

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SİLİNDİRİK GEOMETRİYE SAHİP
SAÇILMA PROBLEMLERİNDE
İNTEGRAL GÖSTERİLİM YOLUYLA
KESİN SAYISAL ÇÖZÜM YAKLAŞIMI**

Elek. ve Hab. Müh. Kıvanç KALAYCIOĞLU

**F.B.E. Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı Haberleşme Programında
hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ



Tez Danışmanı : Prof.Dr. Taner ŞENGÖR

İSTANBUL, 1997

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında benim için gerçek bir yol gösterici olan, işlerin en zorlaştığı zamanlarda dahi aşıldığı motivasyonla bu çalışmanın sonuçlanmasını sağlayan tez danışmanım Prof. Dr. Taner Şengör'e, verdikleri destek ve gösterdikleri sabırla daima yanımda olan aileme ve bugünlere ulaşmamızı sağlayan, Cumhuriyetimizin kurucusu ulu önder Atatürk'e teşekkürü bir borç bilirim.

Kıvanç Kalaycıoğlu
İstanbul, 1998



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	iv
TÜRKÇE ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1. Saçılmanın İncelenmesi ve Problemin Tanıtılması.....	1
1.2. Silindirik Geometrilere Saçılma.....	2
BÖLÜM 2	
GELEN ALANA İLİŞKİN İNTEGRAL	
GÖSTERİLİMLERİN ELDE EDİLMESİ.....	6
2.1. Problemin Geometrisi ve Formülasyonu.....	6
2.2. Halka Kaynağın Alanı.....	12
2.2.1. Problemdeki Bölgeler İçin Çözümlerin Belirlenmesi.....	13
2.2.2. Magnetik Vektör Potansiyeli İçin İntegral Gösterilimler.....	15
2.2.3. Bölgeler İçin Alan İfadelerinin Elde Edilmesi.....	16
2.2.4. Sınır Koşulları.....	19
2.2.5. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi.....	23
2.2.6. İntegrallerin Değerlendirilmesi.....	24
2.2.7. Alan Hesaplamaları ve Sonuçlar.....	35
BÖLÜM 3	
SAÇILMA PROBLEMİNE İLİŞKİN İNTEGRAL	
GÖSTERİLİMLERİN ELDE EDİLMESİ.....	42
3.1. Problemin Geometrisi ve Formülasyonu.....	42
3.2. Problemdeki Bölgeler İçin Çözümlerin Belirlenmesi.....	43
3.3. Magnetik Vektör Potansiyeli İçin İntegral Gösterilimler.....	45
3.4. Bölgeler İçin Alan İfadelerinin Elde Edilmesi.....	47

3.5	Sınır Koşulları.....	51
3.6	İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi.....	55
3.7	Alan Hesaplamaları ve Sonuçlar.....	94
	EK - 1 Hesaplamalarda Kullanılan MATLAB Scriptleri.....	101

KAYNAKLAR.....	112
----------------	-----



ÖZET

Bu tezde, bir akım halkası tarafından aydınlatılan mükemmel elektriksel iletken bir silindirden saçılma problemi ele alınmış ve alan ifadelerinin integral gösterilimleri yoluyla bir sayısal kesin çözüm yaklaşımı ortaya konulmuştur.

Mükemmel iletken silindirin alt ve üst tabanlarına paralel ve bu tabanlardan eşit uzaklıkta bulunan düzlemde çapı silindirin çapından daha büyük olan bir akım halkası yerleştirilmiş ve sistem bu kaynakla uyarılmıştır. Bu haliyle yapılan çalışma; hem sonlu dairesel silindirik geometriden saçılma hem de eşmerkezli silindirik yansıtıcı bulunduran bir halka antenin karakteristiklerinin belirlenmesi olarak ortaya konulabilir. Sadece halka kaynak bulunması hali ile halka kaynak karşısında saçıcının yer alması hali ayrı ayrı çözülmüştür. Böylelikle gelen alan ve saçılan alan bilgilerinin ayrıştırılması olanağı sağlanmıştır. Problem, saçılma özelliklerine göre belirlenen ayrı ayrı bölgeler halinde incelenmiş ve bu bölgelerin herbiri için alan ifadeleri yazılmıştır. Bu alan ifadelerinde yer alan bilinmeyen katsayıların hesaplanması için Fourier ve Hankel dönüşümleri kullanılmış ve bazı adi diferansiyel denklemlerin de yardımıyla sonuçta çözülmesi gereken bir cebirsel denklem sistemi elde edilmiştir. Önce bu denklem sisteminin sayısal çözümü yapılarak integral gösterilimlerde yer alan katsayılar belirlenmiştir; sonra da katsayılara ilişkin bu sayısal sonuçlar yardımıyla yakın ve uzak alan ifadelerine ilişkin integraller sayısal olarak hesaplanmıştır.

ABSTRACT

A scattering problem which consists of a perfectly electrical conducting circular cylinder and a current loop that illuminates the cylinder is considered and an exact numerical solution approach is presented by means of integral representations of the field expressions.

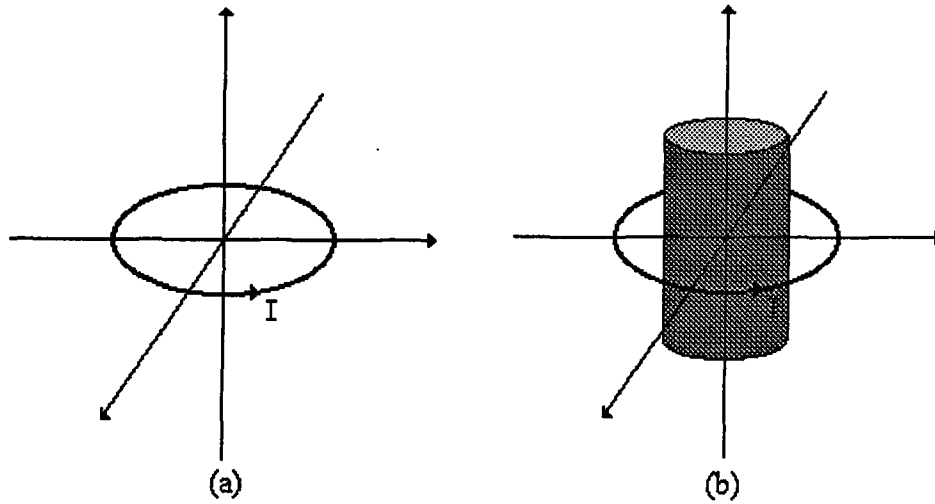
The cylinder is excited by a current loop with a bigger radius than the cylinder. In this manner, this work can be treated as solution of a scattering problem from a finite circular cylinder or examination of radiation characteristics of a loop antenna with a cylindrical reflector. Two problems, one consisting only a current loop and the other consisting the cylindrical reflector concentric with the loop are solved separately. So it is possible to distinguish incident and scattered field. The problem is divided into several characteristic regions and integral representations for these regions are obtained. Those field expressions include some unknown coefficients. To determine those coefficients Fourier and Hankel Transforms are used and by means of some ordinary differential equations eventually a linear algebraic equations system is obtained. At first, this equations system is solved numerically so the unknown coefficients that take place in the integral representations are found, and then by using these numerical results integrals which give near field and far field are calculated numerically.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Saçılmanın İncelenmesi ve Problemin Tanıtılması :

Genel olarak dalga propagasyonu problemleri, probleme konu olan uzay bölgesinde çeşitli yapıların (saçıcıların) varlığı halinde (özellikle bu yapılar dalga kaynağı veya alıcılara yakın iseler) farklı bir şekilde ele alınmalıdır. Örneğin bir akım halkasını ele alalım (Şekil 1.1.1.a) ve daha sonra bu akım halkasının içine Şekil 1.1.1.b'deki gibi mükemmel elektriksek iletkenlen yapılmış bir silindir yerleştirelim. Birinci konfigürasyonun analizi, örneğin uzak alan hesaplamaları Maxwell denklemleri ya da dalga denklemi kullanılarak doğrudan veya magnetik vektör potansiyeli yoluyla belirli bazı frekans bölgeleri için yapılabilir (Balanis, 1989). İkinci problem ise bir kaynak (akım halkası) ve bir de saçıcı (mükemmel iletken silindir) içermekte olup (Şekil 1.1.1.b) analizi bir sınır değer probleminin çözümünü gerektirmektedir; söz konusu çözüm bu tez çalışmasının konusunu oluşturmaktadır.



Şekil 1.1.1 Saçıcının bulunduğu ve bulunmadığı haller.

Birinci konfigürasyonun da tezde ele alınan yöntemle incelenmesi yöntemin açıklıkla ortaya konulabilmesi açısından gereklidir. Diğer taraftan yöntemin her frekans bölgesi için sonuç veriyor olması nedeni ile bu problem için elde edilen sonuçlar da literatür açısından önem taşımaktadır. Birinci konfigürasyonda söz konusu olan sınır koşulları , radyasyon koşulu ve $\rho = 0$ 'da alanın sonlu kalması koşuludur.

Saçılma (Scattering), fiziksel veya geometrik herhangi bir süreksizliğin gelen alana etkisini ifade eder; genel olarak yansıma (reflection), kırınım (diffraction) ve diğer bazı özel modların (Creeping Waves ve Whispering Gallery Modes) toplamı olarak da tanımlanabilir. Elektromagnetik dalgaların yansıması Geometrik Optiğin yasalarının elektromagnetik dalgalara uyarlanması ile açık bir şekilde ifade edilmiştir. Fakat ışık propagasyonunun geometrik optiğin öngörülerinden farklı davrandığı bir süreç olan kırınım nitelik olarak Işığın Dalga Teorisi, nicelik olarak da dalga denklemi veya Maxwell denklemlerinin çözümü ile anlaşılabilir. İlk olarak ince bir ekran üzerinde bulunan delikte meydana gelen kırınım olayı Kirchoff (1891) tarafından incelenmiş ve bir çözüm metodu önerilmiştir.

1.2. Silindirik Geometrilere Saçılma :

Elektromagnetik saçılma olayları açısından düzlemsel silindirik ve küresel şekilli cisimler en önemli geometrik şekil sınıflarını oluştururlar. Pratikte karşılaşılan pek çok saçıcı nesne (bir uçağın veya roketin gövdesi vs.) çoğu zaman silindirik yapılar ile temsil edilebilir. Dairesel silindir ise basitliği ve bu geometriye sahip problemlerin çözümünde kullanılan silindirik fonksiyonların (Bessel ve Hankel fonksiyonları gibi) iyi biliniyor olması sebebiyle pratikteki saçıcıların modellenmesinde belki de en sık kullanılan geometridir (Balanis, 1989). Kırınım problemlerine getirilen ilk kesin çözümlerden birisi Rayleigh'ın (1881) elektromagnetik dalgaların mükemmel iletken daireli silindirden saçılma problemine ait çözümüdür. Değişkenlere Ayırma yöntemi ile elde edilen bu çözüm, terimleri açıl koordinatın trigonometrik fonksiyonları ve radyal koordinatın silindirik fonksiyonlarının çarpımı olan bir sonsuz seriydi. O dönemin hesaplama olanaklarına göre oldukça elverişsiz olan bu çözüm daha sonra Debye (1908) tarafından

tekrar incelenmiş ve integraller en dik iniş (steepest descent) metodu ile asimptotik olarak hesaplanıp aydınlatılan silindirin yüzeyinde indüklenen akımlar hesaplanmıştır (Keller, 1985). W. Franz ve ekibi dairesel bir silindirin çevresi boyunca ilerleyen ve üstel olarak zayıflayan dalgaların varlığını keşfetmişler ve bunlara “sürünen dalgalar ” (Creeping Waves) adını vermişlerdir (Rao et.al., 1979). Dielektrikten yapılmış veya dielektrik kaplı silindir yüzeyinde oluşan creeping wave modları üzerinde çalışmalar yapılmaktadır (Albertsen, 1989).

Bir saçılma olayında gelen, saçılan ve toplam alan büyüklükleri çeşitli teknikler kullanılarak saptanabilir. Geometrik Optik (GO), Fizik Optik (PO), Modal Teknikler (Konfigürasyona dayalı özel çözümler - MT), İntegral Denklemler (IE), Moment Metodu (MM) ve Kırınım (Difraksiyon) Kuramları (Kırınımın Geometrik Kuramı - GTD, Kırınımın Fiziksel Kuramı - PTD ve Kırınımın Fizik ve Yüzey Kuramı - PASTD (Şengör, 1989, 1992)) gibi yöntemler bu tür problemleri analiz etmek için kullanılabilir (Balanis, 1989). Doğal olarak da bazı metodlar belirli problem tipleri için daha kolay bir şekilde çözüme ulaşmayı sağlamaktadır.

Örneğin Şekil 1.1.1.b’de geometrisi verilmiş olan probleme Geometrik Optiğin (GO) bakış açısıyla yaklaşıldığında sadece gelen ve yansıyan ışınlar vardır. Fakat bu tür bir yaklaşım bizi doğru sonuca götürmez. Eğer gelen ışınların silindirin alt ve üst kenarlarına çarptığında ilave yeni ışınların oluştuğu farzedilip Keller’in ayrıt kırınımı için verdiği kurallar (Keller, 1956) uygulanırsa daha uygun bir çözüm yöntemi olan Kırınımın Geometrik Kuramı’na (GTD - Geometrical Theory of Diffraction) ulaşılır. GTD, kırınım olayı da kurama dahil edilerek Geometrik Optiğe uygulanan bir genişletmedir. Fakat GO gibi dalgaboyunun probleme konu olan fiziksel boyutlara oranla çok küçük olduğu durumlarda geçerlidir. Ayrıca Şekil 1.1.1.b’deki konfigürasyona geri dönersek burada GTD ile çözüm yapılmak istenildiğinde gelen ışınların da belirlenmesi ayrıca sorun olacaktır.

Sonlu ve sonsuz uzunluktaki iletken ve/veya dielektrik silindirler ile dielektrik kaplı iletken silindirlerin farklı polarizasyona sahip düzlemsel ve silindirik dalgalarla aydınlatılması sonucu ortaya çıkan saçılmalar şu ana dek pekçok çalışmanın konusu olmuştur. Silindirik dalga dönüşümlerine dayanan modal teknikler bu tür bir inceleme

için başlangıç noktası olarak kabul edilebilir (Balanis,1989). Saçılmanın incelenmesinde belirli bir koordinat sistemindeki dalga fonksiyonlarının bir başka koordinat sistemindeki dalga fonksiyonları cinsinden yazılması çoğunlukla daha uygundur. Örneğin düzlemsel dalgaların silindirden saçılması incelenirken dik kartezyen koordinat sisteminde yazılmış olan üniform düzlemsel dalga ifadesinin silindirik dalga fonksiyonları türünden ifadesi çözüme daha elverişlidir, çünkü silindirik yapının yüzeyini silindirik koordinatları kullanarak tanımlamak daha kolaydır. Bu tür dönüşümlere silindirik dalga dönüşümleri adı verilir. Bu yöntem kullanılarak sonsuz uzunluktaki mükemmel elektriksel iletken dairesel silindirin E ve H polarizasyonuna sahip düzlemsel dalga, çizgisel kaynak, dipol ve noktasal kaynak tarafından aydınlatılması ile meydana gelen saçılmaya ilişkin kesin çözümler, alçak frekans ve yüksek frekans yaklaşımları uzun zaman önce elde edilmiştir (Astevas et.al.,1969). Sonlu silindirler ve dielektrik silindirlerden saçılma problemleri şu anda da üzerinde çalışılan konulardır. Örneğin içiçe geçmiş eş veya farklı eksenli silindirlerden oluşmuş geometrilerden saçılma olayına ilişkin teorik sonuçlar elde edilmiş, bu sonuçlar dipol anten yönlendiriciliğinin değiştirilmesi ve bazı dairesel dalga kılavuzu problemlerine uygulanmıştır (Kishk et.al.,1992). Yukarıda sözü edilen ve saçılma olaylarının incelenmesi için kullanılan metodların çoğu radar kesit yüzeylerinin (RCS) hesaplanması veya kaynağın saçıcıdan uzak olduğu diğer bazı saçılma problemlerinin çözümü için geliştirilmiştir (Hubing, 1991).

Şekil 1.1.1.b'de gösterilen geometriye sahip olan bu saçılma problemi aynı zamanda kendisiyle eş eksenli silindirik bir reflektör taşıyan halka antenin ışıma diyagramının elde edilmesi olarak da değerlendirilebilir. Dairesel veya dikdörtgen bir halka antenin uzak alan ifadeleri çok farklı şekillerde hesaplanabilir (Kraus,1950). Bunun yanı sıra akım halkası ile iletken silindirin birarada kullanıldığı birtakım anten konfigürasyonları literatürde yer almaktadır. Buna örnek olarak geniş açılı tarama özelliğine sahip düzlemsel fazlı anten dizilerinde kullanılan ve burada konu olan geometrinin tersine akım halkasının sonlu bir iletken silindirin içerisinde yer aldığı anten elemanları verilebilir (Fenn, 1985). Ayrıca deniz üzerinde ve içerisinde çok uzun mesafe haberleşmesi amacıyla gerçekleştirilmesi düşünülen bir sistemde kullanılmak üzere yapılması düşünülen bir anten konusundaki çalışmalar içerisinde sonsuz uzunlukta

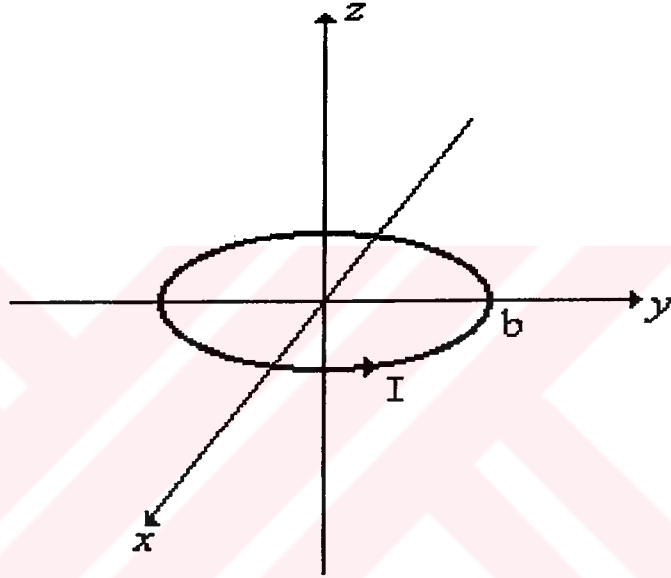
herhangi bir malzemeden yapılmış içi dolu yarım silindir ve bunu çevreleyen yarım akım halkasından oluşan bir konfigürasyona ilişkin teorik ve deneysel sonuçlar mevcuttur (Burton et.al., 1983). Toplam alanın integral gösterilimine dayanan bir kesin sayısal çözüm yaklaşımı (Şengör, 1996a)'da incelenmiştir. Bu yaklaşım üzerine geliştirilmiş simülasyona dayalı çözümler bazı geometriler için elde edilmiştir (Şengör et. al., 1996b, 1997), (Partal, 1995). Bu tezde söz konusu yaklaşımın silindirik geometrilere uygulanması üzerinde çalışılmıştır.



BÖLÜM 2

GELEN ALANA İLİŞKİN İNTEGRAL GÖSTERİLİMLERİN ELDE EDİLMESİ

2.1.Problemin Geometrisi ve Formülasyonu :



Şekil 2.1.1 Problemin Geometrisi

Gelen alanı uyaran kaynağı tanımlayan geometriyi, $z = 0$ düzleminde yer alan b yarıçaplı akım halkası oluşturmaktadır ($b > 0$). Akım halkasından sabit bir I akımının aktığını varsayacağız.

Alana ait magnetik vektör potansiyeli, uzayın kaynakların bulunmadığı bölgelerinde aşağıda yazıldığı şekilde homojen Helmholtz denklemini sağlamaktadır :

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0,$$

$$\rho \neq b \quad (2.1.1)$$

Problemde alanı uyaran akım kaynağı ise aşağıdaki akım yoğunluğu fonksiyonu ile belirlidir :

$$\mathbf{J} = I\delta(z)\delta(\rho - b)\mathbf{e}_\varphi \quad (2.1.2)$$

Vektörel Laplasyen operatörünün dairesel dairesel silindirik koordinat sistemindeki açık ifadesi aşağıdaki gibidir (Balanis, 1989)

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}(\rho, \varphi, z)) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}(\rho, \varphi, z)) \quad (2.1.3)$$

Eğer (2.1.3)'ü açık halde yazarsak

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = & \mathbf{e}_\rho \left(\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} - \frac{A_\rho}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} \right) \\ & + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} \right) \\ & + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.1.3.a)$$

elde ederiz. I akımı yeterince büyük, b yarıçapı da yeterince küçük seçilirse halka kaynağın uyarttığı A'nın yalnızca $\mathbf{e}_\varphi$ bileşeni kalır. İleride sayısal çözüm yapılırken I ve b'nin seçiminde temel kriter bu olmuştur. Bu söylediğimiz sebep ve dönel simetri dolayısıyla

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A}(\rho, \varphi, z) \right)_\rho = 0 \quad (2.1.4)$$

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A}(\rho, \varphi, z) \right)_z = 0 \quad (2.1.4a)$$

$$\left(\nabla^2 A(\rho, \varphi, z)\right)_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} \quad (2.1.4b)$$

olur. $\left(\nabla^2 A(\rho, \varphi, z)\right)_\rho$ gösterilimi, parantezler arasındaki vektörün ρ bileşenini belirtmektedir. Böylece (2.1.1) denklemi

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} + k^2 A = 0 \quad (2.1.5)$$

şekline dönüşür. Burada kısalık açısından A_φ yerine A koyalım.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} - \frac{A}{\rho^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{A}{\rho^2} - k^2 A \quad (2.1.6)$$

elde ederiz. Separasyon için $A(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z)$ yazarsak

$$R''\Phi Z + \frac{1}{\rho} R'\Phi Z + \frac{1}{\rho^2} R\Phi''Z + R\Phi Z'' = \frac{1}{\rho^2} R\Phi Z - k^2 R\Phi Z \quad (2.1.7)$$

sonucuna ulaşılır. (2.1.7)'nin iki yanını $R\Phi Z$ 'e bölüp düzenlersek

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{R'}{R} - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = -k^2 \quad (2.1.7a)$$

eşitliği elde edilir. (2.1.7a)'nın sol yanındaki beşinci terim ρ ve φ 'den bağımsızdır; diğer taraftan eşitliğin sol tarafındaki toplamın $\forall \rho \in [0, \infty), \forall \varphi \in [0, 2\pi)$ ve $z \in [-\infty, \infty)$ için özdeş olarak sıfıra eşit olabilmesi için belirtilen terimin z 'den de bağımsız olması gerekir. Dolayısıyla γ bir sabit olmak üzere

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2 \quad (2.1.7b)$$

yazılır. Bunu (2.1.7a)'da yerleştirirsek

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{R'}{R} - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = \gamma^2 - k^2 \quad (2.1.8)$$

elde edilir. (2.1.8)'in iki yanını ρ^2 ile çarpalım

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} - 1 + \frac{\Phi''}{\Phi} = \rho^2 (\gamma^2 - k^2) \quad (2.1.9)$$

(2.1.9)'un sol yanındaki dördüncü terim ρ ve ϕ 'den bağımsızdır, böylece (2.1.7b)'de yazılan şekilde

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\xi^2 \quad (2.1.9a)$$

yazılır. (2.1.9a)'yı (2.1.9)'da yerine koyarsak

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + (-1 - \xi^2) + \rho^2 (k^2 - \gamma^2) = 0 \quad (2.1.10)$$

eşitliği yazılır. Bu aşamada

$$-1 - \xi^2 \equiv -v^2 \quad (2.1.10a)$$

tanımını yapalım. Bu tanımdan faydalanarak (2.1.10) denklemini aşağıdaki şekle dönüştür

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - v^2 + (k^2 - \gamma^2) \rho^2 = 0 \quad (2.1.11)$$

Bu durumda

$$k^2 - \gamma^2 \equiv \beta^2 \quad (2.1.12)$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlaması yapalım. (2.1.12)'deki γ , Şekil 2.1.2'deki gibi kesilmiş β düzleminde $\sqrt{\beta - k}$ ve $\sqrt{\beta + k}$ ile belirli karekök fonksiyonları

$$\arg(\beta - k) \in (\arg k - 2\pi, \arg k) \quad (2.1.12a)$$

$$\arg(\beta + k) \in (\arg k - \pi, \arg k + \pi) \quad (2.1.12b)$$

olmak üzere

$$\sqrt{\beta \mp k} = |\sqrt{\beta \mp k}| e^{\frac{i}{2} \arg(\beta \mp k)} \quad (2.1.12c)$$

olacak şekilde tanımlanmıştır. Dolayısıyla, örneğin

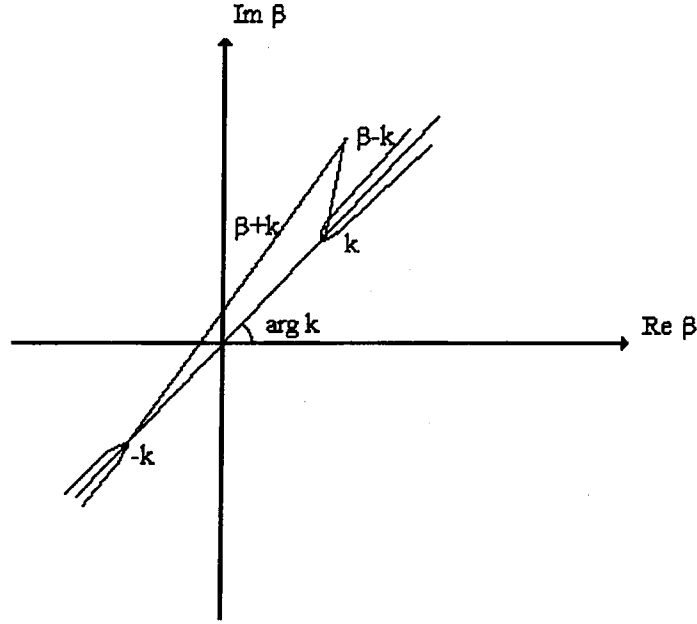
$$\sqrt{k - \beta} = i\sqrt{\beta - k} \quad (2.1.12d)$$

olacaktır. Bu nedenle (2.1.12)'deki γ , kesilmiş β düzleminde

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta^2} = \sqrt{k - \beta} \sqrt{k + \beta} \quad (2.1.12e)$$

$$\gamma = i\sqrt{\beta - k} \sqrt{\beta + k} \quad (2.1.12f)$$

şeklinde tanımlıdır.



Şekil 2.1.2. Karekök Fonksiyonu İçin Dal Kesimi

Bu durumda elde edeceğimiz

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\beta^2 \rho^2 - \nu^2) R = 0 \quad (2.1.13)$$

denklemini, Bessel diferansiyel denklemi olarak adlandırılır. (2.1.3) kısmi türevli diferansiyel denkleminde böylece (2.1.8), (2.1.10) ve (2.1.13) gibi üç adi diferansiyel denklem çıkartılmış olur. Bir sonraki adım $Z(z)$, $\Phi(\varphi)$ ve $R(\rho)$ 'ya ilişkin çözümlerin bulunmasıdır. $Z(z)$ ve $\Phi(\varphi)$ 'nin çözümü, harmonik fonksiyonların herhangi bir lineer birleşimiyle ifade edilebilir.:

$$Z(z) = C_{11} e^{-i\gamma z} + C_{12} e^{i\gamma z} \quad (2.1.14a)$$

$$\Phi(\varphi) = D_{11} e^{-i\nu\varphi} + D_{12} e^{i\nu\varphi} \quad (2.1.14b)$$

veya

$$Z(z) = C_{21} \cos(\gamma z) + C_{22} \sin(\gamma z) \quad (2.1.15a)$$

$$\Phi(\varphi) = D_{21} \cos(v\varphi) + D_{22} \sin(v\varphi) \quad (2.1.15b)$$

yazılabilir.

$R(\rho)$ ' nun çözümü de silindirik fonksiyonların bir lineer birleşimidir:

$$R(\rho) = B_{11} J_v(\beta\rho) + B_{12} Y_v(\beta\rho) \quad (2.1.16)$$

veya

$$R(\rho) = B_{21} H_v^{(1)}(\beta\rho) + B_{22} H_v^{(2)}(\beta\rho) \quad (2.1.17)$$

olarak ifade edilebilir.

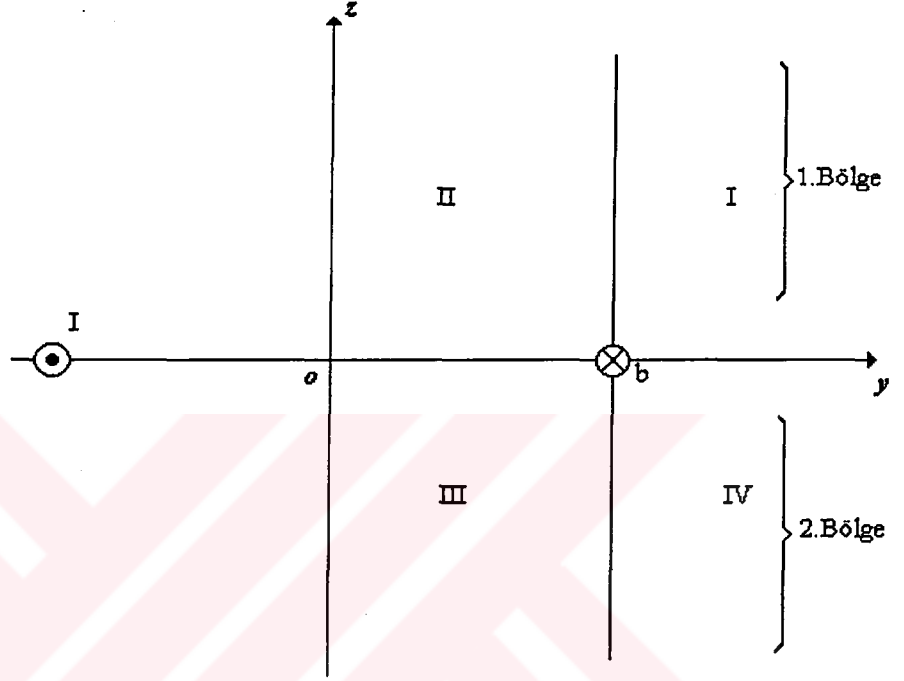
$\Phi(\varphi)$, $Z(z)$ ve $R(\rho)$ 'nün bölgelere göre oluşturulması; fiziksel problemin ortaya koyduğu sınır koşulları, radyasyon koşulu ve yukarıda yazılan harmonik ve silindirik fonksiyonların davranışlarının değerlendirilmesi ile olacaktır. Zamanla değişim $e^{-i\omega t}$ olarak alınmıştır. Problemin çözümü genel olarak (2.1.14) - (2.1.17)'deki özfonsiyonların, separasyon sabitleri olan γ, β, v 'de uygun olarak seçilen herhangi ikisi üzerinden sürekli toplamı ile oluşturulurlar (Harrington, 1961).

2.2. Halka Kaynağın Alanı :

Yöntemi basit olarak ortaya koyabilmek ve yöntemin sonuçlarını literatürle karşılaştırmak amacıyla önce silindirin bulunmadığı, yalnızca akım halkasının mevcut

olduğu durumda gelen alanın hesaplanmasına ilişkin analitik ve sayısal işlemler ayrıntıları ile yapılacaktır.

2.2.1. Problemdeki Bölgeler İçin Çözümlerin Belirlenmesi :



Şekil 2.2.1.1 Problemin bölgelere ayrılması

Silindirik simetriden dolayı herhangi bir $\varphi = \text{sabit}$ yarım-düzleminin incelenmesi yeterlidir. Böylece $\{(\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, \infty), \varphi = \text{sbt}, z \in (-\infty, \infty)\}$ yarım-düzlemi, şekilde görüldüğü gibi dört parçaya ayrılmıştır. Bu bölmelemede, bölgeleri birbirinden ayırmak için problemdeki fiziksel ve geometrik süreksizlik noktalarının belirlenmiş ve bu noktaların ρ ve z koordinatları bölgeleri ayıran sınırlar olarak alınmıştır. Bölgelerin sınırları Tablo 2.2.1.1’de verilmiştir.

TABLO 2.2.1.1

I : $\rho > b, z > 0$	II : $0 < \rho < b, z > 0$
III : $0 < \rho < b, z < 0$	IV : $\rho > b, z < 0$

Bu bölgelerdeki çözümlerde (A_ϕ ifadelerinde) yer alması gereken harmonik ve silindirik fonksiyonların belirlenmesi ise aşağıdaki kriterlere göre yapılacaktır : $e^{i\gamma z}$, + z yönünde ilerleyen dalgayı, $e^{-i\gamma z}$, -z yönünde ilerleyen dalgaları ifade etmektedir). Şekil 2.2.1.1 incelendiğinde I ve II ile gösterilen bölgelerde doğal olarak + z yönünde yayılan elektromagnetik dalgaların bulunacağı açıktır. Aynı şekilde III ve IV bölgelerde de - z yönünde ilerleyen dalgalar oluşacaktır.

$R(\rho)$ 'nin A 'nın çözümüne katacağı fonksiyonlar; $J_\nu(\beta\rho)$ ve $H_\nu^{(1)}(\beta\rho)$ ile gösterilen 1inci tip Bessel fonksiyonu ile 1inci tip Hankel fonksiyonları olacaktır. 1inci tip Hankel fonksiyonunun $\rho = 0$ 'daki tekilliğini ve 1inci tip Bessel fonksiyonunun $\rho = 0$ 'da tanımlı olmasını gözönüne alırsak II. ve III. bölgelerde A_ϕ ifadesinde $R(\rho)$ 'nin katkısı olarak sadece 1inci tip Bessel fonksiyonu görünecektir. I. ve IV. bölgelerde ise sadece + ρ yönünde ilerleyen dalgaların bulunacağı düşünülürse bu bölgelere ait çözümlerde sadece 1inci tip Hankel fonksiyonları bulunacaktır. Bu bilgileri bir tablo halinde düzenlersek Tablo 2.2.1.2'yi elde ederiz.

TABLO 2.2.1.2

I : $H_\nu^{(1)} e^{i\gamma z}$	II : $J_\nu e^{i\gamma z}$
III : $J_\nu e^{-i\gamma z}$	IV : $H_\nu^{(1)} e^{-i\gamma z}$

elde ederiz.

2.2.2. Magnetik Vektör Potansiyeli İçin İntegral Gösterilimler :

Bölüm 2.2.1'de problemi oluşturan bölgelerin herbiri için magnetik vektör potansiyeli çözümünde yer alması gereken fonksiyonlar belirlenmişti. Bu bölümde de bu fonksiyonlardan hareket ederek magnetik vektör potansiyeli veren integral gösterilimler elde edilecektir. Bölüm 2.2.1'de tüm problem uzayı dört parçaya ayrılmıştı. Bölgeler için yazılan çözüm ifadeleri arasındaki benzerliklerden faydalanarak bu dört parçayı iki ayrı grup içerisinde toplayabiliriz. Separasyon sabitlerinden seçilen uygun iki tanesi üzerinden yazılmış iki katlı uygun bir integral gösterilimi yardımı ile A_φ 'yi ifade etmek olanaklıdır (Harrington, 1961). β ve γ arasındaki (2.1.12) ilişkisi nedeniyle β ve γ 'nın ikisinin birlikte integral değişkeni olarak yer alması ile yazılacak integral gösterilimler ilerideki hesaplarda bazı güçlüklerle neden olmaktadır. Bu nedenle β ve v üzerinden yazılmış bir integral gösterilim seçilecektir. Şekil 2.2.1.1'de gösterilen bölgeler için magnetik vektör potansiyelinin söz konusu uygun integral gösterimleri aşağıdaki gibi alınacaktır.

1.Bölge: $\rho \in [0, \infty), z \in (0, \infty)$

$$A_{1\varphi} = \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} B_1(\beta, v) J_{|\gamma|}(\beta\rho) e^{i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) e^{i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.2.1)$$

2.Bölge : $\rho \in [0, \infty), z \in (-\infty, 0)$

$$A_{2\varphi} = \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} B_2(\beta, v) J_{|\gamma|}(\beta\rho) e^{-i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} F_2(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) e^{-i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.2.2)$$

(2.2.2.1) ve (2.2.2.2)'deki gibi yazılmış A_φ , (2.1.5) ile tanımlı olduğu sürece (2.1.3) denklemini sağlar. İntegral gösterilimin yularındaki gibi seçilmesi gerek sınır koşullarından elde edilen integral denklemlerin ters çevrilmelerinde gerekse sayısal hesaplamalar sırasında ortaya çıkan bazı güçlüklerin aşılmasını elverişli kılmaktadır.

Denklemlerde yer alan bilinmeyen fonksiyonlar : $B_1(\beta, \nu)$, $B_2(\beta, \nu)$, $F_1(\beta, \nu)$ ve $F_2(\beta, \nu)$ olmak üzere toplam dört tanedir.

Formülasyonda bir sonraki aşama, bu ifadelerin kullanılarak bölgeler için elektrik ve magnetik alan ifadelerinin elde edilmesidir.

2.2.3. Bölgeler İçin Alan İfadelerinin Elde Edilmesi :

Elektrik ve magnetik alan ifadelerini vektör potansiyeller cinsinden şu şekilde ifade etmek mümkündür :

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{F} - \hat{\mathbf{z}}\mathbf{A} + \frac{1}{\hat{\mathbf{y}}} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.2.3.1)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} - \hat{\mathbf{y}}\mathbf{F} + \frac{1}{\hat{\mathbf{z}}} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (2.2.3.2)$$

(2.2.3.1) ve (2.2.3.2) denklemlerinde

$$\mathbf{A} = A_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{F} = 0 \quad (2.2.3.3)$$

yerleştirip kısaca $A_\varphi = A$ yazarak

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{z}}\mathbf{A}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\hat{\mathbf{y}}} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_\varphi) \quad (2.2.3.4)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times (\mathbf{A} \mathbf{e}_\varphi) \quad (2.2.3.5)$$

elde edilir. Burada

$$\hat{z} = -i\mu\omega, \quad \hat{y} = \sigma - i\omega\varepsilon \quad (2.2.3.6)$$

konmuştur. z eksenine göre d6nel simetri nedeni ile alan φ 'den bağımsız olacağından

$$\nabla \times (\mathbf{A} \mathbf{e}_\varphi) = \mathbf{e}_\rho \left(-\frac{\partial A}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A)}{\partial \rho} \quad (2.2.3.7)$$

olacaktır. Denklem (2.2.3.1)'den de

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\rho \left(-\frac{\partial A}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A)}{\partial \rho} \quad (2.2.3.8)$$

yazılır. Denklem (2.2.3.1)'de

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (2.2.3.9)$$

olduğundan

$$\mathbf{E} = -\hat{z} A \mathbf{e}_\varphi \quad (2.2.3.10)$$

olacaktır. Vekt6r potansiyeli ifadelerinde olduğı gibi alan bileşenlerinin integral gösterilimleri de (2.2.2.1) ve (2.2.2.2) gösterilimlerinde olduğı gibi

$$E_{\varphi}^1 = -\hat{z} \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_p} B_1(\beta, v) J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_p} F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.3.11)$$

$$H_z^1 = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_p} \frac{1}{\beta} \{ \beta \rho B_1(\beta, v) J_{|\nu|}(\beta \rho) \}_{\beta \rho} e^{i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_p} \frac{1}{\beta} \{ \beta \rho F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) \}_{\beta \rho} e^{i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.3.12)$$

$$H_{\rho}^1 = \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_p} B_1(\beta, v) J_{|\nu|}(\beta \rho) i\gamma e^{i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_p} F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) i\gamma e^{i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.3.13)$$

şeklinde olacaktır* .

* İleride açıkça elde edildiği gibi ((2.2.7.3) ve (2.2.7.4)), (2.2.3.8) ve (2.2.3.10)'da alanın φ 'ye bağlı olmadığının öngörülmüş olması ile (2.2.3.11)'deki integral gösterilimde φ 'nin separasyon sabitinin tutulması çelişki yaratmamaktadır. Formülasyonun ileri adımlarında $\delta(v)$ ortaya çıkmakta ve sorun kendiliğinden kalkmaktadır. v 'ye göre integralin gösterilimde yer alıyor olması ters dönüşümlerde yapılacak işlemlerin yükünü azaltmaktadır.

2.Bölge için alan ifadeleri ise

$$E_{\varphi}^2 = -\hat{z} \begin{cases} \int_{\ell_v}^{\ell_v} \int_{\ell_p}^{\ell_p} B_2(\beta, \nu) J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_v}^{\ell_v} \int_{\ell_p}^{\ell_p} F_2(\beta, \nu) H_{\nu}^{(1)}(\beta \rho) e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.3.14)$$

$$H_z^2 = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \int_{\ell_v}^{\ell_v} \int_{\ell_p}^{\ell_p} \frac{1}{\beta} \{ \beta \rho B_2(\beta, \nu) J_{|\nu|}(\beta \rho) \}_{\beta \rho} e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_v}^{\ell_v} \int_{\ell_p}^{\ell_p} \frac{1}{\beta} \{ \beta \rho F_2(\beta, \nu) H_{\nu}^{(1)}(\beta \rho) \}_{\beta \rho} e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.3.15)$$

$$H_p^2 = - \begin{cases} \int_{\ell_v}^{\ell_v} \int_{\ell_p}^{\ell_p} B_2(\beta, \nu) J_{|\nu|}(\beta \rho) (-i\gamma) e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_v}^{\ell_v} \int_{\ell_p}^{\ell_p} F_2(\beta, \nu) H_{\nu}^{(1)}(\beta \rho) (-i\gamma) e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.3.16)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

2.2.4. Sınır Koşulları :

$z = 0$ düzlemi ile $\rho = 0$ ve $\rho = b$ silindir yüzeyleri üzerinde sınır koşulları sağlanmalıdır. Manyetik kaynaklar gözönüne alınmazsa iki ortamı ayıran arakesit yüzeyi üzerinde elektrik alanın teğetsel bileşeni sürekli kalmakta, magnetik alanın teğetsel bileşeni ise arakesit yüzeyi üzerinde akmakta olan akımın yüzeyel yoğunluğu kadar bir süreksizliğe sahip olmaktadır. Bunun yanısıra magnetik akı yoğunluğunun normal

bileşeni sürekli kalmakta fakat elektrik akı yoğunluğunun dik bileşeni ise arakesit yüzeyi üzerinde bulunan serbest yük miktarı kadar süreksizliğe uğramaktadır.

Bu sınır koşulları

$$\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (2.2.4.1)$$

$$\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (2.2.4.2)$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (2.2.4.3)$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (2.2.4.4)$$

eşitliklerinden ibarettir. Burada $\mathbf{e}_2$, arakesit yüzeyi üzerinde ikinci ortamdan dışarı doğru yönelmiş birim vektördür. (2.2.3.8) ve (2.2.3.10) denklemlerinden görüldüğü gibi bu problemde E_ϕ , H_ρ ve H_z alan bileşenleri söz konusudur. Bu alan bileşenlerine yukarıda verdiğimiz sınır koşullarını uygulayalım. Sınırdeğer problemini aşağıdaki gibi iki farklı yaklaşımla değerlendirmek mümkündür:

- i) $z = 0$ düzlemindeki süreksizlik
- ii) $\rho = b$ dairesel silindirik yüzeyi üzerindeki süreksizlik.

Gerçekte, problemdeki süreksizlik, i ve ii'deki süreksizlik yüzeylerinin arakesitleri üzerindedir. Analitik olarak i ve/veya ii'den bir tanesini seçip problemi seçilen yüzeye uygun bir yaklaşımla çözmek yeterlidir. Ancak problemin kesin çözüme götüren formülasyonunu analitik olarak sonuçlandırmakta bazı güçlükler mevcuttur. Güçlükler, çoğunlukla integrallerin değerlendirilememesinden ya da denklem sayısının yeterli olmamasından kaynaklanmaktadır. Tezde uygulanan sayısal yöntem, ii'deki sınır koşullarının da ilave edilmesi ile sayısal çözümü olanaklı hale getirmektedir. ii ile belirtilen koşullar, alternatif sınır koşulları olarak anılacaktır.

A.Yeterli Sınır Koşulları:

$z = 0$ düzleminde $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_z$ alalım.

$$-\mathbf{e}_z \times \left[(H_\rho^1 - H_\rho^2) \mathbf{e}_\rho + (H_z^1 - H_z^2) \mathbf{e}_z \right] = \mathbf{e}_\varphi (H_\rho^1 - H_\rho^2) \quad (2.2.4.5)$$

$$\mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_\varphi^1 - \mathbf{E}_\varphi^2) = -\mathbf{e}_\rho (\mathbf{E}_\varphi^1 - \mathbf{E}_\varphi^2) \quad (2.2.4.6)$$

elde edilmektedir. Görüldüğü gibi elektrik alanının φ , magnetik alanın ise ρ bileşenleri söz konusudur. (2.2.4.6)'dan

$$E_\varphi^1(\rho, +0) - E_\varphi^2(\rho, -0) = 0, \quad \forall \rho \in [0, \infty) \quad (2.2.4.7)$$

yazılır.

Yüzeysel akım yoğunluğu, I halkadan akan akım olmak üzere

$$\mathbf{J}_s = I \delta(\rho - b) \delta(z) \mathbf{e}_\varphi \quad (2.2.4.8)$$

şeklinde olacağından (2.2.4.1)'de yerine koyarsak

$$\left[H_\rho^1(\rho, +0) - H_\rho^2(\rho, -0) \right] \delta(\rho - b) = I \delta(\rho - b) \quad (2.2.4.9)$$

$$H_\rho^1(\rho, +0) \delta(\rho - b) - H_\rho^2(\rho, -0) \delta(\rho - b) = I \delta(\rho - b) \quad (2.2.4.10)$$

yazılır.

B. Alternatif Sınır Koşulları:

$\rho = b$ silindiri üzerinde $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\rho$ seçelim.

$$\mathbf{e}_\rho \times \left[(H_\rho^1 - H_\rho^2) \mathbf{e}_\rho + (H_z^1 - H_z^2) \mathbf{e}_z \right] = -\mathbf{e}_\varphi (H_z^1 - H_z^2) \quad (2.2.4.11)$$

$$\mathbf{e}_\rho \times (\mathbf{E}_\varphi^1 - \mathbf{E}_\varphi^2) = \mathbf{e}_z (\mathbf{E}_\varphi^1 - \mathbf{E}_\varphi^2) \quad (2.2.4.12)$$

ifadelerini elde ederiz. Bu ifadeleri $\rho = b$ silindir yüzeyi üzerinde uygularsak

$$E_\varphi(b+0, z) - E_\varphi(b-0, z) = 0, \quad \forall z \in (-\infty, \infty) \quad (2.2.4.13)$$

$$H_z(b+0, z) - H_z(b-0, z) = -I\delta(z), \quad \forall z \in (-\infty, \infty) \quad (2.2.4.14)$$

koşullarının sağlanması gerektiği ortaya çıkar. Bu sınır yüzeyi üzerinde de elektrik alanın normal bileşeni bulunmadığından (2.2.4.4) koşulu kendiliğinden sağlanır. Diğer taraftan $z \neq 0$ oldukça (2.2.4.10)

$$H_\rho^1(b+0, z_+) = H_\rho^1(b-0, z_+), \quad \forall z_+ \in (0, \infty) \quad (2.2.4.15)$$

$$H_\rho^2(b+0, z_-) = H_\rho^2(b-0, z_-), \quad \forall z_- \in (-\infty, 0) \quad (2.2.4.16)$$

şeklinde iki yardımcı denklemle de ifade edilebilir.

(2.2.3.11) - (2.2.3.16) ifadeleri ile verilen alan bileşenlerinin, (2.2.4.7) - (2.2.4.14) denklemlerinde tanımlanan sınır koşullarında yerine konarak bu koşulların sağlanması gerekmektedir. 1. ve 2. Bölgelere ait (2.2.3.11) ve (2.2.3.14) alan ifadelerini (2.2.4.7) koşulunda yerine koyalım. Bölgeler için alan bileşenlerinden herbiri ρ 'nun elemanı olduğu iki farklı aralık için yazıldığından bu aralıklar için yazılan alan ifadeleri ayrı ayrı sınır koşulu ifadesine yerleştirilmelidir.

2.2.5. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi :

(2.2.4.7) koşulunu $\rho \in [0, b)$ aralığında (2.2.3.11) ve (2.2.3.14)'ten ifade edersek

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [B_1(\beta, v) - B_2(\beta, v)] J_{|\nu|}(\beta \rho) \delta(z) e^{+i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv = 0, \quad \forall \rho \in [0, b) \quad (2.2.5.1)$$

yazarız. Benzer şekilde $\rho \in (b, \infty)$ aralığı için de

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [F_1(\beta, v) - F_2(\beta, v)] H_v^{(1)}(\beta \rho) \delta(z) e^{+i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv = 0, \quad \forall \rho \in (b, \infty) \quad (2.2.5.2)$$

yazılır. (2.2.5.1)'in sol tarafı, $\rho \notin [0, b)$ için $K_1(\rho, z)$ gibi bir fonksiyona karşı düşecektir*

.Dolayısıyla $\forall \rho \in [0, \infty)$ için geçerli olmak üzere

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [B_1(\beta, v) - B_2(\beta, v)] J_{|\nu|}(\beta \rho) \delta(z) e^{+i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv = \begin{cases} 0, & \rho \in [0, b) \\ K_1(\rho, z) \delta(z), & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.5.3)$$

yazılır. Benzer şekilde (2.2.5.2)'den de

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [F_1(\beta, v) - F_2(\beta, v)] H_v^{(1)}(\beta \rho) \delta(z) e^{+i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv = \begin{cases} K_2(\rho, z) \delta(z), & \rho \in [0, b) \\ 0, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.5.4)$$

elde edilir. (2.2.4.10)'da (2.2.3.13) ve (2.2.3.16) alan integralleri yerleştirilerek

* Sayfa 17'deki dipnotta yer alan açıklamadan da görüleceği gibi K_1 yalnızca ρ ve z 'in fonksiyonu olmak zorundadır.

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_p} [iB_1(\beta, v)e^{i\gamma z} + iB_2(\beta, v)e^{-i\gamma z}] J_{|\nu|}(\beta\rho) \gamma e^{i\nu\varphi} \delta(z) d\beta dv = -I\delta(\rho - b)\delta(z), \forall \rho \in [0, b) \quad (2.2.5.5)$$

ve

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_p} [F_1(\beta, v)e^{i\gamma z} + F_2(\beta, v)e^{-i\gamma z}] H_v^{(1)}(\beta\rho) i\gamma e^{i\nu\varphi} \delta(z) d\beta dv = -I\delta(\rho - b)\delta(z), \forall \rho \in (b, \infty) \quad (2.2.5.6)$$

yazılır.

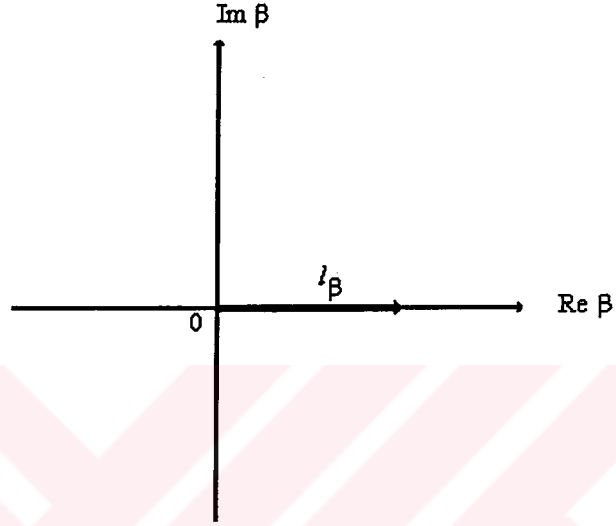
2.2.6. İntegrallerin Değerlendirilmesi :

(2.2.5.3) - (2.2.5.6)'daki integral denklemlerin çözülmesiyle alanın integral gösterilimlerindeki dört adet bilinmeyen katsayı elde edilecektir.

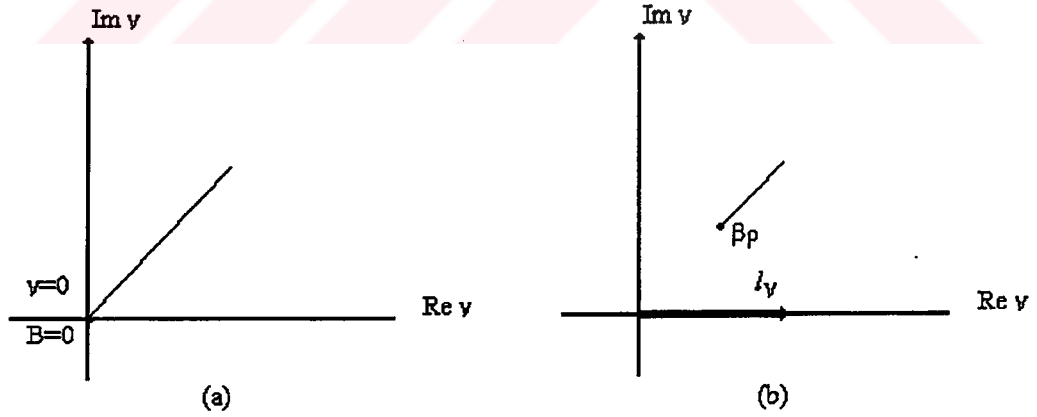
(2.2.5.3) - (2.2.5.6) denklemlerindeki integrallerde $J_{|\nu|}(\beta\rho)$ gözükmektedir. Bu fonksiyonun $v = \beta\rho$ 'daki dallanma tekilliğinin değerlendirilmesinde bazı özelliklerin gözönüne alınması gerekmektedir. Şöyle ki; β 'ya göre integrasyon çizgisi olan $\ell_p, \beta = 0$ 'dan başlamaktadır (bkz. Şekil 2.2.6.1) ve dolayısıyla $\beta = 0$ uç noktasındayken v düzlemindeki dallanma tekilliği de $v = 0$ noktasına kayar.

β, ℓ_p üzerinde değişirken $v = \beta\rho$ dallanma noktası da v düzleminde $v = 0$ 'dan itibaren $v = \beta\rho$ 'ya kayacaktır (bkz. Şekil 2.2.6.2a ve b) Dolayısıyla yukarıdaki integralleri dallanma noktasının $v = 0$ civarında olduğu integral aralığı ile $v = 0$ 'ın uzağında olduğu integral aralığını ayırt etmek suretiyle hesaplamak gerekmektedir. İntegrandda görülen γ ise (2.1.12a) - (2.1.12e) sebebiyle aşağıdaki gibi değerlendirilmelidir:

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta^2} = \begin{cases} k, & \beta = 0 \\ k\sqrt{1 - (\beta/k)}\sqrt{1 + (\beta/k)}, & |\beta| < |k| \\ i\beta\sqrt{1 - (k/\beta)}\sqrt{1 + (k/\beta)}, & |k| < |\beta| \\ 0, & |\beta| = |k| \end{cases} \quad (2.2.6.1)$$

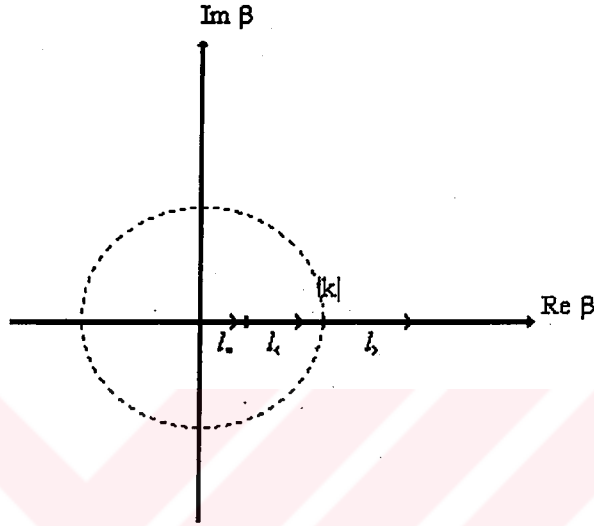


Şekil 2.2.6.1 $\beta_p = 0$ Hali İçin β 'nın İntegrasyon Çizgisi



Şekil 2.2.6.2 v İçin İntegrasyon Çizgisi. $\beta_p = 0$ İçin Dallanma Noktası $v = 0$ 'a Çekilmelidir.

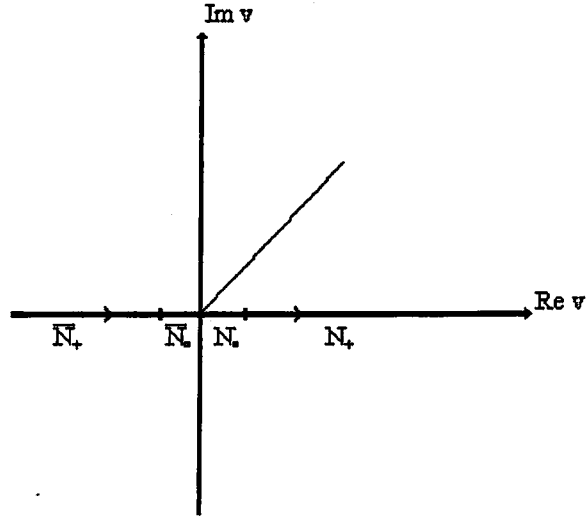
Yukarıda sıralanan nedenlerden ötürü, Şekil 2.2.6.1'deki ℓ_β integrasyon çizgisini Şekil 2.2.6.3'deki gibi üç parçaya ayırmak gereklidir. Dolayısıyla integrallerde $\ell_\beta \equiv \ell_0 + \ell_< + \ell_>$ yerleştirerek ℓ_0 , $\ell_<$ ve $\ell_>$ üzerindeki integraller ayrı ayrı değerlendirilecektir.



Şekil 2.2.6.3 ℓ_β 'nin Parçalanması

$\beta = 0$ iken $J_{|\gamma|}(\beta\rho)$ 'daki dallanma noktası v düzlemindeki $v = 0$ 'a karşı düşeceğinden v düzlemindeki ℓ_v integrasyon çizgisi de Şekil 2.2.6.4'deki gibi bölünerek $\ell_v \equiv \bar{N}_+ + \bar{N}_0 + N_0 + N_+$ konacaktır.

Burada $\bar{N}_+$ ve $\bar{N}_0$ sırayla N_0 ve N_+ 'nin orijine göre simetrikleridir. $\bar{N}_0$ ve N_0 ℓ_v 'nün $v = 0$ civarındaki parçası, ℓ_0 da ℓ_β 'nin $\beta = 0$ civarındaki parçasıdır. $v = 0$ ve $\beta = 0$ 'daki katkının ortaya çıkartılabilmesi, ℓ_0 , N_0 ve $\bar{N}_0$ 'nin limit halde sıfıra çekilmeleriyle mümkündür. Söz konusu limit halde β, γ ve v 'nün değişimleri, Tablo 2.2.6.1'deki gibi olacaktır.

Şekil 2.2.6.4 ℓ_v 'nün Parçalanması

TABLO 2.2.6.1

$\ell_0, \bar{\ell}_0$	üzerinde	$\beta \cong 0, \gamma \cong k$
$\ell_-, \bar{\ell}_-$	üzerinde	$ \beta < k , \gamma = k\sqrt{1 - (\beta/k)}\sqrt{1 + (\beta/k)}$
$\ell_+, \bar{\ell}_+$	üzerinde	$ k < \beta , \gamma = i\beta\sqrt{1 - (k/\beta)}\sqrt{1 + (k/\beta)}$
$N_0, \bar{N}_0$	üzerinde	$\beta \cong 0, v \cong 0, \gamma \cong k$
$N_+, \bar{N}_+$	üzerinde	$ \beta > 0, v > 0$

(2.2.5.5) ve (2.2.5.6)'daki integraller yukarıda belirtildiği gibi değerlendirildiğinde

$$\left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_0} + \int_{\bar{N}_0} \right] \right\} \left[iB_1(0,0)e^{ikz} + iB_2(0,0)e^{-ikz} \right] \delta(z) J_0(0\rho) k e^{i0\varphi} d\beta dv$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_+} + \int_{\bar{N}_+} \right] \right\} \left[iB_1(0, \nu) e^{ikz} + iB_2(0, \nu) e^{-ikz} \right] \delta(z) J_{|\nu|}(0\rho) k e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& + \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_0} + \int_{\bar{N}_0} \right] \right\} \\
& \left[iB_1(0, 0) e^{ik\sqrt{1-(0/k)}\sqrt{1+(0/k)}z} + iB_2(0, 0) e^{-ik\sqrt{1-(0/k)}\sqrt{1+(0/k)}z} \right] \delta(z) J_0(0\rho) k \sqrt{1-(0/k)} \sqrt{1+(0/k)} e^{i0\varphi} d\beta d\nu \\
& + \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_+} + \int_{\bar{N}_+} \right] \right\} \\
& \left[iB_1(\beta, \nu) e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)}\sqrt{1+(\beta/k)}z} + iB_2(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)}\sqrt{1+(\beta/k)}z} \right] \delta(z) J_{|\nu|}(\beta\rho) k \sqrt{1-(\beta/k)} \sqrt{1+(\beta/k)} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& + \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_0} + \int_{\bar{N}_0} \right] \right\} \left[iB_1(0, 0) e^{ikz} + iB_2(0, 0) e^{-ikz} \right] \delta(z) J_0(0\rho) k e^{i0\varphi} d\beta d\nu \\
& + \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_+} + \int_{\bar{N}_+} \right] \right\} \\
& \left[iB_1(\beta, \nu) e^{i\beta\sqrt{1-(k/\beta)}\sqrt{1+(k/\beta)}z} + iB_2(\beta, \nu) e^{-i\beta\sqrt{1-(k/\beta)}\sqrt{1+(k/\beta)}z} \right] \delta(z) J_{|\nu|}(\beta\rho) i\beta \sqrt{1-(k/\beta)} \sqrt{1+(k/\beta)} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& = -I\delta(\rho - b)\delta(z) \quad (2.2.6.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dejenere Bessel fonksiyonu için $J_0(0\rho) \equiv 1$ ve $J_\nu(0\rho) \equiv \rho^\nu$ olduğundan (Harrington, 1961) (2.2.6.2)'deki 1., 3. ve 5. integraller $N_0, \bar{N}_0$ üzerindeki integraller nedeniyle $\nu \rightarrow 0$ limit halinde sıfıra gideceklerdir. 2. integral de ℓ_0 üzerindeki integral nedeniyle $\beta \rightarrow 0$ limit halinde sıfıra gidecektir. Dolayısıyla limit halde

$$\left\{ \int_{\beta=0+}^k \left[\int_{-\infty}^0 + \int_{0+}^{\infty} \right] \right\} [iB_1(\beta, \nu) + iB_2(\beta, \nu)] J_{|\nu|}(\beta \rho) \sqrt{k^2 - \beta^2} e^{i\nu \rho} d\beta d\nu$$

$$+ \left\{ \int_{\beta=k+}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^0 + \int_{0+}^{\infty} \right] \right\} [iB_1(\beta, \nu) + iB_2(\beta, \nu)] J_{|\nu|}(\beta \rho) \sqrt{k^2 - \beta^2} e^{i\nu \rho} d\beta d\nu = -I\delta(\rho - b) \quad (2.2.6.3)$$

ve buradan da

$$\int_{\substack{\nu=-\infty \\ (\nu \neq 0)}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ (\beta \neq k)}}^{\infty} [iB_1(\beta, \nu) + iB_2(\beta, \nu)] J_{|\nu|}(\beta \rho) \beta \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} e^{i\nu \rho} d\beta d\nu = -I\delta(\rho - b) \quad (2.2.6.4)$$

yazılır. İntegraller Riemann anlamında olduklarından $\nu \neq 0$, $\beta \neq 0$ ve $\beta \neq k$ 'nin bir etkisi olmayacaktır*. Hankel Transformu çifti aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$f(\rho)$, ρ 'ya göre sürekli, $\sqrt{\rho}f(\rho)$ pozitif reel eksen üzerinde parça parça sürekli ve mutlak integralli ise $\nu > -\frac{1}{2}$ iken

$$\frac{1}{2} [f(\rho + 0) + f(\rho - 0)] = \int_0^{\infty} g(\beta) J_{\nu}(\beta \rho) \beta d\beta \quad (2.2.6.5)$$

$$g(\beta) = \int_0^{\infty} f(\rho) J_{\nu}(\beta \rho) \rho d\rho \quad (2.2.6.6)$$

olur (Sneddon, 1972).

(2.2.6.4) eşitliğinden (2.2.6.5) ile tanımlı Ters Hankel transformu yardımıyla

* Sonraki integrallerde $\nu \neq 0$ ve $\beta \neq k$ kısıtlamaları, geçerli olmaya devam etmekle birlikte integraller Riemann anlamında yazıldıklarından integral çizgilerinin altına ilave edilmemiştir.

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} [iB_1(\beta, v) + iB_2(\beta, v)] \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} e^{i v \varphi} dv = - \int_0^{\infty} I \delta(\rho - b) \rho J_{|v|}(\beta \rho) d\rho \quad (2.2.6.7)$$

ve buradan da Dirac Distribüsyonunun özellikleri nedeniyle

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} [iB_1(\beta, v) + iB_2(\beta, v)] \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} e^{i v \varphi} dv = -I b J_{|v|}(\beta b) \quad (2.2.6.8)$$

elde edilir. Fourier Dönüşüm çifti aşağıdaki gibidir:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\gamma) e^{i \gamma z} d\gamma \quad (2.2.6.9)$$

$$g(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i \gamma z} dz \quad (2.2.6.10)$$

(2.2.6.8) eşitliğinden (2.2.6.9) ile tanımlı Ters Fourier transformu yardımıyla

$$2\pi [iB_1(\beta, v) + iB_2(\beta, v)] \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} = -I b J_{|v|}(\beta b) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i v \varphi} d\varphi \quad (2.2.6.11)$$

yazılır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i v \varphi} d\varphi = 2\pi \delta(v) \quad (2.2.6.12)$$

olduğundan (Gelfand et.al., 1969)

$$[iB_1(\beta, v) + iB_2(\beta, v)] \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} = -I b J_{|v|}(\beta b) \delta(v) \quad (2.2.6.13)$$

elde edilir. (2.2.5.6)'daki integrallerden de Dejenere Bessel fonksiyonu için $H_0^{(1)}(0\rho) \cong 1+i \cdot \log \rho$ ve $H_\nu^{(1)}(0\rho) \cong \rho^\nu + i \cdot \rho^{-\nu}$ yazılacağı gözönünde bulundurularak (2.2.5.5) için yapılanlara benzer şekilde

$$\int_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\varphi} \int_{\beta=0+}^{\infty} F_{12}(\beta, \nu) \beta \dot{H}_\nu^{(1)}(\beta\rho) d\beta d\nu = I\delta(\rho - b) \quad (2.2.6.14)$$

elde edilir. Burada

$$F_{12}(\beta, \nu) \equiv \frac{1}{\beta} [F_1(\beta, \nu) + F_2(\beta, \nu)] \cdot \sqrt{\beta^2 - k^2} \quad (2.2.6.15)$$

konmuştur. (2.2.6.14)'te $H_\nu^{(1)}(\beta\rho)$ yerine

$$H_\nu^{(1)}(\beta\rho) = \frac{J_{-\nu}(\beta\rho) - e^{-i\pi\nu} J_\nu(\beta\rho)}{i \cdot \sin(\pi\nu)} \quad (2.2.6.16)$$

yerleştirerek (Erdelyi, 1953) integraller toplama işlemi üzerine soldan dağıtılsa

$$\int_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\varphi} \int_{\beta=0+}^{\infty} \frac{F_{12}(\beta, \nu)}{i \cdot \sin(\pi\nu)} J_{-\nu}(\beta\rho) \beta d\beta d\nu - \int_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\varphi-\pi)} \int_{\beta=0+}^{\infty} \frac{F_{12}(\beta, \nu)}{i \cdot \sin(\pi\nu)} J_\nu(\beta\rho) \beta d\beta d\nu = I\delta(\rho - b) \quad (2.2.6.17)$$

yazılır. (2.2.6.17)'nin sol tarafındaki ilk integralde ν yerine $-\nu$ yerleştirilerek

$$i \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\nu\varphi}}{\sin(-\pi\nu)} \int_{\beta=0+}^{\infty} F_{12}(\beta, -\nu) J_\nu(\beta\rho) \beta d\beta d\nu + i \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu(\varphi-\pi)}}{\sin(\pi\nu)} \int_{\beta=0+}^{\infty} F_{12}(\beta, \nu) J_\nu(\beta\rho) \beta d\beta d\nu = I\delta(\rho - b) \quad (2.2.6.18)$$

ve (2.2.6.15) nedeniyle

$$\int_{\beta=0+}^{\infty} F_{12}(\beta, \nu) J_{\nu}(\beta \rho) \beta d\beta = \frac{1}{2} [f_{12}(\rho + 0, \nu) + f_{12}(\rho - 0, \nu)] \quad (2.2.6.19)$$

yazılacağından

$$\begin{aligned} & i \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\nu\varphi}}{\sin(-\pi\nu)} \frac{1}{2} [f_{12}(\rho + 0, -\nu) + f_{12}(\rho - 0, -\nu)] d\nu \\ & + i \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu(\varphi-\pi)}}{\sin(\pi\nu)} \frac{1}{2} [f_{12}(\rho + 0, \nu) + f_{12}(\rho - 0, \nu)] d\nu = I\delta(\rho - b) \end{aligned} \quad (2.2.6.20)$$

elde edilir. (2.2.6.20)'deki ilk integralde ν yerine $-\nu$ yerleştirilerek düzenlendiğinde

$$i \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu\varphi}}{\sin(\pi\nu)} (-1 + e^{-i\nu\pi}) \frac{1}{2} [f_{12}(\rho + 0, \nu) + f_{12}(\rho - 0, \nu)] d\nu = I\delta(\rho - b) \quad (2.2.6.21)$$

yazılır. (2.2.6.21)'den (2.2.6.9) Fourier Transformasyonu yardımıyla

$$i \frac{(-1 + e^{-i\nu\pi})}{\sin(\pi\nu)} \frac{1}{2} [f_{12}(\rho + 0, \nu) + f_{12}(\rho - 0, \nu)] 2\pi = \int_{\varphi=-\infty}^{\infty} I\delta(\rho - b) e^{-i\nu\varphi} d\varphi \quad (2.2.6.22)$$

yazılır. (2.2.6.12) sebebiyle

$$\frac{1}{2} [f_{12}(\rho + 0, \nu) + f_{12}(\rho - 0, \nu)] = -iI \frac{\sin(\pi\nu)}{(-1 + e^{-i\nu\pi})} \delta(\rho - b) \delta(\nu) \quad (2.2.6.23)$$

yazılır. (2.2.6.23) üzerine (2.2.6.6)'daki Hankel Transformasyonu uygulanırsa,

$$F_{12}(\beta, \nu) = \int_{\rho=0}^{\infty} -iI \frac{\sin(\pi\nu)}{(-1 + e^{-i\nu\pi})} \delta(\rho - b) \delta(\nu) \rho J_{\nu}(\beta\rho) d\rho \quad (2.2.6.24)$$

ve buradan da

$$F_{12}(\beta, \nu) = -iI \frac{\sin(\pi\nu)}{(-1 + e^{-i\nu\pi})} b J_{\nu}(\beta b) \delta(\nu) \quad (2.2.6.25)$$

elde edilir. (2.2.6.15) nedeniyle de

$$[F_1(\beta, \nu) + F_2(\beta, \nu)] \cdot \sqrt{\beta^2 - k^2} = -iI \frac{\sin(\pi\nu)}{(-1 + e^{-i\nu\pi})} \beta b J_{\nu}(\beta b) \delta(\nu) \quad (2.2.6.26)$$

yazılır.

(2.2.5.1)'e de benzer işlemlerle Hankel Transformasyonu uygulanmasından sonra

$$\int_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[\frac{B_1(\beta, \nu)}{\beta} - \frac{B_2(\beta, \nu)}{\beta} \right] e^{i\nu\rho} d\nu = \int_{\rho=0}^{\infty} K_1(\rho, 0) u(\rho - b) \rho J_{\nu}(\beta\rho) d\rho \quad (2.2.6.27)$$

elde edilir. Burada

$$\int_{\rho=0}^{\infty} K_1(\rho, 0) u(\rho - b) \rho J_{\nu}(\beta\rho) d\rho \equiv \bar{K}_1(\beta) \quad (2.2.6.28)$$

$$\bar{B}_1(\beta, \nu) = \frac{B_1(\beta, \nu)}{\beta} \quad (2.2.6.29)$$

$$\bar{B}_2(\beta, \nu) = \frac{B_2(\beta, \nu)}{\beta} \quad (2.2.6.30)$$

yerleştirerek Fourier Transformasyonu uygulandığında

$$2\pi[\overline{B}_1(\beta, \nu) - \overline{B}_2(\beta, \nu)] = \overline{K}_1(\beta) \int_{\varphi=-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\varphi} d\varphi \quad (2.2.6.31)$$

elde edilir. Buradan da (2.2.6.12) yardımıyla

$$[B_1(\beta, \nu) - B_2(\beta, \nu)] = \overline{K}_1(\beta) \beta \delta(\nu) \quad (2.2.6.32)$$

yazılır. Benzer şekilde (2.2.5.2)'den de (2.2.5.1) için yapılanlara benzer işlemlerle

$$[F_1(\beta, \nu) - F_2(\beta, \nu)] = \overline{K}_2(\beta) \beta \delta(\nu) \quad (2.2.6.33)$$

elde edilir. Burada

$$\int_{\rho=0}^{\infty} K_2(\rho, 0) u(b - \rho) \rho J_{\nu}(\beta \rho) d\rho \equiv \overline{K}_2(\beta) \quad (2.2.6.34)$$

konmuştur.

Alan integrallerinde geçen dört adet katsayıya ilişkin elimizde dört adet denklem vardır: (2.2.6.13), (2.2.6.26), (2.2.6.32) ve (2.2.6.33). Bu denklemlerden (2.2.6.33)'ü $\sqrt{\beta^2 - k^2}$ ile çarpıp (2.2.6.26) ile toplarsak

$$F_1(\beta, \nu) = \frac{\beta}{2} \delta(\nu) \left[\overline{K}_2(\beta) - \frac{i b J_{\nu}(\beta b)}{\sqrt{\beta^2 - k^2}} \cdot \frac{\sin(\pi \nu)}{(-1 + e^{-i \nu \pi})} \right] \quad (2.2.6.35)$$

ve (2.2.6.35)'i de (2.2.6.33)'te yerleştirirsek

$$F_2(\beta, \nu) = -\frac{\beta}{2}\delta(\nu) \left[\bar{K}_2(\beta) + \frac{i b J_\nu(\beta b)}{\sqrt{\beta^2 - k^2}} \cdot \frac{\sin(\pi \nu)}{(-1 + e^{-i \nu \pi})} \right] \quad (2.2.6.36)$$

elde edilir. (2.2.6.32)'yi $i\sqrt{\beta^2 - k^2}$ ile çarpıp (2.2.6.13) ile toplayarak

$$B_1(\beta, \nu) = \frac{\beta}{2i}\delta(\nu) \left[i\bar{K}_1(\beta) - \frac{i b J_{|\nu|}(\beta b)}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} \right] \quad (2.2.6.37)$$

ve (2.2.6.37)'yi (2.2.6.32)'de yerleştirerek

$$B_2(\beta, \nu) = -\frac{\beta}{2i}\delta(\nu) \left[i\bar{K}_1(\beta) + \frac{i b J_{|\nu|}(\beta b)}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} \right] \quad (2.2.6.38)$$

elde edilir.

2.2.7. Alan Hesaplamaları ve Sonuçlar :

(2.2.6.35) - (2.2.6.38)'de görünen $\bar{K}_1(\beta)$ ve $\bar{K}_2(\beta)$ 'nın belirlenebilmesi için sınır koşullarından elde edilecek ilave denklemlere ihtiyaç vardır. Söz konusu denklemlere, (2.2.6.35) - (2.2.6.38)'in (2.2.3.11) - (2.2.3.16) alan integrallerinde yerleştirilmeleri ile elde edilecek integral gösterimlerin alternatif sınır koşullarına uygulanması ve akım halkasına ait bilinen özelliklerin değerlendirilmesi suretiyle erişilecektir. Bu amaçla (2.2.4.13)'ten $z > 0$ bölgesi için yazılacak eşitlik gözönüne alınacaktır. E_ϕ^1 'nin 1. bölgedeki (2.2.3.11) gösteriliminde $B_1(\beta, \nu)$ ve $F_1(\beta, \nu)$ 'in (2.2.6.35) ve (2.2.6.37)'deki ifadeleri yerleştirilerek

$$E_{\varphi}^1 = -\hat{z} \begin{cases} \int_{\ell_v}^{\ell_p} \frac{\beta}{2i} \delta(v) \left[i\bar{K}_1(\beta) - \frac{IbJ_{|\nu|}(\beta b)}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} \right] J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_v}^{\ell_p} \frac{\beta}{2} \delta(v) \left[\bar{K}_2(\beta) - \frac{iIbJ_{\nu}(\beta b)}{\sqrt{\beta^2 - k^2}} \cdot \frac{\sin(\pi\nu)}{(-1 + e^{-i\nu\pi})} \right] H_{\nu}^{(1)}(\beta \rho) e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.7.1)$$

yazılır. Aynı işlemi H_p^1 'in (2.2.3.13) integral gösterilimi için de tekrarlarsak

$$H_p^1 = - \begin{cases} \int_{\ell_v}^{\ell_p} \frac{\beta}{2i} \delta(v) \left[i\bar{K}_1(\beta) - \frac{IbJ_{|\nu|}(\beta b)}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} \right] i\gamma J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_v}^{\ell_p} \frac{\beta}{2} \delta(v) \left[\bar{K}_2(\beta) - \frac{iIbJ_{\nu}(\beta b)}{\sqrt{\beta^2 - k^2}} \cdot \frac{\sin(\pi\nu)}{(-1 + e^{-i\nu\pi})} \right] i\gamma H_{\nu}^{(1)}(\beta \rho) e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.7.2)$$

elde edilir. (2.2.7.1) ve (2.2.7.2)'yi v 'ye göre olan integrali Dirac Distribüsyonuna göre değerlendirerek tekrar yazarsak

$$E_{\varphi}^1 = -\hat{z} \begin{cases} \int_{\ell_p} \frac{\beta}{2i} \left[i\bar{K}_1(\beta) - \frac{IbJ_0(\beta b)}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} \right] J_0(\beta \rho) e^{i\gamma z} d\beta, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_p} \frac{\beta}{2} \left[\bar{K}_2(\beta) + \frac{IbJ_0(\beta b)}{\sqrt{\beta^2 - k^2}} \right] H_0^{(1)}(\beta \rho) e^{i\gamma z} d\beta, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.7.3)$$

ve

$$H_p^1 = \begin{cases} \int_{\ell_p} \frac{\beta}{2i} \left[i\bar{K}_1(\beta) - \frac{IbJ_0(\beta b)}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} \right] i\gamma J_0(\beta\rho) e^{i\gamma z} d\beta, & \rho \in [0, b) \\ \int_{\ell_p} \frac{\beta}{2} \left[\bar{K}_2(\beta) + \frac{IbJ_0(\beta b)}{\sqrt{\beta^2 - k^2}} \right] i\gamma H_0^{(1)}(\beta\rho) e^{i\gamma z} d\beta, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (2.2.7.4)$$

sonuçlarına ulaşılır. Akım halkasının merkezinde dairesel simetriden dolayı

$$H_p(0,0) = 0 \quad (2.2.7.5)$$

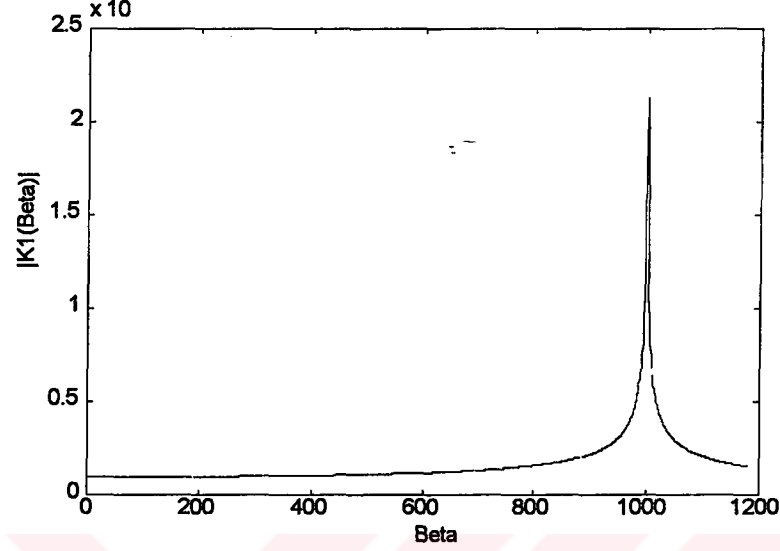
olma özelliğini (2.2.7.4) integral gösteriliminde uygularsak

$$-\int_{\ell_p} \frac{\beta}{2i} \left[i\bar{K}_1(\beta) - \frac{IbJ_0(\beta b)}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} \right] i\gamma J_0(\beta 0) e^{i\gamma 0} d\beta = 0 \quad (2.2.7.6)$$

yazarız. Eğer (2.2.7.6)'yı iki ayrı integral haline dönüştürürsek

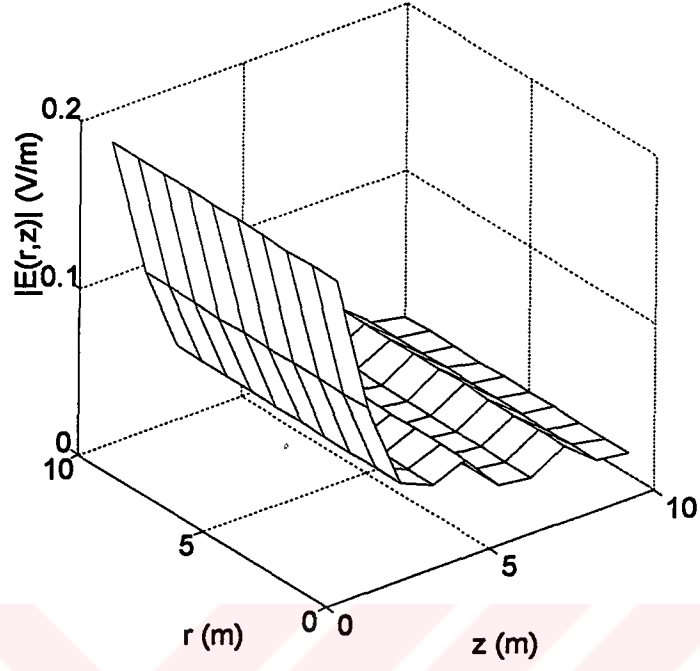
$$-\int_{\ell_p} \frac{\beta}{2} \bar{K}_1(\beta) i\gamma d\beta = \int_{\ell_p} \frac{I\beta b J_0(\beta b)}{2} d\beta \quad (2.2.7.7)$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafındaki integralin integrandı sayısal olarak hesaplanıp eşitliğin sol tarafındaki integralin integrandına eşitlenerek $\bar{K}_1(\beta)$ sayısal olarak hesaplanırsa bu fonksiyonun $I = 10$ mA, $f = 100$ MHz ve $b = 0.02$ m için Şekil 2.2.7.1'deki gibi bir değişim gösterdiği bulunmuştur. Grafikten de görüldüğü gibi $\bar{K}_1(\beta)$ 'nin $\beta = k_0$ 'da tekilliği vardır.

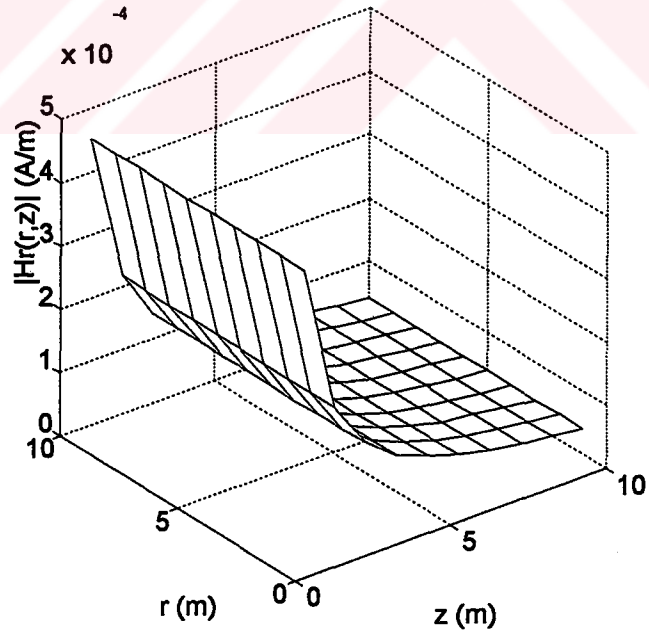


Şekil 2.2.7.1. $\bar{K}_1(\beta)$ 'in β İle Değişimi

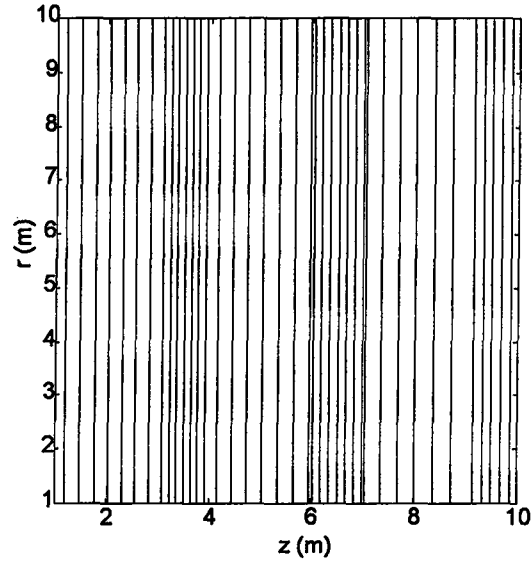
$\bar{K}_1(\beta)$ 'nın hesaplanan bu sayısal değerleri (2.2.7.3) ve (2.2.7.4)'te yerine konarak $\rho \in [0, b)$ bölgesi için alan değerleri hesaplanır. Söz konusu bölgede $0.0002 \text{ m} < \rho < 0.02 \text{ m}$ ve $1 \text{ m} < z < 10 \text{ m}$ aralığı için hesaplanan E_ϕ^1 alan bileşeninin modülü Şekil 2.2.7.2'de gösterilmiştir. Aynı şekilde bu $\bar{K}_1(\beta)$ değerleri kullanılarak hesaplanan H_ρ^1 alan bileşeninin modülüne ait değerler de Şekil 2.2.7.3.'te verilmiştir. Tüm bu integral hesaplamalarında integral adımı $k_0/1000$ seçilmiştir. İntegral adımının bu kadar küçük seçilmesinin nedeni, özellikle k_0 civarında $\bar{K}_1(\beta)$ 'nın hızlı değişim göstermesidir. Bu bölge için E ve H alanının faz değişimleri ise Şekil 2.2.7.4 ve Şekil 2.2.7.5'te verilmiştir. Görüldüğü gibi halkanın içerisinde eşfaz yüzeyleri $z = \text{sabit}$ düzlemleridir.



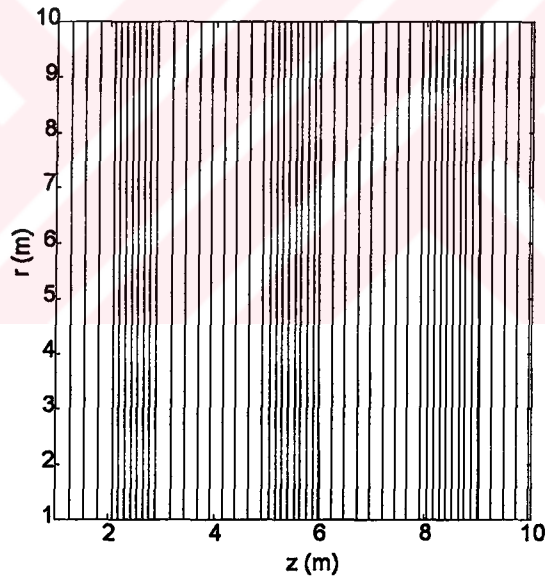
Şekil 2.2.7.2 $0.0002 \text{ m} < \rho < 0.02 \text{ m}$ ve $1 \text{ m} < z < 10 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|E_\phi^1|$.



Şekil 2.2.7.3 $0.0002 \text{ m} < \rho < 0.02 \text{ m}$ ve $1 \text{ m} < z < 10 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|H_\rho^1|$.



Şekil 2.2.7.4. Hesaplanan E Alanının Faz Değişimi



Şekil 2.2.7.5. Hesaplanan H Alanının Faz Değişimi

Halkanın dışında kalan ($\rho > b$) bölgesine ait alan hesaplamalarının yapılabilmesi için $\bar{K}_2(\beta)$ 'nın belirlenmesi gereklidir. Bu amaçla alterne sınır koşullarından (2.2.4.13) kullanılmıştır. (2.2.4.13), aşağıdaki gibi iki kısımda incelenebilir.

$$E_{\Phi}^1(b+0, z_+) - E_{\Phi}^1(b-0, z_+) = 0, \quad \forall z_+ \in (0, \infty) \quad (2.2.7.8)$$

$$E_{\Phi}^2(b+0, z_-) - E_{\Phi}^2(b-0, z_-) = 0, \quad \forall z_- \in (-\infty, 0) \quad (2.2.7.9)$$

(2.2.7.1)'deki integral gösterilimler (2.2.7.8)'e uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \frac{\beta}{2i} \delta(v) \left[i\overline{K}_1(\beta) - \frac{I\beta J_v(\beta b)}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} \right] J_{|v|}(\beta \rho) \delta(\rho - b) e^{i\gamma z_+} e^{i v \varphi} d\beta dv \\ & - \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \frac{1}{2} \delta(v) \left[\beta \overline{K}_2(\beta) - \frac{iI\beta b J_v(\beta b)}{\sqrt{\beta^2 - k^2}} \frac{\sin(\pi v)}{(-1 + e^{-i v \pi})} \right] H_v^{(1)}(\beta \rho) \delta(\rho - b) e^{i\gamma z_+} e^{i v \varphi} d\beta dv = 0 \end{aligned} \quad (2.2.7.10)$$

ve sonra bu eşitlik düzenlenip Dirac Distribüsyonu da integral işleminde uygulandığında

$$\int_{\beta=0}^{\infty} \left\{ \frac{\beta}{2} \overline{K}_1(\beta) J_0(\beta b) - \frac{\beta}{2} \overline{K}_2(\beta) H_0^{(1)}(\beta b) - \frac{I\beta b J_0(\beta b)}{2i\sqrt{k^2 - \beta^2}} [J_0(\beta b) + H_0^{(1)}(\beta b)] \right\} e^{i\gamma z_+} d\beta = 0, \quad \forall z_+ \in (0, \infty) \quad (2.2.7.11)$$

eşitliği elde edilir. Bu integral eşitlik, $\forall z_+ \in (0, \infty)$ için geçerli olduğundan büyük parantez içerisindeki terimin sıfıra eşit olması gereklidir. Bu durumda

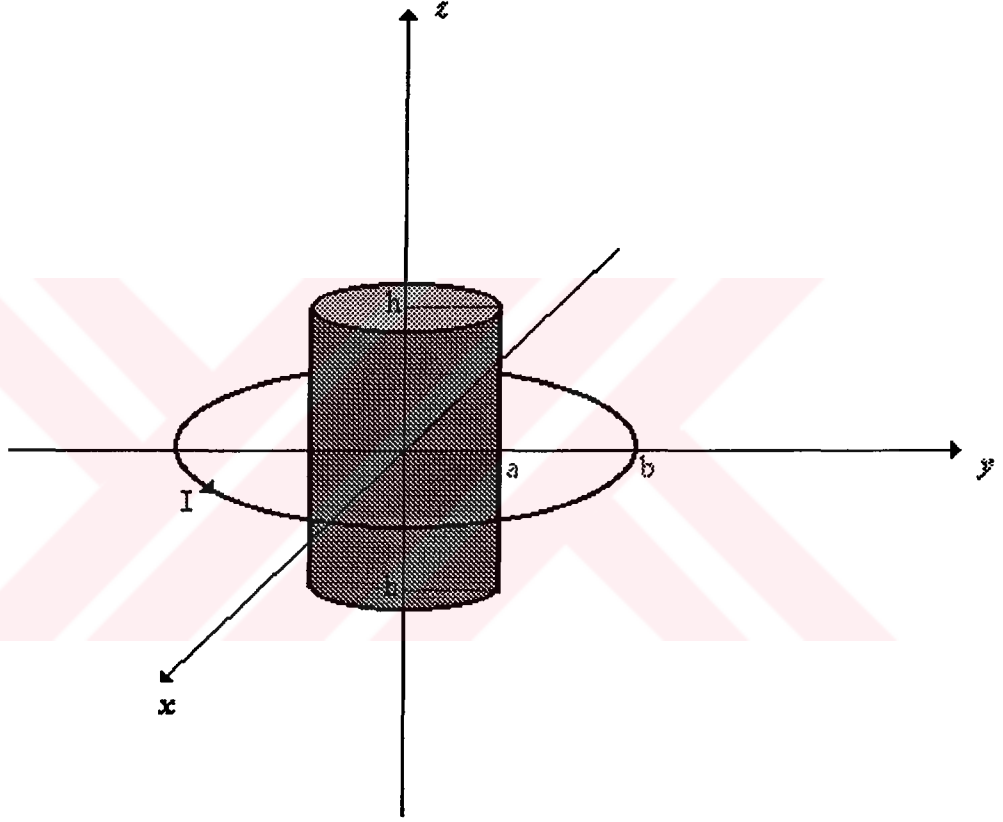
$$\overline{K}_1(\beta) J_0(\beta b) - \overline{K}_2(\beta) H_0^{(1)}(\beta b) = -\frac{iI\beta b J_0(\beta b)}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} [J_0(\beta b) + H_0^{(1)}(\beta b)] \quad (2.2.7.12)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.2.7.12 yardımıyla) $\overline{K}_2(\beta)$ ve böylece de $\overline{K}_2(\beta)$ 'yi içeren ve $\rho \in (b, \infty)$ aralığı için alan hesaplamalarında kullanılan integraller sayısal olarak hesaplanır.

BÖLÜM 3

SAÇILMA PROBLEMİNE İLİŞKİN İNTEGRAL GÖSTERİMLERİN ELDE EDİLMESİ

3.1.Problemin Geometrisi ve Formülasyonu :

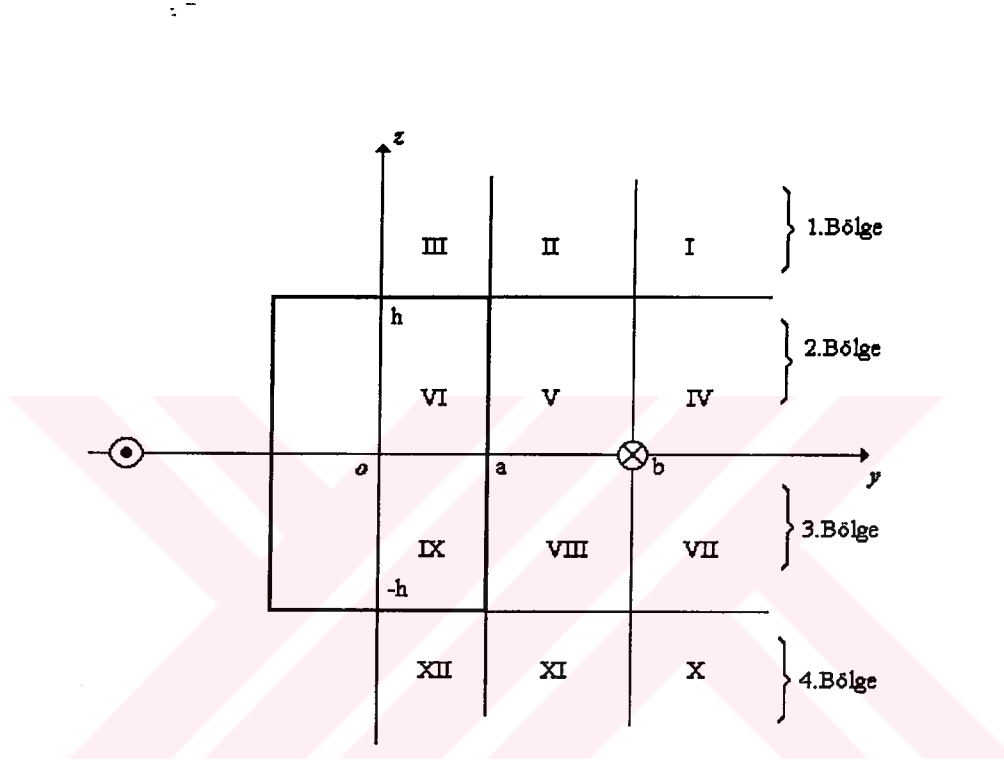


Şekil 3.1.1 Problemin Geometrisi

Probleme konu olan geometriyi, ekseni z ekseni ile çakışık $2h$ uzunluklu ve a taban yarıçaplı mükemmel iletken silindir ve $z = 0$ düzleminde yer alan b yarıçaplı akım halkası oluşturmaktadır ($b > a$). Akım halkasından akan I akımı, alanın kaynağını oluşturmaktadır (bkz. Şekil 3.1.1).

Bölüm 2.1’de alana ait magnetik vektör potansiyelin elde edilmesi için yapılmış olan işlemler burada da aynen geçerli oldukları için tekrar edilmeyeceklerdir.

3.2. Problemdeki Bölgeler İçin Çözümlerin Belirlenmesi :



Şekil 3.2.1 Problemin bölgelere ayrılması

Silindirik simetriden dolayı herhangi bir $\phi = \text{sabit}$ yarım-düzleminin incelenmesi yeterlidir. Böylece $\{(\rho, \phi, z) \mid \rho \in [0, \infty), \phi = \text{sbt}, z \in (-\infty, \infty)\}$ yarım-düzlemi, şekilde görüldüğü gibi oniki parçaya ayrılmıştır. Bu parçalamada, bölgeleri birbirinden ayırmak için problemdeki elektromagnetik süreksizlik noktalarının belirlenmiş ve bu noktaların ρ ve z koordinatları bölgeleri ayıran sınırlar olarak alınmıştır. Bölgelerin sınırları Tablo 3.2.1.2’de verilmiştir.

TABLO 3.2.1

I : $\rho > b, z > h$	II : $a < \rho < b, z > h$	III : $0 \leq \rho \leq a, z > h$
IV : $\rho > b, 0 < z < h$	V : $a < \rho < b, 0 < z < h$	VI : $0 \leq \rho \leq a, 0 < z < h$
VII : $\rho > b, -h < z < 0$	VIII : $a < \rho < b, -h < z < 0$	IX : $0 \leq \rho \leq a, -h < z < 0$
X : $\rho > b, z < -h$	XI : $a < \rho < b, z < -h$	XII : $0 \leq \rho \leq a, z < -h$

Bu bölgelerdeki çözümlerde (A ifadelerinde) yer alması gereken harmonik ve silindirik fonksiyonların belirlenmesi ise aşağıdaki kriterlere göre yapılacaktır : e^{iyz} , + z yönünde ilerleyen dalgayı, e^{-iyz} , -z yönünde ilerleyen dalgaları ifade etmektedir). Şekil 3.2.1 incelendiğinde I, II, III, IV ve V ile gösterilen bölgelerde doğal olarak + z yönünde yayılan elektromagnetik dalgaların bulunacağı açıktır. Aynı şekilde VII, VIII, X, XI ve XII. bölgelerde de - z yönünde ilerleyen dalgalar oluşacaktır. Fakat, gelen alanın yanısıra saçılma olayları (yansıma ve her tür kırınım) da dikkate alınmalıdır. Verilen geometriye göre silindir yüzeyinin üst ve alt kenarlarından ayrıt saçılması olacağı görülür. Bu ayrıtlarda Keller Konisi çizildiğinde VI ve IX. bölgeler verilen kaynağa göre karanlık bölgede kalmalarına rağmen bu bölgelerin ikisinde de hem + z hem de - z yönünde ilerleyen dalgaların varolacağı anlaşılır. Bu ayrıt kırınımının sonucunda V ve VI. bölgelerde - z yönünde dalgalar, VII ve VIII. bölgelerde de + z yönünde dalgalar oluşacaktır.

$R(\rho)$ 'nin A'nın çözümüne katacağı fonksiyonlar; $J_\nu(\beta\rho)$, $H_\nu^{(1)}(\beta\rho)$ ve $H_\nu^{(2)}(\beta\rho)$ ile gösterilen 1inci tip Bessel fonksiyonu ile 1inci ve 2inci tip Hankel fonksiyonları olacaktır. 1 inci ve 2 inci tip Hankel fonksiyonlarının $\rho = 0$ ' daki tekilliklerini ve 1inci tip Bessel fonksiyonunun $\rho = 0$ ' da tanımlı olmasını gözönüne alırsak III, VI, IX ve XII. bölgelerde A ifadesinde $R(\rho)$ ' nin katkısı olarak sadece 1inci tip Bessel fonksiyonu görünecektir. Şekil 2.2.1 incelendiğinde mükemmel iletken silindir yüzeyinden yansıma ve silindirin ayrıtlarından saçılma sonucunda II, V, VIII, XI. bölgelerde hem + ρ hem de - ρ yönünde ilerleyen dalgaların varolacağı görülür. Bu durumda sözü edilen bölgelere

ilişkin çözümlerde 1 inci ve 2 inci tip Hankel fonksiyonlarının yer alması gerekir. I, IV, VII ve X. bölgelerde ise sadece + ρ yönünde ilerleyen dalgaların bulunacağı düşünülürse bu bölgelere ait çözümlerde sadece 1 inci tip Hankel fonksiyonları bulunacaktır. Bu bilgileri bir tablo halinde düzenlersek Tablo 3.2.2.'yi elde ederiz.

TABLO 3.2.2

I : $H_v^{(1)} e^{i\gamma z}$	II : $[H_v^{(1)} + H_v^{(2)}] e^{i\gamma z}$	III : $J_v e^{i\gamma z}$
IV : $H_v^{(1)} [e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}]$	V : $[H_v^{(1)} + H_v^{(2)}] [e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}]$	VI : $J_v [e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}]$
VII : $H_v^{(1)} [e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}]$	VIII : $[H_v^{(1)} + H_v^{(2)}] [e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}]$	IX : $J_v [e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}]$
X : $H_v^{(1)} e^{-i\gamma z}$	XI : $[H_v^{(1)} + H_v^{(2)}] e^{-i\gamma z}$	XII : $J_v e^{-i\gamma z}$

3.3. Magnetik Vektör Potansiyeli İçin İntegral Gösterilimler :

Bölüm 3.2' de problemi oluşturan bölgelerin herbiri için magnetik vektör potansiyeli çözümünde yer alması gereken fonksiyonlar belirlenmişti. Bu bölümde de bu fonksiyonlardan hareket ederek magnetik vektör potansiyeli veren integral gösterilimler elde edilecektir. Bölüm 3.2'de tüm problem uzayı oniki parçaya ayrılmıştı. Bölgeler için yazılan çözüm ifadeleri arasındaki benzerliklerden faydalanarak bu oniki parçayı dört ayrı grup içerisinde toplayabiliriz. Şekil 3.2.1' de de gösterilen bu bölgeler için magnetik vektör potansiyelinin integral gösterilimleri :

1. Bölge : $\rho \in [0, \infty), z \in (h, \infty)$

$$A_{1\varphi} = \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} B_1(\beta, v) J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[C_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_1(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in (a, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

2.Bölge : $\rho \in [0, \infty), z \in (0, h)$

$$A_{2\varphi} = \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [B_2^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + B_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma z}] J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{i\gamma z} + \right. & \rho \in (a, b) \\ \quad \left. \left[C_2^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_2^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{-i\gamma z} \right\} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [F_2^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + F_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma z}] H_v^{(1)}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

3.Bölge: $\rho \in [0, \infty), z \in (-h, 0)$

$$A_{3\varphi} = \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [B_3^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + B_3^-(\beta, v) e^{-i\gamma z}] J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_3^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_3^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{i\gamma z} + \right. & \rho \in (a, b) \\ \quad \left. \left[C_3^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_3^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{-i\gamma z} \right\} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [F_3^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + F_3^-(\beta, v) e^{-i\gamma z}] H_v^{(1)}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.3.3)$$

4. Bölge : $\rho \in [0, \infty), z \in (-\infty, -h)$

$$A_{4\varphi} = \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} B_4(\beta, v) J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[C_4(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_4(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in (a, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} F_4(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Denklemlerde yer alan fonksiyonlar : $B_1(\beta, v), B_2^+(\beta, v), B_2^-(\beta, v), B_3^+(\beta, v), B_3^-(\beta, v), C_1(\beta, v), C_2^+(\beta, v), C_2^-(\beta, v), C_3^+(\beta, v), C_3^-(\beta, v), B_4(\beta, v), D_1(\beta, v), D_2^+(\beta, v), D_2^-(\beta, v), D_3^+(\beta, v), D_3^-(\beta, v), D_4(\beta, v), F_1(\beta, v), F_2^+(\beta, v), F_2^-(\beta, v), F_3^+(\beta, v), F_3^-(\beta, v), F_4(\beta, v)$ olmak üzere toplam yirmidört tanedir.

Formülasyonda bir sonraki aşama, bu ifadelerin kullanılarak bölgeler için elektrik ve magnetik alan ifadelerinin elde edilmesidir.

3.4. Bölgeler İçin Alan İfadelerinin Elde Edilmesi :

Burada da Bölüm 2.2.3'te yapılmış olan işlemler aynen geçerli olduklarından tekrar edilmeyeceklerdir. Bölgeler için ayrı ayrı elektrik ve magnetik alan ifadelerini yazalım.

$$E_\varphi^1(\rho, z) = -\hat{z} \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} B_1(\beta, v) J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[C_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_1(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in (a, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.1)$$

$$H_z^1(\rho, z) = \frac{1}{\rho \cdot \rho} \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} \beta \rho [B_1(\beta, v) J_{|\nu|}(\beta \rho)]_{\beta \rho} e^{i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} \beta \rho \left[C_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_1(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right]_{\beta \rho} e^{i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in (a, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} \beta \rho [F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho)]_{\beta \rho} e^{i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.2)$$

$$H_\rho^1(\rho, z) = - \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} B_1(\beta, v) J_{|\nu|}(\beta \rho) i\gamma e^{i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} \left[C_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_1(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] i\gamma e^{i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in (a, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) i\gamma e^{i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.3)$$

2.Bölge için alan ifadeleri :

$$E_\varphi^2(\rho, z) = -\hat{z} \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} [B_2^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + B_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma z}] J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} \left\{ \left[C_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{i\gamma z} + \left[C_2^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{-i\gamma z} \right\} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in (a, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} [F_2^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + F_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma z}] H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.4)$$

$$H_z^2(\rho, z) = \frac{1}{\rho \cdot \rho} \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \beta \rho \left\{ [B_2^+(\beta, v)e^{i\gamma z} + B_2^-(\beta, v)e^{-i\gamma z}] J_{|\gamma|}(\beta \rho) \right\}_{\beta \rho} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \beta \rho \left\{ \left[C_2^+(\beta, v)H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^+(\beta, v)H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{i\gamma z} + \right. & \rho \in (a, b) \\ \left. \left[C_2^-(\beta, v)H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^-(\beta, v)H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{-i\gamma z} \right\}_{\beta \rho} e^{i v \varphi} d\beta dv, \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \beta \rho \left\{ [F_2^+(\beta, v)e^{i\gamma z} + F_2^-(\beta, v)e^{-i\gamma z}] H_v^{(1)}(\beta \rho) \right\}_{\beta \rho} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.5)$$

$$H_\rho^2(\rho, z) = - \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [B_2^+(\beta, v)e^{i\gamma z} - B_2^-(\beta, v)e^{-i\gamma z}] \gamma J_{|\gamma|}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_2^+(\beta, v)H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^+(\beta, v)H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] i\gamma e^{i\gamma z} - \right. & \rho \in (a, b) \\ \left. \left[C_2^-(\beta, v)H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^-(\beta, v)H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] i\gamma e^{-i\gamma z} \right\} e^{i v \varphi} d\beta dv, \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [F_2^+(\beta, v)e^{i\gamma z} - F_2^-(\beta, v)e^{-i\gamma z}] i\gamma H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.6)$$

3. Bölgede alan ifadeleri:

$$E_\varphi^3(\rho, z) = -\hat{z} \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [B_3^+(\beta, v)e^{i\gamma z} + B_3^-(\beta, v)e^{-i\gamma z}] J_{|\gamma|}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_3^+(\beta, v)H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^+(\beta, v)H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{i\gamma z} + \right. & \rho \in (a, b) \\ \left. \left[C_3^-(\beta, v)H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^-(\beta, v)H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{-i\gamma z} \right\} e^{i v \varphi} d\beta dv, \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} [F_3^+(\beta, v)e^{i\gamma z} + F_3^-(\beta, v)e^{-i\gamma z}] H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.7)$$

$$H_z^3(\rho, z) = \frac{1}{\rho \cdot \rho} \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \beta \rho \left\{ \left[B_3^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + B_3^-(\beta, v) e^{-i\gamma z} \right] J_{|\gamma|}(\beta \rho) \right\}_{\beta \rho} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \beta \rho \left\{ \left[C_3^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{i\gamma z} + \right. & \rho \in (a, b) \\ \left. \left[C_3^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{-i\gamma z} \right\}_{\beta \rho} e^{i v \varphi} d\beta dv, \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \beta \rho \left\{ \left[F_3^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + F_3^-(\beta, v) e^{-i\gamma z} \right] H_v^{(1)}(\beta \rho) \right\}_{\beta \rho} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.8)$$

$$H_p^3(\rho, z) = - \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[B_3^+(\beta, v) e^{i\gamma z} - B_3^-(\beta, v) e^{-i\gamma z} \right] i\gamma J_{|\gamma|}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_3^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] i\gamma e^{i\gamma z} - \right. & \rho \in (a, b) \\ \left. \left[C_3^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] i\gamma e^{-i\gamma z} \right\} e^{i v \varphi} d\beta dv, \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[F_3^+(\beta, v) e^{i\gamma z} - F_3^-(\beta, v) e^{-i\gamma z} \right] i\gamma H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.9)$$

4.Bölge için de :

$$E_\varphi^4(\rho, z) = -\hat{z} \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} B_4(\beta, v) J_{|\gamma|}(\beta \rho) e^{-i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[C_4(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_4(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{-i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (a, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} F_4(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{-i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.10)$$

$$H_z^4(\rho, z) = \frac{1}{\rho \cdot \rho} \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \beta \rho \{B_4(\beta, v) J_{|\nu|}(\beta \rho)\}_{\beta \rho} e^{-i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \beta \rho \left[C_4(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_4(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right]_{\beta \rho} e^{-i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in (a, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \beta \rho \{F_4(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho)\}_{\beta \rho} e^{-i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.11)$$

$$H_p^4(\rho, z) = - \begin{cases} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} B_4(\beta, v) J_{|\nu|}(\beta \rho) (-i\gamma) e^{-i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[C_4(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_4(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] (-i\gamma) e^{-i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in (a, b) \\ \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} F_4(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) (-i\gamma) e^{-i\gamma z} e^{i\nu \varphi} d\beta dv, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.4.12)$$

şeklinde alan ifadeleri elde edilmiş olur.

3.5. Sınır Koşulları :

$z = -h$, $z = h$ ve $z = 0$ düzlemleri ile $\rho = 0$, $\rho = a$ ve $\rho = b$ silindir yüzeylerine sınır koşulları uygulanacaktır.

A. Yeterli Sınır Koşulları:

$z = 0$ düzleminde

$$E_\varphi(\rho, +0) - E_\varphi(\rho, -0) = 0, \quad \forall \rho \in [0, \infty) \quad (3.5.1)$$

yazılabilir. Bunun yanısıra bu sınır yüzeyinde magnetik alanın teğetsel bileşenine ait sınır koşulunu inceleyelim. $z = 0$ düzleminde $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$ alalım. Problemin geometrisi incelendiğinde bu yüzey üzerinde iki farklı akım bulunduğu görülür; akım halkası ve silindirin üzerinde indüklenmiş akım. Bu durumda $z = 0$ yüzeyi için

$$\mathbf{J}_s = I\delta(\rho - b)\mathbf{e}_\varphi + I_{s0}\delta(\rho - a)\mathbf{e}_\varphi \quad (3.5.2)$$

akım yoğunluğu yazılabilir. Buradan

$$[H_\rho(\rho, +0) - H_\rho(\rho, -0)]\mathbf{e}_\varphi = I\delta(\rho - b)\mathbf{e}_\varphi + I_{s0}\delta(\rho - a)\mathbf{e}_\varphi \quad (3.5.3)$$

elde edilir. (3.5.3)'de eşitliğin sol tarafının da sağ tarafı gibi distribüsyon şeklinde olması gerektiğinden

$$[H_\rho(\rho, +0) - H_\rho(\rho, -0)][\delta(\rho - b) + \delta(\rho - a)] = I\delta(\rho - b)\delta(z) + I_{s0}\delta(\rho - a)\delta(z) \quad (3.5.4)$$

Ve buradan da

$$H_\rho(b, +0) - H_\rho(b, -0) = I \quad (3.5.5)$$

$$H_\rho(a, +0) - H_\rho(a, -0) = I_{s0} \quad (3.5.6)$$

bağıntılarına ulaşılır. $z = 0$ düzleminde magnetik alanın teğetsel bileşenine ilişkin sınır koşulu (3.5.5) ve (3.5.6) ile tanımlıdır. Öte yandan yine distribüsyonlar kullanılarak bu iki denklemin yerine

$$H_\rho(\rho, z + 0) - H_\rho(\rho, z - 0) = I\delta(\rho - b)\delta(z) + I_{s0}\delta(z)\delta(\rho - a) \quad , \forall \rho \in [0, \infty) \quad (3.5.7)$$

yazılabilir.

$z = h$ düzlemi üzerinde ;

$$E_{\varphi}(\rho, h+0) - E_{\varphi}(\rho, h-0) = 0, \quad \forall \rho \in [0, \infty) \quad (3.5.8)$$

$$H_{\rho}(\rho, h+0) - H_{\rho}(\rho, h-0) = I_{sh} \delta(\rho - a) \delta(z - h), \quad \forall \rho \in [0, \infty) \quad (3.5.9)$$

koşulları sağlanmalıdır.

$z = -h$ düzleminde $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_z$ alalım.

$$E_{\varphi}(\rho, -h+0) - E_{\varphi}(\rho, -h-0) = 0, \quad \forall \rho \in [0, \infty) \quad (3.5.10)$$

$$\mathbf{J}_s = I_{s(-h)} \delta(\rho - a) \mathbf{e}_{\varphi} \quad (3.5.11)$$

yüzeysel akım yoğunluğu ifadesini kullanırsak

$$H_{\rho}(\rho, -h+0) - H_{\rho}(\rho, -h-0) = I_{s(-h)} \delta(\rho - a) \delta(z + h) \quad (3.5.12)$$

yazabiliriz.

B. Alternatif (yardımcı) Sınır Koşulları:

$\rho = b$ silindrinde $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{\rho}$ seçelim.

$$\mathbf{e}_{\rho} \times \left[(H_{1\rho} - H_{2\rho}) \mathbf{e}_{\rho} + (H_{1z} - H_{2z}) \mathbf{e}_z \right] = -\mathbf{e}_{\varphi} (H_{1\rho} - H_{2\rho}) \quad (3.5.13)$$

$$\mathbf{e}_{\rho} \times (\mathbf{E}_{1\varphi} - \mathbf{E}_{2\varphi}) = \mathbf{e}_z (\mathbf{E}_{1\varphi} - \mathbf{E}_{2\varphi}) \quad (3.5.14)$$

ifadelerini elde ederiz.

Bu ifadeleri $\rho = b$ silindir yüzeyi üzerinde uygularsak

$$E_{\varphi}(b+0, z) - E_{\varphi}(b-0, z) = 0, \quad \forall z \in (-\infty, \infty) \quad (3.5.15)$$

$$H_z(b+0, z) - H_z(b-0, z) = -I\delta(\rho - b)\delta(z), \quad \forall z \in (-\infty, \infty) \quad (3.5.16a)$$

$$H_{\rho}(b+0, z) - H_{\rho}(b-0, z) = 0, \quad \forall z \in (-\infty, \infty), z \neq 0 \quad (3.5.16b)$$

$\rho = a$ silindiri üzerinde de ;

$$E_{\varphi}(a+0, z) - E_{\varphi}(a-0, z) = 0, \quad \forall z \in (-\infty, \infty) \quad (3.5.17)$$

$$H_z(a+0, z) - H_z(a-0, z) = \begin{cases} 0, & z \notin (-h, h) \\ -I_{sa}(z), & z \in (-h, h) \end{cases} \quad (3.5.18a)$$

$$H_{\rho}(a+0, z) - H_{\rho}(a-0, z) = 0, \quad \forall z \notin (-h, h) \quad (3.5.18b)$$

yazılır. (3.5.18a) şu şekilde de ifade edilebilir:

$$H_z(a+0, z) - H_z(a-0, z) = I_{sa}\delta(\rho - a)[u(z+h) - u(z-h)] \quad (3.5.19)$$

Ayrıca

$$E_{\varphi}(a, z) = 0, \quad \forall z \in [-h, h] \quad (3.5.20)$$

koşulunun da sağlanması gerekir. Bu son koşul, aşağıdaki şekilde parçalı olarak da yazılabilir.

$$E_{\varphi}^2(a+0, z_+) = 0, \quad \forall z_+ \in (0, h) \quad (3.5.20a)$$

$$E_{\varphi}^2(a-0, z_+) = 0, \quad \forall z_+ \in (0, h) \quad (3.5.20b)$$

$$E_{\varphi}^3(a+0, z_-) = 0, \quad \forall z_- \in (-h, 0) \quad (3.5.20c)$$

$$E_{\varphi}^3(a-0, z_-) = 0, \quad \forall z_- \in (-h, 0) \quad (3.5.20d)$$

(3.4.1) - (3.4.12) ifadeleri ile verilen alan bileşenlerinin, (3.5.1) - (3.5.20d) denklemlerinde tanımlanan sınır koşullarında yerine konarak bu koşulların sağlatılması gerekmektedir.

3.6. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi:

2. ve 3. bölgelere ait (3.4.4) ve (3.4.7) alan ifadelerini (3.5.1) koşulunda yerine koyalım. Bölgeler için alan bileşenlerinden herbiri ρ 'nun elemanı olduğu üç farklı aralık için yazıldığından bu aralıklar için yazılan alan ifadeleri ayrı ayrı sınır koşulu ifadesine yerleştirilmelidir. İlk yazacağımız ifade;

$$\begin{aligned} & -\hat{z} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[B_2^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + B_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma z} \right] J_{|\gamma|}(\beta \rho) \delta(z-0) e^{i v \rho} d\beta dv \\ & = -\hat{z} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[B_3^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + B_3^-(\beta, v) e^{-i\gamma z} \right] J_{|\gamma|}(\beta \rho) \delta(z+0) e^{i v \rho} d\beta dv, \quad \forall \rho \in [0, a) \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

olacaktır. Aynı koşulu $\rho \in (a, b)$ aralığına uygulamak ile elde edeceğimiz integral denklem ise :

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ C_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right\} e^{i\gamma z}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[C_2^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta\rho) + D_2^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{-i\gamma z} \Big\} \delta(z-0) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& = \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta\rho) + D_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{i\gamma z} \right. \\
& \quad \left. + \left[C_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta\rho) + D_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{-i\gamma z} \right\} \delta(z+0) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, \quad \forall \rho \in (a, b) \quad (3.6.2)
\end{aligned}$$

olacaktır. Koşul (3.5.1), $\rho \in (b, \infty)$ aralığında değerlendirildiğinde de

$$\begin{aligned}
& \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left[F_2^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} + F_2^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] H_\nu^{(1)}(\beta\rho) \delta(z-0) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& = \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left[F_3^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} + F_3^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] H_\nu^{(1)}(\beta\rho) \delta(z+0) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, \quad \forall \rho \in (b, \infty) \quad (3.6.3)
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. (3.6.1), (3.6.2) ve (3.6.3) ifadelerini yöntemin gereklerine uygun olarak yazarsak

$$\begin{aligned}
& \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[B_2^+(\beta, \nu) - B_3^-(\beta, \nu) \right] e^{i\gamma_0} + \left[B_2^-(\beta, \nu) - B_3^+(\beta, \nu) \right] e^{-i\gamma_0} \right\} J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& = \begin{cases} 0, & \rho \in [0, a) \\ K_{1a}(\rho, z) \delta(z), & \rho \in (a, b) \\ K_{1b}(\rho, z) \delta(z), & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.6.4)
\end{aligned}$$

$$\int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_2^+(\beta, \nu) - C_3^-(\beta, \nu) \right] H_\nu^{(1)}(\beta\rho) + \left[D_2^+(\beta, \nu) - D_3^-(\beta, \nu) \right] H_\nu^{(2)}(\beta\rho) \right\} e^{i\gamma_0}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left[C_2^-(\beta, \nu) - C_3^+(\beta, \nu) \right] H_v^{(1)}(\beta \rho) + \left[D_2^-(\beta, \nu) - D_3^+(\beta, \nu) \right] H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{-i\gamma_0} \Big\} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& = \begin{cases} K_{20}(\rho, z) \delta(z), & \rho \in [0, a) \\ 0, & \rho \in (a, b) \\ K_{2b}(\rho, z) \delta(z), & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.6.5)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[F_2^+(\beta, \nu) - F_3^-(\beta, \nu) \right] e^{i\gamma_0} + \left[F_2^-(\beta, \nu) - F_3^+(\beta, \nu) \right] e^{-i\gamma_0} \right\} H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& = \begin{cases} K_{30}(\rho, z) \delta(z), & \rho \in [0, a) \\ K_{3a}(\rho, z) \delta(z), & \rho \in (a, b) \\ 0, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.6.6)
\end{aligned}$$

ifadelerine ulaşılır.

(3.5.4) eşitliği ile ifade ettiğimiz sınır koşulunu alan integral gösterilimleri yardımıyla açık şekilde yazarsak

$$\begin{aligned}
& - \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left[B_2^+(\beta, \nu) e^{i\gamma_0} - B_2^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma_0} \right] i\gamma J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& + \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left[B_3^+(\beta, \nu) e^{i\gamma(-0)} - B_3^-(\beta, \nu) e^{i\gamma_0} \right] i\gamma J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& = I\delta(\rho - b)\delta(z) + I_{\infty}\delta(\rho - a)\delta(z), \quad \forall \rho \in (0, a) \quad (3.6.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] i \gamma e^{i \gamma 0} \right. \\
& \left. - \left[C_2^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] i \gamma e^{-i \gamma 0} \right\} e^{i v \varphi} d\beta dv \\
& + \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_3^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] i \gamma e^{i \gamma 0} \right. \\
& \left. - \left[C_3^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] i \gamma e^{-i \gamma 0} \right\} e^{i v \varphi} d\beta dv \\
& = \mathbb{I} \delta(\rho - b) \delta(z) + I_{s0} \delta(\rho - a) \delta(z) \quad \forall \rho \in (a, b) \quad (3.6.8)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& - \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[F_2^+(\beta, v) e^{i \gamma 0} - F_2^-(\beta, v) e^{-i \gamma 0} \right] i \gamma H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv \\
& + \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[F_3^+(\beta, v) e^{-i \gamma 0} - F_3^-(\beta, v) e^{i \gamma 0} \right] i \gamma H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv \\
& = \mathbb{I} \delta(\rho - b) \delta(z) + I_{s0} \delta(\rho - a) \delta(z), \quad \forall \rho \in (b, \infty) \quad (3.6.9)
\end{aligned}$$

integral denklemlerine ulaşırız. (3.6.7), (3.6.8) ve (3.6.9)'u da tekrar düzenlersek

$$\begin{aligned}
& \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, v) - B_3^-(\beta, v) \right] e^{i \gamma 0} + \left[B_2^-(\beta, v) + B_3^+(\beta, v) \right] e^{-i \gamma 0} \right\} i \gamma J_{|\gamma|}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv \\
& = \mathbb{I} \delta(\rho - b) \delta(z) + I_{s0} \delta(\rho - a) \delta(z), \quad \forall \rho \in (0, a) \quad (3.6.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\ell_v \ell_\beta} \left\{ \left[-C_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) - D_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) + C_3^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{i\gamma_0} \right. \\
& \left. + \left[C_2^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) - C_3^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) - D_3^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{-i\gamma_0} \right\} i\gamma e^{i v \varphi} d\beta dv \\
& = \mathbb{I}(\rho - b) \delta(z) + I_{so} \delta(\rho - a) \delta(z), \quad \forall \rho \in (a, b) \quad (3.6.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\ell_v \ell_\beta} \left\{ \left[-F_2^+(\beta, v) - F_3^-(\beta, v) \right] e^{i\gamma_0} + \left[F_2^-(\beta, v) + F_3^+(\beta, v) \right] e^{-i\gamma_0} \right\} i\gamma H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv \\
& = \mathbb{I}(\rho - b) \delta(z) + I_{so} \delta(\rho - a) \delta(z), \quad \forall \rho \in (b, \infty) \quad (3.6.12)
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşırız. Bu integral denklemler Bölüm 2.2.6'daki gibi değerlendirilecektir. (3.6.10) denklemini integralleri parçalayarak

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\left(\int_{N_0} + \int_{\bar{N}_0} \right) + \left(\int_{N_+} + \int_{\bar{N}_+} \right) \right] \times \left(\int_{\ell_0} + \int_{\ell_-} + \int_{\ell_+} \right) \right\} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, v) - B_3^-(\beta, v) \right] e^{i\gamma_0} \right. \\
& \left. + \left[B_2^-(\beta, v) + B_3^+(\beta, v) \right] e^{-i\gamma_0} \right\} i\gamma J_{|v|}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv = \mathbb{I}(\rho - b) \delta(z) + I_{so} \delta(\rho - a) \delta(z), \quad \forall \rho \in (0, a) \\
& \quad (3.6.13)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. İntegralleri açarsak

$$\left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_0} + \int_{\bar{N}_0} \right] \right\} \left\{ \left[-B_2^+(0,0) - B_3^-(0,0) \right] e^{ik_0} + \left[B_2^-(0,0) + B_3^+(0,0) \right] e^{-ik_0} \right\} ik J_0(0\rho) e^{i0\varphi} d\beta dv$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_+} + \int_{\tilde{N}_+} \right] \right\} \left\{ \left[-B_2^+(0, \nu) - B_3^-(0, \nu) \right] e^{ik_0} + \left[B_2^-(0, \nu) + B_3^+(0, \nu) \right] e^{-ik_0} \right\} \\
& \times ik J_\nu(0\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& + \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_0} + \int_{\tilde{N}_0} \right] \right\} \left\{ \left[-B_2^+(0, 0) - B_3^-(0, 0) \right] e^{ik_0} + \left[B_2^-(0, 0) + B_3^+(0, 0) \right] e^{-ik_0} \right\} ik J_0(0\rho) e^{i0\varphi} d\beta d\nu \\
& + \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_+} + \int_{\tilde{N}_+} \right] \right\} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, \nu) - B_3^-(\beta, \nu) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} 0} \right. \\
& \quad \left. + \left[B_2^-(\beta, \nu) + B_3^+(\beta, \nu) \right] e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} 0} \right\} ik\sqrt{1-(\beta/k)}\sqrt{1+(\beta/k)} J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& + \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_0} + \int_{\tilde{N}_0} \right] \right\} \left\{ \left[-B_2^+(0, 0) - B_3^-(0, 0) \right] e^{ik_0} + \left[B_2^-(0, 0) + B_3^+(0, 0) \right] e^{-ik_0} \right\} ik J_0(0\rho) e^{i0\varphi} d\beta d\nu \\
& + \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_+} + \int_{\tilde{N}_+} \right] \right\} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, \nu) - B_3^-(\beta, \nu) \right] e^{i\beta\sqrt{1-(k/\beta)} \cdot \sqrt{1+(k/\beta)} 0} \right. \\
& \quad \left. + \left[B_2^-(\beta, \nu) + B_3^+(\beta, \nu) \right] e^{-i\beta\sqrt{1-(k/\beta)} \cdot \sqrt{1+(k/\beta)} 0} \right\} i \cdot \beta\sqrt{1-(k/\beta)}\sqrt{1+(k/\beta)} J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& = I\delta(\rho-b)\delta(z) + I_\omega\delta(\rho-a)\delta(z), \quad \forall \rho \in (0, a) \quad (3.6.14)
\end{aligned}$$

yazarız. İntegralin terimlerini tekrar değerlendirsek

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{\ell_0} \left[\int_{N_+} + \int_{\tilde{N}_+} \right] \right\} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, \nu) - B_3^-(\beta, \nu) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} 0} \right. \\
& \quad \left. + \left[B_2^-(\beta, \nu) + B_3^+(\beta, \nu) \right] e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} 0} \right\} ik\sqrt{1-(\beta/k)}\sqrt{1+(\beta/k)} J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \int_{\ell_+} \left[\int_{N_+} + \int_{\bar{N}_+} \right] \right\} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, \nu) - B_3^-(\beta, \nu) \right] e^{i \cdot i \beta \sqrt{1-(k/\beta)} \cdot \sqrt{1+(k/\beta)} 0} \right. \\
& + \left. \left[B_2^-(\beta, \nu) + B_3^+(\beta, \nu) \right] e^{-i \cdot i \beta \sqrt{1-(k/\beta)} \cdot \sqrt{1+(k/\beta)} 0} \right\} i \cdot i \beta \sqrt{1-(k/\beta)} \sqrt{1+(k/\beta)} J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{i \nu \rho} d\beta d\nu \\
& = I\delta(\rho-b)\delta(z) + I_{\infty}\delta(\rho-a)\delta(z), \quad \forall \rho \in (0, a) \quad (3.6.15)
\end{aligned}$$

yazılır. İntegral sınırlarını da açıkça yazarsak

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{\beta=0+}^k \left[\int_{\nu=-\infty}^{-0} + \int_{\nu=0+}^{\infty} \right] \right\} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, \nu) - B_3^-(\beta, \nu) \right] + \left[B_2^-(\beta, \nu) + B_3^+(\beta, \nu) \right] \right\} \\
& \times i k \sqrt{1-(\beta/k)} \sqrt{1+(\beta/k)} J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{i \nu \rho} d\beta d\nu \\
& + \left\{ \int_{\beta=k}^{\infty} \left[\int_{\nu=-\infty}^{-0} + \int_{\nu=0+}^{\infty} \right] \right\} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, \nu) - B_3^-(\beta, \nu) \right] + \left[B_2^-(\beta, \nu) + B_3^+(\beta, \nu) \right] \right\} i \cdot i \beta \sqrt{1-(k/\beta)} \\
& \times \sqrt{1+(k/\beta)} J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{i \nu \rho} d\beta d\nu = I\delta(\rho-b) + I_{\infty}\delta(\rho-a), \quad \forall \rho \in (0, a) \quad (3.6.16)
\end{aligned}$$

ve (3.6.16)'daki iki ayrı integrali birleştirip tek bir integral haline getirirsek

$$\begin{aligned}
& \int_{\substack{\nu=-\infty \\ (\nu \neq 0)}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ (\beta \neq k)}}^{\infty} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, \nu) - B_3^-(\beta, \nu) \right] + \left[B_2^-(\beta, \nu) + B_3^+(\beta, \nu) \right] \right\} i \beta \sqrt{(k^2/\beta^2) - 1} \\
& \times J_{|\nu|}(\beta \rho) e^{i \nu \rho} d\beta d\nu = I_{\infty}\delta(\rho-a), \quad \forall \rho \in (0, a) \quad (3.6.17)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (3.6.16)'nın sağ yanındaki ilk terim, bu eşitlik $\rho \in (0, a)$ bölgesinde geçerli olduğu için düşmüştür. (3.6.17)'den Hankel Transformu yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \int_{v=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, v) - B_3^-(\beta, v) \right] + \left[B_2^-(\beta, v) + B_3^+(\beta, v) \right] \right\} i \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} e^{i v \varphi} dv \\
& = \int_0^{\infty} I_{s0} \delta(\rho - a) \rho J_{|v|}(\beta \rho) d\rho = I_{s0} a J_{|v|}(\beta a) \quad (3.6.18)
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. (3.6.18)'e Fourier Transformu uygulanırsa

$$2\pi i \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, v) - B_3^-(\beta, v) \right] + \left[B_2^-(\beta, v) + B_3^+(\beta, v) \right] \right\} = I_{s0} a J_{|v|}(\beta a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i v \varphi} d\varphi \quad (3.6.19)$$

Ve (2.2.6.12) kullanılarak

$$i \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} \left\{ \left[-B_2^+(\beta, v) - B_3^-(\beta, v) \right] + \left[B_2^-(\beta, v) + B_3^+(\beta, v) \right] \right\} = I_{s0} a J_{|v|}(\beta a) \delta(v) \quad (3.6.20)$$

denklemine ulaşılır.

(3.6.11) integral denklemini incelersek, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{\beta=0}^k \left[\int_{v=-\infty}^{-0} + \int_{v=0+}^{\infty} \right] \right\} \\
& \left[-C_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) - D_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) + C_3^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right. \\
& \left. + C_2^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) - C_3^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) - D_3^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] \\
& \times i k \sqrt{1 - (\beta / k)} \sqrt{1 + (\beta / k)} e^{i v \varphi} d\beta dv \\
& + \left\{ \int_{\beta=k}^{\infty} \left[\int_{v=-\infty}^{-0} + \int_{v=0+}^{\infty} \right] \right\} \\
& \left[-C_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) - D_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) + C_3^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_3^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right.
\end{aligned}$$

$$+C_2^-(\beta, \nu)H_\nu^{(1)}(\beta\rho) + D_2^-(\beta, \nu)H_\nu^{(2)}(\beta\rho) - C_3^-(\beta, \nu)H_\nu^{(1)}(\beta\rho) - D_3^-(\beta, \nu)H_\nu^{(2)}(\beta\rho) \Big] \\ \times i\beta\sqrt{1-(k/\beta)}\sqrt{1+(k/\beta)}e^{i\nu\varphi}d\beta d\nu = I\delta(\rho-b) + I_{so}\delta(\rho-a) \quad , \forall \rho \in (a, b) \quad (3.6.21)$$

İki integrali birleştirirsek

$$\int_{\substack{\nu=-\infty \\ (\nu \neq 0)}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ (\beta \neq k)}}^{\infty} \left[-C_2^+(\beta, \nu)H_\nu^{(1)}(\beta\rho) - D_2^+(\beta, \nu)H_\nu^{(2)}(\beta\rho) + C_3^+(\beta, \nu)H_\nu^{(1)}(\beta\rho) + D_3^+(\beta, \nu)H_\nu^{(2)}(\beta\rho) \right. \\ \left. + C_2^-(\beta, \nu)H_\nu^{(1)}(\beta\rho) + D_2^-(\beta, \nu)H_\nu^{(2)}(\beta\rho) - C_3^-(\beta, \nu)H_\nu^{(1)}(\beta\rho) - D_3^-(\beta, \nu)H_\nu^{(2)}(\beta\rho) \right] \\ \times i\beta\sqrt{(k^2/\beta^2)-1} e^{i\nu\varphi}d\beta d\nu = I\delta(\rho-b) + I_{so}\delta(\rho-a) \quad (3.6.22)$$

elde edilir. Burada işlemlerin kolaylaşması için bir değişken tanımlaması yaparsak

$$\int_{\substack{\nu=-\infty \\ (\nu \neq 0)}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ (\beta \neq k)}}^{\infty} \left[\tilde{C}_2^+(\beta, \nu)H_\nu^{(1)}(\beta\rho) + \tilde{D}_2^+(\beta, \nu)H_\nu^{(2)}(\beta\rho) \right] i\beta\sqrt{(k^2/\beta^2)-1} e^{i\nu\varphi}d\beta d\nu \\ = I\delta(\rho-b) + I_{so}\delta(\rho-a) \quad (3.6.23)$$

yazılır. (3.6.23)'te

$$\tilde{C}_2^+(\beta, \nu) = -C_2^+(\beta, \nu) + C_3^+(\beta, \nu) + C_2^-(\beta, \nu) - C_3^-(\beta, \nu) \quad (3.6.24)$$

$$\tilde{D}_2^+(\beta, \nu) = -D_2^+(\beta, \nu) + D_3^+(\beta, \nu) + D_2^-(\beta, \nu) - D_3^-(\beta, \nu) \quad (3.6.25)$$

konmuştur. (2.2.6.16) ve aşağıdaki eşitlik gözönüne alındığında

$$H_v^{(2)}(\beta\rho) = \frac{J_{-v}(\beta\rho) - e^{i\pi v} J_v(\beta\rho)}{-i \cdot \sin(\pi v)} \quad (3.6.26)$$

(3.6.23) şu şekilde tekrar yazılabilir:

$$\int_{\substack{v=-\infty \\ (v \neq 0)}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ (\beta \neq k)}}^{\infty} \left[\tilde{C}_2^+(\beta, v) \frac{J_{-v}(\beta\rho) - e^{-i\pi v} J_v(\beta\rho)}{i \cdot \sin(\pi v)} + \tilde{D}_2^+(\beta, v) \frac{J_{-v}(\beta\rho) - e^{i\pi v} J_v(\beta\rho)}{-i \cdot \sin(\pi v)} \right] \\ \times i\beta \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} e^{i v \varphi} d\beta dv = I\delta(\rho-b) + I_{s0}\delta(\rho-a) \quad (3.6.27)$$

Bu ifade de düzenlenirse

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} e^{i v \varphi} \int_{\beta=0+}^{\infty} \left\{ \frac{J_{-v}(\beta\rho)}{\sin(\pi v)} [\tilde{C}_2^+(\beta, v) - \tilde{D}_2^+(\beta, v)] + \frac{J_v(\beta\rho)}{\sin(\pi v)} [\tilde{D}_2^+(\beta, v) e^{i v \pi} - \tilde{C}_2^+(\beta, v) e^{-i v \pi}] \right\} \\ \times \beta \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} d\beta dv = I\delta(\rho-b) + I_{s0}\delta(\rho-a) \quad (3.6.28)$$

(3.6.28)'den de

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} e^{i v \varphi} \int_{\beta=0+}^{\infty} \frac{[\tilde{C}_2^+(\beta, v) - \tilde{D}_2^+(\beta, v)]}{\sin(\pi v)} J_{-v}(\beta\rho) \beta \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} d\beta dv \\ + \int_{v=-\infty}^{\infty} e^{i v \varphi} \int_{\beta=0+}^{\infty} \frac{[\tilde{D}_2^+(\beta, v) e^{i v \pi} - \tilde{C}_2^+(\beta, v) e^{-i v \pi}]}{\sin(\pi v)} J_v(\beta\rho) \beta \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} d\beta dv \\ = I\delta(\rho-b) + I_{s0}\delta(\rho-a) \quad (3.6.29)$$

elde edilir. (3.6.29)'un sol tarafındaki ilk integralde v yerine $-v$ yerleştirirsek

$$\begin{aligned}
& \int_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\varphi} \int_{\beta=0+}^{\infty} \frac{[\tilde{C}_2^+(\beta, -\nu) - \tilde{D}_2^+(\beta, -\nu)]}{\sin(-\pi\nu)} J_\nu(\beta\rho) \beta \sqrt{(k^2/\beta^2) - 1} d\beta (-d\nu) \\
& + \int_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\varphi} \int_{\beta=0+}^{\infty} \frac{[\tilde{D}_2^+(\beta, \nu)e^{i\nu\pi} - \tilde{C}_2^+(\beta, \nu)e^{-i\nu\pi}]}{\sin(\pi\nu)} J_\nu(\beta\rho) \beta \sqrt{(k^2/\beta^2) - 1} d\beta d\nu \\
& = \mathcal{I}\delta(\rho-b) + I_{s0}\delta(\rho-a)
\end{aligned} \tag{3.6.30}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned}
& \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\nu\varphi}}{\sin(\pi\nu)} \int_{\beta=0+}^{\infty} [\tilde{C}_2^+(\beta, -\nu) - \tilde{D}_2^+(\beta, -\nu)] J_\nu(\beta\rho) \beta \sqrt{(k^2/\beta^2) - 1} d\beta d\nu \\
& + \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu\varphi}}{\sin(\pi\nu)} \int_{\beta=0+}^{\infty} [\tilde{D}_2^+(\beta, \nu)e^{i\nu\pi} - \tilde{C}_2^+(\beta, \nu)e^{-i\nu\pi}] J_\nu(\beta\rho) \beta \sqrt{(k^2/\beta^2) - 1} d\beta d\nu \\
& = \mathcal{I}\delta(\rho-b) + I_{s0}\delta(\rho-a)
\end{aligned} \tag{3.6.31}$$

yazılır. (3.6.31)'de aşağıdaki tanımlamaları yapalım:

$$C_D^+(\beta, -\nu) = [\tilde{C}_2^+(\beta, -\nu) - \tilde{D}_2^+(\beta, -\nu)] \sqrt{(k^2/\beta^2) - 1} \tag{3.6.32}$$

$$D_C^+(\beta, \nu) = [\tilde{D}_2^+(\beta, \nu)e^{i\nu\pi} - \tilde{C}_2^+(\beta, \nu)e^{-i\nu\pi}] \sqrt{(k^2/\beta^2) - 1} \tag{3.6.33}$$

Ve

$$\int_{\beta=0+}^{\infty} C_D^+(\beta, -\nu) J_\nu(\beta\rho) \beta d\beta = \frac{1}{2} [c_D^+(\rho+0, -\nu) + c_D^+(\rho-0, -\nu)] \tag{3.6.34}$$

$$\int_{\beta=0+}^{\infty} D_c^+(\beta, \nu) J_\nu(\beta\rho) \beta d\beta = \frac{1}{2} [d_c^+(\rho+0, \nu) + d_c^+(\rho-0, \nu)] \quad (3.6.35)$$

özellikleri de hatırlanırsa, (3.6.31)

$$\begin{aligned} & \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\nu\varphi}}{\sin(\pi\nu)} \frac{1}{2} [c_D^+(\rho+0, -\nu) + c_D^+(\rho-0, -\nu)] d\nu \\ & + \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu\varphi}}{\sin(\pi\nu)} \frac{1}{2} [d_c^+(\rho+0, \nu) + d_c^+(\rho-0, \nu)] d\nu = I\delta(\rho-b) + I_{\infty}\delta(\rho-a) \end{aligned} \quad (3.6.36)$$

şekline dönüşür. (3.6.36)'nın sol yanındaki ilk integralde tekrar ν yerine $-\nu$ yerleştirirsek

$$\begin{aligned} & \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu\varphi}}{\sin(\pi\nu)} \frac{1}{2} [c_D^+(\rho+0, \nu) + c_D^+(\rho-0, \nu)] d\nu \\ & + \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu\varphi}}{\sin(\pi\nu)} \frac{1}{2} [d_c^+(\rho+0, \nu) + d_c^+(\rho-0, \nu)] d\nu = I\delta(\rho-b) + I_{\infty}\delta(\rho-a) \end{aligned} \quad (3.6.37)$$

yazılır.

$$C_D^+(\beta, \nu) = [\tilde{C}_2^+(\beta, \nu) - \tilde{D}_2^+(\beta, \nu)] \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} \quad (3.6.38)$$

$$D_c^+(\beta, \nu) = [\tilde{D}_2^+(\beta, \nu)e^{i\nu\pi} - \tilde{C}_2^+(\beta, \nu)e^{-i\nu\pi}] \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} \quad (3.6.39)$$

olduğu hatırlanıp bu aşamada yeni bir tanımlama yapılırsa

$$C_D^+(\beta, \nu) = C_*^+(\beta, \nu) - D_*^+(\beta, \nu) \quad (3.6.40)$$

$$D_C^+(\beta, \nu) = D_*^+(\beta, \nu)e^{i\nu x} - C_*^+(\beta, \nu)e^{-i\nu x} \quad (3.6.41)$$

yazılır. Burada

$$C_*^+(\beta, \nu) = \tilde{C}_2^+(\beta, \nu)\sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} \quad (3.6.42)$$

$$D_*^+(\beta, \nu) = \tilde{D}_2^+(\beta, \nu)\sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} \quad (3.6.43)$$

olarak kullanılmıştır. (3.6.42) ve (3.6.43)'e göre (3.6.34) ve (3.6.35)'i tekrar yazarsak

$$\int_{\beta=0+}^{\infty} C_D^+(\beta, \nu) J_\nu(\beta\rho) \beta d\beta = \int_{\beta=0+}^{\infty} [C_*^+(\beta, \nu) - D_*^+(\beta, \nu)] J_\nu(\beta\rho) \beta d\beta \quad (3.6.44)$$

$$\int_{\beta=0+}^{\infty} C_D^+(\beta, \nu) J_\nu(\beta\rho) \beta d\beta = \frac{1}{2} [c_*^+(\rho+0, \nu) + c_*^+(\rho-0, \nu)] - \frac{1}{2} [d_*^+(\rho+0, \nu) + d_*^+(\rho-0, \nu)] \quad (3.6.45)$$

ve

$$\int_{\beta=0+}^{\infty} D_C^+(\beta, \nu) J_\nu(\beta\rho) \beta d\beta = \int_{\beta=0+}^{\infty} [D_*^+(\beta, \nu)e^{i\nu x} - D_*^+(\beta, \nu)e^{-i\nu x}] J_\nu(\beta\rho) \beta d\beta \quad (3.6.46)$$

açılırsa

$$\int_{\beta=0+}^{\infty} D_c^+(\beta, \nu) J_\nu(\beta \rho) \beta d\beta = \frac{1}{2} [d_*^+(\rho+0, \nu) + d_*^+(\rho-0, \nu)] e^{i\nu\pi} - \frac{1}{2} [c_*^+(\rho+0, \nu) + c_*^+(\rho-0, \nu)] e^{-i\nu\pi} \quad (3.6.47)$$

elde edilir. Bunları (3.6.37)'de yerine koyarsak

$$\begin{aligned} & \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu\varphi}}{\sin(\pi\nu)} \left\{ \frac{1}{2} [c_*^+(\rho+0, \nu) + c_*^+(\rho-0, \nu)] - \frac{1}{2} [d_*^+(\rho+0, \nu) + d_*^+(\rho-0, \nu)] \right\} d\nu \\ & + \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu\varphi}}{\sin(\pi\nu)} \left\{ \frac{1}{2} [d_*^+(\rho+0, \nu) + d_*^+(\rho-0, \nu)] e^{i\nu\pi} - \frac{1}{2} [c_*^+(\rho+0, \nu) + c_*^+(\rho-0, \nu)] e^{-i\nu\pi} \right\} d\nu \\ & = I\delta(\rho-b) + I_{s0}\delta(\rho-a) \end{aligned} \quad (3.6.48)$$

elde ederiz. (3.6.48) düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{e^{i\nu\varphi}}{\sin(\pi\nu)} \left\{ [c_*^+(\rho+0, \nu) + c_*^+(\rho-0, \nu)] (1 - e^{-i\nu\pi}) - [d_*^+(\rho+0, \nu) + d_*^+(\rho-0, \nu)] (1 - e^{i\nu\pi}) \right\} \\ & = I\delta(\rho-b) + I_{s0}\delta(\rho-a) \end{aligned} \quad (3.6.49)$$

yazılır. (3.6.49)'den Fourier Transformasyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} & 2\pi \frac{1}{2\sin(\pi\nu)} \left\{ [c_*^+(\rho+0, \nu) + c_*^+(\rho-0, \nu)] (1 - e^{-i\nu\pi}) + [d_*^+(\rho+0, \nu) + d_*^+(\rho-0, \nu)] (-1 + e^{i\nu\pi}) \right\} \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} [I\delta(\rho-b) + I_{s0}\delta(\rho-a)] e^{-i\nu\varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (3.6.50)$$

Buradan da

$$\left\{ [c_*^+(\rho+0, \nu) + c_*^+(\rho-0, \nu)] (1 - e^{-i\nu\pi}) + [d_*^+(\rho+0, \nu) + d_*^+(\rho-0, \nu)] (-1 + e^{i\nu\pi}) \right\}$$

$$= 2[I\delta(\rho - b) + I_{s0}\delta(\rho - a)]\delta(v)\sin(\pi v) \quad (3.6.51)$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned} & \{[c_*^+ - d_*^+](\rho + 0, v) + [c_*^+ - d_*^+](\rho - 0, v)\} + \{[d_*^+ e^{iv\pi} - c_*^+ e^{-iv\pi}](\rho + 0, v) + [d_*^+ e^{iv\pi} - c_*^+ e^{-iv\pi}](\rho - 0, v)\} \\ & = 2[I\delta(\rho - b) + I_{s0}\delta(\rho - a)]\delta(v)\sin(\pi v) \end{aligned} \quad (3.6.52)$$

ve daha sonra da

$$\begin{aligned} & [c_D^+(\rho + 0, v) + c_D^+(\rho - 0, v)] + [d_C^+(\rho + 0, v) + d_C^+(\rho - 0, v)] \\ & = 2[I\delta(\rho - b) + I_{s0}\delta(\rho - a)]\delta(v)\sin(\pi v) \end{aligned} \quad (3.6.53)$$

elde edilir. Bu eşitlikten Hankel Transformasyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{2} [c_D^+(\rho + 0, v) + c_D^+(\rho - 0, v)] + [d_C^+(\rho + 0, v) + d_C^+(\rho - 0, v)] \rho J_v(\beta \rho) d\rho \\ & = \int_0^\infty [I\delta(\rho - b) + I_{s0}\delta(\rho - a)]\delta(v)\sin(\pi v) \rho J_v(\beta \rho) d\rho \end{aligned} \quad (3.6.54)$$

Buradan da

$$C_D^+(\beta, v) + D_C^+(\beta, v) = I\delta(v)\sin(\pi v)bJ_v(\beta b) + I_{s0}\delta(v)\sin(\pi v)aJ_v(\beta a) \quad (3.6.55)$$

elde edilir. (3.6.38) ve (3.6.39) tanım bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& [\tilde{C}_2^+(\beta, \nu) - \tilde{D}_2^+(\beta, \nu)] \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} + [\tilde{D}_2^+(\beta, \nu) e^{i\nu\pi} - \tilde{C}_2^+(\beta, \nu) e^{-i\nu\pi}] \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} \\
& = I\delta(\nu) \sin(\pi\nu) b J_\nu(\beta b) + I_{s0} \delta(\nu) \sin(\pi\nu) a J_\nu(\beta a) \quad (3.6.56)
\end{aligned}$$

Buradan da

$$\tilde{C}_2^+(\beta, \nu) (1 - e^{-i\nu\pi}) + \tilde{D}_2^+(\beta, \nu) (-1 + e^{i\nu\pi}) = \frac{\delta(\nu) \sin(\pi\nu)}{\sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1}} [Ib J_\nu(\beta b) + I_{s0} a J_\nu(\beta a)] \quad (3.6.57)$$

sonucuna ulaşılır. $\tilde{C}_2^+(\beta, \nu)$ ve $\tilde{D}_2^+(\beta, \nu)$ 'nın (3.6.24) ve (3.6.25) bağıntıları ile verilen tanımları dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
& [-C_2^+(\beta, \nu) + C_3^+(\beta, \nu) + C_2^-(\beta, \nu) - C_3^-(\beta, \nu)] (1 - e^{-i\nu\pi}) \\
& + [-D_2^+(\beta, \nu) + D_3^+(\beta, \nu) + D_2^-(\beta, \nu) - D_3^-(\beta, \nu)] (-1 + e^{i\nu\pi}) \\
& = \frac{\delta(\nu) \sin(\pi\nu)}{\sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1}} [Ib J_\nu(\beta b) + I_{s0} a J_\nu(\beta a)] \quad (3.6.58)
\end{aligned}$$

sonuç denkleminde ulaşırız.

(3.6.12) eşitliğini (3.6.10) eşitliğine benzetip (3.6.17) sonuç integral denkleminde gerekli düzenlemeleri yaparsak, (3.6.12)'ye ait sonuç integral denklemi aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned}
& \int_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ \beta \neq k}}^{\infty} \left[[-F_2^+(\beta, \nu) - F_3^-(\beta, \nu)] + [F_2^-(\beta, \nu) + F_3^+(\beta, \nu)] \right] i\beta \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} \\
& \times H_\nu^{(1)}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu = I\delta(\rho - b), \quad \forall \rho \in (b, \infty) \quad (3.6.59)
\end{aligned}$$

Burada, (3.6.17)'nin sağ tarafında yer alan $I_0 \delta(\rho-a)$ terimi, eşitliğin $\rho \in (b, \infty)$ aralığında geçerli olması sebebi ile düşmüştür. Bu (3.6.59)'u da (3.6.23)'e benzetirsek

$$\tilde{C}_2^+(\beta, v) = -F_2^+(\beta, v) - F_3^-(\beta, v) + F_2^-(\beta, v) + F_3^+(\beta, v) \quad (3.6.60)$$

$$\tilde{D}_2^+(\beta, v) = 0 \quad (3.6.61)$$

yerine konmalıdır. Bu durumda (3.6.59)'un çözümü de (3.6.57)'ye benzetilerek

$$\tilde{C}_2^+(\beta, v)(1 - e^{-iv\pi}) = \frac{\delta(v) \sin(\pi v)}{\sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1}} I_b J_v(\beta b) \quad (3.6.62)$$

Buradan da (3.6.60) yerine konularak

$$\left[-F_2^+(\beta, v) - F_3^-(\beta, v) + F_2^-(\beta, v) + F_3^+(\beta, v)(1 - e^{-iv\pi}) \right] = \frac{\delta(v) \sin(\pi v)}{\sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1}} I_b J_v(\beta b) \quad (3.6.63)$$

sonuç denklemi elde edilmiş olur.

(3.6.4) eşitliğini de yukarıda yaptığımız şekilde (3.6.10) eşitliğine benzetirsek

$$\begin{aligned} & \int_{v=-\infty}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ (v \neq 0) \\ (\beta \neq k)}}^{\infty} \left\{ [B_2^+(\beta, v) - B_3^-(\beta, v)] + [B_2^-(\beta, v) - B_3^+(\beta, v)] \right\} J_{|v|}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv \\ & = K_{1a}(\rho, z) [-u(\rho-b) + u(\rho-a)] + K_{1b}(\rho, z) u(\rho-b) \end{aligned} \quad (3.6.64)$$

yazılabilir. Burada elektrik alan integrallerinde geçen $\hat{z}$ çarpanı, $K_n(\rho, z)$ terimlerinin içine atılmıştır. (3.6.64)'ün çözümü, (3.6.10)'un çözümü olan (3.6.20)'ye benzetimle kolayca bulunabilir. Bu çözüm

$$\begin{aligned}
& B_2^+(\beta, \nu) - B_3^-(\beta, \nu) + B_2^-(\beta, \nu) - B_3^+(\beta, \nu) \\
&= \delta(\nu) \beta \left\{ \int_{\rho=a}^b K_{1a}(\rho, z) + \rho J_{|\nu|}(\beta \rho) d\rho + \int_b^\infty K_{2a}(\rho, z) \rho J_{|\nu|}(\beta \rho) d\rho \right\} \quad (3.6.65)
\end{aligned}$$

olacaktır.

(3.6.5) eşitliğini de (3.6.11)'e benzetirsek, (3.6.11)'den elde ettiğimiz (3.6.21) eşitliği, (3.6.5) için

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{\beta=0}^k \left[\int_{\nu=-\infty}^{-0} + \int_{\nu=0+}^{\infty} \right] \right\} \\
& \left[C_2^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta \rho) + D_2^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta \rho) - C_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta \rho) - D_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta \rho) \right. \\
& \left. + C_2^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta \rho) + D_2^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta \rho) - C_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta \rho) - D_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta \rho) \right] \\
& \times e^{i\nu \varphi} d\beta d\nu \\
& + \left\{ \int_{\beta=k}^{\infty} \left[\int_{\nu=-\infty}^{-0} + \int_{\nu=0+}^{\infty} \right] \right\} \\
& \left[C_2^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta \rho) + D_2^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta \rho) - C_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta \rho) - D_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta \rho) \right. \\
& \left. + C_2^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta \rho) + D_2^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta \rho) - C_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta \rho) - D_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta \rho) \right] \\
& \times e^{i\nu \varphi} d\beta d\nu = K_{2a}(\rho, z) [u(\rho) - u(\rho - a)] + K_{2b}(\rho, z) u(\rho - b), \quad \forall \rho \in (a, b) \quad (3.6.66)
\end{aligned}$$

eşitliğine dönüşür. Bu da düzenlendiğinde

$$\int_{\substack{v=-\infty \\ (v \neq 0)}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ (\beta \neq k)}}^{\infty} \left[\hat{C}_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + \hat{D}_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{i v \varphi} d\beta dv$$

$$= K_{20}(\rho, z) [u(\rho) - u(\rho - a)] + K_{2b}(\rho, z) u(\rho - b) \quad (3.6.67)$$

yazılır. Burada $\hat{C}_2^+(\beta, v)$ ve $\hat{D}_2^+(\beta, v)$ aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\hat{C}_2^+(\beta, v) = C_2^+(\beta, v) + C_2^-(\beta, v) - C_3^+(\beta, v) - C_3^-(\beta, v) \quad (3.6.68)$$

$$\hat{D}_2^+(\beta, v) = D_2^+(\beta, v) + D_2^-(\beta, v) - D_3^+(\beta, v) - D_3^-(\beta, v) \quad (3.6.69)$$

Eğer $\hat{C}_2^+(\beta, v)$ ile $\tilde{C}_2^+(\beta, v)$, $\hat{D}_2^+(\beta, v)$ ile de $\tilde{D}_2^+(\beta, v)$ arasında değişim yaparsak (3.6.62)'nin çözümü, (3.6.57)'ye benzeşim ile

$$\hat{C}_2^+(\beta, v)(1 - e^{-iv\pi}) + \hat{D}_2^+(\beta, v)(-1 + e^{iv\pi})$$

$$= i\delta(v) \sin(\pi v) \beta \int_{\rho=0}^{\infty} \left\{ K_{20}(\rho, z) [u(\rho) - u(\rho - a)] + K_{2b}(\rho, z) u(\rho - b) \right\} \rho J_v(\beta \rho) d\rho \quad (3.6.70)$$

olarak elde edilir. (3.6.69)'un da sağ yanındaki integral sınırları yerine konursa

$$\hat{C}_2^+(\beta, v)(1 - e^{-iv\pi}) + \hat{D}_2^+(\beta, v)(-1 + e^{iv\pi})$$

$$= i\delta(v) \sin(\pi v) \beta \left\{ \int_{\rho=0}^a K_{20}(\rho, z) \rho J_v(\beta \rho) d\rho + \int_{\rho=b}^{\infty} K_{2b}(\rho, z) \rho J_v(\beta \rho) d\rho \right\} \quad (3.6.71)$$

yazılır. $\hat{C}_2^+(\beta, v)$ ve $\hat{D}_2^+(\beta, v)$ (3.6.68) ve (3.6.69) yardımı ile yerine konduğunda ise

$$[C_2^+(\beta, v) + C_2^-(\beta, v) - C_3^+(\beta, v) - C_3^-(\beta, v)](1 - e^{-iv\pi})$$

$$\begin{aligned}
& + [D_2^+(\beta, v) + D_2^-(\beta, v) - D_3^+(\beta, v) - D_3^-(\beta, v)](-1 + e^{iv\pi}) \\
& = i\delta(v) \sin(\pi v) \beta \left\{ \int_{\rho=0}^a K_{20}(\rho, z) \rho J_v(\beta \rho) d\rho + \int_b^\infty K_{2b}(\rho, z) \rho J_v(\beta \rho) d\rho \right\} \quad (3.6.72)
\end{aligned}$$

sonuç denkleminde ulaşılır.

(3.6.6)'daki eşitlikten sonuç denkleminde ulaşmak için ise (3.6.4) ve sonuçlarına benzetme yaparsak

$$\begin{aligned}
& \int_{\substack{v=-\infty \\ (v \neq 0)}}^\infty \int_{\substack{\beta=0+ \\ (\beta \neq k)}}^\infty \left\{ [F_2^+(\beta, v) - F_3^-(\beta, v)] + [F_2^-(\beta, v) - F_3^+(\beta, v)] \right\} H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{iv\pi} d\beta dv \\
& = \left\{ K_{30}(\rho, z) [u(\rho) - u(\rho - a)] + K_{3a}(\rho, z) [u(\rho - a) - u(\rho - b)] \right\} \delta(z) \quad (3.6.73)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.6.73)'ün çözümü de

$$\begin{aligned}
& [F_2^+(\beta, v) - F_3^-(\beta, v) + F_2^-(\beta, v) - F_3^+(\beta, v)] (1 - e^{-iv\pi}) \\
& = i\delta(v) \sin(\pi v) \delta(z) \beta \left\{ \int_{\rho=0}^a K_{30}(\rho, z) \rho J_v(\beta \rho) d\rho + \int_{\rho=a}^b K_{3a}(\rho, z) \rho J_v(\beta \rho) d\rho \right\} \quad (3.6.74)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada da aşağıdaki tanımlamayı yaparsak

$$\tilde{K}_3(\beta, v, z) = \left\{ \int_{\rho=0}^a K_{30}(\rho, z) \rho J_v(\beta \rho) d\rho + \int_{\rho=a}^b K_{3a}(\rho, z) \rho J_v(\beta \rho) d\rho \right\} \quad (3.6.75)$$

$$[F_2^+(\beta, v) - F_3^-(\beta, v) + F_2^-(\beta, v) - F_3^+(\beta, v)] (1 - e^{-iv\pi}) = i\delta(v) \sin(\pi v) \beta \tilde{K}_3(\beta, v, 0) \quad (3.6.76)$$

yazılır.

(3.5.8) eşitliği ile ifade edilen sınır koşulundan, yukarıda yaptığımız şekilde önceden elde ettiğimiz denklemlere benzetim yoluyla integral denklemler elde etmeye çalışırsak:

$$\begin{aligned}
 & -\hat{z} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} B_1(\beta, v) e^{i\gamma z} J_{|\nu|}(\beta\rho) \delta(z-h-0) e^{i\nu\varphi} d\beta dv \\
 & = -\hat{z} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} [B_2^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + B_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma z}] J_{|\nu|}(\beta\rho) \delta(z-h+0) e^{i\nu\varphi} d\beta dv, \\
 & \quad \forall \rho \in [0, a) \quad (3.6.77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\hat{z} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} \left[C_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_1(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{i\gamma z} \delta(z-h-0) e^{i\nu\varphi} d\beta dv \\
 & = -\hat{z} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} \left\{ \left[C_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{i\gamma z} \right. \\
 & \quad \left. + \left[C_2^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_2^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{-i\gamma z} \right\} \delta(z-h+0) e^{i\nu\varphi} d\beta dv \quad \forall \rho \in (a, b) \quad (3.6.78)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 & -\hat{z} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} F_1(\beta, v) e^{i\gamma z} H_v^{(1)}(\beta\rho) \delta(z-h-0) e^{i\nu\varphi} d\beta dv \\
 & = -\hat{z} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} [F_2^+(\beta, v) e^{i\gamma z} + F_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma z}] H_v^{(1)}(\beta\rho) \delta(z-h+0) e^{i\nu\varphi} d\beta dv \quad \forall \rho \in (b, \infty) \quad (3.6.79)
 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.6.77) eşitliğini değerlendirirsek

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\rho} \left\{ [B_1(\beta, v) - B_2^+(\beta, v)] e^{i\gamma h} - B_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma h} \right\} J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta dv$$

$$= \begin{cases} 0, & \rho \in [0, a) \\ L_{1a}(\rho, z)\delta(z-h), & \rho \in (a, b) \\ L_{1b}(\rho, z)\delta(z-h), & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.6.80)$$

yazılır. (3.6.80)'deki integral, (3.6.15)'te olduğu gibi değerlendirilirse

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \left[\int_{N_+} + \int_{\tilde{N}_+} \right] \right\} \left\{ [B_1(\beta, v) - B_2^+(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - B_2^-(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} \\ & \times J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta dv \\ & + \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \left[\int_{N_+} + \int_{\tilde{N}_+} \right] \right\} \left\{ [B_1(\beta, v) - B_2^+(\beta, v)] e^{i\beta\sqrt{1-(k/\beta)} \cdot \sqrt{1+(k/\beta)} h} - B_2^-(\beta, v) e^{-i\beta\sqrt{1-(k/\beta)} \cdot \sqrt{1+(k/\beta)} h} \right\} \\ & \times J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta dv \\ & = L_{1a}(\rho, z)\delta(z-h)[-u(\rho-b) + u(\rho-a)] + L_{1b}(\rho, z)\delta(z-h)u(\rho-b), \quad \forall \rho \in (0, a) \end{aligned} \quad (3.6.81)$$

yazılır. Eşitlik düzenlenip tek bir integral altında toplanırsa

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{\nu=-\infty \\ (\nu \neq 0)}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ (\beta \neq k)}}^{\infty} \left\{ [B_1(\beta, v) - B_2^+(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - B_2^-(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} \\ & \times J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta dv = L_{1a}(\rho, z)\delta(z-h)[-u(\rho-b) + u(\rho-a)] + L_{1b}(\rho, z)\delta(z-h)u(\rho-b), \quad \forall \rho \in (0, a) \end{aligned} \quad (3.6.82)$$

elde ederiz. Bu eşitliğe Hankel Transformasyonu uygulanırsa

$$\int_{\nu=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{[B_1(\beta, v) - B_2^+(\beta, v)]}{\beta} e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - \frac{B_2^-(\beta, v)}{\beta} e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} e^{i\nu\varphi} d\nu$$

$$= \int_0^{\infty} \left\{ L_{1a}(\rho, z) \delta(z-h) [-u(\rho-b) + u(\rho-a)] + L_{1b}(\rho, z) \delta(z-h) u(\rho-b) \right\} \rho J_{|v|}(\beta \rho) d\rho \quad (3.6.83)$$

yazılır. Bu aşamada

$$\begin{aligned} \tilde{L}_1(\beta, v; h) \\ = \int_0^{\infty} \left\{ L_{1a}(\rho, z) \delta(z-h) [-u(\rho-b) + u(\rho-a)] + L_{1b}(\rho, z) \delta(z-h) u(\rho-b) \right\} \rho J_{|v|}(\beta \rho) d\rho \end{aligned} \quad (3.6.84)$$

tanımını yapıp Fourier Transformasyonunu kullanırsak

$$\left[B_1(\beta, v) - B_2^+(\beta, v) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - B_2^-(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} = \beta \delta(v) \tilde{L}_1(\beta, v; h) \quad (3.6.85)$$

sonucuna ulaşırız.

(3.6.78) eşitliğini incelersek

$$\begin{aligned} \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_1(\beta, v) - C_2^+(\beta, v) \right] H_v^{(1)}(\beta \rho) + \left[D_1(\beta, v) - D_2^+(\beta, v) \right] H_v^{(2)}(\beta \rho) \right\} e^{i\gamma h} \\ - \left[C_2^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{-i\gamma h} \Bigg\} e^{i\gamma \rho} d\beta dv = \begin{cases} L_{2a}(\rho, z) \delta(z-h), & \rho \in [0, a) \\ 0, & \rho \in (a, b) \\ L_{2b}(\rho, z) \delta(z-h), & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6.86)$$

olduğunu görürüz. Bu eşitlik, (3.6.21)'e benzer şekilde incelenirse

$$\int_{\substack{v=-\infty \\ v \neq 0}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ \beta \neq k}}^{\infty} \left[\tilde{C}(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + \tilde{D}(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{i v \varphi} d\beta dv = \begin{cases} L_{20}(\rho, z) \delta(z-h), & \rho \in [0, a) \\ 0, & \rho \in (a, b) \\ L_{2b}(\rho, z) \delta(z-h), & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.6.87)$$

yazılabilir. Burada

$$\tilde{C}(\beta, v) = [C_1(\beta, v) - C_2^+(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - C_2^-(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \quad (3.6.88)$$

$$\tilde{D}(\beta, v) = [D_1(\beta, v) - D_2^+(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - D_2^-(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \quad (3.6.89)$$

olarak tanımlanmıştır. (3.6.87)'yi, (3.6.67)'ye benzetirsek çözümü de (3.6.70)'e benzeyecektir

$$\begin{aligned} & \tilde{C}(\beta, v)(1 - e^{-iv\pi}) + \tilde{D}(\beta, v)(-1 + e^{iv\pi}) \\ &= i\delta(v) \sin(\pi v) \beta \delta(z-h) \int_{\rho=0}^{\infty} \left\{ L_{20}(\rho, z) [u(\rho) - u(\rho-a)] + L_{2b}(\rho, z) u(\rho-b) \right\} \rho J_v(\beta \rho) d\rho \end{aligned} \quad (3.6.90)$$

Sağ yanda integral sınırları yerine konursa

$$\begin{aligned} & \tilde{C}(\beta, v)(1 - e^{-iv\pi}) + \tilde{D}(\beta, v)(-1 + e^{iv\pi}) \\ &= i\delta(v) \sin(\pi v) \beta \left\{ \int_{\rho=0}^a L_{20}(\rho, h) \rho J_v(\beta \rho) d\rho + \int_b^{\infty} L_{2b}(\rho, h) \rho J_v(\beta \rho) d\rho \right\} \end{aligned} \quad (3.6.91)$$

veya

$$\tilde{L}_2(\beta, v, h) = \int_{\rho=0}^a L_{20}(\rho, h) \rho J_v(\beta \rho) d\rho + \int_b^{\infty} L_{2b}(\rho, h) \rho J_v(\beta \rho) d\rho \quad (3.6.92)$$

tanımlamasını kullanarak

$$\tilde{C}(\beta, \nu)(1 - e^{-i\nu\pi}) + \tilde{D}(\beta, \nu)(-1 + e^{i\nu\pi}) = i\delta(\nu) \sin(\pi\nu) \beta \tilde{L}_2(\beta, \nu; h) \quad (3.6.93)$$

yazılabilir. (3.6.93)'te (3.6.88) ve (3.6.89) yerine konulursa

$$\begin{aligned} & \left\{ [C_1(\beta, \nu) - C_2^+(\beta, \nu)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - C_2^-(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (1 - e^{-i\nu\pi}) \\ & + \left\{ [D_1(\beta, \nu) - D_2^+(\beta, \nu)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - D_2^-(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (-1 + e^{i\nu\pi}) \\ & = i\delta(\nu) \sin(\pi\nu) \beta \tilde{L}_2(\beta, \nu; h) \end{aligned} \quad (3.6.94)$$

elde edilir.

(3.6.79) eşitliğini incelersek

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_\nu} \int_{\xi_\beta} \left\{ [F_1(\beta, \nu) - F_2^+(\beta, \nu)] e^{i\gamma h} - F_2^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma h} \right\} H_\nu^{(1)}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\ & = \begin{cases} L_{30}(\rho, z) \delta(z - h), & \rho \in [0, a) \\ L_{3a}(\rho, z) \delta(z - h), & \rho \in (a, b) \\ 0, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6.95)$$

yazarız. (3.6.73)'e benzeterek

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{\nu=-\infty \\ (\nu \neq 0)}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ (\beta \neq k)}}^{\infty} \left\{ [F_1(\beta, \nu) - F_2^+(\beta, \nu)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - F_2^-(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} \\ & \times H_\nu^{(1)}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu = \begin{cases} L_{30}(\rho, z) \delta(z - h), & \rho \in [0, a) \\ L_{3a}(\rho, z) \delta(z - h), & \rho \in (a, b) \\ 0, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6.96)$$

yazılır. (3.6.96)'nın çözümü de (3.6.74)'le benzerlik kurularak

$$\begin{aligned} & \left\{ [F_1(\beta, v) - F_2^+(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - F_2^-(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (1 - e^{-iv\pi}) \\ & = i\delta(v) \sin(\pi v) \delta(z-h) \beta \left\{ \int_{\rho=0}^a L_{30}(\rho, z) {}_pJ_v(\beta\rho) d\rho + \int_{\rho=b}^{\infty} L_{3a}(\rho, z) {}_pJ_v(\beta\rho) d\rho \right\} \end{aligned} \quad (3.6.97)$$

veya

$$\tilde{L}_3(\beta, v, h) = \int_{\rho=0}^a L_{30}(\rho, h) {}_pJ_v(\beta\rho) d\rho + \int_{\rho=b}^{\infty} L_{3a}(\rho, h) {}_pJ_v(\beta\rho) d\rho \quad (3.6.98)$$

dersek

$$\begin{aligned} & \left\{ [F_1(\beta, v) - F_2^+(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - F_2^-(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (1 - e^{-iv\pi}) \\ & = i\delta(v) \sin(\pi v) \beta \tilde{L}_3(\beta, v, h) \end{aligned} \quad (3.6.99)$$

olarak yazılır.

(3.5.9) ile ifade edilen sınır koşulunu inceleyelim.

$\forall \rho \in [0, a)$ için

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[-B_1(\beta, v) + B_2^+(\beta, v) \right] e^{i\gamma h} - B_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma h} \left[\gamma J_{|v|}(\beta\rho) e^{i v \varphi} \right] d\beta dv = I_{sh} \delta(\rho-a) \quad (3.6.100)$$

$\forall \rho \in (a, b)$ için

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[-C_1(\beta, v) + C_2^+(\beta, v) \right] H_v^{(1)}(\beta \rho) + \left[-D_1(\beta, v) + D_2^+(\beta, v) \right] H_v^{(2)}(\beta \rho) \right\} e^{i\gamma h} \\ - \left[C_2^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta \rho) + D_2^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{-i\gamma h} \Big\} i\gamma e^{i v \varphi} d\beta dv = I_{sh} \delta(\rho - a) \quad (3.6.101)$$

$\forall \rho \in (b, \infty)$ için

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[-F_1(\beta, v) + F_2^+(\beta, v) \right] e^{i\gamma h} - F_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma h} \right\} i\gamma H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i v \varphi} d\beta dv = \begin{cases} 0, & \rho \in (b, \infty) \\ M_b(\rho, h), & \rho \in [0, b) \end{cases} \quad (3.6.102)$$

yazılır.

(3.6.100)'ü inceleyelim

$$\int_{\substack{v=-\infty \\ (v \neq 0)}}^{\infty} \int_{\substack{\beta=0+ \\ (\beta \neq k)}}^{\infty} \left\{ \left[-B_1(\beta, v) + B_2^+(\beta, v) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - B_2^-(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} \\ \times J_{|\nu|}(\beta \rho) i\beta \sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} e^{i v \varphi} d\beta dv = I_{sh} \delta(\rho - a), \quad \forall \rho \in (0, a) \quad (3.6.103)$$

yazılır. Hankel Transformasyonu uygulanırsa

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[-B_1(\beta, v) + B_2^+(\beta, v) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - B_2^-(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} \\ \times i\sqrt{(k^2 / \beta^2) - 1} e^{i v \varphi} dv = \int_0^{\infty} I_{sh} \delta(\rho - a) \rho J_{|\nu|}(\beta \rho) d\rho = I_{sh} a J_{|\nu|}(\beta a) \quad (3.6.104)$$

ve bu eşitliğe Fourier Transformasyonu da uygulandığında

$$\left\{ \left[-B_1(\beta, \nu) + B_2^+(\beta, \nu) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - B_2^-(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} i\sqrt{(k^2/\beta^2) - 1} \\ = I_{sh} a J_{|\nu|}(\beta a) \delta(\nu) \quad (3.6.105)$$

sonuç denklemi elde edilmiş olur.

(3.6.101) eşitliğini incelersek benzetme yoluyla ve

$$\tilde{C}(\beta, \nu) = \left[-C_1(\beta, \nu) + C_2^+(\beta, \nu) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - C_2^-(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \quad (3.6.106)$$

$$\tilde{D}(\beta, \nu) = \left[-D_1(\beta, \nu) + D_2^+(\beta, \nu) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - D_2^-(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \quad (3.6.107)$$

tanımlarını yaparak

$$\left\{ \left[-C_1(\beta, \nu) + C_2^+(\beta, \nu) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - C_2^-(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (1 - e^{-i\nu\pi}) \\ + \left\{ \left[-D_1(\beta, \nu) + D_2^+(\beta, \nu) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - D_2^-(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (-1 + e^{i\nu\pi}) \\ = \frac{\delta(\nu) \sin(\pi\nu)}{\sqrt{(k^2/\beta^2) - 1}} I_{sh} a J_{|\nu|}(\beta a) \quad (3.6.108)$$

sonuç denklemi elde edilir.

(3.6.102)'yi incelersek

$$\left\{ \left[-F_1(\beta, \nu) + F_2^+(\beta, \nu) \right] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - F_2^-(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (1 - e^{-i\nu\pi}) \\ = i\delta(\nu) \sin(\pi\nu) \delta(z-h) \beta \int_{\rho=0}^{\infty} M_b(\rho; z) u(\rho-b) \rho J_{|\nu|}(\beta \rho) d\rho \quad (3.6.109)$$

sonuç denklemi elde edilmiş olur.

(3.5.12) ifadesi ile verilen sınır koşulunu incelersek

$\forall \rho \in [0, a)$ için

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ [B_3^-(\beta, v) - B_4(\beta, v)] e^{i\gamma h} - B_3^+(\beta, v) e^{-i\gamma h} \right\} i\gamma J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\rho} d\beta dv = I_{s(-h)} \delta(\rho - a) \quad (3.6.110)$$

$\forall \rho \in (a, b)$ için

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ [C_3^-(\beta, v) - C_4(\beta, v)] H_v^{(1)}(\beta\rho) + [D_3^-(\beta, v) - D_4(\beta, v)] H_v^{(2)}(\beta\rho) \right\} e^{i\gamma h} \\ - \left\{ C_3^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_3^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right\} e^{-i\gamma h} \right\} i\gamma e^{i\nu\rho} d\beta dv = I_{s(-h)} \delta(\rho - a) \quad (3.6.111)$$

ve $\forall \rho \in (b, \infty)$ için

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ [F_3^-(\beta, v) - F_4(\beta, v)] e^{i\gamma h} - F_3^+(\beta, v) e^{-i\gamma h} \right\} i\gamma H_v^{(1)}(\beta\rho) e^{i\nu\rho} d\beta dv = \begin{cases} 0, & \rho \in (b, \infty) \\ N_b(\rho, -h), & \rho \in [0, b) \end{cases} \quad (3.6.112)$$

yazılır. Bu üç eşitliği, (3.6.105), (3.6.108) ve (3.6.109)'a benzeterek

$$\left[[B_3^-(\beta, v) - B_4(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - B_3^+(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right] i\sqrt{(k^2/\beta^2) - 1} \\ = I_{s(-h)} a J_{|\nu|}(\beta a) \delta(v) \quad (3.6.113)$$

$$\left\{ [C_3^-(\beta, v) - C_4(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - C_3^+(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (1 - e^{-i\nu\pi})$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ [D_3^-(\beta, \nu) - D_4(\beta, \nu)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - D_3^+(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (-1 + e^{i\nu\pi}) \\
& = \frac{\delta(\nu) \sin(\pi\nu)}{\sqrt{(k^2/\beta^2) - 1}} I_{s(-h)} a J_\nu(\beta a) \quad (3.6.114)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left\{ [F_3^-(\beta, \nu) - F_4(\beta, \nu)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} - F_3^+(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (1 - e^{-i\nu\pi}) \\
& = i\delta(\nu) \sin(\pi\nu) \delta(z+h) \beta \int_{\rho=0}^{\infty} N_b(\rho; z) u(\rho-b) \rho J_\nu(\beta\rho) d\rho \quad (3.6.115)
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

(3.5.10) ile verilen sınır koşulunu inceleyelim

$$\begin{aligned}
& \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left\{ [B_3^-(\beta, \nu) - B_4(\beta, \nu)] e^{i\gamma h} + B_3^+(\beta, \nu) e^{-i\gamma h} \right\} J_{|\nu|}(\beta\rho) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& = \begin{cases} 0, & \rho \in [0, a) \\ P_{1a}(\rho, z) \delta(z-h), & \rho \in (a, b) \\ P_{1b}(\rho, z) \delta(z-h), & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.6.116)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left\{ [C_3^-(\beta, \nu) - C_4(\beta, \nu)] H_\nu^{(1)}(\beta\rho) + [D_3^-(\beta, \nu) - D_4^+(\beta, \nu)] H_\nu^{(2)}(\beta\rho) \right\} e^{i\gamma h} \\
& + \left\{ C_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta\rho) + D_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta\rho) \right\} e^{-i\gamma h} \Bigg\} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu = \begin{cases} P_{20}(\rho, z) \delta(z-h), & \rho \in [0, a) \\ 0, & \rho \in (a, b) \\ P_{2b}(\rho, z) \delta(z-h), & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.6.117)
\end{aligned}$$

ve

$$\int_{\ell_v} \int_{\ell_p} \left\{ [F_3^-(\beta, v) - F_4(\beta, v)] e^{i\gamma h} + F_3^+(\beta, v) e^{-i\gamma h} \right\} H_v^{(1)}(\beta \rho) e^{i v \phi} d\beta dv$$

$$= \begin{cases} P_{30}(\rho, z) \delta(z - h), & \rho \in [0, a] \\ P_{3a}(\rho, z) \delta(z - h), & \rho \in (a, b) \\ 0, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.6.118)$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.6.116), (3.6.117) ve (3.6.118) eşitliklerinden (3.5.8) sınır koşulundan elde edilen eşitliklere benzetme yoluyla çözüm bulursak (3.6.116) için

$$\begin{aligned} [B_3^-(\beta, v) - B_4(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} + B_3^+(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \\ = \beta \delta(v) \tilde{P}_1(\beta, v, -h) \end{aligned} \quad (3.6.119)$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(\beta, v, -h) \\ = \int_0^\infty \left\{ P_{1a}(\rho, z) \delta(z + h) [-u(\rho - b) + u(\rho - a)] + P_{1b}(\rho, z) \delta(z + h) u(\rho - b) \right\} \rho J_{|\nu|}(\beta \rho) d\rho \end{aligned} \quad (3.6.120)$$

olarak tanımlanmıştır. (3.6.117)'den ise

$$\begin{aligned} \left\{ [C_3^-(\beta, v) - C_4(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} + C_3^+(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (1 - e^{-iv\pi}) \\ + \left\{ [D_3^-(\beta, v) - D_4(\beta, v)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} + D_3^+(\beta, v) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (-1 + e^{iv\pi}) \\ = i\delta(v) \sin(\pi v) \beta \tilde{P}_2(\beta, v, -h) \end{aligned} \quad (3.6.121)$$

elde edilir. Burada da

$$\tilde{P}_2(\beta, \nu, -h) = \int_{\rho=0}^{\infty} \left\{ P_{20}(\rho, z) \delta(z+h) [u(\rho) - u(\rho-a)] + P_{2b}(\rho, z) \delta(z+h) u(\rho-b) \right\} \rho J_{\nu}(\beta \rho) d\rho \quad (3.6.122)$$

tanımı yapılmıştır. (3.6.118) eşitliğinden de

$$\begin{aligned} & \left\{ [F_3^-(\beta, \nu) - F_4(\beta, \nu)] e^{ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} + F_3^+(\beta, \nu) e^{-ik\sqrt{1-(\beta/k)} \cdot \sqrt{1+(\beta/k)} h} \right\} (1 - e^{-i\nu\pi}) \\ & = i\delta(\nu) \sin(\pi\nu) \beta \tilde{P}_3(\beta, \nu, -h) \end{aligned} \quad (3.6.123)$$

elde edilir. (3.6.123)'teki $\tilde{P}_3(\beta, \nu, -h)$ de

$$\tilde{P}_3(\beta, \nu, -h) = \int_{\rho=0}^a P_{30}(\rho, z) \delta(z+h) \rho J_{\nu}(\beta \rho) d\rho + \int_{\rho=b}^{\infty} P_{3a}(\rho, z) \delta(z+h) \rho J_{\nu}(\beta \rho) d\rho \quad (3.6.124)$$

olarak tanımlanmıştır.

Çözümün bu aşamasında (3.5.1) - (3.5.12) ile verilmiş olan yeterli sınır koşullarının tamamı incelenmiş ve onsekiz adet denklem ((3.6.20), (3.6.58), (3.6.63), (3.6.65), (3.6.72), (3.6.76), (3.6.85), (3.6.94), (3.6.99), (3.6.105), (3.6.108), (3.6.109), (3.6.113), (3.6.114), (3.6.115), (3.6.119), (3.6.121), (3.6.123)) elde edilmiştir. Bu denklemler, alan ifadelerinde kullanılmış olan yirmidört adet fonksiyon ($B_1(\beta, \nu), B_2^+(\beta, \nu), B_2^-(\beta, \nu), B_3^+(\beta, \nu), B_3^-(\beta, \nu), C_1(\beta, \nu), C_2^+(\beta, \nu), C_2^-(\beta, \nu), C_3^+(\beta, \nu), C_3^-(\beta, \nu), B_4(\beta, \nu), D_1(\beta, \nu), D_2^+(\beta, \nu), D_2^-(\beta, \nu), D_3^+(\beta, \nu), D_3^-(\beta, \nu), D_4(\beta, \nu), F_1(\beta, \nu), F_2^+(\beta, \nu), F_2^-(\beta, \nu), F_3^+(\beta, \nu), F_3^-(\beta, \nu), F_4(\beta, \nu)$) ve oniki adet daha bilinmeyen fonksiyon ($\tilde{K}_1(\beta, \nu, 0), \tilde{K}_2(\beta, \nu, 0), \tilde{K}_3(\beta, \nu, 0), \tilde{L}_1(\beta, \nu, h), \tilde{L}_2(\beta, \nu, h), \tilde{L}_3(\beta, \nu, h), \tilde{P}_1(\beta, \nu, -h), \tilde{P}_2(\beta, \nu, -h), \tilde{P}_3(\beta, \nu, -h), I_{s0}, I_{sh}, I_{s(-h)}$) yani toplam otuzaltı adet bilinmeyen içermektedir.

Bu durumda çözüm bulunabilmesi için sisteme yeni bilinmeyenler eklemekten kaçınarak onsekiz adet yeni denklem ilave edilmelidir. Bu da (3.5.13) - (3.5.20d) eşitlikleri ile ifade edilen alterne (yardımcı) sınır koşullarının değerlendirilmesi ile olacaktır.

(3.5.15) ve (3.5.17) ile verilen sınır koşullarının kullanılması, sisteme sekiz adet denklem, bunun yanında da sekiz bilinmeyen ekleyecektir. (3.5.16a) ve (3.5.18a) koşulları ise $H_z^n(\rho, z)$ alan bileşenlerinin integral gösterimleri $\beta\rho$ 'ya göre kısmi türev içerdikleri için kullanışlı değildir. (3.5.16b), (3.5.18b) ve (3.5.20a) - (3.5.20d) koşulları ise bu zorlukları içermemektedir ve çözüme daha rahat bir şekilde dahil edilebilirler.

(3.5.16b) denklemi, aşağıdaki gibi dört bölgede değerlendirilebilir.

$$H_p^1(b+0, z) - H_p^1(b-0, z) = 0, \quad \forall z \in (h, \infty) \quad (3.6.125)$$

$$H_p^2(b+0, z) - H_p^2(b-0, z) = 0, \quad \forall z \in (0, h) \quad (3.6.126)$$

$$H_p^3(b+0, z) - H_p^3(b-0, z) = 0, \quad \forall z \in (-h, 0) \quad (3.6.127)$$

$$H_p^4(b+0, z) - H_p^4(b-0, z) = 0, \quad \forall z \in (-\infty, -h) \quad (3.6.128)$$

(3.4.2), (3.4.5), (3.5.8) ve (3.5.11)'deki alan integral gösterimlerinin kullanılarak (3.6.125) - (3.6.128)'in incelenmesi gerekmektedir. (3.6.125), açık halde

$$\begin{aligned} & \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[C_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) + D_1(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta\rho) \right] \delta(\rho - b) i\gamma e^{i\gamma z} e^{i v \rho} d\beta dv \\ &= \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta\rho) \delta(\rho - b) i\gamma e^{i\gamma z} e^{i v \rho} d\beta dv, \quad \forall z \in (h, \infty) \quad (3.6.129) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Dirac Distribüsyonunu da işleme sokarsak

$$\begin{aligned}
& \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[C_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta b) + D_1(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta b) \right] i\gamma e^{i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv \\
& = \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta b) i\gamma e^{i\gamma z} e^{i v \varphi} d\beta dv, \quad \forall z \in (h, \infty) \quad (3.6.130)
\end{aligned}$$

yazılır. (3.6.130)'un sağ ve sol yanındaki integrallerin sınırları aynıdır ve $\forall z \in (h, \infty)$ için bu eşitlik geçerlidir. Bu durumda

$$C_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta b) + D_1(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta b) = F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta b) \quad (3.6.131)$$

eşitliği $\forall z \in (h, \infty)$ için doğrudur; böylece de

$$C_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta b) + D_1(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta b) - F_1(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta b) = 0 \quad (3.6.132)$$

denklemini elde edilmiş olur. (3.6.126)'dan da

$$\begin{aligned}
& \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta b) + D_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta b) \right] i\gamma e^{i\gamma z} \right. \\
& \left. - \left[C_2^-(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta b) + D_2^-(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta b) \right] i\gamma e^{-i\gamma z} \right\} e^{i v \varphi} d\beta dv \\
& = \int_{\ell_v} \int_{\ell_\beta} \left[F_2^+(\beta, v) e^{i\gamma z} - F_2^-(\beta, v) e^{-i\gamma z} \right] i\gamma H_v^{(1)}(\beta b) e^{i v \varphi} d\beta dv, \quad \forall z \in (0, h) \quad (3.6.133)
\end{aligned}$$

integral eşitliği, (3.6.133)'den de

$$\left[C_2^+(\beta, v) H_v^{(1)}(\beta b) + D_2^+(\beta, v) H_v^{(2)}(\beta b) \right] e^{i\gamma z}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[C_2^-(\beta, \nu) H_v^{(1)}(\beta b) + D_2^-(\beta, \nu) H_v^{(2)}(\beta b) \right] e^{-i\gamma z} \\
& = \left[F_2^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} - F_2^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] H_v^{(1)}(\beta b), \quad \forall z \in (0, h) \quad (3.6.134)
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \left[C_2^+(\beta, \nu) H_v^{(1)}(\beta b) + D_2^+(\beta, \nu) H_v^{(2)}(\beta b) \right] e^{i\gamma z} - \left[C_2^-(\beta, \nu) H_v^{(1)}(\beta b) + D_2^-(\beta, \nu) H_v^{(2)}(\beta b) \right] e^{-i\gamma z} \\
& - \left[F_2^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} - F_2^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] H_v^{(1)}(\beta b) = 0, \quad \forall z \in (0, h) \quad (3.6.135)
\end{aligned}$$

yazılır. (3.6.127)'yi incelersek

$$\begin{aligned}
& \iint_{\ell_v, \ell_\beta} \left\{ \left[C_3^+(\beta, \nu) H_v^{(1)}(\beta b) + D_3^+(\beta, \nu) H_v^{(2)}(\beta b) \right] i\gamma e^{i\gamma z} \right. \\
& \left. - \left[C_3^-(\beta, \nu) H_v^{(1)}(\beta b) + D_3^-(\beta, \nu) H_v^{(2)}(\beta b) \right] i\gamma e^{-i\gamma z} \right\} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\
& = \iint_{\ell_v, \ell_\beta} \left[F_3^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} - F_3^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] i\gamma H_v^{(1)}(\beta b) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, \quad \forall z \in (-h, 0) \quad (3.6.136)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
& \left[C_3^+(\beta, \nu) H_v^{(1)}(\beta b) + D_3^+(\beta, \nu) H_v^{(2)}(\beta b) \right] e^{i\gamma z} \\
& - \left[C_3^-(\beta, \nu) H_v^{(1)}(\beta b) + D_3^-(\beta, \nu) H_v^{(2)}(\beta b) \right] e^{-i\gamma z} \\
& = \left[F_3^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} - F_3^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] H_v^{(1)}(\beta b), \quad \forall z \in (-h, 0) \quad (3.6.137)
\end{aligned}$$

yazılır. (3.6.137) düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left[C_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta b) + D_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta b) \right] e^{i\gamma z} - \left[C_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta b) + D_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta b) \right] e^{-i\gamma z} \\ & - \left[F_3^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} - F_3^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] H_\nu^{(1)}(\beta b) = 0, \quad \forall z \in (-h, 0) \quad (3.6.138) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. (3.6.128)'den de

$$\begin{aligned} & \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left[C_4(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta b) + D_4(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta b) \right] (-i\gamma) e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\ & = \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} F_4(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta b) (-i\gamma) e^{-i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, \quad \forall z \in (-\infty, -h) \quad (3.6.139) \end{aligned}$$

ve

$$C_4(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta b) + D_4(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta b) - F_4(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta b) = 0, \quad \forall z \in (-\infty, -h) \quad (3.6.140)$$

denklemini elde edilir. (3.6.135) ve (3.6.138) denklemleri incelenirse, (3.6.135)'in $z \in (0, h)$ aralığında yer alan her z değeri için sağlanmak zorunda olduğu görülür. Bu nedenle, (3.6.135)'te $z \in (0, h)$ aralığında yer alan sonsuz sayıda z değeri yerleştirilerek sonsuz sayıda denklem elde edilebilir. Aynı şey, denklem (3.6.138)'de $z \in (-h, 0)$ aralığında değerler yerleştirilerek de yapılabilir.

(3.5.20a) - (3.5.20d) eşitlikleri ile verilen sınır koşulunu incelersek (3.5.20a)'dan

$$\begin{aligned} & \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_2^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta a) + D_2^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta a) \right] e^{i\gamma z} \right. \\ & \left. + \left[C_2^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta a) + D_2^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta a) \right] e^{-i\gamma z} \right\} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu = 0, \quad \forall z \in (0, h) \quad (3.6.141) \end{aligned}$$

Bu integral eşitliğe göre büyük parantez içerisinde yer alan terimin $z \in (0, h)$ aralığındaki z değerleri için sıfıra eşit olması gerekir. Böylece

$$\begin{aligned} & \left[C_2^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta a) + D_2^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta a) \right] e^{i\gamma z} \\ & + \left[C_2^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta a) + D_2^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta a) \right] e^{-i\gamma z} = 0, \quad \forall z \in (0, h) \end{aligned} \quad (3.6.142)$$

denklemini elde edilmiş olur.

(3.5.20b) değerlendirildiğinde

$$\int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left[B_2^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} + B_2^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] J_{|\nu|}(\beta a) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu = 0, \quad \forall z \in (0, h) \quad (3.6.143)$$

ve buradan da

$$\left[B_2^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} + B_2^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] J_{|\nu|}(\beta a) = 0, \quad \forall z \in (0, h) \quad (3.6.144)$$

yazılır.

(3.5.20c) incelenirse

$$\begin{aligned} & \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left\{ \left[C_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta a) + D_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta a) \right] e^{i\gamma z} \right. \\ & \left. + \left[C_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta a) + D_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta a) \right] e^{-i\gamma z} \right\} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu = 0, \quad \forall z \in (-h, 0) \end{aligned} \quad (3.6.145)$$

Bu integral eşitlikten de

$$\begin{aligned} & \left[C_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta a) + D_3^+(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta a) \right] e^{i\gamma z} \\ & + \left[C_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta a) + D_3^-(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta a) \right] e^{-i\gamma z} = 0, \quad \forall z \in (-h, 0) \end{aligned} \quad (3.6.146)$$

denklemini yazılır.

(3.5.20d)'den de

$$\int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left[B_3^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} + B_3^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] J_{|\nu|}(\beta a) e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu = 0, \quad \forall z \in (-h, 0) \quad (3.6.147)$$

ve (3.6.147)'den de

$$\left[B_3^+(\beta, \nu) e^{i\gamma z} + B_3^-(\beta, \nu) e^{-i\gamma z} \right] J_{|\nu|}(\beta a) = 0, \quad \forall z \in (-h, 0) \quad (3.6.148)$$

denklemini elde edilir. (3.5.20a) - (3.5.20d)'den elde ettiğimiz dört denklemden de geçerli oldukları aralıkta z 'ye farklı değerler vererek çok sayıda denklem elde edilebilir.

(3.5.18b) eşitliği ile ifade ettiğimiz sınır koşulunu

$$H_p^1(a+0, z) - H_p^1(a-0, z) = 0, \quad \forall z \in (h, \infty) \quad (3.6.149)$$

$$H_p^4(a+0, z) - H_p^4(a-0, z) = 0, \quad \forall z \in (-\infty, -h) \quad (3.6.150)$$

şeklinde iki kısma ayırabiliriz. (3.6.149)'u değerlendirirsek

$$\begin{aligned} & \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} B_1(\beta, \nu) J_{|\nu|}(\beta a) i\gamma e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu \\ & = \int_{\ell_\nu} \int_{\ell_\beta} \left[C_1(\beta, \nu) H_\nu^{(1)}(\beta a) + D_1(\beta, \nu) H_\nu^{(2)}(\beta a) \right] i\gamma e^{i\gamma z} e^{i\nu\varphi} d\beta d\nu, \quad \forall z \in (h, \infty) \end{aligned} \quad (3.6.151)$$

yazılır. Buradan da

$$B_1(\beta, \nu)J_{|\nu|}(\beta a) - C_1(\beta, \nu)H_\nu^{(1)}(\beta a) - D_1(\beta, \nu)H_\nu^{(2)}(\beta a) = 0, \quad \forall z \in (h, \infty) \quad (3.6.152)$$

denklemini elde edilir. (3.6.150)'yi incelersek

$$\begin{aligned} & \int_{\ell_v} \int_{\ell_p} B_4(\beta, \nu)J_{|\nu|}(\beta a)(-i\gamma)e^{-i\gamma z}e^{i\nu\varphi}d\beta d\nu \\ &= \int_{\ell_v} \int_{\ell_p} \left[C_4(\beta, \nu)H_\nu^{(1)}(\beta a) + D_4(\beta, \nu)H_\nu^{(2)}(\beta a) \right] (-i\gamma)e^{-i\gamma z}e^{i\nu\varphi}d\beta d\nu, \quad \forall z \in (-\infty, -h) \quad (3.6.153) \end{aligned}$$

integral eşitliği, bundan da

$$B_4(\beta, \nu)J_{|\nu|}(\beta a) - C_4(\beta, \nu)H_\nu^{(1)}(\beta a) - D_4(\beta, \nu)H_\nu^{(2)}(\beta a) = 0, \quad \forall z \in (-\infty, -h) \quad (3.6.154)$$

denklemini elde edilmiş olur.

Böylece alterne sınır koşullarının da hesaba katılmasıyla daha önce yeterli sınır koşullarından elde ettiğimiz onsekiz adet denkleme on adet yeni denklem ((3.6.132), (3.6.135), (3.6.138), (3.6.140), (3.6.142), (3.6.144), (3.6.146), (3.6.148), (3.6.152), (3.6.154)) eklenmiş olur. Böylece çözülmesi gereken sistemde yirmisekiz adet denklem ve otuzaltı adet bilinmeyen olur. Fakat daha önce de belirtildiği gibi (3.6.135), (3.6.138), (3.6.142), (3.6.144), (3.6.146), (3.6.148) denklemlerinden geçerli oldukları aralıkta sonsuz sayıda denklem türetilbilir ve bu denklemlerin çözülmesi ile de integral reprezentasyonlara ait bilinmeyenler hesaplanır. Bu hesaplanan katsayılar (3.4.1) - (3.4.12) integrallerinde yerine konarak alan değerleri hesaplanır.

3.7. Alan Hesaplamaları ve Sonuçlar :

Bu bölümde, Bölüm 2.2.7'de yapılabenzer şekilde sayısal olarak alan hesaplamaları gerçekleştirilmiştir. Konfigürasyondaki akım halkasının yarıçapı ile bu halka üzerinde akan akımın genlik ve frekansı Bölüm 2.2.7'deki değerler ile aynı ($I = 10$ mA, $f = 100$ Mhz, $b = 0.02$ m) silindirin boyutları ise $a = 0.01$ m, $h = 0.02$ m alınmıştır.

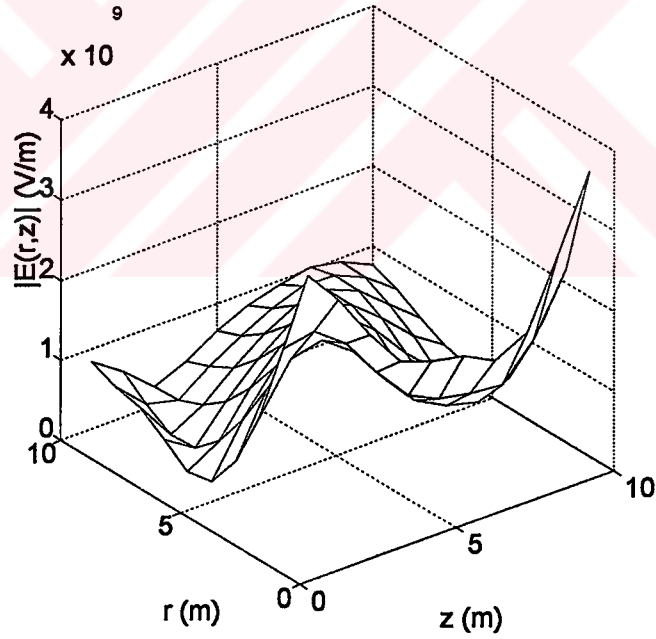
Bu problemin çözümünde bir öncekinden farklı olarak alan integrallerinde geçen ve alan hesaplamalarından önce bulunması gereken katsayılar analitik olarak hesaplanamamaktadır. Bu nedenle Bölüm 3.6'da elde edilen denklemlerin oluşturduğu otuzaltı bilinmeyenli otuzaltı adet cebirsel denklemin oluşturduğu denklem takımı sayısal olarak (Gauss Eliminasyon metodu ile) çözülmüştür. Bölüm 3.6'da elde edilen denklemlerin tamamının sağ yanında bulunan $\delta(v)$ terimi nedeniyle daha da sadeleşmektedir. Örneğin (3.6.20) eşitliği ile ifade edilen denklemi gözönüne alalım. Dirac distribüsyonunun özelliği nedeniyle bu denklem

$$i\sqrt{(k^2/\beta^2)-1} \left\{ [-B_2^+(\beta,0) - B_3^-(\beta,0)] + [B_2^-(\beta,0) + B_3^+(\beta,0)] \right\} = I_{s0} a J_0(\beta a) \quad (3.7.1)$$

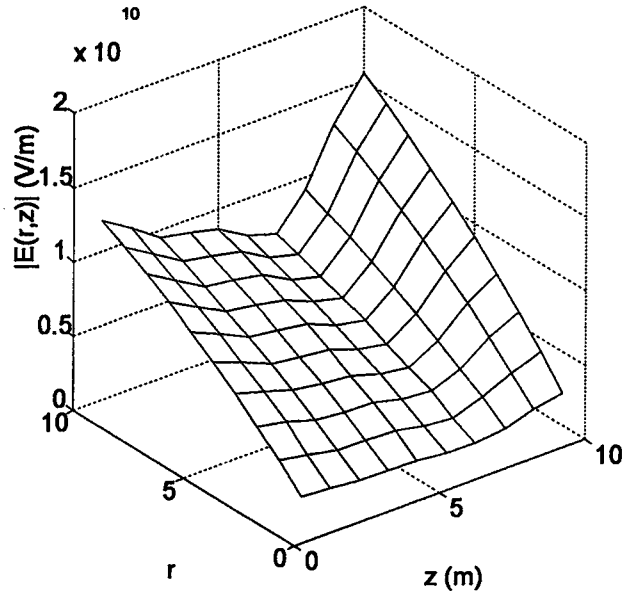
şekline dönüşür. Bölüm 3.6'da elde edilmiş olan tüm denklemlere yukarıdakine benzer işlemler uygulandığında görülür ki $X_n(\beta, v)$ katsayılarının tamamı da $X_n(\beta, 0)$ formuna dönüşür. Bu sebeple (3.4.1) - (3.4.12) eşitlikleri ile verilen alan integralleri de $X_n(\beta, 0) = X_n(\beta, v)\delta(v)$ olarak yazılabileceği için şekil değiştirecek ve Dirac distribüsyonu nedeni ile tek katlı integrallere dönüşeceklerdir. Örneğin (3.4.1) ifadesi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$E_{\Phi}^1(\rho, z) = -\hat{z} \begin{cases} \int_{\ell_{\beta}} B_1(\beta, 0) J_0(\beta \rho) e^{i\gamma z} d\beta, & \rho \in [0, a) \\ \int_{\ell_{\beta}} \left[C_1(\beta, 0) H_0^{(1)}(\beta \rho) + D_1(\beta, 0) H_0^{(2)}(\beta \rho) \right] e^{i\gamma z} d\beta, & \rho \in (a, b) \\ \int_{\ell_{\beta}} F_1(\beta, 0) H_0^{(1)}(\beta \rho) e^{i\gamma z} d\beta, & \rho \in (b, \infty) \end{cases} \quad (3.7.2)$$

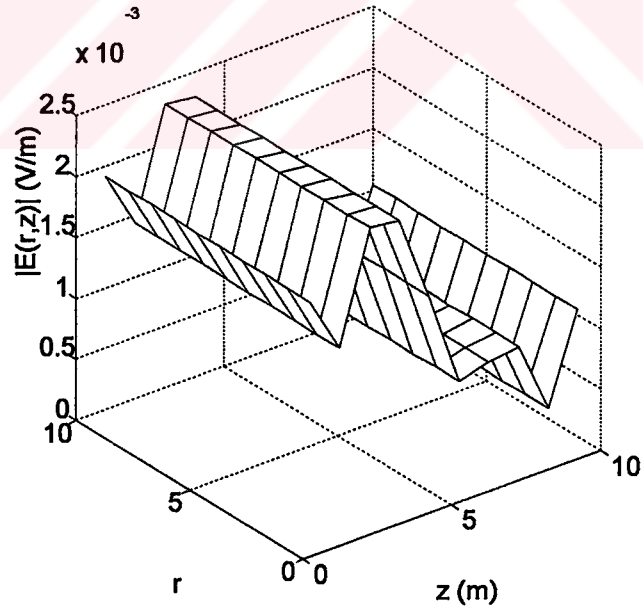
Daha sonra da elde edilen katsayılar (3.4.1) - (3.4.12) alan integrallerinde yerine konularak alan değerleri sayısal olarak hesaplanmıştır. Tüm hesaplamalarda β için integral adımı $k_0/100$ alınmıştır. Bu hesaplamalara ait sonuçlar grafik olarak aşağıda verilmiştir



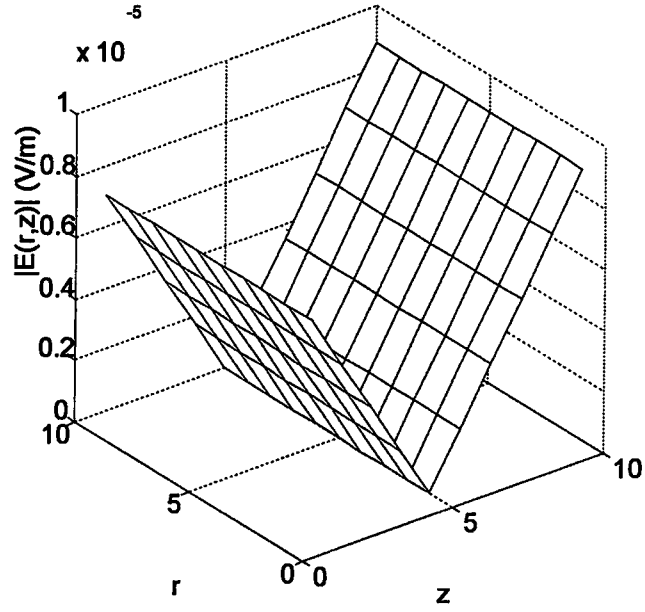
Şekil 3.7.1 $1 \text{ m} < \rho < 10 \text{ m}$, $1 \text{ m} < z < 10 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|E_{\Phi}^1|$.



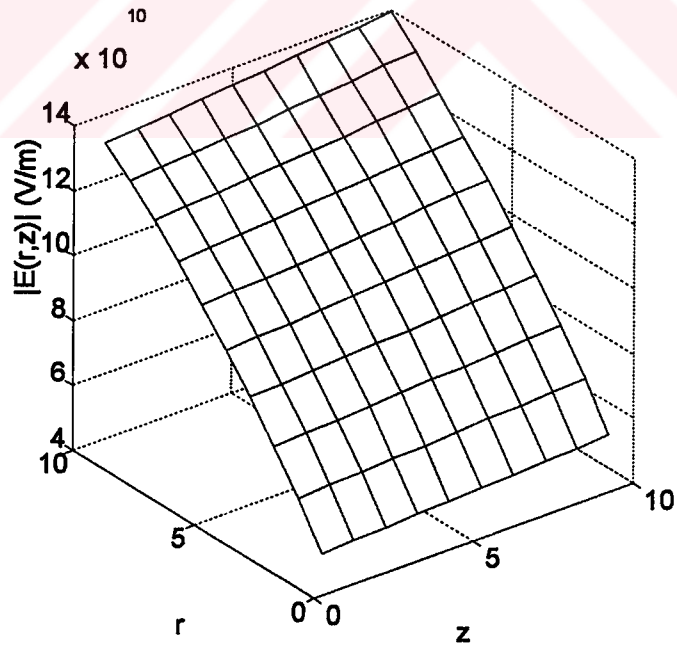
Şekil 3.7.2 $0.01 \text{ m} < \rho < 0.02 \text{ m}$, $1 \text{ m} < z < 10 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|E_\phi^1|$.



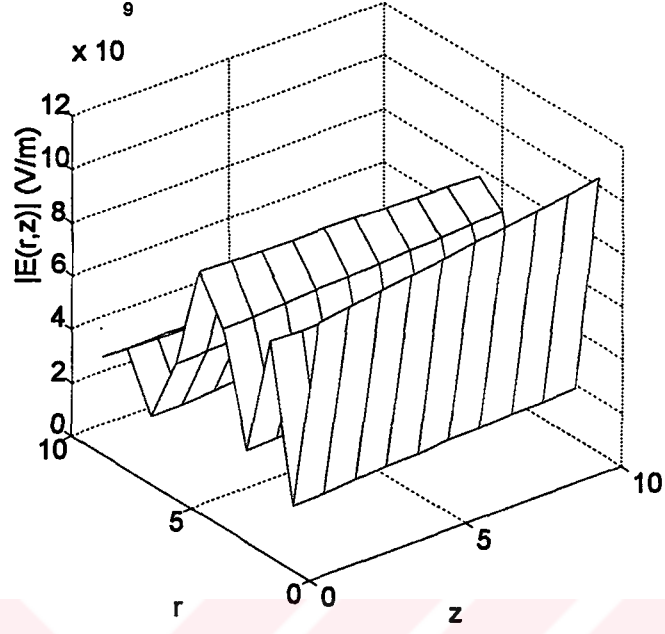
Şekil 3.7.3 $0.001 \text{ m} < \rho < 0.01 \text{ m}$, $1 \text{ m} < z < 10 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|E_\phi^1|$.



Şekil 3.7.4 $0.001 \text{ m} < \rho < 0.01 \text{ m}$, $0.002 \text{ m} < z < 0.02 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|E_{\phi}^2|$.

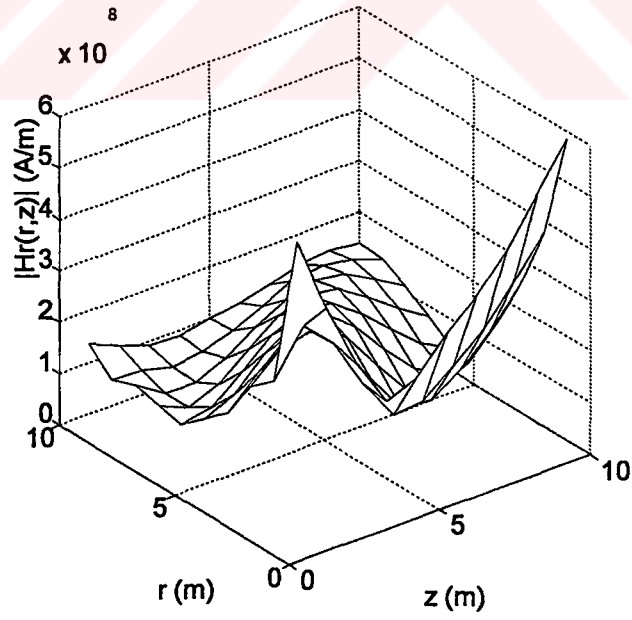


Şekil 3.7.5 $0.01 \text{ m} < \rho < 0.02 \text{ m}$, $0.002 \text{ m} < z < 0.02 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|E_{\phi}^2|$.

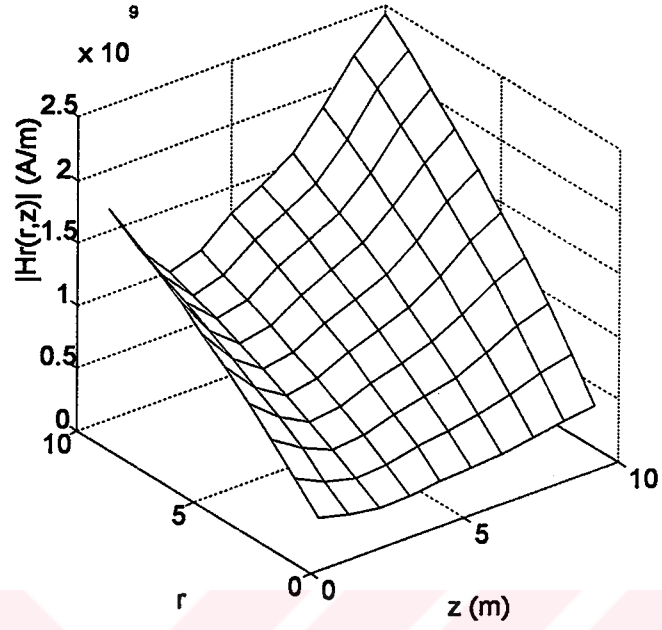


Şekil 3.7.6 $1 \text{ m} < \rho < 10 \text{ m}$, $0.002 \text{ m} < z < 0.02 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|E_\phi^2|$.

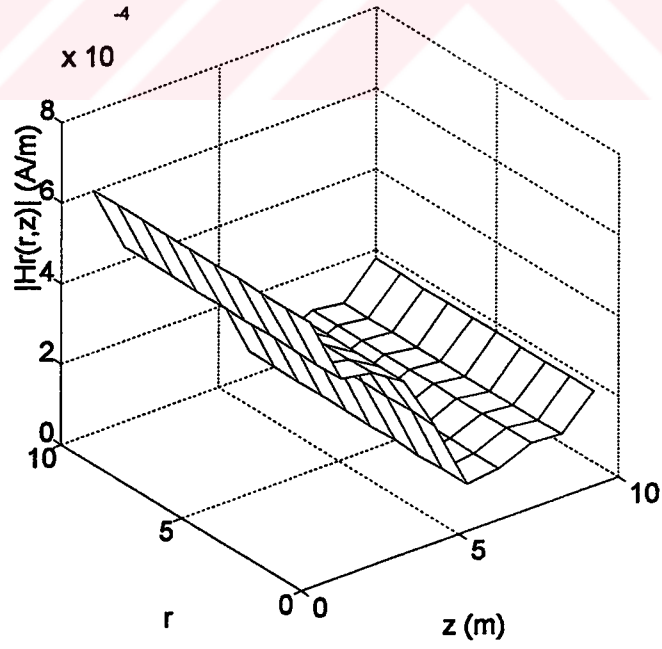
Benzer şekilde magnetik alanın ρ bileşeni için hesaplama sonuçları da aşağıdadır.



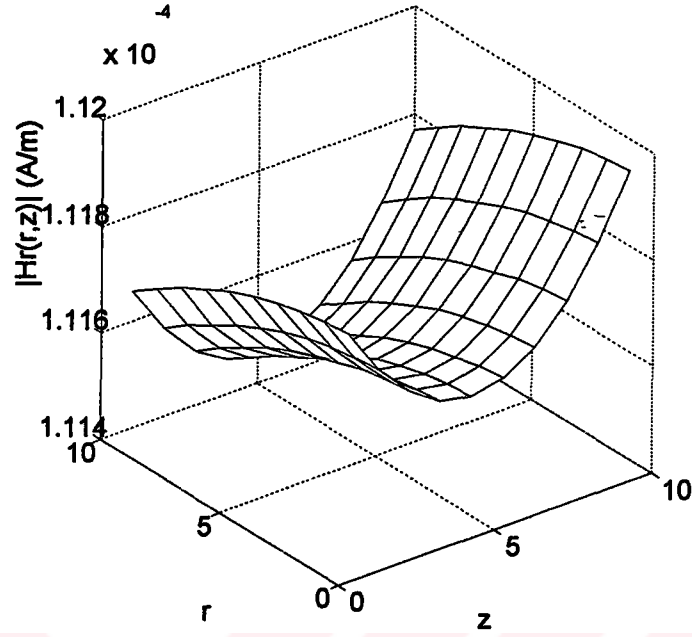
Şekil 3.7.7 $1 \text{ m} < \rho < 10 \text{ m}$, $1 \text{ m} < z < 10 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|H_\rho^1|$.



Şekil 3.7.8 $0.01 \text{ m} < \rho < 0.02 \text{ m}$, $1 \text{ m} < z < 10 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|H_p^1|$.



Şekil 3.7.9 $0.001 \text{ m} < \rho < 0.01 \text{ m}$, $1 \text{ m} < z < 10 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|H_p^1|$.



Şekil 3.7.9 $0.001 \text{ m} < \rho < 0.01 \text{ m}$, $0.002 \text{ m} < z < 0.02 \text{ m}$ Aralığında Hesaplanan $|H_p^2|$.

Yukarıdaki grafiklerden de görüldüğü üzere yapılan hesaplamalar, sonlu silindirin z ekseni boyunca uzantısı olan bölgelerde ve silindirin içerisinde kalan gölge bölgesinde gerçeğe uygun sonuçlar vermektedir. Bu hesaplamalarda kullanılan MATLAB scriptlerinin dökümleri EK - 1’de verilmiştir.

EK -1

Hesaplamalarda Kullanılan MATLAB Scriptleri

```

%    sur.m
%    Tez çalışmasında kullanılan fonksiyonlar için sürücü script.
%    Denklemlerde kullanılan katsayıları hesaplar.
load veriler
tic
%    0 - k0 aralığı için hesap döngüsü
step=k0/100;start=step;
for n=1:99
    beta=start+(n-1)*step
    A=katmat(beta);
    C=sagyan(beta);
    if det(A)~=0
        X=A\C;
    else
        X=zeros(36,1);
    end
    b1(n)=X(1,1);b2a(n)=X(2,1);b2e(n)=X(3,1);
    b3a(n)=X(4,1);b3e(n)=X(5,1);b4(n)=X(6,1);
    c1(n)=X(7,1);c2a(n)=X(8,1);c2e(n)=X(9,1);
    c3a(n)=X(10,1);c3e(n)=X(11,1);c4(n)=X(12,1);
    d1(n)=X(13,1);d2a(n)=X(14,1);d2e(n)=X(15,1);
    d3a(n)=X(16,1);d3e(n)=X(17,1);d4(n)=X(18,1);
    f1(n)=X(19,1);f2a(n)=X(20,1);f2e(n)=X(21,1);
    f3a(n)=X(22,1);f3e(n)=X(23,1);f4(n)=X(24,1);
    Is0(n)=X(25,1);Ish(n)=X(26,1);Iseh(n)=X(27,1);
    k1t(n)=X(28,1);k2t(n)=X(29,1);k3t(n)=X(30,1);
    l1t(n)=X(31,1);l2t(n)=X(32,1);l3t(n)=X(33,1);
    p1t(n)=X(34,1);p2t(n)=X(35,1);p3t(n)=X(36,1);
    clear A;
    clear X;
    clear C;
end
%    k0 - inf aralığı için
step=k0/100;start=k0+step;
for n=1:299
    beta=start+(n-1)*step
    A=katmat(beta);
    C=sagyan(beta);
    if det(A)~=0
        X=A\C;
    else

```



```

000000 000000 000000 011-1-10 00000-beta0000
00;
ekikh -ekikh -eekikh 000 000000 000000 000000 0000
00 -beta 00000;
000000 ekikh -ekikh -eekikh 000 ekikh -ekikh -eekikh 000 0000
00 000000 0-beta 0000;
000000 000000 000000 ekikh -ekikh -eekikh 000 0000
00 00-beta 000;
-kikb*ekikh kikb*ekikh -kikb*eekikh 000 000000 000000 0000
00 0 -a*(besselj(0,beta*a)) 0000 000000;
000000 -kikb*ekikh kikb*ekikh -kikb*eekikh 000 -kikb*ekikh
kikb*ekikh -kikb*eekikh 000 000000 0 -a*(besselj(0,beta*a)) 0000
000000;
000000 000000 000000 -ekikh ekikh -eekikh 000 0000
00 000000;
000 -kikb*eekikh kikb*ekikh -kikb*ekikh 000000 000000 0000
00 00 -a*(besselj(0,beta*a)) 000 000000;
000000 000 -kikb*eekikh kikb*ekikh kikb*ekikh 0 0 0 -kikb*eekikh
kikb*ekikh -kikb*ekikh 000000 00 -a*(besselj(0,beta*a)) 000 0000
00;
000000 000000 000000 000 -eekikh ekikh -ekikh 0000
00 000000;
000 eekikh ekikh -ekikh 000000 000000 000000 0000
00 000 -beta 00;
000000 000 eekikh ekikh -ekikh 000 eekikh ekikh -ekikh 0000
00 000000 0000 -beta 0;
000000 000000 000000 000 eekikh ekikh -ekikh 0000
00 000000 -beta;
000000 hkat1 00000 hkat2 00000 -hkat1 00000
000000 000000;
000000 0 hkat1*exp(kikx*z ed1/h) -hkat1*exp(-kikx*z ed1/h) 0000
hkat2*exp(kikx*z ed1/h) -hkat2*exp(-kikx*z ed1/h) 000 0 -hkat1*exp(kikx*z ed1/h)
hkat1*exp(-kikx*z ed1/h) 000 000000 000000;
000000 000 hkat1*exp(kikx*z ed2/h) -hkat1*exp(-kikx*z ed2/h) 00 0 0
hkat2*exp(kikx*z ed2/h) -hkat2*exp(-kikx*z ed2/h) 0 0 0 0 -
hkat1*exp(kikx*z ed2/h) hkat1*exp(-kikx*z ed2/h) 0 000000 000000;
000000 00000 hkat1 00000 hkat2 00000 -hkat1
000000 000000;
000000 0 hkat12*exp(kikx*z ed1/h) hkat12*exp(-kikx*z ed1/h) 000
0 hkat13*exp(kikx*z ed1/h) hkat13*exp(-kikx*z ed1/h) 000 000000
000000 000000;
0 hkat11*exp(kikx*z ed1/h) hkat11*exp(-kikx*z ed1/h) 000 000000
000000 000000 000000 000000;
000000 000 hkat12*exp(kikx*z ed2/h) hkat12*exp(-kikx*z ed2/h) 0
000 hkat13*exp(kikx*z ed2/h) hkat13*exp(-kikx*z ed2/h) 0 000000
000000 000000;

```

```

0 0 0 hkat11*exp(kikx*zede2/h) hkat11*exp(-kikx*zede2/h) 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
hkat11 0 0 0 0 0 -hkat12 0 0 0 0 0 -hkat13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 hkat11 0 0 0 0 0 -hkat12 0 0 0 0 0 -hkat13 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 10000*hkat1*exp(kikx*zede12/h) -10000*hkat1*exp(-
kikx*zede12/h) 0 0 0 0 10000*hkat2*exp(kikx*zede12/h) -10000*hkat2*exp(-
kikx*zede12/h) 0 0 0 0 -10000*hkat1*exp(kikx*zede12/h) 10000*hkat1*exp(-
kikx*zede12/h) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 10000*hkat1*exp(kikx*zede22/h) -10000*hkat1*exp(-
kikx*zede22/h) 0 0 0 0 10000*hkat2*exp(kikx*zede22/h) -10000*hkat2*exp(-
kikx*zede22/h) 0 0 0 0 -10000*hkat1*exp(kikx*zede22/h) 10000*hkat1*exp(-
kikx*zede22/h) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 10000*hkat12*exp(kikx*zede12/h) 10000*hkat12*exp(-
kikx*zede12/h) 0 0 0 0 10000*hkat13*exp(kikx*zede12/h) 10000*hkat13*exp(-
kikx*zede12/h) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 10000*hkat11*exp(kikx*zede12/h) 10000*hkat11*exp(-kikx*zede12/h) 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 10000*hkat12*exp(kikx*zede22/h) 10000*hkat12*exp(-
kikx*zede22/h) 0 0 0 0 10000*hkat13*exp(kikx*zede22/h) 10000*hkat13*exp(-
kikx*zede22/h) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 10000*hkat11*exp(kikx*zede22/h) 10000*hkat11*exp(-kikx*zede22/h) 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 100000*hkat1*exp(kikx*zede13/h) -100000*hkat1*exp(-
kikx*zede13/h) 0 0 0 0 100000*hkat2*exp(kikx*zede13/h) -100000*hkat2*exp(-
kikx*zede13/h) 0 0 0 0 -100000*hkat1*exp(kikx*zede13/h) 100000*hkat1*exp(-
kikx*zede13/h) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 100000*hkat1*exp(kikx*zede23/h) -100000*hkat1*exp(-
kikx*zede23/h) 0 0 0 0 100000*hkat2*exp(kikx*zede23/h) -100000*hkat2*exp(-
kikx*zede23/h) 0 0 0 0 -100000*hkat1*exp(kikx*zede23/h) 100000*hkat1*exp(-
kikx*zede23/h) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;];
y=katsay;
%%%%%%%%%%%%%%
function y=kok_sp(k,beta)
% Hesaplamalarda kullanılan karekök fonksiyonu.
%
if beta==0
y=k;
elseif beta<k
y=k*(sqrt(1-(beta/k)))*(sqrt(1+(beta/k)));
elseif beta==k
y=0;
elseif beta>k
y=i*beta*(sqrt(1-(k/beta)))*(sqrt(1+(k/beta)));
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%      elf0a.m
%      Tez konfigürasyonu için script...
%       $0 < r_0 < a$  ve  $z > h$  bölgesinde Elektrik Alanın hesaplanması...
%
load veriler
load b1
for n_ro=1:10
    ro=0.001*n_ro;
    for zed=1:10
        %      0 -  $k_0$  aralığı için hesap döngüsü
        step=k0/100;start=step;
        for n=1:99
            beta=start+(n-1)*step;
            term_1(n)=b1(n)*(besselj(0,beta*ro))*(exp(i*k0*sp(k0,beta)*zed));
        end
        int_1=step*sum(term_1);
        %
        %       $k_0$  - inf aralığı için
        step=k0/100;start=k0+step;
        for n=1:299
            beta=start+(n-1)*step;
            term_2(n+99)=b1(n+99)*(besselj(0,beta*ro))*(exp(i*k0*sp(k0,beta)*zed));
        end
        int_2=step*sum(term_2);
        ef(n_ro,zed)=-zsa*(int_1+int_2);
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%      elfab.m
%      Tez konfigürasyonu için script...
%       $a < r_0 < b$  ve  $z > h$  bölgesinde Elektrik Alanın hesaplanması...
%
load veriler
load c1
load d1
for n_ro=1:10
    ro=0.01+0.001*n_ro;
    for zed=1:10
        %      0 -  $k_0$  aralığı için hesap döngüsü
        step=k0/100;start=step;
        for n=1:99
            beta=start+(n-1)*step;

```



```

%
%      e2f0a.m
%      Tez konfigürasyonu için script...23/11/1997
%       $0 < r_o < b$  ve  $0 < zed < h$  bölgesinde Elektrik Alanın hesaplanması...
%
load veriler
load b2a
load b2e
for n_ro=1:10
ro=0.001*n_ro;
    for n_zed=1:10
zed=0.002*n_zed;
%      0 - k0 aralığı için hesap döngüsü
step=k0/100;start=step;
for n=1:99
    beta=start+(n-1)*step;
    term_1(n)=((b2a(n)*exp(i*k0_sp(k0,beta)*zed)))+(b2e(n)*exp(-
i*k0_sp(k0,beta)*zed)))*(besselj(0,beta*ro));
end
    int_1=step*sum(term_1);
%
%      k0 - inf aralığı için
step=k0/100;start=k0+step;
for n=1:299
    beta=start+(n-1)*step;
    term_2(n+99)=((b2a(n+99)*exp(i*k0_sp(k0,beta)*zed)))+(b2e(n+99)*exp(-
i*k0_sp(k0,beta)*zed)))*(besselj(0,beta*ro));
end
    int_2=step*sum(term_2);
    ef(n_ro,n_zed)=-zsa*(int_1+int_2);
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%      e2fab.m
%      Tez konfigürasyonu için script...
%       $a < r_o < b$  ve  $0 < zed < h$  bölgesinde Elektrik Alanın hesaplanması...
%
load veriler
load c2a
load c2e
load d2a
load d2e
for n_ro=1:10
ro=0.01+0.001*n_ro;
    for n_zed=1:10

```

```

zed=0.002*n_zed;
% 0 - k0 aralığı için hesap döngüsü
step=k0/100;start=step;
for n=1:99
    beta=start+(n-1)*step;
    term_1(n)=(((c2a(n)*besselh(0,1,beta*ro))+(d2a(n)*besselh(0,2,beta*ro)))*(exp(
i*kok_sp(k0,beta)*zed)))+(((c2e(n)*besselh(0,1,beta*ro))+(d2e(n)*besselh(0,2,beta*ro)
))*exp(-i*kok_sp(k0,beta)*zed)));
end
    int_1=step*sum(term_1);
%
% k0 - inf aralığı için
step=k0/100;start=k0+step;
for n=1:299
    beta=start+(n-1)*step;
    term_2(n+99)=(((c2a(n+99)*besselh(0,1,beta*ro))+(d2a(n+99)*besselh(0,2,beta
*ro)))*(exp(i*kok_sp(k0,beta)*zed)))+(((c2e(n)*besselh(0,1,beta*ro))+(d2e(n)*besselh(
0,2,beta*ro)))*(exp(-i*kok_sp(k0,beta)*zed)));
end
    int_2=step*sum(term_2);
    ef(n_ro,n_zed)=-zsa*(int_1+int_2);
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% e2fbs.m
% Tez konfigürasyonu için script...
% ro > b ve 0 < zed < h bölgesinde Elektrik Alanın hesaplanması...
%
load veriler
load f2a
load f2e
for n_ro=1:10
    ro=n_ro;
    for n_zed=1:10
        zed=0.002*n_zed;
% 0 - k0 aralığı için hesap döngüsü
step=k0/100;start=step;
for n=1:99
    beta=start+(n-1)*step;
    term_1(n)=(f2a(n)*(exp(i*kok_sp(k0,beta)*zed))+f2e(n)*(exp(-
i*kok_sp(k0,beta)*zed)))*(besselh(0,1,beta*ro)));
end
    int_1=step*sum(term_1);
%
% k0 - inf aralığı için

```

```

step=k0/100;start=k0+step;
for n=1:299
    beta=start+(n-1)*step;
    term_2(n+99)=(f2a(n+99)*(exp(i*k0_sp(k0,beta)*zed))+f2e(n+99)*(exp(-
i*k0_sp(k0,beta)*zed)))*(besselh(0,1,beta*ro));
end
    int_2=step*sum(term_2);
    ef(n_ro,n_zed)=-zsa*(int_1+int_2);
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%    h1r0a.m
%    Tez konfigürasyonu için script...
%    0 < ro < b ve zed > h bölgesinde Magnetik Alanın ro bileşeninin hesaplanması...
%
load veriler
load b1
for n_ro=1:10
ro=0.001*n_ro;
    for zed=1:10
%    0 - k0 aralığı için hesap döngüsü
step=k0/100;start=step;
for n=1:99
    beta=start+(n-1)*step;
    term_1(n)=b1(n)*(besselj(0,beta*ro))*i*(kok_sp(k0,beta))*(exp(i*k0_sp(k0,bet
a)*zed));
end
    int_1=step*sum(term_1);
%
%    k0 - inf aralığı için
step=k0/100;start=k0+step;
for n=1:299
    beta=start+(n-1)*step;
    term_2(n+99)=b1(n+99)*(besselj(0,beta*ro))*i*(kok_sp(k0,beta))*(exp(i*k0_s
p(k0,beta)*zed));
end
    int_2=step*sum(term_2);
    hr(n_ro,zed)=-(int_1+int_2);
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%    h2r0a.m
%    Tez konfigürasyonu için script...

```

```

%      0 < ro < b ve 0 < zed < h bölgesinde Magnetik Alanın ro bileşeninin %
%      hesaplanması...
%
load veriler
load b2a
load b2e
for n_ro=1:10
ro=0.001*n_ro;
    for n_zed=1:10
zed=0.002*n_zed;
%      0 - k0 aralığı için hesap döngüsü
step=k0/100;start=step;
for n=1:99
    beta=start+(n-1)*step;
    term_1(n)=((b2a(n)*exp(i*k0_sp(k0,beta)*zed))-(b2e(n)*exp(-
i*k0_sp(k0,beta)*zed)))*i*(k0_sp(k0,beta))*(besselj(0,beta*ro));
end
    int_1=step*sum(term_1);
%
%      k0 - inf aralığı için
step=k0/100;start=k0+step;
for n=1:299
    beta=start+(n-1)*step;
    term_2(n+99)=((b2a(n+99)*exp(i*k0_sp(k0,beta)*zed))-(b2e(n+99)*exp(-
i*k0_sp(k0,beta)*zed)))*i*(k0_sp(k0,beta))*(besselj(0,beta*ro));
end
    int_2=step*sum(term_2);
    hr(n_ro,n_zed)=-(int_1+int_2);
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Tüm hesaplamalarda kullanılan veriler.mat dosyasında aşağıdaki değişkenler tutulmaktadır :

```

I = 0.01
a = 0.01
b = 0.02
eps0 = 8.8419e -012
f= 1000000000
h = 0.02
k0 = 2.0944
mu0 = 1.2566e -006
w = 6.2832e +008
zed1 = 0.005
zed12 = 0.01

```

zed13 = 0.015
zed2 = -0.005
zed22 = -0.01
zed23 = -0.015
zsa = 0 - 7.8957i



KAYNAKLAR :

1. Albertsen, N.C., 1989. "Creeping Wave Modes For A Dielectric Cylinder", IEEE T-AP December 1989: p.p. 1642
2. Astevas, J.S. et.al., 1969. "Electromagnetic and Acoustic Scattering By Simple Shapes", North-Holland Pub. Comp., Amsterdam : p.p. 92 - 127
3. Balanis, Constantine A., 1989. "Advanced Engineering Electromagnetics", John Wiley & Sons: p.p. 254, 255, 602, 634
4. Burton, Robert W., King, Ronald W.P., Wu, Tai T, 1983. "The Loop Antenna With A Cylindrical Core", IEEE T-AP March 1983: p.p. 225 - 231
5. Erdelyi, A., 1953. "Higher Transcendental Functions", Vol. II, McGraw-Hill Book Company Inc.
6. Fenn, Alan J., 1985. "Arrays Of Horizontally Polarized Loop-Fed Slotted Cylinder Antennas", IEEE T-AP April 1985: p.p. 37
7. Gelfand, I.M., Shilov, B.E., 1969. "Generalized Functions", Vol.1, 3rd. Edition, Academic Press, New York: p.p. 168
8. Harrington, R.F., 1961. "Time Harmonic Electromagnetic Fields", McGraw - Hill Inc., USA, p.p. 200, 202
9. Hubing, T., 1991. "Survey Of Numerical Electromagnetic Modelling Techniques", University of Missouri-Rolla EMC Lab., Tech. Rep. TR91-1-001.3

10. Keller, Joseph B., 1957. "Diffraction By An Aperture", Journal Of Applied Physics Vol. 28, Num. 4, April 1957: p.p. 426
11. Keller, Joseph B., 1985. "One Hundred Years Of Diffraction Theory", IEEE T-AP February 1985: p.p. 123
12. Kishk, Ahmed A., Parrikar, Rajan P., Elsherbeni, Atef Z., 1992. "Electromagnetic Scattering From An Eccentric Multilayered Circular Cylinder ", IEEE T-AP March 1992: p.p. 295
13. Kraus, John D., 1950. "Antennas", McGraw-Hill: p.p. 155 - 172
14. Lebedev, N. M., 1972. " Special Functions and Their Applications ", Dover Publications Inc.
15. Partal, H.P., 1995. "Açıklık Antenlerin Işıma Karakteristiklerinde İntegral Gösterilim Yoluyla Kesin Sayısal Çözüm Yaklaşımı", Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.
16. Rao, T.C.K., Hamid, M.A.K., 1980. "GTD Analysis Of Scattering From A Dielectric-Coated Conducting Cylinder ", IEE PROC. Vol. 127 Pt.H. No. 3, June 1980: p.p. 143
17. Sneddon, Ian N., 1972. " The Use of Integral Transforms ", McGraw - Hill Book Comp.
18. Şengör, T., 1992. "The Essentials of Physical and Surface Theory of Diffraction with Applications to Cross Section and Imaging of Perfect Conducting Bodies ", Turkey Scientific and Technical Research Organization , Rep. No.:BYG 336 (91) 3579.

19. Şengör, T., 1989. "Physical and Surface Theory of Diffraction", International Symposium on Antennas and Propagation, Japan, The Institute of Electronics, Information and Communication Engineering, Tokyo (Japan), August 22 - 25 1989 p.p. 691 - 694
20. Şengör, T., 1996. "Radiation Characteristics of A Loop Printed Microstrip Antenna on Spherically Curved Substrates", International Workshop On Modern Mathematical Methods In Diffraction Theory and Application In Engineering, Freudenstadt, Schwarzwald (Germany), September 30 - October 4, 1996.
21. Şengör, T., Partal, H.P., 1996. "The Exact Computational Solution Approach By Integral Representations With An Application To Radiation Characteristics Of Aperture Antennas", IEEE AP-S International Symposium and URSI Radio Science Meeting, Baltimore, USA, July 21-26, 1996.
22. Şengör, T., Partal, H.P., 1997. "Simulating The Radiation Characteristics Of Circular Impedance Discs ", Proceedings Of The International Conference On Electromagnetics In Advanced Applications, Torino, Italy, September 15-18, 1997:p.p. 211 - 214.

ÖZGEÇMİŞ

Kıvanç KALAYCIOĞLU,

Doğum Tarihi :7.11.1973

Doğum Yeri : Van

Öğrenim Gördüğüm Okullar :

1987 - 1990 Ceyhan Lisesi

1990 - 1994 Y.T.Ü. Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümünden,
“GSM Sisteminin Genel İncelemesi ” isimli bitirme ödeviyle mezun oldum.

1994 yılında Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalında Prof.Dr. Taner ŞENGÖR’ ün danışmanlığında Yüksek Lisans eğitimine başladım. 1.4.1995 tarihinden bu yana Trakya Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.