşamalı modelde tahmin edilen varyans kovaryans bileşenlerinin sayısı (homojen varyans ve bağımsız 1. aşama standart hataları ile) $\left[\frac{m(m+1)}{2} + 1 \right]$ 'dir ve m modeldeki 1. aşama açıklayıcı değişken sayısıdır. Yani, m arttıkça, tahmin edilen varyans kovaryans bileşenlerinin sayısı hızla artar. Tesadüfi etki sayısı büyüdükçe, varyans kovaryans bileşenlerinin makul tahminlerini elde etmek için daha fazla anlamlı bilgiye ihtiyaç vardır. Kaç tane tesadüfi etkinin belirleneceği, varyans bileşenlerinin büyüklüğü, tesadüfi etkiler arasındaki korelasyonun derecesi, σ^2 'nin büyüklüğü ve veriye ait diğer karakteristiklere bağlıdır.

Tanımlayıcı istatistikler bazı τ_{qq} 'ların 0 yada 0'a çok yakın olduğuna işaret ediyorsa, karşılık gelen β_{qj} 'nin tesadüfi olarak değişen spesifikasyonu olanaksız hale gelir. Teorik tartışmalar benzer etkiler bulunduğunda, β_{qj} için 2. aşama modelinin tesadüfi etkileri içermemesi önerilir. Sonuç olarak, ana soru 1.aşama açıklayıcı değişkenlerinin modele ait olup olmadığıdır.

1. aşama modelindeki bir değişkenin modelden çıkartılması için aşağıda verilen koşullar sağlanmalıdır.

- i. Eğim parametresinin heterojenliğe ait herhangi bir delil bulunmamalı,
- ii. Sabit etkiler yada ortalamaya ait herhangi bir etki olamamalı ve
- iii. Açıklayıcı değişkene karşılık gelen γ_{q0} ait t oranı da anlamsız olmalıdır.

1.aşama açıklayıcı değişkeninin ortalama üzerinde 0'dan farklı sabit etkiye sahip olup olmadığının kontrolü için, modele yeni bir açıklayıcı değişken dahil edilir ve onunla ilgili katsayının anlamlılığı test edilir. Bu metot, açıklayıcı ve bağımlı değişken arasındaki ilişkinin doğrusal olduğunu varsayar. Doğrusallık varsayımı, 1. aşama ampirik bayes kalıntılarının ilgilenilen açıklayıcı değişkene karşı grafikleri incelenebilir.

Hem Y_{ij} ve hem de herhangi bir tane X_s ile ilişkili olan 1. aşama açıklayıcı değişkeni model dışında bırakıldığında, bir yada daha fazla β_s tahmini sapmalı olabilir. Bu durum, β için oluşturulan 2. aşama modelinde de saptalara neden olabilir.

Diğer bir spesifikasyon sorunu ise, gruptan gruba değişen ve diğer 1. aşama katsayıları ile ilgili olan bir değişkenin 1. aşama modeline sabit etkili olarak dahil edilmesidir.

5.1.1.1 Birinci aşama modelinin yanlış belirlenmesinin 2. aşama tahminleri üzerinde etkisi

i. Sabit parametre için kurulan 2. aşama modelleri üzerindeki etkiler: 1. aşama açıklayıcı değişkenlerinin belirlenmesindeki başarısızlık, 2. aşama tahmincilerinin sabit parametre tahminlerinde saptalara neden olmaktadır. Bu sapma iki yoldan yok edilebilir:

- Birinci yol, açıklayıcı değişkenin 1. aşama modeline, kendi büyük ortalaması etrafında dağılan bir şekilde eklenmesidir. Böylece her bir birimin sabiti, β_{0j} , bu değişken üzerinde gruplar arası farklılıklar için düzeltilmiş olur. Ve saptaların kaynağı elimine edilerek açıklayıcı değişkenin hatasız ölçüldüğü, bağımlı değişken ile doğrusal ilişki içinde olduğu kabul edilir.
- İkinci yol ise, açıklayıcı değişken 1. aşama modeline grup ortalamaları etrafında dağılan bir şekilde eklenmesidir. Böylece, grupların açıklayıcı değişken için ortalamaları eklenerek, 2. aşama açıklayıcı değişkenlerinin sabitleri üzerindeki sapma yok edilmiş olur. Eğer açıklayıcı değişkene ait eğim tesadüfi gibi davranıyorsa, ikinci yol tercih edilebilir.

ii. Eğim parametresi için kurulan 2. aşama modelleri üzerindeki etkiler:

1. aşama modelinde, hem bağımlı değişken hem de diğer açıklayıcı değişkenlerle ilişkili bir değişkenin model dışında bırakılması 2. aşamada eğimlere ait modelleme üzerinde etkili olabilir. 1. aşama modelinin yanlış belirlenmesinin eğim modelindeki γ katsayılarının tahminin üzerindeki etkilerini engellemek için modele dışarıda bırakılan 1. aşama açıklayıcı değişkeni eklenir. Değişkenin eklenmesi, sabit için model üzerinde herhangi bir etki yaratmaz. (Yani açıklayıcı değişkeni dahil olduğu yada olmadığı modellerde $\hat{\gamma}_{01}$ ve $\hat{\gamma}_{02}$ aynıdır.)

Diğer taraftan, eğitimdeki etkilerin tahmini ise oldukça farklıdır. Yani, 1.aşama açıklayıcı değişkeninin ihmal edilmesi γ_{10} 'ın tahmini üzerinde etkilidir. Çünkü, eklenen değişken ve diğer açıklayıcı değişkenler her ikisi de bağımlı değişken ile pozitif ilişkilidir ve birbirleriyle de pozitif ilişkilidir.

γ_{11} ve γ_{12} sapmanın kaynağı daha karışıktır. Çünkü, bu parametreler aşamalar arası etkileşimi gösterir, yani bu parametreler 2. aşama değişkenleri ile 1. aşama değişkenleri arasındaki etkileşimi içermektedir. 1.aşama değişkeninin ihmal edilmesinin, aşamalar arası etkileşimler üzerinde etkili olması için 3 koşul sağlanmalıdır. Bunlar :

- i. Modelden dışlanan değişken Y ile ilişkili olmalıdır .
- ii. Modelden dışlanan değişken, zaten modelde var olan X değişkeni ile ilişkili olmalıdır.
- iii. X ve modelden dışlanan değişken arasındaki ilişki birimden birime değişmelidir ve bu ilişkinin gücü 2. aşama tahmincileri ile ilişkili olmalıdır.

Yukarıdaki 3 koşul sağlayan açıklayıcı değişkenin modele dahil edilmediği durumda γ_{11} ve γ_{12} tahminlerinin sapmalı olduğu görülür ve bu etkiler modelden dışlanan değişkenin modele eklenmesi ile oldukça değişmektedir.

5.1.1.2 İkinci aşama modelinin yanlış belirlenmesinin 1. aşama tahminleri üzerindeki etkileri:

1. aşama değişkeni ile ilişkili 2. aşama açıklayıcı değişkeninin ihmal edildiğinde, 1.aşama değişkenlerinin parametre tahminleri sapmalı olacaktır. Bu durum ise 1.aşama tahmincisi, X_{qij} ile 2.aşama tesadüfi etkisi arasındaki kovaryansın sıfırdan farklı olmasına neden olur.

($\text{cov}(u_{qj}, x_{q'ij}) \neq 0$) Bu farklılığı düzeltmek için iki yaklaşımdan yararlanılabilir. Bunlar:

- Bu tip bir kovaryans, 2. aşama modeline hiç müdahale edilmeden, 1.aşama açıklayıcı değişkenlerinin modele, grup ortalamaları etrafındaki dağılan bir şekilde dahil edilmesiyle düzeltilebilir. Yani, 1.aşama tahmincisi, X_{qij} ile 2.aşama tesadüfi etkisi arasındaki kovaryans, grup ortalaması $\bar{X}_{qj}$ ile bu tesadüfi etki arasındaki kovaryans haline dönüşür .
- 2.aşama modellerine $\bar{X}_{qj}$ 'lerin açıklayıcı değişken olarak dahil edilmesi ile kovaryans 0'a eşit hale gelebilir.

Bu iki yaklaşımda ihmal edilen 2. aşama değişkenlerinin 1. aşama sabit katsayıları üzerindeki etkilerinin test edilmesini önerir. Bunun içinde, 1. aşama katsayılarının grup ortalamaları etrafında dağılan yada dağılmayan modeli kurulmalıdır. 1. aşama tahmincisi ile ilişkili 1. aşama sabit katsayıları bu modeller arasında değişmiyorsa, ihmal edilen değişken herhangi bir sapmaya neden olmuyor denilebilir.

Eğer, 1. aşama modelindeki açıklayıcı değişken hatalı ölçüme sahipse, β_{1j} ve ortalama eğim γ_{10} 'ın tahmini sapmalı olacaktır. Bu değişkene ait güvenilirlik gruptan gruba değişiyorsa ve bu güvenilirliğin değişkenliği modeldeki bir yada daha fazla 2. aşama açıklayıcı değişkeni ile ilgiliyse, γ_{11} ve γ_{12} , aşamalar arası etkileşim tahminleri de sapmalı olacaktır.

5.1.2 Birinci Aşama Tesadüfi Etkileri Hakkındaki Varsayımların Araştırılması

Çok aşamalı modellerin, varsayımlardan bir tanesi homoskedasite yani kalıntı varyanslarının sabit olması, açıklayıcı değişkenlere bağlı olamamasıdır. Değişen varyanslılığın çeşitli nedenleri olabilir. Bunlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Bir yada daha fazla önemli 1. aşama açıklayıcı değişkeni model dışında bırakılmışsa ve bu değişkenler gruplara karşı eşit olmayan varyansla dağılıyorsa, 1. aşama varyanslarında heterojenliğe neden olabilir.
2. Tesadüfi olarak yada tesadüfi olmadan değişen 1. aşama bağımsız değişkenlerinin etkileri, hatalı olarak sabit gibi ele alınıyorsa yada modelden tamamen dışlanmışsa 1. aşamada değişen varyanslılık durumu ortaya çıkabilir.
3. Basit kodlama hataları bir yada birkaç grup içindeki varyansların olduğundan büyük hesaplanmasına neden olabilir.
4. Basık yani normal olmayan veriler heterojen varyans için anlamlı test istatistiklerine neden olabilir. Parametrik testler non-normalliğe karşı aşırı duyarlıdır ve basıklık kendini değişen varyans olarak gösterebilir. (Raudenbesh & Bryk, 2002)

5.1.2.1 Birinci Aşama Modelinde Değişen Varyanslılık Durumu

Değişen varyans (heteroskedasite) durumu herhangi bir test ile saptandıktan sonra, veriler üzerinde yapılan dönüşümlerle düzeltilmesi yani homoskedastik (sabit varyanslılık) durumuna

geçilmesi söz konusu olabilir. Düzletme işlemi ise, kalıntı varyansları ile açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkinin fonksiyonel biçimine bağlıdır.

Eğer 1. aşama kalıntı varyansı X_1 değişkenine doğrusal olarak bağlı ise bu (5.3) deki gibi ifade edilebilir:

$$1. \text{ aşama varyansı} = \text{var}(r_{ij}) = \sigma_0^2 + 2\sigma_{01}x_{1ij} \quad (5.3)$$

(5.4) deki formül ise kalıntı varyanslarının x_{1ij} 'nin kudaratik formu olduğunu durumu göstermektedir.

$$\text{var}(r_{0ij} + r_{1ij}x_{1ij}) = \sigma_0^2 + 2\sigma_{01}x_{1ij} + \sigma_1^2x_{1ij}^2 \quad (5.4)$$

Heteroskedastinin test edilebilmesi için, bağımsız değişken ya da öngörü değerlerine karşı kalıntı grafiklerinden yararlanılabilir. (Snijders ,2003)

Bryk ve Raudenbush tarafında ileri sürülen diğer bir yöntemde ise, 1. aşama kalıntı varyanslarının gruplar arasındaki farklılıklardan yararlanarak heteroskedastinin belirlenmesi yoluna gidilir. Bu yöntem her grup içi kalıntının en küçük kareler tahminine bağlıdır yani en küçük kareler kalıntılarına bağlıdır. Bu yöntem ancak tüm grup sayısı açıklayıcı değişken sayısından fazla ise uygulanabilir. Sadece 1 .aşama açıklayıcı değişkenleri dahil edilmekte diğer değişkenler ise önemsenmemektedir. Yani bu yöntemin uygulanabilmesi için r açıklayıcı değişken sayısı olmak üzere, minimum $n_j - r - 1$ tane yani 10 yada daha fazla grup olması gereklidir. Tüm bu gruplara ayrı ayrı 1. aşama açıklayıcı değişkenleri ile sıradan en küçük kareler regresyonu uygulanır. j grup için tahmin edilen kalıntı varyansları s_j^2 , serbestlik derecesi ise $df_j = n_j - r - 1$ 'dir. j . grup için tahmin edilen kalıntı varyanslarının logaritmasının ağırlıklı ortalaması hesaplanır.

$$ls_{tot} = \frac{\sum_j df_j \ln(s_j^2)}{\sum_j df_j} \text{ dir.} \quad (5.5)$$

Eğer hiyerarşik lineer model doğru belirlenmiş ise, bu ağırlıklı ortalama ls_{tot} , σ^2 'nin en çok olabilirlik tahmininin logaritmasına eşit olur.

Gruba bağlı kalıntı varyansı s_j^2 'nin standardize edilmiş kalıntı dağılımı ölçüsü (a standardized residual dispersion) aşağıdaki formül kullanılarak bulunabilir.

$$d_j = \sqrt{\frac{df_j}{2}} \{ \ln(s_j^2) - ls_{tot} \} \quad (5.6)$$

Eğer 1 .aşama modeli doğru beliklendiyse ve ana kütle kalıntı varyansı tüm gruplar için eşit ise, d_j 'ye ait dağılım standart normal olacaktır. Kareler toplamı (5.7) da verilmiştir ve 1. aşama kalıntılarının homojenliğinin test edilmesi için kullanılabilir.

$$H = \sum_j d_j^2 \quad (5.7)$$

H, heterojenlik istatistiğidir. (heterogeneity statistic) J toplam katılan grup sayısını göstermek üzere, H, J-1 serbestlik dereceli χ^2 dağılımı gösterir.

Bu testin avantajı ise, sadece gruplar içi regresyon modeline (1.aşama modeline) bağlı olmasıdır. 2. aşama değişkenleri ve 2. aşama tesadüfi etkilerinin bunda herhangi bir etkisi yoktur, bu yüzden burada sadece 1. aşama spesifikasyonu kontrol edilir. Yinede H ve d_j ye ait dağılım, 1. aşama kalıntı varyanslarının normalliğine bağlıdır. Kalıntılar sabit varyansa sahip olsa bile, bu kalıntıların daha kalın kuyruklu dağılımları daha yüksek H değerlerine neden olur. Bu yüzden, H anlamlı sonuçlara neden olursa, d_j değerleri incelenerek mümkün heteroskedastite örnekleri ve E.K.K gruplar içi kalıntılarının dağılımı normallik için araştırılmalıdır. (Snijders, 2003)

Heteroskedastiteyi düzeltmenin en iyi yolu, bağımlı değişkenin doğrusal olmayan dönüşümlerine başvurmaktır: karekökünü alma, logaritmasını alma gibi ..bağımlı değişken oldukça çarpık olduğunda bu gereklidir. Tek aşamalı modeller için hangi dönüşümün uygun olacağı Atkinson (1985) tarafından araştırılmıştır. Hodges, çok aşamalı modeller için Box-

Cox dönüşümlerinin benzer olduğunu ileri sürmüştür. Değişen varyans olduğunda ve bağımlı değişken az sayıda kategoriye sahip olduğunda, diğer bir şık ise çok aşamalı logit modellerinin çoklu kategori için kullanılmasıdır yada dikotomik değişkenler için çok aşamalı lojistik regresyona başvurulabilir. Tüm bu dönüşümler uygulandıktan sonra, serpilme grafikleri ve kalıntı grafikleri çizilerek dönüşümlerin uygun olup olmadığı araştırılmalıdır.

5.1.2.2 Birinci Aşama Kalıntılarının Kontrolü

Çok aşamalı regresyon modeli kurulduktan sonra, modelin yeterliliği, varsayımların gerçekleşip gerçekleşmediği ve modelin kestirim için uygun olup olmadığının kontrol edilmesi için kalıntı analizinden yararlanılabilir. Kalıntıların analizi, sapan değerlerin bulunması, modelin sabit kısmının spesifikasyonunun kontrol edilmesi, bağımlı yada açıklayıcı değişken için uygun dönüşümlerin önerilmesi için kullanılabilir.

Hiyerarşik lineer modellerde kalıntı analizi oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Çünkü bu modellerde, hem 1. aşama hem de 2. aşama kalıntıları vardır. Çok aşamalı modellerde kalıntı analizi için çeşitli modeller Hilden-Minton tarafından ele alınmıştır. Çok aşamalı modeller için kalıntı analizindeki problem, gözlemlerin hem 1. aşama hem de 2. aşama kalıntılarına birlikte bağlı olmasıdır, oysa model kontrolü için bu kalıntıların ayrı ayrı düşünülmesi istenir.

Bu sorun Hilden-Minton tarafından 1995 de ele alınmıştır. Ve 1. aşama kalıntılarının analizi için, her grup için ayrı ayrı hesaplanan E.K.K regresyonuna dayalı bir yaklaşım önermişlerdir. Bu yaklaşımın avantajı, 1. aşama modelinin spesifikasyonu üzerine kurulmuş olmasıdır. Böylece, 1. aşama kalıntılarının analizi, 2. aşama modelinin yanlış spesifikasyonundan etkilenmez.

Çok aşamalı modellerde 1. aşama kalıntı analizi için ham kalıntılar ve standardize edilmiş kalıntılardan yararlanılır. E.K.K kalıntılarının varyansı 1. aşama açıklayıcı değişkenlere bağlıdır. E.K.K kalıntıları kendi standart sapmalarına bölünerek standardize edilir ve “standardize E.K.K kalıntıları” olarak adlandırılır. Bu durum bize iki tipte 1. aşama kalıntısı sunar: ham (raw) kalıntılar ve standardize E.K.K kalıntıları. Standardize E.K.K kalıntılarının avantajı sabit varyansa sahip olmaları, dezavantajı ise açıklayıcı değişkenler ile ilişkileridir. (doğrusal olmayan olabilir)

Hilden-Minton (1995), modelin uygunluğunun kalıntılara başvurarak araştırılması için çeşitli olasılıkları tartışmıştır. 1. aşama modelinin kontrolü için 1. aşama gruplar içi E.K.K kalıntıları aşağıdaki yolla kullanılabilir:

1. Standardize edilmemiş E.K.K kalıntılarının 1.aşama açıklayıcı değişkenlerine göre grafiği çizilerek doğrusal olmayan mümkün sabit etkiler kontrol edilebilir. Çok fazla 1. aşama birimi olduğu durumlarda, ham kalıntıların grafiği sadece tesadüfi dağılımları sergiler. Böyle durumlarda, düzeltilmiş (smoothed) grafiklerin çizilmesi önerilmektedir. (Atkinson, 1985)

Kalıntı grafikleri aşağıdaki düzeltilmiş grafikler haline getirilirken:

- Eğer açıklayıcı değişken sınırlı sayıda kategoriye sahipse, her kategori için ortalama kalıntı hesaplanabilir. Ortalama kalıntılar hesaplandıktan sonra değişim aralığı, her kategori içindeki ortalamanın standart hatasının iki katının ortalama kalıntılara eklenmesi ve çıkartılması ile belirlenir. Bu aralıklar dikey düzlemdeki çubuklarla gösterilir. Çubukları yatay olarak kesen doğru ise her kategori için kalıntıların ortalamasıdır. Daha sonra, 2 standart sapma değişim aralığındaki ortalama kalıntıların, açıklayıcı değişkenlere karşı grafikleri çizilir. (Bu standart sapmalar, kalıntılar arasındaki bağımlılık ve değişen varyans dikkate alınmadan alışılmış yollarla hesaplanır.)
- Sürekli açıklayıcı değişkenlerde ise, uygun düzeltme yolu, hareketli ortalama alma yoludur. (simple moving avarage) Göz önüne alınan değişkene ait düzenlenen değerler $x_1, \dots, x_M$ ve bunlara karşılık gelen kalıntı değerleri $r_1, \dots, r_M$ dir. Yani x_i ve r_i , açıklayıcı değişkenler ve aynı 1. aşama birimleri için gruplar içi kalıntıların değerleridir ve $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_M$ şeklinde düzenlenir. (birimler ile ilişkili x değerleri keyfi olarak düzenlenir.) Küçük sayıda birimden meydana gelen gruplar ihmal edilebilir ve bu yüzden M, orijinal toplam örnek genişliğinden daha küçük olabilir. Düzeltilmiş kalıntılar (Smoothed residual), ardaşık değerlerin $2K$ 'ya göre ortalamasıdır yani:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{2K} \sum_{h=-K+1}^K r_i + h \quad i = K \text{ dan } M - K \text{ ya kadardır.}$$

M, toplam kalıntı sayısıdır. K değeri veriye ve örnek büyüklüğüne bağlıdır. $\bar{\sigma}^2$, E.K.K kalıntılarının varyansı olmak üzere, $r = \pm 2\sqrt{\bar{\sigma}^2 / (2K)}$ değeri hesaplanır. Bu aralığın dışında olan $\bar{r}_i$ değerlerini gösterir, örneğin $|\bar{r}_i| = 2\sqrt{\bar{\sigma}^2 / (2K)}$ nın diğerlerine nazaran daha büyük olduğunu gösterir.

2. E.K.K kalıntıları kendi standart sapmalarına bölünmesi ile elde edilen standardize E.K.K kalıntılarının normal olasılık grafikleri, normal dağılım varsayımının kontrolü için kullanılabilir. Her bir kalıntının, normal dağılım varsayımı altında beklenen kalıntı değerlerine göre grafikleri çizilir. Yani, $\bar{r}_i$ Standardize E.K.K kalıntıları, ve z_i normal değerler ($\bar{r}_i$ 'nin rankına göre standart normal dağılımdan beklenen değerlerdir) olmak üzere $(\bar{r}_i, z_i)$ değerleri için grafikler çizilir. Bu grafiklerde, doğruya yakın ilişkiler, hata terimlerinin dağılımının normal dağılıma uygunluğunu, doğrusallıktan sapmalar ise hata terimlerinin dağılımının normal olmadığını gösterir. Örneğin, kalıntı dağılımları normal dağılımdan daha uzun kuyruklara sahipse (kuyruklarda normal dağılıma göre daha fazla olasılıklar varsa), 1. aşama sapan birimleri parametre tahminlerini aşırı derecede etkiler. Hata terimlerinin varyansının sabit olmaması, regresyon doğrusunun verilere uygun olmaması gibi varsayımlardan sapmalar kalıntıların dağılımını etkileyebilir. Bu yüzden, hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı diğer varsayımlar incelendikten sonra araştırılmalıdır.

Verinin incelenmesi bu grafiklere göre yapılmaktadır, bu testler yapıldıktan sonra modelin geliştirilmesi tavsiye edilir. (Hilden-Minton, 1995)

5.2. İkinci Aşama Modelinin Yeterliliğinin Kontrol Edilmesi

5.2.1 İkinci Aşama Modelinin Spesifikasyonu

2. aşamaya tüm açıklayıcı değişkenlerin dahil edilmesi ve daha sonra geriye dönerek anlamsız olanların modelden çıkartılması şeklindeki geriye dönük çözüm yolları uygun değildir. Bunun nedeni ise; 2.aşama değişken sayısının sınırlı olması ve çoklu doğrusal bağlantı problemidir. Değişken seçim yöntemleri çoklu doğrusal bağlantıdan etkilenmektedir, bu yüzden seçim yöntemi uygulanacak veride öncelikle çoklu doğrusal bağlantı durumu incelenmeli ve olanaklı ise düzeltilmeli ve daha sonra seçim işlemi yapılmalıdır. Eğer, çoklu doğrusal bağlantıya rağmen değişken seçim yöntemlerinden yararlanılacaksa, seçim kriterlerinin düşük tutulması önerilmektedir.

(Q+1) tane 2. aşama eşitliği için hata terimi, u_{qj} 'nin, bu eşitlikteki açıklayıcı değişkenlerle korelasyonsuz olduğu varsayılır. Bu, ihmal edilen herhangi bir bağımsız değişkenin, modelde bulunan değişkenlerle ilişkisiz olması anlamına gelir. Bu varsayımın geçerli olması için, tüm bağımsız değişkenlerin hatasız ölçülmesi gereklidir.

Modeldeki bir yada daha fazla 2. aşama bağımsız değişkeni ile anlamlı korelasyona sahip bağımsız değişken, eşitliklerden birinden ihmal edilmişse, bir yada daha fazla 2. aşama parametre tahmini sapmalı olur. Sapmanın derecesi ihmal edilen değişkenin tahmin gücüne ve bu değişkenin modeldeki diğer değişkenlerle ilişkisinin büyüklüğüne bağlıdır.

Eşitliklerden birinin yanlış kurulması, diğer eşitliklerinde yanlış kurulmasına neden olmaktadır. Tek bir eşitlik doğru kurulmuş olsa bile, bu eşitlikten tahmin edilen katsayılar sapmalı olacaktır. Bu sapma, düzgün yada yanlış belirlenmiş eşitliklerdeki hatalar arasında korelasyona neden olmaktadır.

Model dışında bırakılan değişken modeldeki diğer açıklayıcı değişkenler ile ilişkili ise, bu değişkenin model dışında bırakılması, hem sabit parametre hem de eğim parametresi için yapılan modellerdeki tahminleri etkilemektedir. Sabit parametre modelinin yanlış belirlenmesi, eğim parametresi modelinin de yanlış belirlenmesine neden olur. Çünkü, iki modele ait hatalar korelasyonlu olabilir.

2. aşama eşitliğindeki tahminlerde meydana gelen hatalar, modelin spesifikasyonunun yanlış belirlenmesinden kaynaklanabileceği gibi başka yanlış kurulmuş 2. aşama eşitliklerinden de kaynaklanabilir.

Doğru bir şekilde belirlenmiş 2. aşama eşitliğindeki sapmalı tahminler, farklı yanlış belirlenmiş bir 2. aşama eşitliğinden kaynaklanabilir ve $(Q+1)$ tane eşitlik için aynı bağımsız değişkenler kullanılırsa, bu iki eşitlik arasındaki korelasyonlu hatalar önlenabilir. Her eşitlik için aynı bağımsız değişkenler kullanılmışsa ve veri oldukça dengeli ise (tüm gruplar aynı örnek genişliğine sahip ve aynı bağımsız değişkenler varsa), eğim modelinde tahmin edilen 2. aşama katsayıları, sabit modelde tahmin edilen katsayılardan asimptotik olarak bağımsız olacaktır.

Bazı durumlarda, araştırmacı $(Q+1)$ tane eşitlikte aynı W değerlerini kullanmak istemeyebilir. Bu durumda araştırmacı modele dahil edilen değişkenleri kontrol etmeli ve bu değişkenlerle ilgili değişkenleri model dışında bırakmamalıdır. Bu tip kontroller, ampirik Bayes kalıntıları kullanılarak yapılabilir.

Modelin yanlış belirlenmesinin en önemli nedenlerinden biri ölçüm hatalarıdır. Bu yüzden, yukarıda açıklanan bu konularda, 2. aşama tahmincisine başvurmak hatalı olabilir. Genelde, 2. aşama açıklayıcı değişkeni hatalı ölçüldüyse, ona ait parametre ve diğer 2. aşama parametreleri

sapmalı olabilir. Sapmanın derecesi, doğru değişkenin açıklama gücüne, ölçümlerde yapılan hatanın büyüklüğüne ve açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyona bağlıdır.

5.2.2 İkinci Aşama Tesadüfi Etkileri Hakkındaki Varsayımların Araştırılması

Değişen varyanslılık, modelin matematiksel kalıbının yanlış kurulmasından ya da modeli tahmin etmek için kullanılan verilerden kaynaklanabilir. Heteroskedastite yani değişen varyanslılık söz konusu olduğu durumlarda parametre tahmin edicileri etkin tahmin ediciler değildir ve bundan dolayı da parametre tahmincilerinin varyansları olduğundan büyük yada küçük tahmin edilir. Bu da güven aralıkları ve hipotez testleri üzerinde etkili olacaktır.

5.2.2.1 İkinci Aşama Modelinde Değişen Varyanslılık Durumu

Hiyerarşik lineer modellerde hem sabit parametre varyansı hem de eğim parametresinin varyansı için gruplara karşı değişmediği sabit olduğu kabul edilmiştir. Bu da ikinci aşama için homoskedastite sabit varyanslılık varsayımdır. Teorik yada ampirik olarak bu varsayımın bırakılması için herhangi bir sebep varsa, bu varsayım zayıflatılarak yerine, bu varyansların W gibi herhangi bir 2. aşama değişkenine bağlı olabileceği varsayım getirilebilir.

2. aşama tesadüfi etkilerinin dağılımının J gruplarına karşı homojen olduğunu kabul ederiz. Sabit etkiler kısmında, bu varsayımdan sapmalar olduğunda, 2. aşama parametre tahminleri sapmasız olacaktır. Tesadüfi etkiler kısmında ise, sabit varyanslılık varsayımından sapmalar sonucunda β_j^* deki çekilme(ağırlıklandırma) yanlış olabilir ve β_j tahmini için ortalama hata kareleri artabilir.

2. aşamada sabit varyanslılık testi için gruplar 2. aşama açıklayıcı değişkenlerindeki özelliklerine bağlı olarak sınıflandırılabilir. Ve bu sınıflara ait T matrislerinin eşit olup olmadığı en çok olabilirlik oran testi yardımı ile sınanabilir.

5.2.2.2 İkinci Aşamada Normallik Varsayım

2. aşamada normallik varsayımından sapmalar sabit etkilerin tahmini üzerinde sapmaya neden olmamaktadır. Fakat, 2. aşama tesadüfi etkileri kalın kuyruklara sahipse (basıklık) , normallik varsayımına bağlı güven aralıkları ve hipotez testleri sapan değerlere(outliers) karşı duyarlı olacaktır. Normallik varsayımından sapmalar, sabit etkiler için güven aralıkları ve hipotez testlerinin geçerliliği üzerinde etkili olabilir.

2.aşamada normallik varsayımının kontrolü oldukça zordur, çünkü 2.aşama çıktısı β_{qj} , doğrudan gözlenemez. 2. aşamada ampirik bayes kalıntılarının grafikleri çizilir ve sapan değerlerin araştırılması için bu grafiklerden yararlanılır.

Normallik varsayımının kontrolü, her aşama için $Q+1$ tane korelasyonlu tesadüfi etki tahmin edildiğinde zorlaşabilir. Her birim için Mahalanobis uzaklıkları, tesadüfi etkilerin normallikten ayrışma derecesini belirlemek ve sapan değerleri bulmak için kullanılabilir. Bu istatistik her grup için tahmin edilen kalıntı tahminleri arasındaki mesafeyi ölçer.*Veri normal dağıldığında ve 1.aşamaya ait büyük örnek genişliğine sahip olduğunda bu istatistik $Q+1$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahip olur. Gözlenen uzaklık istatistiklerinin beklenen istatistiklerine karşı grafikleri yardımı ile normal dağılım araştırılabilir. Eğer 2.aşama tesadüfi etkileri kalın kuyruklara sahipse, varsayımlardan sapmalardan daha az etkilenen raboust tahminlerinden yararlanılabilir. (Raudenbush & Bryk, 2002)

5.2.2.3 İkinci Aşama Kalıntıların Kontrolü

2. aşama modelinin spesifikasyonunu kontrol etmeden 1. aşama modelinin spesifikasyonunu kontrol etmek gerekir.

Ampirik Bayes Kalıntıları

1. aşama kalıntılarına benzer olarak 2. aşamada da,

- Standardize edilmemiş 2. aşama kalıntılarının, onlarla ilişkili 2. aşama değişkenlerine karşı grafikleri ve
- Standardize edilmiş 2. aşama değişkenlerinin normal olasılık grafiklerinden kalıntı analizinde yararlanılır.

1. aşamaya göre daha az 2. aşama birimi olduğundan, 2.aşamaya ait kalıntı grafiklerinin düzeltilmesi gerekli değildir. Grafikler sapan değerler içeriyorsa, bunlara karşılık gelen 2. aşama birimleri aykırı değer kuşkusu ile kontrol edilebilir. Ampirik Bayes kalıntılarının kontrolü Langford ve Lewis tarafından 1998 de ele alınmıştır.

* Mahalanobis uzaklığı: $u_j^{*T} V_j^{-1} u_j^*$ şeklindedir ve u_j^* , her J grubu için tesadüfi etki u_j 'nin ampirik bayes tahmin matrisidir ve V_j de bu vektörün hata dağılımıdır. $V_j = \sigma^2 (X_j^T X_j)^{-1} + T - \text{var}(W_j \hat{y})$ dir. $\text{var}(W_j \hat{y})$, $(W_j \hat{y})$ 'nin $P+1$ tane elemana ait dağılım matrisidir.

Hiyerarşik lineer modellerde, tesadüfi etkiler hakkındaki yanlış varsayımlar, sabit etkiler hakkındaki çıkarımlarda ciddi çarpıklıklara neden olabilir. Tesadüfi etkiler hakkındaki varsayımlara bağlı sabit etkiler hakkındaki çıkarımların duyarlılığı için “robust” standart hatalar hesaplanır. En yüksek aşamadaki birim sayısı büyük olduğu zaman, robust standart hataların kullanılması uygundur. Bu tip hatalar sıradan E.K.K yada sabit etkilerin tahminleri ile birlikte hesaplanabilir.

5.2.2.3.1 E.K.K Yöntemi Altında Robust Standart Hatalar

Tek 1. aşama açıklayıcı değişkeni X_{ij} 'nin varlığında birleştirilmiş model aşağıdaki gibidir:

$$Y_{ij} = \gamma_0 + \gamma_1 X_{ij} + e_{ij} \quad (5.8)$$

matris yaklaşımı ile

$$\begin{pmatrix} Y_{1,j} \\ . \\ . \\ . \\ Y_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{1,j} \\ 1 & . \\ 1 & . \\ 1 & . \\ 1 & X_{n,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1,j} \\ . \\ . \\ . \\ e_{n,j} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

şeklinde gösterilebilir.

$$\text{ve kısaca } Y_j = X_j \gamma + e_j \text{ olarak yazılır.} \quad (5.10)$$

$$\text{E.K.K varsayımları ve normallik varsayımı altında, } e_j \sim N(0, \sigma^2 I_{n_j}) \text{ 'dir.} \quad (5.11)$$

Ve E.K.K kestirimler

$$\hat{\gamma} = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J X_j^T Y_j \quad (5.12)$$

şeklinde hesaplanır.

C sabit matris ve Z de tesadüfi vektör olmak üzere, kestirimlerin varyansı

$$\text{Var}(CZ) = C \text{Var}(Z) C^T \text{ şeklindedir. Yani,}$$

$$Var(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J X_j^T [Var(Y_j)] X_j \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \quad (5.13)$$

E.K.K varsayımları altında, $Var(Y_j) = \sigma^2 I$ dir ve (5.13)deki eşitlik basitleştirilerek

$$Var(\hat{\gamma}) = \sigma^2 \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \quad (5.14)$$

şeklini alır. E.K.K. varsayımlarının sağlanmadığını ve Y'e ait varyansın bilinmeyen bir yapıya sahip olduğunu kabul edelim. Her 2.aşama J birimi (grubu) uygun sapmasız tahminci,

$$\widehat{Var}(Y_j) = (Y_j - X_j \hat{\gamma})(Y_j - X_j \hat{\gamma})^T \quad (5.15)$$

Elde edilen robust varyans tahminleri

$$\widehat{Var}(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J X_j^T (Y_j - X_j \hat{\gamma}) \times (Y_j - X_j \hat{\gamma})^T X_j \left(\sum_{j=1}^J X_j^T X_j \right)^{-1} \quad (5.16)$$

Jye ait bu tahmin tutarlıdır. e_j hakkındaki E.K.K. ler varsayımları yanlışsa, J sınırların dışına doğru arttığında kestirim gerçek standart hataya yakınsar. Ayrıca,

$$(\hat{\gamma}_{qs} - \gamma_{qs}) / [\widehat{Var}(\hat{\gamma}_{qs})]^{1/2} \quad (5.17)$$

0 ortalama ve büyük J ler için eşit varyansla yaklaşık normal dağılıma sahiptir. Buda, kalınitlar normal dağılmasa bile, makul güven aralıkları bulunması ve hipotez testleri yapılmasını sağlar.

5.2.2.3.2 G.E.K.K Yöntemi Altında Robust Standart Hatalar

Hiyerarşik lineer modellerde, γ_s tahminleri için genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi kullanılır. (5.8) deki model altında kalıntılar:

$$e_{ij} = u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + \varepsilon_{ij}. \quad (5.18)$$

şeklindedir

$$\text{matris yaklaşımı ile, } e_j = X_j u_j + \varepsilon_j \text{ dir.} \quad (5.19)$$

u_j , burada 2.aşama tesadüfi etkilerinin vektörüdür. Standart HLM varsayımları

$$u_j \sim N(0, T), \varepsilon_j \sim N(0, \sigma^2 I_{n_j}) \text{ dir.} \quad (5.20)$$

$$\text{Bu yüzden, } Var(Y_j) = Var(X_j u_j + \varepsilon_j) = V_j = X_j T X_j^T + \sigma^2 I_{n_j} \text{ şeklindedir} \quad (5.21)$$

Tüm bu varsayımlar altında G.E.K.K. tahminleri

$$\hat{\gamma} = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} Y_j \quad (5.22)$$

şeklindedir.

Hesaplanan G.E.K.K. tahminleri, T ve σ^2 'nin yerine kullanılabilir. Bu tahminlerin varyansı ise,

$$Var(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \times \sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} [var(Y_j)] X_j^T V_j^{-1} \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \quad (5.23)$$

şeklinde hesaplanabilir. G.E.K.K. varsayımları altında $Var(Y_j) = V_j$ dir ve (5.23) deki eşitlik

$$Var(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \quad (5.24)$$

şeklinde basitleştirilebilir.

G.E.K.K. varsayımlarının ihlal edildiğini ve Y'ye ait varyansın bilinmediğini varsayalım. Bu durumda, Robust varyans tahminleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\widehat{Var}(\hat{\gamma}) = \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \times \sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} (Y_j - X_j \hat{\gamma})(Y_j - X_j \hat{\gamma})^T X_j^T V_j^{-1} \left(\sum_{j=1}^J X_j^T V_j^{-1} X_j \right)^{-1} \quad (5.25)$$

G.E.K.K. yöntemi altında elde edilen robust varyans tahminleri, J için tutarlıdır ve HLM'nin dağılım ve tesadüfi etkilerin kovaryans yapısı hakkındaki varsayımları ihlal edildiğinde bile, güven aralıkları ve hipotez testleri doğru olacaktır.

Robust varyans tahminleri, modelin doğru belirlenip belirlenmediğinin tespiti için kullanılabilir. Normal modelden elde edilen hatalar ile robust hatalar karşılaştırıldığında arada büyük farklar varsa bu modelin yanlış belirlendiği konusunda bir sinyaldir. Örneğin, değişen eğim varsa fakat bu modellenmemişse, normal ve robust hatalar arasında fark ortaya çıkacaktır. Değişen eğim modele dahil edildiğinde, yanlış belirleme düzelecektir. Normal modelden elde edilen hatalar ile robust hataların birbirine çok yakın olması ise, hiyerarşik lineer modeller için geçerli olan varsayımların gerçekleştiğini göstermez. Bu durum, kalıntı

kovaryans yapısı ile ilgili varsayımlarından sapmalara karşı, standart hataların duyarsız olduğunu gösterir.

5.2.2.3.3 İkinci Aşamada Etkili Gözlemlerin Araştırılması

j. grubun (2. aşama birimi) veri setinden silinmesi parametre tahminlerinde önemli değişikliklere neden oluyorsa, bu gözlemler etkili gözlemler olarak adlandırılır. Elde edilen parametre tahminleri üzerinde verinin kesin kısımlarının etkilerini gösteren kalıntıların teşhis değerleri, etki teşhisleri- etkili gözlem teşhisi (influence diagnostic) olarak adlandırılır. (Longford & Lewis, 1998)

Genel sabitlerden ve tüm regresyon katsayılarından meydana gelen sabit kısımdaki tüm parametrelere ait vektör, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_r)$ şeklinde gösterilir. Tüm veri kullanıldığında $\hat{\gamma}$ tahmin vektörünü, $\hat{\Sigma}_r$ ise bu tahmin vektörüne ait kovaryans matrisini gösterir. ($\hat{\Sigma}_r$ 'nin köşegen elemanları, γ 'nın elemanlarının standart hatalarının karesidir.) Eğer 2. aşama birimi j, veri setinden silinirse, elde edilen parametre tahmini $\hat{\gamma}_{(-j)}$ ile gösterilir. Eğer $\hat{\gamma}_{(-j)}$, $\hat{\gamma}$ den çok farklı ise j. birim büyük bir etkiye sahiptir. Bu farklılık $\hat{\Sigma}_r$ kovaryans matrisi temeli üzerinde ölçülebilir, çünkü bu matris $\hat{\gamma}$ 'nin elemanlarında var olan belirsizliği göstermektedir. Bir yada daha fazla regresyon katsayısı için, $\hat{\gamma}_h$ ile $\hat{\gamma}_{(-j)h}$ arasındaki fark küçük değilse yada $\hat{\gamma}_h$ 'ın standart hatasından büyükse, j. birim parametre tahminleri üzerinde büyük bir etkiye sahiptir. Verilen γ vektörü $r+1$ tane elemana sahip ise, verilen veri seti için tahmin edilen sabit etkiler ile j. birim çıkarılarak elde edilen veri seti için tahmin edilen sabit etkiler arasındaki fark aşağıdaki gibi verilir:

$$C_j^{OF} = \frac{1}{r+1} (\hat{\gamma} - \hat{\gamma}_{(-j)})' \hat{\Sigma}_r^{-1} (\hat{\gamma} - \hat{\gamma}_{(-j)}) \quad (5.26)$$

Bu, sapmalar standart hataların oranı olarak ölçüldüğünde, j ile ve j.'nin dahil olmadığı tahminler arasındaki farklar, sapmaların karesinin ortalaması gibi yorumlanabilir. (Örneğin, sadece 1 tane sabit parametre olsun ve bazı birim için C_j^{OF} değeri 0.5 olsun. Bu birimin

atılması ile parametre tahminindeki değişiklik $\sqrt{0.5} = 0.7$ standart sapmadır ve oldukça fark edilebilir.

Bu etkili gözlem teşhisleri, lineer regresyon analizi için Cook uzaklıkları ile benzetilmektedir. Eğer 2. aşama tesadüfi kısmı boş ise, C_j^{OF} Cook uzaklıklarına eşit olur.

Her j. grup için $\hat{\gamma}_{(-j)}$ değerlerinin hesaplanması çok vakit alabilir. Eğer odak, etki istatistiklerinin teşhis değerlerinin hesaplanmasından çok, j. değişkenin ihmal edildiği veri için yapılan tahminin kesinliğinde ise, $\hat{\gamma}_{(-j)}$ yerine birinci adım tahminleri kullanılır. Birinci adım tahminleri $\tilde{\gamma}_{(-j)}$ ile etki teşhis değerleri:

$$C_j^{OF} = \frac{1}{r+1} (\hat{\gamma} - \tilde{\gamma}_{(-j)})' \hat{\Sigma}_F^{-1} (\hat{\gamma} - \tilde{\gamma}_{(-j)}) \quad (5.27)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Tesadüfi kısmın tahmini üzerindeki j. gruba ait etki için teşhis değerleri de benzer şekilde tanımlanabilir. Tesadüfi kısımdaki tüm parametrelerin vektörü ϕ 'dır ve q da bu vektördeki eleman sayısıdır. Eğer tesadüfi etkilere ait kovaryans matrisi sınırsız ise, ϕ , hem 1. aşama kalıntılarının hem de tesadüfi eğimlerin varyans ve kovaryanslarını içerir. p tane tesadüfi eğim verilmişse, toplam parametre sayısı $q = (p+1)(p+2)/2 + 1$ 'dir. $\hat{\phi}$ tüm veri setinden yapılan tahmini gösterir, bu tahminin kovaryans matrisi ise $\hat{\Sigma}_R$ 'dır. (köşegen elemanları $\hat{\phi}$ 'ın elemanlarının standart hatalarının karesidir. Ve j. birim silindiğinde elde edilen tahminler yani birinci adım tahminleri ise $\hat{\phi}_{(-j)}$ ile gösterilir. Tesadüfi kısımdaki parametre tahminleri üzerinde j. birimin etkisi için teşhis değerleri ise;

$$C_j^R = \frac{1}{q} (\hat{\phi} - \hat{\phi}_{(-j)})' \hat{\Sigma}_R^{-1} (\hat{\phi} - \hat{\phi}_{(-j)}) \quad (5.28)$$

ile hesaplanabilir.

Modelin sabit kısmı ve tesadüfi kısmındaki parametreler üzerinde j. grubun birleştirilmiş etkisi bulunabilir. $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\phi}$ yaklaşık olarak korelasyonsuz ise (Longford, 1987), bu tip birleştirilmiş teşhis etki değeri basitçe, daha önceden tanımlanan iki teşhis değerinin ağırlıklı ortalamasıdır:

$$C_j = \frac{1}{r+q+1}((r+1)C_j^F + qC_j^R) \quad (5.29)$$

Lesaffre ve Verbeke 1998 de, burada önerilen ile çok benzer local etki teşhis değerlerini ileri sürmüşlerdir.*

Bir grubun tüm veri seti için parametre tahminleri üzerinde büyük bir etkiye sahip olması iki şeye bağlıdır. Bunlardan birincisi grubun kaldıraç gücüdür.(Leverage) Çünkü grubun parametreler üzerindeki muhtemel etkisi grup büyüklüğü n_j ve gruptaki açıklayıcı değişkenlerin değerlerine bağlıdır. Birim sayısı fazla olan ve açıklayıcı değişkenleri güçlü dağılan değerlere sahip grup, yüksek kaldıraç gücüne sahiptir. İkincisi ise, grubun modele uygunluğudur ve bu modelde bu gruptaki kalıntı değerleri ile yakından ilişkili diğer gruplar tarafından tanımlanan (tahmin edilen) modeldir. Sahip olduğu birim sayısı az oldu için düşük kaldıraç gücüne sahip olan grup, parametre tahminleri üzerinde zayıf etkiye sahiptir. Eğer kalıntılar 0'a çok yakınsa, yüksek kaldıraç gücüne sahip olan grup parametre tahminleri üzerinde güçlü etkiye sahip değildir.

Model uygunsa ve açıklayıcı değişkenler yaklaşık olarak gruplara karşı tesadüfi dağılıyorsa (9.5), (9.6) ve (9.7) teşhis beklenen değerleri grup büyüklüğü n_j ile orantılıdır. n_j 'nin fonksiyonu olan bu teşhislerin grafikleri bazı grupların sabit parametre tahminleri üzerinde, grup büyüklüğüne göre beklenenden daha güçlü etkiye sahip olup olmadıklarını gösterir.

Modele uygun olan 2. aşama birimleri, her birim için standardize edilmiş çok değişkenli kalıntılar (standardized multivariate) ile ölçülebilir. Bu ölçüm, Leasaffre ve Verbeke tarafından 1998 de önerilmiştir ve kalıntıların kareli uzaklığı "squared length of the residual"

* Lesaffre ve Verbeke'in teşhisleri , (5.27),(5.28) ve (5.29) de verilen teşhis değerlerine çok benzemektedir , bunların parametre sayısının iki katına bölünmüş halidir fakat farklı tahminler kullanılır. Burada, kullanılan tahmin değerleri, lineer regresyon için Cook aralıkları ile aynı ölçeğe sahip olduğu için ve birinci adım tahminleri EM algoritmalarına dayanan bilgisayar yazılımlarından kolay bir şekilde elde edildiği için tercih edilmiştir.

olarak adlandırılırlar. Sabit kısım temel alındığında, Y_{ij} gözlemi için tahmin edilen değer

$$Y_{ij} = \hat{\gamma}_0 + \sum_{h=1}^r \hat{\gamma}_h x_{hij} \text{ 'dir.}$$

j. grup için çok değişkenli kalıntılar, tahmin edilen bu değerler ile gözlemler arasındaki farka ait vektördür. Yani j. grup için çok değişkenli kalıntılar

$$D_j = \begin{pmatrix} Y_{1j} - \hat{Y}_{1j} \\ Y_{2j} - \hat{Y}_{2j} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ Y_{n_jj} - \hat{Y}_{n_jj} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

şeklindedir.

Bu çok değişkenli kalıntılar, j. gruptaki tüm gözlem vektörünün kovaryans matrisi temel alınarak standardize edilebilir. Tek tesadüfi eğimli hiyerarşik lineer modeller için, kovaryans matrisinin elemanları ;

$$\text{var}(Y_{ij} | x_{ij}) = \tau_0^2 + 2\tau_{01}x_{ij} + \tau_1^2 x_{ij}^2 + \sigma^2 \quad (5.30)$$

$$\text{cov}(Y_{ij}, Y_{i'j} | x_{ij}, x_{i'j}) = \tau_0^2 + \tau_{01}(x_{ij} + x_{i'j}) + \tau_1^2 x_{ij} x_{i'j} \quad (5.31)$$

şeklinde elde edilebilir. Genel model spesifikasyonu için, j. gruptaki gözlemlerin kovaryans matrisi $\Sigma(Y_j) = \text{Cov}(Y_j)$ şeklinde gösterilir.

Kovaryans matrisi, modelin tesadüfi kısmındaki parametrelerin bir fonksiyonudur. Parametrelerin yerine tahminleri kullanıldığında kovaryans matrisi $\hat{\Sigma}(Y_j)$ şeklinde gösterilir. Standardize çok değişkenli kalıntılar ise (5.32) de verilmiştir.

$$S_j^2 = D_j' (\hat{\Sigma}(Y_j))^{-1} D_j \quad (5.32)$$

Çok değişkenli kalıntılar her birim varyansı ile korelasyonsuz elemanlardan meydana gelen vektöre dönüştürüldükten sonra, standardize edilmiş kalıntılar j. grup için çok değişkenli

kalıntıların kareleri toplamı şeklinde yorumlanabilir. Eğer model doğru belirlenmişse ve parametre tahminlerinin kesinliği için grup sayısı yeterli ise, S_j^2 , n_j serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. Bu dağılım S_j^2 'nin test edilmesi ve grubun toplam veri setine göre tanımlanmış olan hiyerarşik lineer modele uygunluğunun araştırılması için kullanılabilir. Bu öneri, Waternaux, Laird ve Ware tarafından 1989 da getirilmiştir. N toplam grup sayısını göstermek üzere, standardize çok değişkenli kalıntıların en küçük p-değeri 0.05/N değerinden küçükse model spesifikasyonun şüpheli olduğuna işaret eden, Bonferroni düzeltmesine çoklu test için başvurulabilir.

S_j^2 değeri χ^2 dağılımı temel alınarak değerlendirildiğinde, C_j değerleri yalnızca diğer gruplara oranla değerlendirilir. Model spesifikasyonu kontrol edildiği zaman, diğer gruplarla karşılaştırıldığında daha yüksek etki teşhis değeri C_j 'ye sahip ve aynı zamanda standardize edilmiş çok değişkenli kalıntılar S_j^2 ile ölçüldüğünde zayıf uygunluğa sahip gruplar merak uyandırır. Bu tip gruplar incelenmelidir. Örneğin, veri hatalı olabilir yada grup araştırılan ana kütleye gerçekten dahil olmayabilir. Bu araştırmalar modelin geliştirilmesinde çok önemli bir yere sahiptir. (Snijders, 2003)

5.3 Küçük Örnekler İçin Çıkarsamaların Geçerliliği

Tamamen dengeli* veri söz konusu olduğunda, sabit etkiler hakkındaki çıkarsamalar için küçük örnek teorisi geçerlidir. Sabit etkiler hakkındaki çıkarsamaların dengeli veri için hatasız olması mümkündür, çünkü sabit etkilerin nokta tahminleri varyans bileşenlerine bağlı değildir.

Dengesiz verilerde ise, büyük örnek teorisinden yararlanılır. Sabit etkiler ve onların standart hatalarının nokta tahminleri, modeldeki her varyans kovaryans bileşenine bağlıdır. Sabit etkilerin nokta tahminleri ile varyans kovaryans bileşenlerinin nokta tahminleri arasındaki karşılıklı bağımlılıktan ötürü, tahminlerin örnek dağılımı bilinmez. Yinede, en çok olabilirlik tahminleri kullanıldığında, en çok olabilirlik tahminlerinin büyük örnek özellikleri bilinir. (Maas & Hox, 2003)

* Tamamen dengeli veri oldukça sınırlandırılmış bir veri setidir. 2 aşamalı hiyerarşide, aşağıdaki özellikler geçerli olduğunda tamamen dengeden söz edilebilir:

- Birimler içindeki örnek genişliği eşit olmalıdır.
- Her birim içinde aynı 1. aşama açıklayıcı değişken değerleri bulunmalıdır.
- Q+1 tane 2.aşama eşitliği için, aynı açıklayıcı değişken setleri kullanılmalıdır.
- 1.aşama ve 2.aşama varyans bileşenleri tüm birimler için sabit olmalıdır.

5.3.1 Sabit Etkiler Üzerindeki Çıkarsamalar

Büyük yada küçük örnek büyüklüğü için sabit etkilere ait tahminler sapmasızdır. Fakat, dengesiz durumlarda, sabit etkilere için standart hata tahminleri oldukça küçük olur ve birimlerin referans dağılımlarının normalliğine dayalı olduğu güven aralıkları hipotez daralır.

Tek yönlü ANOVA modelinde γ_{00} ' ait nokta tahmini:

$$V_j = \hat{\sigma}^2 / n_j \quad \text{ve} \quad \bar{Y}_j = \sum Y_{ij} / n_j \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\hat{\gamma}_{00} = \sum (V_j + \hat{\tau}_{00})^{-1} \bar{Y}_j / \sum (V_j + \hat{\tau}_{00})^{-1} \quad (5.33)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$\hat{\gamma}_{00}$ 'ın tahmin edilen standart hatası:

$$[\hat{V}(\hat{\gamma}_{00})]^{1/2} = [\sum (\hat{V}_j + \hat{\tau}_{00})^{-1}]^{-1/2} \quad (5.34)$$

şeklindedir.

Genelde, γ_{00} 'ın nokta tahmini ve tahmin edilen standart hatası, σ^2 ve τ_{00} 'ın tahminlerinin fonksiyonudur. Dengeli durumda ise bu yanlıştır.

$$\hat{\gamma}_{00} = \sum \bar{Y}_j / J \quad (5.35)$$

yukarıdaki formülde de görüldüğü üzere, $\hat{\gamma}_{00}$ 'ın tahmini, σ^2 ve τ_{00} 'la bağlı değildir. Ve $V(\hat{\gamma}_{00})$ için sadece $V + \tau_{00}$ 'a ihtiyaç duyulmaktadır, ayrı ayrı bileşenlere ihtiyaç yoktur. $V + \tau_{00}$ gruplar arası ortalama kareler toplamının n 'ya bölünmesiyle tahmin edilir.

Dengeli durumda, $H_0 : \gamma = \gamma_0$ hipotezi altında

$$(\hat{\gamma}_0 - \gamma_0) / (MS_{between} / nJ)^{1/2}, J-1 \text{ serbestlik dereceli } t \text{ dağılımına sahiptir.}$$

Dengesiz durumda ise, σ^2 ve τ_{00} en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilir ve büyük örnek dağılımı normaldir.

$$Z = (\hat{\gamma}_0 - \gamma_0) / [V(\hat{\gamma}^*)]^{1/2} \quad (5.36)$$

Pratikte t dağılımı daha uygun olabilir. Fotiu (1989) da t dağılımının, normal dağılıma göre sabit etkiler için daha doğru hipotez testleri ürettiğini ileri sürmüştür.

İkinci olarak, $V(\hat{\gamma}_{00})$ negatif sapmalıdır. $\hat{\gamma}_{00}$ 'ın gerçek varyansı:

$$Var(\hat{\gamma}_{00}) = E_m[Var_c(\hat{\gamma}_{00} | \hat{\tau}_{00}, \hat{\sigma}^2)] + Var_m[E_c(\hat{\gamma}_{00} | \hat{\tau}_{00}, \hat{\sigma}^2)] \quad (5.37)$$

E_m (beklenti) ve Var_m , $\hat{\sigma}^2$ ve $\hat{\tau}_{00}$ 'ın birleşik dağılımına, E_c ve Var_c ise $\hat{\sigma}^2$ ve $\hat{\tau}_{00}$ 'ın bilindiği durumda $\hat{\gamma}_{00}$ 'ın şartlı dağılımına bağlıdır. En çok olabilirlik tahmini altında sapmalı olan ikinci kısım denegeli durumda 0'a eşittir ve dengesiz durumda ise J arttıkça 0'a yakınsar. Bazı küçük örneklerde (çok dengesiz olmayan), bu kısım oldukça küçüktür.

2.aşamada J grubu ortalama bir örnek büyüklüğüne sahip ise, $\hat{V}(\hat{\gamma}_{00})$ için sapmanın büyüklüğünün determinantı, farklı ağırlıklardaki $\hat{\gamma}_{00}$ tahminlerine karşı duyarlıdır. (9.26)daki eşitlikte $\hat{\gamma}_{00}$ için ağırlıklı ortalama $(V_j + \hat{\tau}_{00})^{-1}$ 'e bağlıdır. τ_{00} 0 olduğunda, ağırlık n_j / σ^2 olacaktır ve $\hat{\gamma}_{00}$ için ağırlıklı ortalama $\hat{\gamma}_{00} = \sum n_j \bar{Y}_j / \sum n_j$ şeklindedir. Ters olarak τ_{00} 0'dan farklı olduğunda, $\lambda_j = \tau_{00} / [\tau_{00} + (\sigma^2 / n_j)]$ olmak üzere, $\hat{\gamma}_{00} = \sum \lambda_j \bar{Y}_j / \sum \lambda_j$ şeklinde tahmin edilir. τ_{00} arttığında, λ_j 1'e yaklaşacaktır ve $\hat{\gamma}_{00}$ aritmetik ortalamaya yaklaşır. Yani; $\hat{\gamma}_{00} = \sum \bar{Y}_j / J$ 'dir. Eğer ağırlıklı ortalama $\sum n_j \bar{Y}_j / \sum n_j$, aritmetik ortalamadan çok farklı ise (9.31) deki sapma çok büyük olacaktır ve hiyerarşik tahmin $V(\hat{\gamma}_{00})$ oldukça küçük olacaktır. Eğer ağırlıklı ortalama ile aritmetik ortalama benzerse, hiyerarşik tahmin $V(\hat{\gamma}_{00})$ sapmasız olabilir.

Bu analizler ışığında aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

- i. γ hakkındaki hipotez testlerinde normal dağılım yerine t dağılımı kullanılmalıdır.

- ii. $\hat{\gamma}$ tahminlerinin ağırlıklı ortalamalı yapıya karşı duyarlı olup olmadığı denenir ve duyarlısız ise $V(\hat{\gamma})$, standart hata tahmini olarak kullanılır.
- iii. Eğer sonuçlar ağırlıklı yapıya göre duyarlı ise, $V(\hat{\gamma})$ ya bağlı t testleri liberaldir. Hatasız sonuçlara Bayes yaklaşımı ile ulaşılabilir. Oldukça kapsamlı hesaplamalar ihtiyaç duyan Bayes tahminleri, γ s ve standart hatasının tahmininde σ^2 ve T tahminlerindeki belirsizliği dikkat alır. (Raudenbush & Bryk, 2002)

5.3.2 Varyans Bileşenleri Hakkındaki Çıkarımlar

σ^2 ve T, en çok olabilirlik tahminin büyük örnek özelliklerine bağlıdır. Teknik olarak, standart hatalar ve hipotez testleri bilgi matrisine bağlıdır ve bir çok yaklaşımda σ^2 'nin nokta tahminleri oldukça doğrudur. Eğer σ^2 tüm birimler için eşit kabul edilmişse, bu tahminin kesinliği genellikle toplam örnek büyüklüğüne ($N = \sum n_j$) bağlıdır ve σ^2 için standart hatalar ve olabilirlik oran testi doğru olur.

1. aşama birimleri gruptan gruba değişiyorsa sorunlar ortaya çıkar. Asıl sorun, tahmin edilen her σ^2 için gözlem sayısıdır. (n_j) bu yaklaşımlarda, her grup için gözlem sayısı n_j büyük olmalıdır. Diğer taraftan, σ_1^2 ve σ_2^2 iki grup için tahmin edilsin, bu tahminlerin doğruluğu ve çıkarımların güvenilirliği her gruptaki toplam örnek genişliğine bağlıdır.

T tahmininin doğruluğu 2. aşama birimlerinin sayısı J'ye bağlıdır. T deki varyanslar için standart hataların bağlı olduğu bilgi matrisi güvenilirlik için, özellikle varyans tahminleri 0'a yaklaştığında büyük J'ye ihtiyaç duyar.

J küçük olduğu zaman T matrisi için EÇO tahminleri negatif sapmalıdır ve bu problem sabit etkilerin sayısı arttığında daha da kötüleşir.

T'nin elemanlarını test etmek için 3 tip test vardır. Bunlar : tek değişkenli χ^2 testi, tahminin kendi standart sapmasına oranını temel alan tek değişkenli test ve en çok olabilirlik oran testidir. (genellikle çok değişkenlidir çünkü, aynı anda iki yada daha fazla T elemanını test eder. Tüm bu testler büyük örnekler için geçerlidir. T elemanlarının tahmin edilen standart hatalar için kullanılan testler, örnek genişliği küçük olduğu zaman güvenilmezdir. Bu testleri merkezlerinde tahminlerin güven aralığı vardır ve model hakkındaki olasılık simetrik olduğunda anlamlıdır. Çoğu durumda, olasılık oldukça çarpıktır. Bu durum özellikle

varyans çok küçük olduğu durumlarda doğrudur. Genelde, küçük varyans bileşenleri ve büyük veriler, testin dayandığı büyük örnek normallik yaklaşımının doğrulanmasına ihtiyaç duyarlar.

T'nin elemanları için yapılan tüm bu testler asimptotik olarak J'ye bağlıdır. Birimler içi örnek büyüklüğü n_j sonsuz olsa bile, testler ancak grup sayısı J büyük olduğunda doğru olacaktır.

Küçük örnek genişliğini bu testler üzerindeki etkisini ayırt etmek için çok fazla araştırmaya ihtiyaç vardır. Her n_j küçük olduğunda, J büyük olsa bile T için olasılığın çarpık olduğundan şüphe duyarız. Buda test sonuçlarının yanlış olmasına neden olur. Bir olasılık olarak Bryk ve Raudenbesh olasılığın grafiğini çizme yoluna gitmişlerdir fakat bu T büyük boyutlu ise oldukça zor hale gelir.

5.3.3 Tesadüfi 1.Aşama Katsayıları Hakkındaki Çıkarımlar

Tesadüfi katsayı β_j 'ler için daha önceden anlatılan testler ve güven aralıkları her birim için ayrı ayrı E.K.K kullanıldığında mümkündür. Gruplar yeterli sayıda birime sahip değilse, bu testler ve güven aralıkları yanıltıcı olabilir.

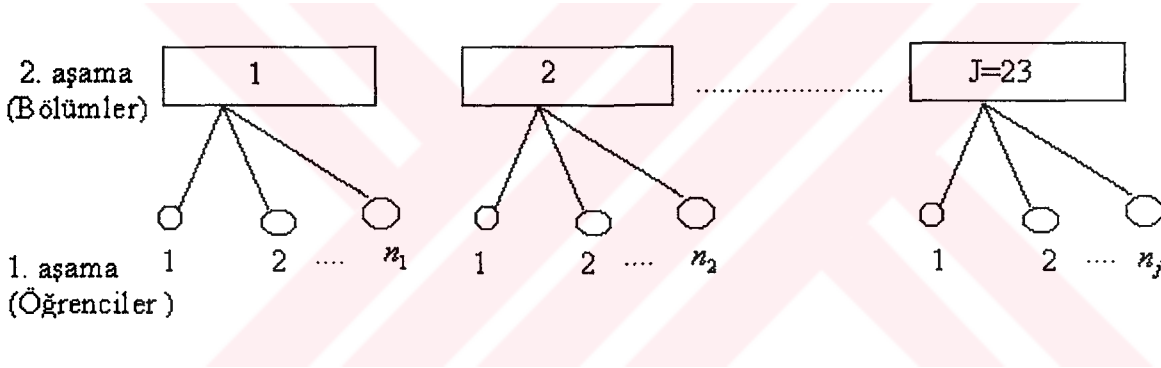
Güven aralıkları ve testler için diğer bir alternatif ise Bayes tahminlerini β_j^* , temel alır. Bu testler ve aralıklar varyans bileşenleri hakkındaki belirsizlikleri yansıtmaz. Bu yüzden, σ^2 ve T kesin olarak belirlirse, aralıklar oldukça dar ve testler yanıltıcı olabilir.

Tesadüfi parametreler hakkındaki çıkarımların doğruluğu, Ampirik Bayes yaklaşımını ile kullanılan en çok olabilirlik yöntemine bağlıdır. SEÇÖY'ni temel alan çıkarımlar, modeldeki sabit etkilerin kendi EÇÖ tahminlerine eşit olması varsayımına ihtiyaç duyar. Bu yüzden, TEÇÖY'ni temel alan aralıklar SEÇÖY'ni temel alanlardan dar olabilir. J büyüdükçe bu aralıklar birbirine yakınsar.

6. UYGULAMA

YTÜ'DE ÖĞRENCİ GÖZÜYLE ÖĞRETİM ÜYESİ ETKİNLİĞİNİN İKİ AŞAMALI MODELLER YARDIMI İLE DEĞERLENDİRİLMESİ

Uygulamamızda YTÜ'deki farklı bölümlerdeki öğrencilere uygulanan 2002 – 2003 Eğitim Öğretim yılı “Öğretim Elemanı Değerlendirme Anketi” den elde veriler kullanılacaktır. Şekil 6.1.de de görüldüğü üzere YTÜ veri setinin 2 aşamadan meydana gelen hiyerarşik bir yapısı vardır. Çok aşamalı modellere uygun bu veri setinde 1. aşama birimlerini öğrenciler, 2. aşama birimlerini bölümler meydana getirmektedir. 1.aşamada 7500 öğrenci, 2.aşamada 23 bölüm bulunmaktadır. J bölüm sayısını (2. aşama birim sayısı), n_j ise her bölümdeki öğrenci sayısını (1. aşama birim sayısı) göstermek üzere YTÜ veri seti içinde her bölümün örnek büyüklüğü ($36 \leq n_j \leq 1450$) birbirinden farklıdır. ($n_j \neq n_k, j \neq k$ için)



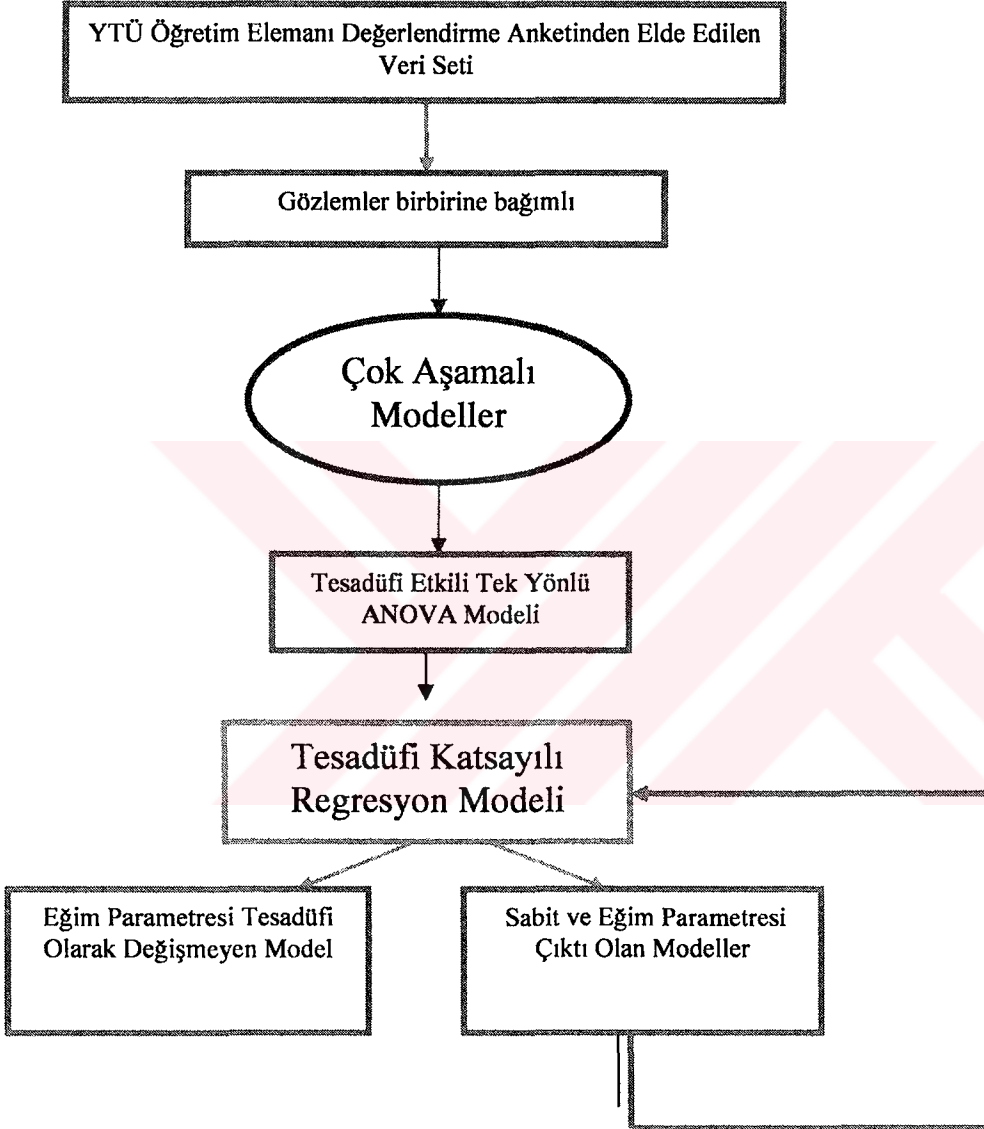
Şekil 6.1 2 aşamalı hiyerarşik lineer model için YTÜ veri setinin yapısı : YTÜ veri seti içinde yer alan 23 bölüm ve her bölümdeki öğrenciler

Şekil 6.1'de YTÜ veri seti için, çok aşamalı modellerden 2 aşamalı yapının uygun olduğu görülür.

Bağımlı değişkenimiz öğrenci gözüyle öğretim üyesinin etkinliği olmak üzere uygulamada hiyerarşik lineer modellerin özel hallerinden meydana gelen çeşitli alt modellerden yararlanarak, hiyerarşik yapıya sahip veri seti için en uygun iki aşamalı model kurulmaya çalışılmıştır. İlk olarak tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli kurularak çok aşamalı modellere başlanılır. Amaç bağımlı değişkendeki değişkenliği hiyerarşinin farklı aşamalarına göre ayırmaktır. Daha sonra tesadüfi parametrelili regresyon modeli kurulur, yani 1.aşama katsayılarının 2. aşama birimlerine karşı tesadüfi olarak değiştiği kabul edilir. Ve en son

olarak 2.aşama açıklayıcı değişkenlerinin modele dahil edilmesiyle eğim ve sabit parametresi çıktı olan hiyerarşik lineer model kurulur. Kurulan bu modellerin en çok olabilirlik oran testi ile ikili karşılaştırmaları yoluyla hiyerarşik yapıya sahip veri seti için en uygun modele karar verilmeye çalışılır. Tüm bu aşamalar uygulama içerisinde sırasıyla açıklanmaya çalışılacaktır.

Şekil 6.2’de uygulamada kullanılan modeller bir akış diyagramı olarak verilmiştir.



Şekil 6.2 YTÜ veri setinde kullanılan çok aşamalı modellere ait akış diyagramı

Uygulamada HLM6 programı kullanılmıştır. HLM 6 programı için öğrenci ve bölüm aşaması için kurulan 2 ayrı SPSS dosyadan yararlanılır. Bu dosyalarda bölümler için ID ler ve açıklayıcı değişkenler yer almaktadır. HLM program çıktılarında sabit etkiler için parametre

tahminleri ve varyans- kovaryans bileşenleri vardır. Tesadüfi etkiler ve kalıntılar ise SPSS dosyası halinde her aşama için ayrı olan kalıntı dosyaları halinde verilmektedir.

Uygulamada kullanılacak olan değişkenler Çizelge 6.1’de verilmiştir.

Çizelge 6.1 2002-2003 eğitim-öğretim yılı YTÜ öğretim üyesi etkinliğine yönelik çalışmada kullanılacak değişken tanımları

Değişken ismi	Tanımı
Öğrenci aşaması (1. aşama)	
Öğretim üyesi etkinliği	Öğrenci gözüyle öğretim üyesi etkinliği
Bilgi ve beceri	Öğretim üyesinin ders konusundaki bilgi ve becerisi
İletişim	Öğretim üyesinin öğrencilerle olan iletişimi
Anlatım	Öğretim üyesinin dersi açık ve anlaşılır biçimde anlatması
Not.adil	Öğretim üyesinin notla değerlendirmede adil davranması
Bölüm aşaması (2. aşama)	
B.Yerleşim birimi	Bölümün bulunduğu yerleşim birimi
Bölüm alan	Bölüm alan değişkeni

6.1 Koşulsuz Modeller

6.1.1 Tesadüfi Etkili Tek Yönlü ANOVA (One Way ANOVA With Random Effects Models)

Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA hiyerarşik model eşitlikleri, 1.,2. yada 3. aşamaya ait hiçbir tahminci içermedikleri için “tamamen koşulsuz model” (fully unconditional) ya da “boş model-empty model” olarak da adlandırılırlar. Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli, hiyerarşik lineer modellerin mümkün en basit halidir ve varyans modelinin tesadüfi etkili analizidir. Bu model sadece tesadüfi gruplar ve bu gruplar içerisindeki varyasyonları içerir. Yani, bu tip modeller ile çıktıdaki değişkenlik farklı aşamaya karşı ayrılmaktadır.

1.aşama modeli (öğrenci seviyesi modeli): Her öğrencinin gözünde öğretim üyelerinin etkinliğini; bölüm ortalamaları (bölümlerdeki ortalama öğretim üyelerinin etkinliği) artı tesadüfi hatanın fonksiyonu olarak modelleyebiliriz.

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij} \quad (6.1)$$

Y_{ij} : j. bölümdeki öğrencinin gözünde öğretim üyesinin etkinliğidir.

β_{0j} : j. bölüme ait ortalama öğrencinin gözündeki öğretim üyesinin etkinliğidir.

r_{ij} : tesadüfi öğrenci etkisidir. Yani j. bölümdeki i. öğrencinin gözündeki öğretim üyesinin etkinliğinin bölüm ortalamasından sapmasıdır. Bu tesadüfi etkilerin 0 ortalama ve σ^2 1. aşama sabit varyansı ile normal ve birbirinden bağımsız dağıldığı varsayılır. [$r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$]

i ve j indisleri ise, sırasıyla öğrencileri ve bölümleri göstermektedir. Yani;

$i = 1, 2, \dots, n_j$ olmak üzere i indisi j. bölümdeki i. öğrenciyi;

$j = 1, 2, \dots, J$ olmak üzere j indisi k. fakülte'deki bölümleri göstermektedir.

2. aşama modeli (bölüm aşaması modeli): Bu aşamada, bölümler için ortalama öğrenci gözüyle öğretim üyesinin etkinliği, β_{0j} , (yani bölümlerdeki ortalama öğretim üyesi etkinliği) bölüm ortalamalarının ortalaması etrafında tesadüfi olarak değişen bir şekilde modellenir. Yani 2. aşama modeli aşağıdaki gibidir:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \quad (6.2)$$

Bu modelde

γ_{00} : ana kütle içindeki büyük ortalama (yani J tane bölümün ortalamasının ortalaması ya da ortalama öğrenci gözüyle öğretim üyesi etkinliğidir.)

u_{0j} : tesadüfi bölüm etkisidir. Yani, j. bölüme ait öğrenci gözüyle ortalama öğretim üyesi etkinliğinin büyük ortalamadan sapmasıdır. j. bölümün ortalama [öğrencinin gözüyle] öğretim üyesinin etkinliğinin, büyük ortalamadan sapmasıdır. Bu etkilerin, 0 ortalama ve τ_β 2. aşama sabit varyansı ile bağımsız normal dağıldığını varsayılır.

Birleştirilmiş model ise (6.3) de verilmiştir.

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + r_{ij} \quad (6.3)$$

Sonuç olarak, Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modelinde her bölüm için [öğrenci gözüyle] öğretim üyesi etkinliği, bölüm ortalamalarını gösteren β_{0j} parametreleri ile karakterize edilmiştir. Çizelge 6.2 Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modelinin uygulanması sonucu elde edilen çıktıların düzenlenmiş halidir.

Çizelge 6.2 YTÜ veri seti için 2 aşamalı tesadüfi etkili tek yönlü anova modeli sonuçları

<i>Sabit Etkiler (Fixed Effects)</i>	<i>Katsayılar (Coefficient)</i>	<i>Standart Hata</i>	<i>t oranı</i>	<i>p- değeri</i>
Ortalama öğrenci gözüyle öğretim üyesi etkinliği, γ_{00}	2.111553	0.066733	31.642	0.000
<i>Tesadüfi Etkiler (Random Effect)</i>	<i>Varyans Bileşenleri</i>	<i>Serbestlik Derecesi</i>	χ^2	<i>p- değeri</i>
	<i>(Variance Component)</i>	<i>(d.f)</i>		
Öğrenci aşaması (1.aşama) , r_{ij}	1.18556			
Bölüm aşaması (2.aşama), u_{0j}	0.09883	22	306.37552	0.000
<i>Varyans bileşenleri (her aşama için değişkenliğin toplam değişkenlik içindeki yüzdesi)</i>				
1.aşama	92.3			
2.aşama	7.6			
<i>Deviyans istatistiği</i>	<i>Serbestlik derecesi</i>			
22629.139904	2			

Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modelinde, sadece bir tane sabit etki vardır, bu da öğrenci ortalaması yani öğrenci gözüyle öğretim üyesi etkinliğinin ortalamasıdır.

$H_0 : \gamma_{00} = 0$ alternatif hipotezimiz ise $H_1 : \gamma_{00} \neq 0$ olmak üzere;

Tek yönlü ANOVA modeline göre tüm bölümler için ortalama öğretim üyesi etkinliği, $t=31.642$ oranı ile $\hat{\gamma}_{00} = 2.111553$ olarak tahmin edilmiştir. Bu sonuçlara göre, sıfır hipotezi red edilir ($p < 0.05$), sabit parametrenin anlamlı olduğuna karar verilir. Öğrenci gözüyle ortalama öğretim üyesi etkinliği için %95 güven aralığı ise aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} & 2.11553 \pm 1.96(0.066733) \\ & (1.984 \leq \hat{\gamma}_{000} \leq 2,246) \end{aligned} \quad (6.4)$$

2 aşamalı tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli, Y_{ij} bağımlı değişkenine ait toplam değişkenliği, bölümlerdeki öğrenciler arasındaki değişkenlik (1. aşama), $\sigma^2 = \text{var}(r_{ij})$, fakültelerdeki bölümler arasındaki değişkenlik (2. aşama), $\tau_\pi = \text{var}(u_{0j})$ olmak üzere 2 bileşene ayırır. Yani, toplam değişkenliği bölümler içi ve bölümler arası olmak üzere kaynaklarına ayırır. Bunlar ise aşağıdaki gibi gösterilebilir:

- Öğrenci gözüyle öğretim üyesinin etkinliğindeki değişkenliğin %92.3'ü öğrenciler arasındaki değişkenlikten kaynaklanır.

$$\sigma^2 / (\sigma^2 + \tau_\beta) = 1.18556 / (1.18556 + 0.09883) = 0.923 \quad (6.5)$$

- ve öğrenci gözüyle öğretim üyesinin etkinliğindeki değişkenliğin % 7.69'u bölümler arasındaki değişkenlikten kaynaklanır.

$$\tau_\beta / (\sigma^2 + \tau_\beta) = 0.09883 / 1.28439 = 0.0769 \quad (6.6)$$

En büyük oran öğrenciler arasındaki varyansa aittir daha sonra sırasıyla bölümler arasındaki varyanslar gelir. Bölümler aşamasındaki varyans $\tau_\beta = \text{var}(\beta_{0j}) = \text{var}(u_{0j}) = 0.09883$ 'dür

$H_0: \tau_\beta = 0$ hipotezi $\chi^2 = 306.37552$ ve 22 serbestlik derecesi ile red edilir. ($p < 0.05$) Yani bölümler arasında [öğrenci gözüyle] öğretim üyesi etkinliği anlamlı farklılıklar gösterir diyebiliriz.

Bölümler içi korelasyon katsayısı: $\rho = \frac{\tau_{00}}{\sigma_0^2 + \tau_{00}}$

$$\hat{\rho} = \frac{0.0983}{1.18556 + 0.0983} = 0.076$$

Öğretim üyesi etkinliğindeki değişkenliğin %7.6'sı öğrenciler arasındaki değişkenlikten kaynaklanmaktadır.

Tasarım etkisi (deff) $deff = 1 + \rho(\tilde{n} - 1) = 25.7$

$deff > 1$ olması kümelenmiş veri seti için çok aşamalı modellerin uygun olduğunun bir göstergesidir.

2 aşamalı modelde, en küçük kareler parametrelerinin güvenilirliği bölümler arasındaki ayırımı için kullanılan bölüm örnek ortalamasının (β_{0j}) güvenilirliğini verir. (Bölümlerden çekilen örnek ortalamalarının gerçek bölüm ortalamalarının yerine kullanılıp kullanılmayacağını gösterir.)

Gerçek bölüm ortalaması için, herhangi bir bölümdeki, örnek ortalamasının güvenilirliği tahmin edilen varyans bileşenleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir: (2. aşamada j. bölüm için güvenilirlik)

$$\hat{\lambda}_j = \text{kesinlik}(\bar{Y}_{.j}) = \hat{\tau}_{00} / (\hat{\tau}_{00} + (\hat{\sigma}^2 / n_j)) \quad (6.7)$$

Formülden görüldüğü gibi örnek ortalamasının güvenilirliği bölümden bölüme değişir (çünkü örnek büyüklüğü bölümler arasında çeşitlilik gösterir. n_j) kapsamlı güvenilirlik ölçüsü ise, ayrı ayrı bölümler için yapılan tahminlerin ortalamasıdır.

$$\hat{\lambda} = \sum \hat{\lambda}_j / J \quad (6.8)$$

$\hat{\lambda} = 0,923$ dir. Bu da, gerçek bölüm ortalamalarının göstergesi olarak, örnek ortalamalarının oldukça güvenilir olduğunu gösterir.

6.2 Koşullu Modeller

6.2.1 Tesadüfi Katsayılı Modeller

Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli ile öğrenciler ve bölümler ile ilişkili değişkenlikler tahmin edildikten sonra analize, her aşama için tahmin edilen değişkenliği o aşamada ölçülen değişkenler ile açıklayabilmek amacıyla tesadüfi katsayılı modeller ile devam edilir. Tesadüfi katsayılı modelde 1.aşama modelinde, farklı bölümlerdeki öğrencilerin gözüyle öğretim üyesi etkinliği, öğrenci seviyesindeki açıklayıcı değişkenler ve öğrenci seviyesi tesadüfi hatasının fonksiyonu olarak ifade edilir.

Öğrenci öğretim üyesinin etkinliğini değerlendirirken dersi anlatım biçimini, notla değerlendirme biçimini, öğretim üyesinin bilgi ve becerisini ve öğrenciyle olan iletişimini göz önünde bulundurmaktadır.

Tesadüfi katsayılı regresyon modeli (model 2) için 1.aşama modeli aşağıdaki gibidir.

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(\overline{bil.bec} - \overline{bil.bec}_{.j}) + \beta_{2j}(\overline{iletişim} - \overline{iletişim}_{.j}) + \beta_{3j}(\overline{anlatım} - \overline{anlatım}_{.j}) + \beta_{4j}(\overline{not.adil} - \overline{not.adil}_{.j}) + r_{ij}$$

(6.9)

Y_{ij} : j. bölümdeki i. öğrenci gözüyle öğretim üyesi etkinliğini gösterir.

β_{0j} : j. bölüm için sabit parametre, j. Bölüm için ortalama öğretim üyesi etkinliği

β_{1j} : j. bölüm için öğrenci gözüyle öğretim üyesinin etkinliği üzerinde öğretim üyesinin bilgi ve becerisinin ayırt edici etkisidir. (öğretim üyelerinin etkinlikleri arasındaki bilgi ve beceri farklılıklarının derecesidir.)

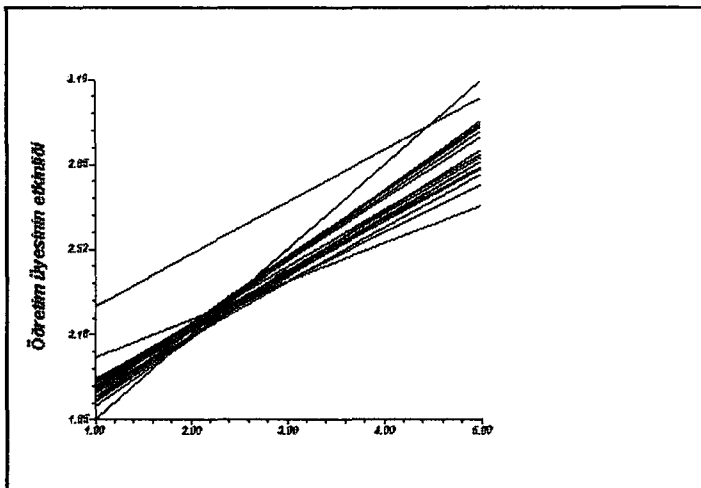
β_{2j} : j. bölüm için öğretim üyesinin öğrenci ile iletişiminin ayırt edici etkisidir. (öğretim üyesinin öğrenci ile iletişiminin öğretim üyesinin etkinliği üzerinde meydana getirdiği farklılığın derecesidir.)

β_{3j} : j. bölümdeki öğrenci gözüyle öğretim üyesinin etkinliği üzerinde öğretim üyesinin dersi anlatım biçiminin ayırt edici etkisidir.

β_{4j} : j. bölümdeki öğrenci gözüyle öğretim üyesinin etkinliği üzerinde öğretim üyesinin adil değerlendirme yapmasının ayırt edici etkisidir.

r_{ij} : 1. aşama tesadüfi etkisidir yani öğrenci seviyesindeki ij. öğretim üyesinin gerçek etkinliği ile tahmin edilen etkinliği arasındaki sapmayı gösterir. Bu kalıntılar öğrenci seviyesi etkileridir ve 0 ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağıldıkları kabul edilir.

YTÜ öğretim üyesinin etkinliği değerlendirme anketinden elde edilen veriler ile öğrenci gözüyle öğretim üyesinin etkinliği için kurulan modele bakıldığında, , her bölüm için β_{0j} ve β_{1j} (β_{ij})'nin farklı olduğu görülür. Örnek olarak İstatistik bölümündeki ortalama öğretim üyesi etkinliği (β_{0j}) ve öğretim üyesinin bilgi ve beceri etkisinin derecesi (β_{1j}) diğer bölümlerden farklıdır. Bu durum şekil 6.3' de açıkça görülmektedir.



Şekil.6.3 J=23 tane bölüme ait öğretim üyesinin etkinliği için regresyon doğruları

Bunun nedeni ise, aynı bölümden tesadüfi olarak çekilen öğrencilerden elde edilen gözlemlerin, tüm üniversitedeki öğrenciler arasından tesadüfi olarak çekilen öğrencilerden elde edilen gözlemlerden birbirine daha yakın olmasıdır. Aynı bölüm içinde bulunan öğrencilerin benzer koşullar altında bulunmaları bu öğrencilerden elde edilen gözlemlerin birbirine daha yakın olmasına neden olabilir. Bu durum da her bölüm için ortalama öğretim üyesi etkinliği ve modele dahil edilen açıklayıcı değişkenlerin etkileri farklı olmaktadır.

Her bölüm için öğretim üyesi etkinliğinde görülen farklılıkları açıklayabilmek amacıyla, sabit ve eğim parametreleri için 2. aşama modellerinin oluştururuz. 1. aşama parametrelerinin 2. aşamada tesadüfi olarak değiştiği varsayımı altında, 2. aşama modeli ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\beta_{0j} &= \gamma_{00} + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} + u_{1j} \\ \beta_{2j} &= \gamma_{20} + u_{2j} \\ \beta_{3j} &= \gamma_{30} + u_{3j} \\ \beta_{4j} &= \gamma_{40} + u_{4j}\end{aligned}\tag{6.10}$$

şeklindedir . Ve modelde yer alan;

γ_{00} : ortalama öğrenci gözüyle öğretim üyesi etkinliğidir.

γ_{10} : öğretim üyesinin bilgi becerisinin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki ortalama etkisi

γ_{20} : öğretim üyesinin öğrenci ile iletişiminin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki ortalama etkisi

γ_{30} : öğretim üyesinin anlatım biçiminin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki ortalama etkisi

γ_{40} : adil değerlendirmenin öğretim üyesi etkinliği üzerindeki ortalama etkisidir. (öğretim üyesinin değerlendirmedeki adaletinin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki ortalama etkisidir.)

u_{0j} : tesadüfi bölüm etkisidir. Yani, j. bölüme ait öğrenci gözüyle ortalama öğretim üyesi etkinliğinin büyük ortalamadan sapmasıdır. j. bölümün ortalama [öğrencinin gözüyle]

öğretim üyesinin etkinliğinin, büyük ortalamadan sapmasıdır. Bu etkilerin, 0 ortalama ve τ_β

2. aşama sabit varyansı ile bağımsız normal dağıldığını varsayılır. Birleştirilmiş model ise aşağıdaki gibidir:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}(\overline{bil.bec} - \overline{bil.bec}_{.j}) + \gamma_{20}(\overline{iletişim} - \overline{iletişim}_{.j}) + \gamma_{30}(\overline{anlatım} - \overline{anlatım}_{.j}) + \gamma_{40}(\overline{not.adil} - \overline{not.adil}_{.j}) + u_{0j} + u_{1j}(\overline{bil.bec} - \overline{bil.bec}_{.j}) + u_{2j}(\overline{iletişim} - \overline{iletişim}_{.j}) + u_{3j}(\overline{anlatım} - \overline{anlatım}_{.j}) + u_{4j}(\overline{not.adil} - \overline{not.adil}_{.j}) + r_{ij} \quad (6.11)$$

2.aşamada 5 tane tesadüfi etki vardır ve T_β da 5*5 lik bir matrisidir.

$$T_\beta = \begin{bmatrix} 0.11685 & -0.01321 & -0.00501 & 0.02413 & 0.00246 \\ -0.01321 & 0.00330 & -0.00053 & -0.00085 & -0.00113 \\ -0.00501 & -0.00053 & 0.00504 & -0.00922 & 0.00056 \\ 0.02413 & -0.00085 & -0.00922 & 0.02014 & -0.00092 \\ 0.00246 & -0.00113 & 0.00056 & -0.00092 & 0.00054 \end{bmatrix}$$

T_β matrisinin de diyagonal elemanlarına bakıldığında bunların 0'dan anlamlı bir şekilde farklı olduğu görülür. [$\hat{\beta}_{0j} = \widehat{Var}(u_{0j})$ 0'dan farklıdır] Yani, öğretim üyelerinin etkinliği bölümden bölüme anlamlı farklılık göstermektedir. Çizelge 6.3 de tesadüfi katsayılı regresyon modelinden elde edilen sonuçlar vardır.

Çizelge 6.3 Öğretim üyelerinin etkinliği için tesadüfi katsayılı regresyon modeli sonuçları

Sabit Etkiler (Fixed Effects)	Katsayılar (Coefficient)	Standart Hata	t oranı	p- değeri
Ortalama öğretim üyesinin etkinliği, γ_{00}	2.101364	0.070675	29.733	0.000
Öğr. Üye. bilgi ve becerisinin ort. etkisi, γ_{10}	0.252247	0.016220	15.552	0.000
Öğr. Üye. öğrenci ile iletişiminin ort. etkisi, γ_{20}	0.166624	0.018318	9.096	0.000
Öğr. Üye. anlatım biçiminin ort. etkisi, γ_{30}	0.293723	0.032125	9.143	0.000
Değerlendirmede adil davranmanın ort. etkisi, γ_{40}	0.197535	0.009265	21.320	0.000

<i>Tesadüfi Etkiler (Random Effect)</i>	<i>Varyans Bileşenleri</i>	<i>Serbestlik Derecesi</i>	χ^2	<i>p- değeri</i>
	<i>(Variance component)</i>	<i>(d.f)</i>		
Öğrenci aşaması (1.aşama) , r_{ij}	0.44702			
Bölüm aşaması (2.aşama), u_{0j}	0.11685	22	837.42948	0.000
Ortalama bilgi ve beceri etkisi u_{1j}	0.00330	22	47.40618	0.002
Ortalama iletişim etkisi, u_{2j}	0.00504	22	44.43628	0.003
Ortalama anlatım etkisi, u_{3j}	0.02014	22	96.81362	0.000
Ortalama adil değ. etkisi, u_{4j}	0.00054	22	37.05202	0.023
E.K.K regresyon katsayılarının tahminleri için güvenilirlikler				
Ortalama öğretim üyesi etkinliği	0.973			
Bilgi ve beceri	0.460			
İletişim	0.554			
Anlatım	0.775			
Not.adil	0.210			
Deviyans istatistiği	Serbestlik derecesi			
15424.546553	16			

Çizelge 6.4'ün ilk bölümüne bakıldığında, öğretim üyesinin etkinliği üzerinde, en fazla, öğretim üyesinin anlatım biçimi değişkeninin etkili olduğu görülmektedir, bunu sırasıyla öğretim üyesinin bilgi ve becerisi, öğretim üyesinin notla değerlendirmede adil davranması ve öğretim üyesinin öğrenci ile iletişimi takip etmektedir.

- Öğretim üyesinin bilgi ve becerisinin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki ortalama etkisi için sıfır hipotezimiz $H_0 : \gamma_{10} = 0$ alternatif hipotezimiz ise $H_1 : \gamma_{10} \neq 0$ şeklinde kurulur.

Tesadüfi katsayılı regresyon modeline göre; $\hat{\gamma}_{10}$ 0.252247 olarak tahmin edilmiştir ve $p < 0.005$ olmak üzere sıfır hipotezi red edilir. Yani, öğretim üyesinin bilgi ve becerisi öğretim üyesinin etkinliği üzerinde pozitif anlamlı bir etkiye sahiptir diyebiliriz.

Bu modele göre, $H_0 = \hat{\pi}_{11} = \widehat{\text{var}}(u_{1j}) = 0$ hipotezi red edilmiştir ($p < 0.05$) ve buda öğretim üyesinin bilgi ve becerisinin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki etkisinin bölümden bölüme anlamlı farklılıklar gösterdiği şeklinde yorumlanabilir.

- Öğretim üyesinin öğrenci ile iletişimini öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki ortalama etkisi $\hat{\gamma}_{20} = 0.166624$ olarak tahmin edilmiştir. Modelden elde edilen sonuçlara göre, $H_0 : \gamma_{20} = 0$ şeklindeki hipotez red edilir. Buna göre de, öğretim üyesinin öğrenci ile olan iletişiminin öğretim üyesinin etkinliği üzerinde pozitif anlamlı etkiye sahip olduğu söylenilebilir.

Tesadüfi katsayılı regresyon modeline göre, $H_0 = \hat{\pi}_{22} = \widehat{\text{var}}(u_{2j}) = 0$ şeklindeki hipotez red edilerek, öğretim üyesinin öğrenci ile iletişiminin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki etkisinin bölümden bölüme farklılık gösterdiğine karar verilebilir.

- Öğretim üyesinin anlatım biçiminin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki ortalama etkisi için $H_0 : \gamma_{30} = 0$ şeklindeki hipotez red edilmiştir. Tesadüfi katsayılı regresyon modeline göre, $\hat{\gamma}_{30} = 0.293723$ olarak tahmin edilmiş ve öğretim üyesinin anlatım biçimi öğretim üyesinin etkinliği üzerinde etkili olduğuna kara verilmiştir.

Bu etkilerin bölümden bölüme farklılık gösterip göstermediğine ise, $H_0 = \hat{\pi}_{33} = \widehat{\text{var}}(u_{3j}) = 0$ hipotezinin test edilmesiyle karar verilebilir. Bu test sonucunda ($p < 0.005$) sıfır hipotezi red edilmiştir. Yani, öğretim üyesinin anlatım biçiminin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki etkisi bölümden bölüme farklılık göstermektedir diyebiliriz.

- Öğretim üyesinin not değerlendirmede adil davranmasının öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki ortalama etkisi $\hat{\gamma}_{40} = 0.197535$ olarak tahmin edilmiştir ve oldukça anlamlı pozitif etkiye sahiptir yani öğretim üyesinin not değerlendirmede adil davranması öğretim üyesinin etkinliği üzerinde pozitif bir etkiye sahiptir.

$\hat{\pi}_{44} = \widehat{\text{var}}(u_{4j})$ da 0'dan anlamlı bir şekilde farklıdır, öğretim üyesinin not değerlendirmede adil davranması öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki etkisi bölümden bölüme farklılık göstermektedir.

1. aşama açıklayıcı değişkenlerinin eklenmesi ile oluşan tesadüfi katsayılı regresyon modelinde, 1. aşamada açıklanabilen varyans oranı;

$$\frac{1.18556 - 0.44702}{1.18556} = 0.6229 \text{ 'dir.}$$

Buna göre de 1.aşama açıklayıcı değişkenlerinin, 1. aşama varyansının %62.3'ünü açıkladığını söyleyebiliriz.

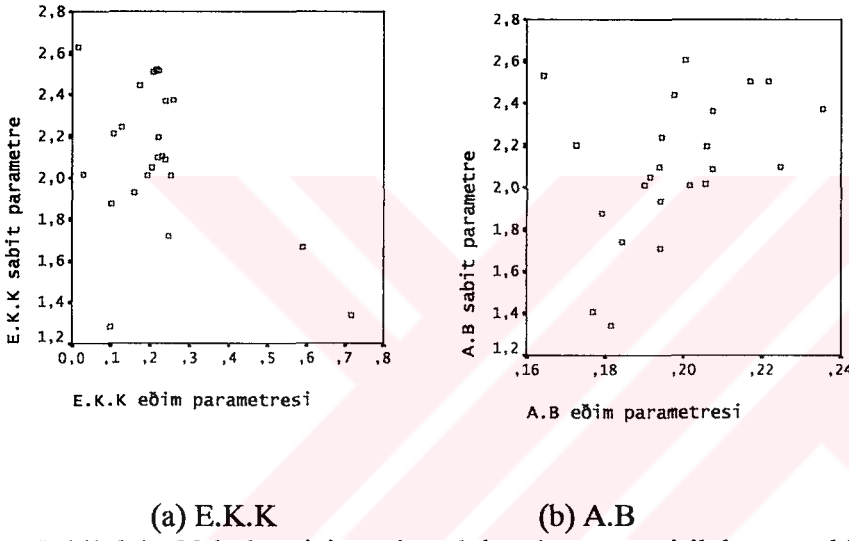
Normallik varsayımı altında, bölüm ortalamaları için 95% güven aralığı:

$$\hat{\gamma}_{q0} \pm 1,96(\hat{\tau}_{qq})^{1/2}; q = 0,1,2,3,4 \text{ şeklindedir.}$$

YTÜ veri setinde bölümler arası ortalama öğretim üyesi etkinliği (β_{0j}) için aralık (1.580364, 2.622364) şeklindedir ve $\hat{\gamma}_{00}$ 'nin 1.580364 ile 2.622364 değerlerinin alma ihtimali bu değerlerin arasında bulunma olasılığı) 0,95 dir. Benzer olarak ortalama bilgi ve beceri etkisi (0.002827 , 0.501867), ortalama iletişim etkisi (-0.09896 , 0.431824), ortalama anlatım etkisi (-0.05377, 0.64472) ve ortalama adil değerlendirme etkisi (0.008935 , 0,386135) aralığında değişmektedir.

Çizelge 6.3'de 2 aşama tesadüfi etkileri için güvenilirlikler vardır. Tesadüfi katsayılı regresyon modelinde, bu güvenilirlikler gerçek parametrelerin(β_{qj}), E.K.K tahminlerinin ($\hat{\beta}_{qj}$) güvenilirliklerin eşittir. Güvenirlik tahminleri 1. aşama parametrelerinin spesifikasyonu (tesadüfi, sabit yada tesadüfi olarak değişmeyen) hakkında bilgi verir. 1. aşama katsayılarının güvenilirliği 0.05'in altında ise bu katsayılar tesadüfi olarak değişmiyor ya da sabit olabilirler. (Raudenbush & Bryk, 2002) Uygulamamızda, sabite ait güvenilirlik oldukça yüksektir (0.973) Bu da bölümlerdeki ortalama öğretim üyesi etkinliği için, $\hat{\beta}_{0j}$ 'nin oldukça güvenilir bir tahminci olduğunu gösterir. Diğer değişkenlere ait tahminlere baktığımızda, bunların da güvenilirliğinin oldukça yüksek olduğunu görülmektedir. $\hat{\beta}_{qj}$ lere ait güvenilirliklerin tümünün 0.05'den büyük olması, bu katsayıların bölümlere karşı tesadüfi olarak değiştiğini de göstermektedir. $\text{güvenirlik}(\beta_{4j}) = 0.21$ 'dir ve en düşük güvenilirliktir, bu durum bazı bölümlerde öğretim üyesinin etkinliği üzerinde adil değerlendirme etkisinin daha homojen bir yapıya sahip olduğu şeklinde yorumlanabilir. (Raudenbush & Bryk, 2002)

Parametrelerin E.K.K. tahminlerinin çok kesin olmaması nedeniyle, parametrelerin ampirik bayes tahminlerinden yararlanılır.* Bölümlerdeki ortalama öğretim üyesi etkinliği için ampirik bayes tahminleri, ortalama öğretim üyesi etkinliğine $\hat{\gamma}_{00} = 2.101364$ 'ne, bölümler için adil değerlendirme etkisi ise ortalama bilgi ve beceri etkisine $\hat{\gamma}_{10} = 0.252247$ 'ne doğru çekilmiştir. (shrinkage) Bölümlerdeki ortalama öğretim üyesi etkinliği için güvenilirlik çok yüksekken (0.923), adil değerlendirme etkisi için güvenilirlik düşüktür. Buna bağlı olarak da sabit parametrede daha az çekilme beklenirken, eğim parametresinde ise E.K.K tahminleri ile A.B tahminleri arasındaki fark büyük olduğundan daha fazla çekilme beklenmektedir. Bu durum şekil 3 de görülmektedir.



Şekil 6.4 23 bölüm için en küçük kareler ve ampirik bayes sabit ve eğim parametreleri

Bu durumda bölümleri ortalama öğretim üyesi etkinliğine göre sıralarken bölümlerin ortalama öğretim üyesi etkinliği (β_{0j}) için E.K.K tahminleri ($\hat{\beta}_{0j}$) yerine ampirik bayes tahminlerinden ($\hat{\beta}_{0j}^*$) yararlanırız. Çizlege 6.5 da bölümlerin ortalama öğretim üyesi etkinliğine göre sıralanmış hali bulunmaktadır. Bu sıralamaya göre ortalama öğretim üyesi etkinliği en yüksek bölüm Fizik bölümü, en düşük bölüm ise Eğitim bilimleridir.

* Bölümlerdeki öğrenci sayısı az olduğunda (n_j küçük olduğunda), β_{0j} için E.K.K tahminleri kesin olmayabilir. Bu yüzden bölümlerdeki ortalama öğretim üyesi etkinliği için ampirik bayes tahminlerinden ($\hat{\beta}_{0j}^*$) yararlanırız. Örnek genişliği küçük olduğunda yada açıklayıcı değişkenler sınırlandırılmış aralığa sahip olduklarında, eğim parametreleri için de E.K.K tahminleri doğru olmayabilir bu yüzden ampirik bayes tahminlerinden yararlanılabilir.

Çizelge 6.3'ün son panelinde ise deviyans istatistiği bulunmaktadır. Deviyans istatistiği tek başına yorumlanamaz, ancak aynı veri seti için oluşturulan başka bir model ile yapılan karşılaştırmalarda yorumlanabilir. İki model arasındaki deviyans farkı, iki modelde tahmin edilen parametre farkına eşit serbestlik derecesi ile büyük örnek χ^2 dağılımına uymaktadır. χ^2 istatistiğinin büyük değerleri, indirgenmiş modelin uygun olduğunu söyleyen H_0 hipotezinin yanlış olduğunun kanıtıdır. (Snijders & Bosker, 1999)

H_0 =Tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli

H_1 =Tesadüfi katsayılı regresyon modeli olmak üzere, χ^2 istatistiği 14 serbestlik derecesi ile 7204.59335 olarak elde edilir ($p=0.000$), yani indirgenmiş ANOVA modelini gösteren H_0 hipotezi red edilir ve tesadüfi katsayılı regresyon modelinin veri setine uygun olduğuna karar verilir.

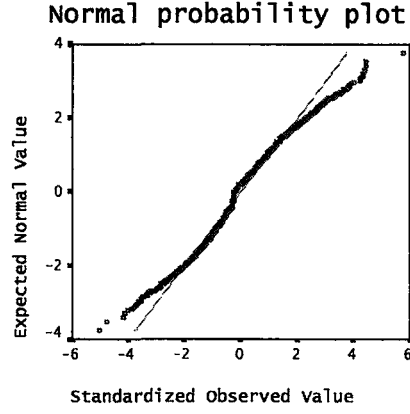
Tesadüfi katsayılı regresyon modeline göre ortalama öğretim üyesinin etkinliği bölümden bölüme anlamlı bir şekilde değişmektedir. Aynı zamanda öğrencilerin öğretim üyesinin etkinliği değerlendirirken göz önünde bulundurdıkları kriterlerin yani öğretim üyesinin bilgi ve becerisinin, öğrenci ile olan iletişiminin, dersi anlatım biçiminin ve değerlendirmede adil davranmasının etkileri de bölümden bölüme değişiklikler göstermektedir diyebiliriz. ($H_0 = \text{var}(u_{qj}) = \text{var}(\beta_{qj}) = 0; q = 0, 1, 2, 3, 4$ hipotezi red edilmiştir.)

Tesadüfi katsayılı regresyon modeli için HLM programı 1. aşama varyansları için homojenlik testi sonuçlarını vermiştir ve hipotezler aşağıdaki gibi kurulmuştur.

$$H_0 : \sigma_j^2 = \sigma^2$$

$$H_1 : \sigma_j^2 \neq \sigma^2$$

H_0 , 22 serbestlik derecesi ile 29.50587 olarak tahmin edilmiştir. ($p=0.512$) yani 1. aşama kalıntıları için homojenlik varsayımı tesadüfi katsayılı regresyon modelinde sağlanmıştır. Uygulamada likert ölçeğinden yararlanılmasına rağmen yapılan benzer çalışmalarda da olduğu gibi kalıntılarda hem 1. aşama hem de 2. aşama için normal dağılım varsayımı aranmaktadır. Şekil 6.5 de 1. aşama kalıntıları için normal olasılık grafiği vardır.



Şekil 6.5 Birinci aşama kalıntıları için normal olasılık grafiği

Hem bu grafiklere hem de Kolmogorov-Smirnov Testi sonucuna göre 1. aşama kalıntılarının normal dağıldığını söyleyebiliriz. Fakat, 2. aşama ampirik bayes kalıntıları normal dağılmamaktadır. Bu yüzden, sabit etkiler için HLM program çıktılarında yer alan ve normal olmayan dağılıma karşı daha az duyarlı olan robust tahminlerinden yararlanınız. (Raudenbush & Bryk, 2002) Çizelge 6.4 bu tahminlere göre düzenlenmiştir. Sabit etkilerin hiyerarşik lineer modellerdeki tahminleri ile robust tahminleri birbirine çok yakın sonuçlar vermiştir bu durumda modelin varsayımlardan sapmalara karşı daha az duyarlı olduğunun göstergesi olabilir. (Raudenbush & Bryk, 2002)

6.2.2 Sabit ve Eğim Parametrelerinin Çıktı Olduğu Modeller

Tesadüfi katsayılı regresyon modeli sonucunda, bölümler arasında öğretim üyesi etkinliği açısından değişkenlikler olduğuna karar verildikten sonra bölümler öğretim üyesi etkinliği açısından nasıl farklılık gösterdiğini bu aşamalardaki açıklayıcı değişkenlerden yararlanarak açıklayabilmek amacıyla ortalama ve eğim parametrelerinin çıktı olduğu model kurulur.

- Bölümler arasında öğretim üyesi etkinliği açısından farklılıkları açıklayabilmek amacıyla ikinci aşamaya yerleşim yeri ve bölüm alan değişkeni ekleyerek eğim ve sabit parametrelerin çıktı olduğu regresyon modelini kurabiliriz. Böylece, bölümlerin yerleşim yerlerinin(Yıldız, Davutpaşa ve Maslak kampüsleri) ve bölümlerin Sözel, Sayısal Yada Türkçe-Matematik tabanlı olmalarının öğretim üyesinin etkinliği üzerinde etkili olup olmadığını araştırabiliriz. Yerleşim yeri değişkeni (2.aşama değişkeni) Davutpaşa yerleşim yerindeki bölümler için 0, Yıldız yerleşim yerindeki bölümler için 1 değerini almaktadır.

Bölüm alan değişkeni ise, sözel bölümlerde 0, sayısal bölümlerde 1, değerini almaktadır.

Buna göre sabit ve eğim parametresi çıktı olan model için 2.aşama modeli aşağıdaki gibidir:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}(b.alan) + \gamma_{02}(yerleşim) + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}(b.alan) + \gamma_{12}(yerleşim) + u_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + \gamma_{21}(b.alan) + \gamma_{22}(yerleşim) + u_{2j}$$

$$\beta_{3j} = \gamma_{30} + \gamma_{31}(b.alan) + \gamma_{32}(yerleşim) + u_{0j}$$

$$\beta_{4j} = \gamma_{40} + \gamma_{41}(b.alan) + \gamma_{42}(yerleşim) + u_{4j}$$

birleştirilmiş model ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} Y_{ij} = & \gamma_{00} + \gamma_{01}(b.alan)_j + \gamma_{02}(y.birim)_j + \gamma_{10}(bil.bec - \overline{bil.bec}_j) + \gamma_{11}(b.alan)_j(bil.bec - \overline{bil.bec}_j) + \gamma_{12}(y.birim)_j(bil.bec - \overline{bil.bec}_j) \\ & + \gamma_{20}(\text{iletişim} - \overline{\text{iletişim}}_j) + \gamma_{21}(b.alan)_j(\text{iletişim} - \overline{\text{iletişim}}_j) + \gamma_{22}(y.birim)_j(\text{iletişim} - \overline{\text{iletişim}}_j) + \gamma_{30}(ortatim - \overline{ortatim}_j) \\ & + \gamma_{31}(b.alan)_j(ortatim - \overline{ortatim}_j) + \gamma_{32}(y.birim)_j(ortatim - \overline{ortatim}_j) + \gamma_{40}(not.adil - \overline{not.adil}_j) + \gamma_{41}(b.alan)_j(not.adil - \overline{not.adil}_j) \\ & + \gamma_{42}(y.birim)_j(not.adil - \overline{not.adil}_j) + u_{0j} + u_{1j}(bil.bec - \overline{bil.bec}_j) + u_{2j}(\text{iletişim} - \overline{\text{iletişim}}_j) + u_{3j}(ortatim - \overline{ortatim}_j) + u_{4j}(not.adil - \overline{not.adil}_j) + r_{ij} \end{aligned}$$

bu modelden elde edilen sonuçlar çizelge 6.4 de verilmiştir.

Çizelge 6.4 Ortalama ve eğim parametrelerinin çıktı olduğu modeller: bölüm ve fakülte yerleşim biriminin öğretim üyesinin etkinliği üzerindeki etkisi için

Sabit Etkiler (Fixed Effects)	Katsayılar (Coefficient)	S.e	t oranı	s.d.	p- değeri
j. bölüm ortalama öğretim üyesi etkinliği β_{0j} için;					
sabit, γ_{00}	1.968609	0.166207	11.844	20	0.000
Bölüm alan etkisi, γ_{01}	0.188512	0.123262	1.529	20	0.142
yerleşim yeri etkisi, γ_{02}	-0.104941	0.113982	-0.921	20	0.369
j. bölümde öğretim üyesinin bilgi ve becerisinin ayırt edici etkisi β_{1j} için;					
sabit, γ_{10}	0.281170	0.049330	5.700	20	0.000
Bölüm alan etkisi, γ_{11}	-0.028278	0.040133	-0.705	20	0.489
yerleşim yeri etkisi, γ_{12}	0.001552	0.028420	0.055	20	0.957
j. bölümde öğretim üyesinin öğrenci ile iletişiminin ayırt edici etkisi β_{2j} için;					
sabit, γ_{20}	0.072938	0.044737	1.630	20	0.118
Bölüm alan etkisi, γ_{21}	0.056341	0.036389	1.548	20	0.137
yerleşim yeri etkisi, γ_{22}	0.048150	0.025390	1.896	20	0.072

j. bölümde öğretim üyesinin dersi anlatım biçiminin ayırt edici etkisi β_{3j} için;					
sabit, γ_{30}	0.403731	0.073312	5.507	20	0.000
Bölüm alan etkisi, γ_{31}	-0.033394	0.058273	-0.573	20	0.573
yerleşim yeri etkisi, γ_{32}	-0.101599	0.046516	-2.184	20	0.041
j. bölüm için öğretim üyesinin adil değerlendirme yapmasının ayırt edici etkisi β_{4j} için;					
sabit, γ_{40}	0.212269	0.034573	6.140	20	0.000
Bölüm alan etkisi, γ_{41}	-0.028313	0.027711	-1.022	20	0.320
Yerleşim yeri etkisi, γ_{42}	0.016378	0.019615	0.835	20	0.414
Tesadüfi Etkiler (Random Effect)	Varyans Bileşenleri (Variance component)	Serbestlik Derecesi (d.f)	χ^2	p- değeri	
Öğrenci aşaması (1.aşama) , r_{ij}	0.44694				
Bölüm aşaması (2.aşama),					
Ortalama öğretim üyesi etkinliği , u_{0j}	0.11166	20	765.54617		0.000
Ortalama bilgi ve beceri etkisi u_{1j}	0.00366	20	45.16570		0.001
Ortalama iletişim etkisi, u_{2j}	0.00280	20	31.75373		0.046
Ortalama anlatım etkisi, u_{3j}	0.01465	20	64.10518		0.000
Ortalama adil değ. etkisi , u_{4j}	0.00118	20	35.47099		0.018
Deviyans istatistiği	Serbestlik derecesi				
15459.050393	16				

Eğim ve sabit parametresi çıktı olan modelden elde edilen katsayı tahminleri ve bunlara ait t oranları çizelge 6.4 de görülmektedir.

- Bölümlerde ortalama öğretim üyesinin etkinliği üzerinde bölüm alan değişkeninin etkisi için sıfır hipotezimiz $H_0 : \gamma_{01} = 0$ alternatif hipotezimiz ise $H_1 : \gamma_{01} \neq 0$ şeklindedir. Eğim ve sabit parametresi çıktı olan model sonucunda $\hat{\gamma}_{01} = 0.188512$ olarak tahmin edilir ve $p > 0.05$ olmak üzere bu tahmin anlamsızdır. Bu sonuç, ortalama öğretim üyesi etkinliğinin YTÜ de sözel, sayısal ve Türkçe-Matematik tabanlı bölümlerde farklılık göstermediği şeklinde yorumlanabilir
- Bu da YTÜ de bölümlerin yerleşim yerlerinin ortalama öğretim üyesi etkinliği üzerindeki etkisi $\hat{\gamma}_{02} = -0.104941$ olarak tahmin edilmiştir. $p > 0.05$ olmak üzere

$H_0 : \gamma_{02} = 0$ hipotezi kabul edilir. Bu sonuç, ortalama öğretim üyesi etkinliği bölümlerin Yıldız , Davutpaşa yada Maslak yerleşim biriminde bulunmalarına göre farklılık göstermediği şeklinde yorumlanabilir.

Çizelge 6.4'e göre, öğrencilerin öğretim üyesini değerlendirirken göz önünde bulundurdıkları öğretim üyesinin öğrenci ile iletişiminin, öğretim üyesinin anlatım biçiminin, öğretim üyesinin bilgi ve becerisinin ve notla değerlendirmede adil davranmasının etkisi bölümlerin yerleşim yerlerine ve alanlarına göre öğretim üyelerinin etkinliği üzerinde farklılık göstermemektedir .

Ortalama ve eğim parametrelerinin çıktı olduğu modelde, yerleşim birimi değişkenine ve bölüm alan değişkenine ait katsayıların tümü anlamsızdır. Bu durumda bu değişkenlerin modele dahil edilmesi uygun değildir. En çok olabilirlik oran testi (deviyans testi) ile

H_0 : tesadüfi katsayılı modeli

H_1 : eğim ve sabit parametresi çıktı olan model olmak üzere, iki model arasında karşılaştırma yapabiliriz. Tesadüfi katsayılı regresyon modeli için deviyans istatistiği 16 serbestlik derecesi ile 15424.546553 ortalama ve eğim parametrelerinin çıktı olduğu model için ise 16 serbestlik derecesi ile 15459.050393'dür. Sonuç olarak en çok olabilirlik oran test istatistiği 0 serbestlik derecesi ile 34.50384 ($p > 0.5$)' dir ($H = D_0 - D_1 = 34.50384 \sim \chi^2_{0.05}$) ve sınırlandırılmış model yani tesadüfi katsayılı regresyon modelinin yer aldığı H_0 hipotezini kabul ederiz.

Deviyans testi sonucuna göre; tesadüfi katsayılı model seçilir. Yani, bölümler öğretim üyesinin etkinliği bakımından tesadüfi olarak değişen etkiye sahiptir fakat öğretim üyesi etkinliği bölümlerin yerleşim birimleri ve sözel , sayısal yada Türkçe-Matematik tabanlı olmalarına göre anlamlı bir farklılık göstermemektedir.

7. SONUÇLAR

Çalışmamızda, YTÜ’de öğrenci gözüyle öğretim üyesi etkinliğinin değerlendirilmesi için çok aşamalı modellerden yararlanılmıştır. Uygulamada, hiyerarşik lineer modellerin özel hallerinden meydana gelen çeşitli alt modellerden yararlanarak, hiyerarşik yapıya sahip veri seti için en uygun model kurulmaya çalışılmıştır. İlk olarak tesadüfi etkili tek yönlü ANOVA modeli kurularak çok aşamalı modellere başlanmıştır, amaç öğretim üyesi etkinliğindeki toplam değişkenliği hiyerarşinin farklı aşamalarına göre ayırmaktır. Bu model sonucunda bölümler arasında öğretim üyesinin etkinliği açısından anlamlı farklılıklar olduğuna karar verildikten sonra tesadüfi katsayılı regresyon modeli kurulmuştur.

Bu adımda öğrencinin öğretim üyesi etkinliğini değerlendirirken göz önünde bulunduracağı, öğretim üyesinin bilgi ve becerisi, öğretim üyesinin öğrenci ile olan iletişimi, öğretim üyesinin anlatım biçimi, ve öğretim üyesinin notla değerlendirmede adil davranması değişkenleri modele dahil edilmiştir.

Tesadüfi katsayılı regresyon modeli sonucunda, öğretim üyesinin etkinliği üzerinde, en fazla, öğretim üyesinin anlatım biçimi değişkeninin etkili olduğu görülmektedir, bunu sırasıyla öğretim üyesinin bilgi ve becerisi, öğretim üyesinin notla değerlendirmede adil davranması ve öğretim üyesinin öğrenci ile iletişimi takip etmektedir. Bu modele göre, tüm bu değişkenlerin öğretim üyesi etkinliği üzerindeki etkilerinin de bölümler arasında anlamlı farklılıklar gösterdiği söylenebilir.

Tesadüfi katsayılı model sonucunda bölümler arasında ortalama öğretim üyesi etkinliği açısından anlamlı farklılıklar olduğuna karar verdikten sonra, çok aşamalı modellemeye bölümlerin yerleşim birimleri ve tabii oldukları alan değişkeninin modele eklenmesi ile eğim ve sabit parametresi çıktı olan model kurularak devam edilir. Fakat bu model sonucunda bölüm aşaması değişkenlerine ait katsayıların anlamsız olduğu görülmektedir. Ve yine bu modelin tesadüfi katsayılı regrsyon modeli ile karşılaştırılması sonucunda en uygun modelin tesadüfi katsayılı regresyon modeli olduğuna karar verilebilir. YTÜ deki öğretim üyesi etkinliğinin fakültelerin yerleşim birimleri ve bölümlerin sözel, sayısal yada Türkçe-Matematik tabanlı olmalarına göre anlamlı bir farklılık göstermediği görülmüştür.

Sonuç olarak, yüksek bilgi ve beceriye sahip, anlatım kabiliyeti ve öğrenci ile iletişimi iyi olan ve notla değerlendirmede adil davranan öğretim üyelerinin etkililiğinin yüksek olduğu söylenebilir. Ve öğretim üyelerinin etkinliği bölümden bölüme anlamlı farklılık göstermektedir. Fakat öğretim üyelerinin bilgi ve becerisi, dersi anlatım biçimi, öğrenciyle olan iletişimi ve değerlendirmede adil davranması bölümlerin yerleşim birimi ya da bölümlerin alanlarından etkilenmemektedir diyebiliriz.

Diğer modellerle yapılan ikili karşılaştırmalar sonucu en uygun modelin tesadüfi katsayılı regresyon modeli olarak belirlenmesi ile bölümlerdeki öğretim üyesi etkinliğinin anlamlı bir şekilde farklılık gösterdiğine karar verdikten sonra; bölümleri ortalama öğretim üyesi etkinliğine göre sıralayabiliriz. Çizelge 6.5 de bölümlerin ortalama öğretim üyesi etkinliğine göre sıralanmış hali bulunmaktadır. Bu sıralamaya göre ortalama öğretim üyesi etkinliği en yüksek bölüm Fizik bölümü, en düşük bölüm ise Eğitim bilimleridir. Uygulamada kurulan tüm alt modeller de özet halinde Ek I de verilmiştir.

Çizelge 6.5 Tesadüfi katsayılı regresyon modeli sonuçlarına göre, bölümlerin ortalama öğretim üyesi etkinliği en yüksek bölümden en düşük bölüme doğru sıralanması *

Sıra no	Bölümler
1	Fizik
2	Bilgisayar ve Öğretim Tek. Eğitimi
3	İktisat
4	İşletme
5	Matematik Müh.
6	Matematik
7	Teknik Programlar
8	Kimya
9	Kimya Müh.
10	İnşaat Müh.
11	Makine Müh.
12	Metalurji ve Malzeme Müh.
13	Jeodezi ve Fotogrametri Müh.
14	İstatistik
15	Mimarlık
16	İktisadi ve İdari Programlar

* Bu sıralamada, bölümlerin ortalama öğretim üyesi etkinliği (β_{0j}) için E.K.K tahminleri ($\hat{\beta}_{0j}$) yerine Ampirik Bayes tahminlerinden ($\hat{\beta}_{0j}^*$) yararlanılmıştır.

Sıra no	Bölümler
16	Siyaset Bilimi ve Ulus. İlişkiler
17	Şehir ve Bölge Planlama
18	Çevre Müh.
19	Sanat
20	Müzik ve Sahne Sanatları
21	İletişim Tasarımı
22	Eğitim Bilimleri



KAYNAKLAR

- Atkinson, A.C., (1985), "Plots, Transformations And Regression", Clarendon Press, Oxford.
- Candel, J.J.J.M., (2004), "Performance Of Empirical Bayes Estimators Of Random Coefficients In Multilevel Analysis: Some Results For The Random Intercept-Only Model", *Statistica Neerlandica*, Vol.58, No.2, 197-219.
- Dempster, A.P., Laird, N. M., & Rubin, D. B., (1977), "Maximum Likelihood From Incomplete Data Via The EM Algorithm", *Journal Of The Royal Statistical Society, Series B*, 39, 1-8.
- Goldstein, H., (1986), "Multilevel Mixed Linear Model Analysis Using Iterative Generalized Least Squares", *Biometrika*, 73, 43-56.
- Goldstein, H., (2003), "Multilevel Statistical Models", Edward Arnold, (3rd Edition), London.
- Heck, R.H. & Thomas, S. L., (2000), "An Introduction To Multilevel Modeling Techniques", Lawrence Erlbaum Associates, London.
- Hilden-Minton, J.A., (1995), "Multilevel Diagnostics For Mixed And Hierarchical Linear Models", Ph.D. Dissertation, Department Of Mathematics, University Of California, Los Angeles.
- Hox, J., (1998), "Multilevel Modeling: When And Why?", In: Balderjahn, I., Mathar, R., Schader, M. (Eds.), *Classification. Data Analysis, And Data Highways*, Springer, New York, Pp.147-154.
- Hox, J., (1995), *Applied Multilevel Analysis*, T.T-Publikaties, Amsterdam.
- Hox, J., (2002), "Multilevel Analysis, Techniques And Applications", Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, Nc.
- Killip, S., Mahfound, Z. & Pearce, K., (2004), "What Is An Intraclass Correlation Coefficient? Crucial Concepts For Primary Care Researchers", *Annals Of Family Medicine*, Vol.2, No.3.
- Kreft, I & Leeuw, J. D., (1998) "Introducing Multilevel Modeling", Sage, Publications, London.
- Longford, H. & Lewis, T., (1998), "Outliers In Multilevel Data", *Journal Royal Statistical Society*, 161, Part.2, 121-160.
- Longford, N., (1993), "Random Coefficient Models", Sage Publications, London.
- Maas, J. M. & Hox, J., (2003), "Sample Size For Multilevel Modeling", Department Of Methodology And Statistics, Utrecht University, Netherlands, Submitted For Publications.
- Maas, J. M. & Hox, J., (2004), "Influence Of Violations Assumptions On Multilevel Parameter Estimates And Their Standard Errors", *Computational Statistics & Data Analysis* 46, 427-440.
- Moerbeek, M., Breukelen, G.J.Po. & Berger, M.P.F., (2002), "A Comparison Between Traditional Methods And Multilevel Regression For The Analysis Of Multicenter Intervention Studies", *Journal Of Clinical Epidemiology*, 56, 341-350.

Morris, C.N., (1983), "Parametric Empirical Bayes Inference: Theory And Applications", *Journal Of The American Statistical Association*, 78, 47-65.

Osborne, Jason W. (2000). "Advantages of hierarchical linear modeling". *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 7(1). Retrieved June 1, 2005 from <http://PAREonline.net/getvn.asp?v=7&n=1> .

Raudenbush, S. W., (1988), " Educational Applications Of Hierarchical Linear Models: A Review", *Journal Of Educational Statistics*, 13(2), 85-116.

Raudenbush, S.W. & Bryk, A. S. (2002), "Hierarchical Linear Models: Applications And Data Analysis Methods (2nd Edition), Thousand Oaks, Ca: Sage Publications.

Rice, N. & Jones, A., (1997), "Multilevel Models And Health Economics", *Econometrics And Health Economics*, Vol:6:561-575.

Snijders, T. & Bosker, R., (1999), " An Introduction To Basic And Advanced Multilevel Modeling", Sage Publications, London.

Snijders, A.B., (2003), "Diagnostic Checks For Multilevel Models", Published In: Leeuw, J.D. & Kreft, I. (Eds), *Handbook Of Quantitative Multilevel Analysis*,

Sullivan L.M., Dukes, A. K. & Losina, E., (1999), "Tutorial In Biostatistics An Introduction To Hierarchical Linear Modeling", *Statistics In Medicine*, 18, 855-888.

Yu, W., (2000), "Design Effect Variation In The Medical Expenditure Panel Survey (MEPS), *Proceedings of the Survey Research Methods Section, American Statistical Association* , 875-881

YTÜ, (2004), "Akademik Faaliyet Raporu" YTÜ Basım-Yayın, İstanbul.

Zhang, F., Salvucci, S. & Cohen, M., (2000), " Multilevel Linear Regression Analysis Of Complex Survey Data" *Proceedings of the Survey Research Methods Section, American Statistical Association* , 197-203

INTERNET KAYNAKLARI

[1] Browne, W.J & Rasbash J., (2000) "Multilevel Modeling", http://multilevel.ioe.ac.uk/team/_materials/mmsage.pdf.

[2] Monette, G., (2002), "A First Look At Multilevel Models" <http://www.math.yorku.ca/~georges/OptPortFontDeflts.pdf>.

SABİT PARAMETRESİ TESADÜFİ OLARAK DEĞİŞEN MODELLELER (RANDOM INTERCEPT MODELS)

Tek Yönlü

ANOVA Modeli

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{\infty} + u_{0j}$$

$$Y_{IJ} = \gamma_{\infty} + u_{0J} + r_{IJ}$$

LEVEL 1 MODEL

$$\text{OGR.UY.E}_{ij} = \beta_{0j} + \gamma_{ij}$$

LEVEL 2 MODEL

$$f_{0j} = f_{00} + u_{0j}$$

Mixed Model

$$\text{OGR.UY.E}_{ij} = r_{00} + u_{0j} + r_{ij}$$

EĞİM VE SABİT PARAMETRESİ TESADÜFİ OLARAK DEĞİŞEN MODELLER

1. Tesadüfi Katsayılı

Regresyon Modeli

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{\infty} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}X_{ij} + u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + r_{ij} \quad \gamma_{00}, \gamma_{01} \quad u_{0j} \quad u_{0j}$$

LEVEL 1 MODEL

$$\text{OGR.UY.E}_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(\text{BÝL.BEC}_{ij}) + \beta_{2j}(\text{ÝLETÝSYM}_{ij}) + \beta_{3j}(\text{ANLATÝM}_{ij}) + \beta_{4j}(\text{NOTADÝL}_{ij}) + r_{ij}$$

LEVEL 2 MODEL

$$f_{0j} = f_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{ij} = \gamma_{10} + \alpha_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$$

$$B_{3j} = \gamma_{30} + u_{3j}$$

$$B_{4j} = \gamma_{40} + u_{4j}$$

$$\text{OGR.UY.E}_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10} * \text{B.Y.L.BEC}_{ij} + \gamma_{20} * \text{Y.LET.YSYM}_{ij} + \gamma_{30} * \text{ANLAT.YM}_{ij} + \gamma_{40} * \text{NOTAD.YL}_{ij} + \gamma_{0j} + u_{1j} * \text{B.Y.L.BEC}_{ij} + u_{3j} * \text{ANLAT.YM}_{ij} + u_{4j} * \text{NOTAD.YL}_{ij} + r_{ij}$$

2.Sabit Ve Eğim

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} X_{ij} + r_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} W_j + u_{0j}$$

Parametresi Çıktı

Olan Modeller

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01} W_j + \gamma_{10} X_{ij} + \gamma_{11} W_j X_{ij} + u_{0j} + u_{1j} X_{ij} + r_{ij}$$

$$\gamma_{00}, \gamma_{01},$$

$$\gamma_{10}, \gamma_{11}$$

$$u_{0j}$$

LEVEL 2 MODEL

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} (\text{B.ALAN}_j) + \gamma_{02} (\text{Y.BIRIMI}_j) + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11} (\text{B.ALAN}_j) + \gamma_{12} (\text{Y.BIRIMI}_j) + u_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + \gamma_{21} (\text{B.ALAN}_j) + \gamma_{22} (\text{Y.BIRIMI}_j) + u_{2j}$$

$$\beta_{3j} = \gamma_{30} + \gamma_{31} (\text{B.ALAN}_j) + \gamma_{32} (\text{Y.BIRIMI}_j) + u_{3j}$$

$$\beta_{4j} = \gamma_{40} + \gamma_{41} (\text{B.ALAN}_j) + \gamma_{42} (\text{Y.BIRIMI}_j) + u_{4j}$$

LEVEL 1 MODEL

$$\text{OGR.UY.E}_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} (\text{B.Y.L.BEC}_{ij}) + \beta_{2j} (\text{Y.LET.YSYM}_{ij}) + \beta_{3j} (\text{ANLAT.YM}_{ij}) + \beta_{4j} (\text{NOTAD.YL}_{ij}) + r_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{OGR.UY.E}_{ij} = & \gamma_{00} + \gamma_{01} * \text{B.ALAN}_j + \gamma_{02} * \text{Y.BIRIMI}_j + \gamma_{10} * \text{B.Y.L.BEC}_{ij} + \gamma_{11} * \text{B.ALAN}_j * \text{B.Y.L.BEC}_{ij} + \gamma_{12} * \text{Y.BIRIMI}_j * \text{B.Y.L.BEC}_{ij} + \gamma_{20} * \text{Y.LET.YSYM}_{ij} + \\ & \gamma_{21} * \text{B.ALAN}_j * \text{Y.LET.YSYM}_{ij} + \gamma_{22} * \text{Y.BIRIMI}_j * \text{Y.LET.YSYM}_{ij} + \gamma_{30} * \text{ANLAT.YM}_{ij} + \gamma_{31} * \text{B.ALAN}_j * \text{ANLAT.YM}_{ij} + \gamma_{32} * \text{Y.BIRIMI}_j * \text{ANLAT.YM}_{ij} + \\ & \gamma_{40} * \text{NOTAD.YL}_{ij} + \gamma_{41} * \text{B.ALAN}_j * \text{NOTAD.YL}_{ij} + \gamma_{42} * \text{Y.BIRIMI}_j * \text{NOTAD.YL}_{ij} + u_{0j} + u_{1j} * \text{B.Y.L.BEC}_{ij} + u_{2j} * \text{Y.LET.YSYM}_{ij} + u_{3j} * \text{ANLAT.YM}_{ij} + \\ & + u_{4j} * \text{NOTAD.YL}_{ij} + r_{ij} \end{aligned}$$

Ek.2 Y.T.Ü. ÖĞRETİM ELEMANI DEĞERLENDİRME ANKETİ

Bu ankete katılarak, üniversitemizdeki öğretim kalitesinin yükseltilmesine destek olduğunuz için teşekkür ederiz. Öğrenci anketleri merkezi olarak yapılmakta ve bütün dersler için aynı soruları içermektedir.

A) Tamamen katılıyorum B) Katılıyorum C) Kararsızım D) Katılmıyorum E) Hiç katılmıyorum

1. Yarıyıl başında, öğretim üyesi konuların haftalara göre dağılımını ve kaynakları gösteren ders öğretim programını duyurdu.
2. Öğretim üyesi, dersi ders öğretim programına uygun olarak işledi.
3. Öğretim üyesinin dersle ilgili önerdiği kaynaklar yeterliydi.
4. Öğretim üyesi derse düzenli olarak girdi.
5. Öğretim üyesinin ders konusundaki bilgi ve becerisi yeterliydi.
6. Öğretim üyesi derse hazırlıklı geldi.
7. Öğretim üyesinin öğrencilerle iletişimi olumluydu.
8. Öğretim üyesi dersleri açık ve anlaşılır bir biçimde anlattı.
9. Öğretim üyesi tahtayı ve/veya diğer görsel araçları etkin kullandı.
10. Öğretim üyesi , öğrencileri derse katılmaya özendirdi.
11. Öğretim üyesi araştırma yapmaya (kütüphane, internet vb kullanarak) özendirdi.
12. Öğretim üyesinin değerlendirmesi adildi.
13. Aynı öğretim üyesinden tekrar ders almak isterim.
14. Dersin tümünü göz önünde bulundurduğumuzda, öğretim üyesinin etkililiğini nasıl değerlendirirsiniz.
15. Dersin kazandırdığı bilgi ve becerileri başka derslerde ve meslek hayatımda kullanabilirim.
16. Derste kazandırılan bilgi ve beceriler önemli idi.
17. Bu ders benim takım çalışması becerime katkı sağladı.
18. Bu ders benim sözlü ve yazılı anlatım becerimi geliştirdi.
19. Bu ders, mesleğimi ve uğraşı alanlarımı anlamama katkı sağladı.
20. Bu ders, bana mesleğimin toplumdaki yerini ve etik yönlerini öğretti.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	17.07.1978	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1992-1995	Fatih Kız Lisesi
Lisans	1996-2001	Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü
Yüksek Lisans	2001-2004	Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İktisat Anabilim Dalı, İktisat Politikaları Programı
Çalıştığı kurum	2004-Devam ediyor.	YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

