

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**UZAMSAL DİZİLİM SİNYAL İŞLEME
YÖNTEMLERİ İLE SİNYAL YÖNÜ KESTİRİMİ VE
UZAMSAL-ZAMANSAL SÜZGEÇLEME**

**Elektronik ve Haberleşme Müh.
Murat AYTEKİN**

F.B.E Elektronik ve Haberleşme Anabilim Dalı Haberleşme Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı

: Doç. Dr. Fatma Ayhan SAKARYA

[Signature]

İSTANBUL, 1998

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Metin Yücel
(MYS)

GALİP CANSEVER

[Signature]

ÖNSÖZ

Her zaman sevgi ve desteğiyle yanımda olan, hayatımla ilgili kararlarımda yanıma hakkı tanıyan, kendime saygımı ve hayata olan sevgimi borçlu olduğum çok sevdiğim annem, babam ve biricik kardeşlerime sonsuz teşekkürler!

Bu tezin konusuna dikkatimi çeken, fikirsel desteğini her an arkamda hissettiğim, mücadele ve kararlılık konusunda çok şey borçlu olduğum değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Fatma Ayhan SAKARYA'ya, tez ile ilgili her türlü olanağı sağlamak konusunda desteğini eksik etmeyen Telekomünikasyon Anabilimdalı Başkanı Sayın Prof. Metin YÜCEL'e, bilimsel fikirleriyle teze yön veren değerli dostlarım ve çalışma arkadaşlarım Sayın Güner ARSLAN ve Sayın Serkan EMEK'e, yardımları ve sabırları nedeniyle değerli Fen Bilimleri Enstitüsü çalışanlarına, manevi desteklerinin yanı sıra tezin dizgi ve düzeltmelerine katkıda bulunan çok sevdiğim ve değer verdiğim Sayın Bilge DEMİRKAN ve Sayın Berkay DEMİRKAN'a sonsuz teşekkürler!



İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖNSÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
1 GİRİŞ	1
2. YÖN BULMA YÖNTEMLERİ	3
2.1 Sinyal Modeli	4
2.2 Dar Bant Uyumlu Olmayan Sinyaller	6
2.2.1 Çoklu sinyal sınıflama	7
2.2.2 Minimum - Norm yöntemi	12
2.2.3 En yakın vektör yöntemi	16
2.2.4 Altuzay dönme ile değişmezlik yöntemi	22
2.3 En Büyük Olabilirlik Kestirimi	29
2.4 Uyumluluk ve Uzamsal Düzleme	39
2.4.1 Uzamsal düzleme	41
2.4.2 İleri-geri uzamsal düzleme	43
2.5 Geniş Bantlı Sinyal Parametre Kestirimi	46
2.5.1 Uyumlu sinyal altuzay yaklaşımı ve odaklama	50
2.5.2 Uyumlu sinyal interpolasyonu	55
2.5.3 Geniş bantlı sinyal altuzay kestirimi	58
3. DOĞRUSAL ŞARTLAMALI UYARLAMALI HÜZME ŞEKİLLENDİRME	68
3.1 Kısmi Uyarlamalı Hüzme Şekillendirici	69
3.2 Türevsel Şartlamalar	73
3.2.1 Hüzmesi yönlendirilmiş geniş bantlı bir dizinin cevabı	74
3.2.2 Fazdan bağımsız türevsel şartlama	82
3.3 Yönlendirmeden Bağımsız Şartlama	89
3.3.1 Yönlendirme şartlamaları ve optimizasyon	96

ÖZET

Bu tez, uzamsal domende yayılan sinyallerin geliş yönlerinin saptanması, geliş doğrultuları bilinen sinyallerin ortamda var olan diğer sinyallerden ayrı olarak bozulmadan alınabilmesi problemlerinin duyurgaç dizilimleri ile çözülmesini konu almaktadır. Söz konusu sinyaller, bir düşman uçağından ya da hedefe kilitlenmiş bir füzeden yansıyan radar sinyali, askeri bir topun patlama sesi, su altındaki balık kümelerinden yansıyan sonar sinyalleri, maden yatağıının yapısı hakkında bilgi veren sismik yankılar ya da uzayın derinliklerinden gelen ışımlar olabilir. Sinyallerin yönlerinin saptanması ve en iyi şekilde alınabilmesi için kullanılan pek çok yöntem vardır: Radar, sonar uygulamalarında yönlü alıcılar mekanik düzenlerle uzamsal domeni tarayarak ortamdaki sinyalleri saptamaktadırlar. Bu sistemlerde, tek bir alıcı düzen ve bu düzeni kontrol eden karmaşık, pahalı ve hassas mekanik sistemler kullanılmaktadır. Duyurgaç dizilerinden oluşan sistemlerse, birden fazla alıcı olduğundan, daha yüksek sinyal gürültü oranı sağlayarak sinyal alımı yapabilirken, kullanılan duyurgaçların tek alıcılı sistemlerde olduğu kadar hassas olması gerekmemektedir. İstenilen hassasiyet, duyurgaç çıkışlarının uygun şekilde işlenmesiyle sağlanabilir. Üstelik duyurgaç dizileriyle mekanik sistemlere ihtiyaç duymadan, belirli bir yönden sinyal almak ya da iletmek mümkün olabilmektedir. Giderek artan sinyal kirliliği nedeniyle, sinyalleri istenilen sinyal-gürültü oranlarında alabilmek için alıcılar giderek karmaşılaşmakta ve maliyetleri artmaktadır. Halbuki; duyurgaç dizileri uzamsal süzgeçleme yetenekleri sayesinde, sinyalleri kolayca istenilen performansta alabilecek şekilde tasarlanabilmektedir. Öte yandan ortamda, yalnızca hedeflediği yönde yayın yaparak gereksiz sinyal kirliliğine neden olmamakta, vericinin enerjisini boşa harcamamaktadır.

Bu tezde, duyurgaç dizi yapılarıyla sinyal yönlerinin nasıl kestirilebileceği ve karşılaşılan sorunlar, geliş yönü ve frekans karakteristiği bilinen bir sinyalin, girişim ve gürültü özellikleri bilinmeyen bir ortamda istenilen performansta nasıl alınabileceği ayrıntılarıyla ele alınmış ve benzetişimlerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Duyurgaç dizilim sinyal işleme, Anten dizileri, Uzamsal süzgeçleme, Yön bulma, Uyarlamalı hüzmeye şekillendirme, radar, sonar

ABSTRACT

This research is about estimating the direction of arrival of a signal coming from a specific direction, and receiving the signal without distortion by cancelling the noise and interference. These are important concepts for both military and civilian applications. Such a signal would be a radar signal reflected from an enemy plane or a missile locked to a target, a sonar signal scattered from fish bulk or a pulsar screamed in the deep space.

There are lots of methods for estimating and receiving such signals. For instance, in radar and sonar applications, directional receivers scan the spatial domain with use of mechanical systems. These kinds of receivers are expensive as they should be resistive to the noise and interference. However, an array sensors located spatially separated points, can achieve higher signal-to-noise ratio. In addition to this, sensors do not need to be complex like the receivers mentioned above. With sensor arrays, signals can be transmitted towards and received from a specific direction.

Developments in telecommunications, resulting in signal pollution, cause difficulties in receiving a signal with desired qualities. Today's systems need to be more complex and expensive to achieve good performances. On the other hand, sensor arrays emitting signal only in a desired direction can use the energy in more efficient way and without causing signal pollution.

In this thesis, these kinds of talents of the sensor arrays are investigated. Especially, direction of arrival estimation and spatial-temporal filtering are examined and simulated.

Key Words: Array processing, Sensor arrays, Beamforming, Direction of arrival estimation, Adaptive beamforming, Linearly constrained minimum variance beamforming, radar, sonar

1. GİRİŞ

Duyargaç dizileriyle sinyal işleme son otuz yılda radar, sonar, akustik ve sismik gibi dallarda oldukça önem kazanmış bir konudur. Duyargaç dizileriyle uzamsal domende dağılmış sinyal kaynakların izlenmesi, alınması ve konumlarının tesbit edilmesi mümkündür. Bu çalışmanın ağırlığı, son iki uygulama alanına yönelik olmuştur. Sinyallerin ortamdan yüksek sinyal-gürültü oranı (Signal-to-Noise Ratio, SNR) ve sinyal-girişim-artı-gürültü oranı (Signal-to-Noise-Plus-Interference Ratio, SINR) ile alınabilmesi için duyargaçlardan alınan verilerin işlenmesi gerekmektedir. Bu tür yapılar *hüzme şekillendirici* olarak adlandırılır. Elde edilen başarımlar (SNR'ın yüksekliği) tek bir duyargaçla sağlanabilecekten çok daha iyi olmaktadır. Üstelik, birden fazla duyargaçla uzamsal domende süzgeçleme yapmak da mümkündür. Bir başka deyişle, uzamsal domende istenilen doğrultularda sinyal alımı yapılırken, diğer konumlardan gelen sinyaller bastırılabilir. Buna ek olarak farklı konumlarda yerleştirilmiş duyargaçlar uzamsal domeni örneklediğinden, ortamda varolan sinyal kaynaklarının konumlarının tesbiti de mümkün olabilmektedir.

Pratikte askeri ve sivil alanda pek çok uygulama, sinyal kaynaklarının yönlerinin tesbitini ve belirlenmiş yönden gelen sinyalin ortamdaki diğer sinyal kaynaklarının etkilerinden arındırılarak alınmasını gerektirir. Askeri alanda, hedef konumunun tesbiti, izlenmesi gibi çok önemli uygulamalar duyargaç dizileriyle başarıyla gerçekleştirilir. Askeri haberleşme sırasında, haberleşmenin sabote edilmesi için ortama düşman tarafından sokulan bozucu sinyaller, duyargaç dizileri yardımıyla güvenli bir haberleşme sağlayacak şekilde bastırılabilirler. Diğer taraftan, astronomik amaçlı olarak kullanılan anten dizileri çok önemli işler yüklenmekte ve insanlığa bilinmezliğin derinliğinde bir yol bulabilmeleri için önemli hizmetlerde bulunmaktadır. Buna ek olarak, deniz altındaki ve yeryüzünün derinliklerindeki değerli madenlerin bulunmasında duyargaç dizileri etkin bir şekilde kullanılmaktadırlar.

Duyargaç dizileri, iletişim çağının gereklerinden biri olan telekonferans sistemlerinin önemli sorunlarına çözüm olarak giderek yaygınlaşmaktadır. Artık konferans salonlarında konuşmacıların konumlarını tespit eden ve hüzmesini bu doğrultuya çevirip sesinin net bir

3.4	Karesel Şartlamalar.....	97
3.4.1	Karesel koşullamalı uyumlu hüzme şekillendirme	100
3.4.2	Karesel şartlama tasarımı	102
3.5	Geniş Bant Gösterim Uzaı ve Uzamsal - Zamansal Süzgeçleme.....	104
3.5.1	Şartlama altuzayında süzgeçleme	107
4.	ALTUZAY YÖNTEMLERİ VE ASİPTOTİK ANALİZ	112
4.1	Özdeğer ve Özvektörlerin Limit İstatistikleri.....	112
4.1.1	Cebrik fonksiyonlar	113
4.1.2	Basit Özdeğerler İçin Pertürbasyon Teorisi	114
4.1.3	Özvektörlerin Pertürbasyonu	116
4.1.4	Özdeğerlerin birinci derece pertürbasyonu	117
4.1.5	Özvektörlerin birinci derece pertürbasyonları	118
4.1.6	Yüksek derece pertürbasyonlar	119
4.1.7	Kestirim özdeğer ve özvektör istatistikleri	120
4.2	Cramer Rao Alt Siniri.....	123
4.3	En Büyük Olabilirlik Kestiricisi ve Asimptotik Davranışı.....	129
4.4	MUSIC ve Asimptotik Davranışı	133
4.5	MUSIC ve MLE Arasındaki İlişki.....	135
4.6	ESPRIT ve Asimptotik Davranışı	136
4.6.1	ESPRIT ve MUSIC'in istatistiksel karşılaştırması	139
5.	BENZETİŞİMLER	141
	KAYNAKLAR	159
	EKLER.....	161
	EK 1 Yönlendirme Şartlamaları.....	161
	EK 2 Gerçel Veri Noktaları Şartlaması	164
	EK 3 Benzetişim Programları	166
	ÖZGEÇMİŞ	186

şekilde aktarılmasını sağlayan mikrofon dizilerinin kullanımı yaygınlaşmaktadır.

Mobil haberleşme sistemlerinin sivilleşmesi ile birlikte giderek artan talep sonucu şebekelerin bu talebi karşılayamayışına çözüm olarak yine anten dizileri imdada yetişmektedir. Duyargaç dizilerinin kullanılması, kullanılan şebekelerin hizmet edebileceği kullanıcı sayısını, dizileri oluşturan eleman sayısı ile orantılı olarak arttırmaktadır.

Görüldüğü gibi duyargaç dizilim sinyal işleme, bir çok bağımsız dalda başarıyla kullanılmakta ve bir çok dalda yeni kullanım alanı bulmaktadır. Bu çalışma, böylesine ilginç bir konunun derinliklerine inmeyi hedeflemektedir. Okuyucuya bir duyargaç dizisini nasıl kullanılabileceği ve temel sorunlarının neler olduğu ve nasıl çözülebileceğini tanıtmayı hedeflemektedir. Konu incelenirken, özel bir uygulama alanı içinde sınırlı kalınmaması için, kavramlar genel bir yaklaşımla verilmeye çalışılmıştır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde uzamsal domende dağılmış dar ya da geniş bant sinyallerin geliş yönlerinin tesbiti için kullanılan yöntemler konu alınmıştır. Ortamdaki sinyallerin dar bantlı ve geniş bantlı olduğu durumlar farklı yaklaşımlar gerektirdiğinden ayrı konular olarak ele alınmıştır. Sinyallerin uyumlu (tamamen ilişkili) olduğu durumlarda incelenen yöntemler yetersiz kaldığından, böyle bir durumda gerekli olan yaklaşım yöntemleri de ayrıntılı olarak incelenmiştir. Üçüncü bölümde, kısmi uyarlamalı dizilerle sinyallerin *minimum değişintili bozulmasız cevap* (Minimum Variance Distortionless Look; MVDR) yöntemi ile alınması incelenmiştir. Bu tür yapılar sinyal ortamında oluşan değişimlere uyum sağlar. Bu sayede değişik sinyal senaryolarında dahi en iyi performansı gösterecek şekilde kendilerini uyarlarlar. Dördüncü bölümde ise, birinci bölümde konu edilen yöntemler için istatistiksel çalışma yapılmıştır. Bu çalışma ile kullanılan yöntemlerin etkinlikleri, bu etkinliğin artırılması için yapılması gerekenler ve birbirlerine göre avantajları hakkında ipuçları elde edilmiştir. İncelememiz boyunca tanıtılan yöntemler ve yaklaşımlarla ilgili olarak eğitim amaçlı kullanılabilecek genel bir program içinde toplanmaya çalışılmıştır. Böylece kullanıcının dilediği sinyal ortamını tasarlayıp deneyebileceği bir benzetişim ortamı sağlanmış olmaktadır. Benzetişimler bölümünde önemli görülen bazı uygulamalar sunulmuş ve kullanılan programlar EK3'te verilmiştir.

2. YÖN BULMA YÖNTEMLERİ

Son otuz yıldır radar, sonar, sismik ve akustik gibi bir çok uygulama alanında, ortama sinyal yayan kaynakların konumlarının belirlenmesi oldukça popülerlik kazanmış bir konudur. Uzamsal domende yayılan sinyallere ait parametrelerin duyurgaç dizileriyle kestirilmesi, uzamsal sinyal işlemenin en önemli konuları arasında yer almaktadır. Örneğin, ortamdaki sinyal kaynaklarının yönlerinin, uzamsal domende farklı noktalara yerleştirilmiş alıcılar yardımıyla elde edilmeye çalışılması eski bir yöntemdir. Duyurgaç dizilerinin önemi, amaçlanan işi tek duyurgaca oranla çok daha yüksek bir performansla gerçekleştirebilmesinden kaynaklanmaktadır. Bu durum, aynı frekans karakteristiğine sahip farklı iki yönden gelen sinyalleri ayırtmak gerektiğinde kolaylıkla görülür. Basit bir duyurgaçla bunu yapabilmek mümkün değildir. Ancak bir duyurgaç dizisi ile bu iki sinyali ayrı ayrı elde etmek ya da yönlerini tayin etmek mümkündür. Duyurgaç dizileri, her geçen gün bir çok konuya alternatif yaklaşım olarak önerilmekte ve yeni uygulama alanları bulunmaktadır.

Duyurgaç dizilerinin uzamsal örnekleme yapmaları nedeniyle, tıpkı zaman domeni sinyallerin örnek değerlerinden faydalanılarak güç spektrumlarının kestirilebilmesi gibi, benzer yöntemlerle uzamsal güç spektrumu da kestirilebilir. Uzamsal domende dağılmış duyurgaçlara sinyaller geliş yönlerine göre farklı zamanlarda ulaşırlar. Duyurgaçlar arasındaki bu zaman farkları sinyallerin yönlerini kestirmek için gerekli bilgiyi sağlar. Çalışmamızın bu bölümünü, sözü edilen prensipten yola çıkarak sinyallere ait konum parametrelerinin kestirilmesine dayanan yöntemler teşkil etmektedir. Kestirim yöntemleri, sinyallerin dar ya da geniş bantlı olmasına göre farklı yaklaşımlar gerektirdiğinden, bölüm içinde iki farklı konu olarak incelenmiştir. Ayrıca uyumluluğun (coherency) varlığı, incelenecek olan kestirim

yöntemlerinin performanslarını düşürdüğünden ya da tümüyle etkisiz kıldığından bu durumun da incelenmesi gerekli görülmüştür.

Ele alınacak yöntemler, esnek bir sinyal modeline dayanmaktadır. Bu yöntemlere geçilmeden önce, dayandıkları sinyal modeli ayrıntılarıyla incelenecektir.

2.1 Sinyal Modeli

Bir çok sinyal işleme uygulamasında, duyargaçlardan alınan veriler toplanır ve nokta kaynakların bu verilere göre uzamsal konumları tesbit edilmeye çalışılır. Matematiksel açıdan bu tür problemler, basit olarak; ışımanın kaynaktan duyargaca doğru yayılmasının fizikiğini tanımlayan diferansiyel operatörü için, Green fonksiyonlarının kullanılmasıyla modellenenir. İlgilendiğimiz uygulama için, bir kaç uygun varsayımla, problemin analitik olarak kolayca takip edilebilir duruma getirilmesi mümkündür.

Yayılma ortamı *izotropik* (ortam parametreleri frekansa bağlı olmayan) ve *dispersif olmayan* (bu sayede ışımanın yayılımı düzgün çizgiler halinde olacaktır) kabul edilecek buna ek olarak, kaynaklar uzak alanda varsayılacaktır. Böylece yayılım, düzlem dalgalar şeklinde olacaktır.

Yön kestirimi için kullanılan yöntemlerin etkili olabilmesi için, problemi ifade eden modelin uygunluğu çok önemlidir. Çalışmamızın bu bölümünde aksi söylenmediği sürece ortamdaki sinyaller dar bantlı bir rasgele sürecin örnek fonksiyonları ya da zamanın deterministik fonksiyonları olarak kabul edilecektir. Dar bant sinyallerin herbirinin aynı merkez frekanslı (w_0) olduğu kabul edilecektir*. Bu durumda ortamda varolan i . sinyal şu şekilde ifade edilebilir:

* Bu kabul genelliği bozmamaktadır. Aynı merkez frekansına sahip olmayan sinyaller söz konusu ise bunlar uygun süzgeçlerle ayrılarak her biri için ayrı işlem yapılabilir.

$$\bar{s}_i(t) = u_i(t) \cos(w_0 t + v_i(t)) \quad (2.1)$$

Burada genliği sembolize eden $u_i(t)$ ve fazı sembolize eden $v_i(t)$ zamanla yavaş değişen fonksiyonlardır. Bu tür sinyaller için kompleks zarf gösterimi, yapacağımız işlemler açısından çok daha uygun olacaktır. Bu durumda; $\bar{s}_i(t) = \text{Re}\{s_i(t)\}$ olmak üzere, $s_i(t) = u_i(t)e^{j(w_0 t + v_i(t))}$ sinyalin kompleks zarf gösterimidir. Dar bant varsayımı, τ olası yayılma gecikmesi olmak üzere; $u_i(t) \approx u_i(t - \tau)$ ve $v_i(t) \approx v_i(t - \tau)$ olmasıdır. Böylelikle zaman gecikmesi yalnızca bir faz kaymasına neden olurken ($s_i(t - \tau) \approx s_i(t)e^{-jw_0 \tau}$) zarfta bir değişim olmamaktadır. Sonuç olarak, d adet sinyalin bulunduğu bir ortamda k . duyargacın çıkışındaki kompleks sinyal şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{i=1}^d a(\theta_i) s_i(t - \tau_k(\theta_i)) \\ &= \sum_{i=1}^d a(\theta_i) s_i(t) e^{-jw_0 \tau_k(\theta_i)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Burada $\tau(\theta_i)$ i . sinyalin, referans noktası ile k . duyargaç arasındaki yayılma gecikmesidir. Duyargaç sayısı m olan bir dizinin i . sinyale olan cevabı şu şekildedir (yönlendirme vektörü):

$$a(\theta_i) = [a_1(\theta_i)e^{-jw_0 \tau_1(\theta_i)}, a_2(\theta_i)e^{-jw_0 \tau_2(\theta_i)}, \dots, a_m(\theta_i)e^{-jw_0 \tau_m(\theta_i)}]^T \quad (2.3)$$

Böylelikle duyargaç dizisine ait elemanların çıkışları bir $x(t)$ vektöründe toplanarak yazılabilir:

$$x(t) = A(\theta)s(t) + n(t)$$

$$A(\theta) = [a(\theta_1) \ a(\theta_2) \ \dots \ a(\theta_d)] \quad (2.4)$$

$$n(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \ \dots \ n_m(t)]$$

$$s(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_d(t)]$$

Ortamdaki ısıll değişiklikler ve duyargaçların yapısından kaynaklanan gürültü $n_i(t)$ ile gösterilmiştir. Çalışmamız boyunca aksi söylenmedikçe duyargaçlar üzerindeki gürültülerin sıfır ortalamalı ve birbirleriyle ilişkisiz (uzamsal domende beyaz) olduğu kabul edilecektir. Ortamdaki sinyaller $s(t)$ vektörüyle temsil edilmektedir. İfadedeki $a_i(\theta_j)$ ise i . duyargacın yönsel cevaplarını sembolize etmektedir.

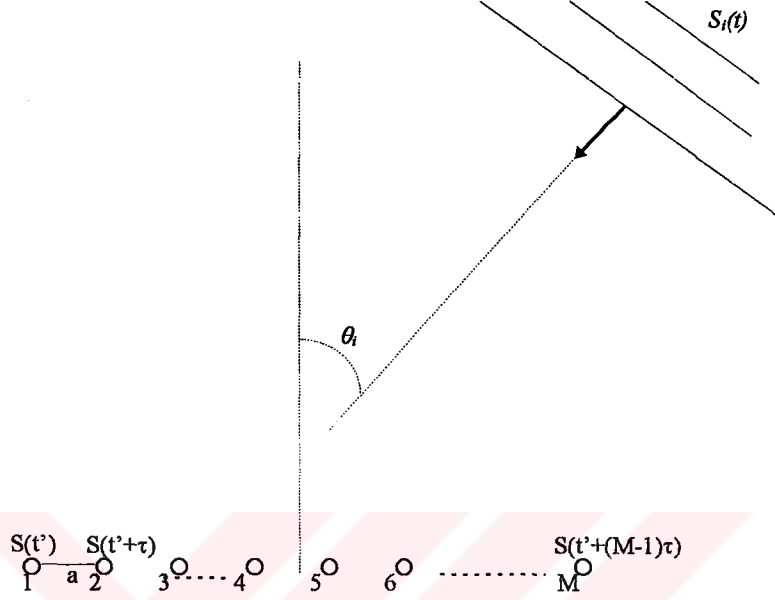
2.2 Dar Bant Uyumlu Olmayan Sinyaller

Sinyallerin dar bantlı ve uzak alanda olması durumunda yönlendirme vektörü (2.3)'de verilmiştir. Duyargaçların bir çizgi boyunca eşit aralıklarla dizildiği özel bir durum olan üniform doğrusal dizilim ele alınırsa (uniform linear array; ULA), konumu ifade eden θ_i vektörü tek değişkene inecek ve sinyalin, dizinin yerleştirildiği eksen normaline göre, geliş yönünü ifade edecektir. Bu durumda i . sinyalin k . duyargaçta oluşturduğu faz kayması:

$$\begin{aligned} v_k(\theta_i) &= w_0 \frac{a_k \sin \theta_i}{c} \\ \tau &= \frac{a_k \sin \theta_i}{c} \end{aligned} \quad (2.5)$$

olacaktır. Burada a_k , k . duyargacın referans noktasından uzaklığı, c ise sinyalin ortamdaki yayılma hızıdır. Bir uzak alan sinyalinin, ULA'nın birbirine komşu iki duyargacına gelmesi,

alınan yolların farklı olması nedeniyle bir miktar gecikmeyle olur. Bu gecikme τ ile gösterilmiştir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 ULA görünüşü

Görüldüğü gibi, sinyal dar bantlı ise; bir konumu ifade edebilmek için bir boyutlu vektör (yönlendirme vektörü) yeterli olmaktadır. Bu bölümde ele alınacak kestirim yöntemleri, yön vektörlerinin bu yapısından faydalanılarak kestirilmesine dayanmaktadır.

2.2.1 Çoklu sinyal sınıflama

2.2.1.1 Geometrik yaklaşım

Çoklu sinyal sınıflama (Multiple Signal Classification; MUSIC), sinyal parametrelerinin kestirimi problemine geometrik bir bakışla yeni bir boyut kazandırmıştır (Roy ve Kailath, 1989). Getirdiği en önemli yenilik ise duyargaç dizilerinin konfigürasyonuna keyfilik hakkını

tanımasıdır. 1970'lerin ortalarına kadar yön bulma teknikleri, dizinin yönsel duyarlılık örüntüsünün analitik formda bilinmesine ihtiyaç duymaktaydı. Bir anten tasarımcısının görevi, bir dizi anten sistemini önceden istenen yönsel duyarlılık örüntüsüne göre inşa etmektir. Schmidt önerdiği MUSIC yaklaşımı ile, tasarımcının bu yükü dizinin kalibrasyonu ile aynı işin yapılabilmesi şekline çevirmiştir (Roy ve Kailath, 1989). Böylelikle, yönsel duyarlılık örüntüsünün (array patern) bir anten dizisi için analitik olarak hesaplanması gibi karmaşık doğrusal olmayan bir problem, bir ölçüm ve depolama işine (kalibrasyon) dönüşmüştür.

MUSIC, hesap yükü açısından var olan yöntemlere göre bir avantaj getirmemiş olsa da yüksek çözünürlüklü geliş yönü kestirimini keyfi konfigürasyonlu diziler için dahi gerçekleştirebilmiştir.

2.2.1.2 Dizi manifoldu ve sinyal altuzayları

Duyargaç dizisine ait manifold kavramı olarak açıklayabilmek için gürültüsüz veri modelinin ($\mathbf{x}(t) = A(\theta)\mathbf{s}(t)$) ele alınması uygundur. Duyargaç sayısı M olan bir dizinin olduğu varsayalım; $A(\theta)$ matrisi, sütunları M boyutlu uzayda, ortamda bulunan sinyallere ait yönlendirme vektörleri, $\mathbf{a}(\theta_i)$, olan matristir. Yön vektörleri dizi manifoldunun elemanlarıdır. Bir başka ifadeyle manifold ($\mathcal{S}$), olabilecek tüm dizi cevaplarının (yön vektörleri) kümesidir. Manifold, diziye ait yönsel duyarlılık örüntüsü ve dizinin konfigürasyonu ile elde edilebileceği gibi analitik olarak da tamamen elde edilebilir. Ancak karmaşık dizilerin analitik tanımlaması oldukça zor olabileceğinden, $\mathcal{S}$ kalibrasyonla da (fiziksel ölçümlerle) elde edilebilir. Yalnız *azimutun* kestirilebildiği durumlarda $\mathcal{S}$, M boyutlu uzayda bir eğridir. Hem *azimuth* hem de *elevation* in kestirildiği durumlarda ise aynı uzayda bir kabuktur. Belirsizliğin, başka bir deyişle; aynı konumu ifade edebilecek birden fazla bağımsız yönlendirme vektörünün olmaması için, ortamda d adet sinyalin olduğunu varsayarak,

$\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d1}\}$ kümesinden $R\{A(\theta)\}$ 'ya ($A(\theta)$ 'nın menzili) geçişin birebir olması gerekir.

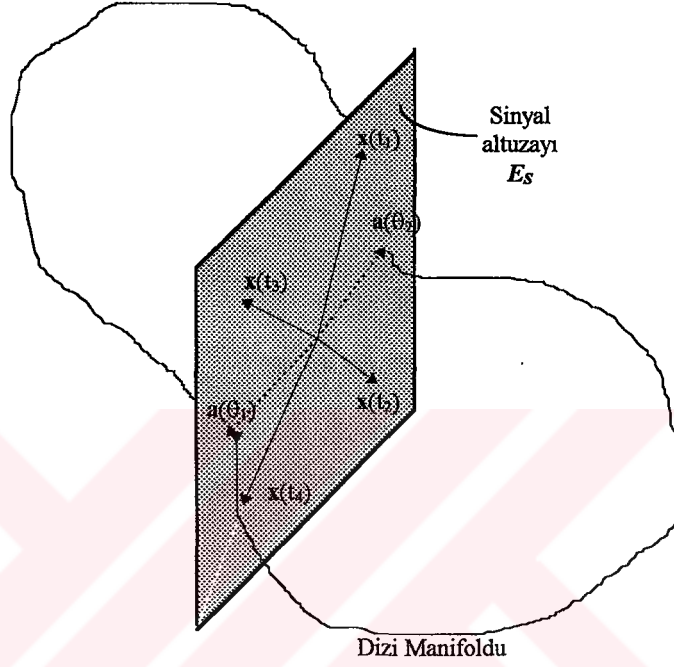
Dikkat çekici önemli bir nokta; eğer tek bir sinyal için $x(t) = a(\theta)s_\theta(t)$ uygun bir veri modeli ise, bu veri, $x(t)$, M boyutlu uzayda $a(\theta)$ olarak karakterize edilebilecek bir boyutlu alt uzaydadır. Ortamda bulunan d adet sinyal için, gözlenen veri vektörleri, $x(t) = A(\theta)s(t)$, aynı uzayda d boyutlu bir altuzayın içindedir*. Bu altuzay, *sinyal altuzayı* (E_S) olarak adlandırılır ve sinyal yönlerine ilişkin d adet $a(\theta_i)$ vektörü tarafından gerilir. Benzer bir yaklaşımla E_S 'e dik sıfır uzayı da *gürültü altuzayı* E_N olarak adlandırılır.

Sinyal altuzayı ve manifold kavramlarıyla çözümün kolayca görülmesi mümkün olabilmektedir. Gürültüsüz durumda, sinyal altuzayını $A(\theta)$ 'nın sütunları germektedir. Sinyal altuzayı bilindiğinde bu altuzay ile manifoldun kesiştiği noktalar $A(\theta)$ 'nın sütunlarıdır. Duyargaç dizisi, parametrelerden manifoldda olan geçiş tek olacak şekilde tasarlanırsa aranan parametreler kolayca elde edilir.

MUSIC yöntemi optimum altı iki adımlık bir yaklaşımdır. Önce ölçümlere en çok uyan şartlamasız d adet vektör aranır. Bu vektörler, ölçümlerden elde edilen verilerle kestirilen diziye ait uzamsal özilişki matrisinin en büyük d adet özdeğere ait özvektördür. Bulunan d adet özvektörün gerdiği uzay sinyal alt uzayı olarak belirlenir. İkinci adımda ise manifold'dan bu vektörlerin gerdiği uzaya en yakın vektörler karesel anlamda uzaklık kriteriyle belirlenir. Her iki adımda da kestirimin söz konusu oluşu ve kestirimler sırasında doğrusal olmayan yöntemler izlenmesi (özdeğer açılımı gibi) yöntemi optimum olmaktan uzaklaştırmaktadır. Diğer taraftan diziye ait ölçüm (snapshot) sayısı sonsuza yaklaştıkça gerçek çözüme yaklaşırlar. Bu nedenle MUSIC *unbiased* (gözlem sayısı artıkça gerçek sonuca yaklaşan) bir

* Yön vektörleri, uzamsal domende farklı konumlarda bulunan kaynaklar için doğrusal bağımsız kabul edilmektedir.

yöntemdir (Roy ve Kailath, 1989). Ortamda gürültü varken ise, sinyal altuzayının kestirimi ile manifoldun kesişimi boş kümedir ($E_S \cap \mathcal{M} = \emptyset$). Bu durum gürültünün etkisiyle kestirilen sinyal alt uzayının, gerçek sinyal alt uzayına eşit olmamasından kaynaklanmaktadır.



Şekil 2.2. Üç duyargacı, iki sinyal için MUSIC geometrisi (gürültüsüz)

Şekil 2.2’de üç adet duyargacı olan bir diziye ait üç boyutlu uzay ve buna ait manifold görülmektedir. Ortamda iki adet sinyal kaynağının bulunduğu varsayılmıştır. Şekil, kesişimin her koşulda olabileceği gibi yanlış bir his uyandırmamalıdır. Üç boyutlu bir kompleks uzayın iki boyutlu altuzayı E_S ’tir. Gerçek durumda* (gerçek sinyallerimizin gerçek oldukları hatırlanmalıdır) E_S altı boyutlu bir uzayın dört boyutlu bir altuzayıdır ve bir boyutlu manifoldla kesişmeyebilir.

* Sinyal modeli ortamda var olan sinyallerin kompleks zarf gösterimine dönüştürülmesine dayanmaktaydı. Kompleks zarf modeli gerçel ve imajinal olarak birbirine dik iki eksen olarak düşünülürse, uzayın boyutu iki kat artacak ve ilgili sinyaller yalnızca gerçel eksenlerin gerdiği uzay üzerinde olacaktır.

Bu noktada MUSIC'e ait uzamsal spektrum, geometrik yaklaşımın verdiği bakış açısıyla formülasyona dökülebilir. Uzamsal özilişki matrisi, R_x , (2.4)'den faydalanarak aşağıda ifade edilmiştir:

$$\begin{aligned} E\{x(t)x^H(t)\} &= R_x = A(\theta)R_sA^H(\theta) + R_n \\ R_x &= E\{s(t)s^H(t)\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Burada $E\{\cdot\}$ beklendik değer operatörünü, H ise kompleks transpoze işlemini sembolize etmektedir. Ortamdaki sinyaller birbirleriyle tamamen ilişkili ise R_s tekil bir matris olacağından sinyal altuzayı ile gürültü altuzayı kestirilemez (Hayes, 1996). Böyle bir durumda, elde edilen gürültü altuzayı ile sinyal altuzayı gerçek altuzaylardan farklı olacak, gürültü altuzayında sinyal altuzayına ait özvektörler de bulunacaktır*. Kestirim sırasında, R_x 'den faydalanarak bulunan gürültü altuzayına dik yön vektörleri aranır (bu vektörler sinyal altuzayındadır ve aranan konumları ifade eder). Bu işlem, karesel uzaklık kriteri yardımıyla; E_n ile manifold boyunca yön vektörlerinin iç çarpımlarının karesi değerlendirilerek yapılır. Diklik sözkonusu ise sonuç sıfır verecektir. Spektruma** görsel zenginlik kazandırmak amacıyla bu işlem formülasyonun paydasına konarak sıfıra yakın değerlerde tepelerin oluşması sağlanır:

$$p(\theta_i) = \frac{1}{a(\theta_i)E_nE_n^H a^H(\theta_i)} \quad (2.7)$$

* Gürültü altuzayına ait özvektörler σ^2 değerli özdeğerlere ait olduğundan özdeğer ayrışımı $R_x e_{n,i} = (AR_s A^H + \sigma^2 I) e_{n,i} = \sigma^2 e_{n,i}$ şeklinde yazılır. İlk terim, $AR_s A^H$, R_s tam ranklı ise sinyal altuzayındadır. MUSIC, $AR_s A^H e_{n,i} = 0$ oluşu gerçeğinden ortaya çıkmıştır. Eğer R_s tam ranklı değilse bu durumda kestirilen Eşitlik sinyal altuzayına ait özvektör için de geçerli olacaktır.

** Spektrum genlik değerleri bir anlam taşımadığı için gerçek anlamda bir spektrum değildir. Bu nedenle sözde spektrum olarak adlandırılır.

Görüldüğü gibi uzamsal spektrum (2.7), sinyal altuzayına en yakın ya da başka bir deyişle gürültü altuzayına neredeyse dik olan yön vektörleri için tepeler üretecek, diğerleri için ise sifıra yakın değerler alacaktır. Bu tepeler aranan sinyal kaynaklarının konumlarının kestirimlerini ifade etmektedir. Özilişki matrisinin kestiriminde oluşan hata nedeniyle (gürültü ve kestirimde kullanılan sonlu ölçüm sayısı hataya neden olur) diklik şartı tam olarak sağlanamaz. Bu nedenle, $p(\theta_i)$, θ_i ortama ait bir sinyalin yönü ise sonlu ancak büyük bir değer verir. Son olarak dikkat çekilmek istenen bir nokta da; altuzay yaklaşımının doğal bir sonucu olarak bu yöntemle ancak dizi eleman sayısı M olmak üzere, $M-1$ adet ilişkisiz ya da kısmen ilişkili sinyal kestirilebileceğidir. Bunun nedeni kolayca görüleceği gibi, R_x matrisinin boyutunun $M \times M$ oluşu ve gürültü altuzayının en az bir boyutlu olabilmesidir.

2.2.2 Minimum - Norm Yöntemi

Uzamsal spektrum kestiriminde altuzay teknikleri, tipik olarak gürültü altuzayına dik yön vektörlerinin aranmasına dayanır. Bu tarz en basit yöntem ilk olarak Pisarenko tarafından önerilmiştir (Hayes, 1996). Bu yöntemle göre gürültü alt uzayı bir boyutludur ve en küçük özdeğere ilişkin özvektöre, (e_p) , dik yön vektörleri aranarak istenilen spektrum oluşturulmaktadır:

$$p(\theta_i) = \frac{1}{a(\theta_i) e_p e_p^H a^H(\theta_i)} \quad (2.8)$$

Gürültü altuzayının bir boyutlu olması duyargaç sayısının sinyal sayısından bir fazla olmasını gerektirir. Ancak böyle bir durum kestirim performansını düşürür. Duyargaç sayısı artırıldığında ise yöntem, yüksek çözünürlük sağlamasına rağmen, spektrumda hatalı tepelerin oluşmasına neden olabilmektedir (kaynakların yönlerine karşı düşen konumlar spektrumda sivri tepeler halinde görülürler). Hatalı tepeler, e_p 'yi ifade eden polinomun

sıfırlarının manifolda yakın olabilmesi sonucu, sadece kaynaklara ait yön vektörlerine değil başka yön vektörlerine de yakın olabilmesinden kaynaklanmaktadır. Bu olumsuz durum nedeniyle daha uygun bir yaklaşım aranmış ve tüm gürültü altuzayını kullanan yeni bir yöntem olarak MUSIC ortaya çıkmıştır. Ancak (2.7) ve (2.8) eşitliklerinden kolayca görülebileceği üzere MUSIC in hesap yükü, e_p yerine bir matris (E_n) kullanıldığı için artmıştır. Bu durumda, çözünürlüğü yüksek, hatalı tepelerin oluşmamasını garantileyen ve hesap yükü daha az olan bir yaklaşıma ihtiyaç duyulmuştur. Bu tür bir yaklaşım ilk olarak Kumaresan ve Tufts (1983) tarafından ULA için önerilmiş ve *minimum norm yöntemi* (Minimum Norm Algorithm, Min-Norm) olarak adlandırılmıştır. Bu yaklaşıma göre gürültü altuzayından alınan ve ilk elemanı “1” olan en küçük normlu vektör (e_{MN}) spektrum kestiriminde istenilen sonuçları sağlamaktadır. Bu vektör, u_{MN} ilk elemanı bir ve diğer elemanları sıfır olan bir vektör ve O_D , D elemanlı bir sıfır vektörü olmak üzere bir minimizasyon probleminin sonucu olarak elde edilebilir:

$$\min(e^H e) \ni u_{MN}^H e = 1, E_S^H e = O_D$$

Lagrange Çarpanları Metodu kullanılarak aranan minimum normlu vektör şu şekilde olacaktır (Hayes, 1996):

$$e_{MN} = \frac{E_n E_n^H u_{MN}}{u_{MN}^H E_n E_n^H u_{MN}} \quad (2.9)$$

Sonuç olarak spekturum daha önceki ifadelere benzer olacaktır:

$$p(\theta_i) = \frac{1}{a(\theta_i) e_{MN}^H e_{MN}^H a^H(\theta_i)} \quad (2.10)$$

Min-Norm algoritmasının çözünürlük bakımından MUSIC'ten daha iyi performans göstermesine rağmen, kestirimlerin değışintisi MUSIC'ten daha fazla olmaktadır (bkz. Benzetişimler). Min-Norm.'un nasıl yüksek çözünürlük sağladığı ise algoritmanın can alıcı noktasıdır. Yönlendirme vektörü $a(\theta)$, K boyutlu olmak üzere, $(K-1)$. dereceden bir polinomu ifade eder $A(z)$. Ortamda D adet kaynak olduğu varsayılırsa, bu polinomun D adet sıfırı birim dairenin üzerinde olmak zorundadır ve bu sıfırlar kaynak yönlerine denk düşer (Kumaresan ve Tufts, 1983).

$$A(z) = 1 + e_1 z + e_2 z^{-1} + \dots + e_{K-1} z^{-(K-1)} \quad (2.11)$$

$$A(e^{j\theta_i}) = 1 + e_1 e^{j\theta_i} + e_2 e^{j2\theta_i} + \dots + e_{K-1} e^{j(K-1)\theta_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, D \quad (2.12)$$

$$v_i = \frac{a \sin(\theta_i)}{c}$$

Burada γ_i uzamsal frekans, a duyurgaçlar arası uzaklık ve c yayılma hızıdır. Algoritmanın hatalı tepeler üretmemesi için kalan $(K-D-1)$ adet sıfırın birim daire civarında olmaması gerekir. $A(z)$ polinomunu bu iki çeşit sıfırı içeren iki ayrı polinomun çarpımı olarak ifade edilir:

$$\begin{aligned} A(z) &= Q_1(z) Q_2(z) \\ Q_1(z) &= 1 + b_1 z + b_2 z^{-1} + \dots + b_D z^{-D} \\ Q_2(z) &= 1 + c_1 z + c_2 z^{-1} + \dots + c_{K-D-1} z^{-(K-D-1)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

İstenilen ise e_{MN} vektörünün normunu ifade eden $G = 1 + |e_1|^2 + |e_2|^2 + \dots + |e_{K-1}|^2$ 'nin minimum olmasıdır. Bir polinom, iki polinomun çarpımı ise, katsayıları her iki polinomun katsayılarının konvolüsyonudur:

$$e_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n-k} b_k \quad (2.14)$$

Bu ifade doğrusal öngörü probleminin formülasyonuna benzemektedir (Kumaresan, 1983). Bu tür öngörü problemi aynı zamanda özilişki (autocorrelation) *metodu* olarak da adlandırılır. Burada b_k öngörü süzgecinin katsayıları ve e_n hata dizisi olarak kabul edilebilir.

Bu durumda, G 'nin minimize edilmesi hatanın minimize edilmesine denktir. $r(i) = \sum_{k=0}^D b_k b_{k+i}$ olmak üzere problem matrisel şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(D) \\ r(-1) & r(0) & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r(-(K-D-1)) & r(-(K-D-2)) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_{K-D-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r(-1) \\ r(-2) \\ \cdot \\ r(K-D) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Böylelikle $(K-D-1)$ adet sıfır G minimize edilecek şekilde seçilmiş olur (kaynaklara ait D adet sıfır sabittir). Bu tarz kestirimin sonucu olarak, hata süzgeçlerinin (özilişki metodu) tüm sıfırları birim dairenin içindedir ve spektrumu beyazlatırlar (Kumaresan, 1983). Bu durum, $K-D-1$ tane kaynak harici sıfırın birim daire içinde olması ve spektrumu beyazlatma eğilimi nedeniyle düzgün (üniform) dağılması gerektiği anlamına gelir. Bu noktada, söz konusu olan sıfırların birim daire içinde olmasının çözünürlüğü nasıl etkilediğini matematiksel bir gösterilemlerle açıklamak, algoritmanın felsefesinin daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır:

$$A_{MN}(e^{j\nu}) = \prod_{i=1}^{K-1} |e^{j\nu} - z_{MN,i}| \quad z_{MN,i} = \text{polinomun kökleri} \quad (2.16)$$

(2.16) 'dan da takip edilebileceği gibi, birim daireye yakın kökler keskin sıfırlar ve nispeten uzak olanlar ise düzgün dağıldıklarından birbirine yakın sabit değerler üreteceklerdir. Sıfırların birim daire içinde oluşları, spektrumunu kaynak yönlerinin dışında aşağıya çeker (manifoldla e_{MN} arasındaki uzaklık büyük olur). Bu sayede çözünürlük, kaynakları gösteren tepelerin daha da belirginleşmesi nedeniyle belirgin olarak artar.

2.2.3 En yakın vektör yöntemi

Min-Norm yöntemi, üniform doğrusal dizilim (ULA) için önerilmiş bir tekniktir. Bu nedenle, tüm dizi konfigürasyonları için uygulanabilirliği söz konusu olmamaktadır. Ancak bu teknik, yüksek çözünürlük sağlaması ve MUSIC'e kıyasla düşük hesap yükü gerektirmesi gibi avantajlara sahiptir. Bu önemli avantajlar benzer bir tekniğin keyfi geometri dizilimleri için de uygulanıp uygulanamayacağı, yaklaşımın genel dizi yapılarını kapsayacak şekilde genişletilip genişletilemeyeceği sorularını akla getirmektedir. Bu alt bölümde incelenecek olan teknik, Min-Norm yöntemini de kapsayacak ve bahsedilen arayışa cevap olabilecek bir yöntemdir. Yöntemin temel fikri, gürültü alt uzayında bir kritere göre dizi manifolduna en yakın vektörü ya da vektörleri, daha önce bahsedilen tekniklerde olduğu gibi uzamsal spektrum kestiriminde kullanmaktır (Buckley ve Xu, 1990).

Yakınlık, yöntemin anahtar kelimesidir ve değişik kriterlere göre tanımlanır. Bu tanımlara girmeden önce, yaklaşımın daha kolay kavranabilmesi için, yöntemin Min-Norm yöntemiyle bağlantısını ifade etmek uygun olacaktır. Bu amaçla bir ULA gözönüne alınsın. Bu diziye ait

görüş alanı (GA) (manifoldun ilgilenilen kısmı), $-\frac{\pi}{a} \leq \theta \leq \frac{\pi}{a}$ olsun* . Bu aşamada bir uzamsal süzgeç tasarımı amacıyla kullanılacak olan basit bir en küçük karesellik problemi verilecektir. Bu problemin sonucunda yakınlık kavramı ile Min.-Norm arasındaki ilişki açıkça ortaya çıkmaktadır:

$$\min \left(\frac{1}{2\pi} \int_{GA} \|r_d(\theta) - e^H a(\theta)\|^2 du \right) \quad \mathfrak{D} \quad E_S^H e = O_d$$

Yukarıda, e ; uzamsal süzgece ait aranan ağırlık vektörü, O_d ; d boyutlu sıfır matris, $r_d(\theta)$; uzamsal süzgecin GA'da istenen cevabı ve $a(\theta)$ yönlendirme vektörüdür. Koşul nedeniyle ağırlık vektörü, sinyal kaynakları konumlarına denk düşen yön vektörleri için sıfır üretmektedir. Bu durumda sonuç:

$$\begin{aligned} e_{LS} &= E_n [E_n^H R_{GA} E_n]^{-1} E_n^H p_{r,GA} \\ R_{GA} &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} a(\theta) a^H(\theta) du = I_k \\ p_{r,GA} &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} r_d(\theta) a(\theta) du \end{aligned} \quad (2.17)$$

olacaktır. Dizinin cevap vektörü, $r_d(\theta)=1$ için $p_{r,GA}=u_{MN}$ olacaktır (u_{MN} , ilk elemanı "1", diğer elemanları sıfır olan bir vektördür). Bunun sonucu olarak e_{LS} optimum beyazlatıcı süzgeç olmaktadır (uzamsal spektrum boyunca sabit). Aynı zamanda (2.17) den de görülebileceği gibi; manifolda en küçük karesellik (Least Square, LS) anlamında en yakın

* Burada kullanılan a daha önce kullanılan ve duyargaçlar arasındaki mesafeyi sembolize eden a' dan bağımsız olarak bir sabiti göstermektedir.

vektördür*. Böylelikle aranan sonuç vektörü,

$$e_{LS} = E_n E_n^H u_{MN} \quad (2.18)$$

olarak elde edilir. İlgili çekici bir sonuç, elde edilen ağırlık vektörünün (2.9)'da elde edilmiş Min-Norm vektörüyle bir skala faktörü farkıyla aynı oluşudur. Bu sonuç göstermektedir ki; Min-Norm vektörü dizi manifolduna LS anlamında en yakın vektördür.

Bu örnekle, manifolda yakınlık kavramının spektrum kestirimi açısından avantajlar sağladığı izlenimi doğmaktadır. Bu aşamada, artık diğer yakınlık kriterleri ve bunların getirileri hakkında tartışılabilir.

2.2.3.1 En küçük karesellik vektörü

Manifold üzerinde seçilmiş bir konum alanı (ULA için görüş alanı) Θ ile sembolize edilsin. Konum alanıyla kastedilen manifoldun bir parçasıdır. Sinyallerin manifoldun belirgin bir bölgesinden geldiği hakkında bir ön bilgi varsa, bu durumda tüm manifoldun taraması yerine sadece ilgili bölgeyi (konum alanını) taramak yeterli olacak ve daha hassas sonuçlar elde edilebilecektir. İstenilen vektör, Min-Norm ile yakınlık kavramı arasındaki ilişki ifade edilirken kullanılan yaklaşımın genelleştirilmiş halinden faydalanılarak elde edilir (Buckley ve Xu, 1990):

$$\min_{\Theta} \int |r_d(\theta) - e^H a(\theta)|^2 du \quad \ni \quad E_S^H e = \theta_d$$

* (1.17) eşitliğindeki e_{LS} vektörü, yön vektörlerinin tümlemesinin gürültü alt uzayına ait izdüşüm matrisi ile çarpılması sonucu elde edilmektedir. Bu durum vektörün manifold boyunca tüm yön vektörlerine en yakın vektör olduğunu göstermektedir.

problemin çözümü ise:

$$\begin{aligned}
 e_{LS} &= E_n \left[E_n^H R_Q E_n \right]^{-1} E_n^H p_{r,Q} \\
 R_{GA} &= \int_{\Theta} a(\theta) a^H(\theta) du = I_k \\
 p_{r,GA} &= \int_{\Theta} r_d(\theta) a(\theta) du
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Problemin amacı gereği, konum alanı boyunca süzgecin cevabının genliği ve fazı sabit olmalıdır. Cevap vektörünün içeriğinin seçimi bir sonlu süreli dürtü cevaplı (FIR) süzgecin istenen faz cevabı seçimi problemi ile benzerdir.

2.2.3.2 Birinci temel vektör yaklaşımı

Birinci temel vektör yaklaşımı (First principal vector, FINE) kriterine göre, e_{fine} konum alanı içinde Θ yön vektörlerinin gerdiği altuzayla arasında minimum açı bulunan vektördür (Buckley ve Xu, 1990).

Bu vektörün bulunabilmesi için öncelikle ilgili konum alanını ifade eden altuzay bulunmalıdır. Bu amaçla kaynak ilişki matrisi olarak adlandırılacak olan matris (R_Q) bulunur:

$$R_Q = \int_{\Theta} a(\theta) a^H(\theta) du \tag{2.20}$$

Elde edilen bu matrise özdeğer ayrışımı uygulanır. Bu matris genellikle düşük ranklıdır ve ilgili konum alanı yön vektörlerinin gerdiği uzayı ifade eder. Bulunan özvektörler (u_i) içinden altuzayı en iyi temsil edeceği kabul edilecek sayıda (D_Θ) özvektör seçilir. D_Θ matrisin

nümerik rankı olarak adlandırılır. Böylece aranan altuzay $M \times D_\theta$ boyutlu, sütunları seçilmiş özvektörlerden oluşan matrisle $U_\theta = [u_1, u_2, \dots, u_{D_\theta}]$ gösterilebilir. Bir sonraki aşamada, gürültü altuzayı kestirilir ve $U_\theta^H E_n$ çarpımının tekildeğer ayrışımı (Singular Value Decomposition, SVD) oluşturulur:

$$U_\theta^H E_n = YAZ^H \quad (2.21)$$

İfadede A tekil değer matrisini göstermektedir. Bu matris, $D_\theta \times (M-d)$ boyutlu köşegen bir matris olup elemanları büyükten küçüğe doğru sıralıdır. Sol tekil değer vektörleri Y matrisinin sütunlarını, sağ tekil değer vektörleri ise Z matrisinin satırlarını oluşturmaktadır. Tekil değer matrisinin en büyük tekil değeri, altuzaylar (gürültü altuzayı, E_n ve konum alanını ifade eden altuzay, U_θ) arasındaki ilk temel (en küçük) açının kosinüsüdür (Golub ve Van Loan, 1986). Tekil değerlerin A 'nın köşegeni boyunca azalan sırayla yerleştiği varsayılırsa bu durumda e_{fine} ; $E_n Z$ çarpımının ilk sütunu olacaktır. Sonuç olarak spektrum kestirimi bundan önceki yöntemlere benzer şekilde:

$$p(\theta) = \frac{a^H(\theta)a(\theta)}{|a(\theta)e_{fine}|^2} \quad (2.22)$$

olacaktır. Spektrum ifadesinin payında görülen normalizasyon çarpımı konum alanı boyunca yapılan taramalarda daha iyi sonuç verdiği görüldüğünden kullanılmıştır (Buckley ve Xu, 1990).

2.2.3.3 Birinci temel vektörler yaklaşımı

FINE yönteminde, e_{fine} 'nin oluşturulması sırasında dikkat çekici birkaç nokta bulunmaktadır. Konum alanının ve D_θ 'nin seçimi, vektörün bulunması sırasında SVD adımını etkilemektedir. Eğer, $U_\theta^H E_n$ 'nin en büyük tekil değeri tekrarlıysa; gürültü altuzayının içinde manifolda yakın olan vektör tek olmayacaktır. Gürültü altuzayının ve U_θ 'nın geniş boyutlu olmaları kesişimlerinin bir altuzay olmasına neden olabilir. Böyle bir durum sözkonusu ise $E_n Z$ 'nin ilk sütunu bu kesişim altuzayında keyfi bir vektör olacaktır. Tekrarlayan tekil değer sayısı arttıkça bu keyfiyet de artar ve kestirici Pisarenko kestiricisi gibi davranmaya başlar (Buckley ve Xu, 1990). Bir başka deyişle seçilen vektör keyfi olacağından yakınlığı garanti edilemez. Bu nedenle bir vektör üzerinden kestirim yapmak yerine kesişim altuzayı üzerinden kestirim yapmak daha doğru bir yaklaşım olacaktır.

Birinci temel vektörler (The First prIncipal vEctors, FINES) kestiricisi konum alanı kapsamındaki yön vektörlerinin, gürültü altuzayında manifolda en yakın altuzaya izdüşürerek tarama yapar. Kesişim altuzayının boyu " l " ise E_{fines} kesişim altuzayı $E_n Z$ 'nin ilk " l " sütunundan oluşur:

$$p_{fines}(\theta) = \frac{a^H(\theta)a(\theta)}{|a(\theta)E_{fines}|^2} \quad (2.23)$$

2.2.3.4 En yakın kestiricilerin birbirleriyle karşılaştırılması

LS yakınlık kestiricinin temel olumsuz yanı, işlem karmaşıklığı ve sınırlı Θ için R_θ 'nin bozuk ranklı oluşudur. Bu nedenle LS yakınlık kestiricinin diğerlerine göre avantajlı olduğu söylenemez. Ancak Min-Norm'un geliştirilmiş hali olması açısından önemlidir.

FINE yakınlık kestiricisi ise iyi bir çözünürlük vermektedir ve D_θ seçimi performansı etkilememektedir. Küçük D_θ için fazla hesap yükü taşımaz. Ancak vektörün bulunabilmesi için konum alanının ve D_θ 'nın seçilmesi gerekmektedir. Eğer bir ön bilgi yoksa yüksek çözünürlüklü geniş bir tarama gerekir (konum alanı büyür). Ancak θ 'nın büyümesi çözünürlüğü düşürmektedir. Bir başka deyişle spektrumun çözünürlüğü ile konum alanının büyüklüğü ters orantılıdır. Ancak benzetişimlerde de görüleceği üzere D_θ 'nın seçimi spektrumu etkilememektedir.

FINES yakınlık kestiricisi kesişim altuzayı boyut $l=M-d$ ise MUSIC'e dönüşür.

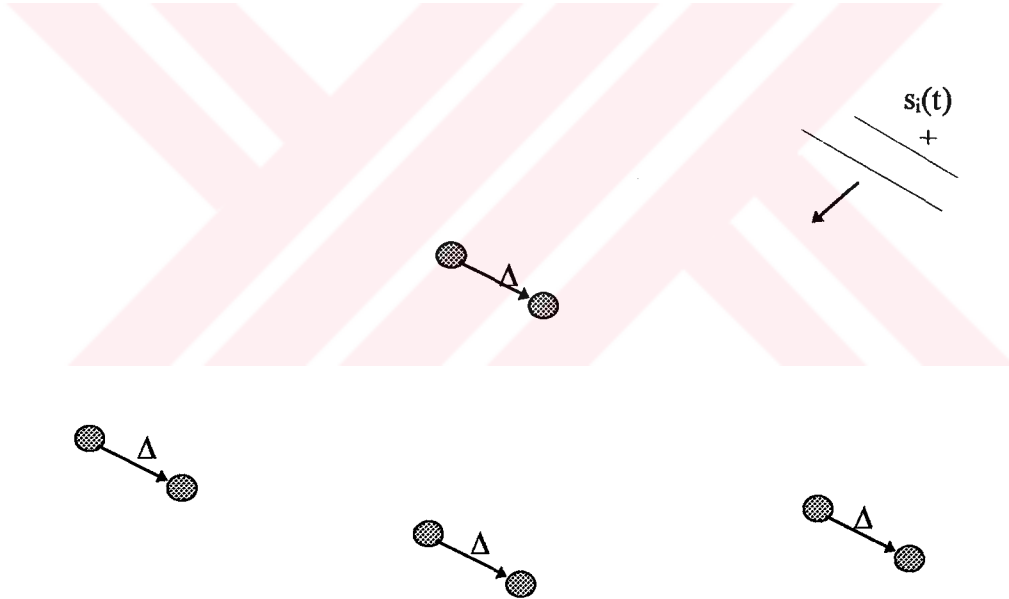
2.2.4 Altuzay dönme ile değişmezlik yöntemi

MUSIC etkili bir kestirim metodudur ve özilişki matrisinin kestirimi ile doğru orantılı olarak mükemmel sonuçlar verebilir. Sahip olduğu tüm avantajlarının yanı sıra dizi manifoldunun tam olarak bilinmesini gerektirir. Çünkü, bu manifold kestirim sırasında taranmak zorundadır. Ancak dizi konfigürasyonu ULA gibi basit bir yapı olmanın ötesine geçerse, örneğin iki boyutlu doğrusal bir dizilim olursa manifoldun taranması işlemi inanılmaz boyutlarda artacaktır. ULA için birer derece hassasiyetle tarama yapıldığında 180 adet yönlendirme vektörü sınanırken, iki boyutlu bir dizi için bu sayı, aynı hassasiyette 180×180 adet olmaktadır. Kolayca farkedilebileceği gibi, bu durum hesap yükünü oldukça arttırmaktadır. Bu olumsuzluk böylesine etkin bir kestirim yöntemini pratik olmaktan uzaklaştırmaktadır. MUSIC'in bu etkinliği altuzay yaklaşımından kaynaklanmaktadır. Kestirilen sinyal altuzayını geren taban vektörleri ile aranan yön vektörleri aynı altuzaya aittirler. Öyle ise özdeğer ayrışımı yoluyla elde edilen dik taban vektörleri ile istenen yön vektörleri arasında birebir bir dönüşüm söz konusudur^{*}. Bu işlem taban vektörlerinin bir

^{*} Manifolda ait herhangi dizi elemanı sayısı kadar yönlendirme vektörünün birbirinden bağımsız olduğu kabul edilmektedir.

anlamda döndürülmesi anlamına da gelmektedir. O halde, altuzay yaklaşımından fedakarlık etmeksizin ve bir tarama işlemine ihtiyaç duymaksızın yalnızca ilgili döndürme işlemi yapan dönüşüm matrisinin aranmasına dayalı bir yöntemle daha pratik bir çözüm yolu bulunabilir. Altuzay dönme ile değişmezlik yöntemi (Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT) işte bu düşünceye dayanan bir yöntemdir (Roy ve Kailath, 1989).

ESPRIT, MUSIC ile aynı sinyal modelini kullanmaktadır. Hesap yükü dizi geometrisine bir koşul getirilerek azaltılmıştır. Bu yenilik, dizilerin birbirine eş duyargaç çiftleriyle oluşturulmasıdır. Çifti oluşturan elemanların konumları arasında bir uzaklık vektörü tanımlanır ve her çift için bu uzaklık vektörünün aynı olması sağlanır. Bunun ötesinde dizinin konfigürasyonu konusunda hiç bir sınırlama yoktur (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. Dönme ile değişmez (Rotational invariant) duyargaç dizisi

2.2.4.1 Veri modeli

Aynı merkez frekanslı (w_0) d adet dar bantlı sinyal yeterince uzakta konumlanmış M adet duyargaçtan oluşan bir diziye doğru homojen ve izotropik bir ortam içinde yayılıyor olsun. Diziye ait $2M$ adet duyargacın her birinde sıfır ortalamalı ve uzamsal özilişki fonksiyonu $\sigma^2 E_n$ olan gürültünün var olduğu düşünölsün. Bu varsayımlar altında Z_X , Z_Y ile sembolize edilecek olan iki adet alt dizi tanımlansın. Diziler, çiftleri oluşturan duyargaçlar ayrı dizilerde bulunacak şekilde oluşturulsunlar. Bu durumda dizilerin i . elemanlarının çıkışları şu şekilde ifade edilecektir:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{k=1}^d s_k(t) a_i(\theta_k) + n_{x_i}(t) \\ y_i(t) &= \sum_{k=1}^d s_k(t) e^{jw_0 \Delta \sin \theta_k / c} a_i(\theta_k) + n_{y_i}(t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Eşitliklerde θ_k , k . kaynağın dizinin referans noktasına göre açisal konumunu ve Δ uzaklık vektörünü sembolize etmektedir. Bu iki dizinin çıkışları bir araya getirilirse:

$$\begin{aligned} x(t) &= A(\theta)s(t) + n_x(t) \\ y(t) &= A(\theta)\Phi s(t) + n_y(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \bar{A}(\theta)s(t) + n_z(t) \quad (2.26)$$

Burada $\Phi = \text{diag}\{e^{jv_1}, e^{jv_2}, \dots, e^{jv_d}\}$ üniter matris ve $v_k = w_0 |\Delta| \sin(\theta_k / c)$ ' dir. Bu

matrise aynı zamanda döndürme operatörü olarak da bakılabilir. Ayrıca $\bar{A}(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) \\ A(\theta)\Phi \end{bmatrix}$ ve

$$\mathbf{n}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x(t) \\ \mathbf{n}_y(t) \end{bmatrix} \text{ birleştirilmiş vektörlerdir.}$$

ESPRIT'in önemli bir avantajı olan hesap yükünün azlığı, manifoldun bilinmesine ihtiyaç olmadan kestirim yapabilmesinden kaynaklanmaktadır. Bir başka ifadeyle, amaç; $\bar{\mathbf{A}}(\theta)$ 'yı kestirmeye gerek kalmadan Φ 'yi bulmaktır. Kestirim problemi skalalandırmayla değişmezdir. Bu durum sinyal güçlerinin gözlenememesinden anlaşılabilir. Daha açık bir ifadeyle; bir $\mathbf{G}$ tekil olmayan diagonal matris için veri modeli $\mathbf{s}(t) \rightarrow \mathbf{D}^{-1}\mathbf{s}(t)$ ve $\bar{\mathbf{A}}(\theta) \rightarrow \bar{\mathbf{A}}(\theta)\mathbf{D}$ dönüşümleri ile değişmezdir. Bu nedenle, sinyallerin ve manifoldun kestirimi duyargaçlardan birinin genlik örüntüsü bilinmedikçe belirli bir genlik ve keyfi bir skala ile elde edilir.

2.2.4.2 Değişmezlik yaklaşımı

ESPRIT'in temel felsefesi, modelin dönme ile değişmezliği nedeniyle sinyal altuzayının değişmemesidir. İki altdizinin çıkışları $\mathbf{Z}_x$, $\mathbf{Z}_y$, aynı sinyal altuzayını ve $\mathbf{A}(\theta)$ 'yı geren iki takım taban vektörlerini verir ($\mathbf{E}_{xx}$, $\mathbf{E}_{yy}$). Sinyal altuzayı, uzamsal özilişiki matrisinden bulunabilir ($\mathbf{R}_{zz} = \bar{\mathbf{A}}(\theta)\mathbf{R}_s\bar{\mathbf{A}}^H(\theta) + \sigma^2\mathbf{E}$). Duyargaç sayısına ilişkin $d \leq M$ varsayımı altında ($\mathbf{R}_{zz}$, $\mathbf{E}_n$) matris çiftinin $2M-d$ adet en küçük genelleştirilmiş özdeğeri σ^2 'ye eşittir. Kalan d adet özvektör ise $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_n[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_d]$ sinyal altuzayını elde etmek için kullanılır. Sinyal alt uzayı için, $\mathbf{R}\{\mathbf{E}_s\} = \mathbf{R}\{\bar{\mathbf{A}}(\theta)\}$ olduğundan ve $d \leq M$ olduğu da hatırlanarak, aşağıdaki dönüşümü tanımlayabilecek tek bir $\mathbf{T}$ dönüşüm matrisi olabilir.

$$\mathbf{E}_s = \bar{\mathbf{A}}(\theta)\mathbf{T} \quad (2.27)$$

Diğer taraftan, dizinin değişmezlik özelliği sayesinde $\mathbf{E}_s$ 'in $\mathbf{E}_x \in \mathbb{C}^{M \times d}$ ve $\mathbf{E}_y \in \mathbb{C}^{M \times d}$ ($\mathbb{C}^{M \times d}$,

$M \times d$ boyutlu uzayı ifade eder) sırasıyla Z_X ve Z_Y ait sinyal alt uzayları olarak ayrıştırılabilmesi mümkündür:

$$E_s = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) \\ A(\theta)T \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Alt dizilere ait sinyal altuzayları, E_x , E_y , ve $A(\theta)$ aynı uzayı gerdiklerinden $E_{xy} = \begin{bmatrix} E_x / E_y \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan matrisin rankı d olmalıdır. Bu durum bir $F \in \mathbb{C}^{2M \times d}$ matrisinin varlığını gösterir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_x / E_y \end{bmatrix} F &= E_x F_x + E_y F_y = 0 \\ A(\theta)TF_x + A(\theta)\Phi TF_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Bu yeni matris E_{xy} matrisinin sıfır uzayını germektedir. Bir $\Psi = -F_x(F_y)^{-1}$ matrisi tanımlayarak (2.29) bağıntısı yeniden düzenlenirse:

$$\begin{aligned} A(\theta)T\Psi &= A(\theta)\Phi \Rightarrow A(\theta)T\Psi T^{-1} = A(\theta)\Phi \\ T\Psi T^{-1} &= \Phi \end{aligned} \quad (2.30)$$

olacaktır. Görüldüğü gibi Ψ 'nin özdeğerleri Φ 'nin köşegen elemanlarıdır ve T 'nin sütunları özvektörleridir. Aranılan parametreler (sinyal yönleri) Φ 'nin elemanları olduğundan sonuca varılmış olmaktadır. (2.30) eşitliği ESPRIT'in anahtar ifadesidir. Başka bir ifadeyle, sinyal

parametreleri E_x vektörünü E_y 'ye dönüştüren Ψ operatörünün doğrusal olmayan bir fonksiyonudur.

2.2.4.3 Altuzay dönüşüm operatörünün kestirimi

Pratikte yalnızca sonlu sayıda gürültülü ölçümler bulunduğundan E_s , R_{zz} özilişki matrisinin kestirimden elde edilebilir. Bu durumun sonucu olarak elde edilen sinyal altuzay kestirimi gerçek altuzayın sadece bir yaklaşımıdır ve menzilleri farklıdır. Diğer taraftan, E_x ve E_y 'ye ait kestirimler de yukarıda tartışıldığı gibi aynı menzile sahip değillerdir. Sonuç olarak, Ψ 'yi $E_x \Psi = E_y$ 'nin bir sonucu olarak bulmak mümkün değildir. Bu matrisin yalnızca uygun yöntemler kullanılarak bir kestiriminin bulunabilmesi mümkündür. Bu tür problemlerde en sık başvurulan yöntem en küçük karesellik (Least Square, LS) kriterinin uygulanmasıdır.

Standart LS kriterine göre, $Ax=B$ modelinde x 'in, A 'nın bilindiği ve B 'nin bir hata ile saptandığı durumda kestiriminin bulunması için başvurulur. Denklem sisteminin *aşırı tanımlı* (overdetermined) olduğu varsayılırsa A 'nın sütunları doğrusal bağımsız ve B 'nin elemanlarındaki hatanın sıfır ortalamalı ve $E\{b_{ij}b_{kl}\} = \sigma^2 \delta_{ik} \delta_{jl}$ olduğu durumda LS çözümü şu şekilde elde edilir (Roy ve Kailath, 1989):

$$\hat{x} = [A^H A]^{-1} A^H B \quad (2.31)$$

Kestirim unbiased ve minimum değişintilidir. Keyfi ancak bilinen özilişkili sütunlara sahip B için LS'nin genişletilmesi benzer şekilde olup sonuç çözüm ağırlıklandırılmış LS (Weighted Least Square, WLS) olarak adlandırılır.

Ancak hem A hem de B gürültülü ise LS çözümü biased'dır. Bu durum incelemekte

olduğumuz problemde karşımıza çıkan durumdur. Altuzayların, E_x ve E_y , gürültülü olduğu açıktır, çünkü; her iki matris sonlu gözlem sayısı için ve gürültülü bir ortamda kestrilmektedir. Bu durumda, LS kriteri çözüme ulaşmak için uygun olmamaktadır. İki matrisin de gürültülü olduğu durumu göz önüne alan başka bir kriter toplamsal LS'dir (Total Least Square, TLS). TLS (2.32)'de görülmekte olan eşitliği sağlayan minimum Frobenius normlu R_A ve R_B gibi iki matris bulur:

$$[A + R_A]\hat{x} = B + R_B \quad (2.32)$$

Bu kriter, (2.29)'daki sıfır matrisinin Frobenius normu minimize edilecek bir matrisle değiştirilmesine eşdeğerdir (Golub ve Van Loan, 1986). Eğer hatanın özilişkisi, özel olarak $[R_A/R_B]$ nın sütunları bir skala faktörüyle biliniyorsa TLS kestirimi kesinlikle kararlıdır. Sıfır uzayı için, $F^H F = I$ koşulu altında sıfır sonucu elimine edilip Lagrange tekniği ile F aranır, sonuç; $E_{xy}^H E_{xy}$ matrisinin d adet en küçük özdeğerine karşı düşen özvektördür (Roy ve Kailath, 1989):

$$\begin{aligned} E_{xy}^H E_{xy} &= \begin{bmatrix} E_x^H \\ E_y^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x & E_y \end{bmatrix} = E A E^H \\ E &= \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \\ \Psi &= -E_{12} E_{22}^{-1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Burada E_{ij} $d \times d$ boyutlu matristir. Böylelikle aranan dönüşüm matrisi matematiksel olarak elde edilmiştir. Dikkat çekilmek istenen nokta ise ESPRIT'in manifold bilgisine ihtiyaç duymadan dönüşüm matrisi yardımıyla çok daha az hesaplama istenilen sonuca ulaşabilmesidir.

2.2.4.4 Hesaplama avantajı üzerine:

ESPRIT'in en önemli avantajı manifoldun taranmasını ortadan kaldırmasıdır. Sinyal parametrelerini özdeğer ayrışımı ile direkt olarak bulur. Bu durum d^2 ile orantılı hesaplama işlemine denk düşmektedir. Diğer taraftan MUSIC için manifold boyunca bir tarama gereklidir ki; bu oldukça ağır hesap yükünü de beraberinde getirir. ESPRIT'in bu yöndeki üstünlüğü özellikle çok boyutlu parametre kestiriminde (azimuth, elevation) açıkça ortaya çıkar. Hesap yükü ESPRIT için doğrusal artarken, MUSIC için üstel artmaktadır.

2.3 En Büyük Olabilirlik Kestirimi

En büyük olabilirlik kestirim yöntemi, (Maximum Likelihood, ML) duyargaç dizileriyle sinyal geliş yönü kestiriminin dikkat çekmeye başladığı son otuz yıllık dönem başlarında ihmal edilmiştir. Bu ihmal, maksimizasyon probleminin getirdiği çok değişkenli doğrusal olmayan yapıdan ve ağır hesap yükünden kaynaklanmaktaydı. Bu nedenle, ML yönteminin yerine daha az hesap yükü gerektiren optimum altı (suboptimum) yöntemlerle (altuzay yöntemleri bu yöntemlerin arasındadır) ağırlıklı olarak ilgilenilmiştir. Bu tür yöntemlerin performansı ML'a göre daha düşüktür. Özellikle sinyal gürültü oranının (SNR) düşük olduğu durumlarda ya da ölçüm sayısının azlığında bu fark daha açık olarak ortaya çıkmaktadır. ML yöntemi tek bir ölçümle dahi sonuç verebilmektedir. Öte yandan; optimum altı teknikler, uyumlu sinyallerin varlığı durumunda başarısız sonuçlar vermektedir.

ML yöntemi için istatistiksel ve deterministik olarak iki farklı yaklaşım söz konusudur. Sinyallerin ve gürültünün bir raslantı süreci olarak kabul edildiği yöntem istatistiksel yaklaşımdır. Bu yaklaşım ağır hesap yükünü de beraberinde getirmektedir. Diğer taraftan deterministik yaklaşımda sinyalleri raslantı süreçleri olarak kabul etmek yerine, zamanın deterministik bilinmeyen fonksiyonları olarak kabul edilmektedir (Ziskind ve Wax, 1988). Bu

sayede işlem yükü oldukça hafiflemiştir. Bununla birlikte, her iki yaklaşım için de kestrim bir maksimizasyon işlemleri gerektirmektedir. Ancak maksimize edilen fonksiyonlar (en büyük olabilirlik fonksiyonu) yerel noktalara sahip olabildiğinden, fonksiyonları maksimize (ya da minimize) eden noktalara ulaşılması her zaman garantilenemez.

Duyargaç dizisinden elde edilen N adet gözlem vektörü matrisel formda bir araya toplanarak yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \mathbf{a}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \\
 \mathbf{X} &= \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S} + \mathbf{N} \\
 \mathbf{X} &= [\mathbf{x}(t_1) \ \mathbf{x}(t_2) \ \dots \ \mathbf{x}(t_N)] \\
 \mathbf{N} &= [\mathbf{n}(t_1) \ \mathbf{n}(t_2) \ \dots \ \mathbf{n}(t_N)] \\
 \mathbf{S} &= [\mathbf{s}(t_1) \ \mathbf{s}(t_2) \ \dots \ \mathbf{s}(t_N)]
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Amaçlanan ortamdaki sinyallere ait yönlerin, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$, kestrilmesidir. Problemin çözümlenebilmesi için bir dizi varsayım yapılacaktır:

- Ortamdaki sinyal sayısı dizinin eleman sayısından küçüktür.
- Manifolddan alınacak herhangi p adet yönlendirme vektörü doğrusal bağımsızdır.
- Gürültü vektörü, $\mathbf{n}(t)$; durağan, ergodik, sıfır ortalamalı, kompleks değerli ve özilişki matrisi $\sigma^2 \mathbf{I}$ (σ^2 bilinmeyen bir katsayı) şeklinde olan (uzamsal beyaz) Gauss sürecidir.
- Gürültü vektörünün zaman örnekleri, $\mathbf{n}(t_i)$ istatistiksel bağımsızdır.

İlk iki varsayım çözümün tekliği için gereklidir. Diğer iki varsayım ise ML yönteminin uygulanmasını kolaylaştırmak amaçlı olağan varsayımlardır. Son iki varsayımın

gerçekleşmemesi durumunda kestirim halen anlamlıdır ve LS çözüme denk düşmektedir (Ziskind ve Wax, 1988).

En büyük olabilirlik (Maximum Likelihood, ML) kestiricisinin formülasyonuna elde edilmesi sırasında, her iki yaklaşımın farklılıklarının daha iyi anlaşılabilmesi için bu yaklaşımlara ait incelemeler bir arada yürütülecektir. Her iki yaklaşım için gözlem vektörüne ilişkin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonları (o.y.f) şu şekildedir:

$$f_i(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\pi \det[\mathbf{R}]} e^{-\left(\mathbf{x}^H(t_k) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}(t_k)\right)} \quad (2.35)$$

$$f_d(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\pi \det[\sigma^2 \mathbf{I}]} e^{-\left(\frac{1}{\sigma^2} |\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_k)|^2\right)}$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonları ifade edilirken, duyargaç gürültülerinin istatistiksel olarak bağımsız ve zaman örneklerinin ilişkisiz Gauss süreçleri olduğu kabul edilmiştir. Bu kabullere ek olarak istatistiksel yaklaşım için sinyal örneklerinin de istatistiksel olarak bağımsız Gauss süreci olduğu varsayılmıştır. Bu o.y.f larının yardımıyla maksimize edilecek olabilirlik fonksiyonları sabit terimler ihmal edilerek yazılabilir:

$$L_{is}(\theta) = -N \log(\det[\mathbf{R}]) - \sum_{k=1}^N \mathbf{x}^H(t_k) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}(t_k)$$

$$= -N \log(\det[\mathbf{R}]) - \text{Tr}(\hat{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1})$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}(t_k) \mathbf{x}^H(t_k) \quad (2.36)$$

$$L_d(\theta) = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N |\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_k)|^2$$

Yukarıdaki ifadelerde “ $\mathcal{I}$ ” ve “ $\mathcal{D}$ ” indisleri sırasıyla istatistiksel ve deterministik yaklaşımları sembolize etmektedir. Yine ifadede, $Tr(.)$ operatörü matrisin izini temsil etmektedir. Olabilirlik fonksiyonları, $\mathbf{x}$ vektörünün alınmasını sağlayabilecek θ , $\mathbf{S}$ ya da istatistiksel yaklaşım için γ_i^2 (i . sinyalin gücü), σ^2 değerleri üzerinden maksimize edilmeye çalışılarak, gözlem verilerini sağlayan en olası değerler kestirilir.

Bilindiği gibi bir fonksiyonun bir değişkeni üzerinden maksimize ya da minimize eden değer^{*}, o fonksiyonun bu değişken üzerinden alınan türevini yine aynı değişken tarafından sıfır yapan değerdir. Bu nedenle konumun ML kestirimini elde edebilmek için olabilirlik fonksiyonlarını en büyük kılan değişken değerleri bulunmalıdır.

İlk olarak, istatistiksel olabilirlik fonksiyonunu ele alınsın. Olabilirlik fonksiyonu üzerinde daha rahat çalışabilmek için formunda ufak bir değişiklik yapılması uygun olacaktır. Bunun için gözlem vektörü, $\mathbf{X}$, ayrıştırılacaktır:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{A}}(\theta)\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{a}_i(\theta)s_i \quad (2.37)$$

Böylece özilişki matrisi, i . sinyale bağlı ve i . sinyalden bağımsız iki parçaya ayrılacaktır:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^H\} = \bar{\mathbf{A}}(\theta)\bar{\mathbf{R}}_s\bar{\mathbf{A}}^H(\theta) + \gamma_i^2\mathbf{a}_i(\theta)\mathbf{a}_i^H(\theta) \\ &= \mathbf{R}_i + \gamma_i^2\mathbf{a}_i(\theta)\mathbf{a}_i^H(\theta) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Olabilirlik fonksiyonunda özilişki matrisinin tersi bulunduğundan, özilişki matrisinin tersi Woodbury eşitliğinden faydalanılarak yazılabilir (Bienvenu ve Kopp, 1983):

^{*} Türev bu iki durumun dışında fonksiyona ait bükülme noktalarında da sıfır değerini alır.

$$R^{-1} = R_i^{-1} - [1 + \gamma_i^2 a_i^H(\theta) a_i(\theta)] R_i^{-1} a_i(\theta) a_i^H(\theta) R_i^{-1} \quad (2.39)$$

Yine özilişki matrisinin determinanı:

$$\det[R] = \det[R_i] (1 + \gamma_i^2 a_i^H(\theta) R_i^{-1} a_i(\theta)) \quad (2.40)$$

Böylece olabilirlik fonksiyonu şu şekli alacaktır:

$$\begin{aligned} L_{is}(\theta) &= -N \log(\det[R_i]) - N \text{Tr}(\hat{R} R_i^{-1}) + L_i(\theta) \\ L_i(\theta) &= -N \log(\delta_i) + N(\gamma_i^2 / \delta_i) a_i^H(\theta) R_i^{-1} \hat{R} R_i^{-1} a_i(\theta) \\ \delta_i &= 1 + \gamma_i^2 a_i^H(\theta) R_i^{-1} a_i(\theta) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Artık her iki olabilirlik fonksiyonu da üzerinde rahat çalışılabilir formdadır. Bu aşamada optimum değişken değerlerinin saptanmasına başlanabilir. İlk olarak her iki yaklaşım için optimum σ^2 değerleri araştırılacaktır. Bunun için, fonksiyonların bu değişken üzerinden türevleri alınacaktır. Ancak istatistiksel olabilirlik fonksiyonu daha karmaşık olduğundan, deterministik fonksiyonda olduğu gibi direkt olarak sonuçlara ulaşılamayacak bunun yerine dolaylı bir yöntem izlenecektir.

İlk olarak deterministik olabilirlik fonksiyonu için optimum σ^2 elde edilecektir. Bu işlem sırasında S ve $A(\theta)$ matrisleri sabit olarak alınmıştır:

$$\frac{\partial L_d(\theta)}{\partial \sigma^2} = 0 \Rightarrow \sigma_{\text{opt}}^2 = \frac{1}{NM} \sum_{k=1}^N |x(t_k) - A(\theta)s(t_k)|^2 \quad (2.42)$$

Benzer işlem bu defa istatistiksel olabilirlik fonksiyonu için tekrarlanacaktır. Bu defa γ_i^2 , $a_i(\theta)$ optimum değerlerinde oldukları varsayılmıştır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilmiştir (Bienvenu ve Kopp, 1983):

$$\left. \frac{\partial L_{is}(\theta)}{\partial \sigma^2} \right|_{\gamma_i^2 = \gamma_{i,opt}^2, a_i(\theta) = a_{i,opt}(\theta)} = 0 \Rightarrow Tr(\hat{R}R_{opt}^{-1}) = M \quad (2.43)$$

İkinci aşamada deterministik yaklaşım için, olabilirlik fonksiyonunu $A(\theta)$ ve σ_{opt}^2 sabit değerleri maksimum yapan S vektörü bulunacaktır. Bu amaçla σ_{opt}^2 , $L_i(\theta)$ da yerine konulursa:

$$L_i(\theta) = -NM \log \left(\frac{1}{NM} \sum_{k=1}^M |x(t_k) - A(\theta)s(t_k)|^2 \right) \quad (2.44)$$

Yukarıdaki ifadeyi monoton bir fonksiyon olduğundan, bu fonksiyonu maksimize etmekle aşağıdaki fonksiyonu minimize etmek eşdeğerdir:

$$\min_{A(\theta), S} \left\{ \sum_{k=1}^N |x(t_k) - A(\theta)s(t_k)|^2 \right\} \quad (2.45)$$

Böylece problem en küçük kareler (Least Squares, LS) problemine dönüşmüştür. Böylece sonuç (Ziskinds ve Wax, 1988);

$$s_{opt}(t_k) = (A^H(\theta)A(\theta))^{-1} A^H(\theta)x(t_k) \quad (2.46)$$

olarak elde edilir.

İstatistiksel olabilirlik içinse, yukarıdaki işlemin karşılığı fonksiyonu γ_i^2 üzerinden maksimize etmektir ve böylece elde edilen sonuç (Bienvenu ve Kopp, 1983):

$$\left. \frac{\partial L_{is}(\theta)}{\partial \gamma_i^2} \right|_{\gamma_i = \gamma_{i,opt}, a_i(\theta) = a_{i,opt}(\theta), \sigma = \sigma_{opt}} = 0 \Rightarrow a_{i,opt}^H(\theta) R_{opt}^{-1} \hat{R} R_{opt}^{-1} a_{i,opt}(\theta) = a_{i,opt}^H(\theta) R_{opt}^{-1} a_{i,opt}(\theta) \quad (2.47)$$

Deterministik kestirim için optimum değerinin bulunması gereken son parametre $A(\theta)$ ve buna bağlı olarak problemimizin temel bilinmezi olan θ_i konumlarıdır*. Bu değerleri elde etmek için $s_{opt}(t_i)$ de (2.45) de yerine konulursa:

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^N \left| x(t_i) - P_{A(\theta)} x(t_i) \right|^2 \quad (2.48)$$

$$P_{A(\theta)} = A(\theta) \left(A^H(\theta) A(\theta) \right)^{-1} A^H(\theta)$$

$P_{A(\theta)}$, $A(\theta)$ nın uzayına ait izdüşüm matrisidir. Buradan, θ ya ilişkin ML kestirimi aşağıdaki fonksiyonunun maksimize edilmesiyle elde edilir:

$$L_d(\theta) = \sum_{k=1}^N \left| P_{A(\theta)} x(t_k) \right|^2 \quad (2.49)$$

* Dikkat edilmesi gereken bir nokta θ nın dizi konfigürasyonuna göre skaler bir değişken olmayabileceğidir. Genellik açısından problemimizle ilgili analizlerde θ nın konumla ilgili parametreleri (örn. üç boyutlu uzayı tanımlaya açıları) içeren bir vektör olduğu varsayılmıştır.

Gözlem vektörü, $\mathbf{x}(t)$, gürültü içermeseydi, vektör sinyal altuzayının üstünde olacaktı. Gürültünün varlığı kestirilen sinyal altuzayının gerçek sinyal altuzayının üstünde olmasını engellemektedir. İfadeden de görüldüğü üzere, ML kestirici manifold üzerinde gözlem vektörüne en yakın yönlendirme vektörü takımını arar. (2.49) ifadesi daha farklı bir formda da yazılabilir:

$$L_d(\theta) = \text{Tr}[\mathbf{P}_{A(\theta)} \mathbf{R}] \quad (2.50)$$

ML kestirici bir anlamda MUSIC ile çok benzerdir. Ancak ikisi arasındaki temel fark, MUSIC' in yalnızca $\mathbf{R}$ 'nin belirli özvektörleri kullanırken, ML kestirici tüm özdeğerleri kullanmaktadır:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum_{k=1}^d \lambda_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^H \\ L_d(\theta) &= \sum_{k=1}^d \lambda_k \left| \mathbf{P}_{A(\theta)} \mathbf{e}_k \right|^2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Maksimize edilecek fonksiyon doğrusal olmayan bir yapıya sahiptir ve çok boyutlu bir maksimizasyon problemi teşkil etmektedir. Bu nedenle bir çok gradyant tipi algoritmalar tek bir minimum nokta olmaması nedeniyle yetersiz kalmaktadır. Örneğin, iyi sonuç veren ancak optimum noktaya ulaşması her zaman garantilenemeyen bir algoritma olan *alternating projection* (Ziskind ve Wax, 1988) bu algoritmalarından biridir.

İstatistiksel olabilirlik fonksiyonu içinse, son olarak $\mathbf{a}_{i,opt}(\theta)$ değeri ile ilgili sonuç, bu vektörün modülünün normalizasyonla M varsayıldığı durumda bir koşullu minimizasyon problemine dönüşür:

$$\min_{a_i(\theta)} (L_i) \ni a_i^H(\theta) a_i(\theta) = M$$

Bu problem Lagrange çarpanları yöntemiyle çözülebilir:

$$\nabla_{a_i(\theta)} [L_i - \mu_i (a_i^H(\theta) a_i(\theta) - M)]_{a_{i,opt}(\theta), \gamma_{i,opt}, \sigma_{i,opt}} = 0 \quad (2.52)$$

Optimum noktada yukarıdaki ifade şu şekilde yazılabilir (Bienvenu ve Kopp, 1983):

$$\begin{aligned} \nabla_{a_i(\theta)} (L_i) &= 2\mu_i a_i(\theta) \Rightarrow \\ \mu_i &= 0 \\ \hat{R} R_{opt}^{-1} a_i(\theta) &= a_i(\theta) \end{aligned} \quad (2.53)$$

İstatistiksel yaklaşım için elde edilen sonuçlar bir araya getirilirse σ_{opt}^2 , d sinyal sayısı olmak üzere:

$$\sigma^2 = \frac{1}{M-d} \sum_{k=d+1}^M \hat{\lambda}_k \quad (2.54)$$

İstatistiksel yöntem için elde edilmiş (2.43), (2.47), (2.51), (2.52) sonuçlardan yola çıkılarak iki temel özellik ortaya çıkmaktadır:

1. Özellik: Veri özilişki matrisinin en büyük olabilirlik kestirimi olan $\hat{R}$, sinyal parametrelerinin ML kriteriyle bulunması sırasında elde edilen optimum özilişki matrisi, R_{opt} ,

ile aynı özvektörlere sahiptir. Buna ek olarak, bu özvektörlerin oluşturduğu altuzay, E_S , $(a_{1,opt}(\theta), a_{2,opt}(\theta), \dots, a_{d,opt}(\theta))$ ML kestirimi sonucu elde edilen vektörlerin gerdiği altuzayı ifade etmektedir. Kalan $M-d$ adet özvektörsel bu altuzaya diktir (Tanıtı için bkz. (Bienvenu ve Kopp, 1983)).

2. Özellik: $\hat{R}$ 'ye ilişkin E_S altuzayını geren d adet özvektör, $\hat{R}$ matrisinin en büyük d adet özdeğerine karşı düşen özvektördür. Son olarak da, gürültüye ait parametrelerin ML kestirimleri aşağıdaki şekildedir (Tanıtı için bkz. (Bienvenu ve Kopp, 1983)):

$$\sum_{k=1}^d \gamma_{k,opt}^2 a_{k,opt}(\theta) a_{k,opt}^H(\theta) = \sum_{k=1}^d (\hat{\lambda}_k - \sigma_{opt}^2) \hat{e}_k \hat{e}_k^H \quad (2.55)$$

İfadedeki $\hat{\lambda}_i$, $\hat{e}_i$ özdeğer ve ilişkin özvektörler $\hat{R}$ matrisine aittir.

Bu özelliklerden de faydalanarak istatistiksel ML sepektrum kestirimi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} P(\theta) &= A(\theta) (\hat{R} - \sigma_{opt}^2 I) A(\theta) \\ \min \{L_{is}(\theta)\} &= \log |A(\theta) P(\theta) A^H(\theta) + \sigma_{opt}^2(\theta) I| \end{aligned} \quad (2.56)$$

Görüldüğü gibi minimize edilecek fonksiyon doğrusal olmayan bir fonksiyondur. Bu nedenle fonksiyonun bir çok lokal minimum değeri olabilir. Minimum değerini bulabilmesi için, bir çok nümerik yaklaşım önerilmiştir.

2.4 Uyumluluk ve Uzamsal Düzleme

İncelememizde bu noktaya kadar ele alınan altuzay ayrışımına dayalı yöntemler için, sinyal ve gürültü altuzaylarının belirlenmesi gerekmektedir. Belirleme, ortamda bulunan sinyal sayısının bilindiği varsayımı altında yapılmaktadır*. Uzamsal özilişki matrisinin en büyük d adet özdeğerine ilişkin özvektörleri, sinyal altuzayı olarak belirlenir. Diğer $M-d$ adet gürültünün değışintisine eşit özdeğerli ve sinyal altuzayına dik olan özvektörlerse; gürültü altuzayı olarak değerlendirilir. Manifolda ait yön vektörlerinden gürültü altuzayına dik olanlarının aranan sinyal konumlarına denk düşmesi, kestirim prensibinin anafikri olmaktadır. Ancak bu durumun geçerli olabilmesi, R_S sinyal özilişki matrisinin tam rank olması ile mümkündür. Bir başka ifadeyle, sinyallerin ya tamamen ilişkisiz ya da kısmen ilişkili olması durumunda geçerlidir. Oysa ki; sinyallerin mükemmel ilişkili (uyumlu) olduğu durumlar için R_S bozuk ranklı olacaktır. Uyumluluk, ortamdaki sinyallerin birbirinin skalaca farklı ve zamanda gecikmiş kopyaları olması anlamına gelmektedir. Bu durum literatürde *çokluyol problemi* olarak adlandırılır ve pratikte oldukça sık karşılaşılan önemli bir sorundur. Ortamda uyumluluğun olması, dizi üzerine asıl sinyalle beraber, ortamda bu sinyalin yüzeylerden yansımaları sonucu oluşan kopyalarının da ulaşması gibi nedenlerden kaynaklanmaktadır. Bu durumun pratikte sıkça karşılaşılabildiği olması nedeniyle, sinyal parametrelerinin bulunmasında yol açtığı sorunların giderilebilmesi için üzerinde yoğun olarak çalışılmıştır.

Karakteristik özellikleri benzer olan M adet duyargaçtan oluşan bir dizi** ve ortamda bu dizi üzerine düşen d adet uyumlu sinyalin olduğu varsayılın. Uyumluluk varsayımı nedeniyle, ortamdaki sinyaller birbirlerinin genlik ve fazca değışmiş kopyaları olacaktır.

* Bu varsayım genelliği bozmaz. Ortamdaki sinyal sayısı literatürde var olan bir çok yöntemle kestirilebilmektedir.

** Benzerlik kavramı genelliği bozmaz. Böyle bir durumda duyargaçların kalibrasyonu ile formülasyon geçerliliğini korur.

$$s_k(t) = \alpha_k s_1(t) \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (2.57)$$

(2.57)'daki α_k , birinci sinyale göre k . sinyalin kompleks zayıflamasını ifade eder. Herhangi bir anda diziden alınan örnek şu şekilde ifade edilebilir:

$$x(t) = A(\theta)s(t) + n(t) \quad (2.58)$$

$A(\theta)$ 'yı oluşturan d adet yönlendirme vektörü, $a(\theta_i)$ 'ler, doğrusal bağımsızdır. İncelemelerin devamında ifadelerin yalınlığı için $E\{|s_k(t)|^2\} = 1$ kabul edilmiştir. Bu durumda:

$$R_s = aa^H, \quad a = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d] \quad (2.59)$$

ve,

$$R = Aaa^H A + \sigma^2 I \quad (2.60)$$

Yazım kolaylı için $A(\theta)$, A olarak yazılmıştır. (2.59) ve (2.60) ifadelerinden yola çıkarak yeni bir vektör $b = Aa$ tanımlansın. Görüleceği gibi; R 'ye ait özdeğerler, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_M = \sigma^2$ dir. Bu bb^H matrisinin rankının "1" olmasından kaynaklanmaktadır. Bu özdeğerlere ait özvektörler; β_i $i=2, 3, \dots, M$ ise, $b_i^H b = 0$ dir.

A 'nın sütunları doğrusal bağımsız olduğundan, bu sütunların doğrusal bileşimi bir başka yönlendirme vektörü olamaz. Bu nedenle, b artık bir yönlendirme vektörünü ifade edemez ve doğru yönlendirme vektörü kestirilemez. Bu vektör yalnız sinyal altuzayındadır ancak, ona

dik olan özvektörler hem sinyal hem de gürültü altuzayına ait olabilmektedir. Bu noktada sorunu gidermenin yolunun sinyal özilişki matrisi R_S 'in tam ranklı oluşundan geçtiği anlaşılmaktadır. İncelenecek algoritmalar R_S 'i, tam ranklı yapmayı amaç edinen yaklaşımların sonucu olarak ortaya çıkmıştır.

2.4.1 Uzamsal düzleme

Uzamsal özilişki matrisini tam ranklı yapmak için dizinin yapısına bir takım koşullar eklemek gerekmektedir. Uzamsal düzleme yöntemi için, duyargaç dizisi kayma ile değişmezliği sağlanacak şekilde tasarlanmalıdır. Bir başka ifadeyle; diziden seçilecek keyfi alt dizilerden elde edilecek veriler arasında yalnızca sabit bir faz farkı olmalıdır (Şekil 2.4).

M adet duyargaçtan oluşmuş bir diziden, M_0 adet elemandan oluşan altdiziler seçildiği ve altdizilerin, ölçümleri arasında sabit faz farkları olacak şekilde seçildiği varsayılın. Bu alt dizilerden l . alt dizinin ölçüm vektörü:

$$\begin{aligned} x_l(t) &= [x_{l,1}(t), x_{l,2}(t), \dots, x_{l,M_0}(t)]^H \\ &= AB_l s(t) + n_l(t) \end{aligned} \quad l=1,2,\dots,M-M_0+1=L \quad (2.61)$$

$B = \text{diag}[\gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \dots, \gamma_{1,d}]$, ve $\gamma_{l,i}$ l . alt dizi için i . sinyalin faz farkıdır. Böylece l . alt dizinin uzamsal özilişki matrisi:

$$R_l = E\{x_l(t)x_l^H(t)\} = AB_l R_S B_l^H A^H + \sigma^2 I \quad (2.62)$$

Uzamsal düzleme işlemi, L adet altdizinin herbirine ait özilişki matrislerinin ortalaması olan, ortalama özilişki matrisinin tam ranklı olacağı prensibine dayanır.

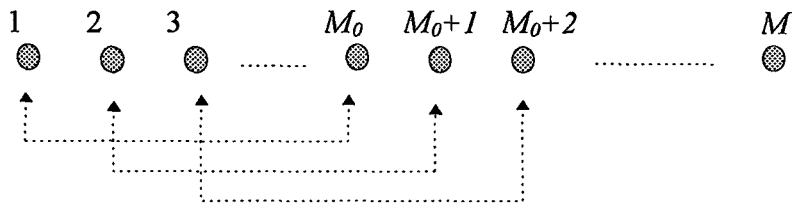
$$R_{ort} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L B_l R_s B_l^H = \frac{1}{L} C C^H$$

$$C = [a \quad B_2 a \quad B_3 a \quad \dots \quad B_L a] \quad (2.63)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{2,1} & \dots & \gamma_{1,d} \\ 1 & \gamma_{2,2} & \dots & \gamma_{1,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \gamma_{k,2} & \dots & \gamma_{1,d} \end{bmatrix} = D V$$

(2.62)'deki D matrisi tam ranklıdır. Öyleyse, R_s 'in tam ranklı olması V 'nin tam ranklı olmasına bağlıdır. İfadedeki V matrisi, bağımsız yön vektörlerinin farklarından oluşan sütunlara sahip olduğundan rankı $\min(K,L)$ 'dir. Eğer $L \geq K$ ise; R_s tam ranklıdır. $L = M - M_0 + 1 \geq K$ ise $M \geq M_0 + K - 1$ dir. Alt dizilerin K adet sinyal yönünü tesbit edebilmeleri için $M_0 = K + 1$ olmalıdır. Bu durumda gerekli olan duyargaç sayısı $M = 2K$ dir. Bu olumsuz durum, yani gerekli duyargaç sayısındaki artış, uyumluluğun önüne geçmenin bedelidir.

Elde edilen ortalama özilişki vektörü, sinyal modeli ile aynı yapıda olduğundan herhangi bir altuzay yöntemiyle sinyal parametrelerine ulaşmak mümkündür.



Şekil 2.4. Duyargaç sayısı M olan ULA için M_0 elemanlı altdizi seçimi

2.4.2 İleri-geri uzamsal düzleme

Burada ele alınacak olan yöntem, uzamsal düzlemenin getirdiği duyargaç artımı olumsuzluğunu azaltmayı amaçlamaktadır. Bu amaçla, dizilere ait veriler tersten sıralanarak geri diziler oluşturulur* (Pillaiatalls, 1989) (Şekil 2.5):

$$\begin{aligned} x_l^g(t) &= [x_{l,M_0}^*(t), x_{l,M_0-1}^*(t), \dots, x_{l,1}^*(t)] \\ &= AB_l [B_{L-1} s(t)]^* + n_l^*(t) \end{aligned} \quad (2.64)$$

(2.64)'deki (*) sembolü kompleks eşleniği ifade etmektedir. Geri alt dizi l' 'ye ait özilişki matrisi $R_{\tilde{S}} = dd^H$, $d = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d]^T$, $\delta_k = \alpha_k^* \gamma_{L-1,k}^{-1}$ olmak üzere:

$$\begin{aligned} R_l^g &= E \{ x_l^g (x_l^g)^H \} = AB_{L-1} R_{\tilde{S}} (B_{L-1})^H A^H + \sigma^2 I \\ R_{\tilde{S}} &= B_{L-1}^{-1} R_S^* (B_{L-1}^{-1})^H \end{aligned} \quad (2.65)$$

Elde edilen özilişki matrislerinin ortalaması alınırsa (2.66) ifadelerine ulaşılır:

$$\begin{aligned} R_{ort}^g &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L B_{L-1} R_{\tilde{S}} B_{L-1}^H = \frac{1}{L} EE^H \\ E &= [d \ B_1 d \ B_2 d \ \dots \ B_{L-1} d] = FV \\ F &= diag[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{d1}] \end{aligned} \quad (2.66)$$

* Herhangibir altdiziye ait her elemana bir numara verilirse, ters altdizi; referans noktasının son eleman olarak alınması ve buradan itibaren tekrar numaralandırılması sonucu elde edilir.

İfadedeki R_{ort}^g 'nin tam rank olduğu daha önceki tartışmadan da açıktır. Bu aşamada, R_{ort} ile R_{ort}^g 'nin ortalamasının gerekli duyargaç sayısını nasıl azalttığı görülebilir.

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \frac{R_{ort} + R_{ort}^g}{2} = A \left[\frac{1}{2L} (CC^H + EE^H) \right] A^H + \sigma^2 I \\ \tilde{R}_s &= \frac{1}{2L} (CC^H + EE^H) = \frac{1}{2L} GG^H \\ G &= [a \ B_1 a \ B_2 a \dots B_{L-1} a] = [DV / FV] = D[V / HV] = DG_0 \\ H &= diag(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d), \quad \xi_k = \frac{\delta_k}{\alpha_k}\end{aligned}\tag{2.67}$$

(2.67) ifadesinde G ya da G_0 tam ranklıdır ($2L \geq d$ olduğu sürece). Bu durumda, $L = M - M_0 + 1$ olduğundan $2M \geq 2M_0 + d - 2$ olacaktır. Ortamda d adet sinyal varken, $M_0 \geq d + 1$ olmalıdır. Bunun sonucu olarak $2M \geq 3d$ dir ve duyargaç sayısı M en az $\lceil 3d/2 \rceil$ olabilecektir.

Bu sonucu daha farklı bir şekilde de ifade etmek mümkündür. Bunu için, GG^H matrisinin kesin pozitif olduğunu göstermek gerekir. Herhangi bir keyfi y vektörü için;

$$y^H GG^H y = y^H VV^H y + y^H HVV^H H^H y\tag{2.68}$$

yazılsın. Kesin pozitiflik için (2.68) ifadenin pozitif olması gereklidir. Bunu göstermek için; y_0 'ın V^H 'in sıfır uzayında, $N(V^H)$, olmadığını göstermek yeterlidir. V , rankı L olan bir matris olduğuna göre sıfır uzayı $d-L$ boyutludur. Şimdi, $v_{L+1}, v_{L+2}, \dots, v_d$ 'nin sıfır altuzayına ait doğrusal bağımsız vektörler olduğu varsayılınsın. Bu vektörler şu şekilde seçilebilir:

$$v_l = [v_{1,l}, \dots, v_{L,l}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \quad (2.69)$$

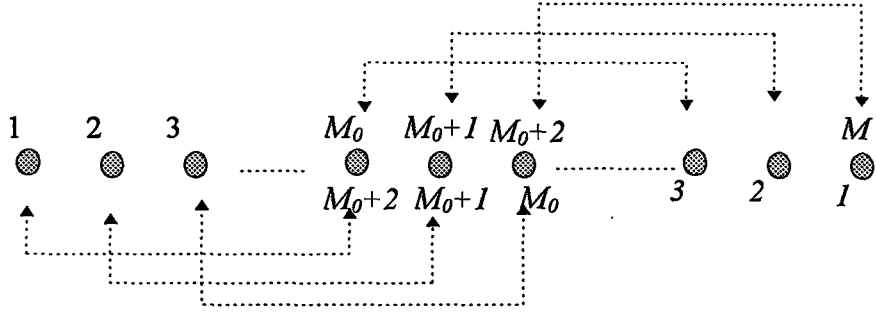
Yukarıdaki vektörün l . elemanı l 'dir ve ilk L elemanlık kısım V^H 'ın uzayındadır. Böylece v_l $l=L+1, L+2, \dots, d$ doğrusal bağımsız vektörler olarak seçilmiştir. Köşegen bir matris olan H sayesinde Hv_j çarpımı, v_l $l=L+1, L+2, \dots, d$, $i \neq j$ den de bağımsızdır. Hatta V^H ve v_l çarpımından en az bir adet sıfır olmayan terim elde edileceğinden v_j ve Hv_j , $j=1, 2, \dots, L$, de birbirinden bağımsızdır. Bu durumda, V_j 'nin böyle bir elemanı $v_{i0,j}$ olsun; $[v_j / H^H v_j]$ $j=L+1, \dots, d$ matrisinin minörü:

$$\begin{vmatrix} v_{i0,j} & \xi_0^* v_{i0,j} \\ 1 & \xi_j^* \end{vmatrix} = v_{i0,j} (\xi_0^* - \xi_j^*) \quad (2.70)$$

$\xi_i \neq \xi_j$ koşulu sağlandığında sıfırdan farklıdır. Bu durumda, $N(V^H)$ 'da bulunan v_j (2.68)'nin sağındaki ilk terimi sıfır yaparken Hv_j tüm v_j $j=L+1, L+2, \dots, d$ ve v_j 'den bağımsız yani V^H 'ın uzayında olduğundan sıfır olamayacaktır. Bu da aranan kesin pozitifliğin varlığını kanıtlar. Birbirine eşit ξ_k ların sayısı L 'yi geçmemelidir.

Pratikte böyle bir durumun oluştuğu hemen hiç görülmez. Çünkü, α_k sinyal zayıflamaları ortamın etkilerinin bir fonksiyonu iken, δ_k , dizini konfigürasyonundan kaynaklanan faz farklarının bir fonksiyonudur. Böylelikle ξ_k ların $k=1, 2, \dots, d$ farklı olması gerekir ve aynı durumun tüm k lar için oluşması hemen hemen olanaksızdır.

Bu ana kadar ortamdaki tüm sinyallerin uyumlu olduğu varsayıldı. Ortamdaki sinyallerin bir kısmının uyumlu olması durumunda da yapılan analiz geçerlidir. Böyle bir durumda model uyumlu ve uyumlu olmayan iki kısma ayrıştırılarak yukarıdaki formülasyonlara benzetilebilir (Pillaiatalls, 1989).



Şekil 2.5. Duyargaç sayısı M olan bir ULA için M_0 elemanlı ileri-geri alt dizisi seçimi

2.5 Geniş Bantlı Sinyal Parametre Kestirimi

Dağınık spektrum haberleşme, pasif sonar, akustik gibi uygulama alanlarında, sinyallere ait parametrelerin duyargaç dizileriyle kestirimi oldukça önemli bir konudur. Bu kısımda incelenecek kestiriciler optimum olmamalarına rağmen taşıdıkları bazı kritik özellikler nedeniyle önemlidirler. Bu özellikler; sinyal kaynaklarının spektrum dağılımlarına ilişkin bir ön bilgiye ihtiyacın olmaması, gürültünün en fazla ikinci dereceden istatistiksel özelliklerinin bilinmesinin yeterli oluşu ve hesap yükünün en büyük olabilirlik (Maksimum Likelihood, ML) gibi optimum bir yöntemle göre daha az olması olarak özetlenebilir. Bir fikir verebilmesi açısından, incelenecek temel yaklaşım sinyal altuzay spektrum kestirimi *minimum değişimsiz bozulmasız cevap* (Minimum Variance Distortionless Response, MVDR) yöntemi (Hayes, 1996) ile kıyaslandığında sinyal kaynaklarına ait çözünürlüğün yalnızca SNR ile sınırlı olmayışı bu yöntemi daha önemli kılmaktadır.

Buna ek olarak, bu temel yaklaşım kaynaklar ve gürültü doğru olarak modellenenirse, yeterli sayıda ölçümle asimtotik olarak kararlıdır (Bkz. Bölüm.4). SNR eşiğin üstünde olsa dahi *Cramer Rao alt sınırı* (CRLB) sağlanabilmektedir.

Klasik olarak geniş bantlı sinyal parametre kestirimi şu temel adımlardan oluşmaktadır: İlk olarak, geniş bant dizi ölçüm vektörleri kesişmeyen dar bantlı frekans bölgelerine ayrılır.

Daha sonra, her dar bant bölge için bağımsız olarak işlem yapılır ve herbirine ait sıfır spektrumu (aranan parametrelerin tepeler halinde gösterildiği) oluşturulur. Son adımda ise, elde edilen tüm spektrumlar tek bir geniş bant spektrumu elde edilmek üzere bir araya getirilir. Bu yöntem, *dar bant ayrışım yöntemi* olarak adlandırılır ve dar bantlı sinyal parametre kestirimi için kullanılan yöntemlerin, her bir dar bantlı bölge için kullanılabilmesini olanaklı kılar.

Ancak dar bant ayrışımı fikrinin bazı sakıncaları da vardır. Geniş bantlı bir sinyalin enerjisi spektrumda yayıldığından, dar bant bölgelerinde sinyale ait enerjinin yalnız bir kısmı görülebilecektir. Bu da, ilgili bölgedeki sinyal gürültü oranının (Signal to Noise Ratio, SNR) düşük olması anlamına gelmektedir. SNR'nın düşük olması ise kestirim performansını (ortalama değerini ve değişimini) olumsuz olarak etkiler. Buna ek olarak, sinyallerin uyumlu olması durumunda elde edilecek özilişki matrisler benzer olmayacak, bu nedenle; *uzamsal düzleme* gibi bir takım ön işlemler gerekecektir. Böyle bir durumda, kullanılacak olan duyargaç sayısının performansın kaybedilmemesi için artırılması kaçınılmaz olacaktır. Böylelikle; işlem hacmi istenmeyen bir şekilde aşırı olarak artacaktır.

Bu olumsuzluklar *frekansta düzleme* kavramının ortaya atılmasıyla büyük ölçüde ortadan kaldırılmıştır (Wang ve Kaveh, 1985). Uyumlu sinyal altuzay yöntemi (Coherent Signal Subspace, CSS) olarak adlandırılan bu yöntemde, bağımsız dar bant bölgeleri *odaklama matrisi* olarak adlandırılan dönüşüm matrisleriyle seçilen tek bir dar bant bölgeye sıkıştırılmaktadır. Böylece elde edilen ortalama özilişki matrisi uyumluluğun olumsuz etkisinden uzaklaşmış ve aynı zamanda SNR'ı yükseltmiş olmaktadır. Ancak yöntemin temel noktası olan *odaklama matrislerinin* elde edilebilmesi için, aranan parametrelerle ilgili bir ön kestirime ihtiyaç vardır. Bu kestirim daha az hassas ve pratik olan uzamsal periyodogram (periyodogram için bkz. (Hayes, 1996)) gibi yöntemlerle sağlanabilir. Ön kestirim sonuçları gerçek değerlere yakınsa, yani gerçek konumlar ön kestirim sonuçları civarındaysa CSS çok

etkili bir yöntem olmaktadır. Ancak tersi söz konusuysa kestirimin asimtotik kayması (bias) artmaktadır (Wang ve Kaveh, 1985).

Diğer taraftan, odaklama yapmanın tek yolu *odaklama matrislerinin* kullanımı değildir. Bir ön kestirime ihtiyaç duymadan yalnızca duyargaçların konumlarında değişiklik yapmak suretiyle de odaklama yapılabilir. Ancak söz konusu durum yalnız ULA konfigürasyonu için geçerlidir (Chen ve Yu, 1991). Konum değiştirme işlemi ilk anda uyandırdığı izlenimin aksine sanal olarak yapılır. Dizi uzamsal domende örnekleme yaptığından, ölçüm verilerinden faydalanılarak duyargaç bulunmayan noktalardaki veriler elde edilmeye çalışılır. Her frekans bölgesi için, ileride gösterileceği gibi, duyargaçların arasındaki uzaklığın farklı olması gerekmektedir. Bu durum, duyargaçların mekanik olarak konumlarının neden değiştirilemeyeceğini ve işlemin neden sanal olduğunu açıkça ortaya koymaktadır. Bir sanal dizi elde etmek için, eldeki örnek değerlerinin bir fonsiyonun bilinen noktaları olduğu varsayıp fonsiyon tamamlama (interpolation) yöntemleriyle istenilen noktalardaki veriler elde edilmeye çalışılır. Bu işlemin performansı ise ortamın gürültüsünden etkilenmektedir*. Ayrıca fonsiyon tamamlama, bir alçak geçiren süzgeçleme işlemi (Schafer ve Rabiner, 1973) olduğundan, yüksek uzamsal frekanslarda (geniş açılı konumlarda) bulunan sinyaller için kestirimin kayması artmaktadır. Bu ikinci sakıncanın önüne geçmek için veriler uzamsal frekanta alt bölgelere kaydırılır.

Tüm bahsedilen geniş bant yaklaşımları dizini ilgili frekans bölgesindeki yönlendirme vektörünün tek boyutlu olmasının işlemlere verdiği kolaylığı kullanmaktadır. Ancak, geniş bantlı sinyal ortamında, geniş bant ortamının özelliklerini içeren bir modelle frekans ayrışımı tekniğine gerek kalmadan da işlem yapılabilir (Buckley, 1988). Bu yeni yaklaşımda, tek bir uzamsal-zamansal özilişki kestirimi yapılır. Böylelikle sinyalin enerjisi en etkin şekilde

* Gürültü, uzamsal domende beyaz bir rasgele süreç olduğundan, ölçüm yapılan noktalar arasında tamamlama işlemini sağlayacak bir bağıntı yoktur. Bu nedenle, sinyallere ait ölçülen değerlerin tamalanmasında olumsuz bir etmendir.

kullanılmış olacaktır. Öte yandan, bu yaklaşım işlem yükü açısından diğer modele nazaran daha yüküldür.

Duyargaçların çıkışına eklenen zaman geciktirmeleri ile farklı frekanslı tek renkli kaynakların (tek frekanslı) gözlem uzayında daha da ayrılarak kolayca ayırt edilebilir hale gelirler. Bu nedenle geniş bantlı uygulamalarda çoğu zaman (her zaman gerekli olmayabilir) hem uzamsal hem de zamansal örnekleme yapılır*.

L adet gecikme elemanlı ve M duyargaçlı bir yapı için KL boyutlu konsantre yönlendirme vektörü:

$$\mathbf{a}_q^{GB}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{L}} [1, e^{-j\omega T_d}, \dots, e^{-j\omega(L-1)T_d}]^T \otimes \mathbf{a}_q^{DB}(\omega) \quad (2.71)$$

Yukarıdaki ifadede, $\mathbf{a}_q^{DB}$ dar bant yönlendirme vektörü, $\otimes$ ise Kronecker Çarpımını sembolize etmektedir. Geciktirme sayısı $L > 1$ için, T_d gecikmesi ve $\omega \in \Omega$ 'da, $[\omega T_d] \bmod(2\pi)$ belirsizlik oluşturmayacak şekilde seçilirler. Gözlenen frekans bantı, Ω ile gösterilmiştir. Böylelikle yukarıda ifade edilmiş olan L elemanlı Fourier vektörü belirsizlik taşımaz. Bir başka ifadeyle ωT_d çarpımının aynı değeri veren birden fazla çifti bulunamaz. Bazı özel durumlar, örneğin sinyal konumlarının belirli bir bölgede bulunması gibi, T_d üzerindeki bu sınırlamayı esnetebilir.

Görüldüğü gibi, geniş bantlı sinyal ortamı iki farklı modelle modellenebilmektedir. Geniş bantlı parametre kestirim yöntemleri incelenirken, bu iki modeli ve birbirlerine göre farklı özellikleri ortaya konmaya çalışılacaktır.

* Her ne kadar sinyaller dar bantlı kabul edilseler de, genellikle bir frekans bölgesini kapsarlar. Bu band genişliği, yön vektörlerinde belirsizliklere neden olacak kadar büyükse bu durumda zaman geciktirmeleri kullanılarak bu belirsizliğin önüne geçilmeye çalışılır.

2.5.1 Uyumlu sinyal altuzay yaklaşımı ve odaklama

M adet keyfi olarak yerleştirilmiş duyargaçtan oluşan bir dizi üzerine, d adet sinyalin düştüğü varsayılın. Bu durumda kaynak sinyal vektörü şu şekilde olacaktır:

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_d(t)]^T \quad (2.72)$$

Duyargaçlardan yapılan gözlem süresince, T_0 , sinyaller durağan ve sıfır ortalamalı olarak kabul edileceklerdir. Kaynak spektrum yoğunluk matrisi, $P_s(f)$, $f \in F_+ = [f_0 - BG/2, f_0 + BG/2]$ ve $F_- = [-f_0 - BG/2, -f_0 + BG/2]$ 'dir. Bu matris, pozitif yarı kesin *hermitian* matristir ve bilinmemektedir. CSS yönteminde, dar bant uzamsal özilişki matrislerinin frekans domeni ortalaması alınır. Örneğin; $d=2$ ve $s_2(t) = s_1(t - t_0)$ olsun. Bu durumda:

$$R_s = E\{s(t)s(t - \tau)\} = \begin{bmatrix} R_1(\rho) & R_1(\rho - t_0) \\ R_1(\rho - t_0) & R_1(\rho) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

İfadede $R_1(\rho)$, $s_1(t)$ 'nin özilişkisidir.

$$R_s(\rho) \xrightarrow{F} P_s(f) = \begin{bmatrix} P_1(f) & P_1(f)e^{-j2\pi ft_0} \\ P_1(f)e^{j2\pi ft_0} & P_1(f) \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Bu matris tekil bir matristir ($P_1(f)$ 'e bağlı olmaksızın). Ancak $t_0 \neq 0$ olmadığı sürece

$$\int P_s(f)df = R_s(0) = \begin{bmatrix} R_I(0) & R_I(t_0) \\ R_I(t_0) & R_I(0) \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

bir çok pratik uygulamada tekil olmayan bir matristir.

CSS'in felsefesi bu son ifadede yatmaktadır. Gürültünün kaynaklardan bağımsız ve keyfi bir spektral yoğunluk matrisinin olduğu kabul edilsin, bu matrisin bir çarpan farkıyla bilindiği varsayılırsa dizi çıkışına ait güç spektral yoğunluk matrisi:

$$P_x(f) = A(f)P_s(f)A^H(f) + \sigma_n^2 P_n(f) \quad (2.76)$$

Dizi çıkış vektörü, zaman domeninde, çakışmayan dar bantlı bölgelere ayrılınsın (T_{DFT} zaman aralıkları boyunca ayrık Fourier dönüşümüyle) bu durumda, dar bant bileşenler birbirleriyle ilişkisiz olacaklardır. Bunun sonucunda f_j bileşeni için;

$$\begin{aligned} E\{x(f_j)x^H(f_j)\} &= cov(x(f_j)) \cong \frac{1}{T_{DFT}} P_x(f_j) \\ &= \frac{1}{T_{DFT}} A(f_j)P_s(f_j)A^H(f_j) + \frac{\sigma_n^2}{T_{DFT}} P_n(f_j) \quad j = 1, 2, \dots, J \end{aligned} \quad (2.77)$$

Gözlem süresinin, T_{DFT} sürelik K adet parçaya ayrıldığı varsayılınsın. T_{DFT} , duyargaçları takiben yer alan gecikmelerin toplam süresidir. Bir dizi ölçümü duyargaçlara ait T_{DFT} sürelik veriyi ifade eder. Bu durumda k . ölçümden elde edilen j . dar bant bileşeni, $x_k(f_j)$ $k=1, 2, \dots, K$ ve $j=1, 2, \dots, J$ olarak gösterilebilir.

Lemma: $A(f_j)$, $j=0,1,2,\dots,J$, rankı d olan bir matris olmak üzere, tekil olmayan bir matris vardır ki; aşağıdaki dönüşümü sağlar.

$$T(f_j)A(f_j) = A(f_0) \quad j = 1,2,\dots,J \quad (2.78)$$

Bu lemmanın tanıtı basittir. $A(f_j)$ ve $A(f_0)$ rankı d olan matrislerdir. O halde $M \times (M-d)$ boyutlu $B(f_j)$ ve $B(f_0)$ matrisleri yardımıyla $M \times M$ boyutlu tam ranklı $\begin{bmatrix} A(f_j) & B(f_j) \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} A(f_0) & B(f_0) \end{bmatrix}$ matrisleri yazılabilir. Bu durumda dönüşüm matrisi $T(f_j)$ için seçim açıkça;

$$T(f_j) = \begin{bmatrix} A(f_0) & B(f_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(f_j) & B(f_j) \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.79)$$

olacaktır. Dikkat edileceği gibi, $T(f_j)$ seçimi tek değildir. $T(f_j)$ nin bu seçimi dönüşüm matrisi olarak kullanılırsa $y(f_j) = \sqrt{T_{\text{DFT}}} T(f_j) x(f_j)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\sum_{j=1}^J w_j \text{cov}(Y(f_j)) = A(f_0) \left[\sum_{j=1}^J w_j P_s(f_j) \right] A^H(f_0) + \sigma_n^2 \sum_{j=1}^J w_j T(f_j) P_n(f_j) T^H(f_j)$$

$$R = A(f_0) R_s A^H(f_0) + \sigma_n^2 R_n$$

$$R = \sum_{j=1}^J w_j \text{cov}(Y(f_j)) \quad (2.80)$$

$$R_s = \sum_{j=1}^J w_j P_s(f_j)$$

$$R_n = \sum_{j=1}^J w_j T(f_j) P_n(f_j) T^H(f_j)$$

İfadede; w_j normalize edilmiş ağırlıklardır ve j . frekans bantındaki SNR ile orantılıdır ($w_j=1$ alınabilir). Yukarıdaki ifadede, her dar bant frekans bileşeni f_0 merkez frekansına ötelenmiş ve karesel beklendik değerinin (covariance) ağırlıklı ortalaması alınmıştır. Böylelikle, ortalama dar bantlı özilişki fonksiyonu elde edilmiştir. Bu özilişki matrisinin örnek üzerinde yapılan tartışmadan yola çıkılarak tam ranklı olduğu söylenilebilir. Bu matrisin özdeğer ayrışımından elde edilen en büyük d adet özdeğere ilişkin özvektör sinyal altuzayını ifade ederken, diğer $(M-d)$ adet σ_n^2 değerli özdeğerlere ilişkin özvektör gürültü altuzayını ifade eder. Bu durumda;

$$A(f_0)R_s A^H(f_0)E_n = 0 \quad (2.81)$$

olacak ve R_s tam ranklı olduğundan Gürültü altuzayı $A(f_0)$ a dik olacaktır.

$$A(f_0)E_n = 0 \quad (2.82)$$

$T(f_j)$ dönüşüm matrisi f_j frekansındaki veriyi f_0 frekansına dönüştürür. Bu anlamda geniş bantlı veriyi bir dar bant bölgeye sıkıştırdığından *odaklama matrisi* olarak adlandırılır. Bu matrisin oluşturulabilmesi için, sinyal konumlarına ilişkin bir ön kestirime ihtiyaç vardır. Bu amaçla, tüm dar bant bölgeleri için uzamsal verinin periodogramı hesaplanır. Ancak periodogram düşük çözünürlük sağladığından birbirine yakın kaynaklar ayırtedilemez ve yanlış kestirimler yapılabilir.

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{d1}$ bu ön kestirimlere ilişkin sonuçlar olsun. Bu durumda, $A_{\beta}(f_j)$ $M \times d1$ boyutlu j . bölgeye ilişkin ön kestirim konum matrisidir. Böylece $T(f_j)$ kestirimi:

$$\hat{T}(f_j) = [A_p(f_0) \ B(f_0)] [A_p(f_j) \ B(f_j)]^{-1} \quad (2.83)$$

$B(f_0)$ ve $B(f_j)$ için keyfi seçimler yapılabilir. Aşağıda iki örnek seçim verilmiştir:

1. Seçim: Odaklama matrisinin keyfi seçimlik kısımları, $B(f_0)$ ve $B(f_j)$, f_0 ve f_j bölgelerinde $M \times (M-dl)$ boyutlu, sütunları birbirinden farklı kestirim harici yön vektörlerinden oluşan matrisler olarak seçilebilir. Böyle bir seçim daha önce algılanmamış kaynakların algılanma şansını arttırabilir.

2. Seçim: Bu defa seçim, $B^T(f_0)$ ve $B^T(f_j) = [0_{dl \times (m-dl)} \ I_{M-dl}]$ olarak yapılırsa $M \times M$ boyutlu matrisin tersinin elde edilmesi sırasındaki işlem hızının artması sağlanır.

Dönüşüm matrisinin kestiriminin en basit şekli, şayet tüm sinyal konumları bir β nın civarında ise gerçekleşir. Böyle bir durumda, $a_{ip}(f_j)$ $A_p(f_j)$ vektörünün i . elemanı olmak üzere $\hat{T}(f_j)$ köşegen bir matris olur:

$$T(f_j) = \begin{bmatrix} a_{ip}(f_0)/a_{ip}(f_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mp}(f_0)/a_{mp}(f_1) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Uygun uzamsal ön süzgeçlemeyle, uzamsal domende öbeklenmiş sinyallerin gruplara ayrılması ve her bir grup için bu tür basit dönüşüm matrislerinin oluşturulması mümkündür. Böylece daha genel durumlar için de bu basit yapıdaki matris formu kullanılabilir.

2.5.2 Uyumlu sinyal interpolasyonu

CSS'in olumsuz yanı bir ön kestirime ihtiyaç duyulmasıydı. Bu kestirim sırasında yapılan hatalar yöntemin performansını etkilemektedir. Ancak bir ULA için odaklama yapmanın tek yolu frekans dönüşümü değildir. Odaklamayı bir ön kestirime ihtiyaç olmadan gerçekleştirmek mümkündür. Bu alternatif yöntemge geçmeden önce bir ULA'nın frekansa bağımlı yönlendirme vektörünü ifade etmek uygun olacaktır:

$$\mathbf{a}(f_j, \theta_g, b) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_j b \sin \theta_g / c} & \dots & e^{-j\omega_j (M-1)b \sin \theta_g / c} \end{bmatrix}^T \quad (2.85)$$

(2.85) ifadesinde, b , duyargaçlar arasındaki uzaklığı belirtmektedir ve uzamsal belirsizliğin oluşmaması için $b \leq \lambda_{\min}/2$ ($\lambda_{\min}$, en küçük dalga boyu) olarak seçilmiştir. Amaç; $\mathbf{A}(f_j, \theta_g)$ yönlendirme matrisinin $\mathbf{A}(f_0, \theta_g)$ ye dönüştürülmesidir. Bunu yapabilmenin yolu ise duyargaçlar arasındaki mesafeyi b , uygun şekilde değiştirmektir:

$$\mathbf{a}(f_j, \theta_g, b_n) \xrightarrow{b_n = \frac{f_0 b}{f_n}} \mathbf{a}(f_0, \theta_g, b) \quad (2.86)$$

Bu işlem $T(f_j) \mathbf{A}(f_j, \theta_g, b)$ ile özdeştir. Bir başka deyişle, odaklama matrislerinin yaptığı işi duyargaçlar arası uzaklıkla oynanarak yapabilmek mümkündür (Hwang Chen ve Her Chen, 1993).

Pratikte, duyargaç aralıklarının daha önce de tartışıldığı gibi, her dar bant frekans bölgesi için değiştirilebilmesi mümkün değildir. Bu nedenle, uzamsal domende elde edilen örnek değerleri bir fonksiyonun örnek noktaları kabul edilerek, örnekler arasındaki bilinmeyen noktaların değerleri fonksiyon tamamlama (interpolation) yöntemleriyle kestrilmeye çalışılır.

Her dar bant frekans bölgesi için bir b_n değeri söz konusu olacağından J adet farklı frekans bölgesi için bir sanal dizi oluşturulmuş olur. Fonksiyon tamamlama yöntemi olarak bir çok farklı yöntem söz konusu olabilir. Bunlar arasında; yaklaşık optimum olan yöntem *küçük spline*, *Lagrange tamamlama yöntemi* ya da *FFT yöntemi* sayılabilir.

Uyumlu sinyal interpolasyonu (Coherent Signal Interpolation, CI), ile CSS in önemli bir olumsuzluğu ortadan kalkmıştır. Ancak bu yeni tekniğin de bir takım olumsuzlukları vardır. Öncelikle bu teknik yalnızca ULA konfigürasyonu için geçerli olabilmektedir. Ayrıca, odaklama işlemi CSS için seçilmiş herhangi bir dar bant bölgeye yapılabilirken, CI da en alt frekans bölgesine yapılmak zorundadır. Bunlara ek olarak, Fonksiyon tamamlama işlemi, bir alçak geçiren süzgeçleme işlemi olduğundan, yüksek uzamsal frekanslarda (geniş geliş açılarında) büyük hatalar oluşacaktır. Bu son kısıtlamanın basit bir yöntemle önüne geçmek mümkündür (Hwang Chen ve Her Chen, 1993). Bu yöntem esasını modülasyon prensibinden almaktadır. Basit olarak, yüksek uzamsal frekans bileşenleri uygun bir kaydırmayla daha alçak bölgelere taşınarak alçak geçiren süzgeçlemenin etkisinden kurtarılabilir, fikriyle yola çıkmıştır.

Uzamsal kaydırma için örneğin periyodogramla n adet açı $\{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n\}$ $n \ll d$, kestirilmiş olsun. Bu durumda $\hat{\theta}_0$ kaydırma açısı aşağıdaki şekilde seçilebilir:

$$\hat{\theta}_0 = \sin^{-1} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i) \right\} \quad (2.87)$$

Bu durumda her frekans bölgesi ULA için yönlendirme vektörü ifadesinin her iki tarafı p . duyargaç için $e^{j2\pi f_j(p-1)b \sin(\hat{\theta}_0)/c}$ ile çarpılarak $2\pi f_j(p-1)b \sin(\hat{\theta}_0)/c$ kadar kaydırılır. Bu durumda j . frekans bölgesi için ölçüm vektörünün p . elemanı:

$$\mathbf{x}_p(f_j) = \sum_{g=1}^d \mathbf{s}_g(f_j) e^{-j2\pi f_j(p-1)b(\sin\theta_g - \sin\hat{\theta}_0)/c} + \mathbf{n}_p(f_j) e^{j2\pi f_j(p-1)b \sin\hat{\theta}_0/c} \quad (2.88)$$

$$-90 \leq \theta_g \leq 90 \Rightarrow \sin\theta_g - \sin\hat{\theta}_0$$

Böylelikle, yukarıda ki ifadeden de açıkça görüleceği gibi, geniş açılar daha dar bir bölgeye taşınmıştır. Bundan sonra CI güvenle uygulanabilecektir. CI ile dönüştürülmüş sinyal:

$$\mathbf{x}_p^{CI} = \sum_{g=1}^d \mathbf{s}_g(f_j) e^{-j2\pi f_0(p-1)b(\sin\theta_g - \sin\hat{\theta}_0)} + \mathbf{n}_p(f_j) e^{-j2\pi f_0(p-1)b \sin\theta_0/c} \quad (2.89)$$

Bu dönüşümün ardından frekans bölgeleri tek bir bölgeye odaklanmış olmaktadır. Aranılan sinyal parametrelerinin kestiriminden önce dönüştürülmüş verilerde dar bir açı bölgesine sıkıştırılmış olan veri yeniden eski haline getirilmelidir. Bunun için veri uzamsal frekansta eski yerine aynı çarpanla, $e^{j2\pi f_j(p-1)b \sin(\hat{\theta}_0)/c}$, her frekans bölgesi için kaydırılır. Bu işlemin ardından sonuç:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p(f_j) &= \sum_{g=1}^d \mathbf{s}_g(f_j) e^{-j2\pi f_0(p-1)b \sin\theta_g/c} + \mathbf{n}_p(f_j) \\ \mathbf{x}(f_j) &= A(f_0, \theta) \mathbf{S}(f_j) + \mathbf{n}(f_j) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Bu sonuç, CSS in amaçladığı sonuçtur.

2.5.3 Geniş bantlı sinyal altuzay kestirimi

Gerçekte, tüm duyargaç dizilim uygulamalarında, sinyaller dar bantlı ya da geniş bantlı da olsa sıfır olmayan bant genişlikleri söz konusudur. Bu durum verinin dar bantlı bileşenlere ayrılması durumunda dahi söz konusudur. Genel olarak ayrık Fourier dönüşümü (DFT), basit olarak bir bant geçiren süzgeç takımıdır. Her süzgece ait ana ve yan loblar bulunmaktadır. Bu loblar süzülen sinyalin bant genişliğinin sıfır olmasını önlemektedir. Her sıfır olmayan sinyal bant genişliği için bir $\{a_\theta(\omega); \omega \in \Omega_\theta\}$ kümesi geniş bant gözlem uzayını gerer ve bu nedenle boyut terimi anlamını kaybeder. Başka bir ifadeyle $a_\theta(\omega)$, θ 'ya bağlı tek boyutlu bir yönlendirme vektörü olmanın ötesinde ω ya da bağlı bir kümeyi ifade etmektedir. Ancak çoğu uygulamada dar bant ayrışımı işlemlerinde rank-1 kaynak gösterimi uygun yeterli olmaktadır. Yönlendirme vektörünün bu şekildeki etkin kullanımının yeterliliğinde etkin boyutun "1" olduğu söylenir.

$\{a_\theta(\omega); \omega \in \Omega_\theta\}$ gergisinin rank-1 modelle gösteriminin yeterli olmadığı durumlarda ise gerginin boyutu birden fazla olacaktır. Her ne kadar kümenin eleman sayısı sonsuz gibi görünse de gergiyi temsil eden vektör sayısı $M \times L$ den (yönlendirme vektörünün eleman sayısı) küçüktür. Bu da gerginin düşük ranklı olduğunu gösterir. Bu durum yeni bir modelin oluşturulmasını olanaklı kılmaktadır. Yeni model *geniş bant kaynak gösterim uzayı* olarak adlandırılır ve her konum için yeterli yapılandırılmış bir gözlem altuzayı $\{a_\theta(\omega); \omega \in \Omega_\theta\}$ kümesini en iyi temsil eden vektörlerle tanımlanır.

Olayı daha açık bir şekilde ifade edebilmek için, $s_\theta(t)$ skaler rasgele sürecinin θ da sanal bir kaynak olduğu varsayalım. Şekil 2.6'da bu kaynağın ideal gözlemi ifade edilmiştir. Buna göre, kaynak ölçüm vektörü $S_\theta(t)$ ($M \times L$ boyutlu) olsun. Bu vektör doğrusal olmayan aralıklarla rasgele sürecin $M \times L$ adet örneğini içerir. Yarı kesin pozitif kaynak özilişki matrisi bu durumda:

$$R_\theta = E\{S_\theta(t)S_\theta^H(t)\} = \int_{\Omega_\theta} \rho(\omega) a_\theta(\omega) a_\theta^H(\omega) d\omega \quad (2.91)$$

olarak yazılabilir. Özilişki ifadesinde görülen $\rho_\theta(\omega)$, $S_\theta(t)$ nin güç spektrumudur ve düz varsayılacaktır. Amaç $\{a_\theta(\omega); \omega \in \Omega_\theta\}$ kümesini gösterecek bir altuzay elde etmektir. λ_l ve γ_l R_θ nin özdeğer ve ilişkin özvektörleri olsun ve özdeğerler büyükten küçüğe sıralanarak indislensin. Bu durumda $S_\theta(t)$ dik açılımı:

$$S_\theta(t) = \sum_{j=1}^{ML} s_{\theta,j}(t) \gamma_{\theta,j} \quad (2.92)$$

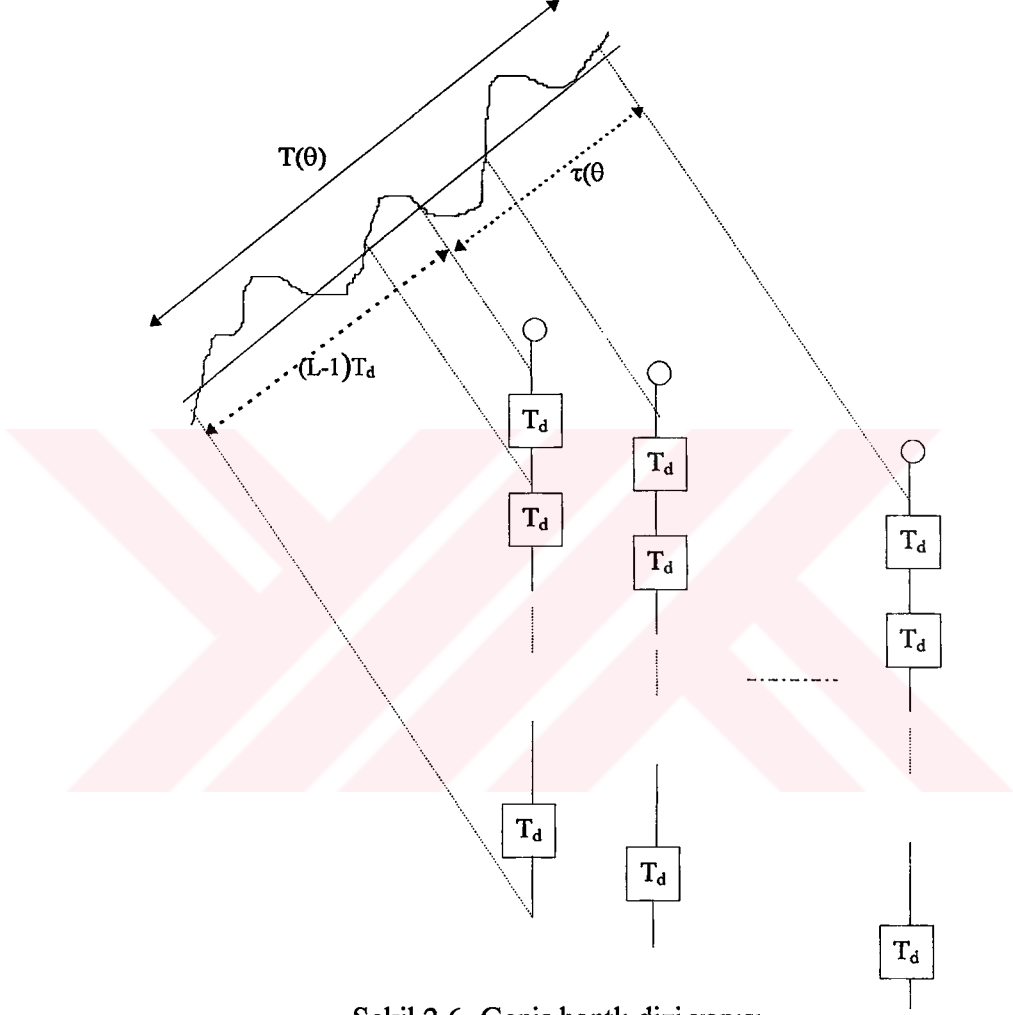
$$s_{\theta,j}(t) = \gamma_{\theta,j}^T S_\theta(t)$$

En baskın D_θ adet özdeğer alınırsa seçilen altuzay $\varepsilon_\theta(D)$ hatası ile kümeyi temsil eder:

$$s_\theta(D) = \sum_{j=D+1}^{ML} E\{|s_{\theta,j}(t)|^2\} = \sum_{j=D+1}^{ML} \lambda_{\theta,j} \quad (2.93)$$

D_θ istenilen küçüklükte hatayı sağlıyorsa $S_\theta(t)$ nin etkin boyutu D_θ 'dır denilir. Geniş bantlı kaynak gösterim uzayı, baskın özdeğerlere ilişkin özvektörlerin gerdiği uzaydır. Nümerik olarak gösterilmiştir ki; bazı indislerinden sonra özdeğerlerin değeri ani olarak düşmektedir ve bu indis değerleri gözleme zamanı (T_θ) ve bant genişliğinin çarpımına eşittir. T_θ dizinin yapısı tarafından belirlenir. Bu çarpım kaynak gözlem uzayının etkin boyutunu vermektedir (Buckley, 1988). L nin düşük olduğu durumlarda bu değer gözlem uzayının boyutundan, $M \times L$, çok daha düşüktür.

Eğer kaynakların kompozit gözlemleri, (birden fazla sinyal varken yapılan gözlemler), temsil eden altuzayın boyutu $M \times L$ den küçükse bu durumda altuzay teknikleriyle kestirim yapmak mümkün olabilecektir.



Şekil 2.6. Geniş bantlı dizi yapısı

2.5.3.1 Temel geniş bantlı sinyal altuzay konum-spektrum kestirici

Uzamsal-zamansal $M \times L$ boyutlu gözlem vektörü, X , ele alınsın. Bu vektör, $x(n)$, $x(n-1)$, ..., $x(n-1T_D)$ duyargaç ölçüm vektörlerinin ardarda bir vektör olacak şekilde dizilmesinden

oluşturmuştur. Veri, kısmen ilişkili hatta uyumlu sinyallerden oluşabilmektedir. Gürültünün uzamsal-zamansal özilişki matrisinin bir çarpan farkıyla bilindiği varsayılırsa bu durumda uzamsal-zamansal özilişki matrisi:

$$R_x = R_s + \sigma^2 R_n \quad (2.94)$$

İfadedeki R_s , sinyallere ilişkin özilişki matrisini sembolize etmektedir ve düşük ranklı ve etkin rankı D varsayılmıştır. İnceleme sırasında kolaylık olması açısından $R_n = I$ olarak alınmıştır*. Özilişki matrisi R_x 'in özdeğerlerinin büyüklük sırasıyla indislendiği varsayılınsın. Bu durumda, $\lambda_i = \sigma_n^2$, $i = D+1, \dots, M \times L$ olacaktır. Daha önceki incelemelerde olduğu gibi özdeğerlere ilişkin özvektörleri sinyal ve gürültü altuzayları şeklinde ayırmak mümkündür:

$$\begin{aligned} E_s &= [e_1, e_2, \dots, e_D] \\ E_n &= [e_{D+1}, e_{D+2}, \dots, e_{M \times L}] \end{aligned} \quad (2.95)$$

E_s ve E_n sinyal ve gürültü altuzaylarını göstermektedir. Sinyal ya da gürültü altuzaylarından faydalanarak parametre kestirimi yapabilmek için gürültüsüz veri özilişki matrisinin düşük ranklı olması gerektiği açıktır. Bu sinyal özilişki matrisinin aşağıdaki formda olması gerektiği anlamına gelmektedir:

$$R_s = V P_s V^H \quad (2.96)$$

* Bu kabul, yukarıda gürültü özilişki matrisi için yapılmış varsayım doğrultusunda genelliği bozmamaktadır. Çünkü, uygun matris işlemleriyle bu matrisi birim matris formuna bir çarpan farkıyla getirmek, farklı bir ifadeyle; uzamsal ve zamansal olarak ilişkisizlendirmek mümkündür (Buckley, 1988).

İfadede, V , $(KL \times D)$ boyutlu bir matristir ve sütunları sinyal kompozisyonu gösteren altuzayın taban vektörleridir. Yine aynı ifadede P_S ise, modal sinyallerin özilişki matrisidir. Bu aşamada R_S için öne sürülen bu şartın gerçekleşmesinin hangi koşulları gerektirdiğini tartışmak gerekmektedir.

Bir θ konumu için şekildeki duyargaç dizisinin zamansal örüntüsü, $\tau(\theta)$:

$$\left| \max\{\tau_{i,\theta}; i = 1, 2, \dots, M\} - \min\{\tau_{i,\theta}; i = 1, 2, \dots, M\} \right| \quad (2.97)$$

$\tau_{i,\theta}$, i . duyargacı referans noktasına göre zaman gecikmesinin ifade eder. Sinyal bant genişliği ve çalışma bantının kesişimi Ω_θ olsun. Bu durumda gözlenen sinyal zaman-bant genişliği çarpımı $\Omega_\theta/2\pi(\tau(\theta) + (L-1)T_d)$ olacaktır. Eğer T_d Nyquist kriterine göre seçilirse, $(\Omega_\theta/2\pi)T_d \leq 1$, çarpımı üstten $(\tau(\theta)/T_d + L-1)$ ile sınırlanacaktır. Dolu bir dizi* için, $\tau(\theta)/T_d$ M ile üstten sınırlıdır. Küçük $\tau(\theta)$ değeri için (dizi normaline yakın geliş doğrultuları) küçük L değerleri için dahi $(\tau(\theta)/T_d + L-1) < M \times L$.

Bu ana kadar ortamda tek bir sinyalin varlığının üzerinde konuşuldu. Şimdi ortamda p adet sinyalin $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d\}$ bulunduğu varsayılırsa, sinyal altuzay spektrum kestiricisini kullanabilmek için aşağıdaki koşulun gerçekleşmesi yeterlidir:

$$D_{\text{top}} = \sum_{k=1}^d D_{\theta_k} \langle M \times L \rangle \quad (2.98)$$

* θ yönünden gelen bir sinyal için, zaman \ band genişliği çarpımının ML ye eşit olduğu durumdur. Bu durumda sinyal en az $\Omega_\theta \tau(\theta)/\pi$ pozisyonda örneklenmelidir.

Uzamsal ve zamansal Nyquist örnekleme yapıldığı ve her $D_{\theta k}$ nın karşı düşün zaman-bant genişliği çarpımına eşit olduğu varsayılırsa D_{top} için üst sınır:

$$D_{top} = d(M + L) \quad (2.99)$$

olacaktır. Bu sınır üstteki koşulla birleştirilirse verilmiş bir M, L için koşul:

$$d < \frac{M \times L}{(M + L)} \quad (2.100)$$

Açıkça görülmektedir ki; eğer sinyallerin geliş doğrultuları dizi normaline yakın doğrultularda (ya da bu doğrultulara odaklanmış) ise yukarıdaki koşul d için düşük bir üst sınır olabilecektir. Bu durum kestirilebilecek sinyal sayısının artmasına da olanak tanımaktadır.

Kestirilmiş bir geniş bant uzamsal-zamansal özilişki matrisinin, R_X , sinyal altuzayının etkin boyutu D_e olarak ketirilmiş olsun. Özilişki matrisinin özvektörleri daha önce tartışıldığı gibi etkin boyuta bağlı olarak sinyal ve gürültü altuzaylarına ayrılmış olsun. Altuzay yöntemlerinde uzamsal spektrum, her θ konumu için bu alt uzaylardan faydalanılarak yapılan bir karşılaştırma işleminin sonucu olarak elde edilir. Dar bantlı sinyallerin söz konusu olduğu durumlarda, bu karşılaştırma her konum için rank-1 model yön vektörlerinin bu altuzayların birine yapılan izdüşümün modül karesiyle yapılır. Ancak geniş bant küçük ranklı sinyal modellemesi için alternatif bir kestiriciye ihtiyaç vardır. Bu nedenle öne sürülebilecek bir kaç yöntem söz konusu olabilir. Bunlardan ilki, $\{a_{\theta}(\omega); \omega \in \Omega_{\theta}\}$ kümesindeki her vektörün bu altuzaylardan birine olan izdüşümlerinin toplamının hesaplanmasıdır. Bir diğer yöntem ise, her θ için geniş bant sinyal gösterim taban vektörlerinin izdüşümlerinin

toplamlarının hesaplanmasıdır. Üçüncü bir yöntem ise, geniş bant sinyal gösterim taban vektörlerinin oluşturduğu altuzayla, V_θ sinyal altuzayı arasındaki temel açıların saptaması ve karşılaştırma kriteri olarak kullanılmasıdır. Bu üçüncü yöntem geometrik açıdan ilginç sonuçlar sergilemektedir. Bazı dizi konfigürasyonları için çok iyi sonuçlar verirken, bazıları içinse düşük çözünürlük göstermektedir. Bunun nedeni $\{a_\theta(\omega); \omega \in \Omega_\theta\}$ kümesinin elemanları yerine altuzayı temsil eden taban vektörlerinin karşılaştırılıyor olmasıdır.

Burada önerilecek yöntem ise, sinyalin spektral içeriğine hassas olamayan yön vektörlerinin karşılaştırıldığı yöntemdir:

$$P(\theta) = \sum_{j=1}^{N_f} \frac{1}{|a_\theta^H(\omega_j)E_n|} \quad (2.101)$$

Yön vektörlerinin seçim yoğunluğunu, N_f belirlemektedir. Bu yoğunluğun artması, sinyalin spektral yayılımına olan hassasiyetini azaltır. Küçük N_f değerleriyle iyi sonuçlar alınabilir.

Bu noktaya kadar bir soru açıkta bırakıldı. Bu soru, etkin boyutun nasıl kestirileceğine ilişkin sorudur. Bu boyutun kestrilmesi ayrıntılı olarak burada tartışılmayacaktır. Ancak kısaca Akaike enformasyon kriteri (Buckley, 1988) yardımıyla kestrilebileceğini ifade etmek uygun olacaktır:

$$L(d) = (J_2 - J_1)N(M \times L - d) \ln\left(\frac{a_0}{g_0}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{M \times L - d} \sum_{i=d+1}^{ML} \lambda_i \quad (2.102)$$

$$g_0 = \left(\prod_{i=d+1}^{M \times L} \lambda_i \right)^{\frac{1}{(ML-d)}}$$

Amaç, $L(d)$ fonksiyonu minimum yapan d değeri bulmaktır. Yukarıda J_1 ve J_2 Fourier dönüşümünün bantı içeren noktalarının üst ve alt sınırıdır ve N yapılan ölçüm sayısıdır.

2.5.3.2 Odaklama ve geniş bant sinyal parametre kestirimi:

Odaklamanın geniş bant sinyal altuzay işlemeye olan faydasının anlaşılabilmesi için basit bir örnek vermek daha açıklayıcı olacaktır. ULA bir yapıda dizi kullanılarak N_t adet ölçüm yapıldığı varsayılın. Tek bir geniş bantlı sinyalin dizi üzerine $\theta=0$ ile düştüğü ve duyargaçlardaki gürültünün beyaz olduğu varsayılın. Bu durumda, sinyalin gözleminin etkin boyutu 1 olacaktır. Çünkü, bir ölçüm vektörü, $x(t)=s_0(t)I_M+n(t)$ şeklindedir. Görülüyor ki; dizi normaline yakın açılı konumlar, aynı bant genişlikli uzak olanlara kıyasla zamansal örüntülerinin daha küçük olması nedeniyle aynı zamanda odaklanmış gibidirler (rank-1 modele uygundurlar). Bu duruma karşı düşünen uzamsal özilişki matrisi:

$$R_X = \gamma_s^2 I_M I_M^H + \sigma_n^2 I_M \quad (2.103)$$

γ_s^2 , sinyalin gücüdür. Bağımsız N_t adet ölçüm ile R_X in bir kestirimi elde edilebilir. Şayet böyle bir kestirim yerine J noktalı DFT alarak dar bantlı frekans bileşenlerine ayrılıysaydı elde edilecek dar bant özilişki matrisi:

$$R_X(\omega_j) = \gamma_s^2(\omega_j) I_M I_M^H + \frac{\sigma_n^2}{J} I_M \quad j = 1, 2, \dots, J-1 \quad (2.104)$$

Eğer sinyal düz bir spektruma sahipse, $\gamma_s^2(\omega) = \gamma_s^2/J$ ve SNR her frekans bölgesinde korunuyor olacaktır. Ancak her ω_j için $R_X(\omega_j)$ nin kestirimi elde etmek için N/J bağımsız darbant ölçüm söz konusudur. Bu nedenle tek bir geniş bant özilişki matrisi oluşturmak çok daha doğru bir kestirim sağlamaktadır.

Bu çok basit durumun işaret ettiği gibi geniş bant sinyallerin varlığı durumunda sinyaller dizi normaline yakın koutlarda ise ya da odaklama yapıldıysa geniş bant özilişki matrisinin kestirilmesi daha doğru sonuçlar vermektedir. Daha doğru bir özilişki matrisi parametrelerin asimtotik kestirimlerinin Cramer Rao alçak seviyesine yaklaşması yani istatistiksel açıdan daha doğru kestirim yapılabilmesi anlamına gelmektedir.

Geniş bant sinyal modeline ile odaklamayı hem zaman hem defrekans domeninde olabilir. Zaman domeninde odaklama, duyargaçların ardına uygun gecikmeler uygulanarak sinyaller normale yakın doğrultularda geliyormuş gibi işlenir. Frekans domeninde odaklama ise daha önce ayrıntılarıyla tartışılmıştır. Frekans domeni odaklamanın bu yeni modele uygulanması ise yine odaklama matrisleri yardımıyla olmaktadır.

Önce, uzamsal-zamansal belirsizliğin kaldırılması için L adet gecikmenin duyargaçları takiben uygulandığı varsayalım. Böylece elde edilen ölçümlerle bir geniş bant özilişki matrisi kestirilir. Daha sonra, odaklama matrisleri yardımıyla geniş bant sinyal gösterim altuzayı elde edilir:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\theta^{GB}(\omega) &= T(\omega) a_\theta^{GB}(\omega) \\ \tilde{R}_\theta &= \int_{\Omega_0} a_\theta^{GB}(\omega) (a_\theta^{GB}(\omega))^H d\omega \end{aligned} \quad (2.105)$$

Yukarıdaki sinyal gösterim özilişki matrisinden faydalanarak etkin boyut, $\tilde{D}_\theta$, ve sinyal gösterim altuzayı, $\tilde{V}_\theta$, bulunur. Kestirim sinyal ve gürültü altuzayları R_X e ait kestirimden

bulunur ve son olarak $P(\theta) = \sum_{j=1}^{N_f} \frac{1}{\left| a_\theta^H(\omega_j) E_n \right|}$ kıyaslaması yapılır:

3. DOĞRUSAL ŞARTLAMALI UYARLAMALI HÜZME ŞEKİLLENDİRME

Uzamsal domende farklı konumlara yerleştirilmiş alıcılar yardımıyla sinyal işleme, tek alıcı ile aynı işin yapılmasından çok daha iyi sonuçlar vermektedir*. İkinci bölümde, duyargaç dizileri yardımıyla sinyal parametrelerinin kestirilmesi problemi incelenmişti. Uzamsal domendeki bir sinyalin konumunun ya da daha basit olarak yönünün kestirilmesi tek bir sıradan duyargaç ile mümkün değildir. Tek bir alıcı ile kestirim yapılabilmesi için alıcının yönlülük özelliğine sahip olması gerekir. Yönlü alıcıların (örn. yönlü antenler) bu amaçla kullanılabilmesi için bu alıcıların bakış doğrultuları mekanik donanımlarla tüm uzamsal domeni tarayacak şekilde değiştirilmelidir. Bu durum daha hassas ve pahalı sistemler gerektirmektedir. Halbu ki; sıradan alıcılarla yapılan alıcı dizileri, dizinin hüzesinin elektronik olarak yönlendirilmesine olanak sağlamakta ve alınan verilerin uygun şekilde işlenmesiyle alış hüzmelerinin genişliği ayarlanabilmektedir. Bu özellikleri nedeniyle bu tür yapılar, *hüzme şekillendirici* (beamformer) olarak adlandırılırlar. Hüzme şekillendirici (HŞ) bir anlamda uzamsal örnekleme yaptığından, gelen sinyallerin yönlerini, zaman domeninde frekans kestirimi problemine benzer şekilde, saptamak mümkün olmaktadır.

Gerçek hayatta, uzamsal domende alınması istenen sinyalin dışında ortamda pek çok farklı sinyal ve gürültü kaynağı bulunmaktadır. Sinyalin bu tür bozucu etmenlerden arındırılarak mümkün olduğu kadar iyi bir şekilde alınması önemli bir konudur. Tek alıcılı sistemlerin bu işi başarabilmesi için oldukça karmaşık ve pahalı sistemler olmaları gerekmektedir. Diğer taraftan, uzamsal dizilim sistemler için olabilecek karmaşıklık; yalnız sisteme ait yazılımlar için söz konusu olabilir. Kullanılan alıcıların, tek alıcılı sistemlerin aksine, hassasiyetleri çok önemli değildir. Bu hassasiyet yazılımlarla sistemin hüzmesi ve yan kulakçıkları (side lobes) uygun şekilde ayarlanarak sağlanmaktadır. Sistemde asıl işi yazılım gerçekleştirdiğinden maliyet önemli ölçüde azalırken, hızda olumlu ölçüde artacaktır.

* Sistemin çıkışında elde edilen sinyal gürültü oranı duyargaç dizileri için tek alıcılı sisteme göre daha yüksektir.

Hüzme şekillendirici, bir sinyal kaynağından gelen verileri alabilmek için hüzmesini o kaynağın doğrultusuna yönlendirir. Bu sayede farklı doğrultulardan gelen olası istenmeyen sinyalleri (girişim kaynakları) ve gürültüyü bertaraf eder. Bir başka ifadeyle uzamsal süzgeçleme yapar. Özellikle dizi uyarlamalı olarak çalışıyorsa kendini uzamsal ortamın şartlarına ve değişimine uydurur. Hüzmesini belirli bir doğrultuya yönlendirilirken, sadece gerekli gördüğü doğrultulardan (girişim kaynaklarının doğrultularından) sinyal alımı yapmayarak sisteme esneklik kazandırır (sisteme ait serbestlik derecesini uygun şekilde kullanır). Bu bölümde uyarlamalı diziler incelenecek ve ortama uyma yeteneklerinin amaç doğrultusunda nasıl kullanılabileceği anlatılmaya çalışılacaktır.

3.1 Kısmi Uyarlamalı Hüzme Şekillendirici

Uyarlamalı hüzme şekillendirici alınmak istenen sinyal doğrultusunda, istenilen frekans karakteristiğine uygun olarak alım yaparken, ortamdaki girişim sinyallerini bastıracak şekilde şartlandırılır. İstenilen sinyali almak için, diziye ait hüzme ilgili doğrultuya çevrilir. Dizi bu doğrultu haricinde bulunan tüm sinyal kaynaklarından gelen sinyalleri bastırır. Bu işlem için diziye ait her duyargaç çıkısındaki veri uygun katsayılarla ağırlıklandırılarak (sözü edilen şartlamalara uygun şekilde) toplanır. Katsayılar sistem tarafından, ortam şartlarında olan değişimlere uyum sağlayacak şekilde, uyarlamalı olarak değiştirilir. Kısaca değinilen bu prensip *uyarlamalı uzamsal süzgeçleme* olarak adlandırılır. Ortamdaki sinyallerin geniş bantlı olduğu durumda, sinyallerin frekans karakteristiklerine uygun olarak alım yapılabilmesi ve sistemin hüzmesinin yönlendirilebilmesi için, duyargaçları takiben gecikme hatları (tap delay lines) ve yönlendirme geciktiricileri yerleştirilir (Şekil 3.2). Bu genişletilmiş yapı ile hem uzamsal domende hem de frekans domeninde süzgeçleme yapmak mümkün olacaktır. Bir başka deyişle; dizi ile belirli bir yönde ve belirli bir frekans bantında bulunan sinyal ortamdaki girişim kaynaklarından arındırılarak alınabilecektir.

Uyarlamalı sistemin sahip olduğu uyarlanabilir katsayı miktarı o sistemin *serbestlik derecesini* belirler. Bir başka deyişle; sistemin bağımsız kaç adet işlemi kontrol edebileceğinin ölçüsüdür. Buna göre; sistemin, serbestlik derecesi ne kadar büyükse o kadar

hünerli olduğu söylenebilir. Ancak uyarlanacak katsayının fazlalığı, sistemin uyarlama hızını ve hesap yükünü olumsuz yönde etkilemektedir. Gerçekte istenen; amaçlanan işin sistem tarafından mümkün olduğunca az uyarlamalı katsayıyla yapılabilmesidir. Bu sayede sistemin ortam değişimlerine hızla cevap vermesi ve maliyetinin düşük olması mümkün olacaktır. Serbestlik derecesinin mümkün olan en az sayıya indirilmesi için, ortam ve sinyal hakkında bilinen ön bilgiler, katsayıların uygun şekilde belirlenmesinde kullanılır. Böylece serbestlik derecesi yalnızca ortam hakkında bilinmeyen verilere uyum sağlanması için gereken sayıya indirilir. Sistem zaten bilinen özelliklere uyumsağlamak için gereksiz zaman harcamaz. Ön bilgilerle katsayıların belirlenmesi, şartlama denklemleri ile gerçekleştirilir. Böylelikle elde edilen uyarlamalı dizi *kısmi uyarlamalı dizi* olarak adlandırılır.

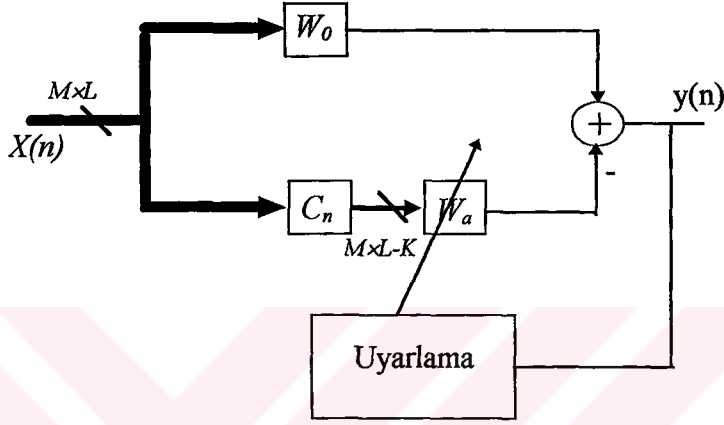
Kısmi uyarlamalı hüzmeye şekillendirme, serbestlik derecesinin bir kısmının önbilgilere uygun olarak şartlanmasından sonra, kalan kısmı ile hüzmeye şekillendiricinin ortamın ve sinyalin değişkenlik gösteren ve bilinmeyen özelliklerine uyum sağlayarak performansını korumasını amaçlar. Sinyal ortamına ait ön bilgiler; istenilen sinyalin ve girişim kaynaklarının geliş doğrultusu, frekans karakteristiği gibi bilgiler olabilir. Diğer taraftan, serbestlik derecesinin bir kısmı yine HŞ'nin tasarımı olduğu ortam modelinde olacak olası hatalara, yönlendirme hatalarına ve ilişkili girişim kaynağı varsayımı olasılığına karşı HŞ'nin bağışıklığının artırılması amaçlı olarak da şartlanabilirler.

Kısmi uyarlamalı hüzmeye şekillendirici blok görünümü Şekil 3.1'de görülmektedir. Kısmi uyarlamalı yapılar, uyarlanır katsayılarını sistemin çıkış gücünü karesel anlamda, şartlamaları sağlamak üzere, minimize edecek şekilde değiştiriler. Bir başka deyişle, *doğrusal şartlamalı minimum değişintili hüzmeye şekillendirme* (Linearly Constrained Minimum Variance Beamformer, LCMVB) optimum ağırlık vektörüne uyarlamalı yöntemle yaklaşır. LCMVB problemi şu şekilde ifade edilir:

$$\min_{W_a} (W_o - C_n^H W_a)^H R (W_o - C_n^H W_a) \quad \ni \quad C^H W = f \quad (3.1)$$

İfadede görülen $ML \times ML$ boyutlu R matrisi duyargaçlardan alınan örneklerin bir arada

bulunduğu gözlem vektörünün özilişki matrisidir. Şartlama matrisi ve bu matrisin sıfır uzayı sırasıyla C ve C_n matrisleriyle sembolize edilmiştir ve boyutları; K şartlama sayısını ifade etmek üzere $ML \times K$ ve $ML \times (ML-K)$ 'dir. Ağırlık vektörünün bileşenleri olan W_0 ve W_a vektörleri sırasıyla $M \times L$ ve $ML-K$ elemanlıdır. Şartlamalara karşı HŞ'nin sağlaması istenen cevap ise cevap vektörü f tarafından sembolize edilir. Bu ifadeyi gerçekleyen sistem yapısının blok görünümü şu şekildedir:



Şekil 3.1. Kısmi uyarlamalı HŞ blok görünümü

Yapının girişimde n . andaki gözlem vektörü görülmektedir. Sistemin ağırlık vektörü $W = W_0 - C_n^H W_a$ olarak iki vektörün toplamı şeklinde yazılmıştır. Eşitliğin sağındaki ilk terim şartlama denklemini sağlayan ağırlık vektörüdür. Bu vektörün değeri, $W_0 = (CC^H)^{-1} Cf$ olarak en küçük kareler (Least Square, LS) yöntemiyle bulunur. Sistemin serbestlik derecesi $M \times L$ 'dir. Ancak sistemde şartlama için K kadar doğrusal bağımsız şartlama kullanılmıştır. Bu durumda kalan $ML-K$ adet serbestlik uyarlama için kullanılabilir. Sistemde üst kol şartlamayı sağlayan sinyalleri çıkışa ileten bir uyarlamasız süzgeçtir. Alt kolda ise; veriler önce C_n matrisi ile çarpılmaktadır. Bu matrisin çıkışında, matris şartlama uzayına dik olduğundan, şartlamayı sağlayan hiç bir sinyal bileşeni bulunamaz. Bu nedenle C_n matrisi bloke edici matris olarak da adlandırılır (blocking matrix). Daha sonra sistem, alt koldaki veriyi üst koldaki veriye benzeterek çıkış gücünü minimize edecek şekilde uyarlamalı ağırlıkları değiştirir. Böylece üst kolda şartlama dışında kalan yan kulakçıklardan (side lobe) sızmış girişim ve gürültü varsa alt kolun etkisiyle çıkışta minimize edilir. Sonuç olarak çıkışta istenilen sinyal kalır. Bu

yapı *genelleştirilmiş yan kulakçık bastırıcı* (Generalized Side Lobe Canceller, GSC) olarak adlandırılır (Griffiths ve Jim, 1986).

Uyarlamalı dizilerin gerçek hayatta uygulanması sırasında bazı sorunlarla karşılaşmaktadır. İncelememiz sırasında bu sorunlara ve çözüm için önerilmiş yöntemlere değinilecektir. Bahsedilen sorunları bir kaç ana grupta toplamak mümkündür:

Pratikteki uygulamalarda genellikle alınmak istenilen sinyalin yönü kesin bir doğrulukla bilinmemektedir. Bir tolerans altında bilinen doğrultuya yönlendirilmiş hüzme gerçek doğrultu ile tam olarak çakışmayabilir*. Böyle bir durumda sistem, sinyali bir girişim kaynağı olarak kabul ederek bastırır. Diğer taraftan benzer bir durum duyargaç yerleştirilmeleri sırasında oluşan hatalardan da kaynaklanabilir. Bu olumsuz durumu gidermek için yapılması gereken; hüzmenin, yönlendirildiği dorultunun civarında genişletilmesi ve küçük doğrultu çakışmazlığı durumlarında istenilen sinyalin hüzme içinde kalmasının sağlanmasıdır. Bu işlem türevsel şartlamalar kullanılarak gerçekleştirilebilir (Bkz. 3.2 Türevsel Şartlamalar).

Bir başka önemli sorun da duyargaçlarda elde edilen verilerin sayısal olarak işlenmesinden kaynaklanmaktadır. Sayısal sinyal işleme sisteme, yazılımla müdahale etme olanağı sağladığı için esneklik kazandırır. Hüzmenin yönlendirilmesi işlemi, duyargaç çıkışlarına uygulanan yönlendirme gecikmeleri ile sağlanmaktadır**. Sayısal bir sistemde uygulanacak gecikmeler sisteme ait saatin periyodunun tam katları kadar olabilmektedir. Oysa ki; gerekli gecikmeler, sözü geçen periyod süresinin küsürlü katları olabilir. Böyle bir durumda hüzmenin istenilen doğrultulara bir hata ile yönlendirilmesini göze almak gerekecektir. Ancak bu defa da uyarlamalı bir dizi için istenilen sinyalin yönlendirme uyumsuzluğu nedeniyle bastırılması söz konusudur. Bu sorunun üstesinden gelmek için yönlendirme işleminden bağımsız şartlamalar kullanılabilir (Bkz. 3.3 Yönlendirmeden Bağımsız Şartlamalar).

* Hüzmenin düz kısmı (maksimum kazanç) ile gelen sinyalin doğrultusunun çakışmaması bahsedilen durumun geçerli olması için yeterlidir.

** Sinyal geliş doğrultusu dizinin bulunduğu düzleme dik olmadığı sürece her duyargaca referans noktasına göre farklı bir gecikme ile gelir. Sinyalin alınması için bu gecikmeler yönlendirme gecikmeleri ile suni olarak giderilirler. Böylece sinyal dizi düzlemine dik olarak geliyormuş gibi düşünülebilir.

Gerçek hayattaki uygulamalar sırasında sıkça karşılaşılan ve uyarlamalı diziler için büyük sorun teşkil eden bir durum da ortamda var olan sinyallerin istenilen sinyalle ilişkili olması halidir. Böyle bir durum sinyalin ortamda yayılması sırasında yansılardan kaynaklanan kopyalarının oluşması sonucu görülebilir. Sinyalin yankıları olarak adlandırılacağı bu girişim sinyalleri, orijinal sinyalin genlikçe farklı gecikmiş kopyalarıdır. Dolayısıyla istenilen sinyalle ilişkilidirler. Ortamda ilişkili girişim kaynaklarının bulunması uyarlamalı bir sistemin istenilen sinyali de bastırmasına neden olmaktadır (Widrow vd., 1982). Bu nedenle diziye gelen sinyallerin istenilen sinyalle ilişkisizlendirilmesi gerekir. Bunun için ikinci bölümde değinilen uzamsal düzleme yöntemleri kullanılabilir. Diğer taraftan bu bölümde incelenecek olan *karesel şartlamalar* ile (Bkz. Bölüm.3.4 Karesel Şartlamalar) ilişkisizlendirme işleminin yapılabilmesi mümkündür.

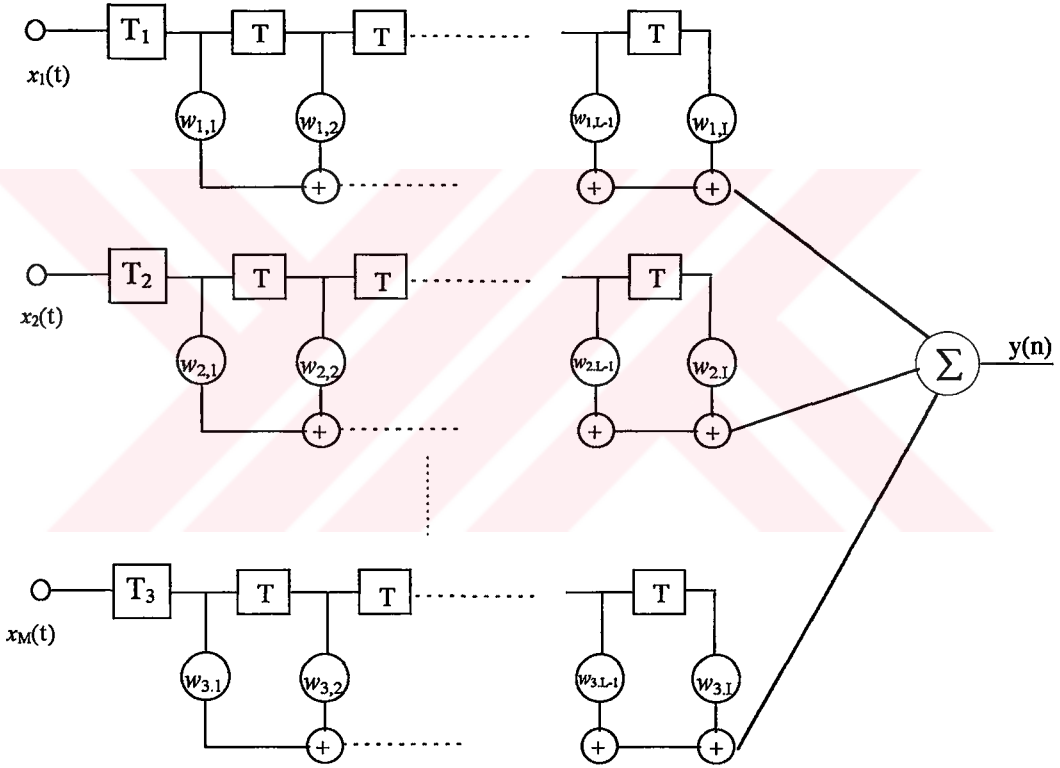
Bundan sonraki alt bölümlerde doğrusal şartlamalı kısmi uyarlamalı HŞ'lerin şartlamalar ile söz konusu sorunları çözmek için nasıl kontrol edilebilecekleri incelenecektir.

3.2 Türevsel Şartlamalar

Kismi uyarlamalı dizi (KUD) uygulamalarında, ortamdaki alınması istenilen sinyallerin geliş doğrultularının ve frekans karakteristiklerinin bilindiği varsayılır. Bu bilgiler ikinci bölümde ayrıntılarıyla incelenmiş olan sinyal parametre kestirim yöntemleri kullanılarak kestirilebilir. Ancak yapılan kestirimler bir miktar hatayı da içerdiğinden, sinyallerin geliş doğrultuları bir tolerans dahilinde elde edilebilecektir. Eğer diziye ait hüzmelerin sinyali almak için yönlendirildiği doğrultu sinyalin geliş doğrultusu ile çakışmıyorsa (sinyal ana kulakçığın içinde kalmıyorsa), hüzmeye şekillendirici (HŞ) sinyali istenmeyen bir sinyal olarak kabul edecek ve bastıracaktır. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için, HŞ'nin her yönlendirilmiş hüzmelerinin genişliği artırılmalıdır. Bu işlem HŞ'nin girişim sinyallerini bastırma eğiliminde bir değişikliğe yol açmayacak şekilde yapılmalıdır. Türevsel şartlamalar (Er ve Cantoni, 1983) bunu sağlayabilmek için kullanılırlar. Bu tür şartlamaların elde edilebilmesi için; öncelikle hüzmeleri belirli bir doğrultuya yönlendirilmiş bir HŞ'ye ait cevabın elde edilmesi ile işe başlanacaktır.

3.2.1 Hüzmesi yönlendirilmiş geniş bantlı bir dizinin cevabı

Duyarga sayısı M olan ve her duyargacı takiben L adet, T birim süreli örnekleme aralıklarına sahip gecikme hattı (tap delay line) içeren bir HŞ ele alınsın (Şekil 3.2). Şekilde, duyargaçların hemen ardında yer alan T_i gecikmeleri hüzmenin istenilen doğrultulara yönlendirilebilmesi için kullanılır*. Gecikme hatları birer sonlu dürtü yanıtı süzgeç (Finite Impuls Responce, FIR) olarak da görülebilir. Her gecikme elemanın çıkış değeri ağırlıklandırılıp toplanarak uzamsal ve zamansal süzgeçleme yapılır. Bu ağırlıkları ifade eden $M \times L$ elemanlı vektör W olsun:



Şekil 3.2. Geniş bant Hüzme Şekillendirici

* Eğer ortamdaki sinyaller dar bantlı ise bu gecikmeler yerini faz çarpanlarına bırakırlar. Bunun nedeni; darbantlı sinyallerin zarfları duyargaçlar arasında yalnızca fazca farklıdır. Zarf için bir zaman gecikmesi söz konusu değildir.

$$W^T = [w_1^T, w_2^T, \dots, w_L^T]$$

$$w_{k,i} = w_{(k-1)M+i} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, M \\ k = 1, 2, \dots, L \end{cases} \quad (3.2)$$

HŞ'nin (θ, ϕ) doğrultusundan gelmekte olan bir düzlem dalgaya cevabı şu şekildedir:

$$H(f, \theta, \phi) = S^T(f, \theta, \phi) T(f) \sum_{k=1}^L w_k e^{-j2\pi f(k-1)T}$$

$$T(f) = \text{diag}[e^{j2\pi f t_1}, e^{j2\pi f t_2}, \dots, e^{j2\pi f t_M}] \quad (3.3)$$

$$S^T(f, \theta, \phi) = [e^{j2\pi f t_1}, e^{j2\pi f t_2}, \dots, e^{j2\pi f t_M}]$$

Burada, $\tau_i = \frac{u(\theta, \phi) r_i}{c}$, $i = 1, 2, \dots, M$; i . duyargaca (θ, ϕ) doğrultusundan gelen sinyalin referans noktasına göre gecikmesidir. Gecikmeye ait ifadeki u ve r_i sırasıyla, geliş doğrultu vektörü ve duyargaç konum vektörünü sembolize etmektedir. Sinyallerin ortamdaki yayılma hızı ise, “c” ile gösterilmiştir. Gecikmeyi ifade eden (τ_i) , daha açık bir şekilde (3.4) eşitliğindeki gibi yazılabilir:

$$\tau_i = \frac{1}{c} [(x_i \cos \phi + y_i \sin \phi) \sin \theta + z_i \cos \theta], \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.4)$$

Burada (x_i, y_i, z_i) , i . duyargacın koordinatlarıdır. HŞ'nin hüzmelerinin uzamsal domende (θ_0, ϕ_0) doğrultusuna yönlendirildiği varsayılın. Bu durumda, HŞ'nin cevabı aşağıdaki gibidir:

$$H(f, \theta, \phi) = a(f) \sum_{k=1}^L h_k e^{-j2\pi f(k-1)T}$$

$$h_k = S_o^T w_k, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (3.5)$$

$$S_o^T = [1, 1, \dots, 1]$$

İfadede; $a(f)$, saf gecikmeyi ifade etmektedir. Bu saf gecikme duyargaçların örneklenmesi sırasında komşu iki duyargacın örneklenme anları arasındaki olası sabit gecikmeyi ifade eder. Seçilmiş bir (θ_0, ϕ_0) doğrultusun için h_k sabitleri HŞ'nin frekans cevabını tanımlayacak şekilde ayarlanabilirler.

3.2.1.1 Cevabın şekli

Dizi cevabından faydalanarak verilmiş bir (θ_0, ϕ_0) doğrultusuna ait cevabının n . dereceden türevleri sıfır olmaya zorlanarak, bu konumun civarında bir (θ, ϕ) noktasında düz bir cevap elde edilebilir. Böylelikle (θ_0, ϕ_0) civarında daha geniş bir hüzme elde edilmiş olacaktır. Bunu gösterebilmek için öncelikle dizinin güç cevabı tanımlanmalıdır:

$$\rho(f, \theta, \phi) = H^*(f, \theta, \phi) H(f, \theta, \phi) \quad (3.6)$$

Duyargaçlara ait gecikmenin, τ_i , n . dereceden türevi vardır. Bu sayede güç cevabı (θ_0, ϕ_0) civarında Taylor serisine açılabilir:

$$\begin{aligned} \rho(f, \theta, \phi) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\nabla \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \nabla \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^k \rho(f, \theta_0, \phi_0) + r_n \\ r_n &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\nabla \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \nabla \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^{(n+1)} \rho(f, \theta_0 + \varepsilon \nabla \theta, \phi_0 + \varepsilon \nabla \phi), \quad 0 < \varepsilon < 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Görüldüğü gibi $\rho(f, \theta, \phi)$ nin yaklaşık olarak $\rho(f, \theta_0, \phi_0)$ ya eşit olabilmesi için n .dereceye kadar olan türevlerinin sıfır olmaya şartlanmaları gerekir:

$$\left. \frac{\partial \rho^r}{\partial \theta^r} \right|_{(\theta_0, \phi_0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho^r}{\partial \phi^r} \right|_{(\theta_0, \phi_0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho^r}{\partial \theta^m \phi^{r-m}} \right|_{(\theta_0, \phi_0)} = 0, \quad \begin{cases} r = 2, \dots, n \\ m = 1, \dots, r-1 \end{cases} \quad (3.8)$$

1. Derece Durum (Er ve Cantoni, 1983): Bu durumda, HŞ cevabının θ ve ϕ 'ye ilişkin birinci türevleri sıfır olmaya zorlanır.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L h_k S_{\theta}^T A_{\theta}(\theta_0, \phi_0) w_l \sin(2\pi f(l-k)T) \\ \left. \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \right|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L h_k S_{\phi}^T A_{\phi}(\theta_0, \phi_0) w_l \sin(2\pi f(l-k)T) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Eşitliklerde, $A_{\theta}(\theta, \phi)$, $M \times M$ köşegen matristir ve elemanlarını $A_{\theta_{ii}} = \frac{\partial \tau_i(\theta, \phi)}{\partial \theta}$ $i=1,2,\dots,M$ oluşturur. Yine $A_{\phi}(\theta, \phi)$ 'nin elemanları da benzer şekildedir. Bu durumda θ ve ϕ ye bağlı türevlerin tüm f , frekans değerleri için, sıfır olmasını sağlayacak yeter koşul şu şekilde yazılabilir:

$$\left. \begin{aligned} S_{\theta}^T A_{\theta}(\theta_0, \phi_0) w_l &= 0 \\ S_{\phi}^T A_{\phi}(\theta_0, \phi_0) w_l &= 0 \end{aligned} \right\} l = 1, 2, \dots, L \quad (3.10)$$

2. Derece Durum (Er ve Cantoni, 1983): İkinci derece durum ikinci türevlerin sıfır olmaya zorlanmasıdır.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} \right|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L h_k S_{\theta}^T \frac{\partial A_{\theta}(\theta_0, \phi_0)}{\partial \theta} w_l \sin(2\pi f(l-k)T) \\ &\quad - 8\pi^2 f^2 \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L h_k S_{\theta}^T A_{\theta}^2(\theta_0, \phi_0) w_l \cos(2\pi f(l-k)T) \\ \left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} \right|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L h_k S_{\theta}^T \frac{\partial A_{\phi}(\theta_0, \phi_0)}{\partial \phi} w_l \sin(2\pi f(l-k)T) \\ &\quad - 8\pi^2 f^2 \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L h_k S_{\theta}^T A_{\phi}^2(\theta_0, \phi_0) w_l \cos(2\pi f(l-k)T) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial \phi} \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L h_k S_\theta^T \frac{\partial \Lambda_\phi(\theta_0, \phi_0)}{\partial \phi} w_l \sin(2\pi f(l-k)T) \\ &\quad - 8\pi^2 f^2 \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L h_k S_\theta^T \Lambda_\theta^2(\theta_0, \phi_0) \Lambda_\phi^2(\theta_0, \phi_0) w_l \cos(2\pi f(l-k)T) \end{aligned}$$

İkinci dereceden türevlerin sıfır olması için yeter koşullar şu şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned} S_\theta^T \frac{\partial \Lambda_\theta(\theta_0, \phi_0)}{\partial \theta} w_l &= 0 \\ S_\theta^T \Lambda_\theta^2(\theta_0, \phi_0) w_l &= 0 \\ S_\theta^T \frac{\partial \Lambda_\phi(\theta_0, \phi_0)}{\partial \phi} w_l &= 0 \\ S_\theta^T \Lambda_\phi^2(\theta_0, \phi_0) w_l &= 0 \\ S_\theta^T \frac{\partial \Lambda_\phi(\theta_0, \phi_0)}{\partial \theta} w_l &= 0 \\ S_\theta^T \Lambda_\theta(\theta_0, \phi_0) w_l \Lambda_\phi(\theta_0, \phi_0) w_l &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

n. Derece Durum (Er ve Cantoni, 1983): Leibniz formülüyle n . derece türevler alınarak :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^n \rho}{\partial \theta^n} &= \sum_{i=0}^n c_i^n \frac{\partial^i H^*}{\partial \theta^i} \frac{\partial^{(n-i)} H}{\partial \theta^{(n-i)}} \\ \frac{\partial^n \rho}{\partial \phi^n} &= \sum_{i=0}^n c_i^n \frac{\partial^i H^*}{\partial \phi^i} \frac{\partial^{(n-i)} H}{\partial \phi^{(n-i)}} \end{aligned} \right\} n \geq 1, m = 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$\frac{\partial^n \rho}{\partial \theta^m \partial \phi^{(n-m)}} = \sum_{r=0}^m \sum_{i=0}^{n-m} c_r^m c_i^{n-m} \frac{\partial^r}{\partial \theta^r} \left(\frac{\partial^i H^*}{\partial \phi^i} \right) \frac{\partial^{(m-r)}}{\partial \theta^{(m-r)}} \left(\frac{\partial^{(n-m-i)} H}{\partial \phi^{(n-m-i)}} \right)$$

(3.13)

elde edilir. Birinci ve ikinci derece durumuna benzer şekilde, n . derece türev ifadelerinin de sıfır olmaya zorlanması için yeter koşul üretmek ifadelerin uzun ve karmaşık olmasına neden olmaktadır. Bunun yerine n . dereceye kadar olan türevlerin sıfıra eşit olmaya zorlandıkları varsayılarak, n . derece için yeter koşullar şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial^n \rho}{\partial \theta^n} \right|_{(\theta_0, \phi_0)} = 0, \quad \forall f \neq 0 \Rightarrow \\
 & S_\theta^T g_i(A_\theta) \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} w_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 & \left. \frac{\partial^n \rho}{\partial \phi^n} \right|_{(\theta_0, \phi_0)} = 0, \quad \forall f \neq 0 \Rightarrow \\
 & S_\phi^T g_i(A_\phi) \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} w_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 & \left. \frac{\partial^n \rho}{\partial \theta^m \partial \phi^{n-m}} \right|_{(\theta_0, \phi_0)} = 0, \quad \forall f \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} n \geq 1 \\ m = 1, 2, \dots, (n-1) \end{cases} \\
 & S_\theta^T y_i(A_\theta, A_\phi) \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} w_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

(3.14) ifadelerinde g_i ve y_i köşegen matrislerinin elemanları A_θ ve A_ϕ 'nin türevleri ve katlarından oluşur.

Pratikte, yapılan bilgisayar benzetişimleri göstermiştir ki, $n=2$ için istenilen sonucun sağlanması için yeterli olmaktadır. Bu nedenle bu derecenin üstündeki türevlerin sıfır olmaya zorlanmasının pratik açıdan çoğunlukla gereği yoktur (Er ve Cantoni, 1983).

Eğer yönlendirilmiş bir HŞ için yönlendirildiği doğrultuda düz bir frekans spektrumuna sahip olacak şekilde tasarlanacaksa; $h_k = \delta(k - k_0)$, $k = 1, 2, \dots, L$ olmalıdır ($\delta(\cdot)$, kronecher delta fonksiyonudur). Genellikle $k_0 = L/2$ seçilir. Bu durumda birinci derece için türev ifadeleri şu şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{l=1}^L h_k S_\theta^T A_\theta(\theta_0, \phi_0) w_l \sin(2\pi f(1 - k_0)T) \\ \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{l=1}^L h_k S_\theta^T A_\phi(\theta_0, \phi_0) w_l \sin(2\pi f(1 - k_0)T)\end{aligned}\quad (3.15)$$

(3.15) eşitlikleri için yeter koşullar (3.10) da olduğu gibidir. İkinci derece için türev ifadeleri ise;

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{l=1}^L h_k S_\theta^T \frac{\partial A_\theta(\theta_0, \phi_0)}{\partial \theta} w_l \sin(2\pi f(l - k_0)T) \\ &\quad - 8\pi^2 f^2 \sum_{l=1}^L h_k S_\theta^T A_\theta^2(\theta_0, \phi_0) w_l \cos(2\pi f(l - k_0)T) \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{l=1}^L h_k S_\theta^T \frac{\partial A_\phi(\theta_0, \phi_0)}{\partial \phi} w_l \sin(2\pi f(l - k_0)T) \\ &\quad - 8\pi^2 f^2 \sum_{l=1}^L h_k S_\theta^T A_\phi^2(\theta_0, \phi_0) w_l \cos(2\pi f(l - k_0)T)\end{aligned}\quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial \phi} \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{l=1}^L h_k S_\theta^T \frac{\partial A_\phi(\theta_0, \phi_0)}{\partial \phi} w_l \sin(2\pi f(l - k_0)T) \\ &\quad - 8\pi^2 f^2 \sum_{l=1}^L h_k S_\theta^T A_\theta^2(\theta_0, \phi_0) A_\phi^2(\theta_0, \phi_0) w_l \cos(2\pi f(l - k_0)T)\end{aligned}$$

ve yeter koşullar (3.12) de olduğu gibidir. Eğer L tek sayı ise, $k_0 = (L+1)/2$ seçilerek birinci derece durum için gerek ve yeter koşula ulaşmak mümkündür:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{l=1}^{k_0-1} S_\theta^T A_\theta(\theta_0, \phi_0) (w_{k_0+l} - w_{k_0-l}) \sin(2\pi f l T) \\ \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \Big|_{(\theta_0, \phi_0)} &= 4\pi f \sum_{l=1}^{k_0-1} S_\theta^T A_\phi(\theta_0, \phi_0) (w_{k_0+l} - w_{k_0-l}) \sin(2\pi f l T)\end{aligned}\quad (3.17)$$

İfadedeki toplamalar, Fourier serisinin $(L-1)/2$ terimli sinüs serileridir ve sıfıra eşit olmaları için gerek ve yeter koşullar:

$$\left. \begin{aligned} S_{\theta}^T A_{\theta}(\theta_0, \phi_0) (w_{k_0+l} - w_{k_0-l}) &= 0 \\ S_{\theta}^T A_{\phi}(\theta_0, \phi_0) (w_{k_0+l} - w_{k_0-l}) &= 0 \end{aligned} \right\} l = 1, 2, \dots, (k_0 - 1) \quad (3.18)$$

Bu sonuçlar ikinci derece için genişletilemez. İkinci derece için gerek ve yeter koşul elde etmek, problemin doğrusal olmayan yapısı nedeniyle mümkün değildir.

3.2.1.2 Koşullandırma

Elde edilen sonuçların şartlama olarak kullanılabilmesi için, birinci ve ikinci derece yeter koşulların yanı sıra, bakış yönünde istenilen frekans cevabına ilişkin şartlamalar da kullanılmalıdır*. Şartlama ifadeleri (3.10), (3.12) ve sıfıncı dereceden şartlama olarak adlandırılabilir. Bakış yönü frekans cevabı şartlamaları (Frost, 1979) bir arada $9L$ adettir ve doğrusal bağımsız olmayabilirler. Bu nedenle doğrusal bağımlı şartlamalar ayıklanmalıdır. Örneğin (x, y) düzleminde bir ULA için şartlamalar (3.10) ve (3.12)'den yararlanarak şu şekilde elde edilecektir:

1. Derece şartlamalar:

* Türevsel şartlamalar hüzmene yönlendirildiği doğrultunun civarında düz bir karakteristiğe sahip olması için kullanılmaktadır. Bu nedenle o doğrultudan alınacak sinyalin özelliklerinin belirlemez HŞ belirli bir frekans karakteristiğine sahip bir sinyali bu doğrultudan alabilmesi için ek bir şartlama takımına ihtiyaç vardır. HŞ'ye ait hüzmene yönlendirildiği doğrultudan gelen sinyaller için duyargaçlar arasında bir zaman ya da faz farkı söz konusu değildir (ideal yönlendirme). Her duyargaç çıkışını takiben bir FIR süzgeç bulunmaktadır ve bu durumda her duyargaç aynı sinyali işlemektedir. Bu süzgeçler belirli bir frekans bölgesinde sabit kazanç ve maksimum SINR (Sinyal girişim oranı, Signal interference plus noise ratio) sağlayacak şekilde tasarlanabilirler.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\phi}^T(\phi_0) w_k &= 0 \\ \lambda_{\phi}^T(\phi_0) &= \left[\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \phi} \right) \Big|_{\phi_0}, \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial \phi} \right) \Big|_{\phi_0}, \dots, \left(\frac{\partial \tau_M}{\partial \phi} \right) \Big|_{\phi_0} \right] \\ \left(\frac{\partial \tau_k}{\partial \phi} \right) \Big|_{\phi_0} &= \frac{b}{c} \left(k - \frac{M+1}{2} \right) \cos \phi_0 \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, M \quad (3.19)$$

2. Derece şartlamalar:

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi}^T(\phi_0) w_k &= 0 \\ \psi_{\phi}^T(\phi_0) w_k &= 0 \\ \sigma_{\phi}^T(\phi_0) &= \left[\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \phi} \right)^2, \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial \phi} \right)^2, \dots, \left(\frac{\partial \tau_M}{\partial \phi} \right)^2 \right] \Big|_{\phi_0} \\ \psi_{\phi}^T(\phi_0) &= \left[\left(\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial \phi^2} \right) \Big|_{\phi_0}, \left(\frac{\partial^2 \tau_2}{\partial \phi^2} \right) \Big|_{\phi_0}, \dots, \left(\frac{\partial^2 \tau_M}{\partial \phi^2} \right) \Big|_{\phi_0} \right] \\ \left(\frac{\partial^2 \tau_k}{\partial \phi^2} \right) \Big|_{\phi_0} &= -\frac{b}{c} \left(k - \frac{M+1}{2} \right) \sin \phi_0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dikkat edilirse; koşul sayısı $3L$ ye inmiştir ve koşullar doğrusal bağımsızdır.

3.2.2 Fazdan bağımsız türevsel şartlama

Bu ana kadar incelenen türevsel şartlama şekli (Er ve Cantoni, 1983), HŞ'nin genlik cevabını şartlamaktadır. İleri sürülen şartlama biçimi uygulanırken bir dizi doğrusal şartlama kullanılmıştır. Bu doğrusal şartlamalar, bir yeter koşul (düz bir hüzme örüntüsü oluşturabilmek için) oluşturdukları halde gerek koşul özelliği taşımamaktadırlar. Bir başka ifadeyle, doğrusal şartlamalar aynı zamanda orijinal şartlamayı ((2.9), (2.11) ve (2.13) ifadelerinin sıfıra eşit olması) sağlamakta ancak, mümkün olan tek çözüm özelliği taşımamaktadırlar. Bu tür doğrusal şartlamaların uygulaması pratik açıdan kolay olmakla birlikte, HŞ'nin hem genlik hem de gerekmediği halde faz cevabı şartlanmaktadır.

Faz cevabının gereksiz şartlanması bazı olumsuz sonuçları da beraberinde getirmektedir. HŞ'nin referans noktasının değişimi performansını açıkça etkilemektedir (Buckley ve Griffiths, 1986). Halbuki; referans noktası yalnızca notasyonel uygunluk açısından önemli olmalıdır. Başka bir ifadeyle; referans noktasının değişimi yalnızca ifadelerin daha sade görünümüne sahip olmaları gibi nedenlerle farklı seçilmeli, sonuçları etkilememelidir. Öte yandan, referans noktasının konumuna duyarlı türevsel şartlamalar kullanmak, optimum referans noktasının bulunması gibi bir zorluğu da beraberinde getirmektedir. Buna ek olarak, sinyal ortamına olan bağımlılık nedeniyle, yöntemin uygulamaya ilişkin genelliğini bozulmaktadır. Diğer bir deyişle; farklı sinyal senaryolarında aynı performansı elde edilememektedir.. Yanlış bir seçim, HŞ örüntüsünde istenmeyen yüksek genlikli yan kulakçıklara (side lob) neden olabilir. Bu sorunun önüne, fazdan bağımsız türevsel şartlamalarla geçmek mümkündür (Tseng, 1992).

3.2.2.1 Hüzme şekillendirici uzamsal - zamansal cevabı

Duyargaç sayısı M olan ve duyargaçları takiben L adet gecikme elemanı içeren bir HŞ'ye ait cevap şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
 H(f, \theta, \phi) &= W^T V(f, \theta, \phi) \\
 W^T &= [w_1^T, w_2^T, \dots, w_N^T] \\
 V(f, \theta, \phi) &= \begin{bmatrix} p_1(f, \theta, \phi) e^{-j2\pi f t_1} \\ p_2(f, \theta, \phi) e^{-j2\pi f t_2} \\ \vdots \\ p_N(f, \theta, \phi) e^{-j2\pi f t_{N1}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi f T} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f (L-1)T} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

İfadede görülen $p_i(f, \theta, \phi)$, i . duyargacın karakteristiğidir.

Er ve Cantoni'nin önerdiği türevsel şartlamalar, HŞ'nin güç cevabı, $\rho = |H(f, \theta, \phi)|^2$, üzerine türetildiği halde şartlama olarak uygulanmasının kolay olması nedeniyle yeter koşullar kullanılmıştır. Bu şartlamalar, cevabın hem fazını hem de genliğini şartlamakta ve bu nedenle

HŞ'nin cevabı $H(f, \theta, \phi)$ referans noktasının konumundan etkilenmektedir. İncelememizin bu aşamasında kolaylık sağlaması amacıyla farklı bir notasyon tercih edilecektir. HŞ'nin cevabına ait değişkenler üzerinden alınan türevler şu şekilde sembolize edilecektir:

$$\begin{aligned}
 v_{\theta} &= \frac{\partial V}{\partial \theta}, v_{\phi} = \frac{\partial V}{\partial \phi}, v_f = \frac{\partial V}{\partial f} \\
 v_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}, v_{\phi\phi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}, v_{ff} = \frac{\partial^2 V}{\partial f^2} \\
 v_{\theta\phi} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \phi}, v_{\phi f} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial f}, v_{f\theta} = \frac{\partial^2 V}{\partial f \partial \theta}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$H(f, \theta, \phi)$ ' in (f_0, θ_0, ϕ_0) ' da türevleri sıfır olmaya şartlanırsa şartlama denklemlerine ait ifade:

$$\begin{aligned}
 W^H v_{\theta} &= 0, W^H v_{\phi} = 0, W^H v_f = 0 \\
 W^H v_{\theta\theta} &= 0, W^H v_{\phi\phi} = 0, W^H v_{ff} = 0 \\
 W^H v_{\theta\phi} &= 0, W^H v_{\phi f} = 0, W^H v_{f\theta} = 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

olacaktır. Bu şartlamalar, bakış yönüyle ilgili frekans karakteristiğini belirleyen şartlamalara ek olarak kullanılırlar (Frost, 1979). Genellikle bakış yönünde belirli bir merkez frekansı civarında (f_0, θ_0, ϕ_0) civarında birim genlik istenir:

$$W^H V = 1 \tag{3.24}$$

İfadede V , istenilen frekans cevabı şartlama matrisidir. Dikkat edilirse, frekans karakteristiğini belirleyen şartlamalar ile türevsel şartlamalar uzamsal referans noktasına bağılılıkları nedeniyle tek değildirler. Bunu gösterebilmek için, V_1 ve V_2 'nin farklı iki referans noktası için duyargaç dizisine ait cevabı gösterdiği varsayılın. Bu iki cevabın birbiriyle ilişkisi ise şu şekilde olacaktır:

$$V_2 = V_1 e^{j2\pi f \Delta\tau(\theta, \phi)} \quad (3.25)$$

Farklı referans noktaları arasındaki gecikme $\Delta\tau(\theta, \phi)$ ile sembolize edilmiştir. İfadeden de görüleceği üzere, frekansla ilgili şartlama denklemleri sabit bir faz farkı ile benzerdirler. Eğer bu tür tek bir şartlama varsa, uzamsal referansı kaydırmak HŞ'nin faz cevabını sabit bir miktar kaydırmak anlamına gelecektir. Bu tür şartlamaların amacı yalnızca bakış yönünde istenilen frekans karakteristiğini sağlamak olacağından bu durum performansı etkilemez. Ancak diğer taraftan, türevsel şartlamalar için durum oldukça farklıdır:

$$v_{2\theta} = v_{1\theta} e^{j2\pi f \Delta\tau(\theta, \phi)} + v_{1\theta} j2\pi f \frac{\partial \Delta\tau(\theta, \phi)}{\partial \theta} e^{j2\pi f \Delta\tau(\theta, \phi)} \quad (3.26)$$

Bu ifadede $v_{1\theta}$ farklı referans noktaları için bulunmuş şartlamaları göstermektedir. İfadenin sağ tarafı $v_{1\theta}$ dan basit bir faz farkının ötesinde bir farklılık içerdiğinden referans noktasının seçimi hem faz hem de genlik cevabını etkilemektedir.

3.2.2.2 Güç cevabına göre türevsel şartlamalar

Güç cevabı, $\rho(f, \theta, \phi)$, ve türevleri fazdan bağımsız olduğundan uzamsal referans noktasının değişiminden etkilenmezler. Er ve Cantoni' nin elde ettiği kapalı form ifadeler (3.9), (3.11), (3.13), doğrusal olmayan forma sahiptirler. Bu nedenle de uygulanmaları oldukça zordur:

$$\rho = W^H V V^H W$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = W^H v_{\theta} V^H W + W^H V v_{\theta}^H W = 2\text{Re}\{W^H v_{\theta} V^H W\} \quad (3.27)$$

$\text{Re}\{.\}$ argümanın gerçel kısmının alındığını ifade eder. Bu son denklemle (3.24) birlikte değerlendirilirse sonuç şu şekilde olacaktır:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 2\text{Re}\{W^H v_\theta\} \quad (3.28)$$

Diğer parametrelere (f ve ϕ) göre türevler de benzer şekildedir. İkinci derece ifadelerse:

$$\frac{\partial p}{\partial \phi \partial \theta} = 2\text{Re}\{W^H v_{\theta\phi}\} + 2\text{Im}\{W^H v_\theta\}\text{Im}\{W^H v_\phi\} \quad (3.29)$$

şeklinde olacaktır. Eşitlikte, $\text{Im}\{.\}$ argümanın sanal kısmının alındığını ifade eder. Diğer parametreler için elde edilecek olan ifadeler de benzer şekilde elde edilebilir.

Fazdan bağımsız türevsel şartlamalar, güç cevabının türevleri sıfıra eşitlenerek elde edilebilir:

1. Derece İçin:

$$\text{Re}\{W^H v_\theta\} = 0, \quad \text{Re}\{W^H v_\phi\} = 0, \quad \text{Re}\{W^H v_f\} = 0 \quad (3.30)$$

2. Derece İçin:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{W^H v_{\theta\theta}\} &= -|\text{Im}\{W^H v_\theta\}|^2, & \text{Re}\{W^H v_{\theta\phi}\} &= -|\text{Im}\{W^H v_\theta\}||\text{Im}\{W^H v_\phi\}| \\ \text{Re}\{W^H v_{\phi\phi}\} &= -|\text{Im}\{W^H v_\phi\}|^2, & \text{Re}\{W^H v_{\phi f}\} &= -|\text{Im}\{W^H v_\phi\}||\text{Im}\{W^H v_f\}| \\ \text{Re}\{W^H v_{ff}\} &= -|\text{Im}\{W^H v_f\}|^2, & \text{Re}\{W^H v_{f\theta}\} &= -|\text{Im}\{W^H v_f\}||\text{Im}\{W^H v_\theta\}| \end{aligned} \quad (3.31)$$

Elde edilen şartlamaları, (3.23) ile karşılaştırmak ilginç olacaktır. (3.23)'de birinci derece için hem gerçel hem de sanal kısım sıfır olmaya zorlanırken, son ifadede yalnız gerçel kısım sıfır olmaya zorlanmaktadır. İkinci derece içinse, yine (3.23)'de hem gerçel hem de sanal kısım sıfır olmaya zorlanırken, yeni ifadede gerçel kısım sanal kısmın somut bir fonksiyonu olmaya zorlanmaktadır. Fazdan bağımsız şartlamanın diğerine nazaran daha az sınırlı olduğu açıktır. (3.23) ifadeleri fazdan bağımsızlığı sağlayabilen durumlardan yalnızca biridir.

3.2.2.3 Fazdan bağımsız türevsel şartlamaların uygulanişı

(3.31)'deki şartlama denklemleri kompleks ortamda doğrusal değildirler. Bu nedenle, doğrusal cebrik bir şartlama denklem takımı gerektiren *doğrusal şartlamalı minimum değışintili hüzme şekillendirme* (Linearly Constrained Minimum Variance Beamformer, LCMVB) problemine* uygulanması ve bu takımla bir HŞ tasarlanması mümkün değildir. Bu nedenle, denklem takımını doğrusal hale getirmek için bir kaç matrissel oyuna ihtiyaç vardır. Denklemleri doğrusal hale getirmek için, gerçel ve sanal kısımlar ayrılarak problemin boyutu iki katına çıkarılır:

$$\text{Re}\{W^H v_\theta\} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{W\} & \text{Im}\{W\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}\{v_\theta\} \\ \text{Im}\{v_\theta\} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Bu son ifade, vektörlerin yeni düzenlemesi ile doğrusaldır bir görünüme sahiptir. Bu yeni yazım şekli ile matris ve vektörler aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \begin{bmatrix} \text{Re}\{R\} & -\text{Im}\{R\} \\ \text{Im}\{R\} & \text{Re}\{R\} \end{bmatrix} \\ \tilde{V} &= \begin{bmatrix} \text{Re}\{R\} \\ \text{Im}\{R\} \end{bmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{bmatrix} -\text{Im}\{R\} \\ \text{Re}\{R\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Böylece LCMVB problemi:

$$\min_{\tilde{W}} \tilde{W}^T \tilde{R} \tilde{W} \quad \text{s.t.} \quad \tilde{C}^T \tilde{W} = \tilde{f} \quad (3.34)$$

* LCMVB uyarlamalı ya da uyarlamasız HŞ'nin ağırlıklarının şartlamaları sağlaması koşulu altında minimum varyanslı cevap elde edilecek şekilde ayarlanmasıdır.

olarak ifade edilecektir. Burada, $\tilde{C} = [\tilde{V} \ \hat{V} \ \tilde{v}_\theta \ \tilde{v}_\phi \ \tilde{v}_f]$, tam ranklı varsayılmıştır. Tam ranklı değilse bağımlı satırlar silinerek tam ranklı hale getirilir. Yine ifadede $\tilde{f} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ tir. Böylelikle optimum ağırlık vektörü Lagrange çarpanları yöntemiyle şu şekilde bulunur:

$$\tilde{W}_{opt} = \tilde{R}^{-1} \tilde{C} (\tilde{C}^T \tilde{R}^{-1} \tilde{C})^{-1} \tilde{f} \quad (3.35)$$

Sonuç olarak problem gerçel domene dönüştürülmüştür.

İkinci derece için denklemlerin yeni hali şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \text{Im}\{W^H v_\theta\} &= h_1, \quad \text{Im}\{W^H v_\phi\} = h_2, \quad \text{Im}\{W^H v_f\} = h_3 \\ \text{Re}\{W^H v_{\theta\theta}\} &= -h_1^2, \quad \text{Re}\{W^H v_{\phi\phi}\} = -h_2^2, \quad \text{Re}\{W^H v_{ff}\} = -h_3^2 \\ \text{Re}\{W^H v_{\theta\phi}\} &= -h_1 h_2, \quad \text{Re}\{W^H v_{f\phi}\} = -h_2 h_3, \quad \text{Re}\{W^H v_{\theta f}\} = -h_3 h_1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Bu gösterimle, (3.32) ifadesi doğrusaldır. Ancak h_i ler bilinmeyen değişkendirler ve tanımlanmaya ihtiyaçları vardır. Bu tanımlama için, iki adımlı bir optimizasyon işlemi gereklidir (Tseng, 1992). İlk adımda, optimum ağırlık vektörü, h_i ler cinsinden bulunur. İkinci adımda ise optimum ağırlık vektörü, h_i ler üzerinden minimize edilir. Birinci derece için şartlamaların sağlandığı varsayımıyla*, ikinci derece şartlama problemi şu şekli alır:

* Bu anlamlı bir varsayımdır. İkinci derece ifadelerin kullanılmasının nedeni birinci derece denklem kullanılıyor olmasının yeterli olmayışı olabilir. Bu durumda probleme ikinci derece denklemlerin eklenmesi anlamlıdır.

$$\min_{\tilde{W}} \tilde{W}^T \tilde{R} \tilde{W} \ni \tilde{C}^T \tilde{W} = \tilde{f}, \quad T^T \tilde{W} = h$$

$$T = \begin{bmatrix} \hat{v}_\theta & \hat{v}_\phi & \hat{v}_f & \hat{v}_{\theta\theta} & \hat{v}_{\phi\phi} & \hat{v}_{ff} & \hat{v}_{\theta\phi} & \hat{v}_{\phi f} & \hat{v}_{\theta f} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$h = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad -h_1^2 \quad -h_2^2 \quad -h_3^2 \quad -h_1 h_2 \quad -h_2 h_3 \quad -h_3 h_1]^T$$

İlk adım sonrasında:

$$\min_h \tilde{W}_{opt}^T(h_1, h_2, h_3) \tilde{R} \tilde{W}_{opt}(h_1, h_2, h_3)$$

$$\tilde{W}_{opt}(h_1, h_2, h_3) = \tilde{R}^{-1} Q (Q^T \tilde{R}^{-1} Q)^{-1} g \quad (3.38)$$

$$Q = [\tilde{C} \quad T], \quad g = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ h \end{bmatrix}$$

böylece problem:

$$\min_h g^T A g, \quad A = (Q^T \tilde{R}^{-1} Q)^{-1} \quad (3.39)$$

Son ifade dördüncü derece bir polinomdur ve katsayıları A ve $\tilde{f}$ tarafından tanımlanır. Bu ifadenin minimizasyonu nümerik doğrusal olmayan optimizasyon teknikleri ile sağlanabilir (Tseng, 1992). İstenen optimum vektör, h bulunup yerine konarak elde edilir. Problem doğrusal olmadığından (3.39)'yi sağlayan birden fazla yerel minimum noktası olabilir ve her yerel minimum nokta yeni bir optimum vektör adayı demektir.

3.3 Yönlendirmeden Bağımsız Şartlama

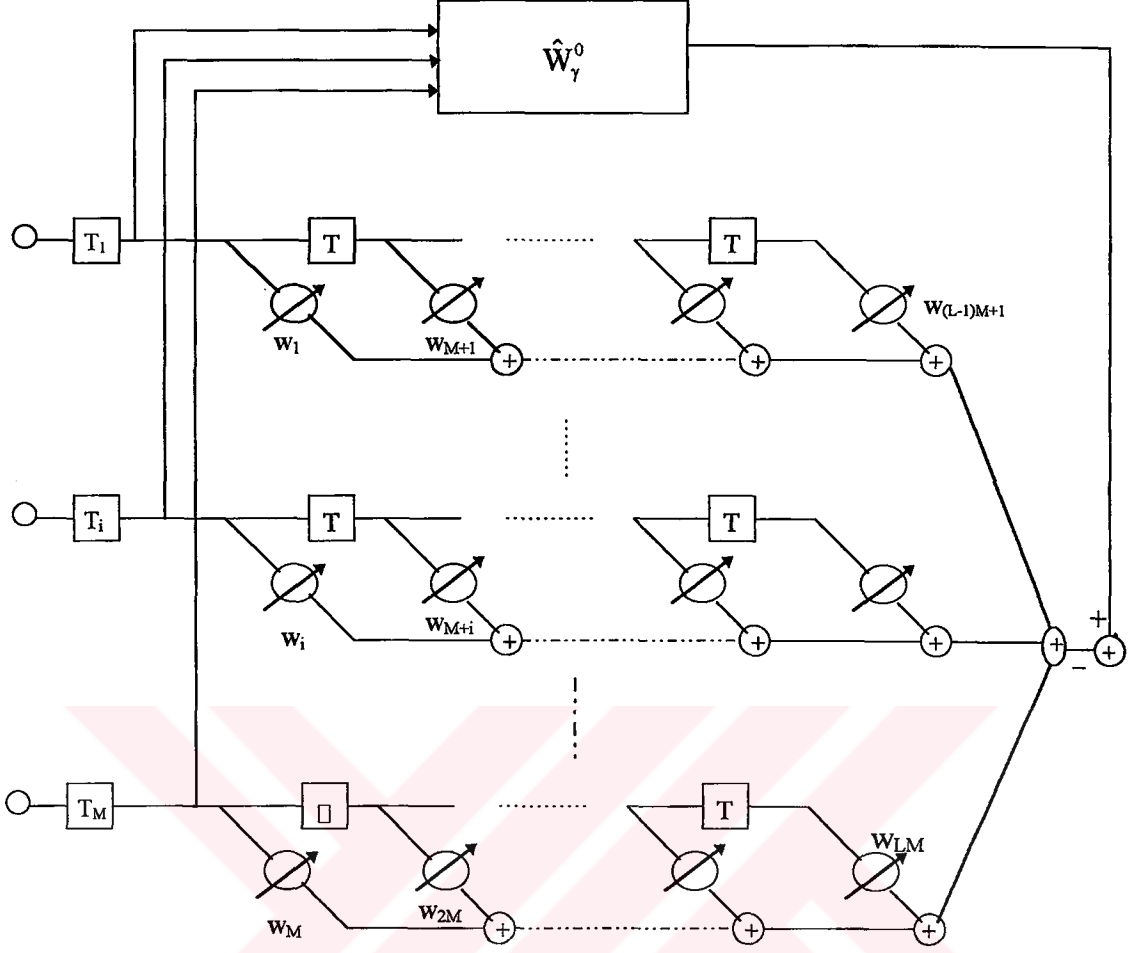
Frost tarafından ilk olarak önerilmiş (Frost, 1972) bir şartlama türü HŞ ile sinyal alımının ilk akla gelebilecek şeklidir. Bu şartlama türüne göre HŞ'nin hüzmesi istenilen sinyalin geliş doğrultusuna yönlendirilir. Bu yönlendirme işlemi daha önce de anlatıldığı gibi duyargaçları

takip eden yönlendirme zaman geciktirmeleri (tap delay lines) ile sağlanmaktadır. Şartlama takımı ise, duyarga dizisini takip eden gecikme hattının katsayılarını bir çok kanallı FIR (sonlu dürtü cevabı, “Finite Impuls Responce”) bir süzgeç oluşturulacak ve aynı zamanda çıkış gücünü minimize edecek şekilde seçilir (LCMVB problemi). Böylelikle çıkışta sağlanan sinyal, girişim artı gürültü oranı (Signal to İnterference Plus Noise Ratio, SINR) maksimize edilmiş olacaktır. Böylece hüzümenin yönlendirildiği doğrultuda istenilen frekans karakteristiğini taşıyan uzamsal-zamansal bir süzgeç elde edilmiş olur. Bu seçimle girişim sinyallerinin dolaylı olarak bastırılması sağlanmış olmaktadır. Bu işlemler sırasında yapılan varsayım ortamda istenilen sinyalle ilişkili girişim sinyallerinin olmadığıdır. Böyle bir durum bakış yönü doğrultusundaki istenilen sinyalin de bastırılmasına neden olmaktadır. Hüzme yönlendirme prensibinin ortaya çıkardığı önemli bir zorluk; her bakış yönü için yeni bir yönlendirme geciktirici takımına ihtiyaç duyulması ve her yeni doğrultu için yeni bir optimum ağırlık vektörü ve bunun elde edilmesi için de sistem uyarlamasızsa yeni bir özilişki matrisi hesabına ihtiyaç duyulmasıdır. Sistem uyarlamalı ise, bu durumda yeni doğrultu için yeni bir uyarlanma süresi gerekir.

Diğer taraftan duyarga çıkışları örnekleniyorsa, yönlendirme geciktirmeleri için bu örnekleme sürelerinin tam katlarının elde edilebilmesi söz konusudur. Bu durumda hüzme ancak belirli doğrultulara yönlendirilebilecek ve örnekleme sürelerinin tam katı olmayan gecikmeler gerektiren doğrultulara ise yönlendirme yapılamayacaktır. Bu durum uyarlamalı HŞ'nin istenilen sinyali bastırmasına neden olacaktır. Bu sorunu gidermenin bir yolu örnekleme periyodunun küsürlü katlarını sağlamak için *kısmı geciktirici süzgeçler* (fractional delay) kullanmak ya da *fonksiyon tamamlama* (interpolation) işlemleri yapmak olabilir. Ancak bu işlemde ek hesap yükü gerektirecektir.

Bu bölümde incelenecek olan doğrusal şartlama tipi yönlendirme hatalarına ya da sinyal modeli, ile gerçek ortamın modeli arasındaki hatalara karşı HŞ'nin bağışıklığını arttırmak amacıyla tasarlanmaktadır.

Duyarga sayısı M olan ve her kanalı $(L-1)$ adet gecikme elemanlı çok kanallı bir gecikme hattından oluşan bir HŞ varsayılın (Şekil (3.3)).



Şekil 3.3. Önyönlendirmeli parçalı hüzme şekillendirici

Bir HŞ için üç çeşit yönlendirme durumu mevcuttur. Bunlar; tam önyönlendirme, kısmi önyönlendirme ve önyönlendirmesiz olarak adlandırılabilirler. Bakış yönü (θ_0, ϕ_0) , için $[f_a, f_u]$ bantında istenilen frekans karakteristiğine en yakın yaklaşımı sağlayan $M \times L$ elemanlı ağırlık vektörü $\hat{W}_1^0, (\gamma=1)$, olsun. Şekildeki alt kolu oluşturan süzgeç ise, yine M kanallı ve her kanalı $(L-1)$ elemanlı gecikme hatından oluşmaktadır. Bu süzgeçin ağırlık vektörü W uyarlanabilir $M \times L$ elemanlı bir vektördür:

$$W^T = [w_1^T, w_2^T, \dots, w_L^T]$$

$$[w_k^T]_i = W_{(k-1)L+i} \begin{cases} k = 1, 2, \dots, L \\ i = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (3.40)$$

İfadede w_k , k . tap noktasının sütun ağırlıklarını içerir. Bir (θ, ϕ) doğrultusu için, alt süzgeçin frekans cevabı şu şekildedir:

$$H(f, \theta, \phi) = \sum_{k=1}^L S^T(f, \theta, \phi) T(f) w_k e^{-j2\pi f(k-1)T} \quad (3.41)$$

HŞ, üç farklı yönlendirme tipinden birine uygun olarak tasarlanır:

1. **Önyönlendirmesiz:** HŞ'nin frekans cevabında $T(f)$ bulunmaz.
2. **Kısmi Önyönlendirmeli:** Yönlendirme geciktirmeleri gerçek geciktirme sürelerine örnekleme aralığı T nin tam katları ile en yakın olarak seçilirler:

$$\begin{aligned} T_i &= M_i T, \quad i=1,2,\dots,M \\ M_i &= \left\lceil \frac{\tau_i + T_0}{T} \right\rceil, \quad i=1,2,\dots,M \\ M_i &= \left\lfloor \frac{\tau_i + T_0}{T} \right\rfloor, \quad i=1,2,\dots,M \end{aligned} \quad (3.42)$$

İfadedeki $\lfloor \alpha \rfloor$ ve $\lceil \alpha \rceil$ sembolleri sırasıyla α 'dan küçük en yakın tamsayı ve α 'dan büyük en yakın tamsayıyı göstermektedir. Duyargaçların örneklenme anları arasındaki sabit zaman farkı T_0 olarak gösterilmiştir. Bunun sonucu olarak:

$$|\tau_i + T_0 - T_i| = |\tau_i + T_0 - M_i T| < T, \quad i = 1,2,\dots,M \quad (3.43)$$

ve buradan da:

$$\begin{aligned}
S^T(f, \theta, \phi)T(f) &= a_0(f) \left[e^{j2\pi f \hat{\tau}_1}, e^{j2\pi f \hat{\tau}_2}, \dots, e^{j2\pi f \hat{\tau}_M} \right] \\
a_0(f) &= e^{j2\pi f \tau_0} \\
0 &\leq |\hat{\tau}_i| \leq T
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Yönlendirme gecikmeleri için farklı kuantalama biçimleri de söz konusu olabilir. Bu seçimler performansı etkilemektedir.

3. Tam Yönlendirme: Bu durumda genişbant geciktiricileri gerekli sürelerle eşittirler:

$$\begin{aligned}
T_i &= \tau_i + T_0 \Rightarrow \\
S^T(f, \theta, \phi)T(f) &= a(f)S_o^T \\
a(f) &= e^{-j2\pi f T_0} \\
S_o^T &= [1, 1, \dots, 1]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

3.3.1.1 Yönlendirme Şartlamalarının Elde Edilmesi:

Ek.1 de gösterildiği gibi, alt süzgecin güç cevabının ilgili frekans bantı boyunca integrali aşağıdaki eşitliği sağlamaktadır:

$$\int_{f_a}^{f_b} \rho(f, \theta, \phi) df = W^T Q_1 W \tag{3.46}$$

Ek.1’de tanımlanmış olan Q_1 , pozitif yarı kesin simetrik matristir. Bakış yönü doğrultusunda üst süzgecin istenilen frekans cevabı $A(f, \theta, \phi)$ olsun. Sinyal bastırımını önleyebilmek için alt süzgecin frekans karakteristiği, üst süzgecin frekans karakteristiğinin aktif olduğu bölgede sıfır olmalıdır:

$$W^T Q_I W = 0 \quad (3.47)$$

Simetrik matris olan Q_I 'in özdeğer ayrışımı şu şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned} Q_I &= \Gamma_I A_I \Gamma_I^T \\ \Gamma_I &= [e_1^I, e_2^I, \dots, e_{ML}^I] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Özvektörler ortagonal olup, Γ_I , matrisinin sütunlarını oluşturmaktadır. Elemanları köşegen boyunca büyüklük sırasıyla dizilmiş özdeğerler olan matris ise; A_I 'dir. Bu ayrışım kullanılarak (3.47) eşitliği şu şekilde yazılabilir:

$$W^T \Gamma_I A_I \Gamma_I^T W = 0 \quad (3.49)$$

Matrisi Q_I 'nin rankının n_I olduğu varsayılın, bu durumda eşitliğin sağlanabilmesi için gerek yeter koşul:

$$(e_i^I)^T W = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_I \quad (3.50)$$

Bu son eşitlik bir doğrusal şartlama ifadesidir ve önyönlendirmeden bağımsızdır. Bu şartlamalar, sinyal modeli ile gerçek sinyal ortamı arasındaki uyumsuzluklardan kaynaklanabilecek hataları da içine alarak genişletilebilir. Böylece HŞ'nin bu hatalara da bağışıklığı arttırılabilir.

Ek.1'de de gösterildiği gibi, üst ve alt süzgecin $p_1, p_2, \dots, p_m$ bağımsız parametrelerine bağlı olduğu $\hat{W}_s^0, \hat{W}_I^0$ yerine konularak görülebilir. Bu parametreler için yapılan hatalara bağışıklık sağlanabileceği verilecek olan eşitlikle gösterilebilir:

$$\int_{p_m - \Delta p_m/2}^{p_m + \Delta p_m/2} \dots \int_{p_1 - \Delta p_1/2}^{p_1 + \Delta p_1/2} \int_{f_a}^{f_b} \rho(f, \theta, \phi) df dp_1 \dots dp_m = W^T Q_g W \quad (3.51)$$

Yine bu durumda sinyal bastırımını önlemek için sağlanması gereken şart şu şekilde olacaktır:

$$W^T Q_g W = 0$$

$$Q_g = \Gamma_\gamma \Lambda_\gamma \Gamma_\gamma^T \quad (3.52)$$

$$(e_i^g)^T W = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_\gamma$$

Örneğin, istenilen sinyalin yönünde olan bir bozulma (perturbation) sonucu ya da bir başka ifadeyle sinyalin gerçek yönüyle hüzmengin yönlendirildiği doğrultu arasındaki uyumsuzluk sonucu HŞ'nin sinyali girişim sinyali gibi kabul edip bastırma eğilimine girmemesi için hüzmengin genişletilmesi benzer bir yaklaşımla sağlanabilir:

$$Q_2 = \int_{\theta - \Delta\theta/2}^{\theta + \Delta\theta/2} Q_1 d\theta \quad (3.53)$$

Şartlamaya ulaşmayı sağlayacak olan matris, Q_γ 'nin rankını saptayabilmek için bir karar eşiği belirlenir ve bu eşiği sağlayan n_γ değeri rank olarak tayin edilir:

$$\% \text{Tr} = \frac{100 \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i^\gamma}{\sum_{i=1}^{ML} \lambda_i^\gamma} \quad (3.54)$$

HŞ'nin serbetlik derecesini n_0 belirler. Cauchy-Schwartz eşitsizliğine göre:

$$W^T Q_\gamma W \leq \left(\sum_{i=n_0+1}^{ML} \lambda_i^\gamma \right) \|W\|_2^2 \quad (3.55)$$

Eşitsizlikte ele alınan özdeğerler en küçük özdeğerler olduğundan eşitsizliğin üst sınırını küçük tutmanın yolu W 'nin normunu küçük tutmaktır. Bu, doğrusal bir şartlama ile ağırlık vektörünün genliğinin sınırlanması yoluyla sağlanabilir. Bir başka deyişle; n_0 'ın seçimi performans açısından yani HŞ'nin alt kolu için sıfır kazanç istenen frekans ve doğrultularda düşük kazanç elde edilmesi açısından önemlidir.

3.3.2 Yönlendirme şartlamaları ve optimizasyon

Üst ve alt süzgeç çıkışları şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} y_u(t) &= X^T(t) \hat{W}_\gamma^o \\ y_a(t) &= X^T(t) W \end{aligned} \quad (3.56)$$

Bu gösterim sonucunda gerçek çıkış:

$$\begin{aligned} g(t) &= y_u(t) - y_a(t) \\ &= X^T(t) (\hat{W}_\gamma^o - W) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Bu durumda LCMVB problemi şu şekilde ifade edilir:

$$\min_W (\hat{W}_\gamma^o - W)^T R (\hat{W}_\gamma^o - W) \quad \text{s.t. } C^T W = 0 \quad (3.58)$$

Şartlama matrisi $C=[e_1^T, e_2^T, \dots, e_{n0}^T]^T$ 'dır. Sonuç olarak optimum ağırlık vektörü ve minimum çıkış gücü:

$$\begin{aligned}\hat{W}_{opt} &= \hat{W}_\gamma^0 - R^{-1}C(C^T R^{-1}C)^{-1}C^T \hat{W}_\gamma^0 \\ P(\hat{W}_{opt}) &= \hat{W}_\gamma^0 R^{-1}C(C^T R^{-1}C)^{-1}C^T \hat{W}_\gamma^0\end{aligned}\quad (3.59)$$

olacaktır.

3.4 Karesel Şartlamalar

Kısmi uyarlamalı duyargaç dizileri ile sinyal işleme sırasında yapılan varsayım, ortamda istenilen sinyalle ilişkili başka bir girişim sinyalinin olmadığıdır. Şayet böyle bir durum varsa, bloke edici kolun çıkışında bulunan istenmeyen ilişkili girişim sinyalleri, uyarlama düzeneği tarafından istenilen sinyalle benzetilmek üzere zamanda kaydırılıp ağırlıklandırılacaktır (Widrow et.al., 1982). Bunun nedeni uyarlamalı yapının çıkış gücünün minimize edilmesi esasına göre çalışıyor olmasıdır. Kısmi uyarlamalı sistemin alt kolunda istenen sinyalle ilişkili olan veri, üst koldaki istenilen sinyale çıkış gücünü minimize etmek için benzetilecektir. Ortamda ilişkili sinyallerin var olması pratikte sıkça karşılaşılan bir durumdur. Ortamda yayılan sinyalin yansımalar sonucu oluşan kopyalarının da HŞ üzerine gelmesi ya da istenilen sinyalin alınmasının önlenmesi için maksatlı bir yayının yapılması (jamming) böyle bir durumun oluşmasına neden olabilir. Pratikte böyle bir durumun önemli olması nedeniyle uyarlamalı yapıların bu sakıncanın üstesinden gelecek şekilde tasarlanmaları zorunluluğunu doğmaktadır. Bunun için uzamsal domende düzleme yapmak ya da frekans domeninde aynı yönteme başvurmak mümkündür (Bkz. 2.Bölüm). Bu yöntemlerle girişim sinyalleri ile istenilen sinyal arasındaki ilişki azaltılabilir. Ancak her iki yöntem de kendine özgü bazı kısıtlamalar içermektedir. Uzamsal düzleme, dizilim geometrisinde bazı zorunluluklar gerektirmesinin yanı sıra çözünürlüğün düşmemesi için duyargaç sayısının arttırılmasını gerekli kılar. Diğer yandan, frekans düzlemesi yalnız geniş bantlı sinyallerin varlığında söz konusu olabilmektedir ve işlem yükü fazladır. Bu olumsuzlukları önlemek ve sinyali gerçel

olarak işleyebilmek için (analitik forma çevirmeden) bir şartlama takımı geliştirmek mümkündür (Qian ve Van Veen, 1995).

HŞ'nin performansı çıkışın ortalama karesel hata (Mean Square Error, MSE) değerlendirilir:

$$\text{MSE} = E \left\{ |s - W^H X|^2 \right\} \quad (3.60)$$

Burada, $s = W^H S = W_0^H S$ HŞ'ye ait gürültüsüz çıkış ve istenen cevaptır. Eğer ağırlık vektörü W küçük bir MSE sağlıyorsa, istenilen sinyalin geçerli bir kestirimi elde edilmiş olur. Eğer gözlem vektörü X , istenilen sinyale ilişkin S ve gürültü ve girişimi içeren N vektörlerinin toplamı şeklinde ayrıştırılırsa, $R_n = E\{NN^H\}$ olmak üzere $\text{MSE} = W^H R_n W$ olarak yazılabilir. Gürültü ve girişime ait özilişki matrisi R_n 'e ilişkin özdeğer ayrışımı $R_n = U \Delta U^H$ olarak ifade edilir ve $R_n^{1/2} = U \Delta^{1/2}$ olarak tanımlanırsa, $R_n = R_n^{1/2} R_n^{H/2}$ olacaktır (Özdeğerleri köşegen boyunca içeren matris; Δ ve ilişkin özvektörleri sütunlarında bulunduran matris de U 'dur). Bunun sonucu da şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= r_i^H r_i \\ r_i &= R_n^{H/2} W \end{aligned} \quad (3.61)$$

İfadedeki r_i , HŞ'nin girişim vektörü olarak adlandırılır ve MSE'nin küçük tutulabilmesi için bu vektörün elemanlarının küçük tutulması sağlanmalıdır.

Eğer girişim sinyalleri istenilen sinyale ilişkisiz ise, bu durumda gözlem vektörüne ilişkin özilişki matrisi şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} R &= R_s + R_n \\ P_0 &= W^H R W = w_s^H R_s w_s + w_n^H R_n w_n = P_s + \text{MSE} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Eşitlikte P_o çıkış gücü, minimizasyon sonucu elde edilmiş minimum MSE durumunu ve P_s sinyalin gücünü gösterebilir. Bu durumdaki, w_a ve r_i , w_n ve r_n ile gösterilsin. $C_n^H R_s = 0$ olduğu gerçeğinden yola çıkarak ağırlık vektörünü yazmak mümkündür:

$$w_n = (C_n^H R_n C_n)^{-1} C_n^H R_n w_o \quad (3.63)$$

Bu son ifade ile $W = w_o - C_n^H w_o$ birleştirilirse bu durumda minimum MSE:

$$\text{MSE} = w_o^H R_n w_o - w_o^H R_n C_n^H (C_n^H R_n C_n)^{-1} C_n R_n w_o \quad (3.64)$$

Ancak, bazı girişim sinyalleri istenilen sinyal ile ilişkili ise çıkış gücünün minimizasyonu artık sözü edilen MSE'ye eşdeğer değildir.

$$\begin{aligned} R &= R_s + R_{ns} + R_{sn} + R_n \\ R_{ns} &= R_{sn}^H = E\{NS^H\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Eşitlerdeki R_{ns} , istenilen sinyal ile girişim arası çapraz ilişki matrisini sembolize etmektedir. Böyle bir durumda optimum ağırlık vektörü şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} w_a &= w_n + w_s \\ w_s &= (C_n^H R_n C_n)^{-1} C_n^H R_{ns} w_o \end{aligned} \quad (3.66)$$

Karşı düşen girişim vektörü ise şu şekildedir:

$$\begin{aligned} r_i &= r_n + r_s \\ r_s &= R_n^{H/2} C_n (C_n^H R_n C_n)^{-1} C_n^H R_{ns} w_o \end{aligned} \quad (3.67)$$

Eşitliklerdeki r_s , girişim ve istenilen sinyal arasındaki çapraz ilişki ve bunun sonucu olarak ortaya çıkan sinyal bastırımı etkisini ifade eder. Girişimin ve sinyal bloke matrisinin arakesit uzayına olan izdüşümü gösteren izdüşüm matrisi P olsun:

$$\begin{aligned} P &= R_n^{H/2} C_n (C_n^H R_n C_n)^{-1} C_n^H R_n^{1/2} \\ r_n &= (I - P) R_n^{H/2} w_0 \\ r_s &= P R_n^{1/2} R_{ns} w_0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Buradan açıkça görülmektedir ki; $r_n^H r_s = 0$ ve MSE bu sonuçlardan yararlanarak:

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= E_s + E_n \\ E_s &= r_s^H r_s = w_0^H R_{sn} C_n^H (C_n^H R_n C_n)^{-1} C_n^H R_{ns} w_0 \\ E_n &= r_n^H r_n = w_0^H R_n w_0 - w_0^H R_s C_n^H (C_n^H R_n C_n)^{-1} C_n^H R_n w_0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Ortamda ilişkili ya da uyumlu girişim kaynağı olmadığında erişilen MSE, E_n ve uyumluluk ya da ilişkililik varken eklenen MSE terimi ise E_s ile gösterilmiştir.

3.4.1 Karesel koşullamalı uyumlu hüzme şekillendirme

Doğrusal şartlamalı uyumlu hüzme şekillendirmenin (Linearly Constrained Adaptive Beamforming, LCAB), önemli bir problemi olan sinyal ile girişim arasındaki ilişkililiğin yol açtığı sorunun ortadan kaldırılabilmesi için, girişim ile sinyal arasındaki ilişki azaltılmalıdır. Bunun için düzleme yöntemlerinin haricinde bir başka yaklaşım; MSE'nin belirlenmiş bir değerden küçük olmaya zorlanması ile sağlanır:

$$W^H R_n W \leq \delta \quad (3.70)$$

Bu yeni yaklaşımla LCAB problemi şu şekli alır:

$$\min_{w_a^q} (w_0 - C_n w_a^q)^H R_n (w_0 - C_n w_a^q) \ni (w_0 - C_n w_a^q)^H R_n (w_0 - C_n w_a^q) \leq \delta \quad (3.71)$$

Gösterilmiştir ki; (Qian ve Van Veen, 1995) optimum girişim cevap vektörü şu şekildedir:

$$\begin{aligned} r_i^q &= r_s^q + r_n^q \\ r_n^q &= r_n \\ r_s^q &= \frac{1}{1+\lambda} r_s, \quad \lambda = \max \left\{ \sqrt{\frac{E_s}{\delta - E_n}} - 1, 0 \right\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Burada λ , Lagrange çarpanıdır. Şayet bu çarpan sıfır ise, karesel şartlama (KŞ) aktif değildir yani $MSE < \delta$ 'dir. Ancak sinyal bastırımı olduğunda $\lambda > 0$ olur ve KŞ aktif hale geçer. Dikkat edilceği gibi KŞ kullanıldığında sinyal ile girişim arası çapraz ilişki $1/(1+\lambda)$ oranında azalmaktadır. Böylece $r_i \approx r_n$ olmaya zorlanmaktadır. KŞ ile çıkışa ilişkin MSE şu şekildedir:

$$\begin{aligned} MSE^q &= E_n^q + E_s^q \\ E_n^q &= E_n \\ E_s^q &= \frac{1}{(1+\lambda)^2} E_s \end{aligned} \quad (3.73)$$

KŞ sayesinde E_n etkilenmeden E_s azaltılmıştır. Lagrange çarpanı sonsuza yaklaştırıldığında $W = w_0 - C_n w_n$ ve E_s 'in değeri sıfıra yaklaşmaktadır. Böylece sinyal bastırımı ortadan kalkmış olacaktır (R_n tam ranklı varsayılmıştır). Bu durumu sağlamak için, girişim özilişki matrisinin bilinmesi gereklidir. Ayrıca λ 'nın sonsuza yaklaştırılması HŞ'nin uyarlamalı olmayan bir yapıda olması anlamına gelmektedir. Çünkü bu durumda optimum ağırlık vektörü KŞ ile tamamen elde edilir. Uyarlamalı olmayan HŞ'nin sinyal bastırımına neden olmadığı düşünülürse uyarlamasız yapıların tercih edilmesi gerekir. Bu durum olumlu görünse de R_n

tam olarak bilinmemesi ve ancak kestirilebilir olması nedeniyle uyarlamalı olamayan yapılar sanılanın aksine kötü performans sergilerler.

3.4.2 Karesel şartlama tasarımı

Eğer R_n tam olarak bilinebilseydi uyarlamalı olamayan HŞ ile minimum MSE sağlanacak, sinyal bastırımı olmayacak ve bu çok daha az hesap yükü gerektirecekti. Ancak pratikte R_n 'in tam olarak bilinebilmesi mümkün değildir. Bu nedenle de uyarlamalı yapılar ile istenilen performansa yaklaştırmaya çalışmak çok daha akla yatkın bir yaklaşım olacaktır. Amaç, R_n 'nin bir kestirimi için bir KŞ takımı elde etmektir. İstenilen matrisin kestirilebilmesi için girişim sinyallerinin yönleri ve frekans dağılımları gibi özellikler kestirilmeye çalışılabilir. Bu tür kestirim yöntemleri 2.bölümde ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Örneğin J adet girişim sinyalinin var olduğu bir ortam için, gerçek girişim özilişki matrisi (ω_1, ω_2) gözlem yapılan frekans bantı olmak üzere:

$$R_n = \sum_{j=1}^J \int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\theta_j, \omega) a(\theta_j, \omega) a^H(\theta_j, \omega) d\omega + \sigma^2 I \quad (3.74)$$

Bu durumda çıkış MSE:

$$W^H R_n W = \sum_{j=1}^J \int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\theta_j, \omega) \left| W^H a(\theta_j, \omega) \right|^2 d\omega + \sigma^2 W^H W \leq \delta \quad (3.75)$$

olacaktır. HŞ'nin θ_j yönünde frekans cevabının genliği $|W^H a(\theta_j, \omega)|$ 'dir. Küçük MSE sağlamak için HŞ cevabı, $S(\theta_j, \omega)$ 'nin büyük olduğu yön ve frekanslarda küçük olmalıdır. HŞ, ilişkili girişim sinyalini, düşük güçlü de olsa, zamanda kaydırıp ağırlıklandırarak sinyali bastırma eğilimindedir. KŞ ile girişim sinyalleri doğrultularına sıfır konulmuş olmaktadır. HŞ, $S(\theta_j, \omega)$ 'ye uygun olarak bazı yönleri ve frekansları daha fazla ağırlıklandırır diğer

tarafından gürültünün gücü, σ^2 , HŞ'nin ağırlık vektörünün normunu kontrol etmektedir. Girişim parametrelerine ilişkin kestirim $\hat{\theta}_j$ olarak temsil edilirse girişime ilişkin özilişki matrisi şu şekilde yazılır:

$$\hat{R}_n = \sum_{j=1}^J \frac{1}{2A_j} \int_{\theta_j - A_j}^{\theta_j + A_j} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathbf{a}^H(\theta_j, \omega) \mathbf{a}(\theta_j, \omega) d\omega d\theta + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3.76)$$

Burada $S(\theta, \omega)$ sabit kabul edilmiştir.

Özilişki matrisi bir kestirimden ibaret olduğundan girişimin bastırımında uyarlamalı olmayan HŞ'nin performansı oldukça düşüktür. Öte yandan, KŞ ile şartlanmış uyarlamalı bir HŞ, gerçek ve kestirim girişim sinyal ortamının farklarından kaynaklanan hatalara, veriye uyarlandığından çok daha az hassastır. KŞ, HŞ'ye sıfır konulması gereken yerler için kılavuzluk eder ve HŞ uyarlama sayesinde bu yerleri bulur.

KŞ'nin tasarımında bir önemli noktada δ ya da λ 'nın seçimine ilişkindir. Farklı uyarlama yapıları için bu iki parametre arasında yapılacak tercih değişmektedir. (3.73)'e göre, λ , LCAB için sinyal bastırımında istenilen azalmayı sağlamak amacıyla seçilebilir. Örneğin $\lambda=24$ seçilirse sinyal bastırımındaki azalma faktörü 625'tir. Ancak pratikte özilişki matrisinin kestirimi söz konusu olduğundan bu azalma λ daha büyük bir değeri için söz konusu olabilir. Girişim artı gürültünün ve istenilen sinyalin gücünün bilinmemesi δ seçmek tercih edildiğinde seçimi zorlaştırmaktadır. Çünkü, δ istenilen sinyal gücünden büyük olurken girişim artı gürültü gücünden de küçük olmalıdır. Bu seçimin bir yolu, δ 'yı uyarlamalı olmayan HŞ çıkış gücü ile girişim bastırım faktörünün çarpımı olarak seçmektir. Girişim bastırım faktörü, uyarlamalı işlemle girişim çıkış gücü için istenilen bastırımı ifade eden büyüklüktür. Alternatif olarak istenilen λ değerine karşılık olan δ , E_n 'in sifıra eşitlenip, E_s 'in kestirilmiş sinyal gücüne eşit alınmasıyla elde edilmesi de olabilir.

3.5 Geniş Bant Gösterim Uzayı ve Uzamsal - Zamansal Süzgeçleme

İkinci bölümde geniş bant sinyal gösterim uzayı üzerinde durulmuştu. Bu gösterimden yararlanarak uzamsal-zamansal süzgeç tasarlamak mümkündür. Süzgeç tasarlanırken dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, HŞ'nin serbestlik derecesinin en iyi şekilde kullanılmasıdır.

Bir rank-1 sinyalin (dar bantlı) kontrolü için serbestlik derecesinin bir olması yeterlidir. Bu yönsel şartlamaya (ya da nokta şartlama) karşı düşer. Belli bir doğrultuya bir sıfır koyma ya da bu doğrultudan belirli bir genlikle sinyal almak bu şartlama ile yapılabilir*. Yine D adet dik sinyal ya da açılım vektörü için D adet serbestlik derecesi gerekmektedir. Genişletilmiş geniş bant sinyal uzayı (birden fazla geniş bant sinyalin varlığı durumunda problem uzayı *genişletilmiş* olarak adlandırılacaktır.) için özdeğerlerce saptanan boyut (rank) serbestlik derecesinin kullanımı açısından önemlidir. Çünkü; rank, serbestlik derecesini dolayısıyla, kaç adet bağımsız parametrenin kontrol edilebileceğini vermektedir. Ancak ne yazık ki; bu özdeğerleri değerlendirmek için sinyal frekansına, konumuna ve dizinin geometrisine bağlı direkt bir analitik yol mevcut değildir. Fakat, tek bir geniş bant sinyal söz konusu olduğunda D 'nin yani uzayın boyutunun saptanması mümkündür. Boyutun saptanmasında gözlem süresi** ve bant genişliği çarpımı önemli bir kriter olmaktadır. Bu önemi açıklamak için sürekli Karhunen-Loeve açılımından (Karhunen-Loeve Transform, KLT) faydalanılacaktır. Kaynak rasgele süreci $s(t)$ olsun. Bu rasgele sürecin $0 \leq t \leq T(\theta)$ HŞ gözlem süresi boyunca seriyeye açılabilirdi varsayalım:

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}(t) &= \sum_{j=1}^N s_j \Phi_j(t) \\ s_j &= \int_0^{T(\theta)} s(t) \Phi_j^*(t) dt \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq T(\theta) \quad (3.77)$$

* Düyarga çıkışları yalnız faz terimleriyle çarpılarak hüzmeye yönlendirilebilir.

** Gözlem süresi ile kastedilen HŞ'nin zaman örüntüsüdür. Yani bir gözlemle (snapshot) bir sinyalin gözleyebildiği zaman dilimini ifade eder.

Seriye açan taban fonksiyonlar $\Phi_j(t)$, ortonormaldirler. KLT açılımı, tam ortonormal bir açılımdır ve katsayıları bu yüzden ilişkisizdir ($E\{s_i s_j^*} = \lambda_j \delta_{ij}$). Burada taban fonksiyonlarının ortonormallikleri için gerek yeter koşulu şu şekilde çıkarılabilir:

$$\lambda_j \Phi_j(t) = \int_0^{T(\theta)} c(t-\tau) \Phi_j(\tau) d\tau \quad (3.78)$$

Burada $c(\tau)$ durağan ve sıfır ortalamalı rasgele süreç için özilişki fonksiyonudur. Yine ifadedeki λ_j ve $\Phi_j(t)$ sırasıyla özdeğer ve ilişkin özfonksiyondurlar. Ortagonallik sayesinde, N değeri arttıkça $\hat{s}(t)$ $s(t)$ 'ye karesel anlamda yaklaşır. İncelemenin bu kısmında pratikte bant sınırlı sinyallerle sıkça karşılaşılması nedeniyle (duyargaç karakteristikleri bant sınırlıdır) bu tür sinyaller ele alınacaktır. Şimdi sinyalin frekans bantı boyunca sabit enerji dağılımına sahip olduğu varsayalım. Bu durumda, $s(t)$ 'nin güç spektrumu ve özilişki fonksiyonu şu şekildedir:

$$P(\omega) = \begin{cases} \frac{p}{B_\theta} & , |\omega| \leq B_\theta \\ 0 & , |\omega| > B_\theta \end{cases} \Rightarrow c(\tau) = \frac{p \sin(B_\theta \tau)}{B_\theta \tau} \quad (3.79)$$

Özilişki fonksiyonu gerek ve yeter koşulda yerine konulursa elde edilen özdeğer ve özfonksiyonlar radyal yayvan küresel dalga fonksiyonlarıdır (Radial Prolate Spherical Wave Func., RPSWF). Ayrıca özfonksiyonlar, bant genişliği ve $H\hat{S}$ 'nin gözlem süresine bağımlı RPSWF'dirler.

Verilmiş bir B_θ bant genişliği, p gücü ve $T(\theta)$ gözlem süresi için özdeğerler şöyle verilir (Buckley, 1987):

$$\lambda_i = p T(\theta) \left[R'_{\alpha_j} (B_\theta T(\theta)/2, 1) \right]^2 \quad (3.80)$$

Eşitlikteki, $R_{mj}^n(h, \xi)$ radyal küresel fonksiyondur. Fonksiyona ait indis $m=0$ ise fonksiyon yayvan, $n=1$ fonksiyonun birinci tür olduğunu ve j de açılım indisini göstermektedir. Rasgele sürecin enerjisi, özdeğerlerin büyükten küçüğe indislendiği varsayılırsa ilk $B_\theta T(\theta)/\pi+1$ tanesinde yoğunlaşmıştır.

Bu durum bant geçiren sinyaller için de benzerdir. Bant sınırlı duruma göre tek fark merkez frekansın temel bant bölgesine kaymış olmasıdır.

Sonuç olarak geniş bant sinyal gösterim uzayına ilişkin boyut:

$$D_\theta \geq \lceil B_\theta T(\theta) / \pi + 1 \rceil \quad (3.81)$$

olacaktır. Gözlem sırasında duyargaç çıkışları örnekleniyorsa bu durumda ayrı KLT söz konusu olacaktır. Bu durum için elde edilen sonuçlar da benzerlik gösterecektir. Tek sinyal için özilişki matrisi ve uzayın boyutu şu şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned} R_\theta &= E\{S(t)S^T(t)\} = V_\theta A_\theta V_\theta^T \\ D_\theta &\geq \lceil B_\theta T(\theta) / \pi + 1 \rceil \end{aligned} \quad (3.82)$$

Zaman bant genişliği çarpımı, D_θ 'nın seçimi için önemli bir araçtır. HŞ uygulamalarında D_θ 'nın seçiminde daha pratik bir yöntem özdeğerlerin direkt olarak değerlendirilmesidir. Söz konusu çarpımdan büyük D_θ değerleri için özdeğer genlikleri ani bir düşüş göstermektedir (Buckley, 1987). Bu nedenle, $D \ll M \times L$ olacak şekilde uygun bir L seçilebilir. Boyutun seçimi, θ yönünde zorlanmış cevabın genliğine bağlıdır. Örneğin, %99 enerji, birim genlik ve doğrusal fazlı sinyal alımı için yeterli olurken, 40dB'lik geniş bantlı bir sıfır elde etmek için yetersiz kalmaktadır.

Bir örnek olması açısından, 10 duyargaç ve duyargaçları takiben her kanalı 15 gecikme elemanı içeren çok kanallı bir gecikme hattından oluşan HŞ ele alınsın. Duyargaç aralıkları

minimum dalga boyunun yarısı ve normalize edilmiş örnekleme aralıkları $T=1s$ olsun. Bu HŞ üzerine 45° 'den bir geniş bantlı bir düzlem dalga sinyal geldiği varsayalım. Sinyalin gücü normalize frekans değerleri $0,2Hz$ ile $0,4Hz$ arasında düzgün dağılımlı ve dışındaki bölgede sıfır alınmış kabul edilirse; geniş bantlı sinyal gösterim uzayının boyutu R_θ 'nin özdeğerleriyle tanımlanır. Böyle bir durum için: $\sqrt{B_{45}T(45)/\pi+1}=(0,4/14+10\sin45^\circ)+1 \approx 10$ olacaktır (Buckley, 1988). Boyut, $D_\theta=16$ seçildiğinde bütün frekanslarda $-50dB$ 'den az kayıp vardır. Öte yandan 150 serbestlik derecesinin sadece 16 'sı kullanılmaktadır (Buckley, 1987).

3.5.1 Şartlama altuzayında süzgeçleme

Şartlama denkleminin sağlanabilmesi bir deterministik HŞ problemidir. Problem, istenilen şartlamayı sağlayan altuzayı, C , ve cevap vektörünü, f , bulmaktır. Deterministik HŞ problemi, tek kanallı deterministik FIR süzgeç tasarım problemine çok benzerdir. Ancak bu problemler arasında önemli bazı farklılıklar bulunmaktadır. Öncelikle HŞ problemi, yalnız belirli bir frekansa bağlı değil aynı zamanda uzamsal olarak da süzgeçleme yapmaktadır. Öte yandan belirli bir konum için duyurgaç gecikme hattı yapısı, uzamsal-zamansal domende doğrusal olmayan örnekleme yapmaktadır.

Deterministik HŞ tasarımı için yöntem doğrudan FIR süzgeç tasarım yöntemlerinden faydalanmak olabilir. Deterministik FIR süzgeç tasarım yöntemleri başlıca ayrık Fourier dönüşümü (Discrete Fourier Transform, DFT) temelli ve frekans örnekleme temelli olmak üzere iki gruptur. Pencereleme ve Chebyshev yaklaşımı genel HŞ geometrilerine genişletilemezler. Ancak frekans örnekleme yöntemleri HŞ lere uygulanabilir. Bu yöntemler ile HŞ tasarımı cevap örnekleme tekniği olarak adlandırılır.

Cevap örnekleme tekniğini bir konum ve frekans bölgesi için direkt olarak uygulanırken, cevap örnek noktaları ve sayıları belirlenmelidir. Gerçek bir dizi için seçilmiş J adet nokta ((f, θ, ϕ)) için $2J$ adet şartlamanın elde edilişi EK.2'de gösterilmiştir. Örnek sayısı J arttıkça HŞ'nin serbestlik derecesi verimsiz kullanılmış olur ve şartlama matrisi kötü durumludur (ill conditioned). Küçük J içinse istenen cevap kontrolü sağlanamaz. Örnek sayısı sinyal örnekleme matrisinin özdeğer yapısıyla seçilebilse de (EK.2.7) kullanılarak elde edilen

şartlama altuzayı, $2J$ boyutlu sinyal gösterim uzayını sembolize etmez. Bir başka deyişle sinyal gösterim uzayının boyutu ile karar verilen örnek sayısı kadar alınan örnek, sinyal gösterim uzayını sembolize edemez (Bkz Şekil 2.2)).

Şartlama, altuzayının boyutu HŞ kontrol amacıyla kullanılan serbestlik derecesidir. Serbestlik derecesinin ikinci derece istatistiksel anlamda en iyi şekilde kullanılabilmesi için C 'nin sütunlarının geniş bant gösterim uzayının dik taban vektörlerinden oluşması gerekir. Bu seçimin ardından problem, cevabın kontrolü için cevap vektörünün seçimine indirgenir. Cevap vektörünün seçimi önemli bir konudur. Kötü seçilmiş cevap vektörü büyük norma sahiptir ve bu durum optimum ağırlık vektörünün de normunun büyük olmasına neden olur. Büyük normlu ağırlık vektörü ise HŞ çıkış MSE'nün büyük olmasına yol açar (girişimi bastırımı kötüdür.). Şartlama matrisinin tasarımında önerilecek yöntem cevabın şartlanacağı bölgelerde daha yoğun örneklemeye ve en küçük kareler (Least Squares, LS) yaklaşımına dayanacaktır.

3.5.1.1 Geniş bant gösterim uzayında süzgeçleme

Seçilmiş bir θ doğrultusu için belirli bir frekans bantının, B_θ kontrol edilmeye çalışıldığı varsayalım. EK.2'de (θ, ω_k) noktalarını kontrol için gerekli şartlama takımı çıkarılmıştır. Bu şartlamalar kullanılarak, seçilmiş J adet frekansın herbiri $\{\omega_k \in B_\theta; k=1,2,\dots,J\}$ için θ doğrultusundan gelen bir gerçel sinüsoid varsayılırsa kazanç d_k ve faz kayması ϕ_k olmak üzere şu eşitlik sağlanmak zorundadır:

$$\begin{bmatrix} c_\theta^T(\omega_k) \\ s_\theta^T(\omega_k) \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} d_k \cos \phi_k \\ d_k \sin \phi_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, J$$

$$c_\theta(\omega_k) = \left[\cos(\omega_k \tau_{1,\theta}), \dots, \cos(\omega_k (\tau_{k,\theta} - L + 1)) \right]^T$$

$$s_\theta(\omega_k) = \left[\sin(\omega_k \tau_{1,\theta}), \dots, \sin(\omega_k (\tau_{k,\theta} - L + 1)) \right]^T \quad (3.83)$$

Duyargaçların izotropik ve ortamın ideal olduğu varsayılmıştır. Geliş yönü θ doğrultusunda frekans boyunca doğrusal faz cevabı, $\phi_k = \omega_k \tau_0$, için (τ_0 , θ doğrultusuna ait HŞ için istenilen grup gecikmesidir); eşitlik matris formunda şu şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned} A_\theta^T W &= d_\theta \\ A_\theta &= [c_\theta(\omega_1), \dots, c_\theta(\omega_J), s_\theta(\omega_1), \dots, s_\theta(\omega_J)] \\ d_\theta &= [d_1 \cos \phi_1, \dots, d_J \cos \phi_J, d_1 \sin \phi_1, \dots, d_J \sin \phi_J]^T \end{aligned} \quad (3.84)$$

Son elde edilen eşitlik şartlama denklemdir. Bu şartlama direkt olarak uygulanırsa, şartlama tasarımına çoklu nokta şartlaması ile yaklaşılmış olur. Eğer $2J \ll ML$ ve A_θ tam ranklı ise ağırlık vektörünün LS yaklaşımı şöyledir:

$$g = A_\theta (A_\theta^T A_\theta)^{-1} d_\theta \quad (3.85)$$

Bu tarz yaklaşımın olumsuzluğu, seçilmiş J adet nokta ($J = D_\theta/2$, R_θ özilişki matrisinin özdeğerleri değerlendirilerek elde edilmiş olsa bile) için elde edilen A_θ matrisinin gergisi $2J$ boyutlu geniş bant gösterim uzayı ile aynı olmayışındandır. Bu nedenle R_θ , J 'nin seçimi için kullanılamaz. Öte yandan, her farklı ω_k kümesi için farklı bir şartlama matrisi elde edilirken sinyale ait enerjinin farklı bir yüzdesi temsil edilir. Hatta; eşit aralıklarla örnekler almak dahi örnekler arasında oluşan ‘‘ripple’’ları yayamaz (Buckley, 1987).

Bu sorunların üstesinden gelmek için etkin bir şartlam uzayı tanımlanmalıdır. Bunun için $J \gg D_\theta$ ve ω_k 'nin istenilen bantda düzgün dağılımlı olduğu varsayılın. Şartlama matrisi A_θ 'nin tekil değer ayrışımı (Singular Value Decomposition, SVD):

$$\begin{aligned}
A_{\theta}^T &= U_{\theta} \Sigma_{\theta} V_{\theta}^T \\
U_{\theta} &= [u_{1,\theta}, \dots, u_{2J,\theta}] \\
V_{\theta} &= [v_{1,\theta}, \dots, v_{ML,\theta}]
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Σ_{θ} , $2J \times ML$ boyulu köşegen tekil değer matrisidir. Dikkat edilirse:

$$A_{\theta} A_{\theta}^T = V_{\theta} \Sigma_{\theta}^T \Sigma_{\theta} V_{\theta}^T = R_{\theta} \tag{3.87}$$

ifadesi, θ doğrultusunda B_{θ} bantı üzerinden ve üniform ağırlık fonksiyonu $S_{\theta}(\omega)=1$ (düzgün örnekleme üniform ağırlığakarşı düşer) için bir geniş bant sinyaline ilişkin özilişki matrisinin nümerik hesabıdır. Bu nedenle sinyalin yeterli doğrulukta gösterilebilmesi için Σ_{θ} 'de D_{θ} tekil değer vardır. Bu durumda, A_{θ} 'nın D_{θ} rankı üzerinden genelleştirilmiş tersi şu şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned}
(A_{\theta}^T)^+ &= \bar{V}_{\theta} \Sigma_{\theta}^+ U_{\theta}^T \\
\bar{V}_{\theta} &= [v_{1,\theta}, \dots, v_{D_{\nu},\theta}] \\
U_{\theta} &= [u_{1,\theta}, \dots, u_{D_{\nu},\theta}]
\end{aligned} \tag{3.88}$$

İfadede görülen “+” genelleştirilmiş tersi sembolize etmektedir. Buradan, D_{θ} LS çözümün $\bar{V}_{\theta}$ 'nın gergisinde olduğu görülmektedir:

$$g = \bar{V}_{\theta} \{ \Sigma_{\theta}^+ \bar{V}_{\theta}^T d_{\theta} \} \tag{3.89}$$

Deterministik bir HŞ, g , $M \times L$ boyutlu sinyal gösterim uzayını yeterli olarak temsil edecek altuzaydan elde edildiğinden şartlama uzayı $\bar{V}_{\theta}$ gergisinde olacaktır. Buradan şartlam denklemi yazılacak olursa:

$$\begin{aligned}\bar{V}_\theta^T W &= f_\theta \\ f_q &= \Sigma_\theta^+ \bar{U}_\theta^T d_\theta\end{aligned}\tag{3.90}$$

Istenilen cevap vektörünün yaklaşımı buradan:

$$\hat{d}_\theta = A_\theta g = \bar{U}_\theta \{ \bar{U}_\theta^T d_\theta \}\tag{3.91}$$

Gerçek istenilen cevabın $\bar{U}_\theta$ üzerine izdüşümüdür. Bu matris A_θ^T 'nin sol temel vektörleridir ve gergisinin temel bileşenlerini içerir. Gerçek cevap istenilenin LS yaklaşımıdır. Yakınlık D_θ 'nin gözlem süresi bant genişliği çarpım değerinden büyük seçilmesiyle azalır. Bu hata, HŞ'nin genel yapısından kaynaklanmaktadır. Bu durum tek kanallı FIR süzgecin tasarımının sınırlaması ile benzerlik teşkil etmektedir. Örneğin tek kanal süzgeçlemede doğrusal faz simetrik darbe cevabı ve karşı düşen süzgecin zamansal uzunluğunun yarısına eşit grup gecikmesi ile elde edilir ve. HŞ de ise, θ konumundaki bir sinyal için. Yapı $M \times L$ adet ağırlıklı doğrusal olmayan bir FIR'a eşdir. Genelde simetrik cevap mümkün olmasa da grup gecikmesi zamansal uzunluğunun yarısına eşit seçilirse doğrusala yakın bir cevap elde edilir.

Özetle, incelenen ve önerilen özdeğer şartlamaları ile şartlama uzayı etkin olarak yapılandırılmış ve uyarlamalı HŞ'nin sabit kısmı, istenilen şartlamanın LS yaklaşımı olarak sağlamıştır. Çoklu cevap noktaları şartlamaları ile karşılaştırıldığında; bir geniş bantlı sinyali şartlamak için sabit sayılı şartlama kullanılmıştır. Bu özvektör şartlaması MSE kriterine göre en doğru cevap kontrolünü sağlamaktadır. Bu yönüyle FIR süzgeç tasarımında dikdörtgen pencerelemeye benzemektedir.

4. ALTUZAY YÖNTEMLERİ ve ASİMPTOTİK ANALİZ

Bu bölümde, altuzay sinyal yönü kestirim yöntemlerinin istatistiksel yeterlilikleri tartışılacaktır. Yöntemlerin doğrusal olmayan yapılarından dolayı istatistiksel özelliklerinin elde edilmesi oldukça zordur. Bu nedenle, asimptotik özelliklerinin incelenmesi tercih edilecektir. Yöntemlerin asimptotik davranışlarının bilinmesi, altuzay tekniklerinin nasıl daha etkin kılınabileceği konusunda fikir vermektedir. Örneğin, bir duyurga dizisi için; diziyi oluşturan eleman sayısı ve gözlem (snapshot) sayısının kestirimin performansını nasıl etkilediği incelenirken şu sonuca varılacaktır: Sabit eleman sayısı için, gözlem sayısı sonsuza yaklaştırılrsa da kestirimin varyansını sıfıra yakınsamaz. Diğer taraftan eleman sayısının sonsuza yaklaştırılması varyansın sıfıra yakınsaması için yeterlidir. Öyleyse, eleman sayısını arttırmanın performans açısından daha büyük önemi vardır. Bu durum tasarımcının gözardı edemeyeceği bir durumdur.

Bölümde ilk olarak gözlemler sonucu elde edilen kestirim uzamsal özilişki matrisi, $\hat{R}$ 'nin özdeğer ve öz vektörlerine ait limit değişinti ve ortalama değer elde edilecektir. Ardından yöntemlerin istatistiksel özelliklerinin yeterliliklerini kıyaslama açısından önemli bir ölçü olan Cramer Rao alt sınırı (Cramer Rao Lower Bound, CRLB) ifade edilecektir. Daha sonra MUSIC, ML, ESPRİT algoritmalarının limit davranışları incelenecek ve kıyaslanacaktır.

4.1 Özdeğer ve Özvektörlerin Limit İstatistikleri

Ölçümler sonucu kestirilen uzamsal özilişki matrisi, sonlu sayıda gözlem, dizi elemanlarının ideal olmayışı ve örnekleme hataları nedeniyle gerçek özilişki matrisine bir hata ile yaklaşır. Bu durum, kestirim özilişki matrisine ait özdeğer ve özvektörlerin de hatalı kestirimine neden olmaktadır. Özdeğer ve özvektörler bir rastlantı değişkeni olduğundan limit özelliklerinin bulunabilmesi için, rastlantı değişkenine ait limit dağılım ve yoğunluk fonksiyonları bilinmelidir.

Bu fonksiyonlar ve fonksiyonlar yardımıyla elde edilen ortalama değer ve değışinti, pertürbasyon teoreminden yararlanarak bulunacaktır (Wilkinson, 1965).

Öncelikle özilişki matrisi ve kestirimi arasındaki hatanın özdeğerleri ve özvektörleri nasıl etkilediğini görmek için cebrik fonksiyonlar konusuna ait iki teoreme kısaca değinilecektir.

4.1.1 Cebrik fonksiyonlar

Bu alt bölümde cebrik fonksiyonlar konusuna ait iki önemli sonuç tanıtına girilmeden verilecektir (Wilkinson, 1965). Bir cebrik fonksiyon şu şekilde yazılabilir:

$$f(x, y) = y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + p_{n-2}(x)y^{n-2} + \dots + p_1(x)y + p_0(x) \quad (4.1)$$

İfadede $p_i(x)$, x 'e bağlı bir polinomdur. Bu fonksiyonu x 'in her değeri için sıfır yapan n adet kök, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, bulunmaktadır. Fonksiyonun $f(0, y) = 0$ durumunda kökleri bu nedenle $y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0)$ olarak yazılır. Verilecek olan iki teorem şu şekildedir:

Teorem.1: Fonksiyonun $f(0, y) = 0$ durumu için $y_i(0)$ basit (tek katlı) kökü olsun. Bu durumda bir positif δ_i için $y_i(x)$ basit kökü şu şekilde tanımlanır:

$$y_i(x) = y_i(0) + p_{i1}x + p_{i2}x^2 + \dots \quad (4.2)$$

ve eşitliğin sağ tarafı $|x| < \delta_i$ için yakınsaktır.

Teoremde ele alınan $y_i(0)$ 'ın basit kök olması gereklidir ancak, diğer $f(0, y) = 0$ kökleri için bir varsayım söz konusu değildir. (4.2)'nin sağındaki seri $x \rightarrow 0$ iken $y_i(x) \rightarrow y_i(0)$ 'a yakınsar.

Teorem.2: Eğer $y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0), f(0,y)=0$ 'ın m katlı kökleri ise bir pozitif δ için; $|x| < \delta$ iken $f(0,y)=0$ 'a ait m adet sıfır vardır ve şu özelliklere sahiptir:

Söz konusu m kök; $m_1, m_2, \dots, m_r$ olmak üzere r adet gruba $\sum m_i = m$ olmak üzere ayrılabilir. Gruba ait kökler:

$$\begin{aligned} y_i(0) + p_{i1}z + p_{i2}z^2 + \dots \\ z = (x^{m_i})^{-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

serisinin z 'nin m_i farklı değerine karşı düşen, m_i adet değeridir. Bu teoremin sonucu olarak $r=1$ ise bir başka deyişle, $m_1=m$ ise; m adet kökün hepsi aynı kesirli kuvvet serisi ile gösterilir. Bir i değeri için $m_i=1$ ise karşı düşen kuvvet serisi kesirli değildir. Son olarak x sıfıra yaklaşırken m adet kök $y_1(0)$ 'a yakınsar.

Örneğin $f(x,y) = y^4 - y^2x(1+x)^2 + x^3(1+x^2)$ için $f(0,y)=0$ 'ı sağlayan $y=0$ dört katlı kökü vardır. Eşitliği sağlayan diğer kökler şu şekildedir:

$$y=x^2(1+x^2), y=x(1+x)^{1/2}, y=-x(1+x)^{1/2} \quad (4.4)$$

Bu durumda $m_1=2, m_2=1, m_3=1$ 'dir.

4.1.2 Basit özdeğerler için pertürbasyon teorisi

Keyfi iki matris A ve B ele alınsın ve matrislerin elemanlarının mutlak değerleri için şu varsayım kabul edilsin; $|a_{ij}| < 1, |b_{ij}| < 1$. Matris A 'nın basit bir özdeğeri λ olsun. Amaç ε çok küçük bir değer olmak üzere $(A + \varepsilon B)$ matrisinin özdeğerini bulmaktır. Özdeğerinin bulunması amaçlanan

matrisin, A matrisini kestirilmesi sonucu bulunduğu varsayılabilir. Söz konusu iki matrise ait karakteristik denklemler şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &\equiv \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_0 \\ \det(\lambda I - A - \varepsilon B) &\equiv \lambda^n + c_{n-1}(\varepsilon)\lambda^{n-1} + c_{n-2}(\varepsilon)\lambda^{n-2} + \dots + c_0(\varepsilon)\end{aligned}\quad (4.5)$$

İfadede; $c_r(\varepsilon)$, $(n-r)$ dereceli bir polinomdur ve $c_r(0)=c_r$ olarak alınacaktır. Daha önce ifade edilen teoremlerin yardımıyla kolaylıkla görüleceği gibi;

$$c_r(\varepsilon) = c_r + c_{r1}\varepsilon + c_{r2}\varepsilon^2 + \dots + c_{r,n-r}\varepsilon^{n-r} \quad (4.6)$$

olacaktır.

Basit kök λ_i , $\det(\lambda I - A)$ 'nin kökü ise teorem.1'den, yeterince küçük bir ε değeri için (4.4)'deki ikinci özdeşliğin basit kökü şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\lambda_1(\varepsilon) &= \lambda_1 + k_1\varepsilon + k_1\varepsilon^2 + \dots \\ \varepsilon \rightarrow 0 &\Rightarrow \lambda_1(\varepsilon) \rightarrow \lambda_1 \\ |\lambda_1(\varepsilon) - \lambda_1| &= 0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0\end{aligned}\quad (4.7)$$

Dikkat edilecek olursa $\lambda_i(\varepsilon)$ 'in λ_i 'e yakınsaması özdeğerlerin katlılığından bağımsızdır (teorem 2).

4.1.3 Özvektörlerin pertürbasyonu

Basit özdeğer λ_i 'ye ilişkin özvektör e_i olsun. Özdeğer basit olduğundan $(A - \lambda_i I)$ en az bir tane sıfır olmayan $(n-1)$ dereceli minöre sahiptir. Genelliği bozmadan bu minörün $(A - \lambda_i I)$ 'nin ilk $(n-1)$ sütununda olduğu varsayalım. Doğrusal denklemler teorisinden, e_i 'nin bileşenlerinin $(A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nn}; A_{ni}, (A - \lambda_i I)$ 'nin (n, j) . elemanın kofaktörü olmak üzere), λ_i 'nin derecesi $(n-1)$ 'den büyük olmayan bir polinomları olduğu söylenebilir.

Bu sonuç aynı şekilde $(A + \varepsilon B)$ matrisinin $\lambda_i(\varepsilon)$ basit özdeğerine ait özvektöre de uygulanırsa, özvektör $e_i(\varepsilon)$ 'nin elemanlarının $\lambda_i(\varepsilon)$ 'nin polinomu olacağı ve $\lambda_i(\varepsilon)$ yakınsak kuvvet serileri olduğundan $e_i(\varepsilon)$ 'nin yakınsak kuvvet serileri ile ifade edilebileceği açıktır. Bu durumda;

$$e_i(\varepsilon) = e_i + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots \quad (4.8)$$

yakınsak vektör serisi yazılabilecektir. Yine (4.8)'den yola çıkılarak şu sonuç görülebilir;

$$|x_i(\varepsilon) - x_i| = 0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.9)$$

Eğer A simetrik matris ise $e_i e_j = 0$ ($i \neq j$) olacaktır. Bir z_i vektörü bu dik özvektörlerle şu şekilde yazılabilir;

$$z_i = \sum_{j=1}^n s_{ji} e_j \quad (4.10)$$

Buradan da;

$$\begin{aligned}
e_i(\varepsilon) &= e_i + \varepsilon \sum_{j=1}^n s_{ji} e_j + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^n s_{j2} e_j + \dots \\
&= (1 + \varepsilon s_{11} + \varepsilon^2 s_{12} + \dots) e_1 + (\varepsilon s_{21} + \varepsilon^2 s_{22} + \dots) e_2 + \dots + (\varepsilon s_{n1} + \varepsilon^2 s_{n2} + \dots) e_n
\end{aligned} \tag{4.11}$$

yazılabilecektir. Parantez içindeki seriler yakınsak kuvvet serileridir. İnceleme sırasında $e_i(\varepsilon)$ 'nin çarpanıyla ilgilenilmediğinden, ifade $(1 + \varepsilon s_{11} + \varepsilon^2 s_{12} + \dots)$ terimine bölünebilir. Böylece ifade şu şekli alır:

$$e_i(\varepsilon) = e_i + (\varepsilon t_{21} + \varepsilon^2 t_{22} + \dots) e_2 + \dots + (\varepsilon t_{n1} + \varepsilon^2 t_{n2} + \dots) e_n \tag{4.12}$$

Parantez içindeki seriler halen yakınsaktır. Özvektör e_i 'nin normu "1" olacak şekilde normalize edilirse bu durum t_{ij} 'ye bir çarpan getirecektir.

4.1.4 Özdeğerlerin birinci derece pertürbasyonu

Özdeğer ve özvektör eşitliklerinden yola çıkılarak:

$$\begin{aligned}
(A + \varepsilon B) e_i(\varepsilon) &= \lambda_i(\varepsilon) e_i(\varepsilon) \\
A \left(\sum_{j=2}^n t_{ji} e_j \right) + B e_i &= \lambda_i \left(\sum_{j=2}^n t_{ji} e_j \right) + k_i e_i \\
\sum_{j=2}^n (\lambda_i - \lambda_j) t_{ji} e_j + B e_i &= k_i e_i
\end{aligned} \tag{4.13}$$

yazılabilir. Yine bir tanımla;

$$\beta_{ij} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{B} \mathbf{e}_j \Rightarrow$$

$$|\beta_{ij}| \leq \|\mathbf{B}\|_2 + \|\mathbf{e}_i\|_2 + \|\mathbf{e}_j\|_2 \leq n \quad (4.14)$$

ve $s_i = \|\mathbf{e}_i\|$ olmak üzere şu sonuca varmak mümkündür:

$$k_1 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{B} \mathbf{e}_1 = \beta_{11} / s_1$$

$$|k_1| \leq n / |s_1| \quad (4.15)$$

Yeterince küçük ε için λ_1 pertürbasyonundaki ana terim $k_1 \varepsilon$ 'dur. Bu nedenle bu özdeğerin duyarlılığı s_1 'e bağlıdır ve s_1 keyfi olarak küçük bir değerdir.

4.1.5 Özvektörlerin birinci derece pertürbasyonları

(4.5) ifadesi soldan $\mathbf{e}_i^T$ ile çarpılırsa;

$$(\lambda_i - \lambda_1) t_{i1} s_i + \beta_{i1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (4.16)$$

bu durumda, (4.12) eşitliğindeki birinci derece terim, $\mathbf{e}_1$ 'in pertürbasyonu şu şekilde verilebilir:

$$\varepsilon \left[\frac{\beta_{21} \mathbf{e}_2}{(\lambda_1 - \lambda_2) s_2} + \frac{\beta_{31} \mathbf{e}_3}{(\lambda_1 - \lambda_3) s_3} + \dots + \frac{\beta_{n1} \mathbf{e}_n}{(\lambda_1 - \lambda_n) s_n} \right] \quad (4.17)$$

Eğer λ_1 diğer özdeğerlerden herhangi birine yakın ise $\mathbf{A}$ 'daki pertürbasyona duyarlı, ancak

diğerlerinden uzak ise s_i değerlerinin hiçbirisi küçük olmayacağından pertürbasyona duyarlı olacaktır.

4.1.6 Yüksek derece pertürbasyonlar

Yüksek dereceli pertürbasyon için ifadeler aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned} A\left(\sum_{i=2}^n t_{i2} e_i\right) + B\left(\sum_{i=2}^n t_{i1} e_i\right) &= k_2 e_1 + k_1 \left(\sum_{i=2}^n t_{i1} e_i\right) + \lambda_1 \left(\sum_{i=2}^n t_{i2} e_i\right) \\ \sum_{i=2}^n t_{i2} (\lambda_i - \lambda_1) e_i + B\left(\sum_{i=2}^n t_{i1} e_i\right) &= k_2 e_1 + k_1 \left(\sum_{i=2}^n t_{i1} e_i\right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Bu ifade soldan e_i^T ile çarpılırsa sonuç şu şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n t_{i1} \beta_{1i} &= k_2 s_1 \\ k_2 &= \frac{1}{s_1} \sum_{i=2}^n \frac{\beta_{1i} \beta_{1i}}{s_i (\lambda_1 - \lambda_i)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ancak yüksek dereceli terimler pratik açıdan fazla önem taşımazlar.

Özdeğerler katlı ve tek bir grup oluşturuyorsa, $\epsilon^{1/m}$ nin kuvvet serileri ile ifade edilebilirler (Teorem.2). Ancak birden fazla grup için başka kesirli kuvvetler de söz konusu olmaktadır. Katlı özdeğerlerin karakteristik polinomlardan yola çıkılarak incelenmesi gereksiz karmaşıklık taşımaktadır. Bu nedenle alternatif bir analiz söz konusudur (Wilkinson, 1965). Bu konunun ayrıntıları incelemenin konusu dışında olduğundan bir kenara bırakılarak özdeğer ve özvektörlerin istatistiksel özelliklerine geçilecektir.

4.1.7 Kestirim özdeğer ve özvektör istatistikleri

Kestirim sonucu elde edilen özilişki matrisi $\hat{R}$ 'nin ε pertürbasyon faktörüne sahip olduğu varsayılın ($0 < \varepsilon \ll 1$):

$$\hat{R} = R + (\hat{R} - R) = R + \varepsilon B \quad (4.20)$$

İfadedeki B hermitian, sıfır ortalamalı matris ve elemanları asimptotik Gauss dağılımlıdır. Bir A_i , $i=1,2,3,4$, kompleks vektörü için şu eşitlik geçerlidir (Kaveh ve Barabell, 1986):

$$E\left\{\left(A_i^H B A_j\right)\left(A_k^H B A_l\right)\right\} = \frac{\left(A_i^H B A_k\right)\left(A_j^H B A_l\right)}{N\varepsilon^2} \quad (4.21)$$

Kestirim sinyal özvektörü için (4.4) eşitliği tekrar düzenlenirse;

$$\hat{e}_i = e_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{kj}^{(i)} p^k \right) e_j \quad (4.22)$$

elde edilebilir. Burada, d sinyal sayısını göstermektedir. Pertürbasyon faktörünün birinci dereceden büyük değerleri ihmal edilerek ve e_i vektörleri ortanormal kabul edilerek şu sonuçlara ulaşmak mümkündür;

$$\begin{aligned} |\hat{e}_i|^2 &\cong 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \left| t_{ij}^{(i)} \right|^2 \varepsilon^2 \\ |\hat{e}_i|^{-1} &\cong 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \left| t_{ij}^{(i)} \right|^2 \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

ve

$$\mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{e}}_i |\hat{\mathbf{e}}_i|^{-1} = \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d |t_{1j}^{(i)}|^2 \varepsilon^2 \right) \mathbf{e}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d t_{1j}^{(i)} \varepsilon \mathbf{e}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d t_{2j}^{(i)} \varepsilon^2 \mathbf{e}_j \quad (4.24)$$

elde edilir. (4.23) ve (4.19)'dan $t_{kj}^{(i)}$;

$$t_{1j}^{(i)} = \frac{\mathbf{e}_j^H \mathbf{B} \mathbf{e}_i}{\lambda_j - \lambda_i} \quad (4.25)$$

$$t_{2j}^{(i)} = \frac{(\mathbf{e}_i^H \mathbf{B} \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j^H \mathbf{B} \mathbf{e}_i)}{(\lambda_j - \lambda_i)^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \frac{(\mathbf{e}_j^H \mathbf{B} \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k^H \mathbf{B} \mathbf{e}_j)}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_k - \lambda_j)}$$

olarak yazılabilir. Özvektör $\hat{\mathbf{e}}_i$ 'nin beklendik değeri $E\{t_{1j}^{(i)}\} = 0$ olduğundan, $E\{|t_{1j}^{(i)}|^2\}$ ve $E\{t_{2j}^{(i)}\}$ 'yi içerir. (4.15)'den ve $\mathbf{e}_i^H \mathbf{R} \mathbf{e}_j = \lambda_i \delta_{ij}$ eşitliğinden;

$$E\{|t_{1j}^{(i)}|^2\} = \frac{\lambda_i \lambda_j}{(\lambda_i - \lambda_j)^2 N \varepsilon^2}, \quad i \neq j \quad (4.26)$$

$$E\{t_{2j}^{(i)}\} = 0$$

olduğu gösterilebilir. Buradan da $\hat{\mathbf{e}}_i$ 'nin beklendik değeri;

$$E\{\hat{\mathbf{e}}_i\} \cong \mathbf{e}_i - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \frac{\lambda_i \lambda_j}{(\lambda_j - \lambda_i)^2 N} \mathbf{e}_j \quad (4.27)$$

olacaktır. (4.16) ve $\hat{\mathbf{e}}_i$ 'nin tanımından şu yaklaşım elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j) &\cong \text{cov}(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j) - \frac{1}{2} \left\{ \text{cov} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ K \neq i}}^d |t_{1k}^{(i)}|^2 \varepsilon^2 \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \right) + \text{cov} \left(\hat{\mathbf{e}}_i, \sum_{\substack{k=1 \\ K \neq j}}^d |t_{1k}^{(j)}|^2 \varepsilon^2 \hat{\mathbf{e}}_j \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \text{cov} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ K \neq i}}^d |t_{1k}^{(i)}|^2 \hat{\mathbf{e}}_i, \sum_{\substack{k=1 \\ K \neq j}}^d |t_{1k}^{(j)}|^2 \hat{\mathbf{e}}_j \right) \varepsilon^4 \end{aligned} \quad (4.28)$$

İfadenin son üç terimi incelendiğinde, sıfır ortalamalı kompleks Gauss matrisi B'nin üçüncü ve daha yüksek dereceli momentlerini içerdiği görülmektedir. Bu nedenle tek dereceli momentler sıfır olurken, diğerleri derece olarak N^2 den küçük ya da eşit olduğundan ifade şu şekli alır:

$$\text{cov}(\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j) \cong \text{cov}(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j) + o(N^{-2}) \quad (4.29)$$

Buradan $E\{\hat{\lambda}_i\} = \lambda_i + o(N^{-1})$, $\text{cov}(\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j) = \delta_{ij} \frac{\lambda_i^2}{N}$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} \text{cov}(\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j) &\cong \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^d \frac{\lambda_k \lambda_k}{(\lambda_i - \lambda_k)^2 N} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^H \delta_{ij} \\ \text{cov}(\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j) &\cong \frac{\lambda_i \lambda_j}{(\lambda_i - \lambda_j)^2 N} \mathbf{s}_j \mathbf{s}_i^H (1 - \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilecektir (Kaveh ve Barabell, 1986).

4.2 Cramer Rao Alt Sınırı

Cramer Rao Alt Sınırı (Cramer Rao Lower Bound, CRLB) konum kestirim yöntemlerinin kıyaslanması için önemli bir kriterdir. Kestirimin yeterliliği kestirim performansının bu sınıra yakınlığı ile ölçülür. CRLB çıkarımına geçilmeden önce bir dizi varsayım sunulacaktır:

V1: $M > d$ ve $\mathbf{a}(\theta)$ yönlendirme vektörü, $(n-1)$ adet θ değeri için doğrusal bağımsızdır.

V2: Gözlem vektörü, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$, ait gürültü bileşeni, $\mathbf{n}(t)$ olmak üzere; $E\{\mathbf{n}(t)\} = 0$, $E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)\} = \sigma^2 \mathbf{I}$ ve $E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(t)\} = 0$ varsayılacaktır.

V3: Gözlem vektörüne ait gürültü bileşeni, $\mathbf{s}(t)$ olmak üzere; $\mathbf{R}_s = E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\}$ tekil olmayan matris ve $N > M$ 'dir.

V4: $E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(k)\} = E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(k)\} = 0$, $t \neq k$ ve $\mathbf{n}(t)$ Gauss dağılımlıdır. Bu son varsayım ML kestirim yöntemi için kullanılacaktır.

Bu varsayımlar altında olabilirlik fonksiyonu $\mathbf{x}(1)$, $\mathbf{x}(2)$, ..., $\mathbf{x}(N)$ gözlem vektörleri için şu şekilde yazılır:

$$L(\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N)) = \frac{1}{(2\pi)^{MN} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{MN}} e^{-\frac{1}{\sigma} \sum_{t=1}^N [\mathbf{x}(t) - \mathbf{As}(t)]^T [\mathbf{x}(t) - \mathbf{As}(t)]} \quad (4.31)$$

Dikkat edilecek olursa, gözlem vektörlerinin elemanları bilinmeyen bir deterministik fonksiyonun noktaları olarak kabul edilmişlerdir.

Olabilirlik fonksiyonunun parametrelerine bağlı olarak değişimini analiz ederek CRLB ifadesine ulaşabilmek için fonksiyonun σ , $\mathbf{x}(t)$ gözlem vektörünün gerçel ve sanal (imajinal) kısımlarına ve θ ya göre türevleri alınacaktır:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \text{Re}\{\mathbf{x}(k)\}} &= \frac{1}{\sigma} [A^H \mathbf{n}(k) + A^T \mathbf{n}^*(k)] = \frac{2}{\sigma} \text{Re}\{A^H \mathbf{n}(k)\} \\ \frac{\partial \log L}{\partial \text{Im}\{\mathbf{x}(k)\}} &= \frac{1}{\sigma} [-iA^H \mathbf{n}(k) + iA^T \mathbf{n}^*(k)] = \frac{2}{\sigma} \text{Im}\{A^H \mathbf{n}(k)\} \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, N \\
& \frac{\partial \log L}{\partial \theta_i} = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re} \left\{ \mathbf{x}^H(t) \frac{dA^H}{d\theta_i} \mathbf{n}(t) \right\} = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re} \left\{ \mathbf{x}_i^H(t) \frac{dA^H}{d\theta_i} \mathbf{n}(t) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (4.32) \\
& = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re} \{ \mathbf{X}^H(t) \mathbf{D}^H \mathbf{n}(t) \}
\end{aligned}$$

Bu son ifadede $\mathbf{D} = \text{diag} \left[\frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta_1} \quad \dots \quad \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta_d} \right]$ ve $\mathbf{X}(t) = \text{diag}[\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N)]$ 'dir.

Bu noktadan daha ileri gitmeden önce, $s_i(t)$ i . kaynak sinyalini temsil etmek ve $\mathbf{S}(t) = \text{diag}[s_1(t), s_2(t), \dots, s_d(t)]$ olmak üzere bir dizi sonuç sunulacaktır (tanıtları için bkz. Stoica ve Nehorai, 1989):

$$\text{S1:} \quad E\{\mathbf{n}^H(t) \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(s) \mathbf{n}(s)\} = \begin{cases} M^2 \sigma^2 & t \neq s \\ m(m+1) \sigma^2 & t = s \end{cases}$$

$$\text{S2:} \quad E\{\mathbf{n}^H(t) \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(s)\} = 0, \quad \forall t, s$$

S3:

$$\text{Re}\{s\} \text{Re}\{\mathbf{x}^T\} = \frac{1}{2} [\text{Re}\{\mathbf{s} \mathbf{x}^T\} + \text{Re}\{\mathbf{s} \mathbf{x}^H\}]$$

$$\text{Im}\{s\} \text{Im}\{\mathbf{y}^T\} = -\frac{1}{2} [\text{Re}\{\mathbf{s} \mathbf{y}^T\} - \text{Re}\{\mathbf{s} \mathbf{y}^H\}]$$

$$\text{Re}\{\mathbf{x}\} \text{Im}\{\mathbf{y}^T\} = -\frac{1}{2} [\text{Im}\{\mathbf{s} \mathbf{x}^T\} - \text{Im}\{\mathbf{s} \mathbf{x}^H\}]$$

S4: Tekil olmayan bir kompleks matris $\mathbf{H}$ ve tersi $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$ olsun, $\mathbf{G}$ ile $\mathbf{H}$ arasındaki ilişki şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \text{Re}\{H\} & -\text{Im}\{H\} \\ \text{Im}\{H\} & \text{Re}\{H\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{G\} & -\text{Im}\{G\} \\ \text{Im}\{G\} & \text{Re}\{G\} \end{bmatrix}$$

Bu sonuçların ardından yeniden Cramer Rao sınırı (Cramer Rao Bound, CRB) özilişki matrisinin elde edilmesine devam edilebilir. S1 sonucundan faydalanılarak;

$$\Psi^T = \frac{\partial \log L}{\partial [\sigma \text{Re}\{x^T(1)\}, \text{Im}\{x^T(1)\}, \dots, \text{Re}\{x^T(N)\}, \text{Im}\{x^T(N)\}, \theta^T]} \quad (4.43)$$

$$\Omega = E\{\Psi\Psi^T\}^{-1}$$

S1 sonucundan yararlanılarak şu ifadeler elde edilebilir;

$$\begin{aligned} E\left\{\frac{\partial \log L}{\partial \sigma}\right\}^2 &= \frac{M^2 N^2}{\sigma^2} - 2 \frac{MN}{\sigma^3} \sum_{t=1}^N E\{n^H(t)n(t)\} + \frac{1}{\sigma^4} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N E\{n^H(t)n(t)n^H(s)n(s)\} \\ &= \frac{M^2 N^2}{\sigma^2} - 2 \frac{M^2 N^2}{\sigma^2} + \frac{MN}{\sigma^2} [(N-1)M + (M+1)] = \frac{MN}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

S2 kullanılarak $\partial \log L / \partial \sigma$ 'nın diğer türevlerle ilişkili olmadığı görülebilir. Böylece aranan türevler şu şekilde elde edilecektir:

$$\begin{aligned} E\left\{\frac{\partial \log L}{\partial \text{Re}\{x(k)\}} \left(\frac{\partial \log L}{\partial \text{Re}\{x(p)\}}\right)^T\right\} &= -\frac{4}{\sigma^2} \frac{1}{2} \text{Re}\{E\{A^H n(k)n^H(p)A\}\} \\ &= \frac{2}{\sigma} \text{Re}\{A^H A\} \delta_{k,p} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \frac{\partial \log L}{\partial \text{Re}\{\mathbf{x}(k)\}} \left(\frac{\partial \log L}{\partial \text{Im}\{\mathbf{x}(p)\}} \right)^T \right\} &= -\frac{4}{\sigma^2} \frac{1}{2} \text{Im} \left\{ E \left\{ A^H \mathbf{n}(k) \mathbf{n}^H(p) A \right\} \right\} \\
 &= \frac{2}{\sigma} \text{Im} \{ A^H A \} \delta_{k,p}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \frac{\partial \log L}{\partial \text{Re}\{\mathbf{x}(k)\}} \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta} \right)^T \right\} &= -\frac{4}{\sigma^2} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ E \left\{ A^H \mathbf{n}(k) \mathbf{n}^H(t) D S(t) \right\} \right\} \\
 &= \frac{2}{\sigma} \text{Re} \{ A^H D S(k) \}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \frac{\partial \log L}{\partial \text{Im}\{\mathbf{x}(t)\}} \left(\frac{\partial \log L}{\partial \text{Im}\{\mathbf{x}(p)\}} \right)^T \right\} &= -\frac{4}{\sigma^2} \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ E \left\{ A^H \mathbf{n}(k) \mathbf{n}^H(t) A \right\} \right\} \\
 &= \frac{2}{\sigma} \text{Re} \{ A^H A \} \delta_{k,p}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \frac{\partial \log L}{\partial \text{Im}\{\mathbf{x}(k)\}} \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta} \right)^T \right\} &= -\frac{4}{\sigma^2} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} \text{Im} \left\{ E \left\{ S^H(t) D^H \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(k) A \right\} \right\}^T \\
 &= \frac{2}{\sigma} \text{Im} \{ S^H(k) D^H A \}^T \\
 &= \frac{2}{\sigma} \text{Im} \{ A^H D S(k) \}^T
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \frac{\partial \log L}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta} \right)^T \right\} &= -\frac{4}{\sigma^2} \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \text{Re} \left\{ E \left\{ \mathbf{x}^H(t) D^H \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(s) D S(s) \right\} \right\} \\
 &= \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \text{Re} \{ S^H(t) D^H D S(t) \} = \Gamma
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\text{var}_{CR}(\sigma) = \sigma^2 / MN$$

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\sigma} \mathbf{A}^H \mathbf{A}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$$

$$\mathbf{A}_k = \frac{2}{\sigma} \mathbf{A}^H \mathbf{DS}(k)$$

(4.41)

İfadelerde kullanılan $\mathbf{H}$, hermitian matrix olduğundan $\text{Im}\{\mathbf{H}\}^T = -\text{Im}\{\mathbf{H}\}$ 'tır. Bu durumda, $\mathbf{\Omega}$ şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \text{var}_{CR}^{-1}(\sigma) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{H}\} & -\text{Im}\{\mathbf{H}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{H}\} & \text{Re}\{\mathbf{H}\} \end{bmatrix} & 0 & \dots & \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{A}_1\} \\ \text{Im}\{\mathbf{A}_1\} \end{bmatrix} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{H}\} & -\text{Im}\{\mathbf{H}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{H}\} & \text{Re}\{\mathbf{H}\} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{A}_N\} \\ \text{Im}\{\mathbf{A}_N\} \end{bmatrix} \\ 0 & \text{Re}\{\mathbf{A}_1^T\} & \text{Im}\{\mathbf{A}_1^T\} & \dots & \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{A}_N^T\} & \text{Im}\{\mathbf{A}_N^T\} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Böylece aranan CRB'un tersi;

$$\text{CRB}^{-1}(\theta) = \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{A}_1^T\} & \text{Im}\{\mathbf{A}_1^T\} & \dots & \text{Re}\{\mathbf{A}_N^T\} & \text{Im}\{\mathbf{A}_N^T\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{G}\} & -\text{Im}\{\mathbf{G}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{G}\} & \text{Re}\{\mathbf{G}\} \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{G}\} & -\text{Im}\{\mathbf{G}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{G}\} & \text{Re}\{\mathbf{G}\} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{A}_1\} \\ \text{Im}\{\mathbf{A}_1\} \\ \vdots \\ \text{Re}\{\mathbf{A}_N\} \\ \text{Im}\{\mathbf{A}_N\} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} G_r & -G_i \\ G_i & G_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_r A_r - G_i A_i \\ G_r A_i + G_i A_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (GA)_r \\ (GA)_i \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} A_r^T & A_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (GA)_r \\ (GA)_i \end{bmatrix} &= (A^H GA)_r
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
 CRB^{-1}(\theta) &= \Gamma - \sum_{t=1}^N (A^H GA)_r = \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N Re \left\{ S(t) D^H DS(t) - S^H(t) D^H A (A^H A)^{-1} DS(t) \right\} \\
 &= \frac{2}{\sigma} \sum_{t=1}^N \left[S(t) D^H \left[I - A (A^H A)^{-1} A^H \right] DS(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

olarak yazılabilir.

Teorem: $CRB(N) \geq CRB(N+1)$
 $CRB(M) \geq CRB(M+1)$

Tanıt için bkz. (Stoica ve Nehorai, 1989). Teoremden anlaşılacağı gibi $CRB(M,N)$ monoton artan bir seri oluşturmaktadır. Bu durum, $CRB(M,N)$ M 'nin ya da N 'nin sonsuza gitmesi ile bir limitinin olduğunu ima etmektedir.

Teorem: Gözlem sayısı sonsuza yaklaştırılırsa ($N \rightarrow \infty$);

$$\begin{aligned}
 CRB(M, \infty) &= \frac{\sigma}{N} \left\{ D \left[I - A(A^H A)^{-1} A D \right] \otimes P^T \right\}^{-1} \\
 CRB(\infty, \infty) &= \frac{6}{M^3 N} \begin{bmatrix} 1/\text{SNR}_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1/\text{SNR}_n \end{bmatrix} \\
 \text{SNR}_i &= \frac{R_{ii}}{\sigma}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

sonuçları elde edilir. Eşitliklerde kullanılmış olan “ $\otimes$ ” sembolü Kronecker çarpımını sembolize etmektedir.

4.3 En Büyük Olabilirlik Kestiricisi ve Asimptotik Davranışı

ML kestirici için V1, V2 ve V4’ün geçerli olduğu varsayılacaktır. Bu durumda logaritmik deterministik olabilirlik fonksiyonu şöyledir:

$$L = \text{sabit} - MN \log \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{t=1}^N [x(t) - A s(t)]^H [x(t) - A s(t)] \tag{4.47}$$

Olabilirlik fonksiyonu σ ve $\{s(t)\}$ üzerinden maksimize edilirse sonuçlar şu şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned}
 s_{opt}(t) &= [A_{opt}^H A_{opt}]^{-1} [A_{opt}^H x(t)] \\
 \sigma_{opt} &= \frac{1}{MN} \sum_{t=1}^N [x(t) - A_{opt} s_{opt}(t)]^H [x(t) - A_{opt} s_{opt}(t)] \\
 &= \frac{1}{M} \text{Tr} \left[I - A_{opt} (A_{opt}^H A_{opt})^{-1} A_{opt}^H \right] \hat{R} \\
 \hat{R} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t) x^H(t)
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

İstenilen A yönlendirme matrisinin maksimum olabilirlik kestirimi (Maximum Likelihood Estimation, MLE, ML) kestrimi olan A_{opt} 'u bulmaktır. Kestirimin kapalı formunu konsantre olabilirlik fonksiyonuyla* birlikte şu şekildedir.

$$L = \text{sabit} - MN \log F(\theta)$$

$$F(\theta) = \text{Tr} \left[I - A(A^H A)^{-1} A^H \right] \hat{R} \quad (4.49)$$

Genel kestirim teorisinden de bilindiği gibi ML kestirim asimptotik olarak (veri noktaları sonsuza giderken) bir takım düzen koşulları (regularity conditions) altında yeterlidir (efficiency). Bir başka deyişle asimptotik özilişki matrisi CRB'a yaklaşır. Ancak uzamsal dizilim ile kestrimde, asimptotik olmanın anlamı açık değildir. Bunun nedeni, eleman sayısının mı, yoksa gözlem sayısının mı sonsuza yaklaştırılmasının gerektiği sorusunun varlığıdır. Diğer yandan, incelenen problemin düzen koşullarına uygunluğu da ML kestircinin yeterliliği açısından önemlidir. Konum kestirimi probleminde sağlanması gereken düzen koşulu ML kestircinin kararlı olmasıdır. Veri sayısı $M \times N$ 'dir ve kestirilmesi gereken parametre sayısı, ortamda var olan d adet sinyal için; $1+d(N+1)$ 'dir. Veri sayısı ve kestirilecek parametre sayısı oranı $M < \infty$ ile $N \rightarrow \infty$ olsa dahi sınırlıdır. Bu oran $M \rightarrow \infty$ iken limitsiz olarak artmaktadır. Bu gözlem sonucunda N 'nin artırılması ile CRB'ye ulaşamayacağı bunun için M 'nin artırılması gerektiği ortaya çıkmaktadır.

a) Küçük M durumu: Burada, MLE'nin $N \rightarrow \infty$ ve $M < \infty$ durumu için kararlılık özellikleri incelenecektir. Gözlem sayısı $N \rightarrow \infty$ iken $\hat{R} \rightarrow R$ 'dir. Bu durumda MLE asimptotik kriter fonksiyonu şu şekilde olacaktır:

* σ ve $\{s(t)\}$ 'nin optimum kestrimlerinin fonksiyonda yerine konmuş halidir.

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\left[I - A_{opt}\left(A_{opt}^H A_{opt}\right)^{-1} A_{opt}^H\right] R &= \text{Tr}\left[I - A_{opt}\left(A_{opt}^H A_{opt}\right)^{-1} A_{opt}^H R\right] \left[AR_s A^H + \sigma I\right] \\
&= \text{Tr}\left[I - A_{opt}\left(A_{opt}^H A_{opt}\right)^{-1} A_{opt}^H R\right] AR_s A^H + \sigma I(M-d) \geq \sigma(M-d)
\end{aligned}
\tag{4.50}$$

Görüldüğü gibi ifade $A_{opt}=A$ olduğunda minimum olmaktadır. Bu durum $N \rightarrow \infty$ iken, θ 'nın MLE'sinin kararlı olduğunu göstermektedir. Ancak, $\{s(t)\}$ ve σ 'nın MLE'si kararlı değildir. Bunlara ilişkin limitler:

$$\begin{aligned}
s_{opt}(t) &\rightarrow (A^H A)^{-1} A^H x(t) = s(t) + (A^H A)^{-1} A^H n(t) \\
\sigma_{opt} &\rightarrow \frac{1}{M} \text{Tr}\left[I - A(A^H A)^{-1} A^H\right] R = \frac{M-d}{M} \sigma
\end{aligned}
\tag{4.51}$$

$m < \infty$ için olmaktadır ve gerçek $s(t)$ ve σ 'dan farklıdır. Bu sonuç, θ 'nın ML kestiriminin CRLB'yi $N \rightarrow \infty$ ve $m < \infty$ içinsaglamadığını göstermektedir. Bu durumu bir örnekle daha açık ifade etmek uygun olacaktır:

Bir dar bantlı sinyalin θ_i doğrultusundan duyargaç dizisine geldiği varsayalım. Bu sinyalin geliş doğrultusuna ilişkin ML kestirim şu şekildedir:

$$F(\theta) = \text{Tr}\left[I - a(\theta_i) \left[a^H(\theta_i) a(\theta_i)\right]^{-1} a^H(\theta_i)\right] \hat{R} \tag{4.52}$$

Duyargaç dizilimin ULA olduğu varsayılırsa $a^H(\theta) a(\theta) = M$ olacaktır. Kestirimin, $F(\theta)$, minimizasyonu $g(\theta) = a^H(\theta) \hat{R} a(\theta)$ ifadesinin maksimizasyonuna denktir. Biraz işlemden sonra (Stoica ve Nehorai, 1989);

$$Var_{CR}(\theta_{opt}) = \frac{6\sigma}{N} \frac{1}{R_s M (M^2 - 1)} \quad (4.53)$$

ve $N \rightarrow \infty$ için;

$$Var_{ML}(\theta_{opt}) = \frac{6\sigma}{N} \frac{MR_s + \zeta}{M^2 (M^2 - 1) R_s^2} \quad (4.54)$$

buradan da;

$$Var_{ML}(\theta_{opt}) / Var_{CR}(\theta_{opt}) = 1 + \frac{\sigma}{MP} = 1 + \frac{1}{MSNR} \quad (4.55)$$

Böylelikle, $m < \infty$ ve $N \rightarrow \infty$ için MLE'nin yetersiz olduğu gösterilmiştir* .

b) Büyük M durumu: Duyargaç sayısı ve gözlem sayısı sonsuza yaklaşırken, $M \rightarrow \infty$ ve $N \rightarrow \infty$, $a^H(\theta)a(\theta) \rightarrow \infty$ olmaktadır. Sinyale ait ML kestirime, $s_{opt}(t)$, ilişkin kayma (bias) teriminin özilişki matrisi duyargaç sayısı sonsuza yaklaşırken sıfıra yakınsar:

$$E\left\{\left(A^H A\right)^{-1} A^H n(t) n^H(t) A \left(A^H A\right)^{-1}\right\} = \sigma \left(A^H A\right)^{-1} \quad (4.56)$$

Duyargaç sayısının sonsuza yaklaşması, $s_{opt}(t)$ 'un kararlılığı için gerek ve yeter koşul değildir. Ancak bu koşul olmadan kararlılık analizi yapmak anlamsız olurdu. Çünkü, bu koşulu sağlamayan sinyaller bir şekilde sönmölenmek zorundadır ve bu tür sinyaller tezimizin inceleme kapsamının dışındadır.

* Bu sonuç deterministik ML kestirimi için elde edilmiştir.

Kararlılık sağlandığında ML kestirim için asimptotik yeterlilik garantilenir. ULA için bu koşul daha gevşektir ve N 'nin büyük olması gerekmez.

ML yöntemi için hesap yükü duyargaç sayısının artışıyla, gözlem sayısının artışına göre, daha hızlı artmaktadır. Örneğin verilen bir θ yönü için $F(\theta)$ 'nın değerlendirilmesi $O(M^2N)$ (M^2N çarpanıyla orantılı) aritmetik işlem gerektirmektedir.

Son olarak önemli olabilecek bir nokta da; küçük duyargaç sayısı için ML'nin yetersizliği $\{s(1), \dots, s(N)\}$ 'nin kestirilmesi gereğinden ortaya çıkmasıdır. Eğer, $\{x(t)\}_{t=1}^N$ beyaz Gauss sürecinin örnekleri olarak varsayılabilirse ve eğer yalnızca R_s 'in bir kestirimi gerekiyorsa bu durumda θ 'nın ML kestirimi istatistiksel olarak $N \rightarrow \infty$ ve $m \ll d$ için sağlanacaktır.

4.4 MUSIC ve Asimptotik Davranışı

Bu alt bölümdeki incelemeler sırasında V_1, V_2, V_3 'ün geçerliliği varsayılacaktır. Bu varsayımlara ek olarak inceleme kolaylığı sağlaması için gerekli olmasa da V_4 'ün de sağlandığı kabul edilmiştir. Daha önceki incelemelerden de hatırlanacağı gibi sinyal yönlerine ait yönlendirme vektörleri gürültü altuzayına diktirler:

$$a^H(\theta)E_G E_G^H a(\theta) = 0, \quad \theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d \quad (4.57)$$

Yine sinyal ve gürültü altuzaylarının dikliğinden;

$$\begin{aligned} E_S E_S^H + E_G E_G^H &= I \\ F(\theta) &= a^H(\theta) [I - E_S E_S^H] a(\theta) \end{aligned} \quad (4.58)$$

olarak MUSIC kestirciyi daha farklı bir formda ifade etmek mümkündür.

Lemma.1:

a) Sinyal altuzayı ve gürültü altuzayları kestirimlerine ait özvektörler sırasıyla $\hat{s}_i$ ve $\hat{g}_i$ olarak sembolize edilirse, şu eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned} E\left\{(\hat{s}_i - s_i)(\hat{s}_j - s_j)^H\right\} &= \frac{\lambda_i}{N} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^d \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_i)^2} s_k s_k^H + \sum_{k=1}^{M-d} \frac{\sigma}{(\sigma - \lambda_i)^2} g_k g_k^H \right] \delta_{i,j} = W_i \delta_{i,j} \\ E\left\{(\hat{s}_i - s_i)(\hat{s}_j - s_j)^H\right\} &= -\frac{\lambda_i \lambda_j}{N(\lambda_i - \lambda_j)^2} s_j s_i^T (1 - \delta_{i,j}) = V_{i,j} \end{aligned} \quad (4.59)$$

b) Gürültü altuzayı kestirim özvektörlerinin sinyal altuzayı E_s 'e dik izdüşümleri gözlem sayısı sonsuza giderken Gauss dağılımlıdır ve sıfır ortalamalıdır (Stoica ve Neorai, 1989). İlişkin değişinti şu şekildedir:

$$\begin{aligned} E\left\{[E_s E_s^H \hat{g}_i][E_s E_s^H \hat{g}_j]^H\right\} &= \frac{\sigma}{N} \left[\sum_{k=1}^d \frac{\lambda_k}{(\sigma - \lambda_k)^2} s_k s_k^H \right] \delta_{i,j} \\ &= \frac{1}{N} U \delta_{i,j} \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$E\left\{[E_s E_s^H \hat{g}_i][E_s E_s^H \hat{g}_j]^T\right\} = 0, \forall i, j$$

Teorem: MUSIC kestirim hatası, $\{\hat{\theta} - \theta\}$, $N \rightarrow \infty$ iken Gauss dağılımlı ve sıfır ortalamalıdır.

Değişinti ve özilişkisi ise

$$E\left\{\left(\hat{\theta}_i - \theta_i\right)\left(\hat{\theta}_j - \theta_j\right)^H\right\} = \frac{1}{2N} \frac{\operatorname{Re}\left\{\frac{da^H(\theta_j)}{d\theta_j} E_G E_G^H \frac{da^H(\theta_j)}{d\theta_j} a^H(\theta_j) Ua(\theta_j)\right\}}{h(\theta_j)h(\theta_j)} \quad (4.61)$$

$$h(\theta) = \frac{da(\theta)}{d\theta} E_G E_G^H \frac{da(\theta)}{d\theta}$$

$$\begin{aligned} E\left\{\left(\hat{\theta}_i - \theta_i\right)^2\right\} &= \frac{1}{2N} \frac{a^H(\theta_i) Ua(\theta_i)}{h(\theta_i)} \\ &= \frac{\sigma}{2N} \left[\sum_{k=1}^d \frac{\lambda_k}{(\sigma - \lambda_k)} |a^2(\theta) s_k|^2 \right] \left/ \left[\sum_{k=1}^{M-d} \left| \frac{da^H(\theta_i)}{d\theta_i} g_k \right|^2 \right] \right. \end{aligned} \quad (4.62)$$

şeklindedir (tanıtı için bkz. (Stoica ve Neorai, 1989)).

Bu ifadelerden ilginç sonuçlar ortaya çıkmaktadır. Yakın konumlanmış sinyaller için, $\{\lambda_k\}_{k=1}^d$ özdeğerleri σ 'ya yakın A neredeyse bozuk ranklıdır (ill conditioned). Bu durumda MUSIC değışintisi büyük değerler almaktadır. Benzer durum düşük SNR ya da yüksek ilişkili sinyallerin varlığı durumunda da ortaya çıkmaktadır. Diğer taraftan, değışinti; $\frac{da(\theta_i)}{d\theta_i}$ vektörü sinyal alt uzayına yakın ve $\{g_k\}$ 'ya dik gibiyse de büyük olacaktır. Böyle bir durumda, $a(\theta)$, θ_i civarında olan değışimlere duyarasız demektir. Bunun sonucu olarak $F(\theta)$, $\theta = \theta_i$ 'de düz olur.

4.5 MUSIC ve MLE Arasındaki İlişki

Literatürde MUSIC'in MLE'nin gerçeklemesi olduğunu ileri süren bazı görüşler mevcuttur (bkz. Stoica ve Neorai, 1989). Koşulların sağlanması durumunda $\{\hat{s}_i\}$ $\{s_i\}$ 'nin ML kestirimidir. Bu özvektörlerden elde edilen yön kestirimleri, MUSIC kestirim değışmezlik

prensibi* gereği ML kestirimi olması gerektiği ileri sürülmüştür. Ancak Stoica ve Neorai'nin yaptıkları çalışmada ileri sürdükleri gibi (Stoica ve Neorai, 1989) bu doğru bir düşünce değildir. Bunun nedeni şu şekilde açıklanabilir. Eğer $\{\theta\}$ D_θ kümesini geriyorsa ve $\{s_i\}$ de D_s kümesi geriyorsa; D_θ 'daki her noktanın D_s 'de bir karşılığı var demektir. Bu nedenle iki küme arasında bir ters fonksiyon tanımlıdır. Bu fonksiyonun varlığı değişmezlik prensibinin geçerliliğini sağlamaktadır. Ancak $\{\hat{s}_j\}$ 'nin genelde kestirim hataları nedeniyle D_s 'e ait olmaması ters fonksiyon kestirim özvektörlerine karşılık D_θ 'da bir nokta bulmak için kullanılamaz. Bu nedenle MUSIC gerçek ters fonksiyonun sadece bir yaklaşımıdır. Böylece değişmezlik prensibi geçerli olmamaktadır.

Teorem: $V_1, \dots, V_4$ varsayımları altında R_s köşegen bir matris ise (sinyaller ilişkisiz ise) MUSIC, MLE'nin çok örnekli ($N \gg \infty$) gerçekleşmesidir (Stoica ve Neorai, 1989).

Bu teorem ortamdaki d adet sinyal ilişkisiz ise, d boyutlu MLE tarama (yön vektörlerinin denenmesi) probleminin MUSIC tarafından çözülebileceğini söylemektedir. Ancak ilişkili sinyallerin varlığı durumunda bu durum söz konusu değildir. Bu özellik MUSIC'i MLE'ye göre tercih edilmesinin nedenidir. Çünkü, MUSIC çok daha az hesap yükü gerektirir.

4.6 ESPRIT ve Asimptotik Davranışı

ESPRIT'in asimptotik değişintisi MUSIC'e oranla büyüktür. Bu büyüklük konunun ilerleyen kısımlarında da görüleceği gibi duyurgaç sayısı arttığında daha da belirginleşir.

ESPRIT'e ilişkin asimptotik analize başlanmadan önce, incelemeye daha uygun olduğu için ESPRIT farklı bir formda ifade edilecektir:

* Ortamda d adet sinyal varsa yönlendirme vektörleri kümesinden bu sinyallere karşı düşenler D_θ kümesini oluşturur.. Sinyal altuzayında D_θ 'nın her elemanına yalnız bir vektör karşı düşer. Bu iki küme (D_s ve D_θ) arasında bir ters fonksiyon tanımlanabilir. Bir başka ifadeyle, yönleri bilinen sinyallerin kendileri elde edilebilir.

Dönme ve öteleme ile değişmeyen M elemanlı iki alt dizi olsun. Bu durumda birinci ve ikinci diziye ait yönlendirme vektörleri içeren matrisler A_1 ve A_2 olarak adlandırılın:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_M \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} I_M & 0 \end{bmatrix} A \psi = A_1 \psi$$

$$\psi = \begin{bmatrix} e^{j\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{j\theta_2} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Bu iki alt diziye ilişkin sinyal alt uzayları S_1 ve S_2 bu iki diziden oluşan ana diziye ait sinyal alt uzayından, E_S , elde edilebilir.

$$E_S = AC$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_M \end{bmatrix} E_S H$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} I_M & 0 \end{bmatrix} E_S H \quad (4.64)$$

İfadedeki $d \times d$ boyutlu H matrisi, tekil olmayan veriye bağımlı ya da bağımsız bir matristir. Yine ifadedeki C matrisi, tekil olmayan bir matristir. Formülasyonun ifadesi sırasında verilecek olan şu özelliklerden faydalanılacaktır:

Ö1:

$$AR_S A^H E_S = E_S (\Lambda - \sigma I)$$

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_M\} \quad (4.65)$$

Ö2: Tekil olmayan matris $C S = A$ yardımıyla, $C = R_S A^H E_S (\Lambda - \sigma I)^{-1}$, dir ve $C^T = E_S^H A$ dir.

Ö3:

$$\begin{aligned}
E_G E_G^H &= I - A(A^H A)^{-1} A^H \\
E_G E_G^H &= I - E_S E_S^H \Rightarrow E_S E_S^H = A(A^H A)^{-1} A^H
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Bu özelliklerin de yardımıyla altdizilere ait sinyal altuzayları şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
S_2 &= A_2 C H = A_1 \Psi C H = S_1 H^{-1} C^{-1} \Psi C H = S_1 \Phi \\
\Phi &= (C H)^{-1} \Psi (C H) \\
\Phi &= (S_1^H S_1)^{-1} (S_1^H S_1)
\end{aligned} \tag{4.67}$$

(4.60)'daki Φ matrisi ile $H^T \Phi H$ matrisi aynı özdeğer özvektörlere sahip olacağından ESPRIT'in teorik performansı H 'a bağlı değildir. Bu nedenle $H=I$ alınarak incelemelere devam edilebilir. Bu durumda:

$$\Phi = C^{-1} \Psi C \tag{4.68}$$

olacaktır. Matris Φ 'nin sağ ve sol özvektörleri sırasıyla; β_k C^{-1} 'in k . sütunu ve α_k^H C 'nin k . satırıdır. Özdeğerleri ise ψ 'nin elemanlarıdır ve yön bilgileri bu değerlerden (4.63) yardımıyla direkt olarak elde edilir.

ESPRIT'e ait asimptotik analiz sırasında V1, V2, V3 varsayımları kabul edilmiştir.

Teorem: ESPRIT'e ait kestirim hataları, $\{\hat{\theta} - \theta\}$, asimptotik olarak Gauss dağılımlı ve sıfır ortalamalıdır. Değişinti ve özilişkisi ise;

$$\begin{aligned}
E\left\{\left(\hat{\theta}_k - \theta_k\right)\left(\hat{\theta}_p - \theta_p\right)\right\} &= \frac{\sigma}{2N} \operatorname{Re}\left\{e^{j\left(\theta_p - \theta_k\right)}\left(\rho_p^H \rho_k\right)\left(a_k^H(\theta) U a_p(\theta)\right)\right\} \\
\rho_k^H &= \left[\left(A_I^H A_I\right)^{-1} A_I^H F_k\right]_k^{(r)} \\
F_k &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} - e^{j\theta_k} \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \\
U &= E_S(\Lambda - \sigma I)^{-2} \Lambda E_S^H
\end{aligned} \tag{4.69}$$

olarak elde edilir (tanıtı için bkz. Stoica ve Neorai, 1991). İfadedeki $[\cdot]_k^{(r)}$ matrisin k . satırını temsil etmektedir.

ESPRIT'in değışintisi řu durumlarda büyük değerler alır:

- a) Sinyal kaynakları birbirine yakınsa (A hemen hemen bozuk ranklıdır. Böylece $\{\lambda_r - \sigma\}$ $i=1, \dots, d$ küçük olacak ve bu durumda $(A_I^H A_I)^{-1}$, $\{\rho_k\}$ ve U matrisinin elemanlarının değeri büyüyecektir.)
- b) SNR küçük olduğunda ($\{\lambda_r - \sigma\}$ küçülür.)
- c) Sinyaller yüksek ilişkili ise (R_S hemen hemen tekildir.)

4.6.1 ESPRIT ve MUSIC'in istatistiksel karşılaştırması

Teorem:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{\operatorname{var}_{SR}(\hat{\theta}_k)}{\operatorname{var}_{MUSIC}(\hat{\theta}_k)} \Rightarrow \gamma_k = \left(\rho_k^H \rho_k\right)\left(d_k^H G G^H d_k\right) \geq 1 \quad k=1,2,3, \dots, n \\
d_k &= \frac{d_a(\theta_k)}{d\theta_k}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Teoremin ifadesindeki γ_k , m' ve $\{\theta_k\}$ 'ya bağlı ancak σ ve R_s 'ye bağlı değildir. Bu oran çok elemanlı diziler için büyük değerler alabilir. Bu durum ESPRIT'in MUSIC'e göre daha az verimli olduğunu göstermektedir.

Örnek: Tek kaynağın m izotropik elemanlı ULA'ya geldiği varsayalım. Alt dizilerin eleman sayıları $\tilde{m} = m - 1$ olarak seçilsin. Bu durumda, $W = I \Rightarrow a = [1 e^{j\theta} \dots e^{j(m-1)\theta}]^T$ ve $d = [0 j e^{j\theta} \dots j(m-1) e^{j(m-1)\theta}]^T$ şeklinde olacaktır. Buradan;

$$\begin{aligned}
 d^H G G^H d &= d^H \left(I - \frac{a a^H}{a^H a} \right) d = d^H d - \frac{|d^H a|^2}{a^H a} = \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} - \frac{m^2(m-1)^2}{4m} = \frac{m(m^2-1)}{12} \\
 \rho^H &= \frac{1}{m-1} [1 e^{-j\theta} \dots e^{-j(m-2)\theta}] \left([0 I_{m-1}] - e^{j\theta} [I_{m-1} 0] \right) = \frac{1}{m-1} [-e^{j\theta} 0 \dots 0 e^{-j(m-2)\theta}] \\
 \rho^H \rho &= \frac{2}{(m-1)^2} \Rightarrow \gamma = \frac{m(m+1)}{6(m-1)}
 \end{aligned}
 \tag{4.71}$$

Ancak eleman sayısı d 'den çok az büyük olan diziler ESPRIT ve MUSIC'in yeterlilikleri kıyaslanabilir düzeydedir. Bunu göstermek için $m=n+1$ olduğu varsayalım (Böyle bir durumda ULA kullanımı gereklidir). Bu durumda σ , R 'nin basit özdeğeridir. Böylece ρ_k ve $G G^H d_k$, R 'nin σ 'ya ilişkin özvektörleridir ve istatistiksel bağımsızdırlar (Stoica ve Nehorai, 1991). Bu durumda $\gamma_k=1$ olarak elde edilir ($k=1, 2, \dots, n$).

5. BENZETİŞİMLER

Bu bölümde, tez boyunca incelenmiş olan yaklaşımlar arasından içinden seçilmiş olan algoritmalar denenmiş ve sonuçları yorumlanmıştır. Benzetişimler MATLAB matematik programı altında yazılmıştır. Hazırlanan programların genel olması, parametrelerine dışarıdan müdahale edilerek, kullanıcıya değişik sinyal senaryolarını deneyebilme imkanının sağlanmasına özen gösterilmiştir. Bu sayede, hazırlanmış programların eğitim amaçlı kullanılabilmesi mümkün olmuştur. Programlar bir ana program altında bir araya getirilerek, görsellik ve kullanım kolaylığı sağlanmaya çalışılmıştır. Kullanılan tüm programlar EK.3’de verilmiştir.

Benzetişimler, tezin bölümlerine uygun olarak sıralanmıştır. Tüm benzetişimler düzgün doğrusal dizi (Uniform Linear Array, ULA) varsayımı ile hazırlanmıştır. İlk olarak dar bant sinyallerin geliş yönlerini kestiren teknikler verilmiştir. Ardından sinyallerin geniş bantlı olması durumunda kullanılan yöntemler ele alınmıştır. Her iki sinyal türü için uyumluluğun etkisi ve bu etkiyi gideren teknikler incelenmiştir. Benzetişimlerin ikinci ana bölümünde kısmi uyarlamalı hüzmeye şekillendirici yapısı (Şekil 2.1) bazı şartlama tipleri için denenmiştir.

5.1 Yön Bulma Yöntemleri

Yön bulma yöntemleri ortamdaki sinyallerin dar ya da geniş bantlı olması durumlarında farklı yaklaşımlar gerektirmektedir. Her iki durumda sinyal modelinin teorik ayrıntıları tezin ilk bölümünde ele alınmıştır. Burada, bu modellerin bilgisayar programlarına nasıl döküldüğü ele alınacak ve bu modellerle üretilen sinyallerin yönleri kestirim yöntemlerinin etkinliğinin anlaşılması için kullanılacaktır.

5.1.1 Dar bant sinyal yönü kestiricileri

Bir dizi üzerine düşen sinyallerin dar bantlı olması durumunda, duyargaçlardan alınan sinyal

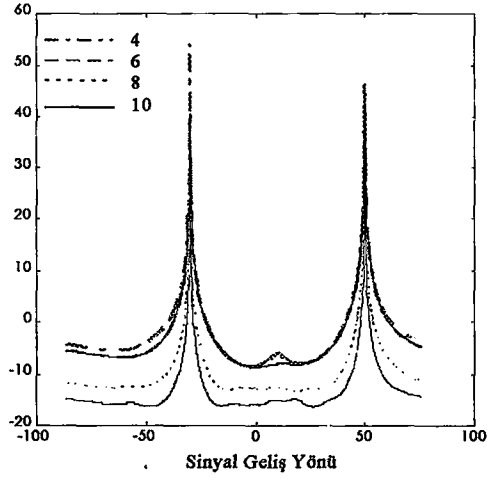
verileri arasında yalnızca geliş doğrultusundan kaynaklanan faz farkı vardır. Sinyallerin duyargaçlar üzerinden gözlenen zarfları arasında bir fark yoktur. Uzamsal domende farklı konumlardaki sinyaller ancak yönlendirme vektörleri farkıyla ayırtedilebilirler. Benzetişimler sırasında kullanılan sinyal üretim fonksiyonu bu temel esasa dayanmaktadır. Bu fonksiyona *arrayout.m* adı verilmiştir. Verilen sayıda keyfi doğrultudaki sinyalin, eleman sayısı belirli bir ULA'dan gözlenmesi sonucu elde edilecek olan veriler bu fonksiyon tarafından üretilmektedir. Duyargaçlar üzerindeki gürültü, sıfır ortalamalı ve değışintisi ayarlanabilen bir rasgele beyaz Gauss raslantı süreci olarak üretilmektedir.

Bu aşamada, *arrayout.m* fonksiyonu tarafından hazırlanan sinyal ortamı için dar bant sinyal yönü kestirim yöntemleri incelenecektir.

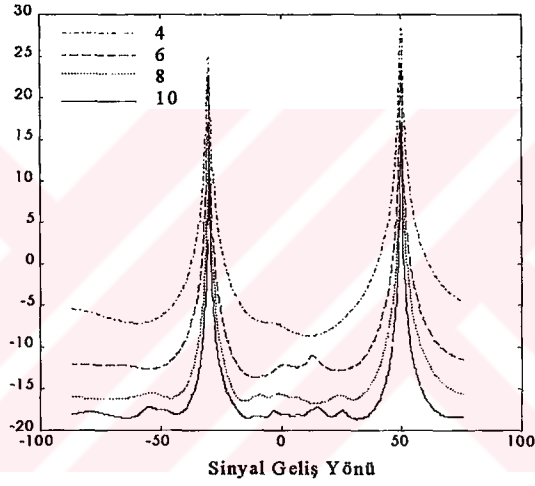
5.1.1.1 Çoklu sinyal sınıflama (Multiple Signal Clasification, MUSIC)

MUSIC yaklaşımının değışik durumlarda davranışları sınıanacaktır. İlk olarak duyargaç sayısının performansı nasıl etkilediğinin anlaşılamsı için, diziye ait eleman sayısı 4 ile 10 arasında değıştirilecektir. Duyargaçlar arasındaki uzaklık uzamsal Nyquist kriterine uygun olarak dalga boyunun yarısı seçilmiştir. Bu sırada sinyal gürültü oranı da (Signal to Noise Ratio, SNR) 20 dB ila 0dB arasında değıştirilecektir.

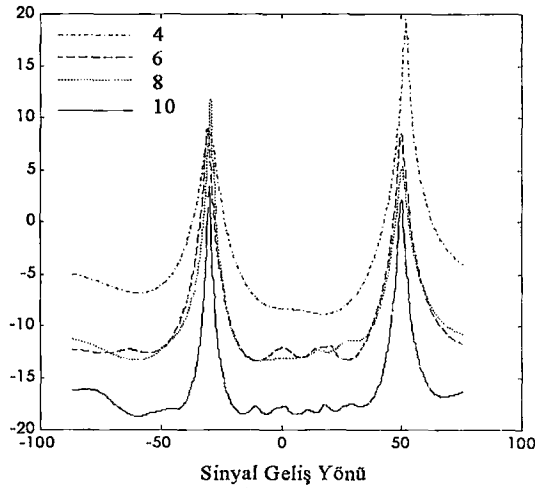
Şekil 4.1' de MUSIC yöntemi ile 20dB SNR için -30^0 ve 50^0 den gelmekte olan eşit güçlü iki sinyalin, duyargaçlardan alınan 100 örnek sonucunda elde edilen spektrum görölmektedir.



Şekil 5.1 SNR=20dB ve duyargaç sayısı: 4-10 için spectrum.



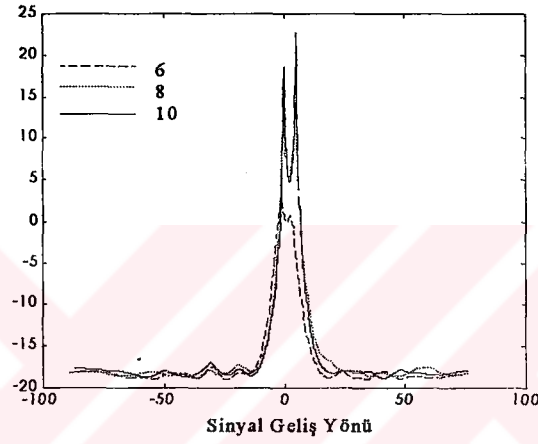
Şekil 5.2 SNR=10dB ve duyargaç sayısı 4-10 için spectrum.



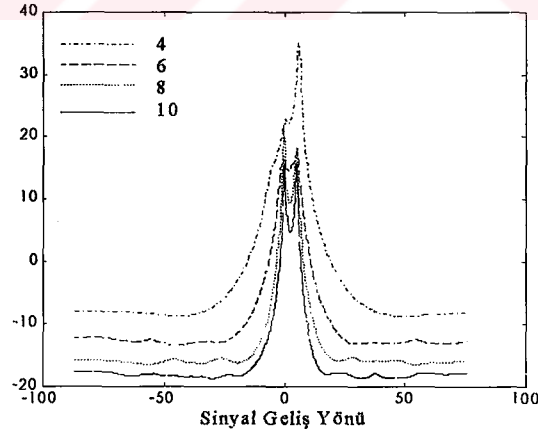
Şekil 5.3 SNR= 0dB ve duyargaç sayısı 4-10 için spektrum.

Görüldüğü gibi SNR artıka performans olumsuz yönde etkilenmektedir. Diğer taraftan duyargaç sayısının artışı performansı arttırmaktadır.

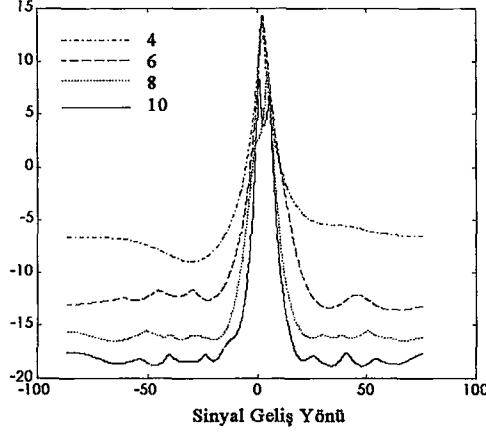
Çözünürlük yön kestiricileri için önemli bir özelliktir. SNR, duyargaç sayısı ve gözlem örnek sayısı çözünürlüğü etkileyen değişkenlerdir. Şimdi duyargaç sayısı 4 ila 10 arasında değişen bir dizi üzerin SNR'ın değişiminin çözünürlüğe olan etkisi incelenecektir. Sinyaller dizi üzerine 0 ve 5 dereceden eşit güçlü olarak gelmektedir.



Şekil 5.4 SNR=20dB ve 100 adet gözlem örneği altında spektrum.



Şekil 5.5 SNR=10dB ve 100 adet gözlem örneği altında spektrum.

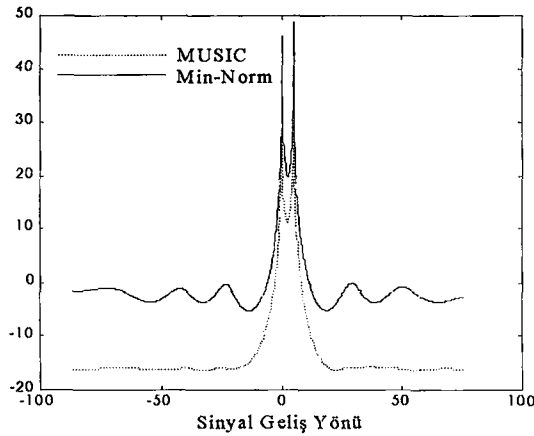


Şekil 5.6 SNR=0dB ve 100 adet gözlem örneği altında spektrum.

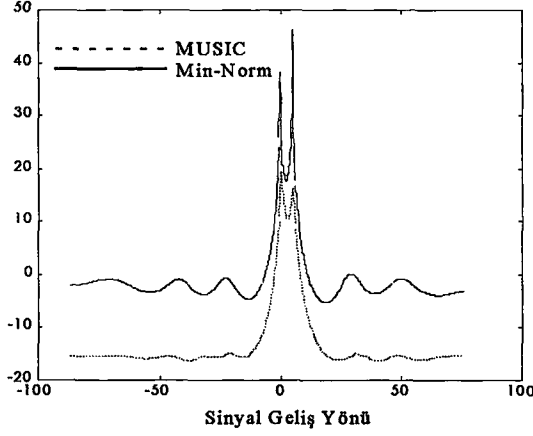
Çözünürlük ile ilgili yapılan benzetişimlerden de anlaşılacağı gibi, SNR artıkça MUSIC'e ait çözünürlük düşmektedir. Bu durum üçüncü bölümdeki istatistiksel sonuçları desteklemektedir. Diğer taraftan duyargaç sayısının artışı çözünürlüğü arttırmaktadır.

5.1.1.2 Minimum norm yaklaşımı

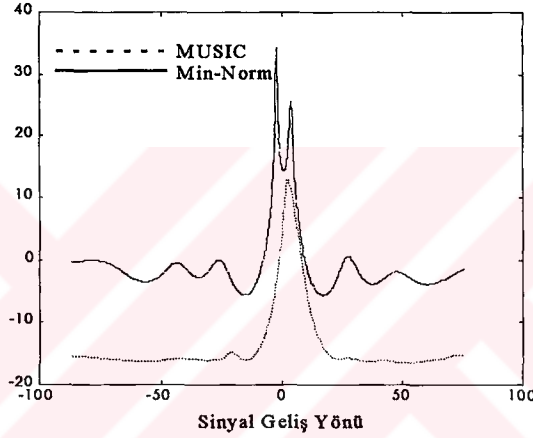
Birinci bölümden hatırlanacağı gibi minimum norm (Min.-Norm.) yöntemi çözünürlük açısından önemli avantajlara sahiptir. Bu sonucu desteklemek amacıyla 8 adet duyargaca sahip bir dizi için, 0 ve 5 derecelerde bulunan iki sinyalin MUSIC ve Min.-Norm yöntemiyle yönlerinin kestirimi benzetişimleri karşılaştırılacaktır.



Şekil 5.7 SNR=20dB'da MUSIC ve Min.-Norm spectrumları.



Şekil 5.8 SNR=10dB'da MUSIC ve Min.-Norm spectrumları.



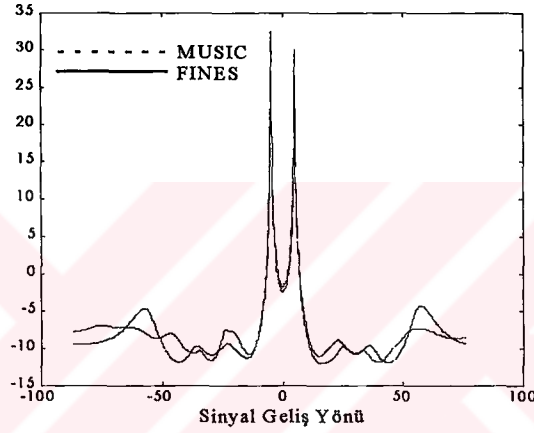
Şekil 5.9 SNR=0dB'da MUSIC ve Min.-Norm spectrumları.

Benzetişim sonuçlarına göre, Min.-Norm yöntemi 0dB SNR'da dahi yüksek çözünürlük sergilemektedir. Diğer taraftan, MUSIC aynı performansı sergileyememiştir. Min.-Norm.'un MUSIC'e karşı bu üstünlüğüne karşın kestirim sonuçlarındaki kayma (bias) daha yüksektir.

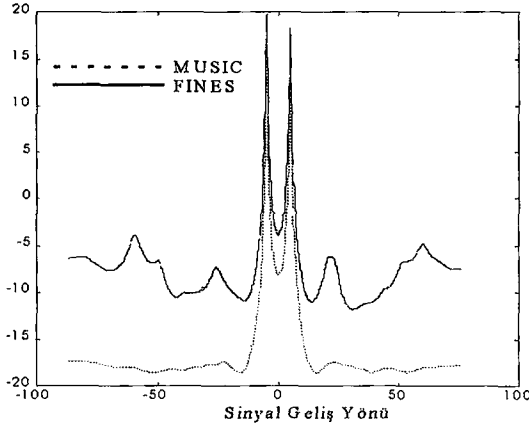
5.1.1.3 Birinci temel vektörler yaklaşımı

Min.-Norm yöntemi ULA için ortaya konmuştur. Birinci bölümde ayrıntılarıyla tartışıldığı gibi, Min.-Norm. vektörü gürültü altuzayında manifolda karesel anlamda en yakın vektördür. Yakınlık kavramı farklı şekillerde tanımlanarak, farklı kestirim yöntemleri elde etmek mümkündür. Yakınlık kriteri gürültü altuzayında, bir konum alanı için, manifolda en yakın açı olarak kabul edilirse ortaya çıkan kestirim yöntemleri FINE ve FINES idi. Bu iki

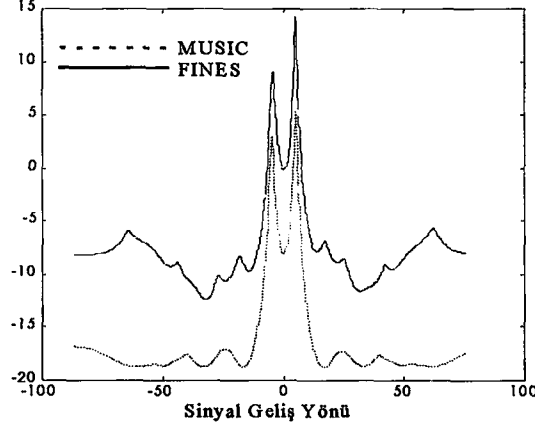
yönteme ait benzetişimler sırasında, ele alınan konum alanı -20 ila 20 dereceler arasındır. Yazılan program (Bkz. EK.3), FINE ve FINES yöntemleri duruma uygun olarak seçer. Daha açık bir ifadeyle; konum alanını temsil eden altuzay ile gürültü altuzayının kesişim altuzayı bir boyutluysa FINE, boyut birden büyükse FINES algoritması kullanılır. Bu karar, kesişim altuzayının en küçük temel açıların tekrarlı olup olmadığına bakılarak yapılır. Kesişim altuzayının temel açıların kosinüsleri bir eşik değerinden küçükse, açının tekrarlı olduğu kabul edilir. Benzetişimde 10 elemanlı bir ULA ele alınmıştır. Ortamda iki adet eşit güçlü sinyal -5 ve 5 derecelerden gelmektedir. Eşik 0,8 olarak seçilmiştir.



Şekil 5.10 SNR=20dB FINES ve MUSIC (Kesişim uzayı 3 boyutludur)



Şekil 5.11 SNR=10dB FINES ve MUSIC (Kesişim uzayı 3 boyutludur)

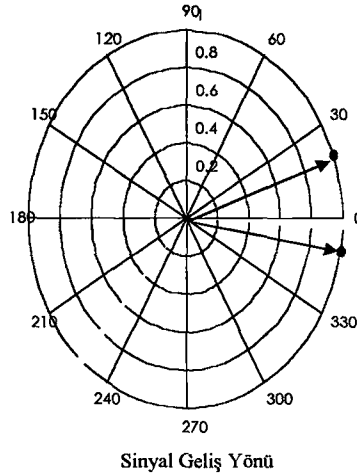


Şekil 5.12 SNR=0dB FINES ve MUSIC (Kesişim uzayı 3 boyutludur)

MUSIC ve FINES'in performansları birbirlerine yakındır görünmektedir. FINES MUSIC'e oranla daha az işlem yüküne sahiptir. Ancak kesişim altuzayı gürültü altuzayına eşit olursa FINES MUSIC'e eşdeğerdir.

5.1.1.4 Altuzay dönme ile değişmezlik yöntemi (ESPRIT)

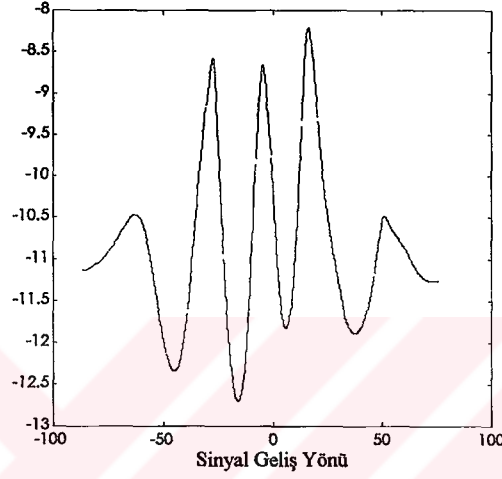
ESPRIT altuzay değişmezlik prensibine dayanan bir yöntemdir. MUSIC yönteminin aksine manifoldun bilinmesine ihtiyaç yoktur (Bkz. Bölüm.1). Duyargaç sayısı 8 olan bir dizi üzerine -10 ve 20 derecelerden eşit güçlü iki sinyalin geldiği varsayılmıştır.



Şekil 5.13 SNR=10dB'da ESPRIT spektrumu

5.1.2 Dar bant uyumlu sinyal yönü kestirimi

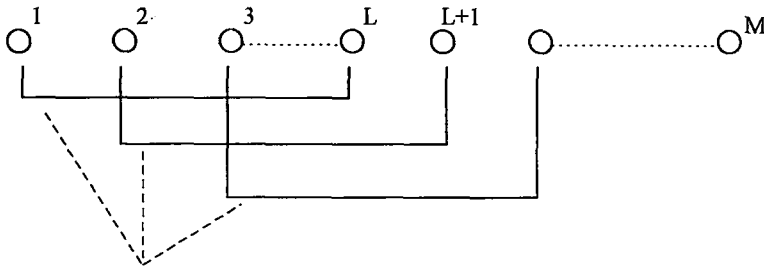
Uyumlu sinyallerin olduğu bir ortamda MUSIC ve diğer altuzay teknikleri sinyal yönü kestirimi yapamamaktadır (Şekil 4.14). Bu durumun nedenleri birinci bölümde ayrıntılı olarak tartışılmıştır. Uyumlu sinyallerin yönlerinin kestirilebilmesi için uzamsal düzleme teknikleri kullanılır.



Şekil 5.14 Duyarga sayısı 6, SNR=20dB ve -45° ile 30° 'de iki uyumlu sinyal olduğu durumda MUSIC spektrumu.

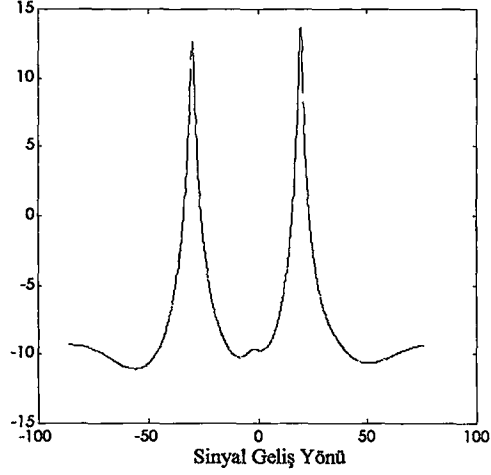
5.1.2.1 Uzamsal düzleme

ULA için uzamsal düzleme sırasında seçilen alt diziler Şekil (4.15)'teki gibidir. Bu seçimle alt dizlerde maksimum sayıda eleman olur ve kestirilebilecek sinyal sayısı artar.

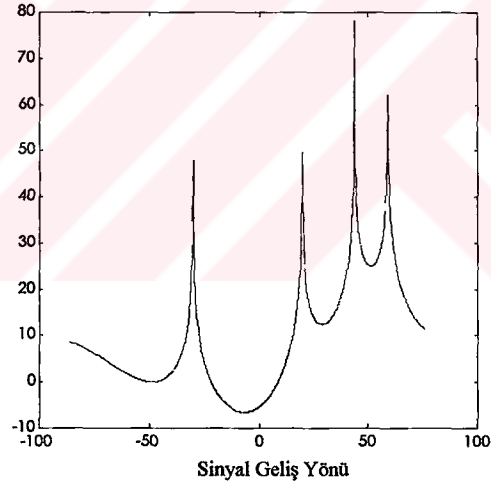


Şekil 5.15 ULA için alt dizi seçimi

Eleman sayısı 6 olan duyargaç dizisine -45 ve 30 derecelerden iki adet uyumlu sinyal düşmektedir. Alt diziler 5'er elemanlıdır.



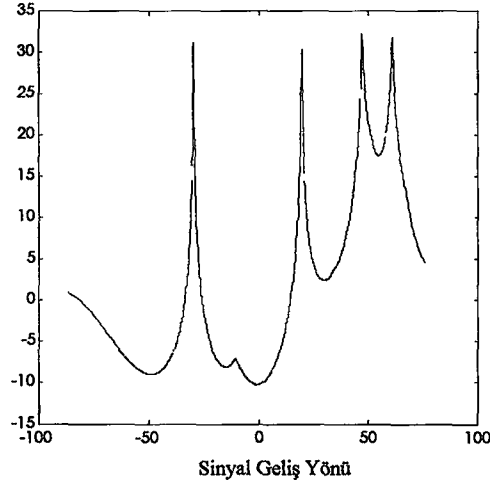
Şekil 5.16 Uzamsal düzleme sonucu spectrum (0dB SNR'da).



Şekil 5.17 SNR=10dB, uyumlu sinyal geliş yönleri: -30^0 , 20^0 , 45^0 , 60^0

5.1.2.2 İleri-geri uzamsal düzleme

İleri geri uzamsal düzleme yöntemi ile uzamsal düzlemenin olumsuz yanı olan çözünürlük kaybı azaltılmıştır. Alt dizi uzunlukları aynı senaryo için, 6 olarak seçilmiştir.



Şekil 5.18 SNR=-10dB, uyumlu sinyal geliş yönleri: -30^0 , 20^0 , 45^0 , 60^0

Görüldüğü gibi ileri-geri uzamsal düzleme sırasında dizinin uzunluğu değişmediği için çözünürlükte, ana diziye göre, bu senaryo için değişme olmamıştır.

5.1.3 Geniş bant sinyal yönü kestiricileri

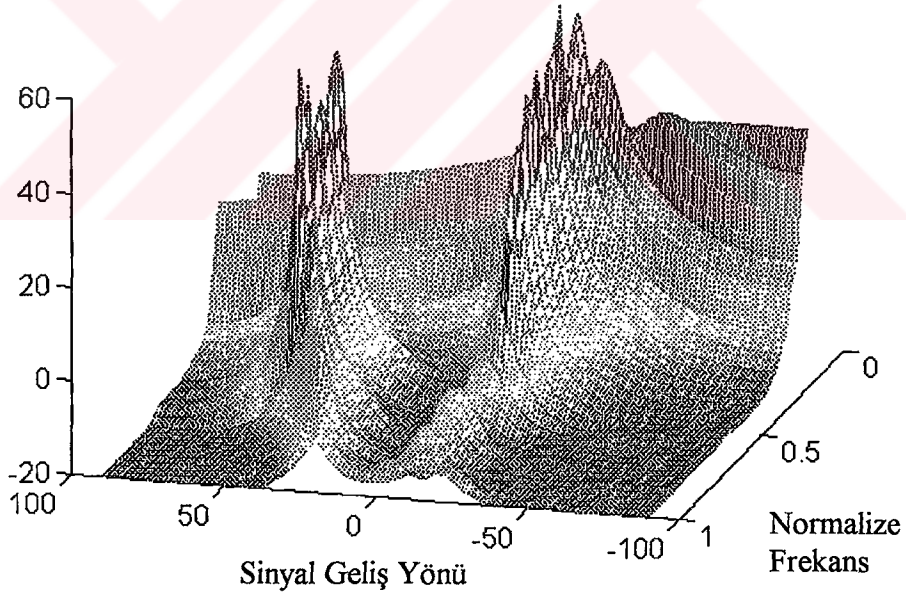
Geniş bantlı sinyaller, duyargaç çıkışlarında Hızlı Fourier Dönüşümü yardımıyla dar bantlı bileşenlere ayrılır. Her dar bantlı bileşene ait özilişki matrisi bulunarak, dar bant kestirim yöntemlerinden biri ile sinyal yönü kestirilir. Ancak, bu yöntem sinyalin toplam enerjisinin değerlendirilemeyeişi nedeniyle yüksek kaymalıdır (bias) (Bkz Bölüm.I).

Geniş bantlı sinyallerin duyargaç çıkışlarından alınan verileri, *barray.m* fonksiyonu ile elde edilir. Sinyallerin hehangibir yönden gelebilecek olması ULA dizisi elemanları üzerinde keyfi gecikmelere sahip olmaları sonucunu doğurmaktadır. Halbu ki;benzetişim sırasında ancak duyargaçlara ait örnekleme periyodunun tam katları gecikmeler sağlana bilir. Bu durum programın, sadece belirli yönlerden gelen sinyalleri üretebilecek olması nedeniyle, kullanışsız olması sonucunu doğurur. Bu nedenle keyfi gecikmeleri yani; örnekleme periyodunun kesirli değerlerini sağlayacak gecikmeleri elde etmenin yolları bulunmalıdır. Benzetişimlerimizde bunu sağlamak için *kısmi gecikmeli süzgeçler* (fractional delays) kullanılmıştır (Laakso et.all, 1996).

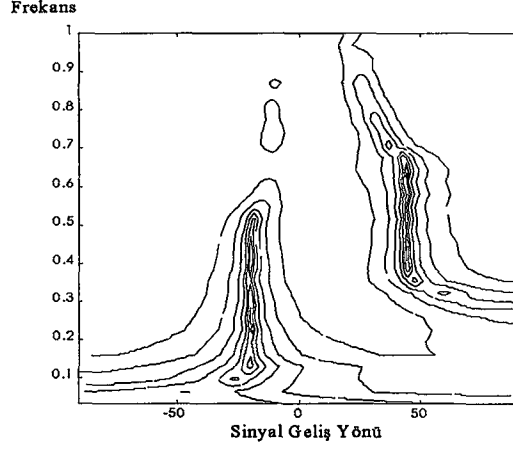
Benzetişimler sırasında frekans domeni örneklem frekansı ile normalize edilmiştir. Bir başka deyişle, frekans domeni 0Hz ile 1Hz arasına normalize edilmiştir.

5.1.3.1 Frekans bileşenlerine ayırma yöntemi

Ortamda iki adet geniş bantlı sinyal olduğu varsayılmıştır. Bu sinyaller -20° ile 45° de bulunmaktadır. Sinyaller sırasıyla, 0.3Hz merkez frekansında 0.4Hz bant genişlikli ve 0.5Hz merkez frekansında ve 0.3Hz bant genişliklidirler. Sinyaller eşit güçlü ve gürültü ile oranları 20dB'dir. Bu durumda 10 elemanlı bir ULA'nın elemanları çıkışında dar bantlı bileşenlere ayrılarak her bir bileşen için MUSIC ile kestirim yapılmıştır. Bu durumda elde edilen uzamsal-zamansal spektrum Şekil (4.19) ve Şekil (4.20)'de görülmektedir (Bkz. EK.3, preest.m). Duyargaçlardan 2048 örnek alınmış ve 64 örnekleli FFT kullanılmıştır:



Şekil 5.19. Uzamsal ve zamansal spektrum

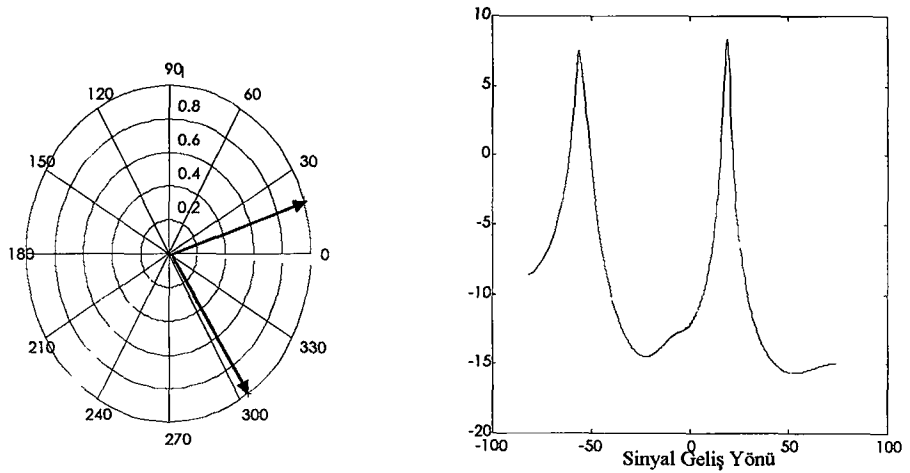


Şekil 5.20 Uzamsal ve zamansal spektrum (Üstten Görünüş)

5.1.3.2 Uyumlu Sinyal Altuzay Yöntemi

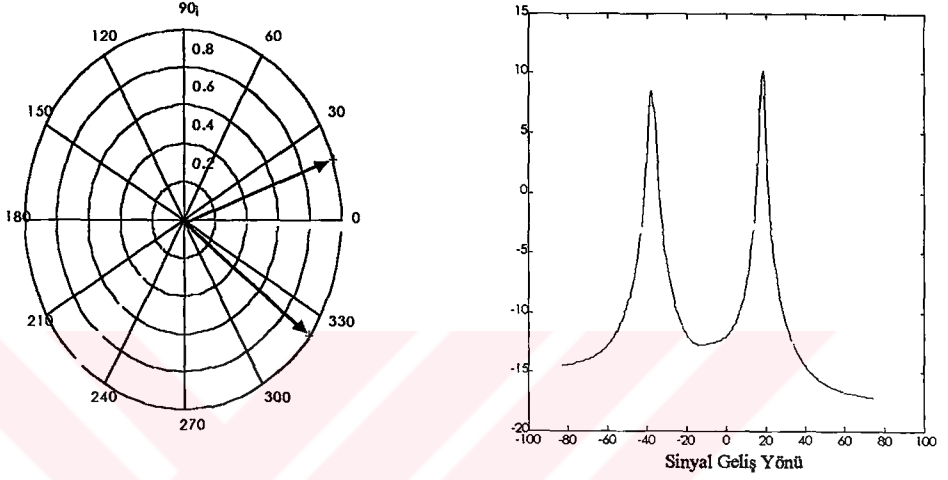
Uyumlu sinyal altuzay yöntemi (Coherent Signal Subspace, CSS) dar bantlara ayrılmış geniş bant sinyal bileşenlerinin bir frekans bileşenine odaklanması ile gerçekleştirilir. Bu yöntem, sinyallerin frekans bantına saçılmış enerjilerini daha verimli kullanmaktır. Aynı zamanda uyumlu sinyallere karşı bağışıklıdır.

Duyargaç sayısı 10 olan diziye -60 ile 45 derecelerden gelen, merkez frekansları sırasıyla 0.3 ve 0.2, bant genişlikleri 0.5 ve 0.3 olan uyumlu olmayan sinyaller 20dB SNR ile dizi üzerine düşmektedir. Duyargaçlardan 2048 örnek alınmış ve 32 örnekli FFT kullanılmıştır(Şekil(4.19)):



Şekil 5.21 ESPRIT yöntemi kullanılarak elde edilmiş CSS kestirimi (Solda). MUSIC ile elde edilmiş kestirim (Sağda).

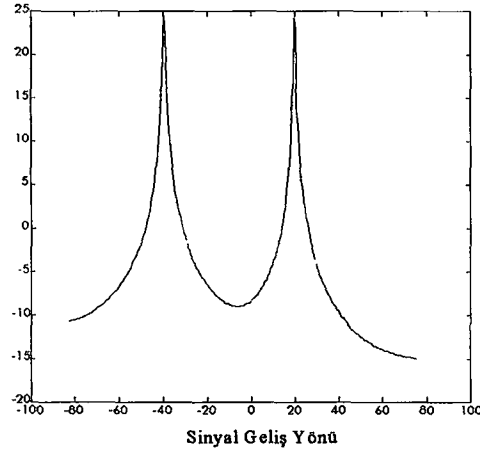
CSS yöntemi uyumlu sinyallerin (sinyaller birbirinin tamamen aynısı alınmıştır) yönlerini başarıyla kestirmektedir. Her iki sinyal de 0.3 merkez frekanslı ve 0.5 bant genişliktir. İkinci sinyal birincinin 7.2 örnekleme periyodu kadar gecikmiş bir kopyasıdır. Sinyal odaklama önceki benzetişimde olduğu gibi odaklama matrisleri gerçek sinyal yönlerine uygun olarak yapılandırılmıştır. Bu durumda uyumlu sinyallere ait kestirim Şekil 22’de görülmektedir.



Şekil 5.22 ESPRIT yöntemi kullanılarak elde edilmiş CSS kestirimi (Solda). MUSIC ile elde edilmiş kestirim (Sağda).

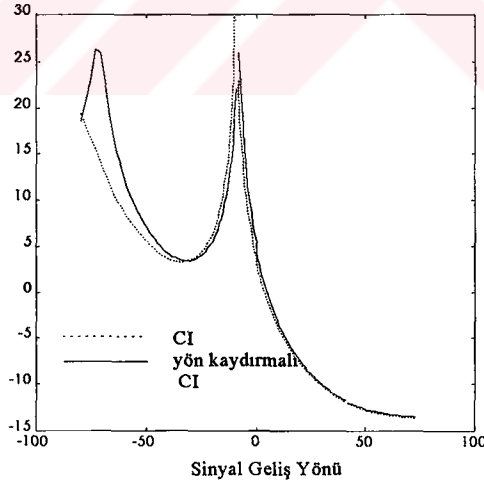
5.1.3.3 Uyumlu sinyal interpolasyonu

ULA için odaklama sinyal interpolasyon yöntemleriyle (Coherent Interpolation, CI) de sağlanabilir. Bu benzetişimde “kübik spline” yöntemi kullanılarak en düşük frekans bileşenine odaklama yapılmıştır (Bkz. EK.3, cohint.m programı). Benzetişim, Şekil 4.22 ‘deki sinyal ortamında gerçekleştirilmiştir. Örnek sayısı 2048 ve 32 örnekli FFT kullanılmıştır.



Şekil 5.23. SNR= 20dB, -40^0 ve 20^0 'de iki adet uyumlu sinyal olan bir ortamda CI kestirimi.

CI'nın önemli bir sorunu interpolasyon işleminin alçak geçiren süzgeç etkisi nedeniyle, geniş geliş açılarında kaymanın artmasıdır. Bu durumun önüne interpolasyon öncesinde bir ön kestirim yaparak sinyalleri uygun bir şekilde uzamsal domende sıfır derece yakınlarına kaydırmaktır. İnterpolasyon işlemi ardından sinyaller eski yerlerine yeniden kaydırılır.



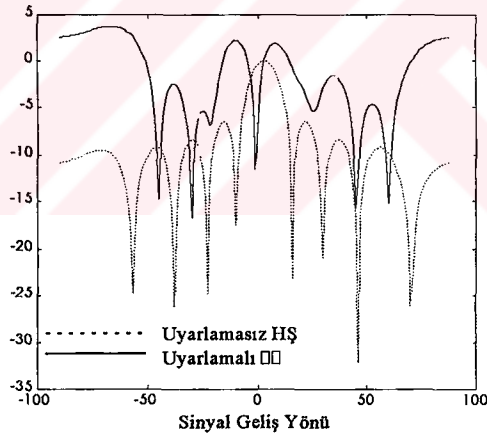
Şekil 5.24 CI ve yön kaydırımı sonucu elde edilen yön kestirimleri.

5.2 Kısmi Uyarlamalı Doğrusal Şartlamalı Hüzme Şekillendirme

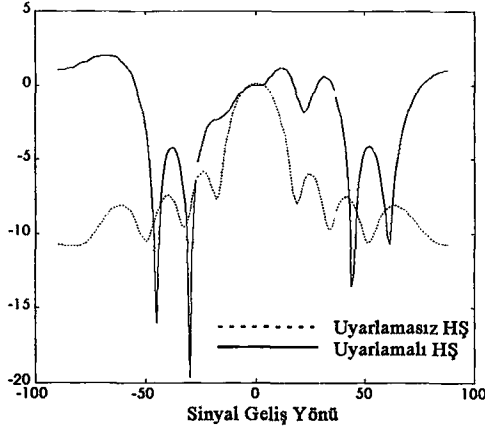
Uyarlamalı hüzme şekillendircilerin sinyal ortamına nasıl uyum sağladıkları frekans ve türevsel şartlamalar örnek alınarak gösterilecektir.

5.2.1 Dar bant kısmi uyarlamalı hüzme şekillendirici

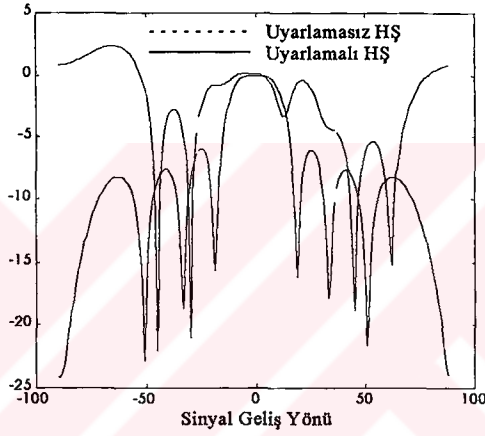
Duyargaç sayısı 9 olan bir ULA üzerine beş adet darbantlı sinyal, 0° , 60° , -30° , 45° , -45° , düşmektedir. Bu sinyallerin normalize güçleri sırasıyla 0.5, 1, 0.7, 0.8, 0.5'dir. Şekil (4.24,25,26) sırasıyla 3° 'de birim yanıt istenmek üzere birim yanıt şartlaması, $a(\theta_0)w=1$, birim yanıt şartlaması ve birinci derece türevsel şartlama, birim yanıt şartlaması, birinci derece türevsel şartlama ve ikinci derece türevsel şartlama bir arada kullanıldığı durumlarda uyarlamasız dizi cevabı (örüntü) ve uyarlamalı dizi cevabını göstermektedir (Bkz EK.3, gsc1.m).



Şekil 5.25 Birim yanıt şartlaması (Hüzme yönü= 3°)



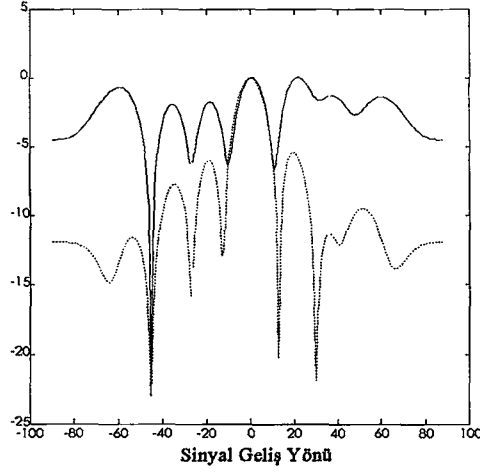
Şekil 5.26 Birim yanıt ve birinci derece türevsel şartlama



Şekil 5.27 Birim yanıt, birinci ve ikinci derece türevsel şartlamalar.

Görüldüğü gibi yalnız birim yanıt istendiğinde, eğer alınmak istenilen sinyal bakış yönüyle (3^0) ile çakışmıyorsa bastırılmaktadır. Türevsel şartlamalar ile hızın birim genlikte sinyal aldığı alan genişletilerek istenilen sinyalin bu bölgede kalması sağlanır.

Uyarlamalı hız şekillendiriciler için ortamdaki sinyallerin ilişkili oluşu önmeli bir sorundur. Ortamdaki girişim kaynaklarından biri istenilen sinyalle ilişkili ise; sistem uyarlama işlemi sonucunda istenilen sinyali bastıracak şekilde ilişkili sinyali ayarlar (Şekil 4.28). Bu olumsuzluğun önüne karesel şartlama kullanılarak geçilebilir.



Şekil 5-28 Karesel şartlamasız (düz çizgi) ve karesel şartlamalı (noktalı) hüzme şekillendirici örüntüsü.

İstenilen sinyal 0° ve girişim kaynakları -45° ve 60° 'de konumlandırılmıştır. İstenilen sinyalle ilişkili olan girişim kaynağı 60° 'de bulunmaktadır. Sinyallere ait normalize güçler sırasıyla 0.5, 0.7 ve 1'dir. Karesel şartlama olmadığında şekilden de görüldüğü gibi 60° 'deki girişim kaynağı sistem tarafından istenilen sinyali bastıracak şekilde ayarlanmıştır. Karesel şartlama kullanıldığında ise sistem çıkışında girişime ait gücün bir eşik değerin üstüne çıkması önlenerek, girişim kaynağının istenilen sinyali bastıracak şekilde sistem tarafından ayarlanmasına izin verilmemiştir. Bu eşik (δ), $0.5/(\lambda^2+1)$ olarak seçilmiştir. Burada 0.5 istenilen sinyal gücü ve λ ise karesel şartlama için verilen Lagrange çarpanıdır. Bu benzetişimde $\lambda=30$ alınmış ve çıkışta girişim nedeniyle oluşan hataya ait güç (λ^2+1) oranında bastırılmıştır.

KAYNAKLAR

- Bienvenu, G. ve Kopp, L., (1983), "Optimality of High Resolution Array Processing Using The Eigensystem Approach", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing 31: 1235-1248.
- Bresler, Y., Reddy, V.U. ve Kailath, T., (1988), "Optimum Beamforming for Coherent Signal and Interferences.", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 36(6): 833-843.
- Buckley, K. M., (1987), "Spatial \ Spectral Filtering with Linearly Constrained Minimum Variance Beamformers", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 35(3): 249-266
- Buckley, K. M., (1988), "Broad-Band Signal-Subspace Spatial -Spectrum (BASS-ALE) Estimation", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 36(7): 953-964.
- Buckley, K. M. ve Griffiths L. J., (1986), "An Adaptive Generalized Sidelobe Canceller with Derivative Constraints", IEEE Transaction on Antennas and Propagation, 30: 311-319
- Buckley, K. M. ve Xu, X. L., (1990), "Spatial -Spectrum Estimaiton in a Location Sector", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 38(11): 1842-1852.
- Chen, Y.H. ve Yu, F.P., (1991), "Comparasion of Spatial Interpolation and Transformation Matrices in the Coherent Signal Subspace for Bearing Estimation of Multiple Broadband Signals", J. Acoust. Soc. Am., 90(6): 3149-3154.
- Chen, Y.H. ve Cheng, R.H., (1993), "Directions of Arrival Estimations of Multiple Coherent Broad-Band Signals", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 29(3): 1035-10743.
- Er, M. H. ve Cantoni, A., (1983), "Derivative Constraints for Broad-Band Element Space Antenna Array Processors", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 31(6): 1378-1383
- Frost, O. L., (1972), "An Algorithm for Linearly Constrained Adaptive Array Processing", IEEE Proceedings, 60(8): 926-935.
- Griffiths, L.J. ve Jim, C.W., (1988), "An Alternative Approach to Llinearly Constrained Adaptive Beamforming", IEEE Transactions on Antenna and Propagation, 30: 27-34.
- Golub, G. H. ve Van Loan, C. F., (1984), "Matrix Computations" Johns Hopkins University Press, Baltimore MD.

Kaveh, M. ve Barabell, A. J., (1986), "The Statistical Performance of the MUSIC and The Minimum-Norm Algorithms in Resolving Plane Waves in Noise", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 34(2): 331-340.

Kumerasan, R., (1983), "On the Zeros of the Linear Prediction-Error Filter for Deterministic Signals", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 31(1): 217-219.

Kumerasan, R., (1983), "Estimating the Angle of Arrival of Multiple Plane Waves", IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems, 19(1): 134-139.

Qian, F. ve Van Veen, B.D., (1995), "Quadratically Constrained Adaptive Beamforming for Coherent Signals and Interference", IEEE Transactions on Signal Processing, 43(8): 1890-1900.

Reddi, S.S., (1979), "Multiple Source Location- A Digital Approach", IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems, 15(1): 95-105.

Roy, R. ve Kailath, T., (1989), "ESPRIT-Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 37(7): 984-994.

Stoica, P. ve Nehorai, A., (1989), "MUSIC, Maximum Likelihood and Cramer Rao Bound", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 37(5): 720-741.

Stoica, P. ve Nehorai, A., (1991), "Performance Comparison of Subspace Rotation and MUSIC Methods for Direction Estimation", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 39(2): 446-453.

Tseng ve Yih, C., (1992), "Minimum Variance Beamforming with Phase Independent Derivative Constraints", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 40(3): 285-294.

Wang, H. ve Kaveh, M., (1985), "Coherent Signal-Subspace Processing for Detection and Estimation of Angles of arrival of Multiple Wide-Band Sources" IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing, 33(4): 823-831.

Wilkinson, J. H., (1965), "The Algebraic Eigenvalue Problem", Oxford University Press, New York.

Ziskinds, I. ve Wax, M., (1988), "Maximum Likelihood Localization of Multiple Sources by Alternating Projection", IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing 36(10): 1553-1559

EKLER

EK 1. Yönlendirme Şartlamaları

Bu ekte, üst süzgecin istenilen bakış doğrultusundaki cevap karakteristiğini sağlayan katsayılarını ifade eden $\hat{W}_\gamma^0$ vektörü, en yakın yaklaşımla elde edilmeye çalışılacaktır. İstenilen cevabın, $[f_a, f_u]$ bandında $A(f, \theta_0, \phi_0)$ olduğu varsayılın. Eleman sayısı $M \times L$ olan katsayı vektörünün şu şekilde verildiği düşünülmüştür:

$$\begin{aligned} W_\gamma^{0T} &= \left[(w_1^0)^T, (w_2^0)^T, \dots, (w_L^0)^T \right] \\ \left[(w_k^0)^T \right]_i &= w_{(k-1)L+i}^0 \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, L \\ i = 1, 2, \dots, M \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{EK 1.1})$$

Üst süzgecin frekans cevabı şu şekildedir:

$$H_u(f, \theta, \phi) = \sum_{k=1}^L S^T(f, \theta, \phi) T(f) W_k^0 e^{-j2\pi f(k-1)T} \quad (\text{EK 1.2})$$

Burada $S(f, \theta, \phi)$ M boyutlu vektör ve $T(f)$ $M \times M$ boyutlu köşegen matristir. İlgili frekans aralığı boyunca istenilen frekans cevabı ile üst süzgecin frekans cevabının farkının karesel integrali, hata olarak tanımlanır ve minimize edilmeye çalışılır:

$$e_i^2 = \int_{f_a}^{f_u} \left| A(f, \theta_0, \phi_0) - H_u(f, \theta_0, \phi_0) \right|^2 df \quad (\text{EK 1.3})$$

(EK 1.2) ifadesi (EK 1.3)'de yerine konulursa, biraz işlemten sonra şu eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
e_1^2 &= (W_\gamma^o)^T Q_1 W_\gamma^o - 2P_1^T W_\gamma^o + \sigma \\
[Q_1]_{kl} &= \psi \left[(\tau_j - \tau_i) + (T_i - T_j) + (m-n)T \right] \begin{cases} k = i + (m-n)M \\ l = j + (n-1)M \end{cases} \\
i, j &= 1, 2, \dots, M, \quad m, n = 1, 2, \dots, L \\
\psi[\hat{\tau}] &= f_a \operatorname{sinc}(2\pi f_a \hat{\tau}) - f_a \operatorname{sinc}(2\pi f_a \hat{\tau}) \\
\operatorname{sinc}(2\pi f \hat{\tau}) &= \frac{\sin(2\pi f \hat{\tau})}{2\pi f \hat{\tau}}
\end{aligned} \tag{EK 1.4}$$

Eşitliklerde, P_L , $M \times L$ elemanlı bir vektör olsun ve $P_L = [p_1^T, p_2^T, \dots, p_L^T]$ olarak tanımlansın. Buradaki p_k vektörü ise şu şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned}
[p_k]_i &= \int_{f_a}^{f_b} \frac{1}{2} \left\{ A^*(f, \theta_0, \phi_0) e^{j2\pi f (\tau_i * T_i^* (k^* 1) T)} + A(f, \theta_0, \phi_0) e^{-j2\pi f (\tau_i * T_i^* (k^* 1) T)} \right\} df \\
i &= 1, 2, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots, L
\end{aligned} \tag{EK 1.5}$$

Yine σ^2 aşağıdaki şekilde bulunacaktır:

$$\sigma^2 = \int_{f_a}^{f_b} A^*(f, \theta_0, \phi_0) A(f, \theta_0, \phi_0) df \tag{EK 1.6}$$

Eşitlikteki (*) sembolü kompleks eşleniği ifade eder. Üst süzgeçin cevabı istenilen frekans karakteristiği olan $A(f, \theta_0, \phi_0)$ 'ye en yakın yaklaşım olarak tasarlanabileceği gibi p_i parametrelerinde oluşabilecek değişimlerden de etkilenmeyecek şekilde tasarlanabilir. Bu durumda hatanın minimizasyonu şu şekle bürünür:

$$\begin{aligned}
& \min_{W_\gamma^0} e_\gamma^2 \\
e_\gamma^2 &= \int_{p_m - \Delta p_m / 2}^{p_m + \Delta p_m / 2} \dots \int_{p_1 - \Delta p_1 / 2}^{p_1 + \Delta p_1 / 2} e_\gamma^2 dp_1 \dots dp_m \\
&= (W_\gamma^0)^T Q_\gamma W_\gamma^0 - 2P_\gamma^T W_\gamma^0 + \sigma \prod_{i=1}^m \Delta p_i \\
Q_\gamma &= \int_{p_m - \Delta p_m / 2}^{p_m + \Delta p_m / 2} \dots \int_{p_1 - \Delta p_1 / 2}^{p_1 + \Delta p_1 / 2} Q_\gamma dp_1 \dots dp_m \\
P_\gamma &= \int_{p_m - \Delta p_m / 2}^{p_m + \Delta p_m / 2} \dots \int_{p_1 - \Delta p_1 / 2}^{p_1 + \Delta p_1 / 2} P_\gamma dp_1 \dots dp_m
\end{aligned} \tag{EK 1.7}$$

Simetrik matris Q_γ , $ML \times ML$ boyutludur ve P , $M \times L$ elemanlı vektördür. (EK 1.7) ifadesinin minimizasyonunu sağlayan optimum katsayı vektörü $\hat{W}_\gamma^0$, ın şu şekilde olduğu gösterilebilir:

$$Q_\gamma W_\gamma^0 = P_\gamma \tag{EK 1.8}$$

Bu sonucu elde edebilmek için minimize edilecek hata fonksiyonun türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi gerekir. Optimum vektörle elde edilen minimum karesel hata ise şöyledir:

$$\alpha_\gamma = \sigma \prod_{i=1}^m \Delta p_i - (\hat{W}_\gamma^0)^T Q_\gamma \hat{W}_\gamma^0 \tag{EK 1.9}$$

İstenilen frekans cevabı düz olsaydı bu durumda:

$$\begin{aligned}
A(f, \theta_0, \phi_0) &= e^{j2\pi f \tau} \Rightarrow \\
[p_k]_i &= f_u \sin c[2\pi f(\tau - \tau_i + T_i + (k-1)T)] - f_a \sin c[2\pi f(\tau - \tau_i + T_i + (k-1)T)] \\
i &= 1, 2, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots, L
\end{aligned} \tag{EK 1.10}$$

$$\begin{aligned}
& \min_{W_\gamma^0} e_\gamma^2 \\
e_\gamma^2 &= \int_{p_m - \Delta p_m/2}^{p_m + \Delta p_m/2} \dots \int_{p_1 - \Delta p_1/2}^{p_1 + \Delta p_1/2} e_1^2 dp_1 \dots dp_m \\
&= (W_\gamma^0)^T Q_\gamma W_\gamma^0 - 2P_\gamma^T W_\gamma^0 + \sigma \prod_{i=1}^m \Delta p_i \\
Q_\gamma &= \int_{p_m - \Delta p_m/2}^{p_m + \Delta p_m/2} \dots \int_{p_1 - \Delta p_1/2}^{p_1 + \Delta p_1/2} Q_1 dp_1 \dots dp_m \\
P_\gamma &= \int_{p_m - \Delta p_m/2}^{p_m + \Delta p_m/2} \dots \int_{p_1 - \Delta p_1/2}^{p_1 + \Delta p_1/2} P_1 dp_1 \dots dp_m
\end{aligned} \tag{EK 1.7}$$

Simetrik matris Q_γ , $ML \times ML$ boyutludur ve P , $M \times L$ elemanlı vektördür. (EK 1.7) ifadesinin minimizasyonunu sağlayan optimum katsayı vektörü $\hat{W}_\gamma^0$ 'ın şu şekilde olduğu gösterilebilir:

$$Q_\gamma \hat{W}_\gamma^0 = P_\gamma \tag{EK 1.8}$$

Bu sonucu elde edebilmek için minimize edilecek hata fonksiyonun türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi gerekir. Optimum vektörle elde edilen minimum karesel hata ise şöyledir:

$$\alpha_\gamma = \sigma \prod_{i=1}^m \Delta p_i - (\hat{W}_\gamma^0)^T Q_\gamma \hat{W}_\gamma^0 \tag{EK 1.9}$$

İstenilen frekans cevabı düz olsaydı bu durumda:

$$\begin{aligned}
A(f, \theta_0, \phi_0) &= e^{j2\pi f \tau} \Rightarrow \\
[p_k]_i &= f_u \sin c[2\pi f(\tau - \tau_i + T_i + (k-1)T)] - f_a \sin c[2\pi f(\tau - \tau_i + T_i + (k-1)T)] \\
i &= 1, 2, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots, L
\end{aligned} \tag{EK 1.10}$$

olacaktır. Burada τ , seçilmiş ya da optimize edilmiş bir sabit değerdir.

EK 2. Gerçel veri noktaları şartlaması

Bu ekte ele alınacak nokta şartlamalar, saf gecikme ortamında ve izotropik (uzamsal alış örüntüsü bir küredir) elemanlar kullanıldığı varsayımı altında geliştirilecektir. Ancak çıkarım kolaylıkla daha genel durumlara genişletilebilir. Birim genlikli ve ω frekanslı bir gerçel sinüsoidin θ doğrultusundan HŞ üzerine düştüğü varsayalım. Bu durumda HŞ'nin üzerine θ yönünden ω frekanslı bir sinyalin gelmesi durumunda, $M \times L$ elemanlı gözlem vektörü (duyargaç çıkışları ve gecikme hattı çıkışlarını bir arada içeren vektör), $S_{\theta, \omega}(t)$ olsun. Dizinin koordinat referansına göre yapılan gözlem sonucunda sinyal $\cos \omega t$ olarak gözleniyor olsun. Böylece gözlem vektörü:

$$S_{\theta, \omega}(t) = \left[\cos(\omega(t - \tau_{1, \theta})), \dots, \cos(\omega(t - \tau_{M, \theta})), \dots, \cos(\omega(t - \tau_{1, \theta} - L + 1)), \dots, \cos(\omega(t - \tau_{M, \theta} - L + 1)) \right]^T \quad (\text{EK 2.1})$$

İyi bilinen bir trigonometrik bağıntıdan faydalanarak;

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (\text{EK 2.2})$$

gözlem vektörü şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} S_{\theta, \omega}(t) &= \cos(\omega t) c_{\theta}(\omega) + \sin(\omega t) s_{\theta}(\omega) \\ c_{\theta}(\omega) &= \left[\cos(\omega \tau_{1, \theta}), \dots, \cos(\omega \tau_{M, \theta}), \dots, \cos(\omega(\tau_{1, \theta} - L + 1)), \dots, \cos(\omega(\tau_{M, \theta} - L + 1)) \right]^T \\ s_{\theta}(\omega) &= \left[\sin(\omega \tau_{1, \theta}), \dots, \sin(\omega \tau_{M, \theta}), \dots, \sin(\omega(\tau_{1, \theta} - L + 1)), \dots, \sin(\omega(\tau_{M, \theta} - L + 1)) \right]^T \end{aligned} \quad (\text{EK 2.3})$$

HŞ'nin çıkışında bu sinyal için istenilen cevap şu şekilde olsun:

$$\begin{aligned}
 S_{\theta, \omega}(t)W &= A \cos(\omega t + \phi) \\
 &= A \cos \phi \cos \omega t + A \sin \phi \sin \omega t
 \end{aligned}
 \tag{EK 2.4}$$

Bir başka değişle; ortamdan alınan $\cos \omega t$ sinyalinin sistem çıkışında (EK 2.4)'teki gibi sabit faz ve genlik farklılığı ile elde edilmesi istenir. Son iki ifadeyi karşılaştırarak (θ, ω) konum frekans noktası için istenilen cevap için şartlama denklemleri şu şekilde olacaktır:

$$\begin{bmatrix} c_{\theta}^T \\ s_{\theta}^T \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} A \cos \phi \\ A \sin \phi \end{bmatrix}
 \tag{EK 2.5}$$


```
[U ev]=eig(Rfine);ev=diag(ev);n=abs(ev-ev(1));dim=K-length(find(n>decn));power=sum(ev);
for n=1:L
    if sum(ev(1:n))/power>=threshold break;end
end
efrank=n;
```

%% Gürültü Altuzayı Bulunuyor %%%

```
R=correl(K,signal);
[a e]=eig(R);
```

```
eignv=real(diag(e));
for n=1:K-L
    [m bi]=min(eignv);
    eignv(bi)=max(eignv);
    bil(:,n)=a(:,bi);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Gürültü Altuzayı %%%%%%%%%
```

%%

```
[Y O Z]=svd(U(:,1:n)*bil);
Z=bil*Z;
efine=Z(:,1:dim);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Fine/s vektörü %%%%%%%%%
```

%%

```
P=zeros(1024,1);
sc=fix(1024*q);
for n=1:dim
    P=P+abs(fft(efine(:,n),1024));
end
```

```
P=[P(1024-sc+1:1024);P(1:sc)];
P=-20*log10(P);
```

```
scale=[fliplr(asin(-(0:sc-1)./(1024*q))) asin((0:sc-1)./(1024*q))]*180/pi;
```

```
plot(scale,P,'c')
```

%% END %%%

%%

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ESPRIT.m %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
signal=arrayout('c',N,L,Q,sample,var,K,q,NP);
```

```
R=correl(K,signal);
```

```

[E1 e1]=eig(R);
SigSub=E1(:,1:L);                                %%% Sinyal Altuzayı %%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TLS ESPRIT %%%%%%%%%%
ESP=[SigSub(1:K-1,:);SigSub(2:K,:)]*[SigSub(1:K-1,:) SigSub(2:K,:)];

[E1 e1]=eig(ESP);

E=-E1(1:L,L+1:L*2)*inv(E1(L+1:2*L,L+1:2*L));

angles=asin(angle(eig(E)))/(2*pi*q);

polar(angles,ones(L,1),'+')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Spsmooth.m %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
signal=arrayout('c',N,L,Q,sample,var,K,q,NP);

xa=K-(p-1);                                     %%% Altdizi Sayısı %%%
                                                %%% Altdizi Eleman Sayısı %%%

R=zeros(p);
for n=1:xa
    Rs=correl(p,signal(n:n+p-1,:));
    R=Rs+R;
end

R=R/x;

[scale B]=music(p,L,R,q);
plot(scale,B,'g')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Forwback.m %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
signal=arrayout('c',N,L,Q,sample,var,K,q,NP);

```

```

x=K-(p-1);

R=zeros(p);
for n=1:x
    Rs=correl(p,signal(n:n+p-1,:));
    R=Rs+R;
end

R=R/x;

J=rot90(eye(p));
R=.5*(R+J*conj(R)*J);          %%% İleri-Geri Uzamsal Düzleme Özilişki Matrisi %%%

[scale B]=music(p,L,R,q);
plot(scale,B,'c')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

EK 3.2 Geniş Bant Sinyal Yönü Kestirimi

Geniş bant sinyal ortamının sağlanması için (ULA üzerinde), sinayllerin keyfi geliş açılarında üretilebilmesi gerekmektedir. Bunun sağlanabilmesi için kısmi gecikme süzgeçleri (Fractional Delay Filters) kullanılmıştır. Sinyaller istenilen frekans bant genişliğinde, güçte ve açıda Barray.m alt programı tarafından üretilir ve gözlem vektörleri çıkış olarak elde edilir. Gözlem vektörleri Frqdata.m alt programı tarafından frekans düzlemine dar bantlı bölgelere ayrılır. Uyumlu sinyaller verilen ilk sinyalin genlikçe değişmiş ve zamanda gecikmiş yankısı olarak elde edilir. Gecikme ve genlik değişimi ayarlanabilmektedir. Geniş bant sinyal yön kestirim yöntemleri CSS, CI ve CI'nun yön kaydırma yöntemiyle geniş hata açılarının azaltılmasının sağlanması sırasıyla CSS.m, Cohint.m, Mcohint.m ana programları tarafından gerçekleştirilmektedir.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%          Barray.m          %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```
function [output]=barray(d,B,doa,var,sample,K,q,N,powdelay,varn);
```

```

                    %%% d =Sinyal Sayısı          %%%
                %%% B =Sinyal Bant Genişliği & Merkez Frekansları %%%
                    %%% doa =Sinyal Geliş Yönleri          %%%

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% sample=Gözlem Sayısı %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% var =Sinyal Güçleri %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% K =Duyargaç Sayısı %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% q =Duyargaç Uzaklık Katsayısı<1 %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% N =Uyumlu Sinyal Sayısı %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% powdelay=Uyumlu Sinyal Zayıflaması & Normalize Gecikmesi %%%%%%%%%

if N==0 fmax=max(B(1:d-N,1)*.5+B(1:d-N,2));
else fmax=max(B(:,1)*.5+B(:,2));end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Kaynak Sinyalleri Üretiliyor %%%%%%%%%%%

h=32; %%%%%%%%% Kısmi Gecikme Süzgeç (KGS) Uzunluğu %%%%%%%%%
le=sample+126;
Sg=rand(d,le);
k=-32:31;
for n=1:d-N
    Sg(n,:)=Sg(n,:)-mean(Sg(n,:));
    fc=B(n,2);band=B(n,1)*.5;
    H=cos(pi*fc*k).*sin(pi*band*k)./(pi*k);H(33)=band;
    sa=filter(H,1,Sg(n,:));S(n,:)=sa(64:le);
    S(n,:)=sqrt(var(n)/cov(S(n,:)))*S(n,:);
end

DC=zeros(d,1);
if N~=0
    for n=1:N
        S(d-N+n,:)=sqrt(powdelay(n,1))*S(1,:)/sqrt(var(1));
    end
    DC=[zeros(d-N,1);powdelay(:,2)];
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% KGS Katsayıları Bulunuyor %%%%%%%%%%%

D=(q/(2*fmax))*sin(doa*pi/180); %%%%%%%%% Sinyal Gecikmeleri %%%%%%%%%
k=-h:h-1;
p=2;
w=.8;delta=.05;
output=zeros(K,sample);

for n=1:d
    %if D(n)~=0
        for sen=1:K
            Hf=(sin(pi*w*(k+(sen-1)*D(n)+DC(n)))./(pi*(k+(sen-1)*D(n)+DC(n))))*...
                (sin(delta*(k+(sen-1)*D(n)+DC(n))/(2*p))./(delta*(k+(sen-
1)*D(n)+DC(n))/(2*p))).^p;
            if max(isnan(Hf))==1 Hf(33)=w;end
            Sout(sen,:)=filter(Hf,1,S(n,:));
        end
        %else for zx=1:K Sout=[Sout;S(n,:)];end;end

```

```

        output=output+Sout(:,64:length(Sout));
    end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if varn~=0
    Noise=randn(K,length(output));

    for f=1:K
        Noise(f,:)=Noise(f,:)-mean(Noise(f,:));
        Noise(f,:)=sqrt(varn)*Noise(f,:)/sqrt(cov(Noise(f,:)));
    end

    output=output+Noise;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%                               %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%                               %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%                               %%%%%%%%%%

```

Frqdata.m

```
function [FSout]=Frqdata(d,B,doa,var,sample,K,q,N,powdelay,taps,varn)
```

```
Sout=barray(d,B,doa,var,sample,K,q,N,powdelay,varn);
```

```
qr=taps*.5;
```

```
for n=1:K
```

```
    for k=1:taps:sample
```

```
        if k+taps-1<sample
```

```
            x=fft(Sout(n,k:k+taps-1));FSout(n,k:k+qr-1)=x(1:qr);end
```

```
    end
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%                               %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%                               %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%                               %%%%%%%%%%

```

Cohint.m

```
clear
```

```
B=[.3 .5;.2 .3];
```

```
d=2;
```

```
doa=[-40;20];
```

```
var=ones(1,2);
```

```
sample=2048;
```

```
%%% Sinyal Bant Genişlikleri & Merkez Frekansları %%%
```

```
%%% Sinyal Sayısı
```

```
%%%
```

```
%%% Sinyal Geliş Yönleri
```

```
%%%
```

```
%%% Sinyal Güçleri
```

```
%%%
```

```
%%% Gözlem Sayısı
```

```
%%%
```

```

K=10;                                %%% Duyargaç Sayısı %%%
q=1;                                %%% Duyargaç uzaklıklarıyla orantılı katsayı %%%
taps=32;                            %%% FFT Uzunluğu %%%
N=0;                                %%% Uyumlu Sinyal Sayısı %%%
varn=0.01;                          %%% Gürültü Gücü %%%
powdelay=[1 5.7];                  %%% Uyumlu Sinyal Güçleri %%%

```

```

FSout=frqdata(d,B,doa,var,sample,K,q,N,powdelay,taps,varn);
R=zeros(K);
Rfoc=zeros(K);

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CI Algoritması %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

fmin=min(B(1:d-N,2)-B(1:d-N,1)*.5);
fmax=max(B(1:d-N,1)*.5+B(1:d-N,2));
fm=fix(.5*fmax*(taps-1)+1);
fmi=fix(.5*fmin*(taps-1)+1);
qr=taps*.5;
b=q/(2*fmax);

for fr=fmi:fm
    say=0;
    for f=fr:qr:length(FSout)
        int=spline(1:K,FSout(:,f),1+(0:K-1)*(2*fmi-1)/(2*fr-1));
        R=R+int.'*conj(int);say=say+1;
    end
    Rfoc=Rfoc+R;
    Rfoc=Rfoc/(say*length(fmi:fm));
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

[scale spec]=music(K,d,Rfoc,(fmi-1)*b/(taps-1));

```

```

plot(scale,spec,'m')

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CSS.m %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

clear
B=[.3 .5;.2 .3];
d=2;
doa=[-40;20];
var=ones(1,2);
sample=2048;
K=10;
q=1;

```

```
taps=32;  
N=0;  
powdelay=[1 5.7];  
varn=0.01;
```

Odaklama Matrisi Üretimi

```
fmax=max(B(1:d-N,1)*.5+B(1:d-N,2));  
fo=mean(B(1:d-N,2));  
fmo=fix(.5*fo*(taps-1)+1);
```

```
b=1/(2*fmax);
```

```

for n=1:d
    A1(:,n)=exp(i*2*pi*fmo*b/(taps-1)*(0:K-1)*sin(doa(n)*pi/180));
end
T1=[A1 eye(K,K-d)];

```

%%%%%%%%%%

```
FScout=frqdata(d,B,doa,var,sample,K,q,N,powdelay,taps,varn);
uz=length(FScout);
qr=taps*.5;
```

```
Rort=zeros(K);
for fr=1:qr-1
    k=1:qr:uz;
    R=correl(K,Fsout(:,fr+k));

    for n=1:d
        A(:,n)=exp(i*2*pi*fr*b/(taps-1)*(0:K-1)'*sin(doa(n)*pi/180));
    end
    T=T1*inv([A eye(K,K-d)]);

    Rort=Rort+T*R*T';
end
```

```
Rort=Rort/qr;  
[scale spec]=music(K,d,Rort,q*fmo/(2*fmax*(taps-1)));
```

```
plot(scale,spec)
```

```
figure
angles=espril(Rort,q*fmo/(2*fmax*(taps-1)),d)*180/pi;
```

%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%

Mcohint.m

```

clear
B=[.3 .5;.2 .3];
d=2;
doa=[-40;20];
var=ones(1,2);
sample=2048;
K=10;
q=1;
taps=32;
N=0;
varn=.01;
powdelay=[1 5.7];

Sout=barray(d,B,doa,var,sample,K,q,N,powdelay,varn);
R=zeros(K);
Rfoc=zeros(K);
mod=mean(sin(doa*pi/180));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CI Algoritması %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

fmin=min(B(1:d-N,2)-B(1:d-N,1)*.5);
fmax=max(B(1:d-N,1)*.5+B(1:d-N,2));
fm=fix(.5*fmax*(taps-1)+1);
fmi=fix(.5*fmin*(taps-1)+1);
b=q/(2*fmax);
qr=taps*.5;

for n=1:K
    for k=1:taps:sample
        if k+taps-1<sample
            x=fft(Sout(n,k:k+taps-1));FSout(n,k:k+qr-1)=x(1:qr);end
        end
    end
end

for fr=fmi:fm
    say=0;
    for f=fr:qr:length(FSout)
        int=spline(1:K,FSout(:,f)).*exp(-i*2*pi*(fr-1)*b/(taps-1)*(0:K-1)*mod),1+(0:K-1)*(2*fmi-1)/(2*fr-1));
        int=int.*exp(i*2*pi*(fmi-1)*b/(taps-1)*(0:K-1)*mod);
        R=R+int.*conj(int);say=say+1;
    end
    Rfoc=Rfoc+R;
    Rfoc=Rfoc/(say*length(fmi:fm));
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[scale spec]=music(K,d,Rfoc,(fmi-1)*b/(taps-1));

```

```
plot(scale,spec,'b')
```

```
%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%
```

EK 3.3 Uyarlamalı Hüzme Şekillendirme

Uyarlamalı hüzme şekillendirme benzetişimlerinde, uyarlama yöntemi olarak En Küçük Ortalama Kareler (Least Mean Square, LMS) algoritması kullanılmıştır. Bir ULA için bu algoritma GSC.m alt porgramı tarafından gerçekleştirilir (Karesel şartlama içinse, Quadgsc.m). Türevsel şartlamalar Derconst.m alt programı tarafında hesaplanır. Uyarlamalı Hüzme Şekillendirici (HŞ) ise GSC.m programınca gerçekleştirilmektedir. Karesel şartlama durumunda ise Karesel.m programı kullanılmıştır.

```
%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%                               Abfilt.m                               %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%                               %%%%%%%%%%
```

```
function[H]=abfilt(fs,F,T);
```

```
%%%%%%%% Temel Band Sinyal Bantları %%%%%%%%%
```

```
if max(max(F))>fs/2 error('Bu süzgeç Tasarlanamaz'); end
```

```
a=round(F*1024/fs);
```

```
[r c]=size(F);
```

```
for i=1:r
```

```
    m1(i,:)=zeros(1,a(i,1)-1) ones(1,a(i,2)+1-a(i,1)) zeros(1,1024-a(i,2));
```

```
end
```

```
for i=1:r
```

```
    m1(i,:)=ifft(m1(i,:));
```

```
end
```

```
m1=[m1(:,513:1024) m1(:,1:512)];
```

```
H=m1(:,513-T/2:513+T/2);
```

```
%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%                               GSCLMS.m                               %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%                               %%%%%%%%%%
```



```
w=wq-Cn*wa;e(n)=w'*X(:,n);  
if w'*Rn*w>=delta  
    ('ayar')  
    wa=wa+step*((Cn'*X(:,n))*X(:,n)'+lgr*Cn'*Rn)*(wq-Cn*wa));  
else wa=wa+step*Cn'*X(:,n)*X(:,n)'*(wq-Cn*wa);  
end  
  
end
```

%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%

%%%
Derconst.m%%%

```
function [C]=derconst(order,teta,M,L,ref,q,B);  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%% order: Türevsel Şartlama Derecesi %%%  
%%% teta: Hüzme Bakış Yönü %%%  
%%% M: Duyargaç Sayısı %%%  
%%% L: Geciktirici Sayısı %%%  
%%% ref: ULA referans noktası %%%  
%%% q: d/ $\lambda$  %%%  
%%% B: Sinyal Bant Genişliği & Merkez Frekansları %%%  
  
k=1:M;  
if nargin==7 fmax=max(B(:,1).*5+B(:,2));end;  
    else fmax=1,end  
  
Cder1=q/fmax*(k-ref)*cos(teta);  
Cder2=(q/fmax*(k-ref)*cos(teta)).^2;  
  
for n=1:L  
    C1(n,(n-1)*M+1:n*M)=Cder1;  
    if order==2 C2(n,(n-1)*M+1:n*M)=Cder2;end  
end  
  
if order==1  
    C=[C1];  
end  
  
if order==2  
    C=[C1;C2];  
end;
```

%%%%%%%%%% END %%%%%%%%%%

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
GSC.m
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
clear
P=path;
path(P,'f:\murat\beamfrm\bin');
```

```
var=[.5 1 .7];
nvar=0.1;
L=3;
K=9;
ref=5;
order=0;
sample=5000;
%S=absuzgec(16000,[4000 4500;2000 2500;5000 5500],128);
S=absuzgec(16000,[4000 4500;4000 4500;5000 5500],128);
n=1:sample;
```

```
teta=[0 -pi/4 pi/3];
dteta=0;
q=1;
```

```
k=0:K-1;
```

```
C=exp(i*q*pi*sin(dteta)*k');
if order~=0 Cder=derconst(order,dteta,K,1,ref,q);C=[C Cder'];g=[1;zeros(order,1)];end
if order==0 g=1;end
```

```
Cn=null(C');
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%no=rand(L,sample+128);
no=rand(L-1,sample+128);no=[no(1,:);no];
```

```
for k=1:L
    no(k,:)=no(k,:)-mean(no(k,:));
    s(k,:)=conv(no(k,:),S(k,:));
    sig(k,:)=sqrt(var(k))*s(k,129:sample+128)/sqrt(cov(s(k,129:sample+128)));
end
```

```
for n=1:K
    N(n,:)=rand(1,sample);
    N(n,:)=N(n,:)-mean(N(n,:));
    N(n,:)=sqrt(nvar)*N(n,:)/sqrt(cov(N(n,:)));
end
```



```
P=path;
path(P,'f:\murat\beamfrm\bin');
```

```
var=[.5 1 .7];
nvar=0.1;
L=3;
K=9;
ref=3;
order=0;
sample=5000;
S=absuzgec(16000,[4000 4500;4000 4500;5000 5500],128);
n=1:sample;
tvar=[nvar var(2:L)];
```

```
lgr=24;
delta=(var(1)/(lgr+1)^2+.0005*sum(tvar));
```

%%% Girişim Bastırım Faktörü %%%
%%% Girişim Güç Eşiği %%%

```
teta=[0 -pi/4 pi/3];
dteta=0;
q=1;
```

```
k=0:K-1;
```

```
C=exp(i*q*pi*sin(dteta)*k');
if order~=0 Cder=derconst(order,dteta,K,1,ref,q);C=[C Cder];g=[1;zeros(order,1)];end
if order==0 g=1;end
```

```
Cn=null(C);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
Rn=zeros(K);
```

```
for ty=2:L
```

```
    Rn=Rn+exp(i*pi*q*k'*sin(teta(ty)))*exp(-i*pi*q*k*sin(teta(ty))); %%% Girişim Özilişki Matrisi
```

```
end
```

```
Rn=Rn/(L-1)+nvar^2*eye(K);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
no=rand(L-1,sample+128);no=[no(1,:);no];
```

```
for k=1:L
```

```
    no(k,:)=no(k,:)-mean(no(k,:));
```

```
    s(k,:)=conv(no(k,:),S(k,:));
```

```
    sig(k,:)=sqrt(var(k))*s(k,129:sample+128)/sqrt(cov(s(k,129:sample+128)));
```

```
end
```

```
for n=1:K
```

```
    N(n,:)=rand(1,sample);
```

```
    N(n,:)=N(n,:)-mean(N(n,:));
```


ÖZGEÇMİŞ

- Doğum Tarihi** : 01.01.1974
- Doğum Yeri** : Kocaeli - Körfez
- Lise** : 1987-1990 Pendik Lisesi
- Lisans** : 1990-1994 Yıldız Teknik Üniv. Elektronik ve Haberleşme Bölümü
- Yüksek Lisans** : 1994-1995 Y.T.Ü Yüksek Lisans Hazırlık İngilizce Hazırlık
1995-1998 Y.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Anabilim Dalı, Haberleşme Programı
- Çalıştığı Kurumlar** : 1996- Devam ediyor: YTÜ Elektronik ve Haberleşme Bölümü'nde Araştırma görevlisi