

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

H-DÜZLEM HORN ANTEN İŞİMASININ PARAMETRİK ANALİZİ

Elektronik ve Haberleşme Müh. Ozan YURDUSEVEN

**FBE Elektronik ve Haberleşme Anabilim Dalı Haberleşme programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet Serdar TÜRK (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖNSÖZ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xii
1. GİRİŞ	1
1.1 Konu ve Önemi.....	1
1.2 Analitik Regülarizasyon Yöntemi	1
1.2.1 Birinci Tür Denklem Sistemi	2
1.2.2 İkinci Tür Denklem Sistemi	3
1.2.3 Analitik Regülarizasyon Yöntemini kullanılarak Birinci Türden Denklem Operatörünün Regülerize Edilmesi	4
2. HORN ANTENLER	6
2.1 Klasik Teori	7
2.1.1 H-Düzlem Horn Anten.....	7
2.1.1.1 Açıklık Alanları	7
2.1.1.2 Işınan Alanlar	8
2.1.1.3 Yönlendiricilik.....	10
2.1.2 E-Düzlem Horn Anten	13
2.1.3 Piramit Horn Anten.....	16
2.1.4 Konik Horn Anten	18
3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ	19
3.1 Green Özdeşlikleri ve Sınırlandırılmış Ortamda Helmholtz Denkleminin Çözümünün İntegral Gösterimleri	19
3.1.1 Genelleştirilmiş İkinci Green Teoremi	19
3.1.2 Genelleştirilmiş Birinci Green Teoremi.....	20
3.2 İki Boyutlu Uzayda Üçüncü Green Özdeşliği ve Helmholtz Denkleminin Temel Çözümü	21
3.3 Keyfi Şekilli Mükemmel İletken Engellerden Dalga Kırınımına İlişkin İki Boyutlu Dirichlet Problemi	23
3.3.1 Düzgün ve Kapalı Şekillerden Oluşan Engeller İçin Kırınım Probleminin Ortaya Konması	23
3.3.1.1 R^2 Uzayında Kapalı Düzgün Kontürler ve Parametrizasyonu	23
3.3.1.2 Dirichlet Kırınım Problemi	24
3.3.2 İntegral Gösterimleri ve Sobolev Problemi.....	26
3.3.3 Saçılan Alanın İntegral Gösterimi	31

3.3.4	Dirichlet Kırınım Problemi İçin Birinci Türden İntegral Denklemi.....	34
3.3.5	Dirichlet Problemi İçin İntegral Denkleminin Bazı Niteleyici Özellikleri	35
3.3.6	Dirichlet Kırınım Problemi İçin İntegral Denkleminin Parametrizasyonlu Hale Dönüştürülmesi	37
3.3.7	$G_D[kR(\theta, \tau)]$ Fonksiyonunun Lokal Tekilliklerinin Açılımı	38
3.3.8	Dirichlet Problemi İçin İntegral Denkleminin İkinci Dereceden Sonsuz Cebrik Eşitliğe İndirgenmesi.....	40
4.	PARAMETRİZASYON VE SAYISAL SONUÇLAR	44
4.1	Model 1 Horn Anten	45
4.2	Model 2 Horn Anten	53
4.3	Model 3 Horn Anten	58
4.4	Model 4 Horn Anten	62
4.5	Model 5 Horn Anten	64
4.6	Model 6 Horn Anten	65
4.7	Model 7 Horn Anten	67
4.8	Model 8 Horn Anten	68
5.	SONUÇLAR VE YORUMLAR	70
	KAYNAKLAR.....	72
	EKLER	73
Ek 1	Kosinüs ve Sinüs Fresnel İntegralleri	73
	ÖZGEÇMİŞ.....	77

SİMGE LİSTESİ

E	Elektrik alan bileşeni
H	Manyetik alan bileşeni
a	Dalga kılavuzunun genişliği
b	Dalga kılavuzunun uzunluğu
c	Kanat uzunluğu
d	Antenin kalınlığı
R	Dış yuvarlatma (Rolling edge) katsayısı
α	Anten ağız açıklığı açısı
λ	Dalgaboyu
J_S	Elektriksel akım yoğunluğu
M_S	Manyetik Akım yoğunluğu
N	Kesim sayısı (Truncation Number)

KISALTMA LİSTESİ

ARM	Analitic Regularization Method (Analitik Regularizasyon Yöntemi)
MoM	Method of Moments (Moment Yöntemi)
FEM	Finite Element Method (Sonlu Elemanlar Yöntemi)
FDM	Finite Diffrence Method (Sonlu Farklar Yöntemi)
BVP	Boundary Value Problem (Sınır Değer Problemi)
RF	Radio Frequency (Radyo Frekansı)

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Başlıca horn anten geometrileri.....	6
Şekil 2.2	H-düzlem horn antenin a) çaprazdan b) üstten görünümü.....	7
Şekil 2.3	H-düzlem horn antenin örnek bir üç boyutlu ışıma paterni	9
Şekil 2.4	Farklı kanat açıları için H-düzlem horn antenin normalize ışıma paternleri ($\delta_2 = 12\lambda$).....	10
Şekil 2.5	H-düzlem horn antenin farklı kanat açısı ve uzunluğuna bağlı olarak yarım güç huzme genişliğinin değişimi	12
Şekil 2.6	A parametresinin bir fonksiyonu olarak G_H ifadesinin değişimi.....	13
Şekil 2.7	E-düzlem sektörel horn anten geometrisi.....	14
Şekil 2.8	A parametresinin bir fonksiyonu olarak G_H ifadesinin değişimi.....	15
Şekil 2.9	Piramit horn anten geometrisi	16
Şekil 2.10	Konik horn anten geometrisi	18
Şekil 3.1	R^2 uzayında Ω_ϵ diski ve D_ϵ domeninin görünümü.....	22
Şekil 3.2	R^2 uzayında S konturu ve D_0 domeninin görünümü	24
Şekil 3.3	R^2 uzayında S konturu tarafından sınırlandırılan kapalı D domeninin görünümü.....	26
Şekil 3.4	R^2 uzayında D_1, D_2 domenleri ve bu domenleri ayıran L parçasının görünümü	28
Şekil 3.5	R^2 uzayında $D_h^{(+)}, D_h^{(-)}$ domenleri ve bu domenleri sınırlayan $S_h^{(+)}$ ve $S_h^{(-)}$ konturlarının görünümü	31
Şekil 4.1	Dalga kılavuzunun uzak alan paterni.....	44
Şekil 4.2	Model 1 horn antenin geometrisi.....	45
Şekil 4.3	Model 1 horn antenin yakın alan paterni	48
Şekil 4.4	Farklı kanat açıları için model 1 horn antenin yarım güç huzme genişliği grafikleri.....	48
Şekil 4.5	Farklı dalga kılavuzu genişlikleri için model 1 horn antenin normalize kazanç paternleri	49
Şekil 4.6	Farklı dalga kılavuzu uzunlukları için model 1 horn antenin normalize kazanç paternleri	49
Şekil 4.7	Farklı kanat uzunlukları için model 1 horn antenin normalize kazanç paternleri ..	50
Şekil 4.8	Farklı duvar kalınlıkları için model 1 horn antenin normalize kazanç paternleri ..	50
Şekil 4.9	x-ekseninde farklı besleme konumları için model 1 horn antenin normalize kazanç paternleri.....	51

Şekil 4.10	y-ekseninde farklı besleme konumları için model 1 horn anteninin normalize kazanç paternleri	51
Şekil 4.11	Farklı iç yuvarlatma açıları için model 1 horn anteninin normalize kazanç paternleri	52
Şekil 4.12	Farklı kenar yuvarlatma katsayıları için model 1 horn anteninin normalize kazanç paternleri	52
Şekil 4.13	Model 1 horn anteni için 2D ARM analizi ile 3D MoM analiz sonuçlarının karşılaştırılması.....	53
Şekil 4.14	Model 2 horn antenin yakın alan paterni	53
Şekil 4.15	Farklı kanat açıları için model 2 horn anteninin yarım güç huzme genişliği grafikleri	54
Şekil 4.16	Farklı dalga kılavuzu genişlikleri için model 2 horn anteninin normalize kazanç paternleri	54
Şekil 4.17	Farklı dalga kılavuzu uzunlukları için model 2 horn anteninin normalize kazanç paternleri	55
Şekil 4.18	Farklı kanat uzunlukları için model 2 horn anteninin normalize kazanç paternleri ..	55
Şekil 4.19	Farklı duvar kalınlıkları için model 2 horn anteninin normalize kazanç paternleri ..	56
Şekil 4.20	x-ekseninde farklı besleme konumları için model 2 horn anteninin normalize kazanç paternleri	56
Şekil 4.21	y-ekseninde farklı besleme konumları için model 2 horn anteninin normalize kazanç paternleri	57
Şekil 4.22	Farklı kenar yuvarlatma katsayıları için model 2 horn anteninin normalize kazanç paternleri	57
Şekil 4.23	Model 2 horn anteni için 2D ARM analizi ile 3D MoM analiz sonuçlarının karşılaştırılması.....	58
Şekil 4.24	Model 3 horn antenin görünümü	59
Şekil 4.25	Farklı arka yuvarlatma açıları için normalize ışıma paternlerinin karşılaştırılması ..	62
Şekil 4.26	Model 4 oluklu horn anteninin geometrisi	63
Şekil 4.27	Farklı dış uzunlukları için elde edilen normalize ışıma paterninin karşılaştırılması .	63
Şekil 4.28	Model 5 horn antenin görünümü	64
Şekil 4.29	Model 5 horn anteninden elde edilen normalize ışıma paterninin model 1 horn anteni ile karşılaştırılması	65
Şekil 4.30	Model 6 horn anteninin geometrisi	66

Şekil 4.31	Farklı besleme mesafelerine bağlı olarak model 6 horn anteninden elde edilen normalize ışıma paternlerinin karşılaştırılması	66
Şekil 4.32	Model 7 horn anteninin geometrisi	67
Şekil 4.33	Model 7 horn anteninden elde edilen normalize ışıma paterinin model 1 horn anteninden elde edilen ışıma paterni ile kıyaslanması	68
Şekil 4.34	Model 8 horn anteninin görünümü	69
Şekil 4.35	Model 8 horn anteninden elde edilen normalize ışıma paterinin model 1 horn anteninden elde edilen ışıma paterni ile kıyaslanması	69
Şekil 5.1	N kesim sayısına bağlı olarak model 1 ve model 2 horn antenlerine ait ortalama bağıl hata değerleri	71
Şekil Ek.1	Kosinüs ve sinüs integral çizimleri	76

ÖNSÖZ

Bu tezde H-düzlem horn antenin çeşitli parametrelerinin sistematik olarak değiştirilmesi suretiyle antenin ışıma karakteristiğindeki değişimler parametrik olarak incelenmiş ve yapılan bu incelemeler sayesinde tasarımcıya yüksek kazançlı, dar huzmeli ve bastırılmış yan ve arka kulaklara sahip bir horn anten dizaynı konusunda yardımcı olunması hedeflenmiştir.

Yapılan bu çalışmalarla birlikte bu tez, mikrodalga radar sistemlerinde özellikle yansıtıcı anten beslemelerinde kullanılmak üzere tasarımcıya bir kaynak niteliğindedir.

Bu tezin hazırlanması aşamasında bana her türlü katkı ve yardımda bulunan değerli danışman hocam Doç. Dr. Ahmet Serdar Türk'e ve bu zorlu süreçte desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

ÖZET

Bu çalışmada H-düzlem horn antenin dalga kılavuzunun uzunluğu, genişliği, kanat uzunluğu, kanat açısı, duvar kalınlığı, beslemenin konumu gibi çeşitli parametrelerinin değiştirilmesi suretiyle antenin ışıma karakteristiğindeki değişimler sistematik olarak incelenmiştir. Bu tezde bununla birlikte, H-düzlem sektörel horn antenin ışıma karakteristiğinin incelenmesinde çoklu kaynak beslemesi, kanat duvarının yuvarlatılması ve oluk etkisi gibi parametrelerin de etkisi ele alınmıştır. E-polarizasyonlu dalga kırınım probleminin hızlı ve doğru bir şekilde çözülmesi için Analitik Regülerizasyon Yöntemi kullanılmıştır. Yapılan sayısal işlemlerin öncelikle analitik olarak olarak doğrulaması yapılmış ve seçilen horn anten geometrileri için hesaplanan alan paternleri gösterilmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde, birinci ve ikinci tür denklem sistemlerinden bahsedilmiş ve Analitik Regülerizasyon Yöntemi hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde horn anten yapıları kısaca tanıtıldıktan sonra H-düzlem horn anten için temel analiz bilgileri verilmiştir.

Üçüncü bölümde problem tanımlanmış ve Analitik regülerizasyon Yöntemi kullanılarak problemin çözümü için gerekli formülasyonlar ve çözümlemeler yapılmıştır.

Dördüncü bölümde çeşitli horn antenlerin parametrisasyonları yapılmıştır. Parametrisasyon işleminden sonra yapılan analizler sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar grafikler halinde gösterilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise elde edilen tüm sonuçlar özetlenmiş ve bu sonuçlar hakkında gerekli yorumlamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Analitik regülerizasyon yöntemi, Elektromanyetik dalga saçılımı, Horn antenler.

ABSTRACT

In this work radiation characteristics of the H-plane sectoral horn antenna are investigated parametrically by changing various parameters of the horn antenna such as the length and width of the waveguide, the length and angle of flare, wall thickness, position of the feeding in both x and y axis, systematically. Besides, In this thesis, radiation characteristics of H-plane sectoral horn antenna are also treated systematically by investigation of the multi source feeding, flare wall rolling and corrugating effects. The analytical regularization method (ARM) is used to solve the problem of E-polarized wave diffraction in a fast and accurate way. The numerical procedure is initially verified by the analytical solutions, and the calculated field patterns are presented for the selected horn antenna configurations.

In first chapter of the this work, it is mentioned about equation systems of first and second kind and given fundamentals of Analytical Regularization Method.

In second chapter, after introducing the horn antennas briefly, theoretical informations about H-plane sectoral horn antenna are given.

In third chapter, the problem is defined and formulations are done by using Analytical Regularisation Method to solve the problem.

In fourth chapter, parametrization of various horn annennas are done. After parametrization, Numerical results that obtained from analyses are inticated wtih graphs.

In fifth and the last chapter also, the results that obtained are summerized and comments about obtained resuts are done.

Keywords: Analytical regularization method, Electromagnetic wave scattering, Horn Antennas.

1. GİRİŞ

1.1 Konu ve Önemi

Horn antenler; RF haberleşme sistemlerinde, yüksek güçlü mikrodalga aygıtlarında, elektromanyetik uyumluluk testlerinde, mikrodalga ve milimetrik dalga radarlarında ve parabolik yansıtıcı antenlerin beslemesinde yaygın olarak kullanılan en popüler antenlerden biridir (Skolnik, 1990; Milligan, 2005; Balanis, 2005; Ewe vd., 2005; Türk, 2006; Chang vd., 2010). Son yıllarda horn antenlerin ışıma karakteristikleri en temel konfigürasyonlardan başlanarak incelenmiş ve çok çeşitli pratik horn antenler geliştirilmiştir (Hamid ve Al-Sulaiman, 1983; Parker, 1995; Chumachenko ve Türk, 2001; Heydari vd., 2008; Tuchkin, 1985). Başlangıçta kullanılan araştırma teknikleri, temel olarak mod uyarlamalı ve açıklık integrasyon tekniklerine dayanan, analitik teknikler olmuştur. Ancak, keyfi şekilli horn antenler sadece deneysel veya optik yaklaşımlarla analiz edilmişlerdir (Hamid ve Al-Sulaiman, 1983). Bu yüzden çok yönlü ve kullanışlı horn antenler için, sonlu farklar yöntemi (FDM), sonlu elemanlar yöntemi (FEM), moment yöntemi (MoM) ve hibrit algoritmaların kullanılması düşünülmüştür. Yine de bu yöntemler özellikle büyük boyutlu horn antenlerin tasarımı ve geniş band analizleri için oldukça yüksek hesaplama süresine ihtiyaç duyarlar. Bununla birlikte moment yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi, sınır değer probleminin (BVP) genelde tekil çekirdeğe sahip birinci dereceden cebirsel denklem setine indirgenmesinden dolayı, bazı yapılar için kararsız sayısal işlemlere sebebiyet verir (Tuckhin, 1985). Bundan dolayı matris eşitliğini hızlı ve güvenilir olarak çözmek için, birinci dereceden kötü durumlu (ill conditioned) integral denklemini, iyi durumlu (well conditioned) ikinci derecedenkine çeviren analitik-sayısal yaklaşımlar tercih edilir (Chumachenko ve Türk, 2001; Tuckhin, 1985). Bu kapsamda horn ışımasının hesaplanması için analitik regülarizasyon yönteminin (ARM) kullanılması amaçlanmıştır. Sunulan bu yöntem sayesinde H-düzlem horn antenin ışıma karakteristiğinin analizi; dalga kılavuzu uzunluğu ve genişliği, kanat uzunluğu ve açısı, çizgisel kaynak beslemesinin farklı geometrik pozisyonlarda olması gibi temel parametrelerin değişimine bağlı olarak yapılmıştır.

1.2 Analitik Regülarizasyon Yöntemi

Kanonik veya daha karmaşık yapılara sahip cisimlerden elektromanyetik dalga kırınımının ve bu elektromanyetik yapıların sayısal olarak modellenmesinin modern elektromanyetik teoride önemi oldukça büyüktür. Çözüm yöntemi olarak sıklıkla kullanılan ve yukarıda bahsedilen

yöntemlerin, denklem sistemini birinci türden cebrik sisteme indirgemesi ($Ax=b$ şeklinde) ve bu yöntemlerin sözü edilen kararsızlıkları, iç süreksizliği bulunan düzlemsel dalga kılavuzu gibi basit kanonik yapıların bile çözümünü oldukça güç kılmakla beraber ekstra karmaşık işlemlere gereksinim duyulmaktadır (Mittra ve Lee, 1971). Bu sebepten ötürü bu çalışmada analitik regülerizasyon yöntemi kullanılacaktır.

Analitik regülerizasyon yöntemi genel olarak sayısal yapıdadır. Ele alınan kırınım problemini, cebrik açıdan orjinal sınır değer problemine özdeş olan, ikinci türden fonksiyonel denkleme indirger. Bu da yöntemin, sistemin boyutu sonsuza giderken, kesilerek sonlu boyutlu duruma getirilmiş ve sınırlı hal sayısına sahip bir cebrik sistem oluşturması anlamına gelir. Bu durum yalnızca kesilerek sonlu boyutlu yapılan bu çözüm sisteminin, sınır değer probleminin çözümünü veren sonsuz boyutlu sisteme yakınsamasını garanti etmekle kalmaz, herhangi büyük boyutta kesilmiş cebrik sistemin sayısal kararlılığını da sağlar. Sonuç olarak prensipte kırınım sınır değer problemi talep edilen herhangi bir doğrulukta çözülebilir. Pratikte ise bu durum kullanılan bilgisayarların teknik özelliklerine bağlıdır. Analitik regülerizasyon yönteminin bir diğer avantajı da diğerler yöntemlerin aksine pratik uygulamalarda ekstra doğrulama işlemine gereksinim duymamasıdır.

Tezin sayısal uygulamaları esnasında H-düzlem horn anten ele alınacak ve bu yapıdan E-polarizasyonlu dalga kırınımı neticesinde elde edilen akım dağılımları, uzak alan ve yakın alan ışınım paternleri normalize olarak grafikler halinde verilecektir.

1.2.1 Birinci Tür Denklem Sistemi

A bir Hilbert uzayı olsun. Birinci türden denklem sistemi;

$$Ax=b \quad (1.1)$$

olarak belirtilebilir. Bu problemi çözmek için tek yol, kural olarak, sayısal çözümdür. Yani, A matris operatörünün eşdeğerini tanımlayalım:

$$\tilde{A} = \{a_{kj}\}_{k,j=1}^{\infty} \quad a_{kj} = (Ae_j, e_k) \quad k = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

Burada;

$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ ifadesi ortonormal taban ifadesidir.

Benzer olarak

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, & \tilde{b} &= \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \\ x_k &= (x, e_k), & b_k &= (b, e_k)\end{aligned}\tag{1.3}$$

olacak şekilde sonsuz vektör sütunları tanımlayalım. Bu durumda operatör eşitliği;

$$\tilde{A} \tilde{x} = \tilde{b}\tag{1.4}$$

halini alır. Bilindiği gibi bilgisayarlar sonsuz matris ve vektör dizileriyle çalışamazlar. Bu yüzden sadece sonlu durumda çözüm söz konusudur. Kesilmiş cebrik sistem:

$$\tilde{A}^N \tilde{x}^N = \tilde{b}^N\tag{1.5}$$

olarak belirtilebilir. Burada;

$$\tilde{A}^N = \{a_{kj}\}_{k,j=1}^N, \quad \tilde{x}^N = \{x_j\}_{j=1}^N, \quad \tilde{b}^N = \{b_j\}_{j=1}^N\tag{1.6}$$

ve buna karşılık

$$x^N = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\tag{1.7}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x^N \stackrel{?}{=} x\tag{1.8}$$

ifadesini incelersek genellikle x^N 'in x 'e yakınsamadığı görülür. Yakınsadığı farz edilse bile;

$$v_N = \left\| \tilde{A}^N \right\| \cdot \left\| \left(\tilde{A}^N \right)^{-1} \right\|\tag{1.9}$$

ifadesi ile belirtilebilen hal sayısının (condition number) $N \rightarrow \infty$ için sonlu bir değerden küçük olmadığı görülmektedir. Dolayısıyla kararlılık söz konusu değildir ve bu durum için çözüm elde edilemez.

1.2.2 İkinci Tür Denklem Sistemi

İkinci türden denklem sistemi;

$$(I+H)x=b\tag{1.10}$$

olarak belirtilebilir. Burada H kompakt operatör olarak adlandırılır ve $(I + H)^{-1}$ ifadesi tanımlıdır. Yukarıda yapılan incelemeler tekrar edilecek olunursa:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x^N = x \quad (1.11)$$

olduğu görülür. Yani $N \rightarrow \infty$ için yakınsama söz konusudur. Hal sayısına bakılacak olunursa;

$$\nu_\infty = \|(I + H)\| \cdot \|(I + H)^{-1}\| \quad (1.12)$$

İfadesine göre;

$$\nu_N \leq \text{sabit}, \quad N \rightarrow \infty \text{ için}$$

Sağlanır. Dolayısıyla $N \rightarrow \infty$ için bile sistem kararlıdır.

1.2.3 Analitik Regülerizasyon Yöntemi Kullanılarak Birinci Türden Denklem Operatörünün Regülerize Edilmesi

A , L_0 , R_0 operatörleri, B , B_1 ve B_2 Hilbert uzaylarında tanımlı olsun. Bununla birlikte operatörler için aşağıdaki bağıntıların geçerli oldukları kabul edilsin:

$$A : B_1 \rightarrow B_2$$

$$L_0 : B_2 \rightarrow B$$

$$R_0 : B \rightarrow B_1.$$

Ayrıca L_0^{-1} ve R_0^{-1} ifadelerinin de tanımlı ve sınırlı oldukları kabul edilsin. Eğer;

$$L_0 A R_0 = I + H; \quad H : B \rightarrow B \quad (1.13)$$

olarak yazılabiliyorsa (L_0, R_0) çifti iki yönlü regülerizatör olarak adlandırılır (Tuchkin, 1995).

Burada, H ifadesi B uzayında tanımlı kompakt operatördür.

Aşağıdaki gibi birinci türden bir fonksiyonel eşitlik düşünölsün:

$$Ax = b, \quad x \in B_1, \quad b \in B_2. \quad (1.14)$$

R_0^{-1} , sınırlandırılmış bir operatör olduğundan tüm $x \in B_1$ değeri bazı $y = R_0^{-1}x \in B$ değeri için $x = R_0 y$ olarak yazılabilir. Bu gösterim kullanılıp her iki tarafta gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki gibi belirtilebilen ikinci türden bir eşitlik elde edilebilir:

$$(I + H)y = L_0 b, \quad y \in B, \quad L_0 b \in B. \quad (1.15)$$

Burada H operatörü, B uzayında tanımlı kompakt operatördür.

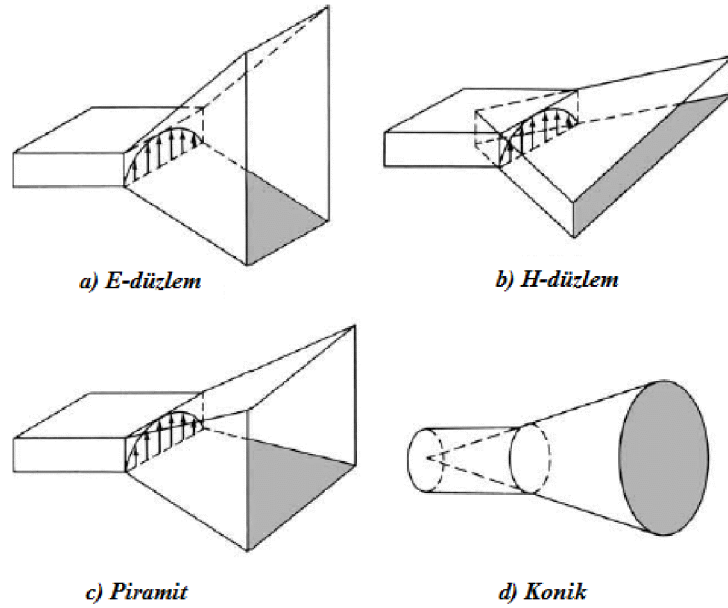
Kırınım teorisindeki analitik regülarizasyon yöntemi, kırınım probleminin fiziksel anlamıyla ilişkili olan kapalı formdaki kırınım sınır değer problemine ait iki yönlü regülarizatörün (L_0 ve R_0 operatör çifti) analitik olarak oluşturulmasını sağlayan bir tekniktir.

2. HORN ANTENLER

Horn antenler mikrodalga anten türleri içerisinde en yaygın olarak kullanılan anten türlerinden biridir (Balanis, 2005). Keşfedilmesi ve kullanılmaya başlanması 1800'lü yılların sonlarından itibaren 1900'lerin başlarında biraz ihmal edilmiş olsalar da 1930'lu yıllardan itibaren özellikle İkinci Dünya Savaşı boyunca mikrodalga ve dalga kılavuzu iletim hatlarında kullanım alanı bulmuşlardır. O zamandan beri horn antenlerin ışıma karakteristikleri, tasarım yöntemleri ve uygulamalarına dair bir çok yayın ortaya çıkmıştır.

Horn antenler; astronomide, uydu takibinde ve parabolik yansıtıcı yapılarında besleme elemanı olarak sıklıkla kullanılırlar. Bununla beraber, faz dizileri için oldukça yaygın bir eleman olup, diğer tür yüksek kazançlı antenlerin kazanç ölçümlerinde ve kalibrasyonunda genel standart olarak kabul edilir. Yaygın kullanılmalarının başlıca sebepleri ise; yapımının kolay olması, besleme kolaylığı, çok çeşitli olması, yüksek kazançlı olması, ve yüksek performans sağlaması olarak sıralanabilir.

Bir elektromanyetik horn anten aşağıda da gösterildiği gibi çeşitli formlarda olabilir.



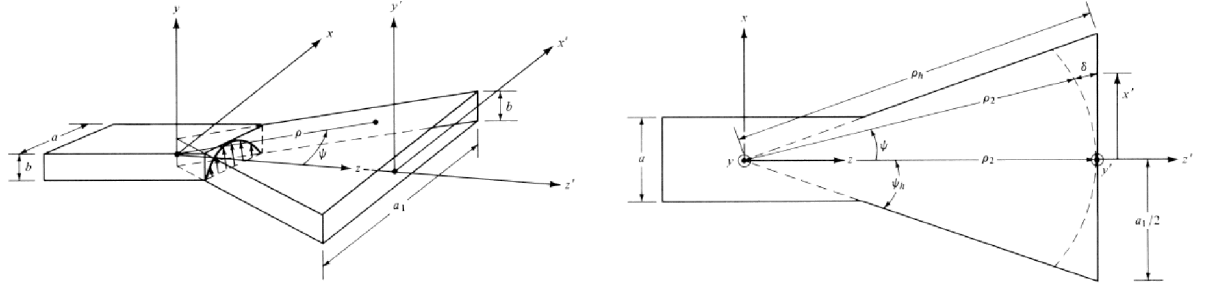
Şekil 2.1 Başlıca horn anten geometrileri (Balanis, 2005).

Horn anten temel olarak farklı kesitlere sahip içi boş bir dalga kılavuzu yapısından ve bu yapıya ilave edilen bir kanattan oluşmaktadır. Horn antenin türü, yönü ve kanat yapısı ışıma performansını oldukça etkiler.

2.1. Klasik Teori

2.1.1 H-Düzlem Horn Anten

Dikdörtgen dalga kılavuzunun boyutlarının H-düzleminde açılarak, diğer düzlemde ise sabit tutularak elde edilen yapı H-düzlem sektörel horn anten yapısıdır. H-düzlem Horn anten geometrisi şekil 2.2’de görülmektedir.



Şekil 2.2 H-düzlem horn antenin a) çaprazdan b) üstten görünümü (Balanis, 2005).

H-Düzlem sektörel horn antenin teorik analizinde mod uyarma tekniği kullanılacaktır.

2.1.1.1 Açıklık Alanları

Horn anten açıklığındaki alanlar, horn antenin bir açıklık ışıyıcısı olarak düşünülmesi yardımıyla bulunabilir. Bu yöntemi kullanarak horn anten açıklığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir (Balanis, 2005) ;

$$E'_x = H'_y = 0 \quad (2.1)$$

$$E'_y(x') = E_2 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-jk\delta(x')} \quad (2.2)$$

$$H'_x(x') = -\frac{E_2}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-jk\delta(x')} \quad (2.3)$$

$$\delta(x') = \frac{1}{2} \left(\frac{x'^2}{\rho_2} \right) \quad (2.4)$$

$$\rho_2 = \rho_h \cos \psi_h \quad (2.5)$$

2.1.1.2 Işıman Alanlar

Horn anten tarafından ışıman alanlar, J_s ve M_s eşdeğer akım yoğunluklarının formülize edilmesi yardımıyla bulabilir. (2.1) – (2.3) ifadeleri kullanılarak horn anten açıklığı üzerindeki eşdeğer akım yoğunlukları şu şekilde tanımlanabilir (Balanis, 2005);

$$J_x = J_y = M_x = M_y = 0 \quad (2.6)$$

$$J_y = -\frac{E_2}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-jk\delta(x')} \quad (2.7)$$

$$M_x = E_2 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-jk\delta(x')} \quad (2.8)$$

Horn anten açıklığının haricindeki tüm bölgelerde bu ifadeler sıfıra eşit olur. Açıklık yüzeyi üzerindeki eşdeğer akım yoğunlukları bulunduğundan sonra uzak alan için elde edilecek elektrik alan ve manyetik alan bileşenleri aşağıdaki gibidir;

$$E_r = 0 \quad (2.9)$$

$$E_\theta = jE_2 \frac{b}{8} \sqrt{\frac{k\rho_2}{\pi}} \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ \sin\phi(1+\cos\theta) \frac{\sin Y}{Y} \left[e^{if_1} F(t'_1, t'_2) + e^{if_2} F(t''_1, t''_2) \right] \right\} \quad (2.10)$$

$$E_\phi = jE_2 \frac{b}{8} \sqrt{\frac{k\rho_2}{\pi}} \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ \cos\phi(1+\cos\theta) \frac{\sin Y}{Y} \left[e^{if_1} F(t'_1, t'_2) + e^{if_2} F(t''_1, t''_2) \right] \right\} \quad (2.11)$$

Burada;

$$t'_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(-\frac{ka_1}{2} - k'_x \rho_2 \right) \quad (2.12)$$

$$t'_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(+\frac{ka_1}{2} - k'_x \rho_2 \right) \quad (2.13)$$

$$t''_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(-\frac{ka_1}{2} - k''_x \rho_2 \right) \quad (2.14)$$

$$t''_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(+\frac{ka_1}{2} - k''_x \rho_2 \right) \quad (2.15)$$

$$F(t_1, t_2) = [C(t_2) - C(t_1)] - j[S(t_2) - S(t_1)] \quad (2.16)$$

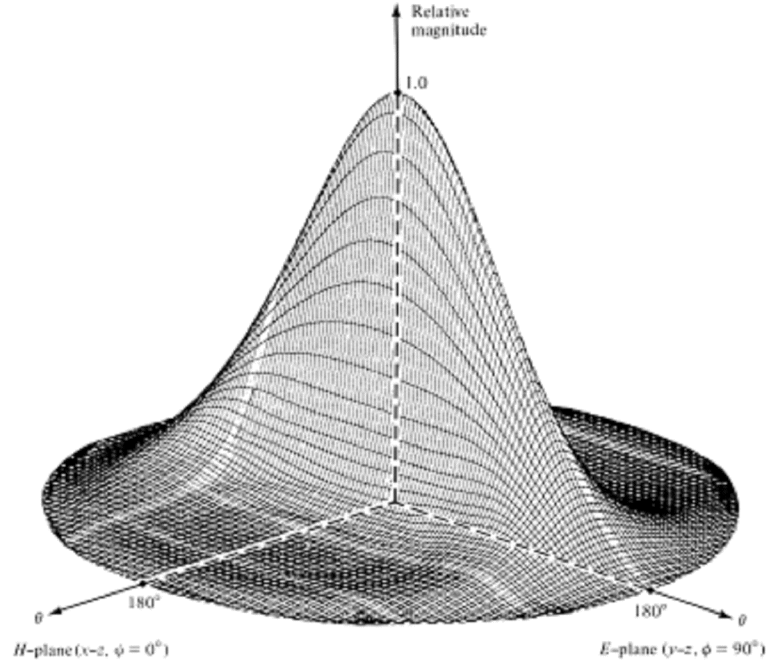
$$Y = \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi \quad (2.17)$$

$$k'_x = k \sin \theta \cos \phi + \frac{\pi}{a_1} \quad (2.18)$$

$$k''_x = k \sin \theta \cos \phi - \frac{\pi}{a_1} \quad (2.19)$$

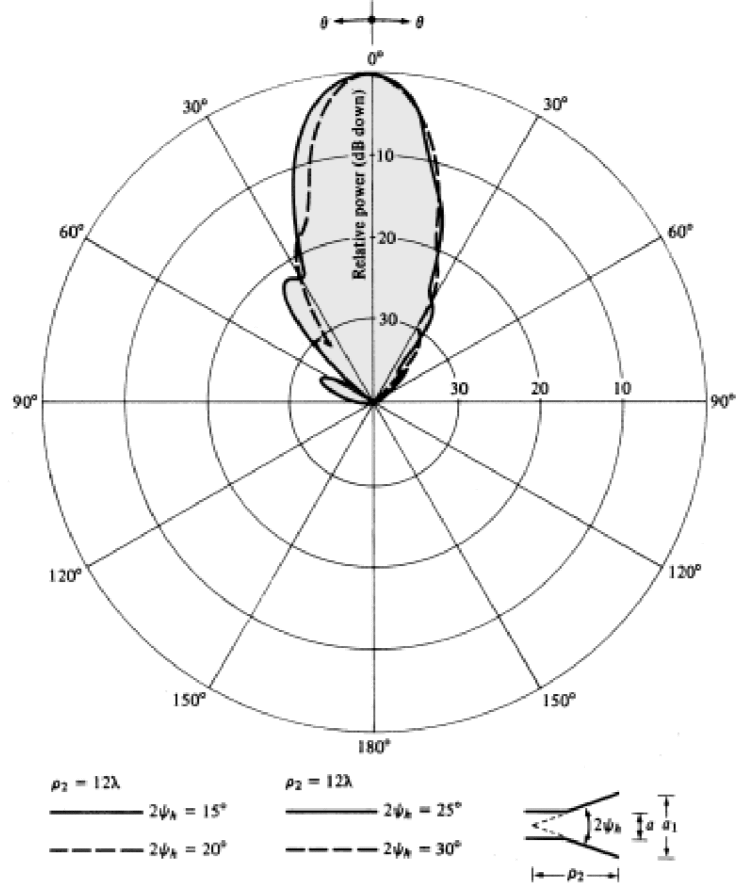
olarak belirtilebilir. $C(x)$ ve $S(x)$ ifadeleri kosinüs ve sinüs Fresnel integralleridir ve tablo halinde ekler kısmında verilmiştir.

H-Düzlem horn antenin örnek bir üç boyutlu ışıma paterni şekil 2.3'te verilmiştir.



Şekil 2.3 H-düzlem horn antenin örnek bir üç boyutlu ışıma paterni (Balanis, 2005).

Şekil 2.3'te verilen paterne bakılacak olunursa, H-düzlem horn antenin , E-düzlemine kıyasla H-düzleminde daha dar huzmeye sahip olduğu görülür. $\delta_2 = 12\lambda$ olacak şekilde tasarlanan H-düzlem horn antenin farklı kanat açılarına bağlı olarak elde edilen normalize ışıma paterni grafikleri şekil 2.4'te görülmektedir.



Şekil 2.4 $\delta_2 = 12\lambda$ iken farklı kanat açıları için H-düzlem horn antenin normalize ışıma paternleri (Balanis, 2005).

Şekil 2.4'ten de görüldüğü gibi kanat açısı artırıldığında horn antenin huzmesi daralmaktadır ama bu karakteristik sürekli değildir. Kanat açısı belli bir seviyeden fazla arttırıldığında huzme genişlemeye başlar. Bunun durum horn açıklığındaki faz hatasından kaynaklanmaktadır. Bu durumun düzeltilebilmesi için horn anten açıklığında genellikle lens yapıları kullanılır.

2.1.1.3 Yönlendiricilik

H-düzlem horn antenin maksimum yönlendiriciliği şekil 2.2'ye göre z-eksenindedir ($\theta = 0^\circ$). Uzak alan için elektrik alanının maksimum değeri (Balanis, 2005);

$$|E_\theta|_{\max} = |E_2| \frac{b}{4r} \sqrt{\frac{2\rho_2}{\lambda}} \left| \sin \phi \left\{ [C(t'_2) + C(t''_2) - C(t'_1) - C(t''_1)] - j[S(t'_2) + S(t''_2) - S(t'_1) - S(t''_1)] \right\} \right| \quad (2.20)$$

olarak yazılabilir. (2.12)- (2.15) ifadelerini $\theta = 0^\circ$ için düzenlersek;

$$t_1' = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(-\frac{k a_1}{2} - \frac{\pi}{a_1} \rho_2 \right) \quad (2.21)$$

$$t_2' = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(+\frac{k a_1}{2} - \frac{\pi}{a_1} \rho_2 \right) \quad (2.22)$$

$$t_1'' = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(-\frac{k a_1}{2} + \frac{\pi}{a_1} \rho_2 \right) = -t_2' = v \quad (2.23)$$

$$t_2'' = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(+\frac{k a_1}{2} + \frac{\pi}{a_1} \rho_2 \right) = -t_1' = u \quad (2.24)$$

olarak elde edilir. Benzer olarak ;

$$|E_\phi|_{\max} = |E_2| \frac{b}{r} \sqrt{\frac{\rho_2}{2\lambda}} \left| \cos \phi \left\{ [C(u) - C(v)]^2 - j[S(u) - S(v)]^2 \right\} \right| \quad (2.25)$$

Olarak yazılabilir. Bu yüzden toplam elektrik alan şiddetinin maksimum değeri;

$$|E_\phi|_{\max} = \sqrt{|E_\phi|_{\max}^2 + |E_\theta|_{\max}^2} = |E_2| \frac{b}{r} \sqrt{\frac{\rho_2}{2\lambda}} \left\{ [C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.26)$$

olur. Anten tarafından ışıyan toplam güç, ortalama güç yoğunluğunun horn antenin ağız açıklığı boyunca integralinin alınması ile elde edilir. Yapılan işlemler sonucunda;

$$P_{rad} = |E_2|^2 \frac{b a_1}{4\eta} \quad (2.27)$$

H-düzlem horn antenin yönlendiriciliği (2.27) ifadesinin yardımıyla şu şekilde bulunabilir;

$$D_H = \frac{4\pi U_{\max}}{P_{rad}} = \frac{4\pi b \rho_2}{a_1 \lambda} \left\{ [C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2 \right\} \quad (2.28)$$

Burada;

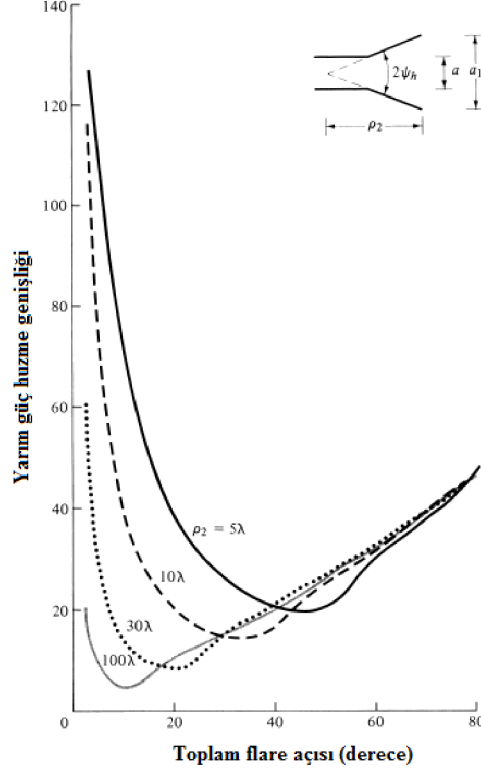
$$U_{\max} = |E_2|^2 \frac{b^2 \rho_2}{4\eta \lambda} \sqrt{\frac{2\rho_2}{\lambda}} \frac{4\pi b \rho_2}{a_1 \lambda} \left\{ [C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2 \right\} \quad (2.29)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda \rho_2}}{a_1} + \frac{a_1}{\sqrt{\lambda \rho_2}} \right) \quad (2.30)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda \rho_2}}{a_1} - \frac{a_1}{\sqrt{\lambda \rho_2}} \right) \quad (2.31)$$

olarak belirtilebilir.

Yarım güç huzme genişliği (HPBW), kanat açısının bir fonksiyonudur ve şekil 2.5'te H-düzlem horn anten için bir örneği gösterilmiştir.



Şekil 2.5 H-düzlem horn antenin farklı kanat açısı ve uzunluğuna bağlı olarak yarım güç huzme genişliğinin değişimi (Balanis, 2005).

Şekil 2.5'ten de görüldüğü gibi H-düzlem horn antenin yarım güç huzme genişliği, verilen sabit bir kanat uzunluğu için, kanat açısının artışıyla beraber kadar azalmakta iken kanat açısının belli bir seviyeden sonra daha da artımıyla beraber bu defa artmaya başlamaktadır.

Bir H-düzlem horn antenin optimum yönlendiriciliği için kanat açısı yaklaşık olarak;

$$\alpha_1 \approx \sqrt{3\pi\rho_2} \quad (2.32)$$

olmalıdır.

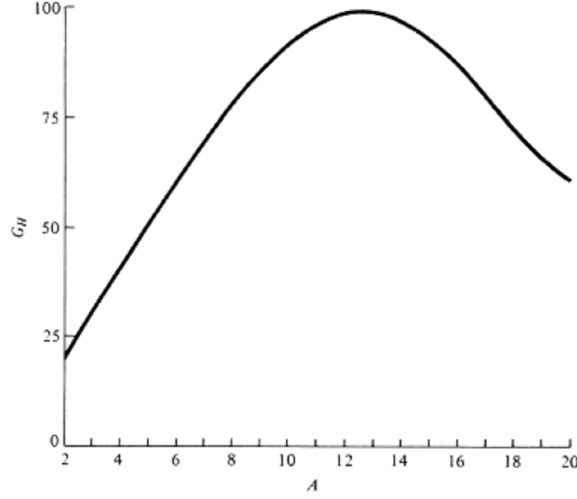
Bir H-düzlem sektörel horn antenin yönlendiriciliğinin hesaplanabilmesi aşağıda verilen yöntemle de mümkündür;

1) A değeri (2.33) formülü ile hesaplanır;

$$A = \frac{a_1}{\lambda} \sqrt{\frac{50}{\rho_h / \lambda}} \quad (2.33)$$

2) Bulunan A değeri kullanılarak şekil 2.6'dan G_H değeri bulunur. Bununla beraber eğer $A < 2$ ise G_H değeri aşağıdaki formülle de bulunabilir;

$$G_H = \frac{32}{\pi} A \quad (2.34)$$



Şekil 2.6 A parametresinin bir fonksiyonu olarak G_H ifadesinin değişimi (Balanis, 2005).

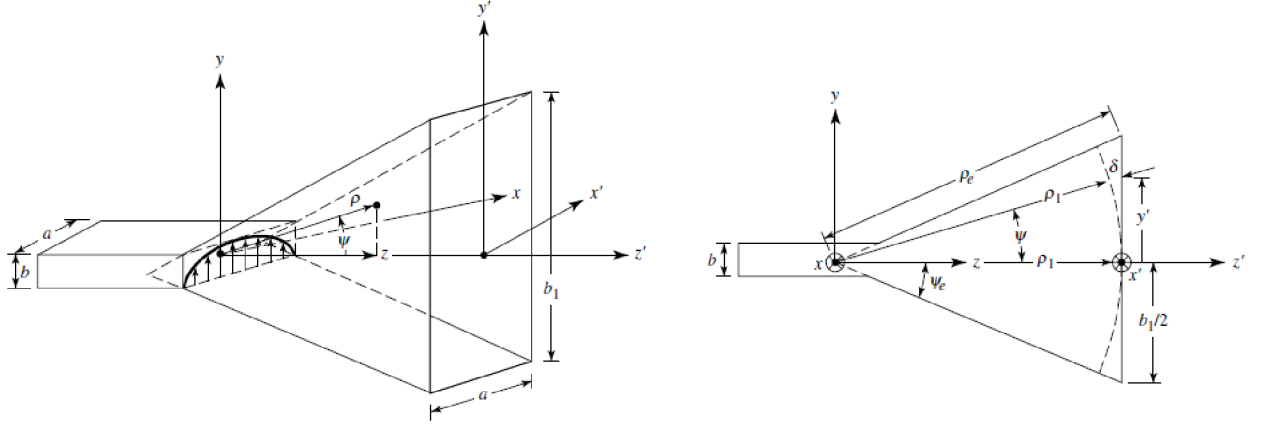
3) Bulunan G_H değeri kullanılarak H-düzlem sektörel horn antenin yönlendiriciliği;

$$D_H = \frac{b}{h} \frac{G_H}{\sqrt{\frac{50}{\rho_h / \lambda}}} \quad (2.35)$$

ifadesi yardımıyla hesaplanabilir.

2.1.2 E-Düzlem Horn Anten

E-düzlem horn anten yapısında kanat elektrik alan doğrultusunda açılır. Şekil 2.7'de örnek bir E-düzlem sektörel horn antenin geometrisi görülmektedir.



Şekil 2.7 E-düzlem sektörel horn anten geometrisi (Balanis, 2005).

Yapılacak olan teorik analizde, aynen H-Düzlem sektörel horn antende olduğu gibi, mod uyarma tekniği kullanılacaktır. H-Düzlem horn anten için yazılan (2.1)- (2.5) açıklık alan ifadeleri E-Düzlem sektörel horn anten için aşağıdaki gibi verilebilir (Balanis, 2005) ;

$$E'_z = E'_x = H'_y = 0 \quad (2.36)$$

$$E'_y(x', y') \approx E_1 \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-j[ky'^2/(2\rho_1)]} \quad (2.37)$$

$$H'_z(x', y') \approx jE_1 \cos\left(\frac{\pi}{k\eta a} x'\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-j[ky'^2/(2\rho_1)]} \quad (2.38)$$

$$H'_x(x', y') \approx -\frac{E_1}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-j[ky'^2/(2\rho_1)]} \quad (2.39)$$

$$H'_x(x', y') \approx -\frac{E_1}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-j[ky'^2/(2\rho_1)]} \quad (2.40)$$

$$\rho_1 = \rho_e \cos \psi_e \quad (2.41)$$

Eşdeğer akım yoğunlukları ise (Balanis, 2005);

$$J_y = -\frac{E_1}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-jk\delta(y')} , -\frac{a}{2} \leq x' \leq \frac{a}{2} \quad (2.42)$$

$$M_x = E_1 \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-jk\rho(y')} , -\frac{b_1}{2} \leq y' \leq \frac{b_1}{2} \quad (2.43)$$

olarak yazılabilir. Tanımlanan bu bölge dışındaki tüm bölgelerde $J_s = M_s = 0$ ifadesi geçerlidir. Akım yoğunluklarının bulunmasından sonra ışınan alanların bulunması H-Düzlem sektörel horn antende yapılan işlemlerle benzerlik göstermektedir.

E-Düzlem sektörel horn antenin yönlendiriciliğinin hesaplanabilmesi için yapılması gereken işlemler aşağıda verilmiştir;

1) Öncelikle B ifadesi;

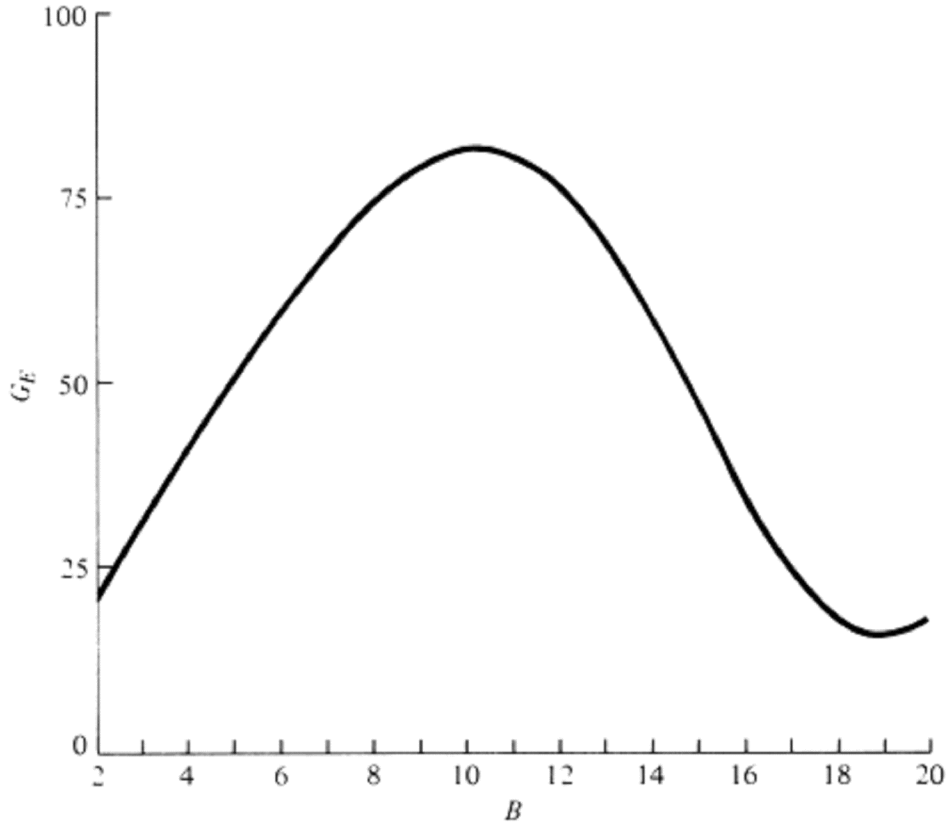
$$B = \frac{b_1}{\lambda} \sqrt{\frac{50}{\rho_e / \lambda}} \quad (2.44)$$

formülü kullanılarak hesaplanır.

2) Bulunan B değeri kullanılarak şekil 2.8 yardımıyla karşılık düşen G_E değeri bulunur. Ancak B değeri ikiden küçük ise;

$$G_E = \frac{32}{\pi} B \quad (2.45)$$

formülü kullanılabilir.



Şekil 2.8 A parametresinin bir fonksiyonu olarak G_H ifadesinin değişimi (Balanis, 2005).

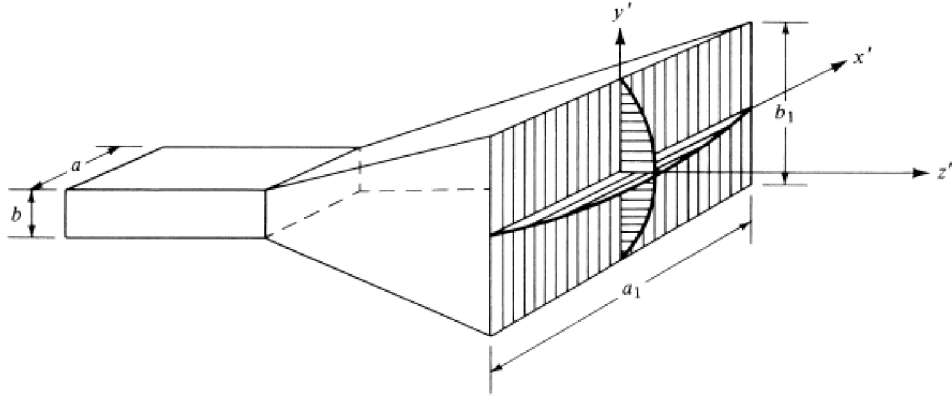
3) Son aşamada ise antenin yönlendiriciliği;

$$D_E = \frac{a}{\lambda} \frac{G_E}{\sqrt{\frac{50}{\rho_e / \lambda}}} \quad (2.46)$$

formülüyle hesaplanabilir.

2.1.3 Piramit Horn Anten

En çok kullanılan horn anten yapılarında birisi de pramit horn antenlerdir. Pramit horn antenlerde kanat hem E-düzleminde hem de H-düzleminde açılır. Şekil 2.9’da örnek bir pramit horn anten geometrisi görülmektedir.



Şekil 2.9 Piramit horn anten geometrisi (Balanis, 2005).

Önceki horn anten yapılarında olduğu gibi piramit horn antenin teorik analizinde de mod uyarma tekniği kullanılacaktır.

Horn anten açıklığı boyunca E-alan ve H-alanın teğetsel bileşenleri aşağıdaki gibi verilebilir (Balanis, 2005) ;

$$E'_y(x', y') = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-j\left[k\left(x'^2/\rho_2 + y'^2/\rho_1\right)/2\right]} \quad (2.47)$$

$$H'_x(x', y') = -\frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-j\left[k\left(x'^2/\rho_2 + y'^2/\rho_1\right)/2\right]} \quad (2.48)$$

olarak ifade edilebilir. Açıklık üzerindeki eşdeğer akım yoğunlukları ise;

$$J_y(x', y') = -\frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-j\left[k\left(x'^2/\rho_2 + y'^2/\rho_1\right)/2\right]} \quad (2.49)$$

$$M_x(x', y') = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-j\left[k\left(x'^2/\rho_2 + y'^2/\rho_1\right)/2\right]} \quad (2.50)$$

şeklindedir. Eşdeğer akım yoğunlukları bulunduktan sonra ışıyan alanların hesabı daha önceki horn antenlerde yapılan işlemlerle benzerdir.

Piramit horn antenin yönlendiriciliğinin hesaplanması için yapılması gereken işlemler aşağıda verilmiştir ;

1) A ve B ifaderi aşağıdaki formüller yardımıyla bulunur;

$$A = \frac{a_1}{\lambda} \sqrt{\frac{50}{\rho_h / \lambda}} \quad (2.51)$$

$$B = \frac{b_1}{\lambda} \sqrt{\frac{50}{\rho_e / \lambda}} \quad (2.52)$$

2) Bulunan A ve B ifadeleri kullanılarak sırasıyla şekil 2.6 ve şekil 2.8 yardımıyla G_E ve G_H ifadeleri bulunur. Fakat G_E veya G_H ifadelerinden herhangi biri ikiden küçük ise şu formüller yardımıyla hesaplanabilir;

$$G_E = \frac{32}{\pi} B \quad (2.53)$$

$$G_H = \frac{32}{\pi} A \quad (2.54)$$

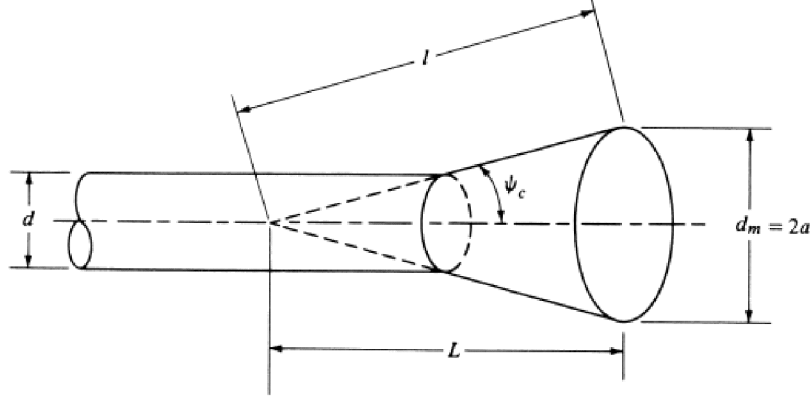
3) Piramit horn antenin yönlendiriciliği D_p ;

$$D_p = \frac{G_E G_H}{\frac{32}{\pi} \sqrt{\frac{50}{\rho_e / \lambda}} \sqrt{\frac{50}{\rho_h / \lambda}}} \quad (2.55)$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir.

2.1.4 Konik Horn Anten

Çok kullanışlı antenlerden bir diğeri de şekil 2.10’da gösterilen konik horn antenlerdir. Piramit horn anten, E-düzlem ve H- düzlem sektörel horn antenler dikdörtgen dalga kılavuzu kullanırlarken, konik horn antenler silindirik dalga kılavuzu kullanırlar.



Şekil 2.10 Konik horn anten geometrisi (Balanis, 2005).

Bir konik horn antenden ışınan alanlar detaylı bir şekilde Schorr ve Beck (1950) tarafından ele alınmıştır. Horn anten içerisindeki modlar silindirik koordinat sisteminde hesaplanır. Bu hesaplamalarda silindirik geometriden kaynaklı olarak Bessel ve Legendre polinomları kullanılır.

3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

3.1 Green Özdeşlikleri ve Sınırlandırılmış Ortamda Helmutz Denkleminin Çözümünün İntegral Gösterimleri

3.1.1 Genelleştirilmiş İkinci Green Teoremi

$U = U(p)$, $V = V(p)$, $f = f(p)$ fonksiyonları skalar fonksiyon; $A = A(p)$, $B = B(p)$ fonksiyonları ise vektörel fonksiyonlar olarak tanımlansın. Burada p noktası, iki ya da üç boyutlu uzayda tanımlı Ω domeninde bir nokta olsun.

Eğer U , V , B fonksiyonlarının birinci dereceden türevleri tanımlı ise, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\text{div}[v \text{gradu} - u \text{grad}v + uvB] = v[\Delta u + (B, \text{gradu}) + cu] - u[\Delta v - \text{div}(vB) + cv] \quad (3.1)$$

Burada c keyfi bir sabittir.

Bilindiği gibi:

$$\text{div}(fA) = f \text{div}A + (A, \text{grad}f) \quad (3.2)$$

İfadesi geçerli bir özdeşliktir. Burada $f = f(p)$ skaler ve $A = A(p)$ vektörel fonksiyonları yerlerine yazılırsa:

$$\text{div}(v \text{gradu}) = v \text{div}(\text{gradu}) + (\text{gradu}, \text{grad}v) = v\Delta u + (\text{gradu}, \text{grad}v) \quad (3.3)$$

İfadesi elde edilir. Benzer olarak:

$$\text{div}(u \text{grad}v) = v\Delta u + (\text{gradu}, \text{grad}v) \quad (3.4)$$

İfadesi de oldukça bilinen bir özdeşliktir. (3.2) özdeşliğine kullanarak:

$$\text{div}(uvB) = \text{div}[u(vB)] = u \text{div}(vB) + v(B, \text{gradu}) \quad (3.5)$$

İfadesi elde edilir. (3.3) ve (3.5) eşitlikleri yardımıyla (3.1) eşitliği kolayca elde edilebilir.

L ve M operatörleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Lu = \Delta u + (B, \text{gradu}) + cu \quad (3.6)$$

$$Mv = \Delta v - \text{div}(vB) + cv. \quad (3.7)$$

Burada $B = B(p)$, birinci dereceden kısmi türevi tanımlı keyfi bir vektörel fonksiyon ve c ise bir sabittir. Eşitlik (3.1) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$vLu - uMv = \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v + uvB) \quad (3.8)$$

D domeninde tanımlı Keyfi bir $A = A(p)$ vektörel fonksiyonu için aşağıdaki diverjans teoremi geçerlidir:

$$\int_V \operatorname{div} A dv = \int_S (A, n) ds \quad (3.9)$$

Bu teorem (3.8) ifadesine uygulanırsa “İkinci Green Özdeşliği” elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_D (vLu - uMv) d\tau &= \int_D \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v + uvB) d\tau = \\ &= \int_S (v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v + uvB, n) ds = \int_S \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} + uv(B, n) \right\} ds \end{aligned} \quad (3.10)$$

Burada $d\tau$ terimi D hacminin birim elemanını, S bu hacmi çevreleyen yüzeyi, n ise bu yüzeyin birim normalini ifade etmektedir.

Helmoltz denkleminin uygun olması açısından $B(p) = 0$ ve $c = k^2$ olarak kabul edilsin. Bu durumda L ve M operatörlerinin birbirlerine denk olması durumu söz konusu olacaktır. Dolayısıyla (3.10) ifadesi:

$$\int_D (vLu - uLv) d\tau = \int_S \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right\} \quad (3.11)$$

Olarak yazılabilir. Bu ifade de aynı şekilde “İkinci Green Özdeşliği”nin bir formudur.

3.1.2 Genelleştirilmiş Birinci Green Teoremi

(3.1) ifadesinden aşağıdaki eşitlik elde edilebilir:

$$v(\Delta u + k^2 u) + (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) - k^2 uv = \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) \quad (3.12)$$

Yani;

$$vLu + (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) - k^2 uv = \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) \quad (3.13)$$

Aynı şekilde bu formüle diverjans teoremi uygulanırsa:

$$\int_D vLu d\tau + \int_D \{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) - k^2 uv\} d\tau = \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (3.14)$$

İfadesi ede edilir ki bu ifade “ Birinci Green Özdeşliği ” olarak bilinir.

3.2 İki Boyutlu Uzayda Üçüncü Green Özdeşliği ve Helmholtz Denkleminin Temel Çözümü

$\psi = \psi(p)$ fonksiyonu, iki boyutlu R^2 uzayında tanımlı D domenindeki homojen olmayan Helmholtz denkleminin çözümü olarak kabul edilsin.

$$L\psi \equiv \Delta\psi + k^2\psi = f \quad (3.15)$$

Burada $f = f(p)$ fonksiyonu D domeninde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun.

$G(q, p)$ ifadesi, D domeninde tanımlı q ve p nin bir fonksiyonu olup aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$1) \quad L_p G(q, p) = L_q G(q, p) = 0, \quad q, p \in \bar{D}, \quad q \neq p \quad (3.16)$$

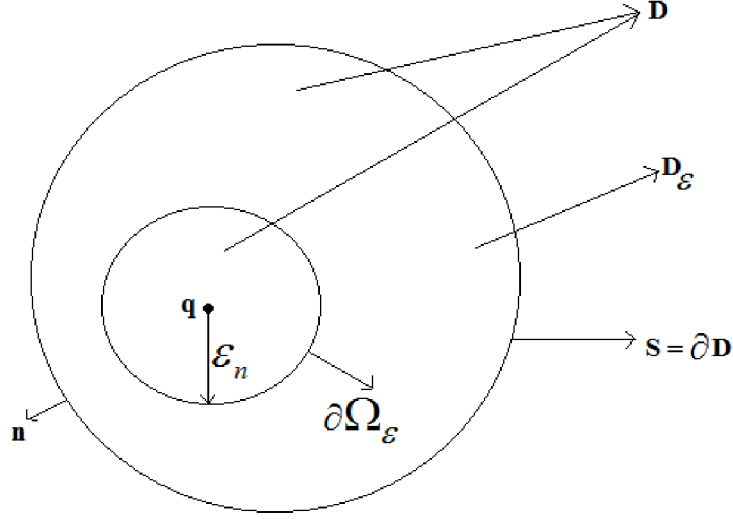
Burada L_p ve L_q , L operatörünün sırasıyla sadece $q = (x_q, y_q)$ ve $p = (x_p, y_p)$ noktalarındaki gösterimleridir.

2) $G(q, p)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$G(q, p) = -\frac{1}{2\pi} \ln|q - p| + H(q, p), \quad q, p \in \bar{D} \quad (3.17)$$

Burada $R = |q - p|$ ifadesi q ve p noktaları arasındaki mesafe ve $H(q, p)$ ise sürekli bir fonksiyondur. $G(q, p)$ ifadesi, iki boyutlu uzayda Helmholtz denkleminin esas çözümü olarak isimlendirilebilir.

Şimdi q noktasının D domeninde sabitlendiği düşünölsün. q merkezli, ε yarıçaplı bir Ω_ε diskinin olduğü düşünölsün. D_ε , $D_\varepsilon = D \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$ şeklinde tanımlı bir domen olsun. Ω_ε diskinin sınır konturu $\partial\Omega_\varepsilon$ ile elde edilebilir.



Şekil 3.1 R^2 uzayında Ω_ϵ diski ve D_ϵ domeninin görünümü (Türk, 1998)

$G(q, p)$ ifadesi D_ϵ domeninde tanımlı düzgün bir fonksiyon olsun. Dolayısıyla $v(p) \equiv G(q, p)$ ve $u(p) \equiv \psi(p)$ seçilip (3.13) denklemi “İkinci Green Özdeşliği”ne D_ϵ domeninde uygulanırsa:

$$\int_{D_\epsilon} \{G(q, p)L_p\psi(p) - \psi(p)L_pG(q, p)\} d\tau_p = \int_{s \cup \partial\Omega_\epsilon} \left\{ G(q, p) \frac{\partial \psi(p)}{\partial n_p} - \psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} \right\} ds_p \quad (3.18)$$

İfadesi elde edilir. (3.16) ifadesinden dolayı $L_pG(q, p) = 0$, $p \in D_\epsilon$ olur ve sonuç olarak (3.18) ifadesi:

$$\int_{D_\epsilon} G(q, p)L_p\psi(p) d\tau_p = \int_{s \cup \partial\Omega_\epsilon} \left\{ G(q, p) \frac{\partial \psi(p)}{\partial n_p} - \psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} \right\} ds_p \quad (3.19)$$

Halini alır.

$$L\psi(p) = f(p) \quad (3.20)$$

$$L_pG(q, p) = L_qG(q, p) = 0 \quad ; \quad q \neq p \text{ için} \quad (3.21)$$

$$G(q, p) = -\frac{1}{2\pi} \ln|q - p| + H(q, p) \quad ; \quad \text{İki boyutlu çözümü} \quad (3.22)$$

$$G(q, p) = -\frac{1}{4\pi|q - p|} + H(q, p) \quad ; \quad \text{Üç boyutlu çözümü} \quad (3.23)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 G(q, p) = 0 \quad (3.24)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \frac{\partial G(q, p)}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{4\pi} \quad (3.25)$$

(3.19) ifadesi; (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.26) ve (3.27) formülleri yardımıyla düzenlenirse (3.28)'deki integral gösterimi elde edilebilir. (3.24) ve (3.25)'ten:

$$\int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left\{ G(q, p) \frac{\partial \psi(p)}{\partial n_p} - \psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} \right\} ds_p = 0 + \alpha(q) \psi(q) \quad (3.26)$$

İfadesi elde edilebilir. Burada;

$$\alpha(q) = \begin{cases} 1, & q \in D \\ \frac{1}{2}, & q \in \partial D \\ 0, & q \notin D \end{cases} \quad (3.27)$$

Olarak belirtilebilir. Tüm işlemler yapıldığında sonuç olarak:

$$\int_{D_\varepsilon} G(q, p) f(p) d\tau - \int_{S_\varepsilon} \left\{ G(q, p) \frac{\partial \psi(p)}{\partial n_p} - \psi(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} \right\} ds_p = \alpha(q) \psi(q) \quad (3.28)$$

İfadesi elde edilir. Bu ifade “Üçüncü Green Özdeşliği” olarak bilinir. Elde edilen bu ifade ileriki kısımlarda iki boyutlu şekillerden kırınım konusunda sıklıkla kullanılacaktır. Dolayısıyla iki boyutlu olacak şekilde düzenlenmelidir. Bu düzenleme hacim integrasyonu yerine yüzey, hacmi çevreleyen yüzey integrasyonu yerine ise yüzeyi çevreleyen kontürün yazılmasından ibarettir. Tabi ki bu durumda Green fonksiyonunun iki boyutlu çözümü kullanılacaktır.

3.3 Keyfi Şekilli Mükemmel İletken Engellerden Dalga Kırınımına İlişkin İki Boyutlu Dirichlet Problemi

3.3.1 Düzgün ve kapalı şekillerden oluşan engeller için Dirichlet Kırınım Probleminin Ortaya Konması

3.3.1.1 R^2 Uzayında Kapalı Düzgün Konturlar ve Parametrizasyonları

D domenini sınırlayan, iki boyutlu R^2 uzayında tanımlı kapalı bir S kontürü düşünölsün. Basitlik açısından bu konturun sonsuz düzgün olduğu kabul edilsin. S konturu üzerinde

ilerlerken, D domeninin ilerleme doğrultusunun solunda kalacak şekilde olduğu kabul edilsin. S konturu $[-\pi, \pi]$ aralığında kendisine birebir karşılık düşen $\eta : [-\pi, \pi] \rightarrow S$ fonksiyonu ile parametrize edilsin.

$$\eta(\theta) = (x(\theta), y(\theta)), \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.29)$$

$$\eta(\theta) \in C^\infty; \quad \eta^{(K)}(-\pi+0) = \eta^{(K)}(\pi-0), \quad K = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.30)$$

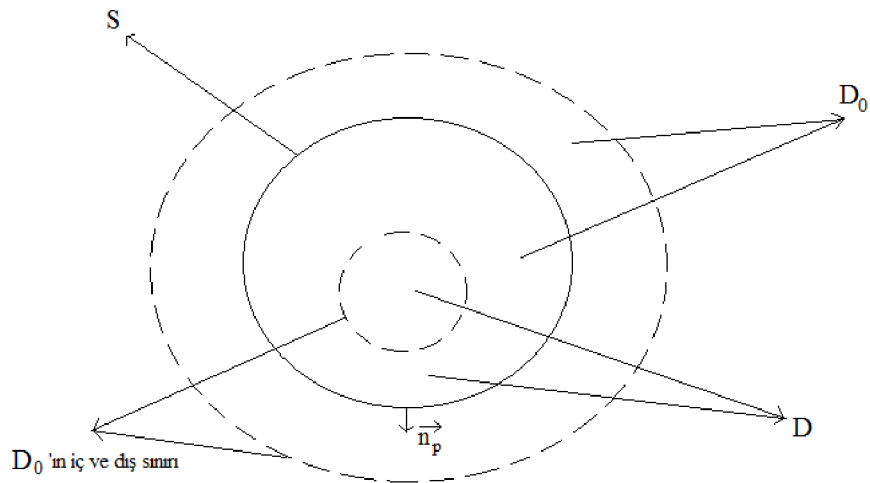
$$\left\{ [x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 \right\}^{1/2} > 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.31)$$

Burada $-\pi$ ile π arasında değişen θ argümanı, tüm S konturu boyunca belirlenen yönde sırasıyla x ve y koordinatlarını belirten $(x(\theta), y(\theta)) \in S$ noktalarını işaret eder. Burada $x(\theta)$ ve $y(\theta)$, $\eta(\theta) \in S$ noktasının koordinatlarıdır. Ayrıca $\eta^{(K)}(\theta)$, $\eta(\theta)$ fonksiyonunun K . Türevini ifade etmektedir.

3.3.1.2 Dirichlet Kırınım Problemi

S konturu; sonsuz ince, mükemmel iletken ve homojen uzunlamasına doğrultuda bir silindirin yatay kesiti olarak düşünölsün. E-polarizasyonlu elektromanyetik dalga durumunda, bilindiğı gibi, saçılan alan için Dirichlet sınır değeri problemini elde ederiz. Bu problem iki boyutludur ve aşağıda açıklanacaktır.

S konturunu içeren D_0 domeninde bir $U^0(p)$ fonksiyonu verilsin. $U^0(p)$ fonksiyonunun D_0 domeninde homojen Helmholtz denklemini sağladığı kabul edilsin.



Şekil 3.2 R^2 uzayında S konturu ve D_0 domeninin görünümü (Türk, 1998).

Bu durumda:

$$(\Delta + k^2)U^0(p) = 0, \quad p \in D_0 \quad (3.32)$$

Olarak yazılabilir. Burada $U^0(p)$ gelen alanı temsil etsin. Burada önemli olan, $R^2 \setminus S$ bölgesinde tanımlı olup S konturunun herhangi bir tarafında (iç veya dış) ikinci dereceden ve birinci dereceden kısmi türevlerinin her türlü sürekli olabildiği, saçılan alanı temsil eden $U^S(p)$ fonksiyonunun bulunmasıdır.

$$U^S(p) \in C^2(R^2 \setminus S) \cap C^1(\bar{D}) \cap C^1(R^2 \setminus D) \quad (3.33)$$

Bu ifade $U^S(p)$ saçılan alan ifadesinin $C^2(R^2 \setminus L)$ bölgesinde olduğunu ve sınırın her iki tarafı için limit değerinin olduğu anlamına gelir. Yani yüzeydeki herhangi bir p noktasının yüzeyin o noktadaki normali yönünde sonsuz küçük bir h değeri kadar ötesi ve gerisinde $U^S(p)$ fonksiyonunun ve normale göre türevinin limiti vardır ve şu şekilde gösterilebilir:

$$U^{S(+)}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} u(p + hn_p), \quad p \in S \quad (3.34)$$

$$U^{S(-)}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} u(p - hn_p), \quad p \in S \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial U^{S(+)}}{\partial n}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\partial u(p + hn_p)}{\partial n_p}, \quad p \in S \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial U^{S(-)}}{\partial n}(p) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\partial u(p - hn_p)}{\partial n_p}, \quad p \in S \quad (3.37)$$

Bu limitler tüm $p \in S$ noktaları için düzgündür. Burada n_p , $p \in S$ noktasından dışa doğru olan normal vektörüdür. Genel olarak $U^{(+)}(p) \neq U^{(-)}(p)$ olduğundan dolayı

$\frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(p) \neq \frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(p)$ olarak elde edilir. Bundan dolayı iki farklı fonksiyon vardır:

Bunlardan birisi D domeninin içinde diğeri de dışındadır.

Daha önce belirtildiği gibi $U^S(p)$ saçılan alan fonksiyonunun homojen helmholtz denklemini sağladığı kabul edilecektir. Dolayısıyla:

$$(\Delta + k^2)U^S(p) = 0, \quad p \in R^2 \setminus S \quad (3.38)$$

İfadesi geçerlidir. Bununla birlikte saçılan alanın Sommerfeld ışınma koşulunu ve S konturunun her iki yanında Dirichlet sınır koşulunu sağladığı düşünülecektir:

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} |p|^{1/2} \left(\frac{\partial U^s(p)}{\partial |p|} - ik U^s(p) \right) = 0 \quad (3.39)$$

$$U^{s(+)}(p) + U^0(p) = 0; \quad U^{s(-)}(p) + U^0(p) = 0, \quad p \in S \quad (3.40)$$

İşte (3.34) - (3.40) ifadelerinde tanımlanan problem Dirichlet sınır problemi olarak isimlendirilebilir. Burada belirtilmesi gereken (3.32) ifadesinden de görülebileceği gibi D_0 domeninin içinde $U^0(p)$ alanının kaynakları bulunmamaktadır. Bundan dolayı Dirichlet sınır problemi, kaynakların D domeninin içinde ya da dışında olmasına göre iki ayrı şekilde düşünülebilir. Kırınım teorisinde daha çok kaynakları dışarıda olduğu durum ile ilgilenilirken, dalga kılavuzu gibi yapılarda kaynağın içeride olduğu durumla ilgilenilir. Bu yüzden iki problem D bölgesinin içi ve dışında birbirlerinden tamamen ayrıktır ve birbirlerine herhangi bir etkileri ya da birbirleriyle herhangi bir bağlantıları yoktur. Bununla birlikte D bölgesi içerisindeki kaynaklarla ilgilenilmediği, kaynakların dışarıda olduğu durumlar için:

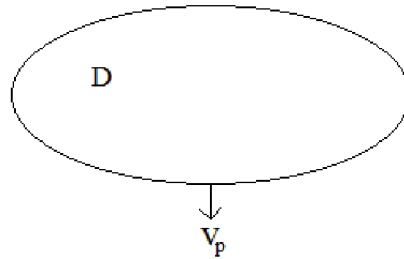
$$U^s(p) = -U^D(p), \quad p \in D \quad (3.41)$$

İfadesi yazılabilir.

3.3.2 İntegral Gösterimleri ve Sobolev Teoremi

$S = \partial D$ sınır konturu tarafından sınırlandırılan kapalı bir D domeni düşünölsün. $p \in S$ noktasında D domenine göre dışı doğru ve S yüzeyine normal olan ν_p ele alınsın. Homojen Helmholtz denklemini sağlayan bir $\psi(p)$ fonksiyonu tanımlansın.

$$(\Delta + k^2)\psi(p) = 0 \quad (3.42)$$



Şekil 3.3 R^2 uzayında S konturu tarafından sınırlandıran kapalı D domeninin görünümü (Türk, 1998).

(3.42) ifadesi kullanılarak (3.28) ifadesi düzenlenirse:

$$\alpha(q)\psi(q) = \int_S \left\{ \psi(p) \frac{\partial G(q,p)}{\partial v_p} - G(q,p) \frac{\partial \psi(p)}{\partial v_p} \right\} ds \quad (3.43)$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.42) ifadesinin sadece sınırlandırılmış D domeninde geçerli olduğu kabul edilecektir. $V = R^2 \setminus D$ domeninin, sınırlandırılmış D domeninin komplementi olarak ele alınsın. Bununla birlikte $S = \partial D = \partial V$ konturunun D ve V domenlerinin sınır konturları oldukları ve n_p vektörünün V domeninden dışarı doğru olan normal vektörü olduğu kabul edilsin.

Eğer $\psi(p)$ fonksiyonu homojen Helmholtz denkleminin bir çözümü ise ve bu fonksiyon ışıma koşulunu sağlıyorsa aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\alpha(q)\psi(q) = \int_S \left\{ \psi(p) \frac{\partial G(q,p)}{\partial n_p} - G(q,p) \frac{\partial \psi(p)}{\partial n_p} \right\} ds \quad (3.44)$$

Burada:

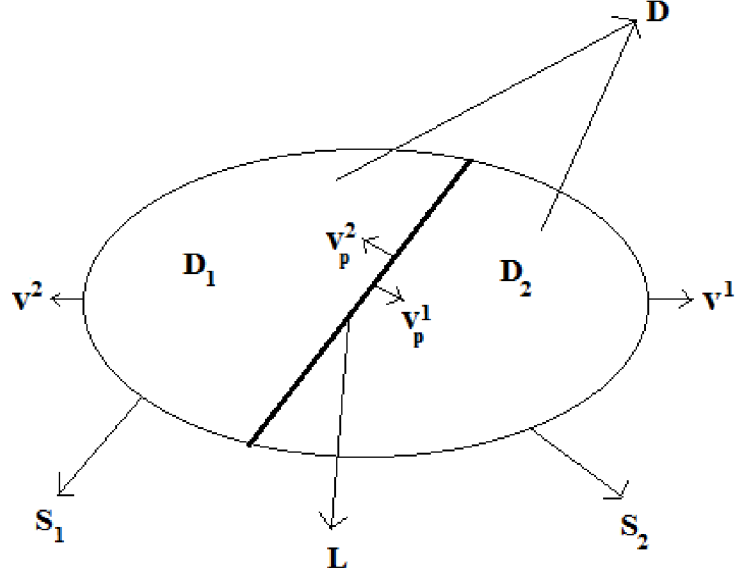
$$\alpha(q) = \begin{cases} 0, & q \in D \text{ (i.e. } q \notin \bar{V}) \\ \frac{1}{2}, & q \in S = \partial D \\ 1, & q \notin D \text{ (i.e. } q \in V) \end{cases} \quad (3.45)$$

olarak belirtilebilir. Şimdi aşağıdaki değişiklik yapılacak olunursa:

$$V_p = -n_p \quad (3.46)$$

(3.44) ifadesi şu hali alır:

$$\alpha(q)\psi(q) = - \int_S \left\{ \psi(q) \frac{\partial G(q,p)}{\partial v_p} - G(q,p) \frac{\partial \psi(p)}{\partial v_p} \right\} ds \quad (3.47)$$



Şekil 3.4 R^2 uzayında D_1, D_2 domenleri ve bu domenleri ayıran L parçasının görünümü (Türk, 1998).

Burada v_p , D domeninden dışa doğru olan normaldir ve (3.47) formülü, eğer $\psi(q)$ fonksiyonu $V = R^2 \setminus D$ bölgesi içinde tanımlı olup homojen Helmholtz denklemini sağlıyorsa geçerlidir. İntegral gösterimlerinin çok önemli bir sonucu Sobolev Teoremi olarak bilinir. D_1 ve D_2 olmak üzere R^2 domeninde ortak bir L parçasıyla sınırlandırılmış iki sınırlı domen düşünelim.

$$L = S_1 \cap S_2 \quad (3.48)$$

$\psi_1(p)$ ve $\psi_2(p)$ fonksiyonlarının her ikisi de sırasıyla $\bar{D}_1$ ve $\bar{D}_2$ domenlerinde homojen Helmholtz denkleminin çözümleri olsunlar:

$$(\Delta + k^2)\psi_1(p) = 0, \quad p \in \bar{D}_1 \quad (3.49)$$

$$(\Delta + k^2)\psi_2(p) = 0, \quad p \in \bar{D}_2 \quad (3.50)$$

Bununla beraber:

$$\psi_1(p) = \psi_2(p), \quad p \in L \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \psi_1(p)}{\partial v_p^1} = -\frac{\partial \psi_2(p)}{\partial v_p^2}, \quad p \in L \quad (3.52)$$

oldukları kabul edilsin. Burada ν_p^1 ve ν_p^2 ifadeleri sırasıyla S_1 ve S_2 konturlarının normalleridir ve bu normaller sırasıyla D_1 ve D_2 domenlerinden dışa doğrudur. Dolayısıyla ortak L parçası üzerindeki tüm noktalarda:

$$\nu_p^2 = -\nu_p^1, \quad p \in L \quad (3.53)$$

ifadesi geçerlidir. (3.52) ve (3.53) ifadelerinden dolayı L konturunun normalı doğrultusunda sabitlenmiş bir noktaya göre, L üzerinde $\psi_1(p)$ ve $\psi_2(p)$ ifadelerinin normale göre türevleri birbirlerine eşittir:

$$\frac{\partial \psi_1(p)}{\partial \nu_p^j} = \frac{\partial \psi_2(p)}{\partial \nu_p^j}, \quad p \in L, \quad j=1,2 \quad (3.54)$$

D_0 domeni aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$D_0 = (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2) \setminus L \quad (3.55)$$

bununla beraber yeni bir $\psi(p)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi belirtilmiş olsun:

$$\psi_0(p) = \begin{cases} \psi_1(p), & p \in (\bar{D}_1 \setminus L) \\ \psi_2(p), & p \in (\bar{D}_2 \setminus L) \end{cases} \quad (3.56)$$

$q \in D_0$ üzerinde noktalar alınsın. (3.42) ve (3.43) ifadelerinin D_1 ve D_2 domenlerinde kullanılması ve (3.56) ifadesi gereğince:

$$\psi_0(q) = \int_{S_1} \left\{ \psi_0(p) \frac{\partial G(q,p)}{\partial \nu_p^1} - G(q,p) \frac{\partial \psi_0(p)}{\partial \nu_p^1} \right\} ds, \quad q \in D_1 \quad (3.57)$$

$$0 = \int_{S_2} \left\{ \psi_0(p) \frac{\partial G(q,p)}{\partial \nu_p^2} - G(q,p) \frac{\partial \psi_0(p)}{\partial \nu_p^2} \right\} ds, \quad q \in D_1 \quad (3.58)$$

ifadeleri elde edilir. ν_p^1 ve ν_p^2 ifadelerinin tanımları gereği (3.57) ve (3.58) ifadeleri aşağıdaki eşitliğe sebebiyet verir:

$$\int_L \left\{ \psi_1(p) \frac{\partial G(q,p)}{\partial \nu_p^1} - G(q,p) \frac{\partial \psi_1(p)}{\partial \nu_p^1} \right\} ds = - \int_L \left\{ \psi_2(p) \frac{\partial G(q,p)}{\partial \nu_p^2} - G(q,p) \frac{\partial \psi_2(p)}{\partial \nu_p^2} \right\} ds \quad (3.59)$$

(3.58) ve (3.59) ifadeleri aşağıdaki sonucu verir:

$$\psi(q) = \int_S \left\{ \psi_0(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial v_p} - G(q, p) \frac{\partial \psi_0(p)}{\partial v_p} \right\} ds \quad (3.60)$$

Burada S konturu:

$$S = (S_1 \setminus L) \cup (S_2 \setminus L) = \partial D \quad (3.61)$$

D domeni ise:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup L \quad (3.62)$$

ile belirtilir.

Ayrıca (3.60) ifadesindeki v_p , S konturunun birim normaldir ve D domeninden dışa doğrudur. (3.60) ifadesinde elde edilen formül $q \in D_1$ için doğru olduğu gibi $q \in D_2$ noktaları için de doğrudur. Bir başka deyişle bu formül $q \in D_0$ üzerindeki tüm keyfi noktalar için geçerlidir.

$\psi_1(p)$ ve $\psi_2(p)$ fonksiyonları sırasıyla $\bar{D}_1$ ve $\bar{D}_2$ domenlerinde Helmholtz denkleminin çözümleri olduğundan ve $G(q, p)$ ifadesi keyfi $q \in D$ noktaları için düzgün olduğundan, (3.60) formülünden, $\psi(q)$ fonksiyonu D_0 'dan D domenine genişletilebilir. $G(q, p)$ fonksiyonunun bu özelliklerinden ve (3.60) eşitliğinden dolayı belirlenen $\psi(q)$ fonksiyonu:

$$\psi(q) = \begin{cases} \psi_1(q), & q \in D_1 \cup L \\ \psi_2(q), & q \in D_2 \cup L \end{cases}, \quad q \in D \quad (3.63)$$

D domeni içerisindeki herhangi bir noktada, L konturu üzerindeki noktalar da dahil, homojen Helmholtz denklemini sağlar.

$\psi_1(q)$ ve $\psi_2(q)$ adlı iki fonksiyon tanımlansın. Bu fonksiyonlar sırasıyla $\bar{D}_1$ ve $\bar{D}_2$ domenlerinde tanımlı olup S_1 ve S_2 konturlarıyla sınırlanmış olsun. Ayrıca bu konturlar ortak parça olarak L konturunu içersin. Eğer $\psi_1(q)$ ve $\psi_2(q)$ fonksiyonları:

- 1) D_1 ve D_2 domeninde homojen Helmholtz denklemini,
- 2) (3.51) ve (3.52) ifadesindeki şartları,

sağarlarsa bu durumda (3.63) ifadesindeki $\psi(q)$ fonksiyonu $D = \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ domeni içerisinde homojen Helmholtz denklemini sağlar.

İşte bu durum Sobolev Teoremi olarak bilinir. Diğer bir deyişle, bu teorem şu anlama gelir:

Eğer homojen Helmholtz denkleminin $\psi_1(q)$ ve $\psi_2(q)$ çözümleri $\bar{D}$ domeninin karşılık düşen $\bar{D}_1$ ve $\bar{D}_2$ alt domenlerinde tanımlanmış ve $\psi_1(q)$ ve $\psi_2(q)$ ifadeleri (3.51) ve (3.52) şartlarını sağlıyorsa bu durumda bu iki fonksiyon, $\bar{D}$ domeninde homojen Helmholtz denkleminin çözümü olan tek bir $\psi(q)$ fonksiyonunun iki parçası olarak düşünülebilir.

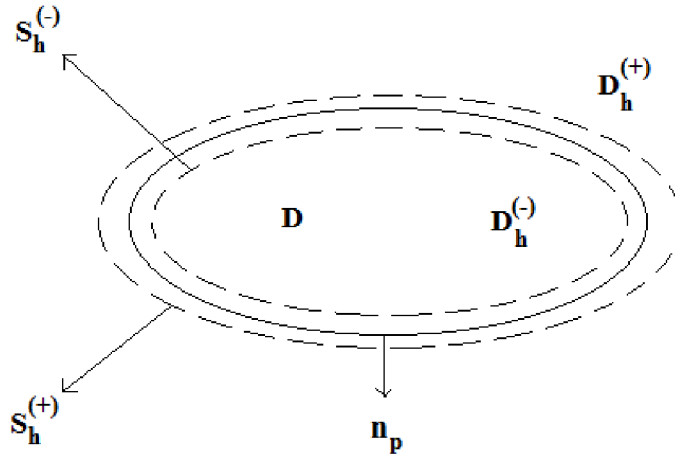
Bu teorem saçılan alanın gösterimi kısmında kullanılacak olup, konturu Dirichlet sınır koşulunu sağlayan iki bölümden oluşan kapalı bir domeni genelleştirilmiş şekilde ifade etmeye yarayacaktır.

3.3.3 Saçılan Alanın İntegral Gösterimi

(3.32)-(3.40) ifadelerinde belirtilen, D domenli ve $S = \partial D$ konturu ile sınırlı, Dirichlet kırınım sınır problemini ele alınsın. Bu amaçla iki kontur tanımlansın:

$$S_h^{(+)} = \{p + hn_p : p \in S\} \quad (3.64)$$

$$S_h^{(-)} = \{p - hn_p : p \in S\} \quad (3.65)$$



Şekil 3.5 R^2 uzayında $D_h^{(+)}, D_h^{(-)}$ domenleri ve bu domenleri sınırlayan $S_h^{(+)}$ ve $S_h^{(-)}$ konturlarının görünümü (Türk, 1998).

Bu konturların, p noktasının tüm S konturu üzerinde tanımlı olduğu varsayılarak, biri $p + hn_p$, diğeri de $p - hn_p$ noktalar setinden oluştuğu varsayılınsın. n_p , S konturuna göre dışarı

yönde olacak şekilde, S konturunun normali olsun ve $h > 0$ olmak üzere çok küçük bir pozitif parametre olarak kabul edilsin.

$U^s(p)$ Saçılan alan ifadesinin D domeninde ve $R^2 \setminus D$ domeninde homojen Helmholtz denklemini sağladığı ve ışıma koşuluna da uyduğu varsayılın. Böylece $S_h^{(+)}$ ve $S_h^{(-)}$ arasındaki tampon bölge hariç içeride ve dışarıda kalan bölgelerde (3.66) ve (3.67) eşitlikleri elde edilebilir.

$$\int_{S_h^{(-)}} \left\{ U^s(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial U^s(p)}{\partial n_p} \right\} ds = \begin{cases} U^s(q), & q \in D_h^{(-)} \\ 0, & q \in D_h^{(+)} \end{cases} \quad (3.66)$$

$$- \int_{S_h^{(+)}} \left\{ U^s(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial U^s(p)}{\partial n_p} \right\} ds = \begin{cases} 0, & q \in D_h^{(-)} \\ U^s(q), & q \in D_h^{(+)} \end{cases} \quad (3.67)$$

Burada $D_h^{(-)}$ domeni $S_h^{(-)}$ konturu ile sınırlandırılmıştır. $D_h^{(+)}$ domeni ise $S_h^{(+)}$ konturundan dışa doğru olan kısımdır. Burada dikkat edilmesi gereken (3.66) ve (3.67) formüllerinin her ikisinde de n_p normalinin yönünün aynı olduğudur.

$q \in R^2 \setminus D_h$ üzerinde keyfî bir nokta seçilsin ve bu nokta sabitlensin. $U^s(p)$ ve $\frac{\partial U^s(p)}{\partial n_p}$

fonksiyonları $\bar{D}$ ve $R^2 \setminus D$ domenlerinde sürekli fonksiyonlar olarak düşünülebilir. Küçük $h \geq 0$ değerleri için $G(q, p)$ fonksiyonu, seçilen q noktası ve $p \in S_h^{(+)}$ ya da $p \in S_h^{(-)}$ için sonsuz düzgündür. İşte bu yüzden $h \rightarrow +0$ iken (3.66) ve (3.67) eşitliklerinin sol tarafındaki ifadeler sonlu limit değerlerine sahiptir ve limitler aynı integrallere eşittirler. Dolayısıyla (3.66) ve (3.67) denklem takımı (3.68) ve (3.69) denklemlerine dönüştürülebilir.

$$\int_S \left\{ U^{s(-)}(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial U^{s(-)}(p)}{\partial n} \right\} ds = \begin{cases} U^s(q), & q \in D \\ 0, & q \in R^2 \setminus \bar{D} \end{cases} \quad (3.68)$$

$$- \int_S \left\{ U^{s(+)}(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} - G(q, p) \frac{\partial U^{s(+)}(p)}{\partial n} \right\} ds = \begin{cases} 0, & q \in D \\ U^s(q), & q \in R^2 \setminus \bar{D} \end{cases} \quad (3.69)$$

Bu ifadelerin taraf tarafa toplanmasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$U^s(q) = \int_S \left\{ -\delta U^s(p) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n_p} + G(q, p) \delta \frac{\partial U^s(p)}{\partial n} \right\} ds, \quad q \in R^2 \setminus S \quad (3.70)$$

Burada;

$$\delta U^S(p) = U^{S(+)}(p) - U^{S(-)}(p) \quad (3.71)$$

$$\delta \frac{\partial U^S}{\partial n}(p) = \frac{\partial U^{S(+)}}{\partial n}(p) - \frac{\partial U^{S(-)}}{\partial n}(p) \quad (3.72)$$

olarak belirtilebilir.

Burada belirtilmesi gereken (3.70) denkleminin elde edilmesinde hiçbir sınır koşulu kullanılmamış olmasıdır. Bu yüzden (3.70) ifadesi, (3.32)-(3.40) ifadelerini sağlayan keyfi $U^S(q)$ fonksiyonunun integral gösterimi olarak düşünülebilir. (3.32)-(3.40) ifadelerini sağlayan bir $U^S(q)$ fonksiyonunu ele alalım. Eğer;

$$\delta U^S(p) = \delta \frac{\partial U^S}{\partial n}(p) = 0, \quad p \in S \quad (3.73)$$

olarak belirtilirse (3.70) ve (3.73) ifadeleri gereğince ;

$$U^S(q) \equiv 0 \quad (3.74)$$

olarak elde edilir. Bu sonuç biraz garip görünebilir ama aslında oldukça normaldir. Çünkü Sobolev Teoremi, $U^S(p)$ fonksiyonunun tüm uzayında homojen Helmholtz denkleminde uyduğu durumda kullanılabilir. Dahası, Bu çözüm ışıma koşulunu da sağlamaktadır fakat doğal olarak böyle bir çözümün olması fiziksel açıdan mümkün değildir çünkü engel olmaması durumu hariç hiçbir durumda saçılan alanın olmaması mümkün değildir.

Şimdi Dirichlet sınır koşulu (3.70) ifadesine uygulansın. Bilindiği gibi yüzey üzerinde toplam alan sıfır olacaktır. Sınırın her iki bölgesi için ifade yazılacak olunursa (3.75) ifadesi kolayca elde edilebilir;

$$\delta U^S(p) = U^{S(+)}(p) - U^{S(-)}(p) = 0, \quad p \in S \quad (3.75)$$

Bundan dolayı Dirichlet kırınım sınır probleminde saçılan alan ifadesinin integral gösterimi;

$$U^S(q) = \int_S G(q, p) \delta \frac{\partial U^S}{\partial n}(p) ds, \quad q \in R^2 \setminus S \quad (3.76)$$

şeklinde olacaktır. (3.75) eşitliğinin sol yanının, S konturu çevresinde sürekli olduğu kolayca ispat edilebilir. (3.75) eşitliğinin sağ yanı da eşitliğin kendisinden dolayı sürekli. Dolayısıyla saçılan alan ifadesi $U^S(q)$, (3.41) ifadesi kullanılarak $q \in S$ için hesaplanırsa;

$$U^S(q) = U^{S(+)}(q) = U^{S(-)}(q) = -U^0(q), \quad q \in S \quad (3.77)$$

olarak elde edilir. Buradan da S konturu üzerindeki integral gösterimi;

$$U^S(q) = \int_S G(q, p) \delta \frac{\partial U^S}{\partial n}(p) ds, \quad q \in R^2 \quad (3.78)$$

olarak gösterilebilir. Burada önemli olan $\delta \frac{\partial U^S}{\partial n}(p)$ ifadesinin sıfır olamayacağıdır. Eğer bu ifade sıfır olursa (3.78) eşitliği gereğince $U^S(q) \equiv 0$ olarak elde edilir.

Ancak bu işlem sadece Dirichlet sınır koşulu için geçerlidir. Çünkü ifadeye bakıldığında integrasyonun S konturu üzerinde yapıldığı görülür. Eğer $q \in S$ durumu düşünülürse bu durum $q = p$ olması anlamına gelir. Haliyle $G(q, p)$ fonksiyonunun karakteristiği gereğince tekillik ortaya çıkacaktır. Ancak Green fonksiyonunun $\varepsilon \rightarrow 0$ iken;

$$G(q, p) \Big|_{|q-p|=+\varepsilon} = G(q, p) \Big|_{|q-p|=-\varepsilon} ; \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ için}$$

özelliğinden dolayı Dirichlet sınır koşulunda herhangi bir sorun olmaz. Buna karşın Neumann sınır koşulunun geçerli olduğu durumlarda integrasyonda $G(q, p)$ 'nin normale göre türevi kalır. Bu taktirde Green fonksiyonunun $\varepsilon \rightarrow 0$ iken;

$$\frac{\partial G(q, p)}{\partial n} \Big|_{|q-p|=+\varepsilon} \neq \frac{\partial G(q, p)}{\partial n} \Big|_{|q-p|=-\varepsilon} ; \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ için}$$

özelliğinden dolayı tekil nokta geçişinde süreksizlik göstermesi durumu söz konusu olacağından S konturunu kapsayacak şekilde yazılamaz.

3.3.4 Dirichlet Kırınım Problemi için Birinci Türden İntegral Denklemi

(3.78) denklemi (3.41) sınır şartında yerine konulacak olunursa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_S G(q, p) \delta \frac{\partial U^S}{\partial n}(p) ds = -U^0(q), \quad q \in S \quad (3.79)$$

Burada $Z_D(p)$ isimli yeni bir fonksiyon tanımlansın:

$$Z_D(p) = \delta \frac{\partial U^S}{\partial n}(p) \equiv \frac{\partial U^{S(+)}}{\partial n}(p) - \frac{\partial U^{S(-)}}{\partial n}(p) \quad (3.80)$$

Tanımlanan bu fonksiyonun, aşağıdaki birinci dereceden integral denklemini sağlayan, bilinmeyen bir fonksiyon olarak düşünölsün.

$$\int_S G(q, p) Z_D(p) ds = -U^0(q), \quad q \in S \quad (3.81)$$

Buradaki en önemli nokta $Z_D(p)$ fonksiyonunun doğru olarak bulunmasıdır. Burada $Z_D(p)$ yüzeyin ya da konturun akım yoğunluğunu temsil etmektedir ve asıl amaç saçılan alanın bulunması olduğu için $Z_D(p)$ ifadesinin doğru olarak bulunması temel hedeftir.

(3.81) denkleminin çözülerek $Z_D(p)$ ifadesinin, bu denklemin çözümü olarak, bulunduğu varsayılın. (3.78) denklemine göre:

$$U(q) = \int_S G(q, p) Z_D(p) ds, \quad q \in R^2 \quad (3.82)$$

olur. Bu fonksiyonun (3.32)-(3.40) ifadelerinde verilen Dirichlet sınır değer probleminin çözümü olması umulmaktadır; fakat bu gerçek ispat edilmelidir.

Öncelikle (3.33) ve (3.72) ifadelerinden:

$$\frac{\partial U^{s(+)}(p)}{\partial n}, \quad \frac{\partial U^{s(-)}(p)}{\partial n} \in C(S) \quad (3.83)$$

$$\delta \frac{\partial U^s}{\partial n}(p) \equiv \frac{\partial U^{s(+)}(p)}{\partial n} - \frac{\partial U^{s(-)}(p)}{\partial n} \in C(S) \quad (3.84)$$

koşulları sağlanmaktadır. Burada $C(S)$, S konturu üzerindeki sürekli fonksiyonlar kümesi olarak tanımlanabilir. İşte bu yüzden (3.81) ve (3.82) ifadelerindeki $Z_D(p)$ ifadesi kontur üzerinde sürekli olmalıdır.

$$Z(p) \in C(S) \quad (3.85)$$

3.3.5 Dirichlet Problemi İçin İntegral Denkleminin Bazı Niteleyici Özellikleri

(3.82) ifadesi yardımıyla $U(q)$ ifadesinin (3.32)-(3.40) ifadeleri ile belirtilen Dirichlet kısırlı problemnin çözümü olduğu ispatlanabilir. Bununla birlikte (3.82) ifadesinin sınır üzerinde integrasyonunun sürekli olduğu daha önce belirtilmişti. Bu özellikler dikkate alınarak;

$$U^{(+)}(q) = U^{(-)}(q) = \int_S G(q, p) Z_D(p) ds \quad (3.86)$$

$$U^{(+)}(q) = U^{(-)}(q) = -U^0(p) \quad (3.87)$$

$$U^{(+)}(q) + U^0(p) = 0; \quad U^{(-)}(p) + U^0(p) = 0 \quad (3.88)$$

ifadeleri yazılabilir. Yani $U(q)$ fonksiyonu Dirichlet sınır koşullarını sağlamaktadır. Dahası, R^2 serbest uzayında Helmholtz denkleminde ait $G(q, p)$ Green fonksiyonunun fonksiyonunun özelliklerinden dolayı $U(q)$ fonksiyonu, $R^2 \setminus S$ uzayında homojen Helmholtz denkleminin çözümüdür ve Sommerfeld ışıma koşulunu sağlar. Ayrıca $U(q)$ fonksiyonu sınırın her iki tarafı için (+) ve (-) limit değerlerine sahip olduğundan “tek tabaka potansiyeli” olarak da düşünülebilir. İşte bu yüzden (3.82) ifadesi aracılığıyla oluşturulan $U(q)$ ifadesi (3.32) - (3.40) ifadeleriyle belirtilen Dirichlet sınır probleminin bir çözümüdür.

Şimdi Dirichlet kırınım sınır değer probleminin $U^0(p) \equiv 0$ olması durumunda tek bir çözümünün olduğunu ve bundan dolayı (3.81) integral denkleminin de tek bir çözümünün olduğu ispat edilsin. Bu amaçla (3.81) integral eşitliğinin iki çözümü olduğu varsayalım. Bu çözümler $Z_D^{(1)}(p)$ ve $Z_D^{(2)}(p)$ olsun. Sonuç olarak;

$$Z_0(p) = Z_D^{(1)}(p) - Z_D^{(2)}(p) \quad (3.89)$$

fonksiyonu aşağıdaki homojen integral denkleminin çözümüdür;

$$\int_S G(q, p) Z_0(p) ds = 0, \quad q \in S \quad (3.90)$$

Bu durumda esas olarak amaçlanan fonksiyon denklemi;

$$U_0(q) = \int_S G(q, p) Z_0(p) ds, \quad q \in S \quad (3.91)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade homojen Dirichlet kırınım sınır değer probleminin çözümü olup, integral sınır üzerinde sürekli olduğundan aşağıdaki ifade geçerli olur;

$$U_0^{(+)}(q) = U_0^{(-)} = 0, \quad q \in S \quad (3.92)$$

Bunun sebebi ilk aşamada $U_0(q) = 0$ olarak kabul edilmesidir. Dolayısıyla problemin yalnızca sıfır çözümünün olacağı açıktır. Bu da;

$$U_0(q) = 0, \quad q \in R^2 \quad (3.93)$$

$$Z(q) = \frac{\partial U_0^{(+)}(q)}{\partial n} - \frac{\partial U_0^{(-)}(q)}{\partial n} = 0, \quad q \in S \quad (3.94)$$

anlamına gelir. Elde edilen bu ifadelerle bakılarak;

$$Z_D^{(1)}(q) = Z_D^{(2)}(q), \quad q \in S \quad (3.95)$$

olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla (3.81) integral eşitliğinin, iki ayrı çözüme sahip olamayacağı yapılan bu ispatla ortaya konmuştur.

3.3.6 Dirichlet Kırınım Problemi İçin İntegral Denkleminin Parametrizasyonlu Hale Dönüştürülmesi

Daha önce elde edilen (3.81) ifadesi yeniden yazılsın;

$$\int_S G(q-p) Z_D(p) ds = -U^0(q), \quad q \in S \quad (3.96)$$

Burada daha önce bahsedildiği gibi $Z_D(p)$ fonksiyonu bilinmeyen sürekli bir fonksiyondur ve $G(q-p)$ fonksiyonu ise iki boyutlu serbest uzayda aşağıdaki gibi verilen Green Fonksiyonudur;

$$G(q-p) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|q-p|) \quad (3.97)$$

S konturunun η parametrizasyonunun;

$$\eta: [-\pi, \pi) \rightarrow S \quad (3.98)$$

olacak şekilde verildiğini varsayalım. Burada;

$$\eta = \eta(\theta) \equiv (x(\theta), y(\theta)), \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.99)$$

olarak belirtilebilir. Buradaki amaç (3.96) ifadesinin $\eta(\theta)$ ifadesi aracılığıyla parametrize edilerek yeniden yazılmasıdır. q ve p noktalarının, θ ve τ parametrelerine karşılık düştüğü düşünölsün;

$$q = \eta(\theta); \quad p = \eta(\tau) \quad (3.100)$$

Buna göre;

$$R(\theta, \tau) = |\eta(\theta) - \eta(\tau)| = \left\{ [x(\theta) - x(\tau)]^2 + [y(\theta) - y(\tau)]^2 \right\}^{1/2} \quad (3.101)$$

olarak belirlenir. Bilinmeyen $z_D(\theta)$ ve verilen $g(\theta)$ fonksiyonu aşağıdaki ifadelerle göre dikkate alınsın;

$$z(\theta) = l(\theta) Z(\eta(\theta)), \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.102)$$

$$g(\theta) = -u^0(\eta(\theta)), \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.103)$$

Burada $l(\theta)$ fonksiyonu;

$$l(\theta) = \left\{ [x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 \right\}^{1/2} > 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.104)$$

olacak şekilde tanımlanır. S konturunun birim uzunluğunun,

$$ds = l(\theta) d\theta \quad (3.105)$$

olacağını göstermek kolaydır. (3.101) – (3.105) ifadeleri kullanılarak (3.96) ifadesi integral denklemi formatında aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir;

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_D[kR(\theta, \tau)] z_D(\tau) d\tau = g(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.106)$$

$$G_D(z) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(z) \quad (3.107)$$

Burada $z_D(\tau)$ bilinmeyen fonksiyondur. (3.106) denkleminin çözülmesinden önce $G[kR(\theta, \tau)]$ integral denkleminin çekirdeğindeki tekilliğin yapısının anlaşılması gerekmektedir.

3.3.7 $G_D[kR(\theta, \tau)]$ Fonksiyonunun Lokal Tekilliklerinin Açılımı

Tanım: $f(\theta)$ fonksiyonu $\theta \in [-\pi, \pi]$ için $C^m(-\infty, \infty)$ kümesinde $(-\infty, \infty)$ aralığında 2π ile periyodik sürekliliğe sahipse, bu fonksiyon bazı $m \geq 0$ değerleri için $C^m(Q^1)$ kümesine ait olarak belirtilebilir. Bu tanıma göre;

$$f(\theta) \in C^m(Q^1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\theta) \in C^m[-\pi, \pi] \text{ and} \\ f^{(K)}(-\pi+0) = f^{(K)}(\pi-0), K = 0, 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3.108)$$

Olarak belirtilebilir.

Teorem: $G[kR(\theta, \tau)]$ ifadesinin lokal tekillik açılımında herhangi bir $N > 1$ için aşağıdaki ifade geçerlidir;

$$G_D[kR(\theta, \tau)] = \frac{1}{2\pi} \ln|\delta| \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N A_n(\theta) \delta^n \right\} + F_N(\theta, \tau) \quad (3.109)$$

Burada;

$$\delta = \tau - \theta \quad (3.110)$$

Olarak belirtilebilir. $F_N(\theta, \tau)$, $|\theta - \tau| < 2\pi$ domeninde N . dereceden küçük tüm türevleri için sürekli olan bir fonksiyondur. $A_n(\theta)$ ise reel k değerleri için reel değerle bir fonksiyondur ve aşağıdaki koşulu sağlar;

$$A_n(\theta) \in C^\infty(Q^1); \quad (3.111)$$

Bununla birlikte $\tau - \theta \rightarrow 2\pi$ için (3.108) açılımı δ yerine $\delta_1 \equiv \delta - 2\pi$ yazılması durumunda da geçerlidir. $A_n(\theta)$ ve $F_N(\theta, \tau)$ fonksiyonları da $-\pi \leq \theta < \tau \leq \pi$ domeninde, δ yerine $\delta_2 \equiv \delta + 2\pi$ yazılması durumunda geçerliliklerini korurlar.

Kanıt: İyi bilindiği gibi birinci tür sıfırcı mertebeden Hankel fonksiyonu;

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z) \quad (3.112)$$

Olarak belirtilir. Burada $J_0(z)$ ve $Y_0(z)$ ifadeleri, sırasıyla sıfırcı mertebeden Bessel ve Neumann fonksiyonlarına karşılık düşerler. N=5 kabul edilip Bessel ve Neumann fonksiyonlarının açılımı yapılacak olunursa (Türk, 1998);

$$H_0^{(1)} = i \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2} \left[1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^2}{6} + z^6 \varphi_1(z) \right] + \varphi_2(z) \quad (3.113)$$

Olarak elde edilir. Burada $\varphi_1(z)$ ve $\varphi_2(z)$ fonksiyonları kompleks düzlemde tamamen analitiktirler. Elde edilen bu açılım (3.109) ifadesi yardımıyla düzenlenirse tekilliğe sebebiyet veren kısım olan $\ln(z)$ 'in açılımı şu şekilde verilebilir;

$$\ln[kR(\theta, \tau)] = \frac{1}{2} \ln \delta^2 + \varphi_5(\theta, \tau) = \ln|\delta| + \varphi_5(\theta, \tau) \quad (3.114)$$

Burada, $\varphi_5(\theta, \tau)$ ifadesi $|\tau - \theta| < 2\pi$ domeninde sonsuz türevi alınabilen bir fonksiyondur. Buradaki tekil kısmın $\delta = |\theta - \tau| \rightarrow 0$ olduğu kolayca görülebilir.

$\tau - \theta \rightarrow 2\pi$ olması durumunda, $(-\infty, \infty)$ aralığında $x(\theta), y(\theta)$ sonsuz düzgün ve periyodik olarak düşünülebilir. Bu sebepten ötürü yeni bir $\tilde{\theta}$ değişkeni $\tilde{\theta} = \theta + 2\pi$ olacak şekilde tanımlanır ve tüm θ ifadeleri yerine, $R(\theta, \tau) = R(\tilde{\theta}, \tau)$ gibi, $\tilde{\theta}$ yazılır.

3.3.8 Dirichlet Problemi İçin İntegral Denkleminin İkinci Dereceden Sonsuz Cebrik Eşitliğe İndirgenmesi

(3.106) ifadesi yeniden yazılsın;

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_D[kR(\theta, \tau)] z_D(\tau) d\tau = g(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.115)$$

$G_D[kR(\theta, \tau)]$ ifadesindeki tekillik bir önceki bölümde şu şekilde izah edilmişti;

$$G_D[kR(\theta, \tau)] = \frac{1}{2\pi} \ln|\delta| \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N A_n(\theta) \delta^n \right\} + F_N(\theta, \tau) \quad (3.116)$$

Bu ifade açılacak olunursa iki tekilliğin ortaya çıktığı görülür;

1. $\ln|\delta|$
2. $\ln|\delta| \delta^2 A_2(\theta) = (\tau - \theta)^2 \ln|\tau - \theta|$

Buradaki öncelikli amaç tekilliği ortadan kaldırabilmektir. Dolayısıyla yapılacak ilk işlem Green fonksiyonunun (Burada Hankel fonksiyonu) tekil kısmı, fonksiyonun tekilliğe sahip olmayan düzgün kısmından ayrılmalıdır. Bu şekilde;

$$G_D[kR(\theta, \tau)] = \frac{1}{2\pi} \left\{ \ln \left| 2 \sin \frac{\theta - \tau}{2} \right| + K_D(\theta, \tau) \right\}, \quad \theta, \tau \in [-\pi, \pi] \quad (3.117)$$

ifadesi elde edilir. Burada $K_D(\theta, \tau)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyondur;

$$K_D(\theta, \tau) \in C^1(Q^2) \quad (3.118)$$

$$\frac{\partial^2 K_D(\theta, \tau)}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 K_D(\theta, \tau)}{\partial \theta \partial \tau}, \frac{\partial^2 K_D(\theta, \tau)}{\partial \tau^2} \in L^2([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]) \quad (3.119)$$

(3.117) eşitliği integral denkleminde yerine konulursa;

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \ln \left| 2 \sin \frac{\theta - \tau}{2} \right| + K_D(\theta, \tau) \right\} Z_D(\tau) d\tau = g(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.120)$$

İfadesi elde edilir. Bu aşamada yapılacak işlem integral denkleminin her iki yanının Fourier dönüşümünün alınması suretiyle denklemin sayısal hale getirilmesidir (Karachua ve Türk, 2001);

$$Z_D(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{in\tau}, \quad \tau \in [-\pi, \pi] \quad (3.121)$$

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.122)$$

$$K_D(\theta, \tau) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{sn} e^{i(s\theta + n\tau)}, \quad \theta, \tau \in [-\pi, \pi] \quad (3.123)$$

Burada;

$$k_{sm} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_D(\theta, \tau) e^{-i(s\theta + m\tau)} d\theta d\tau \quad (3.124)$$

ile ifade edilebilir.

Öncelikle logaritmik kısmın Fourier açılımı yapılsın (Prudnikov vd., 1986);

$$\ln \left| 2 \sin \frac{\theta - \tau}{2} \right| = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |n|^{-1} z_n e^{in\tau} \quad ; \theta, \tau \in [-\pi, \pi] \quad (3.125)$$

fonksiyonların ortogonallik özelliklerinden biri de;

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\tau} d\tau = \delta_{n,s} (\text{kroncker delta}) = \begin{cases} 1; m = n \\ 0; m \neq n \end{cases} \quad (3.126)$$

Olmasıdır.

(3.121) - (3.125) ifadeleri (3.120) ifadesinde yerlerine konulup, (3.126) ifadesi de kullanılarak;

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} z_n e^{in\theta} - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{n,-m} z_m \right) e^{in\theta} = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in\theta} \quad ; \theta \in [-\pi, \pi] \quad (3.127)$$

ifadesi elde edilir. (3.127) eşitliğinin sağ ve sol taraflarının denkleştirilmesi ile;

$$-2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{0,-m} z_m = -2g_0 \quad (3.128)$$

$$|s|^{-1} z_s - 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{s,-m} z_m = -2g_s \quad ; s = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots \quad (3.129)$$

eşitlikleri bulunur. (3.128) ve (3.129) denklem çifti yeniden düzenlenirse;

$$\tau_n = \max(1, |n|^{1/2}) \quad ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.130)$$

$$\tilde{k}_{s,m} = k_{s,m} + \frac{1}{2} \delta_{s,0} \delta_{m,0} \quad (3.131)$$

Burada $\delta_{m,n}$ kronecker delta fonksiyonudur.

$$\tau_s^{-2} z_s - 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{k}_{s,-m} z_m = -2g_s \quad ; s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.132)$$

Bu denklem sistemi birinci türdür. Daha önce de belirtildiği gibi birinci tür cebrik sistemelerde kararsızlık problemi olduğundan dolayı bu denklem sisteminin ikinci türden cebrik sisteme dönüştürülmesi gerekir. Bir başka deyişle regülerize edilmesi gerekir. Bu amaçla bazı değişken dönüşümleri yapılacaktır. Şöyle ki;

$$\hat{z}_n = \tau_n^{-1} z_n \quad (3.133)$$

$$\hat{k}_{s,m} = -2\tau_s \tau_m \tilde{k}_{s,-m} \quad ; \hat{g}_s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.134)$$

$$\hat{z}_s + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}_{s,m} \hat{z}_m = \hat{g}_s \quad ; s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.135)$$

Daha önce de söylendiği gibi Analitik Regülerizasyon Yönteminde h sayısı N sonsuza giderken sonlu bir değere yakınsamaktadır. Bu durum şöyle açıklanabilir;

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (|s|+1)(|m|+1) |k_{sm}|^2 < \infty \quad (3.136)$$

(3.135) denklemi ikinci türden cebrik sisteme dönüştürülmesi sonucu şu format ortaya çıkacaktır;

$$(\hat{I} + \hat{K}) \hat{z} = \hat{g} \quad (3.137)$$

Burada;

$$\hat{K} = \left\{ \hat{k}_{sm} \right\}_{s,m=-\infty}^{\infty} ; \text{Kompakt operatör}$$

$$\hat{z} = \left\{ \hat{z}_n \right\}_{n=-\infty}^{\infty} ; \text{Bilinmeyen vektör sütunu (Bilinmiyor)}$$

$$\hat{g} = \left\{ \hat{g}_n \right\}_{n=-\infty}^{\infty} ; \text{Gelen dalg a (Bilinmiyor)}$$

olarak tanımlanır.

Artık Dirichlet sınır değer problemi sonsuz boyutlu ikinci dereceden lineer denklem sistemine indirgenmiştir. Böylece sınır değer probleminin sayısal olarak çözümü mümkün kılınmıştır. Teorik olarak boyut sonsuz olarak yazılabilse de pratikte hesaplamalarda kullanılacak bilgisayar sistemlerinin sınırlı hafıza elemanlarına sahip olmalarından dolayı optimum bir N değeri belirlenir. Dolayısıyla yapılan hata yüzdesi doğrudan seçilen N değerine bağlıdır. Bu doğrultuda (3.135) eşitliği düzenlenecek olunursa;

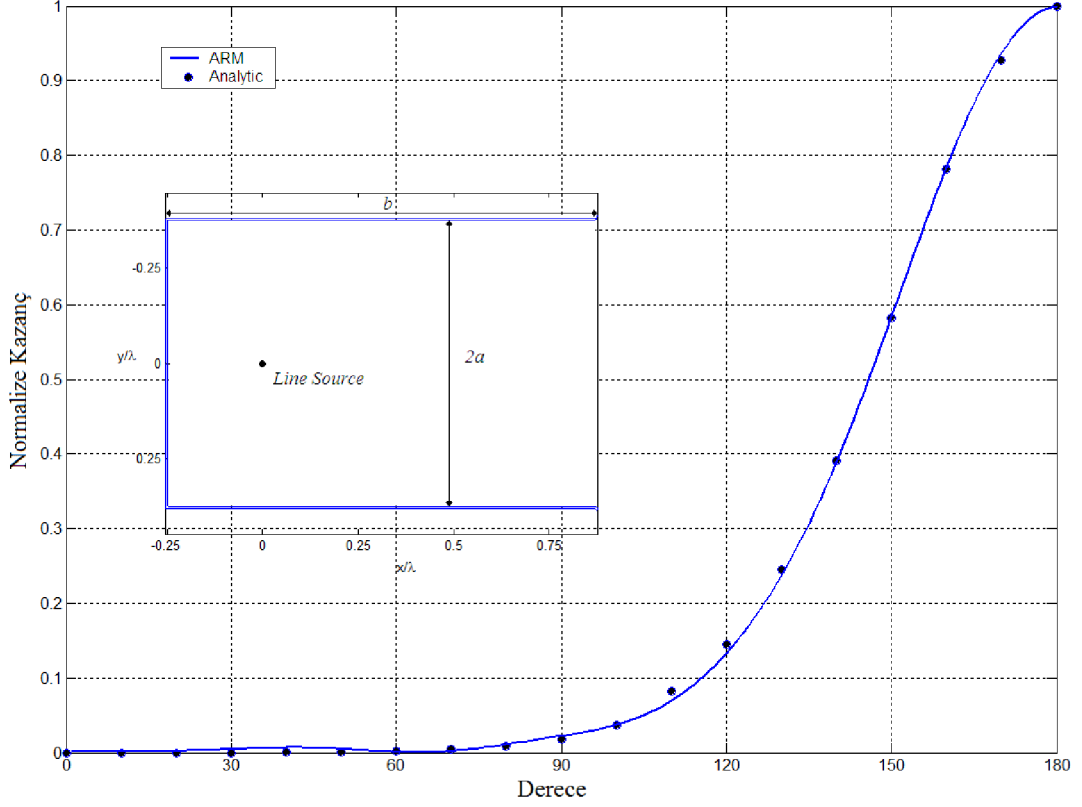
$$\hat{z}_s + \sum_{m=-N}^N \hat{k}_{s,m} \hat{z}_m = \hat{g}_s ; s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.138)$$

olarak elde edilir.

Analitik Regülerizasyon yöntemine göre eğer N değeri yeterince büyük seçilirse, bundan sonraki her N değeri için sistem kararlı bir davranış gösterir. N değerini etkileyen başlıca faktörler ise, kontur yapısı ve gelen dalga karakteristiğidir.

4. PARAMETRİZASYON VE SAYISAL SONUÇLAR

Çalışmanın bu bölümünde ilk olarak horn anten analiz ve tasarımlarına geçilmeden önce Analitik regülarizasyon yönteminin verifikasyonu yapılmıştır. Verifikasyon işleminde dalga kılavuzu ışıması için Weinstein'ın analitik çözümü kullanılmıştır



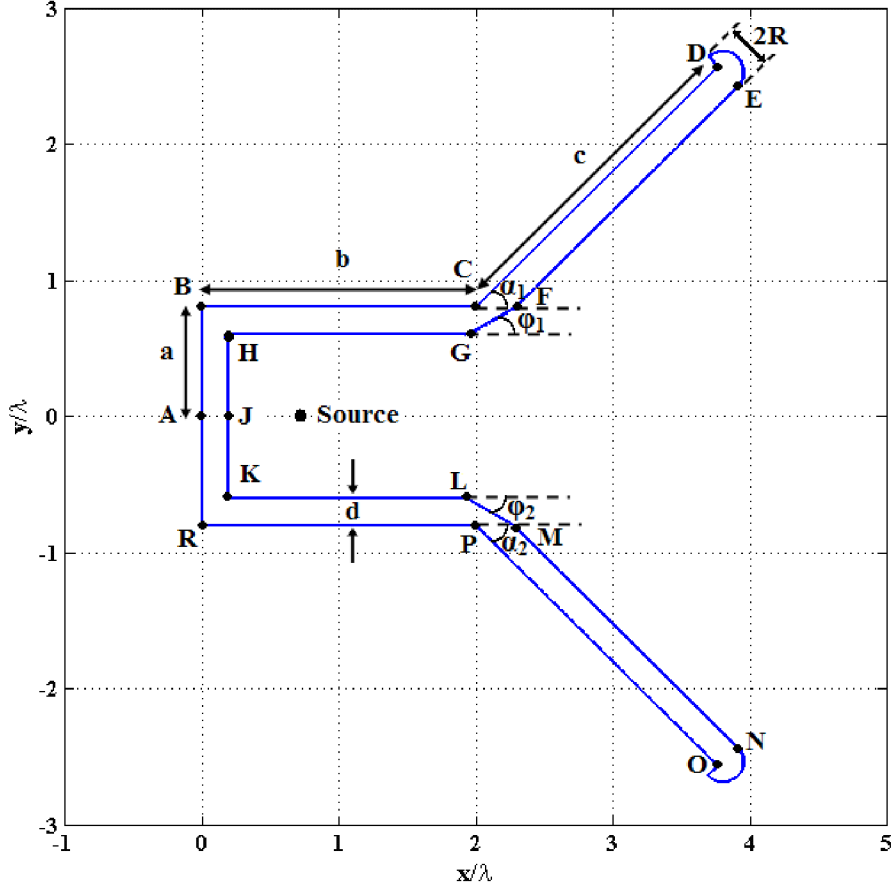
Şekil 4.1 Dalga kılavuzunun uzak alan paterni (Türk vd., 2010)

Şekil 4.1'den de görüldüğü gibi ARM prosedürü sonucunda elde edilen sonuç, analitik sonuca oldukça yakınsamaktadır.

Verifikasyon işleminin ardından horn anten analiz ve tasarım aşamasına geçilmiştir. Bu amaçla ilk olarak birbirinden farklı olmak üzere model 1, model 2, model 3 ve model 4 horn antenlerinin parametrik analizleri yapılmıştır. Daha sonra yan ve arka lobları düşürmek amacıyla model 5 ve model 6 horn antenleri tasarlanmış ve bu antenlerin analizleri yapılmıştır. Son olarak tüm bu modellerden elde edilen iyi sonuçlar birleştirilerek model 7 ve model 8 isimli birbirinden farklı iki horn anten tasarımı yapılmış ve bu antenlerin normalize ışıma paternleri verilmiştir.

4.1 Model 1 Horn Anteni

Parametrik analizi yapılan model 1 horn antenin boyutları $a=1.1\lambda$, $b=2\lambda$, $c=4$, $R=1$, $d=0.1\lambda$, $\alpha_1=\alpha_2=\varphi_1=\varphi_2=45^\circ$ olacak şekilde ayarlanmıştır. Antenin geometrisi şekil 4.2’de görülmektedir.



Şekil 4.2 Model 1 horn antenin geometrisi.

Bir önceki bölümde tanımlanan ARM prosedürü horn anten analizinde uygulanmıştır. Bu doğrultuda antenin enine kesiti, L konturu A noktasından R noktasına ve oradan da tekrar A noktasına gelinceye kadar karşılık düşen $\theta \in [-\pi, \pi]$ noktalarıyla modellenmiştir. Yapılan parametrizasyon işlemleri aşağıda görülmektedir.

Tablo 4.1 Horn konturunun parametrik tanımlaması ve segment uzunlukları

No	Region	Definition	Segment Length
1	AB	$-\pi \leq \theta < -\pi + 2L_{AB} \pi / L$	$L_{AB} = a$
2	BC	$-\pi + 2L_{AB} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{BC} \pi / L$	$L_{BC} = L_{AB} + b$
3	CD	$-\pi + 2L_{BC} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{CD} \pi / L$	$L_{CD} = L_{BC} + c$
4	DE	$-\pi + 2L_{CD} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{DE} \pi / L$	$L_{DE} = L_{CD} + \pi R d / 2$
5	EF	$-\pi + 2L_{DE} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{EF} \pi / L$	$L_{EF} = L_{DE} + c - d / \tan \alpha_1$
6	FG	$-\pi + 2L_{EF} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{FG} \pi / L$	$L_{FG} = L_{EF} + d / \sin \varphi_1$
7	GH	$-\pi + 2L_{FG} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{GH} \pi / L$	$L_{GH} = L_{FG} + b - db_1 - d$
8	HJ	$-\pi + 2L_{GH} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{HJ} \pi / L$	$L_{HJ} = L_{GH} + a - d$
9	JK	$-\pi + 2L_{HJ} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{JK} \pi / L$	$L_{JK} = L_{HJ} + a - d$
10	KL	$-\pi + 2L_{JK} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{KL} \pi / L$	$L_{KL} = L_{JK} + b - db_2 - d$
11	LM	$-\pi + 2L_{KL} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{LM} \pi / L$	$L_{LM} = L_{KL} + d / \sin \varphi_2$
12	MN	$-\pi + 2L_{LM} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{MN} \pi / L$	$L_{MN} = L_{LM} + c - d / \tan \alpha_2$
13	NO	$-\pi + 2L_{MN} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{NO} \pi / L$	$L_{NO} = L_{MN} + \pi R d / 2$
14	OP	$-\pi + 2L_{NO} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{OP} \pi / L$	$L_{OP} = L_{NO} + c$
15	PR	$-\pi + 2L_{OP} \pi / L \leq \theta < -\pi + 2L_{PR} \pi / L$	$L_{PR} = L_{OP} + b$
16	RA	$-\pi + 2L_{PR} \pi / L \leq \theta < \pi$	$L = L_{PR} + a$
* $db_{1,2} = d / \tan \varphi_{1,2} - d \tan \alpha_{1,2}$			

$$x = 0, \quad y = l - L_{AB} + a, \quad l \in [AB] \quad (4.1)$$

$$x = l - L_{AB}, \quad y = a, \quad l \in [BC] \quad (4.2)$$

$$x = (l - L_{BC}) \cos \alpha_1 + b, \quad y = (l - L_{BC}) \sin \alpha_1 + a, \quad l \in [CD] \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[\frac{d}{2} \sin \alpha_1 + b + c \cos \alpha_1 \right] + R \frac{d}{2} \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) - 2 \left(\frac{l - L_{CD}}{Rd} \right) \right] + X_0 \\ y &= \left[-\frac{d}{2} \cos \alpha_1 + a + c \sin \alpha_1 \right] + R \frac{d}{2} \sin \left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) - 2 \left(\frac{l - L_{CD}}{Rd} \right) \right] + Y_0 \end{aligned} \right\}, \quad l \in [DE] \quad (4.4)$$

$$X_0 = -(R-1) \frac{d}{2} \sin \alpha_1, \quad Y_0 = (R-1) \frac{d}{2} \cos \alpha_1$$

$$\left. \begin{aligned} x &= b + d \sin \alpha_1 + [c - l + L_{DE}] \cos \alpha_1 \\ y &= a - d \cos \alpha_1 + [c - l + L_{DE}] \sin \alpha_1 \end{aligned} \right\}, \quad l \in [EF) \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= d / \sin \alpha_1 + b - (l - L_{EF}) \cos \varphi_1 \\ y &= a - (l - L_{EF}) \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\}, \quad l \in [FG) \quad (4.6)$$

$$x = -l + L_{FG} + b - db_1, \quad y = a - d, \quad l \in [GH) \quad (4.7)$$

$$x = d, \quad y = -l + L_{GH} + a - d, \quad l \in [HJ) \quad (4.8)$$

$$x = d, \quad y = -l + L_{HJ}, \quad l \in [JK) \quad (4.9)$$

$$x = l - L_{JK} + d, \quad y = -a + d, \quad l \in [KL) \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= b - db_2 + (l - L_{KL}) \cos \varphi_2 \\ y &= -a + d - (l - L_{KL}) \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\}, \quad l \in [LM) \quad (4.11)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= d / \tan \alpha_2 + b + (l - L_{LM}) \cos \alpha_2 + 0.5d \sin \alpha_2 \\ y &= -a - (l - L_{LM}) \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\}, \quad l \in [MN) \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{d}{2} \sin \alpha_2 + b + c \cos \alpha_2 + R \frac{d}{2} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - 2 \left(\frac{l - L_{MN}}{Rd} \right) \right] + X_0 \\ y &= - \left(-\frac{d}{2} \cos \alpha_2 + a + c \sin \alpha_2 \right) + R \frac{d}{2} \sin \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - 2 \left(\frac{l - L_{MN}}{Rd} \right) \right] + Y_0 \\ X_0 &= -(R-1) \frac{d}{2} \sin \alpha_2, \quad Y_0 = -(R-1) \frac{d}{2} \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\}, \quad l \in [NO) \quad (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -(l - L_{NO}) \cos \alpha_2 + b + c \cos \alpha_2 \\ y &= (l - L_{NO} - c) \sin \alpha_2 - a \end{aligned} \right\}, \quad l \in [OP) \quad (4.14)$$

$$x = -l + L_{OP} + b, \quad y = -a, \quad l \in [PR) \quad (4.15)$$

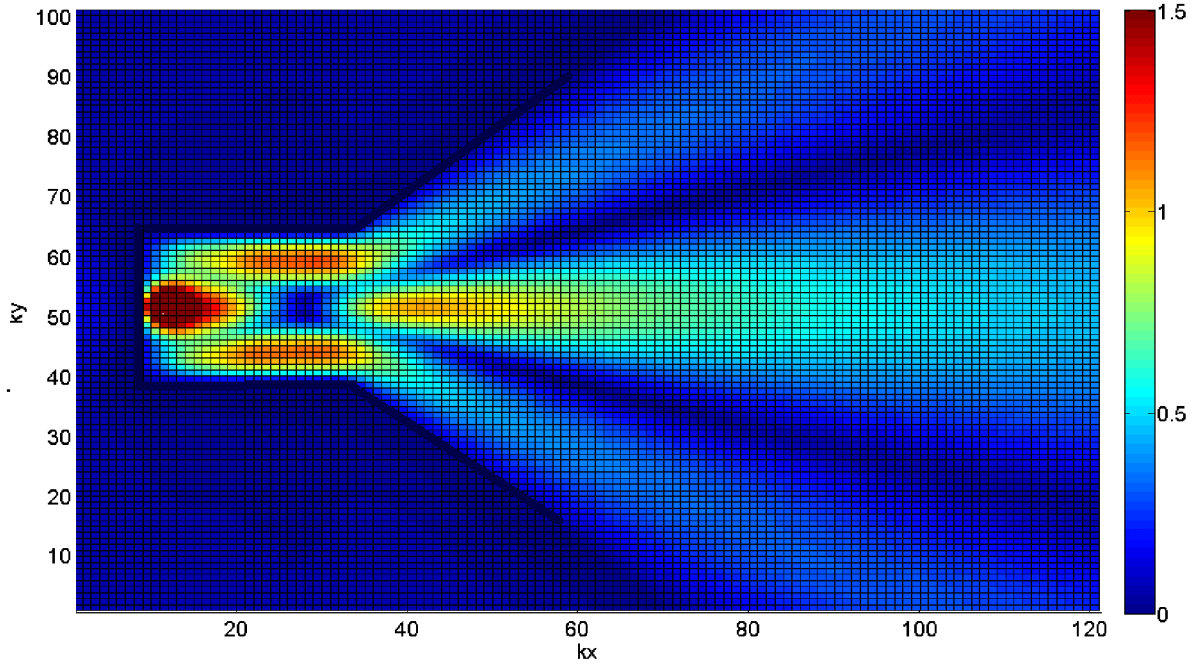
$$x = 0, \quad y = l - L_{PR} - a, \quad l \in [RA) \quad (4.16)$$

Burada;

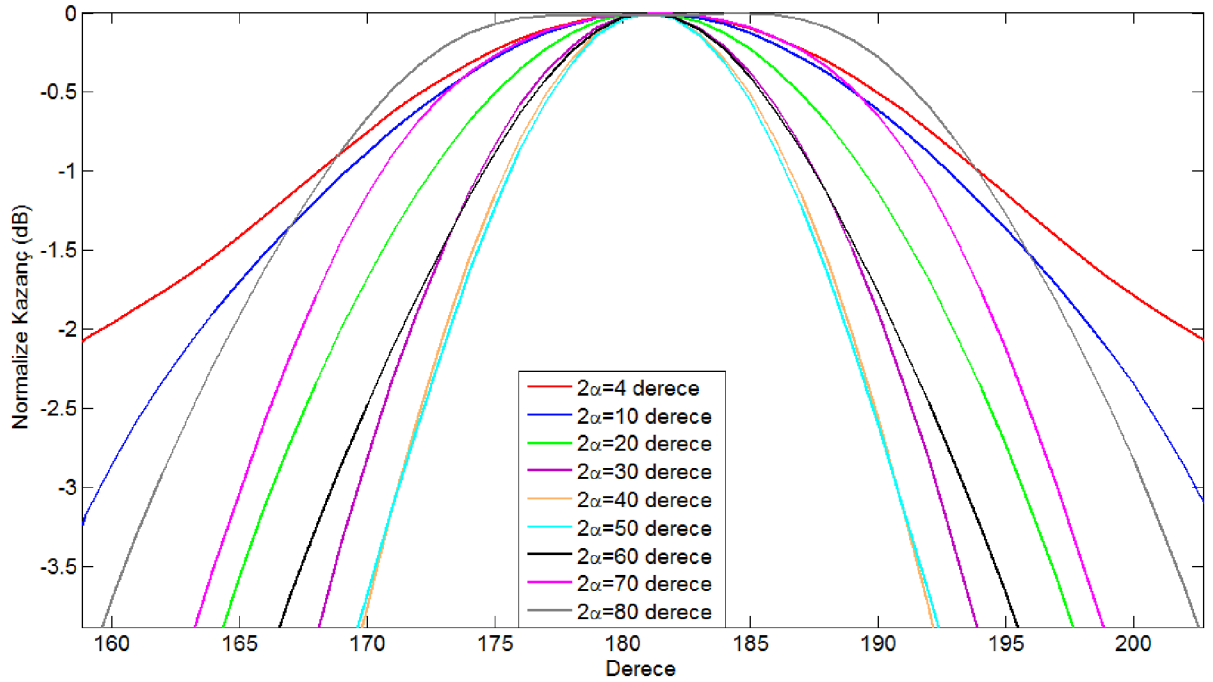
$$l = (\theta + \pi)L / 2\pi \text{ ve } l \in [0, L] \rightarrow (\theta, \tau) \in [-\pi, \pi] \quad (4.17)$$

Olarak belirtilebilir.

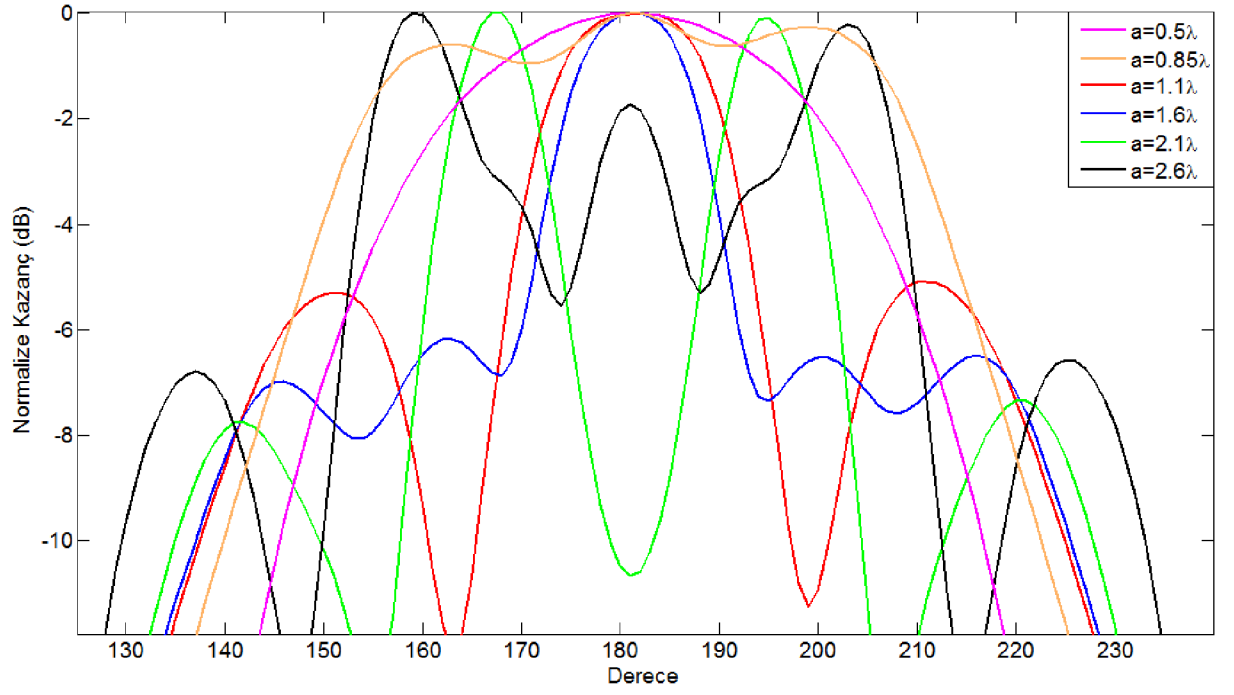
Model 1 horn anteni için yapılan analiz sonuçları aşağıda grafikler halinde verilmiştir;



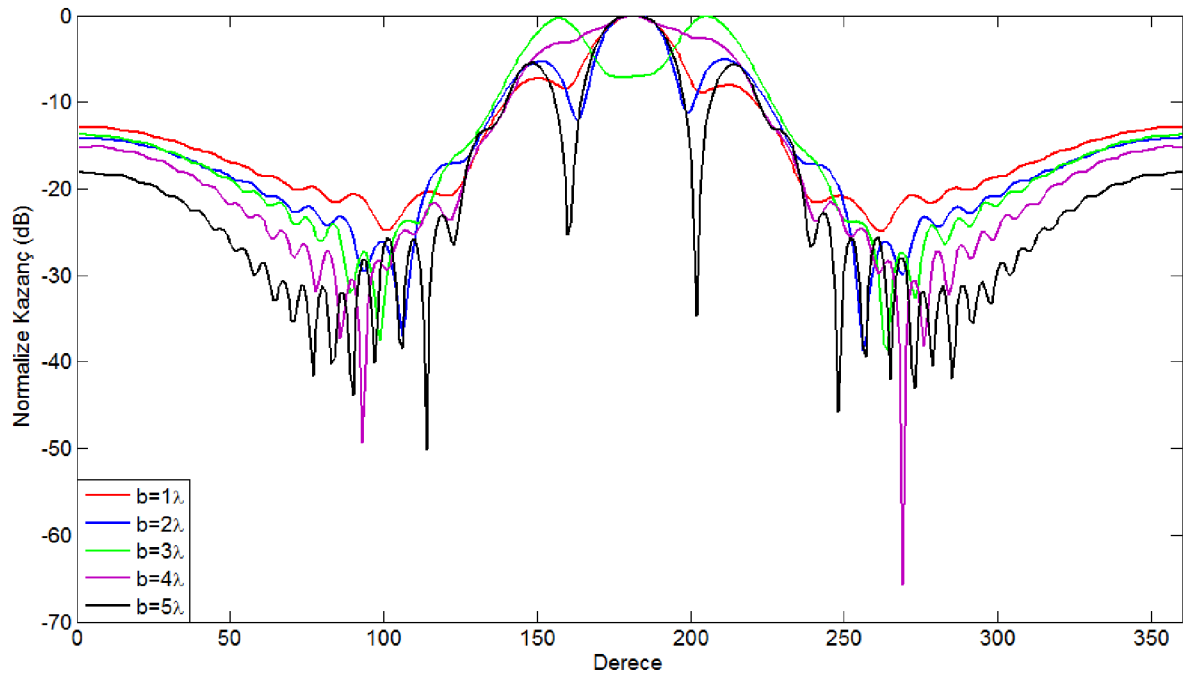
Şekil 4.3 Model 1 horn antenin yakın alan paterni.



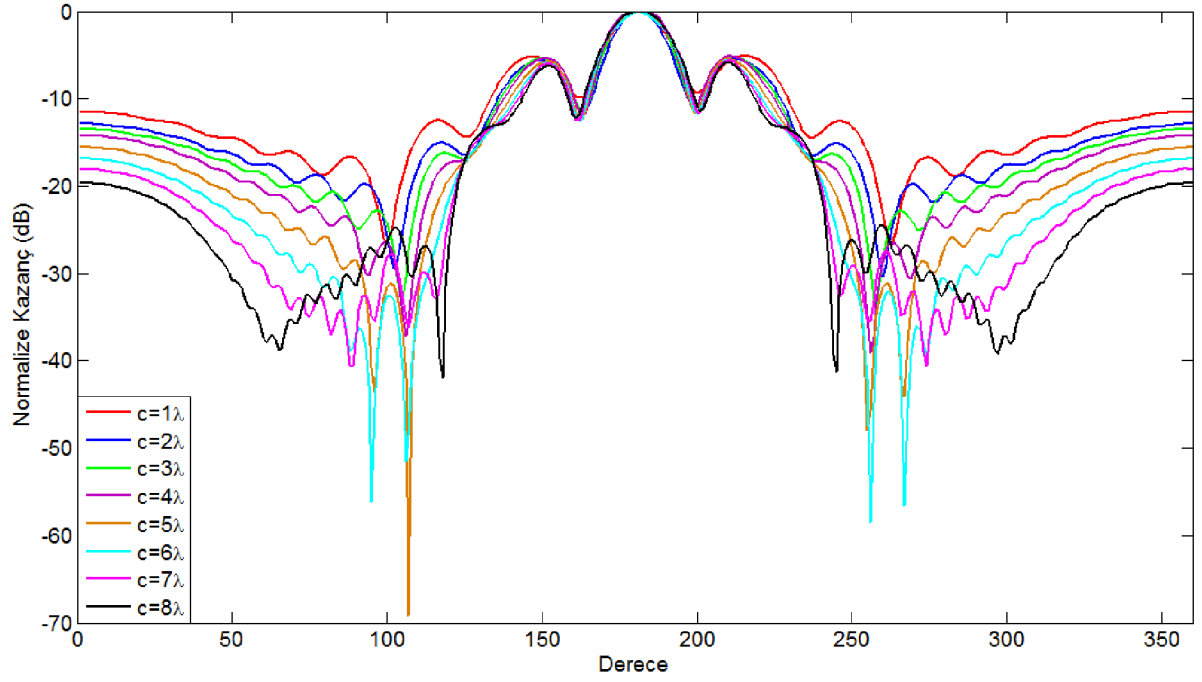
Şekil 4.4 Farklı kanat açıları için model 1 horn antenin yarı güç huzme genişliği grafikleri.



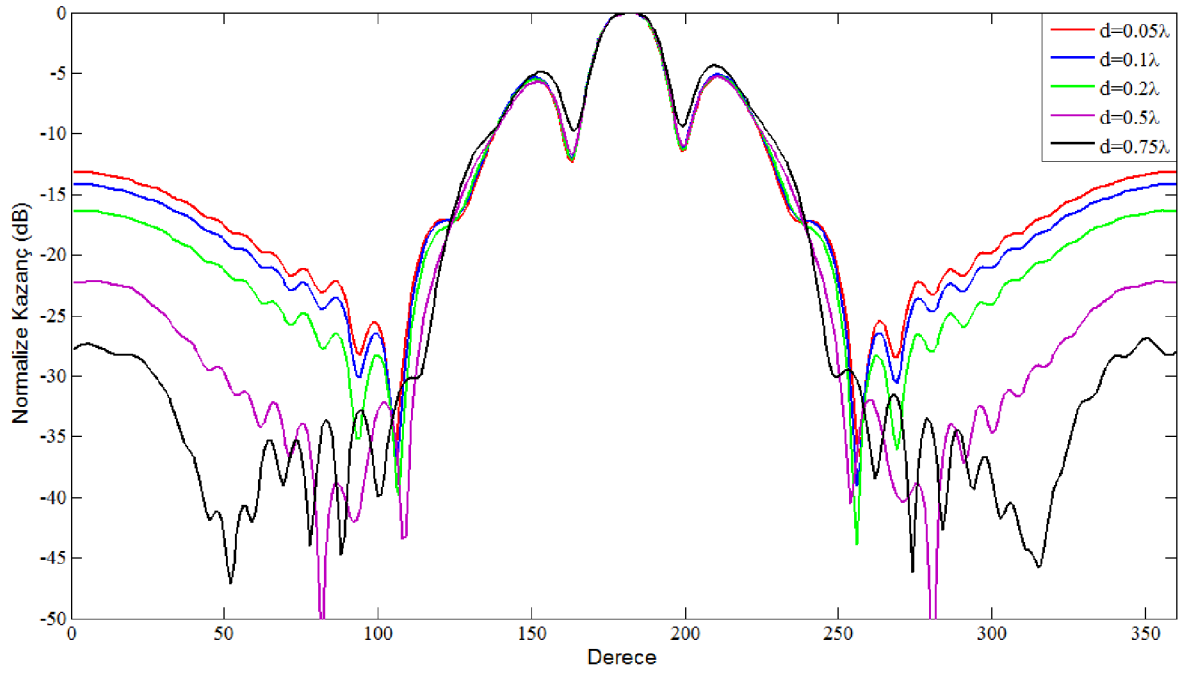
Şekil 4.5 Farklı dalga kılavuzu genişlikleri için model 1 horn anteninin normalize kazanç paternleri.



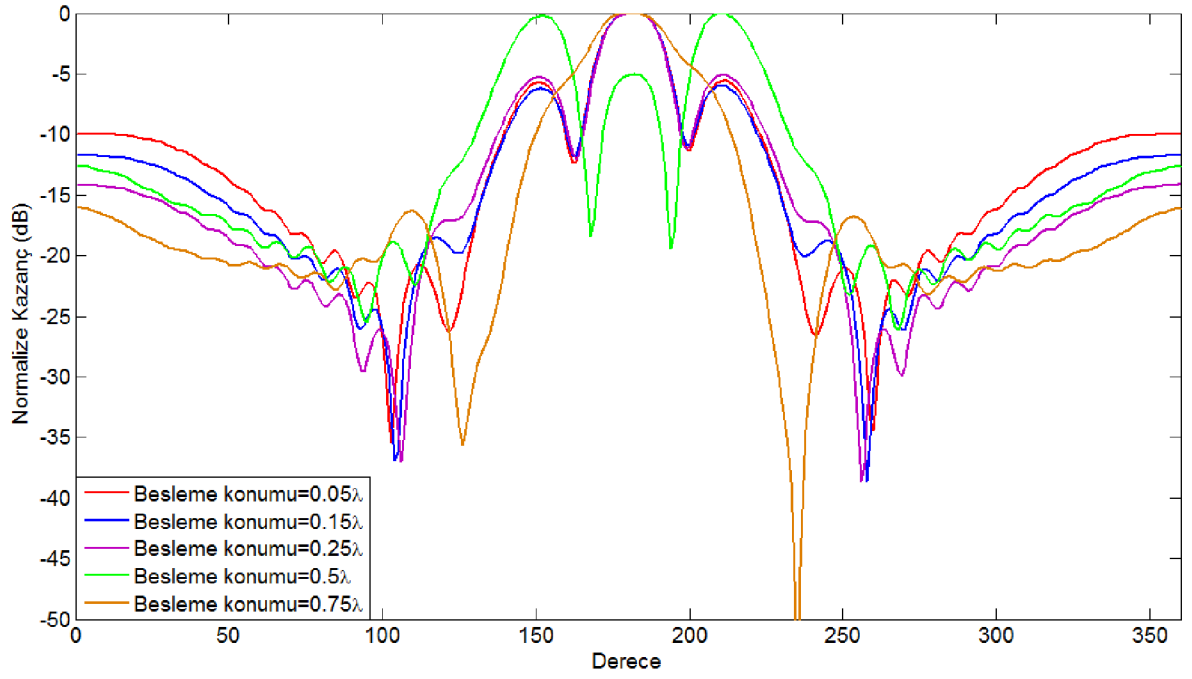
Şekil 4.6 Farklı dalga kılavuzu uzunlukları için model 1 horn anteninin normalize kazanç paternleri.



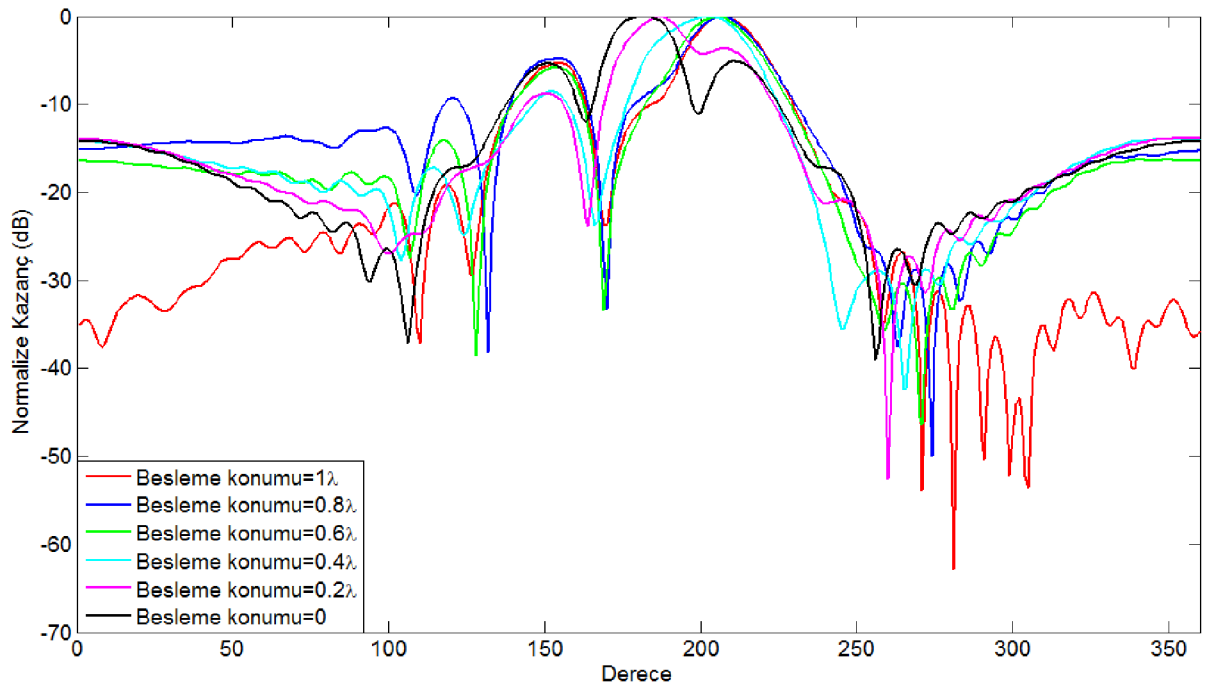
Şekil 4.7 Farklı kanat uzunlukları için model 1 horn anteninin normalize kazanç paternleri.



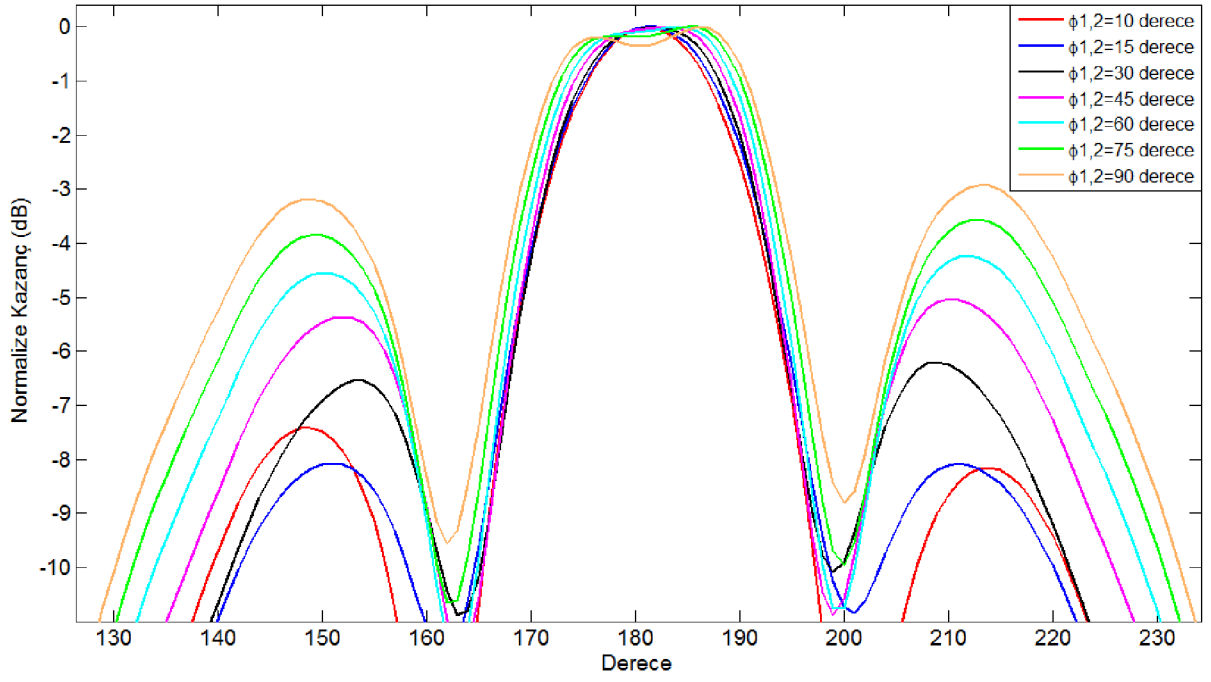
Şekil 4.8 Farklı duvar kalınlıkları için model 1 horn anteninin normalize kazanç paternleri.



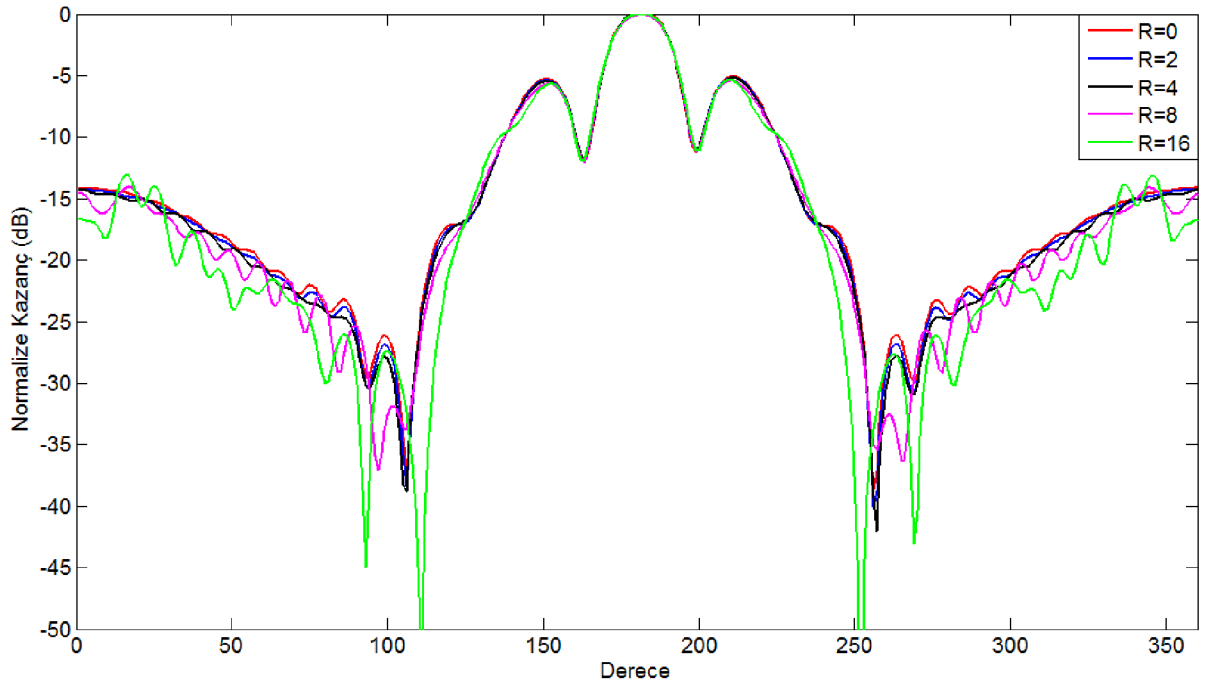
Şekil 4.9 x-ekseninde farklı besleme konumları için model 1 horn antenin normalize kazanç paternleri.



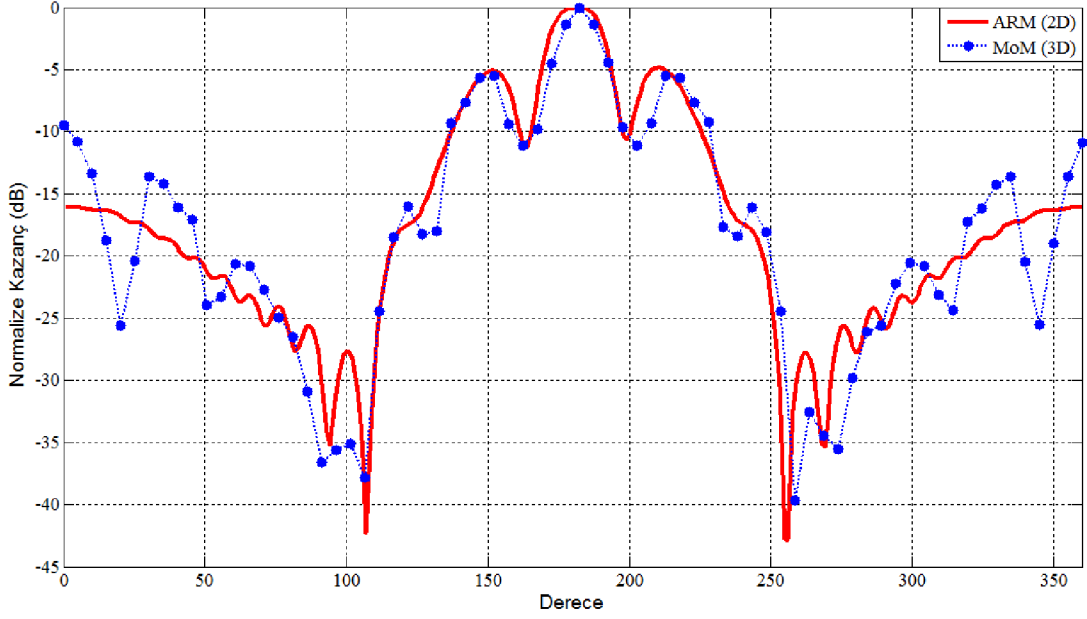
Şekil 4.10 y-ekseninde farklı besleme konumları için model 1 horn antenin normalize kazanç paternleri.



Şekil 4.11 Farklı iç yuvarlatma açıları için model 1 horn antenin normalize kazanç paternleri.



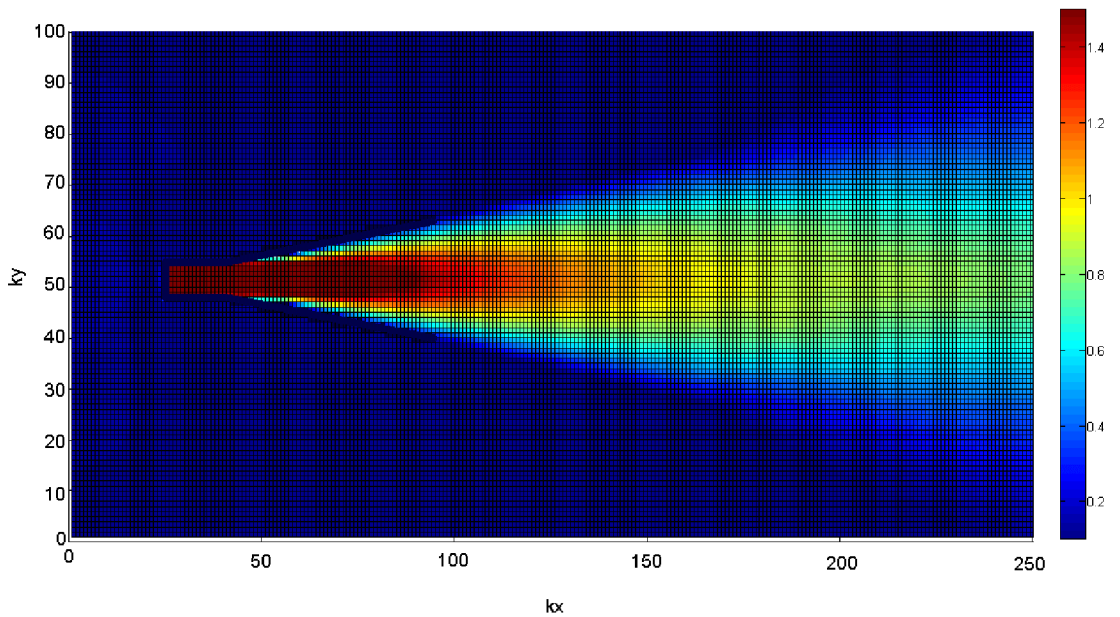
Şekil 4.12 Farklı kenar yuvarlatma katsayıları için model 1 horn antenin normalize kazanç paternleri.



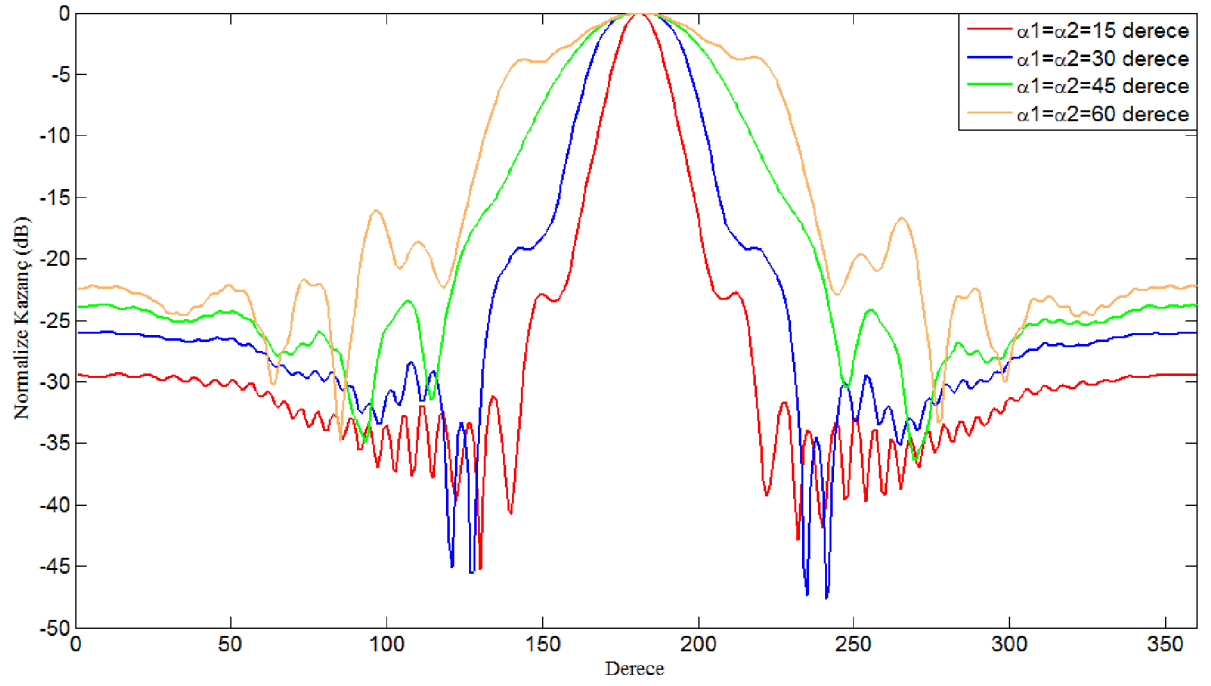
Şekil 4.13 Model 1 horn anteni için 2D ARM analizi ile 3D MoM analiz sonuçlarının karşılaştırılması.

4.2 Model 2 Horn Anteni

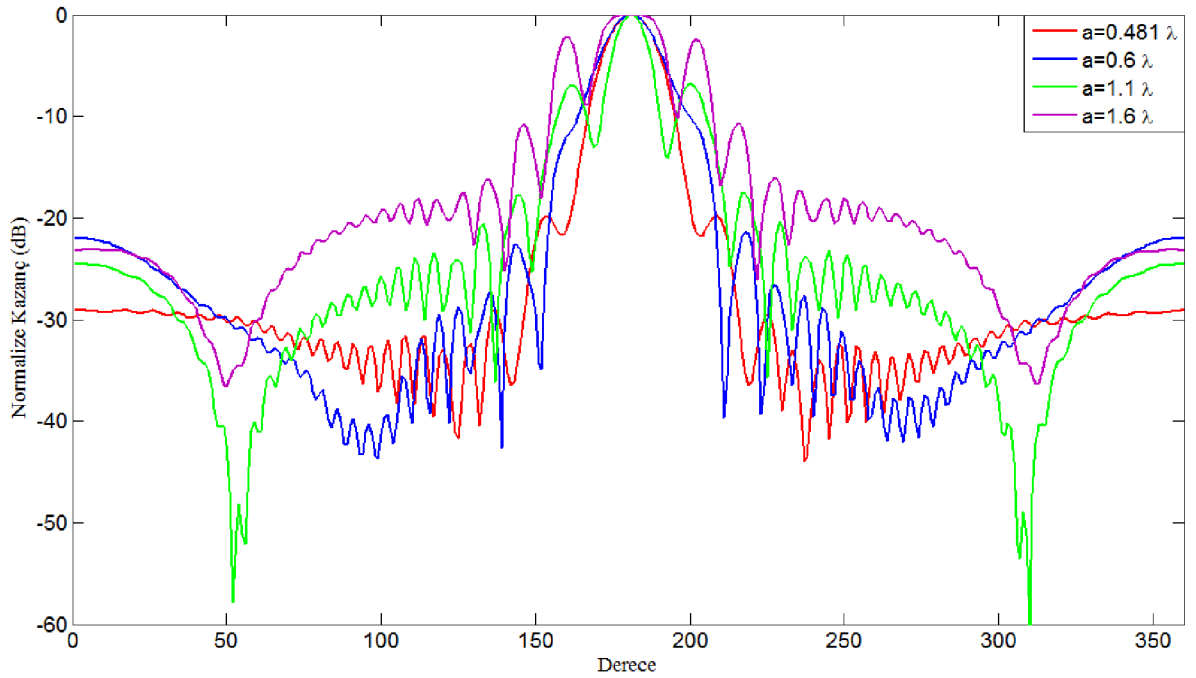
Parametrik analizi yapılan model 1 horn anteninin boyutları $a=0.481 \lambda$, $b=2.5 \lambda$, $c=8.664 \lambda$, $R=1$, $d=0.1 \lambda$, $\alpha_1=\alpha_2=\varphi_1=\varphi_2=11.18^\circ$ olacak şekilde ayarlanmıştır. Antenin geometrisi şekil 4.2’de görülmektedir. Bununla birlikte yapılan parametrizasyon işlemleri model 1 ile birebir aynıdır. Model 2 horn anteni için yapılan parametrik analizlerin sonuçları grafikler halinde aşağıda verilmiştir.



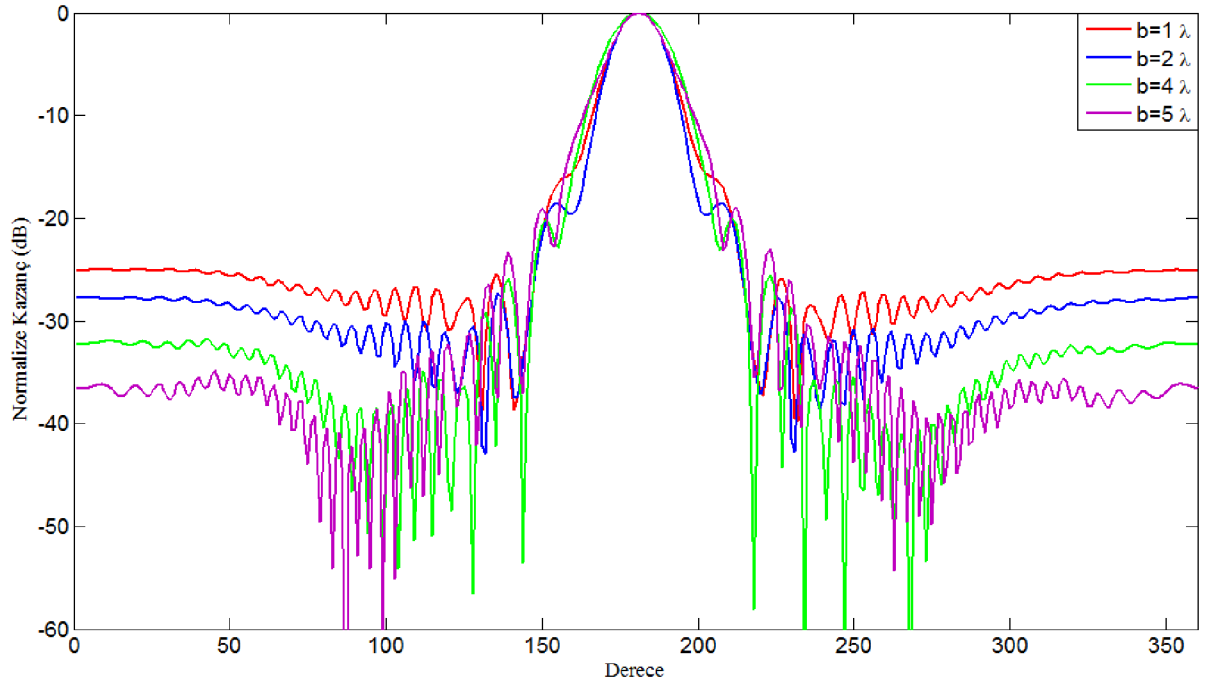
Şekil 4.14 Model 2 horn antenin yakın alan paterni.



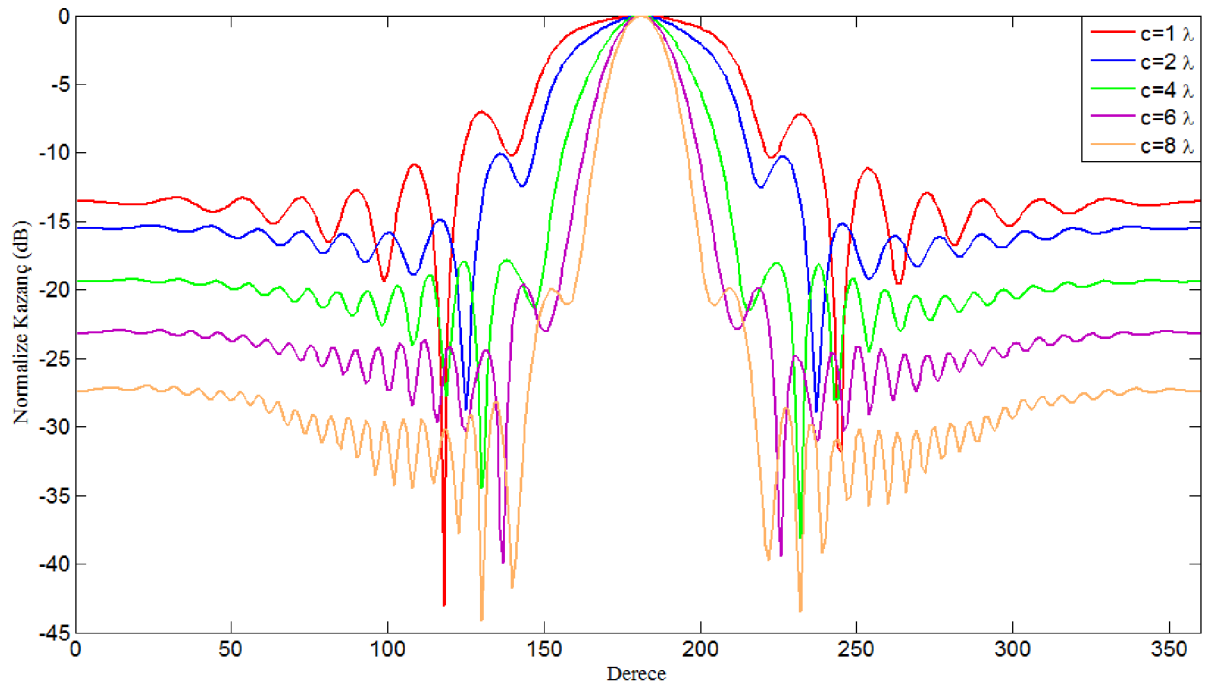
Şekil 4.15 Farklı kanat açıları için model 2 horn antenin yarı güç huzme genişliği grafikleri.



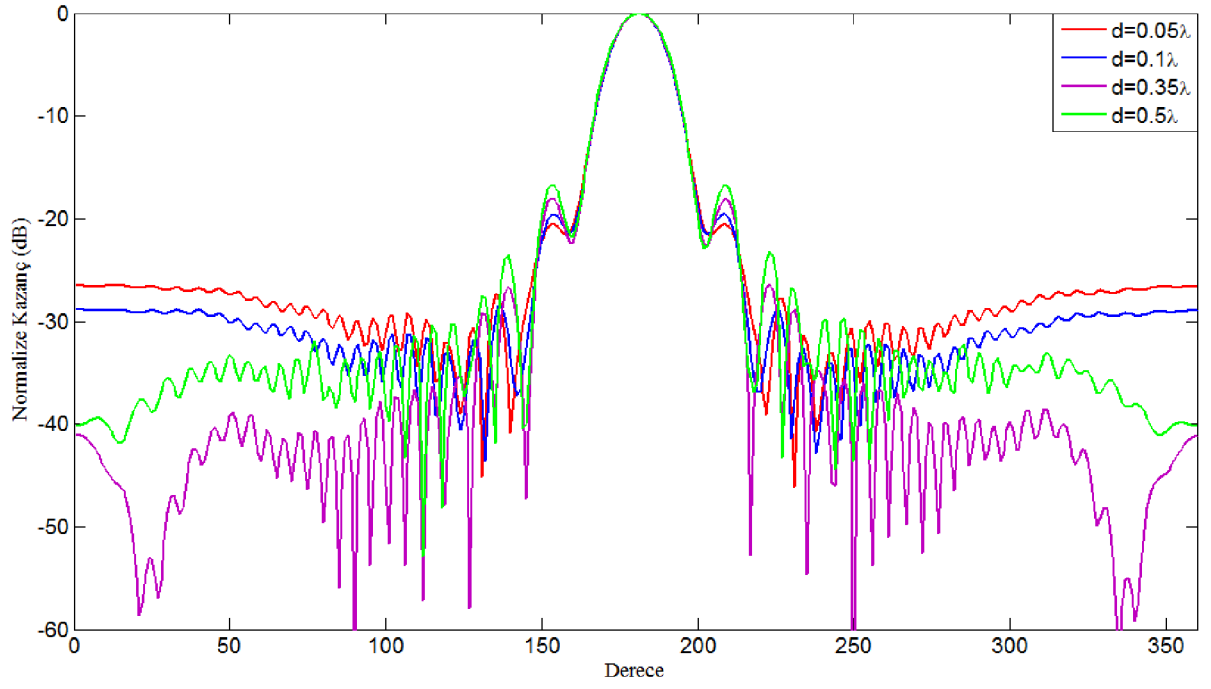
Şekil 4.16 Farklı dalga kılavuzu genişlikleri için model 2 horn antenin normalize kazanç paternleri.



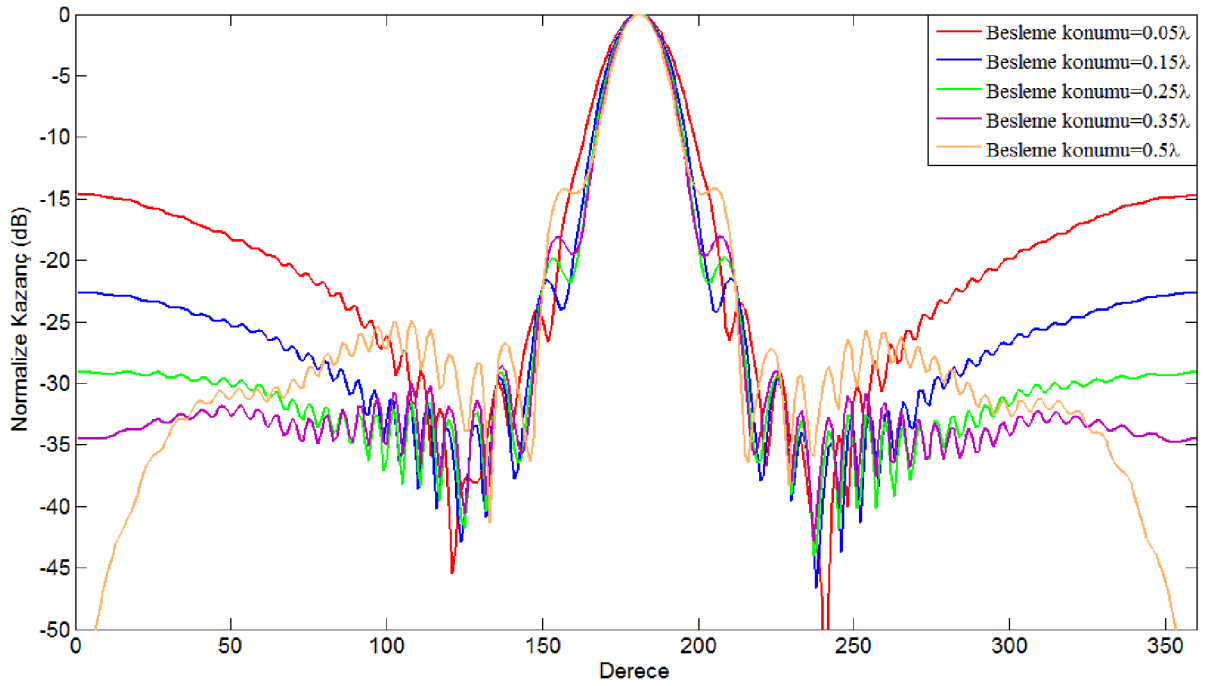
Şekil 4.17 Farklı dalga kılavuzu uzunlukları için model 2 horn anteninin normalize kazanç paternleri.



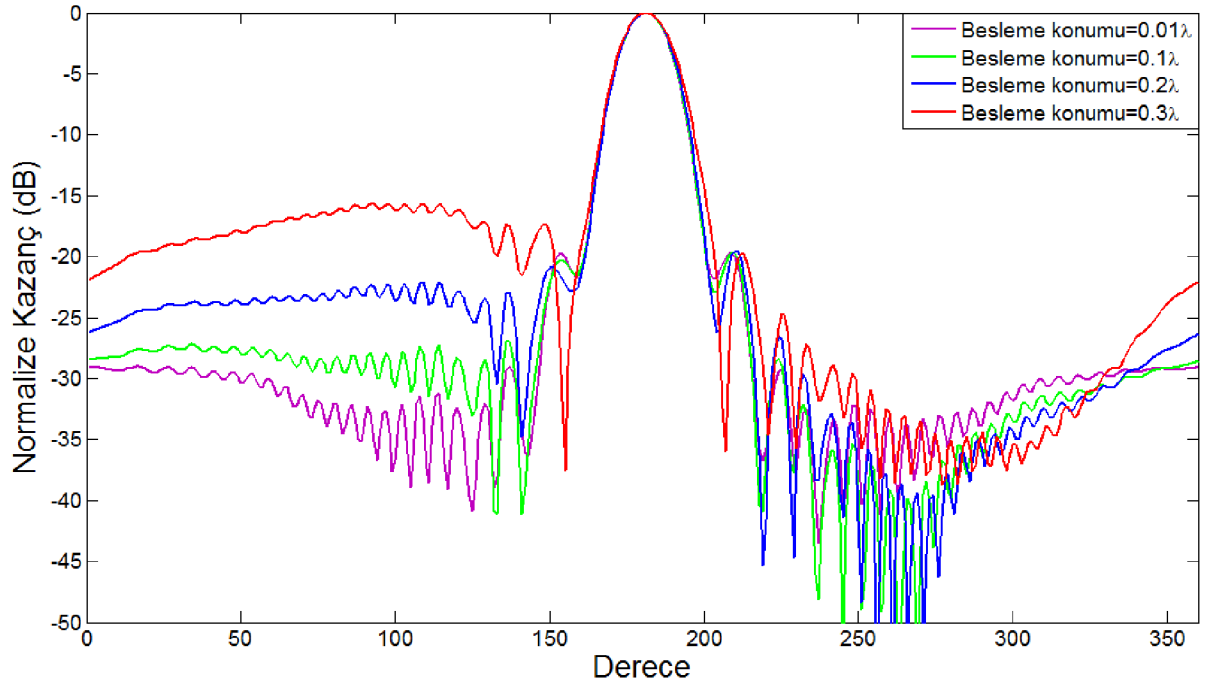
Şekil 4.18 Farklı kanat uzunlukları için model 2 horn anteninin normalize kazanç paternleri.



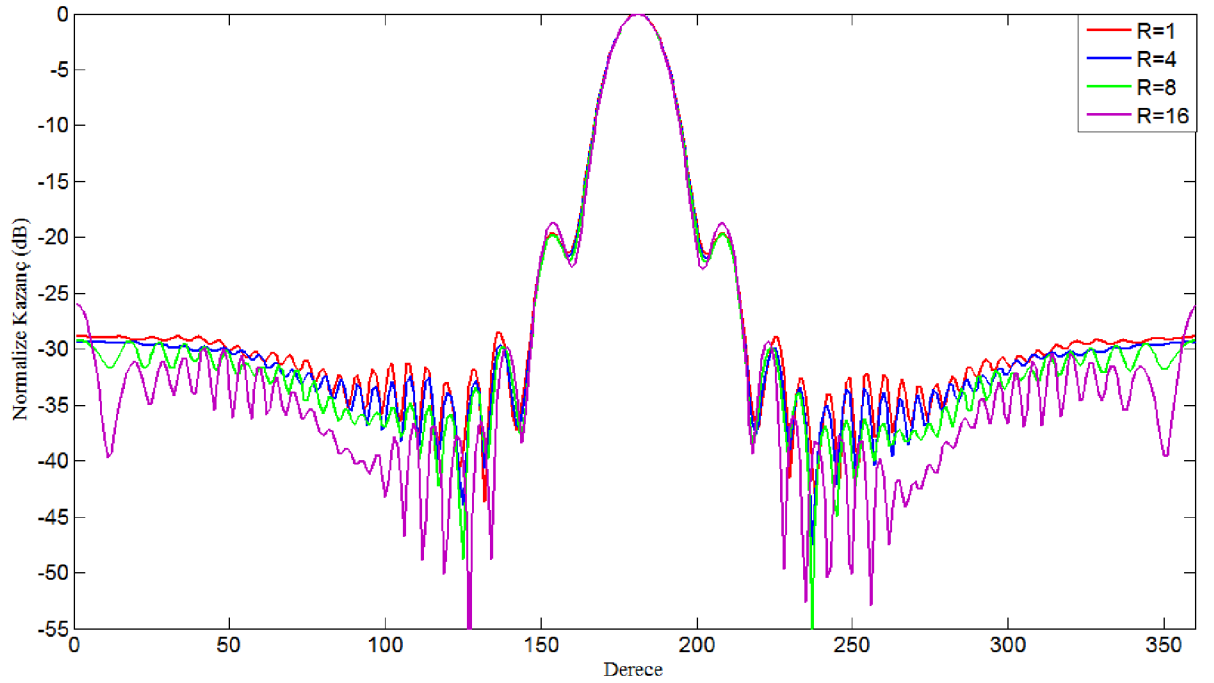
4.19 Farklı duvar kalınlıkları için model 2 horn antenin normalize kazanç paternleri



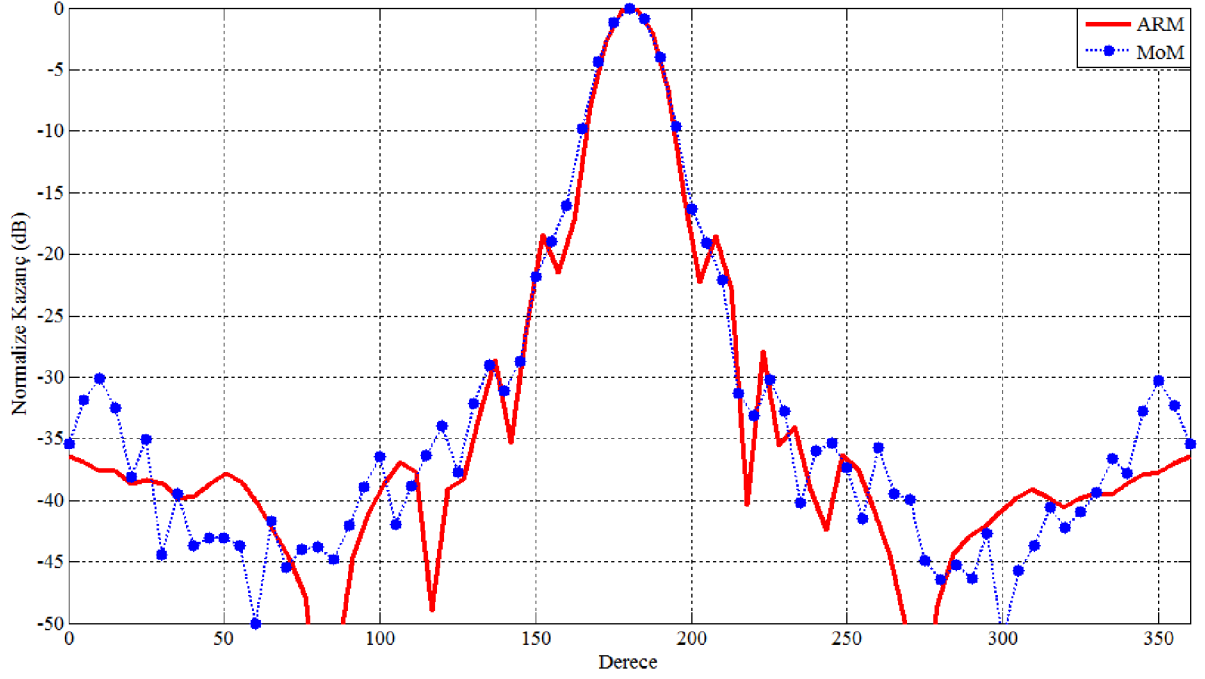
Şekil 4.20 x-ekseninde farklı besleme konumları için model 2 horn antenin normalize kazanç paternleri.



Şekil 4.21 y-ekseninde farklı besleme konumları için model 2 horn antenin normalize kazanç paternleri



Şekil 4.22 Farklı kenar yuvarlatma katsayıları için model 2 horn antenin normalize kazanç paternleri.

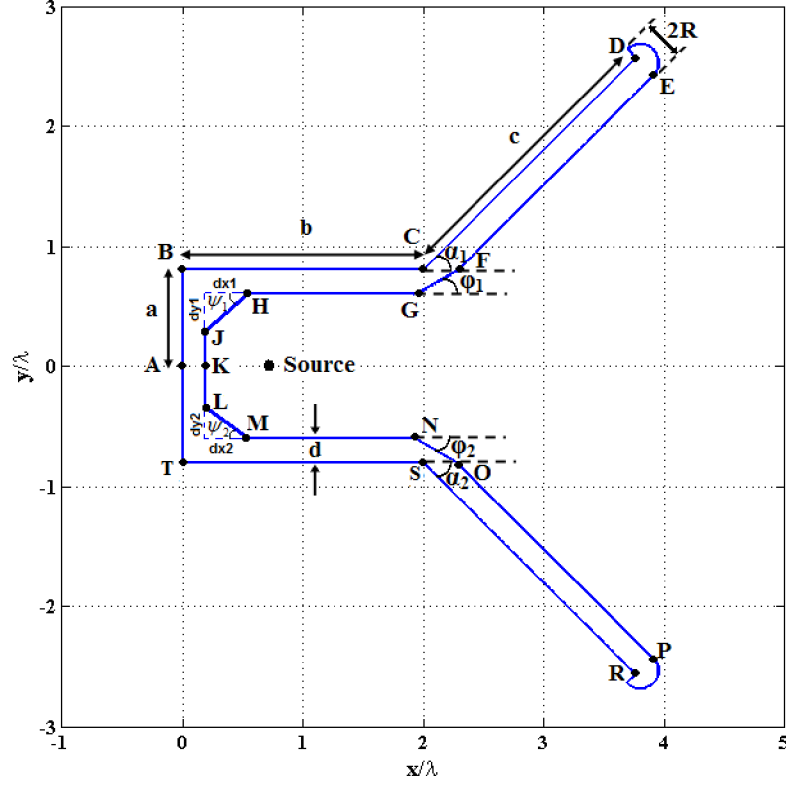


Şekil 4.23 Model 2 horn anteni için 2D ARM analizi ile 3D MoM analiz sonuçlarının karşılaştırılması.

4.3 Model 3

Burada öncelikle bahsedilmesi gereken şey; bundan sonra parametrik analizi yapılacak olan model 3 ve model 4 horn antenlerindeki amacın, daha önce parametrik analizleri yapılan horn antenlerin yan ve arka lob seviyelerini daha a a ı çekmek olduğudur.

Parametrik analizi yapılan model 3 horn anteninin boyutları $a=1.1 \lambda$, $b=2 \lambda$, $c=4 \lambda$, $R=1$, $d=0.1\lambda$, $d_x=0.25 \lambda$, $\alpha_1=\alpha_2=\phi_1=\phi_2=45^\circ$, $\Psi_1=\Psi_2=75^\circ$ olacak şekilde ayarlanmıştır. Antenin geometrisi  ekil 4.24'te görülmektedir. Bu antenin önceki iki modelden farkı antenin arka duvarının    parçalı olacak şekilde yuvarlatılmasıdır. Antenin arka duvarının yuvarlatılmasındaki amaç yan kulak ve arka kulak seviyelerini d  urmektir. Sonuçların kıyaslanabilmesi için model 3 horn anteninin boyutları model 1 horn anteni ile birebir aynı tutulup sadece arka duvar    kısıma ayrılmıştır.



Şekil 4.24 Model 3 horn antenin görünümü.

Daha önceki antenler de olduğu gibi ARM prosedürü model 3 horn anten analizinde de uygulanmıştır. Bu doğrultuda antenin enine kesiti, L konturu A noktasından T noktasına ve oradan da tekrar A noktasına gelinceye kadar karşılık düşen $\theta \in [-\pi, \pi]$ noktalarıyla modellenmiştir. Yapılan parametrizasyon işlemleri aşağıda görülmektedir.

Tablo 4.2 Horn konturunun parametrik tanımlaması ve segment uzunlukları

No	Region	Definition	Segment Length
1	AB	$-\pi \leq \theta < -\pi + 2L_{AB} \pi/L$	$L_{AB} = a$
2	BC	$-\pi + 2L_{AB} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{BC} \pi/L$	$L_{BC} = L_{AB} + b$
3	CD	$-\pi + 2L_{BC} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{CD} \pi/L$	$L_{CD} = L_{BC} + c$
4	DE	$-\pi + 2L_{CD} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{DE} \pi/L$	$L_{DE} = L_{CD} + \pi R d / 2$
5	EF	$-\pi + 2L_{DE} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{EF} \pi/L$	$L_{EF} = L_{DE} + c - d / \tan \alpha_1$
6	FG	$-\pi + 2L_{EF} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{FG} \pi/L$	$L_{FG} = L_{EF} + d / \sin \phi_1$
7	GH	$-\pi + 2L_{FG} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{GH} \pi/L$	$L_{GH} = L_{FG} + b - db_1 - d - dx$
8	HJ	$-\pi + 2L_{GH} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{HJ} \pi/L$	$L_{HJ} = L_{GH} + \sqrt{(dx_1^2 + dy_1^2)}$

9	JK	$-\pi + 2L_{HJ} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{JK} \pi/L$	$L_{JK} = L_{HJ} + a - d - dy_1$
10	KL	$-\pi + 2L_{JK} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{KL} \pi/L$	$L_{KL} = L_{JK} + a - d - dy_2$
11	LM	$-\pi + 2L_{KL} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{LM} \pi/L$	$L_{LM} = L_{KL} + \sqrt{(dx_2^2 + dy_2^2)}$
12	MN	$-\pi + 2L_{LM} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{MN} \pi/L$	$L_{MN} = L_{LM} + b - db_2 - dx_2 - d$
13	NO	$-\pi + 2L_{MN} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{NO} \pi/L$	$L_{NO} = L_{MN} + d / \sin \varphi_2$
14	OP	$-\pi + 2L_{NO} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{OP} \pi/L$	$L_{OP} = L_{NO} + c - d / \tan \alpha_2$
15	PR	$-\pi + 2L_{OP} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{PR} \pi/L$	$L_{PR} = L_{OP} + \pi R d / 2$
16	RS	$-\pi + 2L_{PR} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{RS} \pi/L$	$L_{RS} = L_{PR} + c$
17	ST	$-\pi + 2L_{RS} \pi/L \leq \theta < -\pi + 2L_{ST} \pi/L$	$L_{ST} = L_{RS} + b$
18	TA	$-\pi + 2L_{ST} \pi/L \leq \theta < \pi$	$L = L_{ST} + a$
* $db_{1,2} = d / \tan \varphi_{1,2} - d \tan \alpha_{1,2}$			

$$x=0, \quad y=l-L_{AB}+a, \quad l \in [AB) \quad (4.18)$$

$$x=l-L_{AB}, \quad y=a, \quad l \in [BC) \quad (4.19)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= (l-L_{BC}) \cos \alpha_1 + b \\ y &= (l-L_{BC}) \sin \alpha_1 + a \end{aligned} \right\}, l \in [CD) \quad (4.20)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[\frac{d}{2} \sin \alpha_1 + b + c \cos \alpha_1 \right] + R \frac{d}{2} \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) - 2 \left(\frac{l-L_{CD}}{Rd} \right) \right] + X_0 \\ y &= \left[-\frac{d}{2} \cos \alpha_1 + a + c \sin \alpha_1 \right] + R \frac{d}{2} \sin \left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) - 2 \left(\frac{l-L_{CD}}{Rd} \right) \right] + Y_0 \end{aligned} \right\}, l \in [DE) \quad (4.21)$$

$$X_0 = -(R-1) \frac{d}{2} \sin \alpha_1, \quad Y_0 = (R-1) \frac{d}{2} \cos \alpha_1$$

$$\left. \begin{aligned} x &= b + d \sin \alpha_1 + [c-l+L_{DE}] \cos \alpha_1 \\ y &= a - d \cos \alpha_1 + [c-l+L_{DE}] \sin \alpha_1 \end{aligned} \right\}, \quad l \in [EF) \quad (4.22)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= d / \sin \alpha_1 + b - (l-L_{EF}) \cos \varphi_1 \\ y &= a - (l-L_{EF}) \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\}, l \in [FG) \quad (4.23)$$

$$x = -l + L_{FG} + b - db_1, \quad y = a - d, \quad l \in [GH) \quad (4.24)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= (-l + L_{GH}) \cos(\psi_1) + d + dx_1 \\ y &= a - d - (l - L_{GH}) \sin(\psi_1) \end{aligned} \right\}, l \in [HJ) \quad (4.25)$$

$$x = d, \quad y = -l + L_{HJ} + a - d - dy_1, l \in [JK) \quad (4.26)$$

$$x = d, \quad y = -l + L_{JK}, l \in [KL) \quad (4.27)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= d + (l - L_{KL}) \cos(\psi_2) \\ y &= -a + d + dy_2 - (l - L_{KL}) \sin(\psi_2) \end{aligned} \right\}, l \in [LM) \quad (4.28)$$

$$x = l - L_{LM} + d + dx_1, \quad y = -a + d, l \in [MN) \quad (4.29)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= b - db_2 + (l - L_{MN}) \cos \varphi_2 \\ y &= -a + d - (l - L_{MN}) \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\}, l \in [NO) \quad (4.30)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= d / \tan \alpha_2 + b + (l - L_{NO}) \cos \alpha_2 + 0.5d \sin \alpha_2 \\ y &= -a - (l - L_{NO}) \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\}, l \in [OP) \quad (4.31)$$

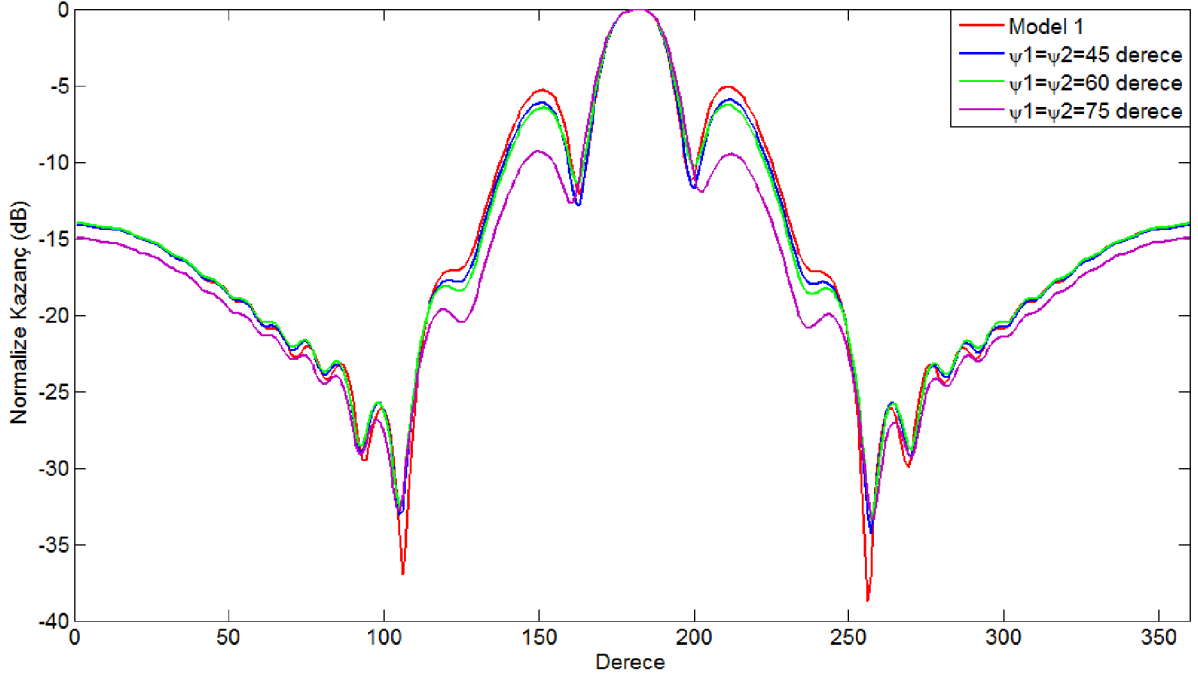
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{d}{2} \sin \alpha_2 + b + c \cos \alpha_2 + R \frac{d}{2} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - 2 \left(\frac{l - L_{OP}}{Rd} \right) \right] + X_0 \\ y &= - \left(-\frac{d}{2} \cos \alpha_2 + a + c \sin \alpha_2 \right) + R \frac{d}{2} \sin \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - 2 \left(\frac{l - L_{OP}}{Rd} \right) \right] + Y_0 \\ X_0 &= -(R-1) \frac{d}{2} \sin \alpha_2, \quad Y_0 = -(R-1) \frac{d}{2} \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\}, l \in [PR) \quad (4.32)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -(l - L_{PR}) \cos \alpha_2 + b + c \cos \alpha_2 \\ y &= (l - L_{PR} - c) \sin \alpha_2 - a \end{aligned} \right\}, l \in [RS) \quad (4.33)$$

$$x = -l + L_{RS} + b, \quad y = -a, \quad l \in [ST) \quad (4.34)$$

$$x = 0, \quad y = l - L_{ST} - a, \quad l \in [TA) \quad (4.35)$$

Yapılan analizler sonucunda elde edilen normalize ışınma paterni model 1 ile karşılaştırılmalı olarak şekil 4.25'te verilmiştir.

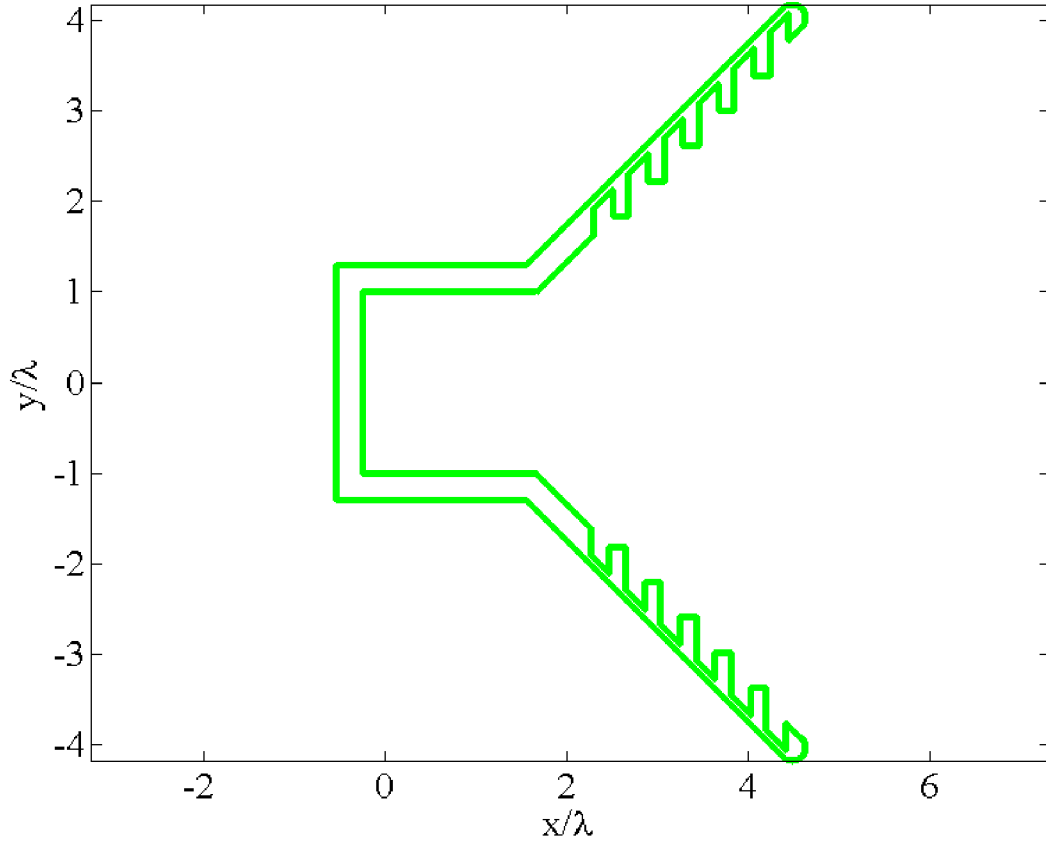


Şekil 4.25 Farklı arka yuvarlatma açıları için normalize ışıma paternlerinin karşılaştırılması.

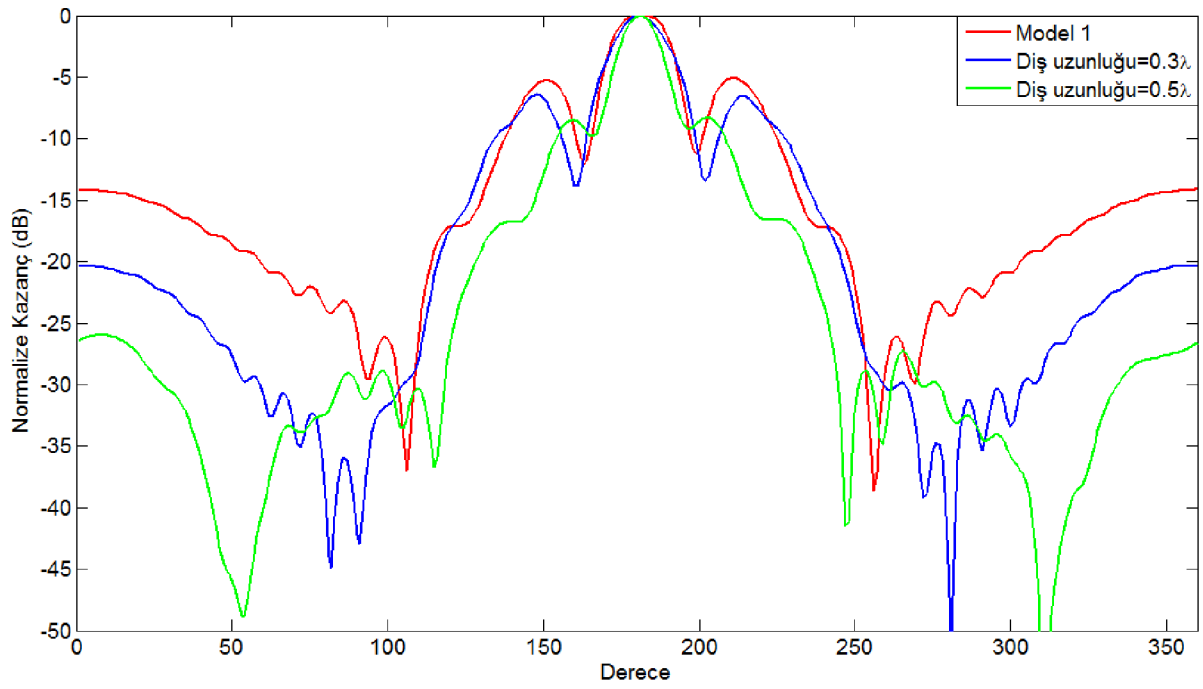
4.4 Model 4 Horn Anteni

Çalışmanın bundan sonraki aşamalarında analizleri yapılan horn antenlerin parametrisasyonları oldukça uzun ve karmaşık olduğu için sadece horn antenlerin geometrileri ve yapılan analizlerin sonucunda elde edilen karşılaştırmalı normalize ışıma paternleri verilecektir.

İyi bilindiği gibi oluklu horn antenler, normal antenlerle kıyaslandıklarında çok daha düşük yan ve arka kulaklara sahiptirler. Dolayısıyla model 1 horn antenin üst kanat kısmına beş, alt kanat kısmına da beş oluk konulmuş olup oluk uzunluklarına bağlı olarak elde edilen normalize ışıma paternleri model 1 horn anteninden elde edilen normalize ışıma paterni ile kıyaslanmıştır. Tasarlanan horn antenin boyutları $a=1.1 \lambda$, $b=2 \lambda$, $c=4 \lambda$, $R=1$, $d=0.1\lambda$, $\alpha_1=\alpha_2=\varphi_1=\varphi_2=45^\circ$ olacak şekilde ayarlanmıştır. Oluklu horn anten geometrisi şekil 4.26'da, diş uzunluklarına bağlı olarak elde edilen kıyaslama sonucu şekil 4.27'de görülmektedir.



Şekil 4.26 Model 4 oluklu horn anteninin geometrisi.

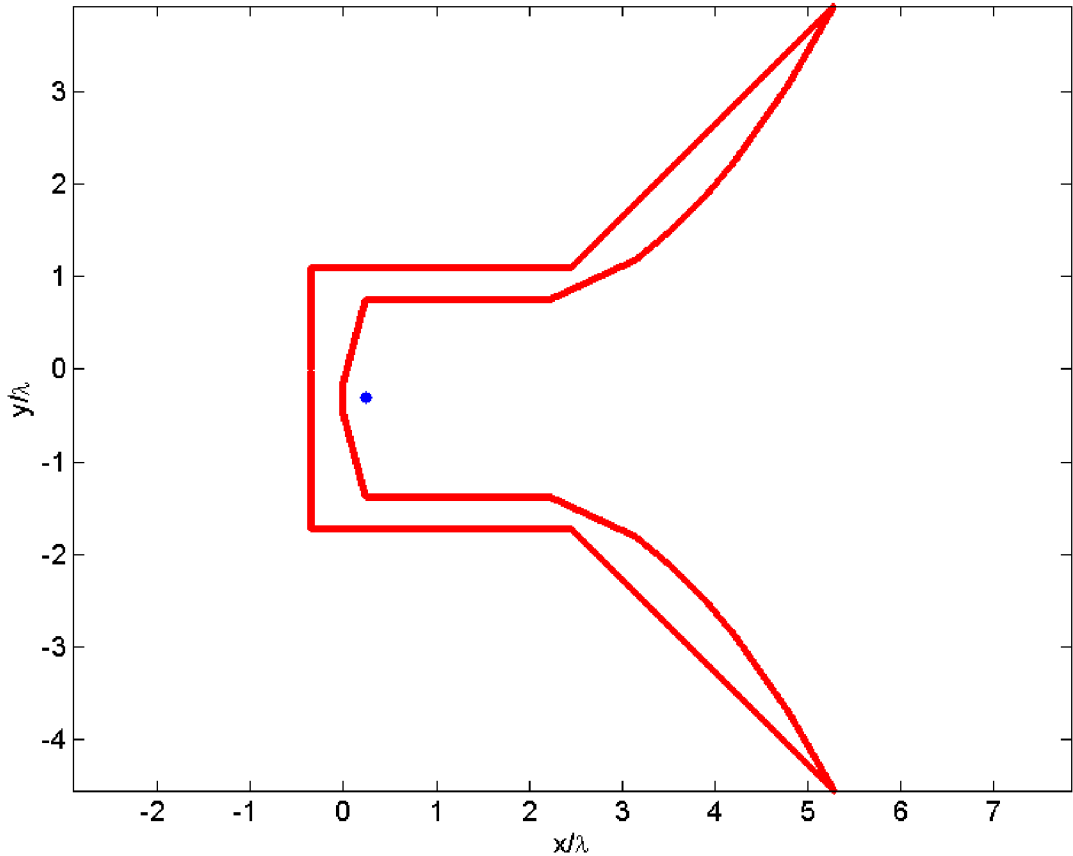


Şekil 4.27 Farklı diş uzunlukları için elde edilen normalize ışıma paterninin karşılaştırılması.

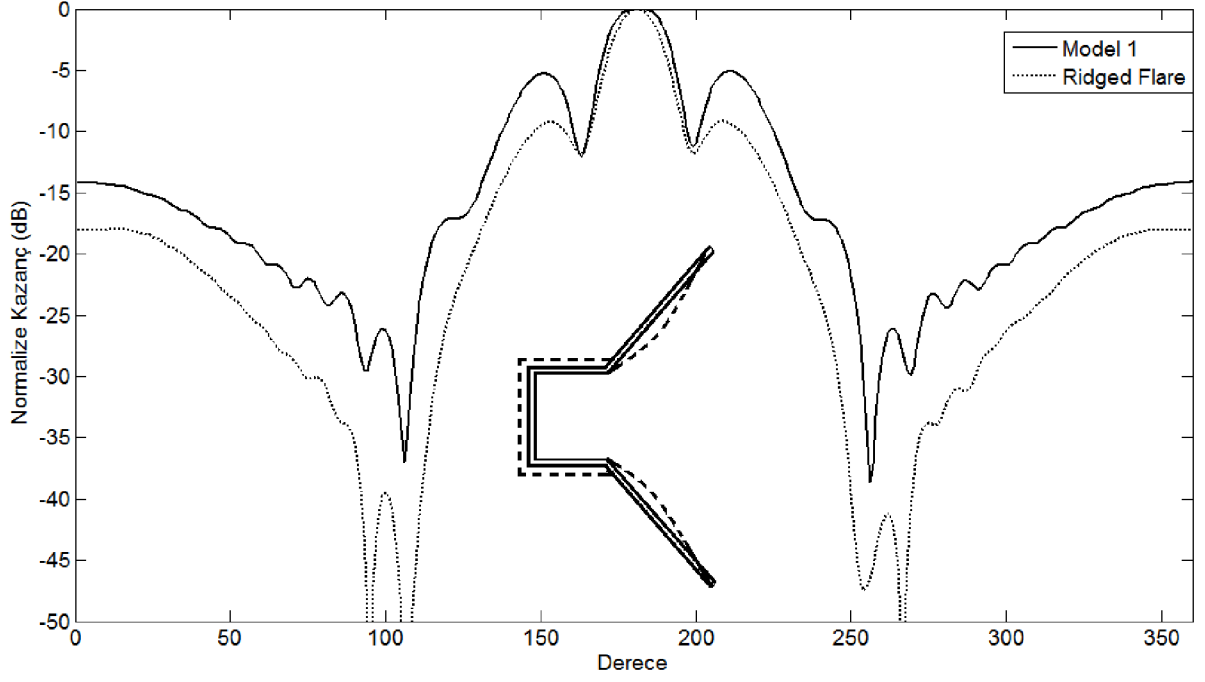
4.5 Model 5 Horn anteni

Çalışmanın bundan sonraki kısmında tasarım aşamasına geçilmiştir. Bu bağlamda daha önce parametrik analizleri yapılan horn antenlerin yan ve arka loblarını düşürmek amacıyla model 1, model 2, model 3 ve model 4 horn antenlerinin parametrik analiz sonuçlarından faydalanılmıştır. Bu doğrultuda tasarımı yapılan ilk horn anten şekil 4.28’de görülmektedir. Bu modelin boyutları $a=1.1 \lambda$, $b=2 \lambda$, $c=4 \lambda$, $R=1$, $d=0.1\lambda$, $\alpha_1=\alpha_2=45^\circ$ olacak şekilde ayarlanmıştır. Bir başka deyişle, model 3 horn anteninin sadece kanat kısmında değişiklik yapılmıştır. Kanat bölgesinde yumuşak geçiş sağlamak için üst kanat ve alt kanat altışar bölmeden oluşturulmuştur. Yapılan analiz sonucunda elde edilen normalize ışıma paterni şekil 4.29’da verilmiştir.

Burada unutulmaması gereken parametrik analizleri yapılan antenlerin yani model 1 veya model 2 horn antenlerinin ışıma paternlerinin iyileştirilmeye çalışıldığıdır. Bu yüzden model 5 horn anteninden elde edilen sonuç, dış cephesinin boyutları birebir aynı olduğundan, model 1 horn anteni ile kıyaslanmıştır.



Şekil 4.28 Model 5 horn antenin görünümü.



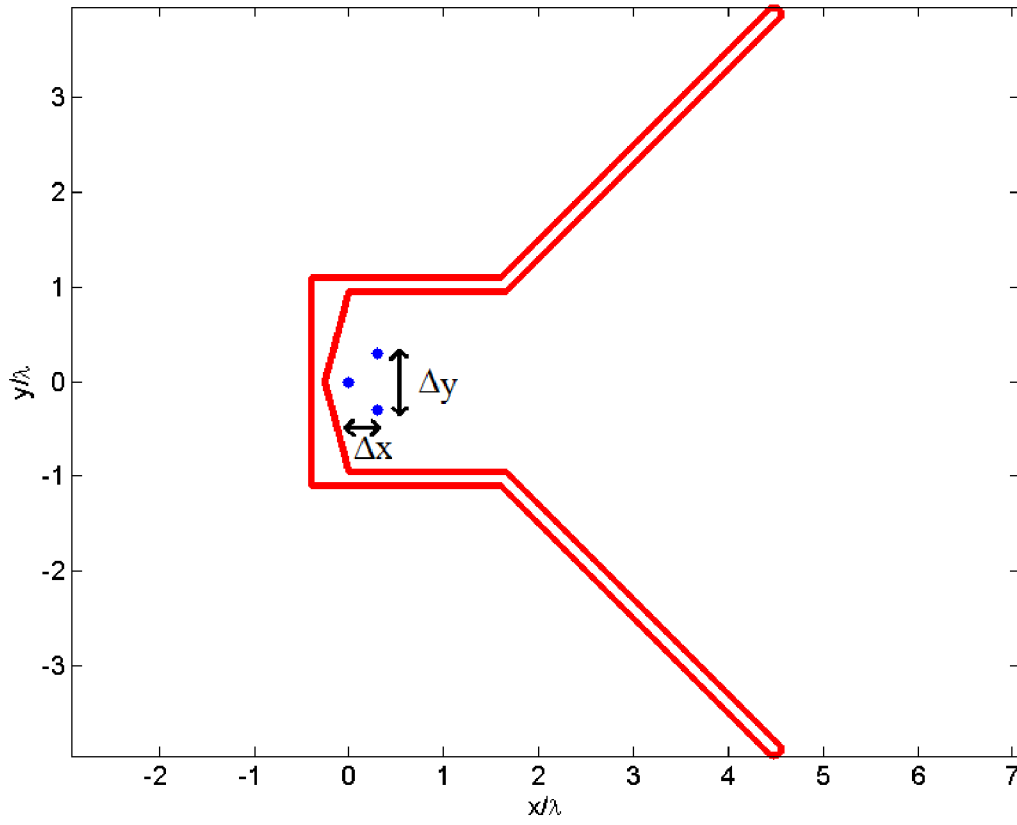
Şekil 4.29 Model 5 horn anteninden elde edilen normalize ışıma paterninin model 1 horn anteni ile karşılaştırılması.

4.6 Model 6 Horn Anteni

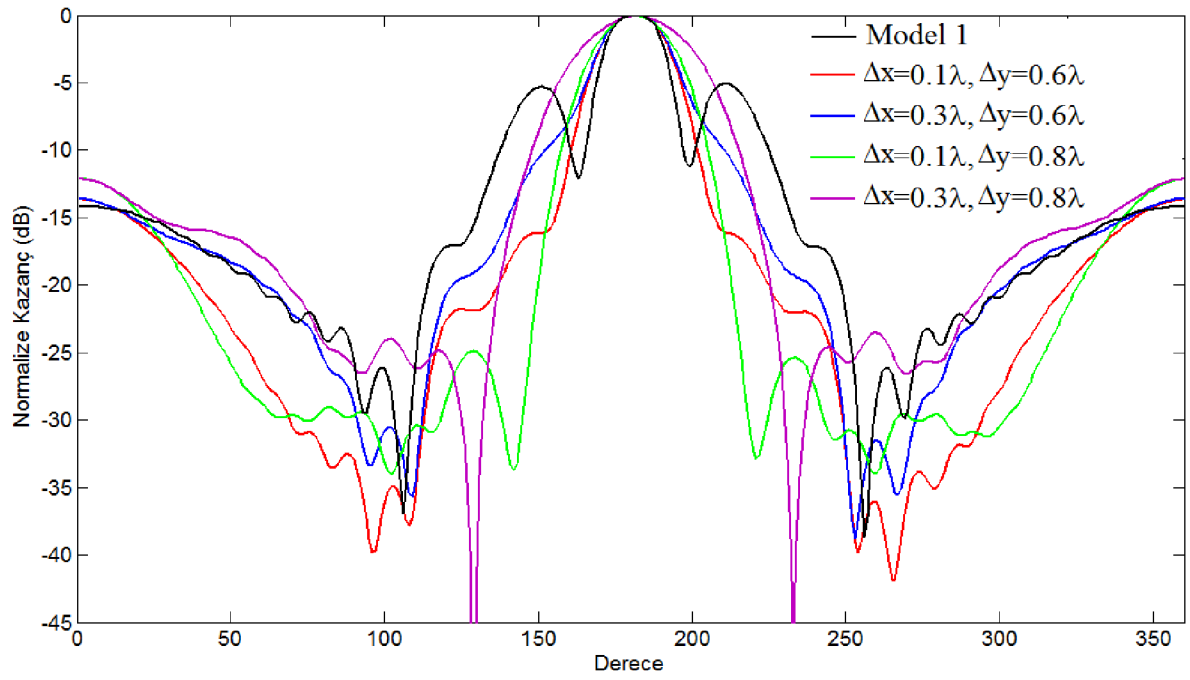
Buraya kadar yapılan çalışmaların hepsi tek kaynaklı beslemeye dayalı olup yapılan incelemeler besleme konumunun değiştirilmesinden ibaretti. Yapılacak olan bundan sonraki tasarımlarda kullanılan kaynak sayısı üçe çıkarılacaktır. Buradaki amaç dizi anten mantığını kullanarak daha yönlü bir paterne sahip kaynağın horn antenin beslemesi olarak kullanılmasını sağlamaktır. Dolayısıyla horn antenin paterninde belirgin bir iyileşme beklenmektedir.

Tasarlanan model 6 horn anteni aslında model 3 horn antenin çok kaynaklı halinden başka birşey değildir. Buradaki amaç beslemede kullanılan kaynaklar arasındaki mesafelere bağlı olarak optimum ışıma paternini yakalamaktır.

Tasarlanan horn antenin boyutları $a=1.1 \lambda$, $b=2 \lambda$, $c=4$, $R=1$, $d=0.1\lambda$, $d_x=0.25 \lambda$, $\alpha_1=\alpha_2=\varphi_1=\varphi_2=45^\circ$, $\Psi_1=\Psi_2=75^\circ$ olacak şekilde ayarlanmıştır. Tasarımı yapılan model 6 horn antenin geometrisi şekil 4.30'da, beslemeler arasındaki mesafelere bağlı olarak elde edilen normalize ışıma paterni şekil 4.31'de görülmektedir. Model 5 horn anteninde olduğu gibi kıyaslamalarda model 1 horn anteni referans olarak alınmıştır.



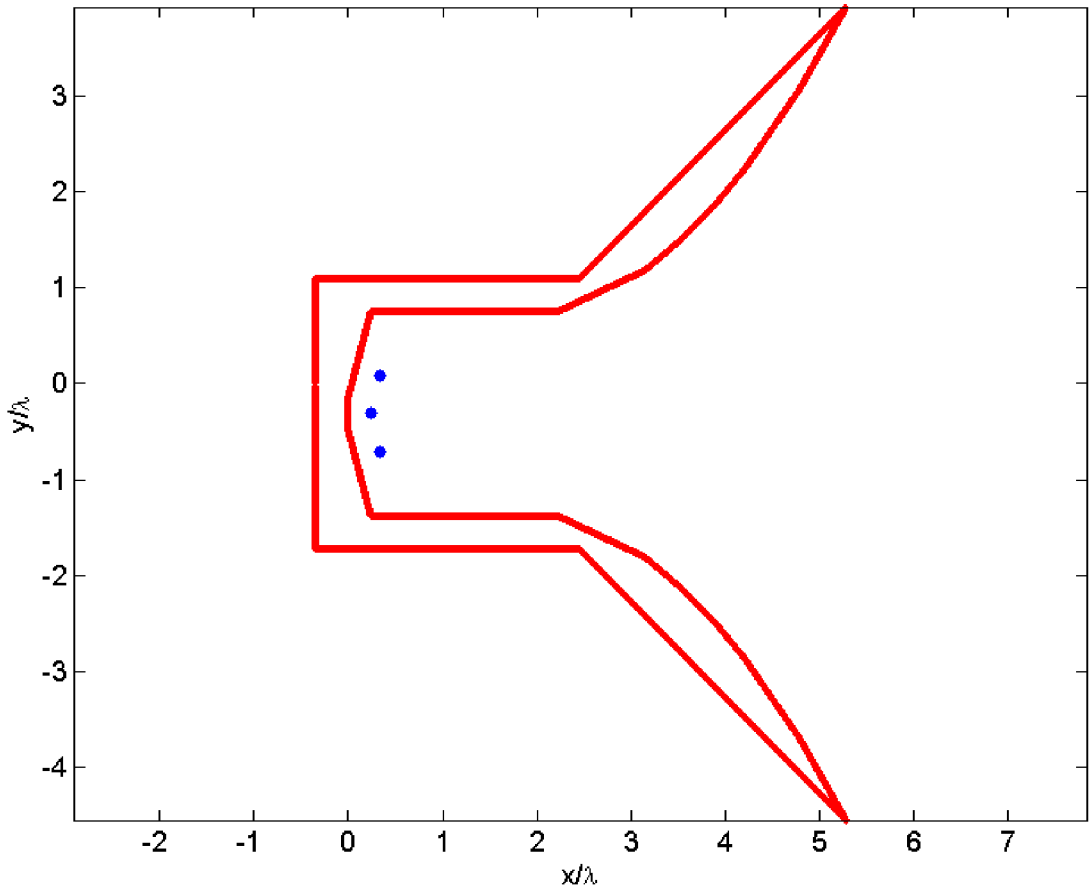
Şekil 4.30 Model 6 horn antenin geometrisi.



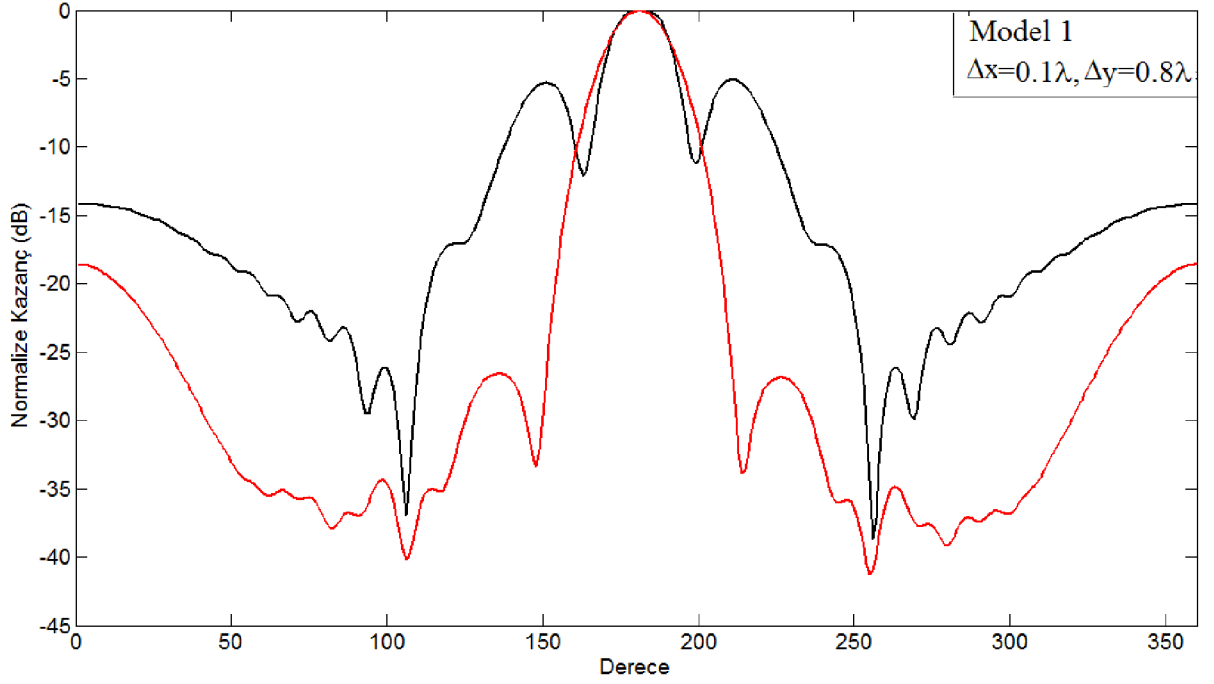
Şekil 4.31 Farklı besleme mesafelerine bağlı olarak model 6 horn anteninden elde edilen normalize ışıma paternlerinin karşılaştırılması.

4.7 Model 7 Horn Anteni

Yapılan çalışmalar sonucunda model 1, model 2, model 3, model 5 ve model 6 horn antenlerinin analizlerinden elde edilen sonuçlardan faydalanılarak model 7 horn anteni tasarlanmıştır. Tasarlanan horn antenin boyutları $a=1.1\lambda$, $b=2\lambda$, $c=4\lambda$, $R=1$, $d=0.1\lambda$, $d_x=0.25\lambda$, $\alpha_1=\alpha_2=\varphi_1=\varphi_2=45^\circ$, $\Psi_1=\Psi_2=75^\circ$ olacak şekilde ayarlanmıştır. Tasarlanan horn antenin geometrisi şekil 4.32’de, yapılan analiz sonucunda elde edilen normalize ışıma paterninin model 1 horn anteninden elde edilen normalize ışıma paterni ile karşılaştırılması ise şekil 4.33’de verilmiştir. Kıyaslama işlemi daha öncekilerde olduğu gibi model 1 horn anteni referans alınarak yapılmıştır.



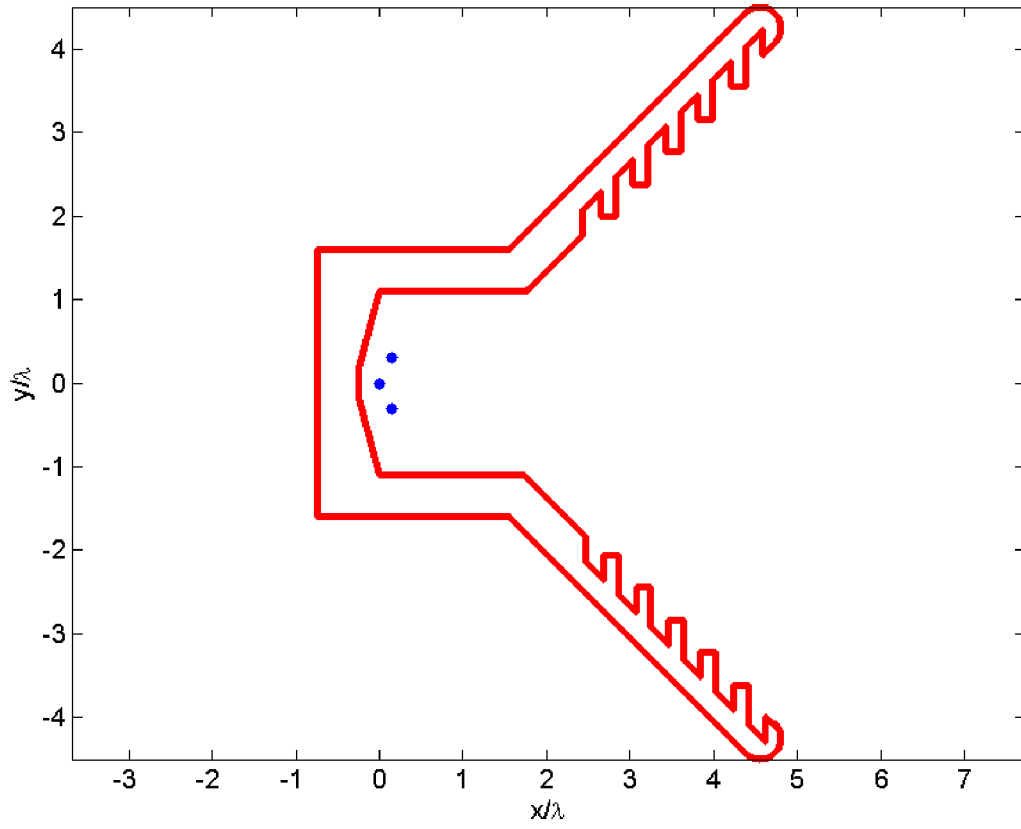
Şekil 4.32 Model 7 horn anteninin geometrisi.



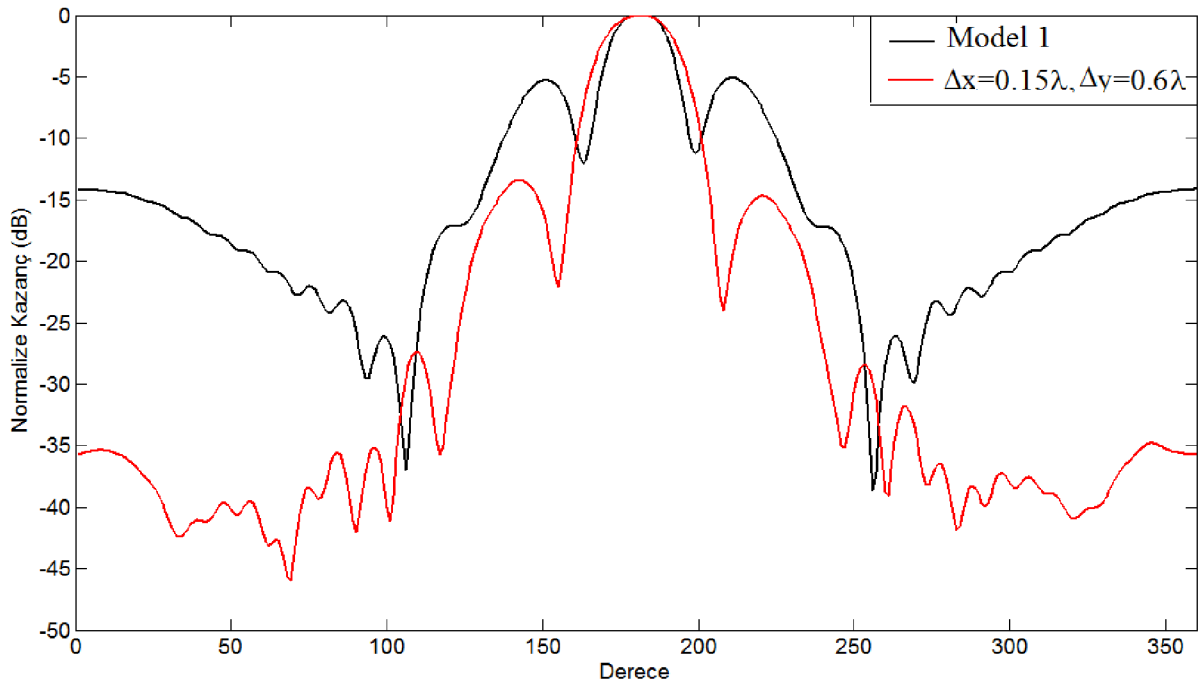
Şekil 4.33 Model 7 horn anteninden elde edilen normalize ışıma paterinin model 1 horn anteninden elde edilen ışıma paterni ile kıyaslanması.

4.8 Model 8 Horn Anteni

Parametrik analizleri yapılan horn antenlerin yan ve arka loblarını düşürmeye yönelik yapılan son tasarımda; model 1, model 2, model 3, model 4 ve model 6 horn antenlerinin analiz sonuçlarından faydalanılmıştır. Tasarlanan horn antenin boyutları $a=1.1 \lambda$, $b=2 \lambda$, $c=4 \lambda$, $R=1$, $d=0.1\lambda$, $d_x=0.25 \lambda$, $\alpha_1=\alpha_2=\phi_1=\phi_2=45^\circ$, $\Psi_1=\Psi_2=75^\circ$ olacak şekilde ayarlanmıştır. Model 8 horn anteninin geometrisi şekil 4.34'te, analiz sonucunda elde edilen normalize ışıma paterni kıyaslaması ise şekil 4.35'te görülmektedir. Kıyaslama işleminde referans olarak model 1 horn anteni kullanılmıştır.



Şekil 4.34 Model 8 horn antenin görünümü.



Şekil 4.35 Model 8 horn anteninden elde edilen normalize ışıma paterinin model 1 horn anteninden elde edilen ışıma paterni ile kıyaslanması.

5. SONUÇLAR VE YORUMLAR

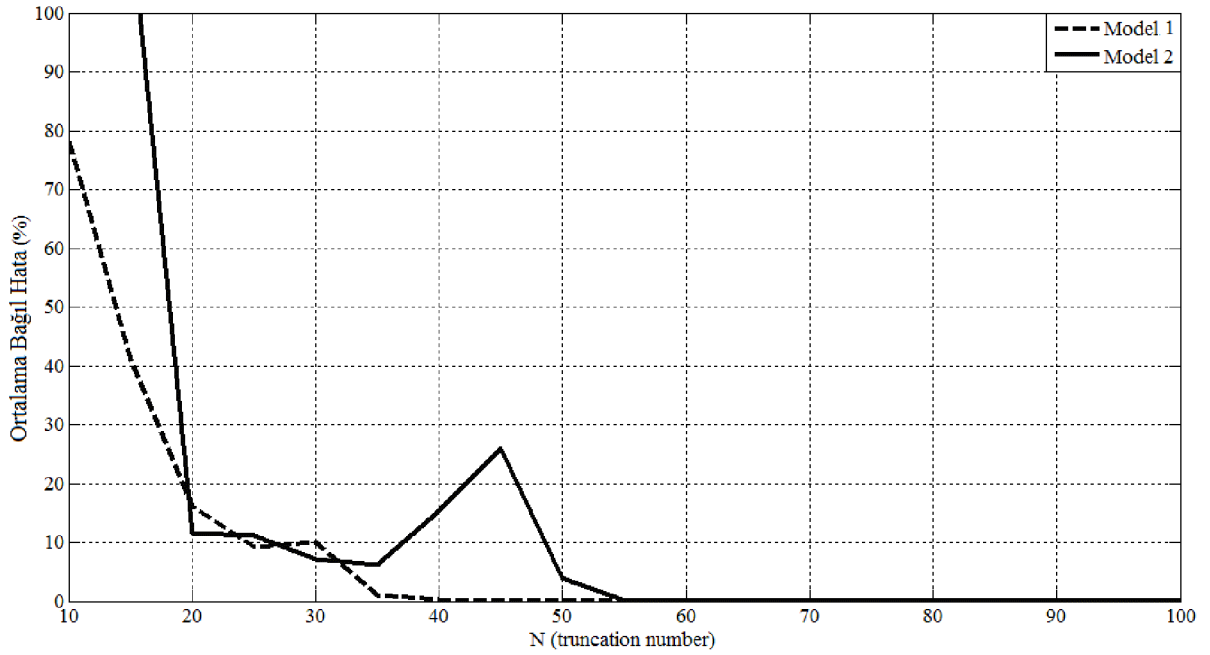
Bu çalışmada birbirinden farklı sekiz adet horn anten yapısı ele alınmıştır. Bu bağlamda ilk olarak model 1 ve model 2 horn antenlerinin tüm parametrik analizleri yapılmıştır. Yapılan başlıca parametrik analizler; dalga kılavuzunun uzunluğu, genişliği, kanat uzunluğu, kanat açısı, duvar kalınlığı, beslemenin konumu gibi çeşitli parametrelerin değişiminin horn antenin ışıma paterni üzerindeki etkisinin incelenmesine dayalı analizleridir. Parametrik analizleri yapılan diğer model 3 ve model 4 horn antenlerinin amacı, ilk iki horn antenin yan ve arka loblarını düşürmek kaydıyla ışıma paternlerini iyileştirmektir. Bu amaçla horn antenin arka duvarının yuvarlatılması, horn antenin kanat iç duvarının yumuşak geçişli yapılması gibi değişimlerin horn antenin ışıma paterni üzerindeki etkileri incelenmiştir. Model 1, model 2, model 3 ve model 4 horn antenlerinin parametrik analizleri yapıldıktan sonra tasarım aşamasına geçilmiştir. Tasarım aşamasında tek kaynaklı besleme kullanılması yerine çok kaynaklı besleme kullanılması durumu da ele alınmıştır. Model 7 ve model 8 horn antenleri, yapılan tüm analiz sonuçları kullanılarak tasarlanan nihai antenlerdir. Model 7 horn anteninin tasarımında, model 1, model 2, model 3, model 5, model 6 horn antenlerinin analiz sonuçları kullanılırken model 8 horn anteninin tasarımında, model 1, model 2, model 3, model 4, model 6 horn antenlerinden elde edilen sonuçlar kullanılmıştır. Bu antenlerin tasarımındaki amacın yan ve arka lobları düşürmek olduğu göz önüne alındığında tasarlanan model 7 ve model 8 horn antenlerinin, şekil 4.32 ve şekil 4.34 ışıma paternlerinden de görülebileceği gibi, oldukça başarılı sonuçlar verdiği söylenebilir.

Yapılan analizler sonucunda, horn anten kanadının iç duvarında yumuşak geçişin sağlanmasının yan ve arka lobları önemli ölçüde düşürdüğü gözlenmiştir. Bununla birlikte horn anteni beslemek için, tek kaynaklı besleme ile kıyaslandığında daha fazla yönlendiriciliğe sahip olduğundan dolayı, aralarındaki mesafelerin düzgün ayarlanması koşuluyla çok kaynaklı besleme kullanılması da yan ve arka lobları önemli ölçüde düşürmektedir. Işıma paterni açısından bir başka iyileştirici etki de horn antenin arka duvarının yuvarlatılmasıyla elde edilmiştir. Bu çalışmada arka duvar üç parçaya ayrılmış ve horn antenin ışıma paterninde önemli iyileşmeler gözlenmiştir.

Yapılan analizlerde sırasıyla tablo 5.1 ve şekil 5.1'den de görülebileceği gibi hızlı ve kararlı sonuçlar verdiğinden dolayı analitik regülarizasyon yöntemi kullanılmıştır.

Tablo 5.1 ARM ve 3D MoM simülâtörünün hesaplama sürelerinin karşılaştırılması
(Dual Core 2.53 GHz, 4 GB RAM)

MODEL (No)	Truncation Number (N)	Computation Time	
		2D ARM	3D MoM Simulator
1	30	9.84 s.	16 m. 23 s.
	60	51.18 s.	
	80	1 m. 53 s.	
2	30	9.84 s.	12 m. 45 s.
	60	51.18 s.	
	80	1 m. 53 s.	



Şekil 5.1 N kesim sayısına bağlı olarak model 1 ve model 2 horn antenlerine ait ortalama bağıl hata değerleri.

KAYNAKLAR

- Balanis, C. A., (2005), Antenna Theory Analysis and Design 3rd ed., John Wiley & Sons, New York.
- Chang, C., Zhu, X. X. ve Zhang, Z. Q., (2010), "Design and Experiments of the GW High-power Microwave Feed Horn", Progress In Electromagnet. Research (PIER), 101:157-171.
- Chumachenko, V. P. ve Türk, A. S., (2001), "Radiation Characteristics of wide-angle H-plane sectoral horn loaded with dielectric of multiangular shape", Int. Journal Electronics, 88: 91-101.
- Ewe, W., Li, L., Wu, Q. ve Leong, M., (2005), "Analysis of Reflector and Horn Antennas Using Adaptive Integral Methods", IEICE Trans. Comm., vol. E88-B, no.6.
- Hamid, M. ve Al-Sulaiman, A., (1983), "New Types of Dielectric-loaded Horn Antennas", Int. Journal of Electronics, 55:729-750.
- Heydari, D. R., Hassani, H. R. ve Mallahzadeh, A. R., (2008), "A New 2-18 GHz Quad-ridged Horn Antenna", Progress In Electromagnetics Research (PIER), 81:183-195.
- Karacuha, E. ve Türk, A. S., (2001) "E-polarized scalar wave diffraction by perfectly conductive arbitrary shaped cylindrical obstacles with finite thickness", Int. J. Infrared and Millimeter Waves, 22:1531-1546.
- Milligan, T. A., (2005), Modern Antenna Design 2nd ed., IEEE Press, John Wiley & Sons, New York.
- Mitra, R. ve Lee, S.W., (1971), "Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves", The MacMillan Company, New York.
- Parker, E. A., Philips, B. ve Langley, R. J., (1995), "Experimental Variable Beam Width Horn", Electronic Letters, 31:1539-1540.
- Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A. ve Marichev, O.I., (1986), Integrals and Series Volume 1:Elementary Functions, Gordon and Breach, New York.
- Schorr, M.G. ve Beck, F.J., (1950), "Electromagnetic Field of a Conical Horn", J.Appl. Phys., 21:795-801.
- Skolnik, M. I., (1990), Radar Handbook 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
- Tuchkin, Yu. A., (1985), "Wave Scattering by an Open Cylindrical Screen of Arbitrary Profile With Dirichlet Boundary Value Condition", Soviet Physics Doclady, 30:1027-1030.
- Türk, A. S., (1998), Sonlu Kalınlıklı Sonsuz Uzun Mükemmel İletken Silindirik Cisimlerden Skaler Dalga Saçılması, Yüksek Lisans Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Gebze.
- Türk, A. S., (2006), "Analysis of Aperture Illumination and Edge Rolling Effects for Parabolic Reflector Antenna Design", Int. J. Electronics Communications (AEÜ), 60:257-266.
- Türk, A. S., Yücedağ, O. M., Yurduseven, O., (2010) "Parametric analysis of H-plane horn antenna radiation", Proc. 7th Int. Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter Submillimeter Waves, *IEEE press*, 22-24 June 2010, Ukraine.

EKLER**KOSİNÜS VE SİNÜS İNTEGRALLERİ**

$$S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau$$

$$C_i(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos(\tau)}{\tau} d\tau = \int_\infty^x \frac{\cos(\tau)}{\tau} d\tau$$

$$C_{in}(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos(\tau)}{\tau} d\tau$$

$$C_{in}(x) = \ln(\gamma x) - C_i(x) = \ln(\gamma) + \ln(x) - C_i(x)$$

$$C_{in}(x) = \ln(1.781) + \ln(x) - C_i(x) = 0.577215665 + \ln(x) - C_i(x)$$

Ayrıca

$$S_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

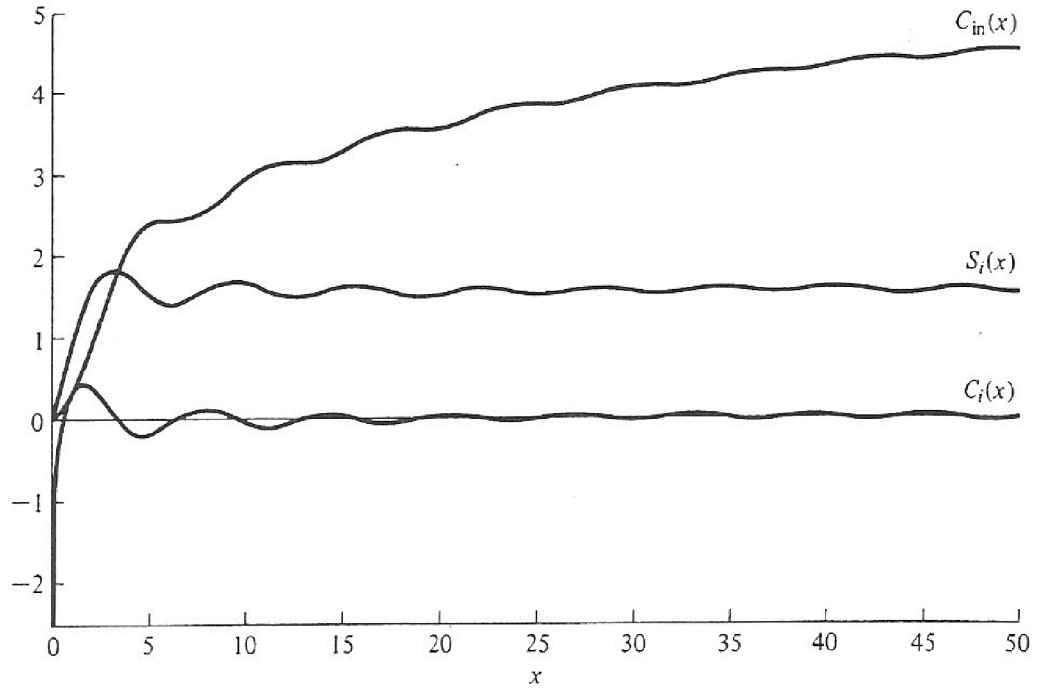
$$C_i(x) = C + \ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k(2k)!}$$

$$C_{in}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{2k(2k)!}$$

x	$S_i(x)$	$C_i(x)$	$C_{in}(x)$	x	$S_i(x)$	$C_i(x)$	$C_{in}(x)$
0.0	0.0	$-\infty$	0.00000	4.9	1.56956	-0.19478	2.36123
0.1	0.09994	-1.72787	0.00250	5.0	1.54993	-0.19003	2.37668
0.2	0.19956	-1.04221	0.00998	5.1	1.53125	-0.18348	2.38993
0.3	0.29850	-0.64917	0.02242	5.2	1.51367	-0.17525	2.40113
0.4	0.39646	-0.37881	0.03973	5.3	1.49732	-0.16551	2.41043
0.5	0.49311	-0.17778	0.06185	5.4	1.48230	-0.15439	2.41800
0.6	0.58813	-0.02227	0.08866	5.5	1.46872	-0.14205	2.42402
0.7	0.68122	0.10051	0.12003	5.6	1.45667	-0.12867	2.42865
0.8	0.77210	0.19828	0.15579	5.7	1.44620	-0.11441	2.43209
0.9	0.86047	0.27607	0.19579	5.8	1.43736	-0.09944	2.43451
1.0	0.94608	0.33740	0.23981	5.9	1.43018	-0.08393	2.43610
1.1	1.02869	0.38487	0.28765	6.0	1.42469	-0.06806	2.43703
1.2	1.10805	0.42046	0.33908	6.1	1.42087	-0.05198	2.43749
1.3	1.18396	0.44574	0.39384	6.2	1.41871	-0.03587	2.43764
1.4	1.25623	0.46201	0.45168	6.3	1.41817	-0.01989	2.43765
1.5	1.32468	0.47036	0.51232	6.4	1.41922	-0.00418	2.43770
1.6	1.38918	0.47173	0.57549	6.5	1.42179	0.01110	2.43792
1.7	1.44959	0.46697	0.64088	6.6	1.42582	0.02582	2.43846
1.8	1.50582	0.45681	0.70819	6.7	1.43121	0.03986	2.43947
1.9	1.55778	0.44194	0.77713	6.8	1.43787	0.05308	2.44106
2.0	1.60541	0.42298	0.84738	6.9	1.44570	0.06539	2.44334
2.1	1.64870	0.40051	0.91864	7.0	1.45460	0.07670	2.44643
2.2	1.68762	0.37507	0.99060	7.1	1.46443	0.08691	2.45040
2.3	1.72221	0.34718	1.06295	7.2	1.47509	0.09596	2.45534
2.4	1.75249	0.31729	1.13539	7.3	1.48644	0.10379	2.46130
2.5	1.77852	0.28587	1.20764	7.4	1.49834	0.11036	2.46834
2.6	1.80039	0.25334	1.27939	7.5	1.51068	0.11563	2.47649
2.7	1.81821	0.22008	1.35038	7.6	1.52331	0.11960	2.48577
2.8	1.83210	0.18649	1.42035	7.7	1.53611	0.12225	2.49619
2.9	1.84219	0.15290	1.48903	7.8	1.54894	0.12359	2.50775
3.0	1.84865	0.11963	1.55620	7.9	1.56167	0.12364	2.52044
3.1	1.85166	0.08699	1.62163	8.0	1.57419	0.12243	2.53422
3.2	1.85140	0.05526	1.68511	8.1	1.58637	0.12002	2.54906
3.3	1.84808	0.02468	1.74646	8.2	1.59810	0.11644	2.56491
3.4	1.84191	-0.00452	1.80551	8.3	1.60928	0.11177	2.58170
3.5	1.83313	-0.03213	1.86211	8.4	1.61981	0.10607	2.59938
3.6	1.82195	-0.05797	1.91612	8.5	1.62960	0.09943	2.61785
3.7	1.80862	-0.08190	1.96745	8.6	1.63857	0.09194	2.63704
3.8	1.79339	-0.10378	2.01599	8.7	1.64665	0.08368	2.65686
3.9	1.77650	-0.12350	2.06169	8.8	1.65379	0.07476	2.67721
4.0	1.75820	-0.14098	2.10449	8.9	1.65993	0.06528	2.69799
4.1	1.73874	-0.15617	2.14437	9.0	1.66504	0.05535	2.71909
4.2	1.71837	-0.16901	2.18131	9.1	1.66908	0.04507	2.74042
4.3	1.69732	-0.17951	2.21534	9.2	1.67205	0.03455	2.76186
4.4	1.67583	-0.18766	2.24648	9.3	1.67393	0.02391	2.78332
4.5	1.65414	-0.19349	2.27478	9.4	1.67473	0.01325	2.80467
4.6	1.63246	-0.19705	2.30032	9.5	1.67446	0.00268	2.82583
4.7	1.61101	-0.19839	2.32317	9.6	1.67316	-0.00771	2.84669
4.8	1.58998	-0.19760	2.34344	9.7	1.67084	-0.01780	2.86715

x	$S_i(x)$	$C_i(x)$	$C_{in}(x)$	x	$S_i(x)$	$C_i(x)$	$C_{in}(x)$
9.8	1.66757	-0.02752	2.88712	14.6	1.59702	0.06278	3.19546
9.9	1.66338	-0.03676	2.90651	14.7	1.60296	0.05943	3.20563
10.0	1.65835	-0.04546	2.92526	14.8	1.60851	0.05554	3.21631
10.1	1.65253	-0.05352	2.94327	14.9	1.61360	0.05113	3.22744
10.2	1.64600	-0.06089	2.96050	15.0	1.61819	0.04628	3.23899
10.3	1.63883	-0.06751	2.97687	15.1	1.62226	0.04102	3.25089
10.4	1.63112	-0.07332	2.99234	15.2	1.62575	0.03543	3.26308
10.5	1.62294	-0.07828	3.00687	15.3	1.62865	0.02955	3.27552
10.6	1.61439	-0.08237	3.02044	15.4	1.63093	0.02345	3.28813
10.7	1.60556	-0.08555	3.03301	15.5	1.63258	0.01719	3.30086
10.8	1.59654	-0.08781	3.04457	15.6	1.63359	0.01084	3.31364
10.9	1.58743	-0.08915	3.05513	15.7	1.63396	0.00447	3.32641
11.0	1.57831	-0.08956	3.06467	15.8	1.63370	-0.00187	3.33910
11.1	1.56927	-0.08907	3.07323	15.9	1.63280	-0.00812	3.35165
11.2	1.56042	-0.08769	3.08082	16.0	1.63130	-0.01420	3.36400
11.3	1.55182	-0.08546	3.08748	16.1	1.62921	-0.02007	3.37610
11.4	1.54356	-0.08240	3.09323	16.2	1.62657	-0.02566	3.38789
11.5	1.53571	-0.07857	3.09813	16.3	1.62339	-0.03093	3.39931
11.6	1.52835	-0.07401	3.10224	16.4	1.61973	-0.03583	3.41033
11.7	1.52155	-0.06879	3.10560	16.5	1.61563	-0.04031	3.42088
11.8	1.51535	-0.06297	3.10828	16.6	1.61112	-0.04433	3.43095
11.9	1.50981	-0.05661	3.11036	16.7	1.60627	-0.04786	3.44049
12.0	1.50497	-0.04978	3.11190	16.8	1.60111	-0.05087	3.44947
12.1	1.50088	-0.04257	3.11299	16.9	1.59572	-0.05334	3.45787
12.2	1.49755	-0.03504	3.11369	17.0	1.59014	-0.05524	3.46567
12.3	1.49501	-0.02729	3.11410	17.1	1.58443	-0.05657	3.47287
12.4	1.49327	-0.01938	3.11429	17.2	1.57865	-0.05732	3.47945
12.5	1.49234	-0.01141	3.11435	17.3	1.57285	-0.05749	3.48541
12.6	1.49221	-0.00344	3.11436	17.4	1.56711	-0.05708	3.49076
12.7	1.49287	0.00443	3.11439	17.5	1.56146	-0.05610	3.49552
12.8	1.49430	0.01214	3.11452	17.6	1.55598	-0.05458	3.49969
12.9	1.49647	0.01961	3.11484	17.7	1.55070	-0.05252	3.50330
13.0	1.49936	0.02676	3.11540	17.8	1.54568	-0.04997	3.50638
13.1	1.50292	0.03355	3.11628	17.9	1.54097	-0.04694	3.50895
13.2	1.50711	0.03989	3.11754	18.0	1.53661	-0.04348	3.51106
13.3	1.51188	0.04574	3.11924	18.1	1.53264	-0.03962	3.51274
13.4	1.51716	0.05104	3.12143	18.2	1.52909	-0.03540	3.51404
13.5	1.52291	0.05576	3.12415	18.3	1.52600	-0.03088	3.51500
13.6	1.52905	0.05984	3.12744	18.4	1.52339	-0.02610	3.51566
13.7	1.53552	0.06327	3.13134	18.5	1.52128	-0.02111	3.51609
13.8	1.54225	0.06602	3.13587	18.6	1.51969	-0.01596	3.51634
13.9	1.54917	0.06806	3.14104	18.7	1.51863	-0.01071	3.51644
14.0	1.55621	0.06940	3.14688	18.8	1.51810	-0.00540	3.51647
14.1	1.56330	0.07002	3.15337	18.9	1.51810	-0.00010	3.51648
14.2	1.57036	0.06993	3.16053	19.0	1.51863	0.00515	3.51650
14.3	1.57733	0.06914	3.16834	19.1	1.51967	0.01029	3.51661
14.4	1.58414	0.06767	3.17678	19.2	1.52122	0.01528	3.51685
14.5	1.59072	0.06554	3.18583	19.3	1.52324	0.02006	3.51726

x	$S_i(x)$	$C_i(x)$	$C_{in}(x)$	x	$S_i(x)$	$C_i(x)$	$C_{in}(x)$
19.4	1.52572	0.02459	3.51790	19.8	1.53954	0.03943	3.52347
19.5	1.52863	0.02883	3.51880	19.9	1.54378	0.04215	3.52579
19.6	1.53192	0.03274	3.52000	20.0	1.54824	0.04442	3.52853
19.7	1.53557	0.03629	3.52155				



Şekil ek.1 Kosinüs ve sinüs integral çizimleri (Balanis, 2005).

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	27.06.1987	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	2001-2005	Süleyman Nazif Lisesi (Y.D.A)
Lisans	2005-2009	Yıldız Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Fak. Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2009-2010	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Müh. Anabilim Dalı, Haberleşme Programı