

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Sandık Kes, Köp, Hes, Met. ve Bilg. Uyg.

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim Ekiz

1976

R150

154

SANDIK KESİTLİ KÖPRÜLERİN HESAP METOTLARI VE BİLGİSAYAR UYGULAMASI

İ.D.M.M.A. İnşaat Bölümü Masif Yapılar Kürsüsünde
yaptırılan Yeterlik Tezidir.

İBRAHİM EKİZ

İnş. Y. Müh.

Tezin Bölüme verildiği tarih : 26 Aralık 1975

Tezin savunulduğu tarih : 9 Şubat 1976

Tezi Yöneten : Prof. HÜSEYİN CELÂSUN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. YUSUF BERDAN

Prof.Dr. HALİT DEMİR

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot : R 150
154
Alındığı Yer : FEN BİL. ENS.
Tarih : 15.10.1991
Fatura :
Fiyatı : 4500.00
1/15
Ayniyat No :
Kayıt No : 47746
UDC : 624. 378.242
Ek :





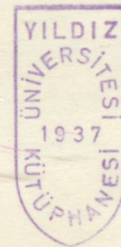
SANDIK KESİTLİ KÖPRÜLERİN HESAP METOTLARI VE BİLGİSAYAR UYGULAMASI

Sevgili Öğretim ÜNAL GÜRLER

İ.D.M.M.A. İnşaat Bölümü Masif Yapılar Kürsüsünde
yaptırılan Yeterlik Tezidir.

İBRAHİM EKİZ

İnş. Y. Müh.



Tezin Bölüme verildiği tarih : 26 Aralık 1975

Tezin savunulduğu tarih : 9 Şubat 1976

Tezi Yöneten : Prof. HÜSEYİN CELÂSUN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. YUSUF BERDAN

Prof. Dr. HALİT DEMİR

Modern büyük açıklıklı köprülerin üst yapıları, son zamanlarda genellikle çelik, beton veya kompozit tek veya çok gövde sandık kiriş şeklinde inşa edilmiştir. Memleketimizde inşa edilen Beğazici köprü-ünde tahliye ve Mecidiyeköy üst yolu buna birer örnektir. Bu kesitli rayolu köprülerinde görülebilecek avantajlar şağlar. Çünkü bunlar büyük torsiyonel rijitliğe sahiptir. Bu rijitlik, enine yönde köprü üst kısmına göre simetrik olmayan yükler için enine eksen gerilmelerini önler hemde üniform yayılışını temin eder. Kapalı kesitli kirişler ya da daha fazla gövdeli açık "T" kirişlere kıyasla enine doğrultuda elastik yükleri büyük torsiyonel rijitliği ile daha uygun biçimde dağıtır ve belirli belirli istenilen eğilme momentlerine uygun dü-şer. Sandık kirişin enine yüklemesi neticesinde düşey gövdeleme gelen etkiler enine çerçeve olarak büyük ölçüde küçülür. Bununla beraber analitik çalışmalar göstermiştir ki sandık kesitli kirişler enine yönde simetrik olmayan yüklerden dolayı enkesit daha fazla deformasyona maru kalır. Bu davranış enkesitin önüne olmaya karşılmasını ve bu karşılama olan ölçüde boyuna ve enine gerilmelerde artışlar meydana getirir. Bu gerilme artışları sandık kesitli kirişlerin dezavantajlarıdır. Fakat bu dezavantajlar, enkesit deformasyonlarını önleyen, belirli açıklıklar ve konular enine diyaframlar (enlemeler) veya çubuk bağlantılarla ortadan kaldırılabılır.

Sevgili Oğlum ÜNAL GÜRHAN'a

Bu çalışmada önce kapalı kesitlerin burulması ve genel olarak elastik burulmanın söz edilmiş ve burulma ile ilgili sabitler hakkında bilgiler verilmiştir. Daha sonra 6 ayra metod incelenecek olup bu metodlar ayrıca ayrıca kısaca açıklanmıştır.

1. Richardson Depiyeleme Metodu:

Bu metod Blum ve Rehner'in çalışmalarına dayanmaktadır. Sandık kesit boyuna diyafram ve gövdeler ile gösterilmiştir. Diyaframın sadece boyuna eğilme momenti ve gövdelerin de yalnızca kayma etkilerini taşıdığı kabul edilir. Sandık kesitin çerçeve rijitliği ihmal edilir ve elastik malzeme enine diyaframlar (enlemeler) ile karşılanır. Sandık kesit boyuna doğrultuda diyaframlar arasındaki gövde şeklinde dü-şer. Bu gövde 12 kuvvetler ile gövde uçlarındaki deplasmanlar

TAKDİM

Modern büyük açıklıklı köprülerin üst yapıları, son zamanlarda genellikle çelik, beton veya kompozit tek veya çok gözlü sandık kiriş şeklinde inşa edilmektedir. Memleketimizde inşa edilen Boğaziçi köprüsünün tabliyesi ve Mecidiyeköy üst yolu buna birer örnektir. Bu kesitler arayolu köprülerinde gözönüne alınabilecek avantajlar sağlar. Çünkü bunlar büyük torsiyonel rijitliğe sahiptir. Bu rijitlik, enine yönde köprü eksenine göre simetrik olmayan yükler için enine flanş gerilmelerinin hemen hemen üniform yayılışını temin eder. Kapalı kesitli kirişler iki veya daha fazla gövdeli açık "T" kirişlere kıyasla enine doğrultudaki eksantrik yükleri büyük torsiyonel rijitliği ile daha uygun biçimde dağıtır ve değişik cebirsel işaretli eğilme momentlerine uygun düşer. Sandık kirişin eğilme yüklemesi neticesinde düşey gövdelere gelen tesirler enine çerçeve sistem ile büyük ölçüde küçülür. Bununla beraber analitik çalışmalar göstermiştir ki sandık kesitli kirişler enine yönde simetrik olmayan yüklerden dolayı enkesit daha fazla deformasyona maruz kalır. Bu davranış enkesitin üniform olmayan çarpılmasını ve bu çarpılmadan dolayıda boyuna ve enine gerilmelerde artışlar meydana getirir. Bu gerilme artışları sandık kesitli kirişlerin dezavantajlarıdır. Fakat bu dezavantajlar, enkesit deformasyonlarını önleyen, belirli aralıklarla konulan enine diyaframlar (enlemeler) veya çapraz bağlantılarla ortadan kaldırılabilir.

Bu çalışmada önce kapalı kesitlerin burulması ve genel olarak eğilmeli burulmadan söz edilmiş ve burulma ile ilgili sabitler hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra 6 ayrı metot incelenmiş olup bu metotlar sırayla aşağıda kısaca özetlenmiştir.

1. Richmond Deplasman Metodu:

Bu metot Ebner ve Reisner'in çalışmalarına dayanmaktadır. Sandık kesit boyuna flanşlar ve gövdeler ile gösterilmiştir. Flanşların sadece boyuna eğilme kuvvetlerini ve gövdelerin de yalnızca kayma tesirlerini taşıdığı kabul edilir. Sandık kesitin çerçeve rijitliği ihmal edilir ve distorsiyonel yükleme enine diyaframlar (enlemeler) ile karşılanır. Sandık kesit boyuna doğrultuda diyaframlar arasındaki gözler şeklinde düşünülmüştür. Gözdeki iç kuvvetler ile gözün uçlarındaki deplasmanlar

arasındaki-bağıntı ifadeleri çıkarılır. Diyaframlardaki denge gözönün alınarak iç kuvvetleri dış yüklere (diyafram üstünde uygulanan) bağla ifadeler bulunur. Bu işlemler her göz için tekrarlanır ve deplasmanla çözümü için benzer lineer denklemler meydana getirilir. Deplasmanlar rinci denklem takımında yerine konulur ve sonra iç kuvvetler ve geril ler bulunur. Bu metot ile yükün torsiyonel ve distorsiyonel bileşenle nin tesirleri hesaplanır. Yükler diyaframlar arasında tatbik edildiği zaman diyafram üzerinde ankastre uç momentleri ve kuvvetleri olarak gözönüne alınır.

2. BEF Metodu:

Elastik zemine oturan kiriş ile distorsiyonel yük altındaki sandık kiriş arasındaki analojiyi ilk önce Vlasov ortaya koymuştur. Daha sonra analogi Wright tarafından geliştirilmiştir. Metot analog BEF'in diferansiyel denklem ile çözümüne dayanır. Analog BEF'in k zemin modü sandık kirişin EI_b eğilme rijitliği ve çarpılma rijitliği ile ve Q moment rijitliği sandık kesitteki diyafram (enleme) veya çapraz bağlantıların rijitliği ile orantılıdır. BEF'in mesnetler arasındaki uzunluğu sandık kirişin açıklığı veya boyuna göz uzunlukları ile ve BEF'deki yükün şiddeti ve boyuna yayılımı sandık kirişin bir gövdesi üstüne etkiyen yükün antimetrik bileşeni ile aynıdır. BEF'in sehimleri sandık kesitin distorsiyon gerilmesi ile ve BEF'in momentleri sandık kesitin çarpılma gerilmeleri ile orantılıdır.

3. Knittel Metodu:

Bu metotta sistem, boyuna kenarları boyunca rijit olarak birleştirilen katlanmış plaklar serisi şeklinde düşünülmektedir. Yükleme gözdelelerinden biri üzerinde yapılmaktadır. Bir gövde üzerinde etkiyen kuvvet belirli oranlarda diğer gövdelere aktarılır. Yük açıklık boyunca lineerdir ve fazla değişken değildir. Enine doğrultudaki eğilme tesirini gözönüne almak için sandık kiriş, boyuna doğrultuda beraber çalışır ve birinin diğerine etkisi olamayan çok sayıda benzer enine çerçeveler şeklinde düşünülür.

4. Katlanmış Plak Metodu:

Bu metot, sistemlerin analizinde hem münferit yük ve hemde yayılı yük için Fourier serilerinden meydana gelen harmonik çözüm kullanıldığında, iki ucu basit mesnetli sandık kirişli köprülerde ideal olarak uygulanabilir. Köprü boyuna ayritlar boyunca rijit bağımlı dikdörtgen plak serileri olarak düşünülür. Her plak, önce bağımsız olarak plak düzlemine dik yükler için elastik plak teorisi ile ve plak düzlemindeki yükler için levha teorisi ile çözümlenir. Bu durumda tek plak için Fourier serisi terimlerini kapsayan rijitlik matrisi elde edilir. Her harmonik için plak her boyuna kenarda dört serbestlik derecelidir. Rijit plaklar ihtiva eden tüm sistemin analizinde direkt rijitlik çözümü kullanılır. Bu metot çözüm için sayısal bilgisayar gerektirir ve bilgisayarda sonlu elemanlar metoduna kıyasla gözönüne alınabilir hızlilik ve daha az hafızayı gerektirir. Çünkü bu metotta tüm sistem daha az serbestlik derecelidir. Fourier serileri ile gösterilebilen çok sayıda yükleme tipi düşünülebilir. Çözüm elastik teorisinin kabulleri ile tam uyuşur.

Bu metot için bir bilgisayar programı hazırlanmış ve Ek-1 de verilmiştir.

5. Sonlu Bandlar Metodu:

Bu metot iki ucunda keyfi sınır şartları bulunan sistemlere uygulanabilir. Kullanılan esas sistem elemanı, Boyuna doğrultuda her plak elemanının sonlu sayıda bandlara bölünmesiyle elde edilen bir sonlu banttır. Bu sonlu bantların herbiri plağın boyuna ayritları arasındaki enine aralığa eşit bir genişlikte dir. Çözüm, açıklık boyunca bir enine bantın köprünün bir ucundan öbür ucuna kadar bağımlı olduğu esasına dayanan bir metot ile sağlanır. Köprünün iki ucunda ve ara mesnetlerdeki sınır şartları problemin çözümünde gerekli bütün bilinmeyenleri çözmek için yeterli kadar denklemi sağlar.

6. Sonlu Elemanlar Metodu:

Bu metotta her plak düğüm noktalarında içten bağımlı (rijit) çok sayıda elemanlara ayrılmıştır. Her düğümde 6 serbestlik derecesi vardır ve bunların herbiri için bir bilinen kuvvet veya deplasman vardır. Eğer bir kuvvet biliniyorsa ona tekabül eden deplasman bilinmez, veya bunun tersi. Bilinmeyen düğüm deplasmanlarının ve kuvvetlerinin tümünü

bulmak için direkt rijitlik çözümü kullanılabilir. Bunlar bilinirse iç kuvvetler ve gerilmeler de hesaplanabilir. Bu yaklaşımda anahtar adım, her sonlu eleman için eleman rijitlik matrislerinin geliştirilmesidir. Bu metot keyfi yüklemeler ve sınır şartları için kullanılabilir. Keza değişik boyutları ve malzeme özellikleri olan sistemlere uygulanabilir. Ancak kompleks sandık kirişli köprü elemanları için çok büyük denklem sistemlerinin çözümü bir dezavantaj arzeder. Bu yüzden problemin çözümü günümüzdeki bilgi sayarlar için olanaksızlaşır.

Burada, her zaman olduğu gibi bu çalışmamda da yardımlarını gördüğüm ve bilgilerine başvurduğum değerli hocam Prof. Hüseyin CELASUN'a içten teşekkürlerimi bildiririm.

İÇİNDEKİLER

I-BURULMA	1
-Notasyonlar	1
1. Tüplerin Burulması	1
2. Tek gözlü tüplerin burulması	1
3. Çok gözlü tüpler	3
II-ÇOK GÖZLÜ SANDIK KİRİŞLERE AİT TORSİYON-EĞİLME TEORİSİ	7
-Notasyonlar	7
1. Giriş	8
2. Esas elastik denklemler	8
3. Saint-Venant torsiyon teorisinde eksenel deplasmanlar.	11
4. Çarpılma deplasmanları ve dönmelerin açıklık doğrultusun- daki değişimi.	13
5. Normal gerilmelerin hesabı	20
6. Kayma kuvvetlerinin süreklilik şartı ile hesabı	21
7. Kayma kuvvetlerinin süreklilik şartı ile belirlenmesi.	24
8. Sayısal örnek	25
III-İNCE CİDARLI SANDIK KESİTLERİN BURULMASI (RICHMOND DEP- LASMAN METODU).	28
-Notasyonlar	28
1. Giriş	29
2. Yaklaşık çözüm	29
Rijit uç diyaframalı basit mesnetli sandık kirişler.	29
3. Münferit diyaframalı trapez enkesitli sandık kirişler için Richmond deplasman çözümü	35
3.1.Giriş	35
3.2.Sistemin idealleştirilmesi.	36
3.3.Torsiyonal ve distorsiyonal yükler.	36
3.4.Trapez enkesitli ince cidarlı sandık kirişlerin çarpılması.	39
3.5.Genelleştirilmiş deplasman ve kuvvet değişkenleri	44
3.6.Burulma yüklerinin tesiri	49
3.7.Uç kuvvetler ve deplasmanlar arasındaki bağıntı	51
3.8.Gövdelerin rijit cisim dönmelerinden meydana gelen çarpılma dönmesi	56
3.9.Torsiyonal kuvvetlerden meydana gelen torsiyonal deplasmanlar	56

3.10.Genelleştirilmiş çarpılma momentlerinden meydana	
gelen torsiyonel deplasmanlar	58
3.11.Matris formüllerinin çıkarılması.	58
3.12.Diyafram özellikleri.	64
3.13.Denge şartı.	66
3.14.Mesnet şartları.	67
3.15.Diyaframlar arasında tatbik edilen yüklerden doğan	
enine eğilme gerilmeleri.	70
4. Sürekli diyaframlı trapez sandık kesitler	71
4.1.Giriş.	71
4.2.Burulma kuvvetlerinin tesiri	73
IV-SANDIK KESİTLİ KÖPPÜLERİN BEF ANALOJİSİ İLE HESABI.	80
-Notasyonlar.	80
1. Giriş.	82
2. Elastik zemine oturan kiriş analogisi.	82
2.1.Analojinin anahatları.	82
2.2.Enkesitin deformasyona dayanımı.	86
2.3.Enkesitin çarpılma şekildeğiştirmesine dayanımı.	92
2.4.Diyafram özellikleri.	96
2.4.1.Çapraz bağlantılar.	96
2.4.2.Diyaframlar.	97
2.5.Yaklaşık çarpılma gerilmeleri	98
3. Sandık kiriş ile ilgili BEF'e ait çözümler.	99
3.1.Özel yükleme örnekleri.	99
3.1.1.Açıklık ortasında münferit yük.	100
3.1.2.Üniform yüklü BEF.	102
3.1.3.Açıklığın herhangi bir noktasında bir P münferit	
yüküne maruz BEF.	103
3.1.4.Yatay yükler ve diğer eksantrik düşey yükler.	105
3.2.Gerilmeler.	109
3.2.1.Distorsiyon gerilmeleri	109
3.2.2.Çarpılma gerilmeleri.	109
4. Çok gözlü sandık kirişlerin yaklaşık analizi.	110
BEF abakları.	114
V-İNCE PLAKLI SİMETRİK ENKESİTLİ SANDIK KİRİŞLERİN HESABI	
(KNİTTEL METODU)	125
-Notasyonlar.	125
1. Giriş.	125
2. Genel.	126

3. Tek gözlü sandık kirişler.	127
4. Üç gözlü sandık kirişler.	133
4.1.Simetrik yükleme.	134
4.2.Antimetrik yükleme.	139
5. Örnek	143
VI-KATLANMIŞ PLAK METODU.	154
1. Giriş.	154
2.Çok gözlü katlanmış plakların teorik analizi	154
2.1.İç diyaframı olmayan çok gözlü katlanmış plakların çözümü.	155
2.1.1.Çubuk koordinat sistemi.	157
2.1.2.Müşterek koordinat sistemi	158
2.1.3.Esas kabuller.	160
2.1.4.Koordinat sistemlerinin dönüşümü	160
2.1.5.Kuvvetler ve deplasmanların Fourier bileşenleri.	162
2.1.6.Yalnız düğüm yüklerine maruz sisteme ait çözüm	163
2.1.7.Eleman rijitlik matrisinin teşkili.	168
2.1.8.Ankastre kenar kuvvetleri ve plağın herhangi bir noktasındaki momentlerin hesabı.	171
2.1.9.Plağın herhangi bir noktasındaki momentler	173
2.1.10.Koordinatlar doğrultusunda yükler ve kuvvetler.	176
2.2.Rijit iç diyaframlı çok gözlü katlanmış plakların çözümü.	177
2.2.1.Dıştan mesnetli iç diyafram.	178
2.2.2.Dıştan mesnetsiz iç diyafram.	179
3. Bilgisayar programları.	182
3.1.Giriş bilgileri.	182
3.2.Çıkış bilgileri.	183
3.3.Sınırlamalar ve gerekli şartlar.	183
4. Notasyonlar.	184
VII-SANDIK KİRİŞLERİN SONLU BANDLAR METODU İLE HESABI.	185
1.Giriş.	185
2. Metodun genel açıklaması.	186
3. Tek açıklıklı sistemin sonlu band metodu ile çözümüne ait denklemlerin çıkarılışı.	190
3.1.Bir kiriş bandına ait matrisler.	190
3.2.Çubuk koordinat sisteminde bir kiriş bandın rijit- lik matrisi.	192
3.3.k-1 kesitinde etkiyen tesirlerden meydana gelen ankastre düğüm kuvvetleri.	196

3.4. Z_{k-1} tesirlerindeki terimler ile ilgili Z_k tesir- lerine ait ankastre düğüm çözümü	197
3.5.Band ortasındaki nihai düğüm deplasmanlarından meydana gelen Z_k tesirleri.	198
3.6.Bir band sistemine ait müşterek koordinat sistemi ve direkt rijitlik çözümü.	198
3.7.Sistemin iki uçundaki sınır şartları ve başlangıç- taki tesir vektörlerinin çıkarılması.	199
3.8.Matris denklemlerinin sırası.	200
3.9.Her bandın ortasındaki iç kuvvetler ve deplasman- lara ait denklemler.	206
4. Sürekli çok gözlü katlanmış plak sistemlere ait çözüm .	209
5. Direkt rijitlik metodu kullanılarak komple band rijit- lik matrisinin elde edilmesi.	213
6. Band gelişim çözümünün band matris çözümüne kıyasla avantaj ve dezavantajları.	214
7. Bilgisayar programı- SIMPLA.	215
8. Notasyonlar.	217
VII-SANDIK KİRİŞLERİN SONLU ELEMENLAR METODU İLE ANALİZİ . . .	221
1. Giriş.	221
2. Metodun genel açıklaması.	222
3. Sonlu eleman rijitliğinin virtüel iş ile gelişimi . . .	227
4. Levha tesirlerine ait eleman rijitliği-düzlem gerilme analizi.	231
5. Plak tesirlerine ait eleman rijitlik matrisi-plak eğilme analizi.	248
6. Bilgisayar programı-.	260
7. Notasyonlar	262
LİTERATÜR LİSTESİ.	264
EK-1 Katlanmış plak metoduna ait bilgisayar programı ve sayısal örnek.	267
SONUÇ	301

Notasyonlar

A: Kapalı alan

G: Kayma modülü

J: Burulma sabiti

 M_z : Burulma momenti

q: Kayma akımı veya kayma kuvveti

t: Çubuk kalınlığı

 ϕ : Açısal burulma dönüşme açısı ϕ_0

1- Tüplerin Burulması:

Kesit şekli halkaya benzeyen ve kalınlığı t olan boyutlarına göre küçük olan çubuklara tüp denir. Bunlarda kalınlık sabit olmayabilir. Tüpler burulma hesabı yönünden incelenebilir: Açık ve kapalı tüplerin burulma hesabı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi yazılabilir. Burada q kayma akımı ile ilgili olarak yazılacaktır.

2- Tek Eksenli Tüplerin Burulması:

Kapalı tüpde t ve q değişken olmakla beraber bunların çarpımı sabittir. Bu sabitlik tüpün bütün çevresi için aynıdır. Burada q kayma akımı olarak yazılacaktır.

$$t \cdot q = \text{sabit} \quad (1.1)$$

Kayma akımına kayma kuvveti veya akımı denir. A tüpün kalınlıkları t ya da t_0 eğrisi ile sınırlanan kapalı alan, M_z kesit etrafındaki burulma momenti olmak üzere

$$t \cdot q = \frac{M_z}{2A} \quad (1.2)$$

$$t_{\max} = \frac{M_z}{2A \cdot t_{\min}} \quad (1.3)$$

Yazılabilir. Bu tüpün ilk önce M_z tarafından ortaya konulmuş olup tüpün etrafındaki burulma momenti olarak yazılabilir.

Bu tüpün kabullerine göre birinci burulma dönüşme açısı ve ikinci burulma dönüşme açısı olarak yazılabilir. İkinci burulma dönüşme açısı olarak yazılabilir.

3.4.2. Z_{k-1} tesirlerindeki terimler ile ilgili Z_k tesir- lerine ait ankastre düğüm çözümleri	197
3.5. Band ortasındaki nihai düğüm deplasmanlarından meydana gelen Z_k tesirleri	198
3.6. Bir band sisteminde ait müsterek koordinat sistemi ve direkt rijitlik çözümleri	198
3.7. Sistemin iki ucundaki sınır şartları ve başlangıç- taki tesir vektörlerinin çıkarılması	199
3.8. Matris denklemlerinin sırası	200
3.9. Her bandın ortasındaki iç kuvvetler ve deplasman- lara ait denklemler	206
4. Sürekli gök gözlü katı cisim plak sistemlere ait çözüm	209
5. Direkt rijitlik metodu kullanılarak komple band rijit- lik matrisinin elde edilmesi	213
6. Band genişliği çözümleri Band matris çözümüne kıyasla avantaj ve dezavantajları	214
7. Bilgisayar programı - SIMPLA	215
8. Notasyonlar	217
VII-SANDIK KIRISLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ANALİZİ	221
1. Giriş	221
2. Metodun genel açıklaması	222
3. Sonlu eleman rijitliğinin virtual iş ile geliştirilmesi	227
4. Levha tesirletişine ait eleman rijitliği-döşeme gerilme analizi	231
5. Plak tesirlerine ait eleman rijitlik matrisi-plak eşilme analizi	245
6. Bilgisayar programı	261
7. Notasyonlar	262
LİTERATÜR LİSTESİ	264
IX-1 Kollanma plak metoduna ait bilgisayar programı ve sayısal deneyler	265
SONUÇ	30

I-BURULMA

Notasyonlar

A:Kapalı alan

G:Kayma modülü

J:Burulma sabiti

M_z :Burulma momenti

q:Kayma akımı veya kayma kuvveti

t:Gövde kalınlığı

$d\theta$: Birim burulma dönme açısı

dz

1- Tüplerin Burulması

Kesit şekli halkaya benzeyen ve kalınlığı diğer boyutlarına göre küçük olan çubuklara tüp denir. Bunlarda kalınlık sabit olmayabilir. Tüpler burulma hesabı yönünden iki kısımda incelenir: Açık ve kapalı tüpler. Burada konu ile ilgisi dolayısı ile yalnız kapalı tüplerin burulmasından söz edilecektir.

2- Tek Gözlü Tüplerin Burulması

Kapalı tüplerde τ ve t değişken olmakla beraber bunların çarpımları sabittir. Bu sabitlik tüpün bütün çevresi için aynıdır. Burada q

$$\tau \cdot t = q = \text{sabit}$$

(1.1)

kayma sabitine kayma kuvveti veya akımı denir. A tüpte kalınlıkları yarıya bölen C_0 eğrisi ile sınırlanan kapalı alan, M_z kesite tatbik edilen burulma momenti olmak üzere

$$\tau \cdot t = \frac{M_z}{2A} = q$$

(1.2)

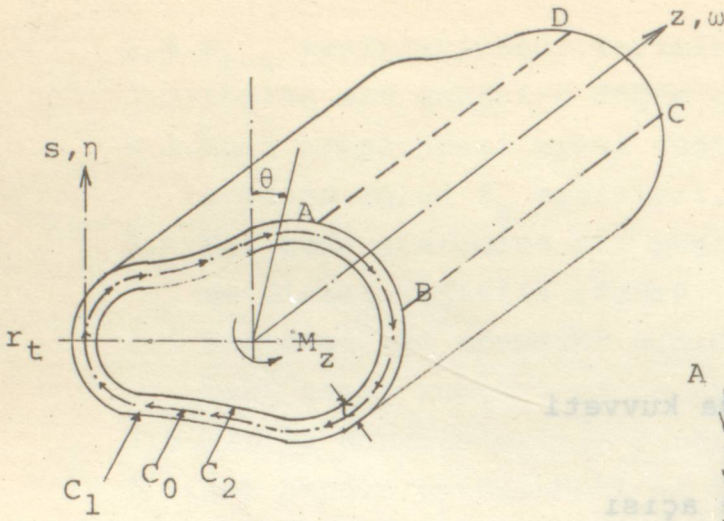
ve

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2A \cdot t_{\min}}$$

(1.3)

yazılabilir. Bu formül ilk önce Bredt tarafından ortaya konulmuş olup Bredt formülü olarak anılır.

Hooke kanunu kabullerine göre birim burulma dönme açısı ve rijitlik modülleri arasındaki bağıntı iç iş ve dış iş eşitlenerek veya



Şekil 1.1 Burulma momentine maruz tek gözlü tüp

mambran analojisinden ortaya konulabilir:

$$\theta = \frac{M_z}{4A^2 G_c t} \oint \frac{ds}{t} \quad (1.4)$$

Kapalı tüp için gerilme ve şekildeğiştirme formülü olan bu formülün bulunuşunda, kesitin dönme merkezinin hiçbir rolü olmamaktadır. Bu özellik Saint-Venant burulma teorisinde karakteristik noktalardan biridir. (1.4) eşitliğinde

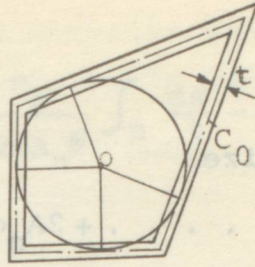
$$J = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (1.5)$$

ile gösterilirse bu eşitlik

$$\theta = \frac{M_z}{GJ} \quad (1.6)$$

şeklinde yazılabilir. (1.5) formülü ile verilen J değerine burulma sabiti denir.

Şu nokta da belirtilebilir ki kapalı tüplerde kesit çarpılma açık tüplerdeki kadar büyük değildir. Hatta bazı özel kapalı tüplerde çarpılma özdeş olarak sıfıra eşittir. Örneğin kalınlığı sabit ve orta ma profil eksenine içine daire çizilebilen bir çokgen tüpte çarpılma olmaz (şekil 1.2).

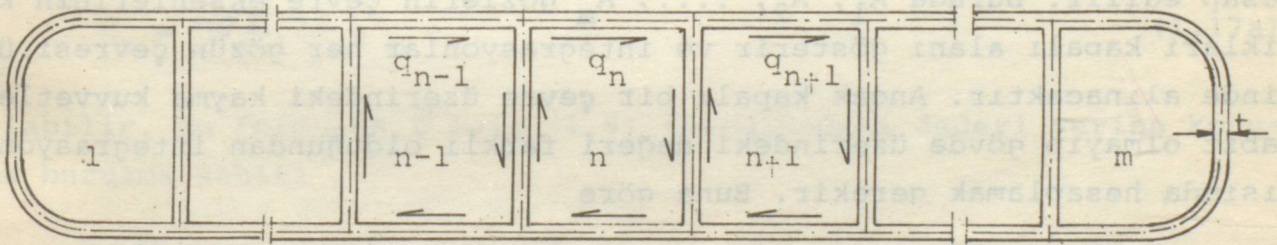


Şekil 1.2

3. Çok Gözlü Tüpler

Kapalı tüpler, rijitliklerinin büyük olması nedeniyle, çeşitli konstrüksiyonlarda kullanılır. Bunlar önceleri özellikle uçak inşaatında ve günümüzde köprü inşaatında da kullanılmaktadır. Konstrüktif nedenlerden ötürü tüp ara bölmeler (gövde levhaları) ile birçok gözler ayrılır. Ara bölmeler birçok gözlerde kayma kuvvetlerini (kayma akımını) değiştirdikleri için çok gözlü tüpler ayrıca incelenecektir.

Tek gözlü tüp statik olarak hesaplandığında, çok gözlü tüpteki her kayma gövdesi bir hiperstatik bilinmeyen ihtiva eder. Konuyu daha iyi izah edebilmek için şekil 1.3 deki kesiti gözönüne alalım. Kesite top-
tan etkiyen burulma momenti M_z olsun. Problemin bilinmeyenleri olarak gözlerdeki q_n kayma kuvvetlerini alalım. Ara gövdelerde kayma kuvvetleri



Şekil 1.3

süreklilikten ötürü

$$q_{n,n-1} = q_n - q_{n-1} \quad (1.7)$$

olacaktır. Bu kayma kuvvetlerine karşı gelen burulma momentlerini (1.2)

den hesap edersek

$$M_{zn} = 2A_n q_n \quad (1.3 a)$$

$$M_{z,n+1} = 2A_{n+1} q_{n+1} \quad (1.3 b)$$

bulunur. O halde denge şartı bize

$$M_z = 2A_1 q_1 + 2A_2 q_2 + \dots + 2A_n q_n + 2A_{n+1} q_{n+1} + 2A_m q_m \quad (1.9)$$

veya

$$M_z = 2 \sum_{n=1}^{n=m} A_n q_n \quad (1.10)$$

denklemini verir. Kayma kuvvetlerini belirtmek için gerekli ikinci denlem, çeşitli gözlerde hesaplanacak birim burulma dönme açılarının eşitleneceği uygunluk şartından yazılabilir. Her gözün birim burulma dönme açısı aynı zamanda sistemin dönme açısına da eşittir.

$$(\theta)_1 = (\theta)_2 = \dots = (\theta)_n = \dots = (\theta)_m = \text{sabit} \quad (1.11)$$

Dönme açıları (1.4) denkleminde yararlanılarak kayma kuvvetleri cinsinden

$$\begin{aligned} (\theta)_1 &= \frac{1}{2GA_1} \oint_1 q_1 \frac{ds}{t}, & (\theta)_2 &= \frac{1}{2GA_2} \oint_2 q_2 \frac{ds}{t}, \\ (\theta)_n &= \frac{1}{2GA_n} \oint_n q_n \frac{ds}{t} \end{aligned} \quad (1.12)$$

hesap edilir. Burada $A_1, A_2, \dots, A_m$ gözlerin çevre eksenlerinin kapalıları kapalı alanı gösterir ve integrasyonlar her gözün çevresi üzerinde alınacaktır. Ancak kapalı bir çevre üzerindeki kayma kuvvetleri sabit olmayıp gövde üzerindeki değeri farklı olduğundan integrasyonu kısımda hesaplamak gerekir. Buna göre

$$(\theta)_n = -\frac{q_{n-1}}{2GA_n} \int_{n-1,n} \frac{ds}{t} + \frac{q_n}{2GA_n} \oint_n \frac{ds}{t} - \frac{q_{n+1}}{2GA_n} \int_{n,n+1} \frac{ds}{t} \quad (1.13)$$

yazmak gerekir, burada tek indisler gözlerin tamamını iki indisler gözde-leri gösterir. Yukarıdaki değerler (1.11) denklemindeki sistemin birim burulma dönmesi olan θ ya eşitlenir ve her iki tarafta θ ya bölünür.

lünürse (1.13) denklemi

$$-\frac{q_{n-1}}{2GA_n\theta} \int_{n-1,n} \frac{ds}{t} + \frac{q_n}{2GA_n\theta} \int_n \frac{ds}{t} - \frac{q_{n+1}}{2GA_n\theta} \int_{n,n+1} \frac{ds}{t} = 1 \quad (1.14)$$

şeklini alır. Burada

$$\frac{q_n}{G\theta} = q'_n \quad (1.15)$$

ile gösterilir ve eşitliğin her iki tarafı $2A_n$ ile çarpılarak

$$-q'_{n-1} \int_{n-1,n} \frac{ds}{t} + q'_n \int_n \frac{ds}{t} - q'_{n+1} \int_{n,n+1} \frac{ds}{t} = 2A_n \quad (1.16)$$

elde edilir. Bu denklem her göz için tekrarlanarak q'_n bilinmeyenleri çözülebilir.

θ birim burulma dönme açısı, tatbik edilen burulma momentinin gözlerdeki burulma momentlerinin toplamına eşit olması şartından (denge şartı), (1.2) denklemi kullanılarak hesaplanır.

$$M_z = \sum_{n=1}^m 2A_n q_n \quad (1.17)$$

veya

$$M_z = G\theta \sum_{n=1}^m 2A_n q'_n \quad (1.17a)$$

yazılabilir. Bu formülde θ için (1.6) formülündeki değeri yerine konularak burulma sabiti

$$J = \sum_{n=1}^m 2A_n q'_n \quad (1.18)$$

elde edilir. J hesaplandıktan sonra münferit gözlere ait kayma kuvvetleri

$$q_n = G\theta q'_n = \frac{M_z}{J} q'_n \quad (1.19)$$

şeklinde hesaplanır.

Yukarıda sözü edilen metot yalnız bilinmeyen kayma kuvvetlerini değil aynı zamanda J.burulma sabitini de verir. J nin daha küçük limiti için gövdelerdeki integral ihmal edilerek yalnızca tüpün dış kısmında (çevresinde) J hesaplanarak elde edilebilir.

II-ÇOK GÖZLÜ SANDIK KİRİŞLERE AİT TORSİYON-EĞİLME TEORİSİ

Notasyonlar

A_n : n inci gözün kapalı alanı

C : Torsiyon eğilme sabiti

E : Elastisite modülü

E' : $E/(1-\mu^2)$

f : Eksenel deplasmanların açıklık doğrultusundaki değişimi

G : Elastik kayma modülü

I_C : Orta eksene göre atalet momenti

I_w : Çarpılma atalet momenti

i : Düğüm no.su

J : Burulma sabiti

M_w : Çarpılma momenti

n : Göz no.su

p : Normal gerilme akımı

q : Kayma akımı

q' : Torsiyon-eğilmede esas kayma akımı

q'' : Torsiyon-eğilmede sekonder kayma akımı

r : Teğetin merkeze olan uzaklığı

r_t : Teğetin burulma merkezine olan uzaklığı

P_t : Tatbik edilen torsiyonel yük

t : Gövde kalınlığı

M_z : Burulma momenti

ω : Eksenel deplasman

x : Absis ekseni

y : Ordinat ekseni

z : Boyuna eksen

γ : Kayma şekil değiştirme

ϵ : Normal şekil değiştirme

θ : Burulma dönmesi

n : 2.43 formülü ile verilen bir kesit sabiti

μ : Poisson oranı

ϕ : Burulma açısı

ξ : Teğetsel deplasman

σ : Normal gerilme

τ : Kayma gerilmesi

1. GİRİŞ

Bir kirişte eksenel doğrultuda normal gerilmeler meydana getiren torsiyonel yüklerin tesiri genellikle torsiyon-eğilme olarak anılır. 45 yıl boyunca bir çok yazar kapalı enkesitli ince cidarlı kirişler için doyurucu bir torsiyon-eğilme teorisi formüle etmeye çalışmıştır. Bu mühendislik projelerinde kullanılmasında yeteri kadar doğruluğa haiz olduğuna ve aşırı derecede hesap gücüne gereksinme göstermediğine inanılan yaklaşık bir metot verilecektir.

Metodu belirlemek için keyfi yükleme, sınır şartı ve enkesit şekline haiz, çok gözlü ve ünifom olmayan bir sandık kiriş gözönüne alınacaktır.

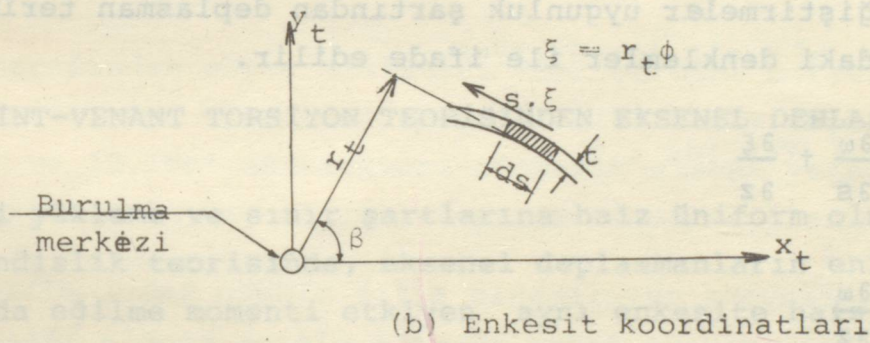
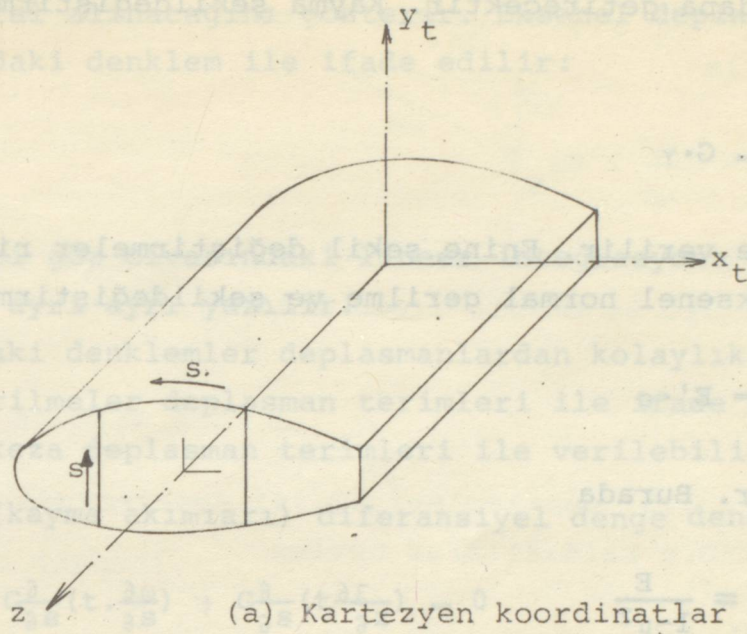
Teori rijit veya rijit olmayan enkesitlere tatbik edilebilir. Buna rağmen, kısalık bakımından teoremin gelişimi yalnızca narin ve yeteri kadar rijit olmayan kesitler için verilir. Teori şu esasa dayanır. Keyfi bir kiriş kesitinde normal gerilmelere tekabül eden eksenel deplasmanların yayılışı aynı kesitli ünifom kirişte Saint-Venant torsiyonundan meydana gelen yayılış gibidir. Tatbik edilen torsiyonel yük ile çarpılma deplasmanlarının açıklık doğrultusundaki değişimi ve keza y ile dönme (burulma açısı) arasındaki bağıntının diferansiyel denklemler geliştirilir. Değişik gerilme yayılışının hesabına ait metotlar verilir.

2. ESAS ELASTİK DENKLEMLER

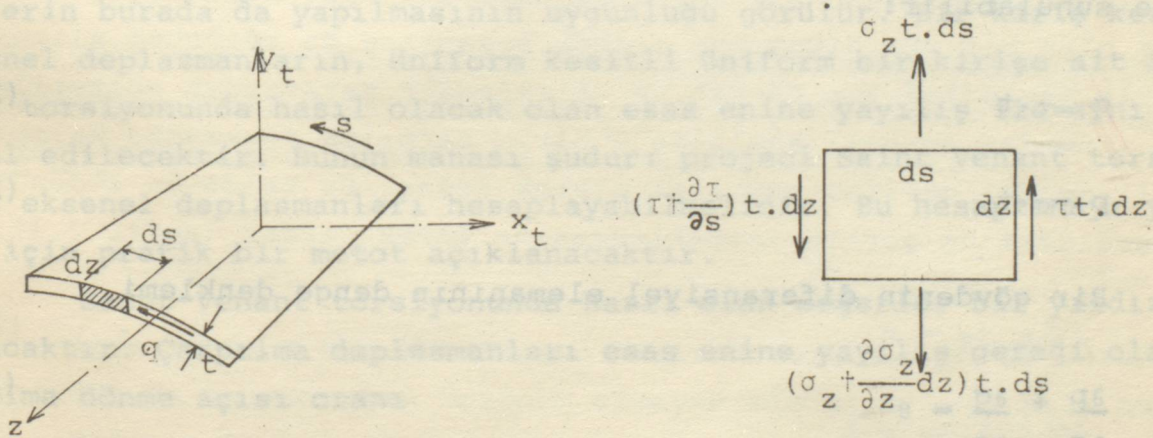
Dış kısımları ve kayma gövdeleri çok ince ve daha ziyade moment kuvvetlerinin tesir ettiği kabul edilen bir kiriş tipi gözönüne alınır. Enkesit şekli, kendi düzleminde çarpılmaya karşı sonsuz olarak rijit kendi düzlemi dışında tamamen serbest rijit çubukların kapalı olarak yerleştirilmesiyle meydana getirilmiştir. Buradaki kabullerden biri bilinen torsiyon-eğilme teorisini elde etmek usulündeki gibi yaklaşımları kapsamına almasıdır. Herbir yaklaşım bilinen eğilme teorisindeki yaklaşımlar ile analogtur.

Eksen takımları ve koordinatlar şekil:2.1 de gösterilmiştir. kesit üzerindeki bir nokta açıklık yönünde z ordinatı ve s teğetsel koordinatının verilmesi ile belirlenir.

Enkesitte z eksenin tam yeri daha sonra hesaplanabilecektir. Teğetsel koordinatlar dış çevrede saat akrebi tersi yönünde pozitif ve gövdelerde y nin pozitif yönünde pozitif olarak kabul edilebilir (bu ince gövdeler gövde olarak anılacaktır). Bir gövdenin diferansiyel eksenine etkiyen kuvvetler şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Eksen takımları ve koordinatlar



Şekil 2.2 Gövde elemanlara etkiyen kuvvetler

Ele alınan problemin esas denklemlerini çok iyi bildiğimiz denklemler meydana getirecektir. Kayma şekildeğiştirmesi ile orantılı kayma gerilmesi

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2.1)$$

formülü ile verilir. Enine şekil değiştirmeler rijit çubuklar ile önlediğinden aksel normal gerilme ve şekildeğiştirmeler arasındaki bağı

$$\sigma = E' \cdot \epsilon \quad (2.2)$$

ile verilir. Burada

$$E' = \frac{E}{1-\mu^2} \quad (2.3)$$

dir. Şekildeğiştirmeler uygunluk şartından deplasman terimlerine bağlanarak aşağıdaki denklemler ile ifade edilir.

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (2.4)$$

$$\epsilon = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.5)$$

Kayma akımları ve normal gerilme akımları aşağıdaki belirlemeler ile sunulabilir:

$$q = \tau \cdot t \quad (2.6)$$

$$p = \sigma \cdot t \quad (2.7)$$

Bir gövdenin diferansiyel elemanının denge denklemi

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (2.8)$$

ile verilir. Dış yüklerden hesaplanan burulma momenti ile iç kayma kuvvetlerini bağlayan denge denklemi

$$\int_a q \cdot r \cdot ds = M_z \quad (2.9)$$

ile verilir. İntegrasyonda integral işaretindeki a indisi komple enkesi alanı üzerinde integral alınacağını gösterir. Eksenel deplasmanların süreklilik şartı aşağıdaki denklem ile ifade edilir:

$$\oint_n \frac{\partial \omega}{\partial s} ds = 0 \quad (2.10)$$

Burada n indisi n inci göz civarındaki lineer integrasyonu gösterir. Bu denklem her göz için ayrı ayrı yazılır.

İkinci adımdaki denklemler deplasmanlardan kolaylıkla elde edilebilir. İlk önce gerilmeler deplasman terimleri ile ifade edilebilir. Birim gerilmeler de keza deplasman terimleri ile verilebilir. Böylece bu birim gerilmeler (kayma akımları) diferansiyel denge denklemlerinde yerine konularak

$$E' \frac{\partial}{\partial z} (t \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z}) + G \frac{\partial}{\partial s} (t \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s}) + G \frac{\partial}{\partial s} (t \frac{\partial \xi}{\partial z}) = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir.

3. SAINT-VENANT TORSİYON TEORİSİNDEN EKSENEL DEPLASMANLAR

Keyfi yükleme ve sınır şartlarına haiz üniform olmayan eğilmeye ait bir mühendislik teorisinde, eksenel deplasmanların enine yayılışı, her bir ucunda eğilme momenti etkileyen aynı enkesite haiz üniform bir kirişte meydana gelecek yayılış ile aynı olacaktır (Saint-Venant eğilme problemi). Netice olarak, bilinen torsiyon-eğilme teorisinde yapılan kabullerin burada da yapılmasının uygunluğu görülür. Bir kiriş kesitinde eksenel deplasmanların, üniform kesitli üniform bir kirişe ait Saint-Venant torsiyonunda hasıl olacak olan esas enine yayılış ile aynı olacağı kabul edilecektir. Bunun manası şudur: projeci Saint Venant torsiyonundaki eksenel deplasmanları hesaplayabilmelidir. Bu hesaplamayı yapabilmek için pratik bir metot açıklanacaktır.

Saint-Venant torsiyonunda hasıl olan değerler bir yıldız ile ayrılacaktır. Çarpılma deplasmanları esas enine yayılış gereği olarak ve burulma dönme açısı oranı

$$\omega^* = \bar{\omega} \cdot \theta \quad (2.12)$$

olarak ifade edilebilir (birim çarpılma fonksyonu). Kayma gerilmeleri ile deplasmanlar arasında

$$r^* = G \frac{\partial \omega^*}{\partial s} + G \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (2.13)$$

şeklinde bir bağıntı yazılabilir.

Açıklık doğrultusunda teğetsel deplasman oluşumu $r_t \theta^*$ ve (2.1) denklemi ile

$$\tau^* = G \frac{\partial \omega^*}{\partial s} + Gr_t \theta^* \quad (2.1)$$

şekline dönüştürülerek verilir. Keza kayma gerilmeleri esas enine yayılım verileri ve $G\theta^*$ ile ifade edilebilir.

$$\tau^* = \tau^* G \theta^* \quad (2.1)$$

(2.12) ve (2.15) denklemleri (2.14) denkleminde yerine konulabilir. $G\theta^*$ faktörü kaldırılarak netice

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial s} = \tau^* - r_t \quad (2.1)$$

şeklini alır. ω^* a ait integrasyon

$$\omega^* = \int_{s_0}^s (\tau^* - r_t) ds + C_1 \quad (2.1)$$

ile gösterilir.

İntegrasyona çarpılmanın sıfır olduğu kabul edilen keyfi bir noktasından başlanır ve sonra sürekli olarak komple kesit üzerinde devam edilir. Ve geri kalan C_1 sabiti hesaplanabilir. (2.17) denklemin gösterilen integrasyon bir kayma diyagramını elde etmek için integre edilmiş olan bir yük diyagramı içinde hesaplandığı özönüne alınabilir. Bu giriş analogisi Van Karman ve Chirstensen tarafından gösterilmiştir.

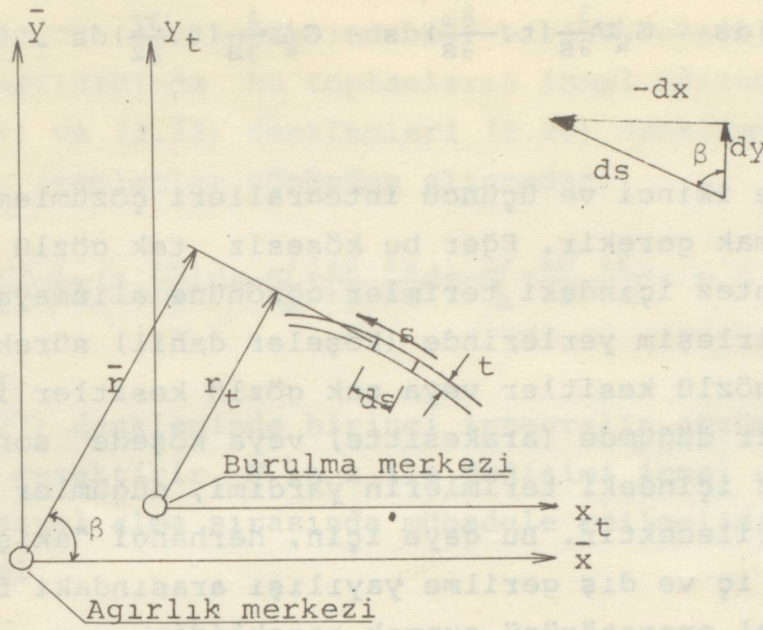
Bundan sonraki analizde ω^* birim çarpılma fonksyonu kalıcı çarpılmalı normal gerilme yayılımı olarak doğar. Şu halde bu ω^* dönüşümü için aşağıdaki üç şartın gerçekleşmesine gerek vardır (şekil 2.3).

$$\int \omega^* \cdot t \cdot ds = 0 \quad (2.18)$$

$$\int \omega^* \cdot \bar{x} \cdot t \cdot ds = 0 \quad (2.18)$$

$$\int \omega^* \cdot \bar{y} \cdot t \cdot ds = 0 \quad (2.18)$$

(2.18a) denklemi, (2.17) denkleminde ortaya çıkan integrasyon sabitini hesaplamak için kullanılır. (2.18b) ve (2.18c) denklemleri rulma merkezinin yerinin bulunmasında kullanılır. Bu Fine ve Williar-



Şekil 2.3 Rölatif koordinatlar ile asal eğilme eksenleri

keza Beskin tarafından gösterilmiştir. Eğer burulma merkezi bilinen kiriş eğilme teorisinden elde edilebildiği gibi kayma merkezi kabul edilirse (2.18b) ve (2.18c) denklemleri otomatik olarak yeterli olacaktır. Bu yazarlar tarafından tek gözlü enkesitler için verilenler çok gözlü enkesitler için de genişletilebilir.

4.ÇARPILMA DEPLASMANLARI VE DÖNMELERİN AÇIKLIK DOĞRULTUSUNDAKİ DEĞİŞİMİ

Daha önce de belirtildiği gibi çarpılma deplasmanları Saint-Venant torsiyonundaki gibi aynı esas yayılışa haiz olduğu kabul edilir. Bu yüzden çarpılma deplasmanları şu şekilde ifade edilir:

$$\omega = \bar{\omega}^* f(z) \quad (2.19)$$

İnce gövdeli bir dikdörtgen kesit durumunda $\bar{\omega}^*$, $\bar{x}\bar{y}$ verilerine orantılıdır ve bu sebepten üniform olmayan kirişler için bile bağımsız açıklık doğrultusu koordinatları bulunur. Diğer açıklık boyunca keyfi şekle haiz enkesitler için $\bar{\omega}^*$ fonksyonu genellikle z üzerinde bazı bağıllığa haizdir. Mamafih, bu bağıllık bu analizde uygun düştüğü yerlerde ihmal edilecektir.

(2.11) denklemi Galerkin metodu kullanılarak çözülecektir. (2.11) denklemi $\bar{\omega}^*$ ile çarpılır ve kesit üzerinde integre edilirse

$$E' \int_{\Omega} \bar{\omega}^* \frac{\partial}{\partial z} (t. \frac{\partial \omega}{\partial z}) ds + G \int_{\Omega} \bar{\omega}^* \frac{\partial}{\partial s} (t. \frac{\partial \omega}{\partial s}) ds + G \int_{\Omega} \bar{\omega}^* \frac{\partial}{\partial s} (t. \frac{\partial \xi}{\partial z}) ds = 0 \quad (2.20)$$

verilir.

Bu denklemde ikinci ve üçüncü integralleri çözümlemek için bu lary kısımlara ayırmak gerekir. Eğer bu köşesiz tek gözlü enkesitler için yapılırsa parantez içindeki terimler gözönüne alınmayacaktır. $\frac{\partial \omega}{\partial s}$ ve ξ fonksyonları birleşim yerlerinde (köşeler dahil) sürekliliği olduğundan, köşeli tek gözlü kesitler veya çok gözlü kesitler için parantez içindeki terim her bir düğümde (arakesitte) veya köşede sonlu bir yapı yapacaktır. Parantez içindeki terimlerin yardımı, düğümler üzerindeki toplam olarak gösterilecektir. Bu gaye için, herhangi "akış tipi" denirinde j düğümündeki iç ve dış gerilme yayıllışı arasındaki farkı gösteren Δ_j genel diferansiyel operatörünü sunmak gereklidir.

Denklemin ikinci ve üçüncü integrallerini kısımlara ayırarak

$$\int_{\Omega} \bar{\omega}^* \frac{\partial}{\partial s} (t. \frac{\partial \omega}{\partial s}) ds = \int_{\Omega} \Delta_j \bar{\omega}^* j (t. \frac{\partial \omega}{\partial s}) - \int_{\Omega} t. \frac{\partial \bar{\omega}^*}{\partial s} \frac{\partial \omega}{\partial s} ds \quad (2.21)$$

$$\int_{\Omega} \bar{\omega}^* \frac{\partial}{\partial s} (t. \frac{\partial \xi}{\partial z}) ds = \int_{\Omega} \Delta_j \bar{\omega}^* j (t. \frac{\partial \xi}{\partial z}) - \int_{\Omega} t. \frac{\partial \bar{\omega}^*}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial z} ds \quad (2.22)$$

verilir. (2.21) ve (2.22) denklemlerindeki toplamalar ilave edildiğinde gözönüne alınmayacağı görülür. (2.4) denklemi t ile çarpılır ve (2.1) (2.6) denklemleri kullanılarak

$$q = G. t. \frac{\partial \omega}{\partial s} + G. t. \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (2.23)$$

verilir. Bu denkleme Δ_j operatörü uygulanarak

$$\Delta_j q = G \Delta_j (t. \frac{\partial \omega}{\partial s}) + G \Delta_j (t. \frac{\partial \xi}{\partial z}) \quad (2.24)$$

elde edilir. Düğümlerde (arakesitlerde) flanş olmadığında, düğüm denkleminde

$$\Delta_j q = 0 \quad (2.25)$$

a dönüşür. (2.25) denklemi (2.24) denkleminde yerine konular G ile bölünerek

$$0 = \Delta_j (t. \frac{\partial \omega}{\partial s}) + \Delta_j (t. \frac{\partial \xi}{\partial z}) \quad (2.26)$$

verilir. (2.26) denklemi her düğümde geçerli olmalıdır. Netice olarak (2.21) ve (2.22) denklemlerinde bir birine tekabül eden her toplam terim ilave edildiğinde bu toplamların ihmal edilebileceği aşikârdır. Böylece, (2.21) ve (2.22) denklemleri (2.20) denkleminde tekrar yerine konulduğunda (toplamlar gözönüne alınmadan)

$$E' \int_a^s \bar{\omega}^* \frac{\partial}{\partial z} \left(t \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) ds - G \int_a^s t \frac{\partial \bar{\omega}^*}{\partial s} \frac{\partial \omega}{\partial s} ds - G \int_a^s t \frac{\partial \bar{\omega}^*}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial z} ds = 0 \quad (2.27)$$

elde edilir.

(2.27) denkleminde birinci integralin çözümü iki yaklaşımın kullanılışını gerektirir. $\bar{\omega}^*$ in z ile değişimi ihmal edilmeli ve integrasyon ve diferansiyel alma sırasında mübadele edilmelidir. (2.19) kullanılarak integral

$$\int_a^s \bar{\omega}^* \frac{\partial}{\partial z} \left(t \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) ds = \frac{d}{dz} \int_a^s (\bar{\omega}^*)^2 t \frac{\partial \xi}{\partial z} ds = \frac{d}{dz} (I_w \frac{df}{dz}) \quad (2.28)$$

şeklini alır. Burada

$$I_w = \int_a^s (\bar{\omega}^*)^2 t \cdot ds \quad (2.29)$$

dir ve "çarpılma atalet momenti" olarak anılan bir kesit sabitidir. (2.16 ve (2.28) denklemleri (2.27) denkleminde yerine konularak

$$\frac{d}{dz} (E' I_w \frac{df}{dz}) - G \int_a^s t (\bar{r}^* - r_t) \frac{\partial \omega}{\partial s} ds - G \int_a^s t (\bar{r}^* - r_t) \frac{\partial \xi}{\partial z} ds = 0 \quad (2.30)$$

verilir. Bu denklem eksenel ve teğetsel deplasmanların her ikisini de kapsamına alır.

İkinci bir denklem de (2.9) denklemi ile ifade edildiği gibi iç kayma kuvveti ve burulma momenti arasındaki denge denklemdir.

(2.9) denklemindeki r yarıçapı enkesitin herhangi bir noktasından ve burulma merkezinden ölçülür. (2.23) denklemi (2.9) denkleminde yerine konularak

$$G \int_a^s t \cdot r \frac{\partial \omega}{\partial s} ds + G \int_a^s t \cdot r \frac{\partial \xi}{\partial z} ds = M_z \quad (2.31)$$

verilir. (2.30) denkleminin biraz daha basiti kendisinden (2.31) denklemi çıkarılarak elde edilir. Netice aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dz} (E' I_w \frac{df}{dz}) - G \int_a^s t \cdot \bar{r} \frac{\partial \omega}{\partial s} ds - G \int_a^s t \cdot \bar{r} \frac{\partial \xi}{\partial z} ds = M_z \quad (2.32)$$

(2.32) denklemindeki ikinci terimin ihmal edilebileceği göste-

rilebilir. Esas Saint Venant kayma kuvveti

$$\bar{q}^* = t \cdot \bar{\tau}^* \quad (2.33)$$

ile belirlenebilir.

Bu durumda integral

$$\int t \cdot \bar{\tau}^* \frac{\partial \omega}{\partial s} ds = \int \bar{q}^* \frac{\partial \omega}{\partial s} ds = \sum q_n \int \frac{\partial \omega}{\partial s} ds \quad (2.34)$$

şeklini alır. (2.34) denkleminin sağ tarafı (2.10) denklemi ile ifade edildiği gibi ω daki süreklilik şartı yüzünden ihmal edilebilir. Net olarak (2.34) denklemi

$$\int t \cdot \bar{\tau}^* \frac{\partial \omega}{\partial s} ds = 0 \quad (2.35)$$

şeklini alır. (2.35) denklemi (2.32) denkleminde yerine konularak

$$\frac{d}{dz} (E' I_{\omega} \frac{df}{dz}) - G \int \bar{q}^* \frac{\partial \xi}{\partial z} ds = -M_z \quad (2.36)$$

verilir. Şimdi (2.31) ve (2.36) denklemleri de benzer biçimde çözümlenir.

$$\xi = r_t \cdot \phi \quad (2.37)$$

olarak ifade edilen teğetsel deplasman ve dönmeler arasında bağıntı taya koymak gerekir. Bu formül, r_t açıklık boyunca değiştiğinde üniform olmayan bir giriş için değişkenlerin doğru bir ayrımı yapılamaz. (2.36) ve (2.37) denklemleri (2.31) denkleminde yerine konulursa

$$G \int t \cdot r_t \frac{\partial \bar{\omega}^*}{\partial s} ds + G \int t \cdot r_t \frac{\partial}{\partial z} (r_t \phi) ds = M_z \quad (2.38)$$

elde edilir. İkinci integrali çıkarabilmek için r_t değişiminin açıklık boyunca ihmal edildiğini kabul etmek gereklidir. Bu da girişin incelemesi halinde oldukça önemli bir sınırlamadır. Bu kabulün gösterilmesi (2.16) denkleminin ilk integralinde yerine konulmasıyla

$$G \int t \cdot r_t (\bar{\tau}^* - r_t) ds + G \int t \cdot r_t^2 ds = M_z \quad (2.39)$$

verilir. Burada ikinci integral Kirste tarafından gösterildiği gibi kezi atalet moment'i dir.

$$I_c = \int r_t^2 ds \quad (2.40)$$

Merkezi atalet momentinin bu değeri çoğu zaman asal kayma eksenleri başlangıcından ölçülen yarıçap ile elde edilecek olan asal dengeye eşittir. (2.40) denklemi (2.39) denkleminde yerine konularak

$$Gf \int r_t^2 ds - GI_c f + GI_c \theta = M_z \quad (2.41)$$

verilir. (2.41) denklemindeki integral esas Saint Venant kayma kuvvetinin burulma momentidir. Bencoter bunun " torsiyon sabiti" ne eşit olduğunu göstermiştir. (2.15) denklemi $r_t \cdot t \cdot ds$ ile çarpılır ve enkesit üzerinde integre edilirse bunun doğruluğu görülür. Bu durumda (2.41) denklemi

$$Gf(J - I_c) + GI_c \theta = M_z \quad (2.42)$$

şeklini alır.

$$\eta^2 = 1 - \frac{J}{I_c} \quad (2.43)$$

ile belirlenen boyutsuz "enkesit sabiti" ni göstermek uygundur. Bu sabit, orjinal olarak, dikdörtgen kesitler için Ebner tarafından belirlenmiştir. Bu sabit bir dikdörtgen poligon için sıfıra eşittir. Oldukça ince süpersonik kanat için bu değer bir'e yaklaşır. Yeteri kadar kalın kanatlı süpersonik uçaklar için η^2 nin değeri yarım civarında olacaktır.

(2.43) denklemi (2.42) denkleminde yerine konulursa

$$GI_c \theta - GI_c \eta^2 f = M_z \quad (2.44)$$

verilir. Bu denklem θ yı elde etmek için çözülebilir.

$$\theta = \frac{M_z}{GI_c} + \eta^2 f \quad (2.45)$$

Burada birinci terim kayma şekildeğiştirmesinden meydana gelen burulma oranını ve ikinci terim eksenel çarpılma deplasmanlarından meydana gelen burulma oranını verir. (2.37) denklemi (2.36) denklemine yerine konularak

$$\frac{d}{dz} \left(E' f \frac{df}{dz} \right) - GJ \theta = - M_z' \quad (2.46)$$

verilir. Tatbik edilen yük ile f ve θ arasında bir bağıntı veren bir denklem elde etmek için (2.45) ve (2.46) denklemlerini birleştirmek mümkündür. Eğer söz konusu denklemde θ yok edilirse, çarpılma deplasmanının açıklık doğrultusundaki değişimi

$$\frac{d}{dz} \left(E' I_{\omega} \frac{df}{dz} \right) - GJ \eta^2 f = -\eta^2 M_z \quad (2.47)$$

şeklinde olur. Eğer f yok edilirse burulma oranı denklemi

$$\frac{d}{dz} \left[E' I_{\omega} \frac{d}{dz} \left(\frac{\theta}{\eta^2} \right) \right] - GJ \theta = -M_z + \frac{d}{dz} \left[E' I_{\omega} \frac{d}{dz} \left(\frac{\theta_0}{\eta^2} \right) \right] \quad (2.48)$$

olur. Burada

$$\theta_0 = \frac{M_z}{GI_C} \quad (2.49)$$

dir. (2.48) denkleminin çözümlerinin birinde bilinmeyen olarak $\theta + \eta^2$ itibara alınabilir. Mamafih, (2.43) denklemi, eğer enkesitin genel şekli hızlı olarak değişmez ise η nin açıklık boyunca küçük bir değişimliğe haiz olacağını hatırlatır. J ve I_C nin kesit özellikleri ma taşıma alanının iki özelliğidir. η nin z ile değişimi ihmal edilirse (2.48) denklemi

$$\frac{d}{dz} \left(E' C \frac{d\theta}{dz} \right) - GJ \theta = -M_z + \frac{d}{dz} \left(E' C \frac{d\theta_0}{dz} \right) \quad (2.50)$$

şeklini alır. Burada

$$C = \frac{I_{\omega}}{\eta^2} \quad (2.51)$$

"torsiyon-eğilme sabiti"dir. Eğer η bire ve θ_0 sifıra eşit olursa (2) denklemi Von Karman ve Chirstensen tarafından verilen şekle dönüşür.

Anılan f ve θ fonksyonları sınır şartlarını ifade etmek için gereklidir. Bir konsolun dip kısmı gibi ankastre olan bir uçta çarpılma deplasmanları sıfır olmalıdır. Ankastre uçta $z = 0$ kabul edilerek

$$f(0) = 0 \quad (2.52)$$

sınır şartı verilir. Burulma oranına ait sınır şartı uygulanır, (2.5) denklemi (2.45) de yerine konularak

$$\theta_{101} = \theta_0(0) = \frac{M_z(0)}{GI_C} \quad (2.53)$$

elde edilir. Bir konsolun ucunda veya bir basit mesnette sınır şartı normal gerilmenin sıfır olmasıdır. Normal şekildeğiştirmeye ait bir formül elde etmek için (2.19) denklemi (2.5) denkleminde yerine konulabilir. Sonra bu netice normal gerilmeye ait formülü elde etmek için (2.2) denkleminde yerine konulabilir.

$$\sigma = E' \frac{\partial}{\partial z} (\alpha' f) \quad (2.54)$$

Daha önce yapıldığı gibi açıklık boyunca α' in değişiminin ihmal edilebileceği mühendislik yaklaşımındaki gibi kabul edilecektir. Bu kabul ile (2.54) denklemi

$$\sigma = E' \alpha' \frac{df}{dz} \quad (2.55)$$

şekline döner.

L uzunluğunda bir konsol giriş gözönüne alalım. $z = L$ olan uçtaki sınır şartı

$$\left(\frac{df}{dz} \right)_{z=L} = 0 \quad (2.56)$$

şeklini alır. (2.45) ve (2.56) denklemlerden θ' ya ait sınır şartından

$$\left(\frac{d\theta_0}{dz} \right)_{z=L} = \left[\frac{1}{\alpha' C} \left(-\frac{M_z}{GI_C} \right) \right]_{z=L} \quad (2.57)$$

olduğu görülür.

Diferansiyel denklemlerin kontrolü ve sınır şartları gösterir ki çarpılma deplasmanlarının açıklık doğrultusundaki değişimine ait çözüm yapılmalı ve sonra dönmeleri hesaplamak için (2.45) denklemini kullanmak oldukça uygun olacaktır. (2.47) denklemi bir seriler metodu ile çözülebilir veya bir diferansiyel denklem ile tayin edilebilir. Denklem ikinci derece olduğundan diferansiyel denklemlerin katsayılar matrisi sürekli olabilecek ve Benscoter tarafından kullanılan yayılış işlemi kullanılabilecektir. Statik yüklemeler için böyle bir işlem kullanılabilir. Mamafih, vibrasyonlar ve dinamik yüklemeler için dönmeleri tatbik edilen torsiyonel yüklere bağlayan bir denklem çıkarmak gereklidir. ϕ dönmesi ve ϕ_0 sıfır çarpılma dönmesi aşağıdaki formüllere uygun olarak sunulmalıdır.

$$\theta = \frac{d\phi}{dz} \quad (2.58a)$$

$$\theta_0 = \frac{d\phi}{dz} \quad (2.58b)$$

(2.58) denklemleri (2.50) denkleminde yerine konulur ve z ye göre diferansiyel alınarak

$$\frac{d^2}{dz^2} (E' C \frac{d^2 \phi}{dz^2}) - \frac{d}{dz} (GJ \frac{d\phi}{dz}) = P_t + \frac{d^2}{dz^2} (E' C \frac{d^2 \phi_0}{dz^2}) \quad (2.59)$$

verilir. (2.59) denklemi üniform bir kiriş için

$$E' C \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} = P_t - \frac{E' C}{GJ_C} \frac{d^2 P_t}{dz^2} \quad (2.60)$$

şeklinde yazılabilir.

Kayma şekil değiştirmelerinin tesiri önemli olduğunda torsiyel eğilme problemi matematik olarak tam manasile eksenel çekmeli eğilme problemine analogdur.

5. NORMAL GERİLMELERİN HESABI

Normal gerilmelerin hesabına ait uygun bir formül sunmak için (2.55) denklemi ele alınır. Mamafih, üniform olmayan kirişler için f ait diferansiyel denklem yaklaşık sayısal metodlar ile çözülebilmeli. Böyle durumlarda türev aşırı derecede hesaplama gücü sarfedilmeksizin tam olarak belirlenemez. Değişik bir metot da geliştirilebilir.

Çarpılma momenti (eğilme momentine tekabül eden) fikri

$$M_\omega = \int \bar{\omega} \sigma_t ds \quad (2.61)$$

belirlemesi ile sunmak uygundur. Bu formül iç normal gerilme terimindeki çarpılma momentlerini belirler. Çarpılma momenti, Çarpılma deplmanlarının açıklık doğrultusundaki değişimi (2.55) denkleminin tamamı $\bar{\omega}^*$ ile çarpılarak ve bütün kesit üzerinde integre edilerek

$$M_\omega = E' I_\omega \frac{d^2 f}{dz^2} \quad (2.62)$$

şeklinde bağlanabilir. Buradaki I_ω (2.29) denklemi ile verilmiştir. (2.55) ve (2.62) denklemleri birleştirilerek aşağıdaki gibi eğilme formü tekabül eden bir gerilme formülü elde etmek mümkündür.

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \bar{\omega} \quad (2.63)$$

Burada

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}^* \quad (2.64)$$

dır. $\bar{\omega}$ sembolü daha iyi notasyon gösterilişi için esas enine gerilme yayılışını göstermekte sunulmuştur.

Çarpılma momentinin hesaplanmasına ait bir metot (2.62) denkleminin (2.47) denkleminde yerine konulmasıyla elde edilir.

$$\frac{dM_z}{dz} = GJn^2 f - n^2 M_z \quad (2.65)$$

Bu denklem eğilme momentini elde etmek için integre edilen kayma diyagramı ile aynı düşünce paralelinde hareket edilerek integre edilebilir. Bir konsol giriş durumunda

$$M_z = \int_L^z n^2 (GJf - M_z) dz \quad (2.66)$$

vermek için integrasyona uçtan başlanabilir.

Eğer yalnızca gerilmeler ile ilgilenecekse f yi yok etmek için (2.62) ve (2.65) denklemlerini birleştirmek mümkündür. Neticede denklem

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{GJn^2} \frac{dM_z}{dz} \right) - \frac{M_z}{E'I_z} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{M_z}{GJ} \right) \quad (2.67)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem bir seriler metodu ile çözülebilir veya fark denklemleri ile tayin edilebilir ve bir yayılış işlemi ile çözülebilir.

6. KAYMA KUVVETLERİNİN SÜREKLİLİK ŞARTI İLE HESABI

Kayma kuvvetleri yayılışı iki kısım içerir. Birinci kısım ^{torsiyonal} (birinci derece yayılış) Saint Venant torsiyonundaki gibi aynı enine yayılışa haizdir. Diğer ^{distorsiyonal} (ikinci derece yayılış) normal gerilmeli dengededir. Bunun için iki analiz metodu kullanılabilir. Birincisi deplasman metodu ve ikincisi kuvvet metodu olarak anılır. İlk önce eksenel deplasmanların süreklilik şartının kullanılmasını gerektiren deplasman metodu açıklanacaktır. Bu metot Von Karman ve Chirstensen tarafından kullanıl-

mıştır. Burada metodun detayına inmeden kısaca ifade edilecektir.

Toplam kayma kuvveti yayılışı aşağıda görüldüğü gibi iki kısma ikiye ayrılır.

$$q = q' + q'' \quad (2.68)$$

Verilen bir kesitteki birinci derece kayma kuvveti aynı burulma oranı Saint Venant torsiyonunda hasıl olacak olan ile aynı değerlere haiz olduğu kabul edilir. Birinci derece kayma kuvveti

$$q' = \bar{q} G \theta \quad (2.69)$$

ile verilir.

İkinci derece kayma kuvveti, Von Karman ve Christensen tarafından verildiği gibi, burulma oranı ile olduğu kadar çarpılma deplasmanı ile de doğrudan doğruya bağıntılı normal gerilme tesirini hesap etmek için pek az düzeltilmelidir. Eğer formül, üniform olmayan bir kırılgan gulanabilecek şekilde tadil edilirse bu şu şekilde yazılabilir:

$$q'' = E' \frac{\partial}{\partial z} (\bar{q}'' \frac{df}{dz}) \quad (2.70)$$

Burada $\bar{q}''$ esas yayılışını belirlemek gerekir. Eksenel deplasmanların süreklilik gereğine dayanan kayma kuvveti

$$\int_n q \frac{ds}{t} = 2A_n G \theta \quad (2.71)$$

denklemi ile verilmelidir. (2.69) denkleminde verildiği gibi birinci derece kayma kuvveti belirlenmesi kabulüne sahip ikinci derece kayma kuvveti

$$\int_n q'' \frac{ds}{t} = 0 \quad (2.72)$$

ile verilir. Bu denklem basit eğilme teorisinde kullanılan denklem aynıdır. Eğer esas $\bar{q}''$ yayılışı (2.72) denklemi ile elde edilirse yük meydana getirdiği gerçek kayma kuvveti yayılışı yalnız (2.72) ^{denklemi ile} karşılaştırılır. Eğilme teorisindeki gibi, ikinci derece kayma kuvveti, normal gerilmelerin integrali ile elde edilen statik olarak belirlenen bir kuvvet ve benzer cebirsel denklemler ile çözümlenerek elde edilen belirlenen bir kısım içerir.

İkinci derece kayma kuvveti esas yayılışının iki kısmı aşağıda

gibi gösterilebilir:

$$\bar{q}'' = \bar{q}_s'' - \bar{q}_i'' \quad (2.73)$$

Statik olarak belirli kısım, her bir gözdeki keyfi bir noktadan normal gerilmenin esas yayılışının integre edilmesiyle

$$\bar{q}_s'' = - \int_{s_0}^s t \cdot \bar{w} ds \quad (2.74)$$

şeklinde elde edilir. Belirli olmayan ikinci kısım bir denklem sisteminde ortaya çıkan n inci denklemin çözülmesiyle

$$\oint \bar{q}_i'' \frac{ds}{t} = K_n \quad (2.75)$$

olarak elde edilir. Burada

$$K_n = \oint \bar{q}_s'' \frac{ds}{t} \quad (2.76)$$

dir.

K_n sabiti her göz için gerilmelerin statik olarak belirlendiği bilinen kısmının integre edilmesiyle hesaplanmalıdır. Çözülen denklem sistemleri Saint Venant'ın katsayılar matrisine haizdir.

Kayma kuvvetine ait sonuç formül

$$q = \bar{q} G \theta + E' \frac{\partial}{\partial z} (\bar{q}'' \frac{df}{dz}) \quad (2.77)$$

olarak yazılabilir. Bu formül daha önceki paragraflarda verilen değişik formüllerden θ veya f yerlerine konularak değişik yönlerde modifiye edilebilir.

Gösterilebilir ki, eğer f ve θ (2.46) denklemini tatmin etmek için belirlenirse (2.77) denklemi ile verilen kayma kuvvetine ait formül (2.9) denklemi ile ifade edilen bütün dengeleri sağlayacaktır. Hakikaten, hatta (2.77) denklemi, (2.46) denklemini çıkaran ikinci bir metot vermek için (2.19) denkleminde yerine konulabilir. Bu Von Karman ve Christensen tarafından kullanılan metottur. Galerkin'in kullandığı bir diferansiyel denklem çözüm metodu, buradaki gibi, mevcut eğilme-torsiyon teorisinde enkesit üzerindeki hakiki kayma kuvveti yayılışına bağlı olmayan, tatbik edilen yük ile dönmeye bağlı olan diferansiyel denkleme dikkat edilmelidir.

7. KAYMA KUVVETLERİNİN DENGİ ŞARTLARI İLE BELİRLENMESİ

Burada, hesaplanan kayma kuvvetleri için kısaca alternatif bir metod ifade edilecektir. Bu metod "kuvvet metodu" olarak isimlendirilebilir. Kayma kuvveti, deplasmanlardan ziyade kesit terimleri ile ifade edilecektir. q ya ait formül diferansiyel denge denklemlerinin ve ifade edilen süreklilik denklemlerindeki kesitin bütününe ait denge denkleminin tekrar kullanılmasıyla elde edilir.

Kuvvet metodu bağımsız olarak geliştirilebilirken söz konusu kesitten formüller kullanmak oldukça uygundur. (2.76) denklemi G için zümlenebilir ve

$$q = \frac{M_z \bar{q}^*}{J} + \frac{\bar{q}^*}{J} \frac{d}{dz} \left(E' I_\omega \frac{df}{dz} \right) + E' \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{q}'' \frac{df}{dz} \right) \quad (2.78)$$

elde etmek için (2.77) denkleminde yerine konulabilir. (2.62) denklemleri (2.78) denkleminde yerine konularak

$$q = \frac{M_z \bar{q}^*}{J} + \frac{\bar{q}^*}{J} \frac{dM_\omega}{dz} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{M_\omega \bar{q}''}{I_\omega} \right) \quad (2.79)$$

verilir. Bu formül, normal gerilme (2.63) denklemi ile verildiği zaman diferansiyel denge denkleminin doğruluğu için gösterilebilir. Kolaylıkla görüldü ki, sistemin bütünüdür dengesi bilinen birkaç bağıntı hatırlanarak sağlanır. Daha önce de işaret edildiği gibi Saint Venant burulma kayma kuvveti torsiyon sabitine eşittir.

$$\int_0^L \bar{q} r_t ds = J \quad (2.80)$$

Von Karman ve Christensen tarafından gösterilmiştir ki ikinci derece kayma kuvveti burulma çifti negatif işaretli çarpılma atalet momentinin eşittir.

$$\int_0^L \bar{q}'' r_t ds = -I_\omega \quad (2.81)$$

(2.80) denkleminde, (2.79) denkleminde verilen q ya ait formüldeki ilk terimin toplam burulma çiftine katıldığı görülür. Böylece geri kalan terim kendi kendini dengelemelidir.

Eğer yaklaşımlar daha önce kullanıldığı gibi, burulma çiftini üçüncü teriminde de kullanılırsa (2.80) ve (2.81) denklemlerinden ikinci terimdeki burulma çiftinin üçüncü terimdeki burulma çiftini gösterecektir.

görüür.

Keza, M (2.62) denklemi ile belirlenir ve f (2.46) denkleminden hesaplanırsa, (2.79) denkleminin süreklilik şartını sağlayacağı österilebilir. Hatta: Süreklilik şartı (2.46) denklemini çıkarmak için de kullanılabilirdi. Bu üçüncü bir metodu temin eder ve bu metot ile, düzenlenen deplasman ve dönme denklemleri çıkarılabilirdi. Ayrıca enerji metodu da kullanılabilir.

(2.79) denklemindeki terimlerin kısa bir müzakeresi, bunların bilinen eğilme teorisindeki kayma akımlarından analogi ile birleştirilmesi makuldür. Birinci terim Saint Venant çözümünü verir. Karman-Christensen yayılışına haiz üçüncü terim normal gerilme dengesi ile verilir. Saint Venant yayılışlı ikinci terim Karman-Christensen yayılışının burulma çiftini yok etmek için ilave edilir.

8. SAYISAL ÖRNEK

Enkesit üzerinde esas gerilme yayılışını daha kolay izah etmek için şekil 2.4a da verilen üç kare gözlü ve sabit cidar kalınlığına haiz bir enkesit gözönüne alınmıştır. Burada esas Saint Venant kayma akımı

$$\bar{q}_1^* = \frac{5ct}{7} \quad (2.82a)$$

$$\bar{q}_2^* = \frac{6ct}{7} \quad (2.82b)$$

$$\bar{q}_3^* = \frac{5ct}{7} \quad (2.82c)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu kesit için geometrik merkez burulma merkezidir. $(\bar{r}^* - r_t)$ değeri şekil 2.4b de görüldüğü gibi bir analog kiriş yükü ile hesaplanabilir. Kiriş yüklerinin integrasyonu şekil 2.4c de görülen esas gerilme yayılışını verir. Normal gerilme yayılışı enkesitin her iki simetri eksenine göre antimetrik ve her eksen boyunca sıfıra eşit olmalıdır. Bunların neticesi olarak, bir çeyreklik kısımdaki gerilmeleri hesaplamak yeterlidir. Normal gerilme düğümler arasındaki plak kısımlarında lineer olarak değiştiğinde dağılım komple olarak (2) ve (3) düğümlerindeki $\bar{\sigma}$ nın değeri

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{5c^2}{28} \quad (2.83a)$$

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{11c^2}{28} \quad (2.83b)$$

şeklinde verilerek belirlenir.

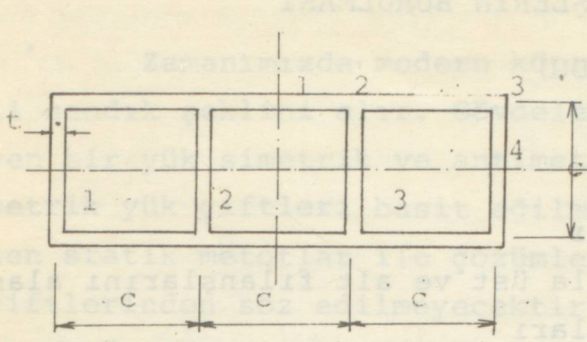
Esas normal gerilme, çevre elemanları üzerinde parabolik dağıtılı kayma akımı yayılımını elde etmek için integre edilebilir. Bu problem daha kolay izah edebilmek gayesi ile kesit şekil 2.5a da görüldüğü gibi idealleştirilmiştir. Idealizasyonda korunan değer rijitleştirilerek konulmuş her noktadaki normal gerilmedir. Normal gerilme her duvar elemanı üzerinde lineer olarak değiştiğinde her elemanın atalet momenti alanını korumak gereklidir. Bu, gövdenin iki ucundan birinde gövde alanının $\frac{1}{6}$ sına eşit alana ve gövdenin ortasında $\frac{2}{3}$ alana haiz rijitleştirici yerleştirilerek başarılır. Flanş gerilmeleri şekil 2.4c deki normal gerilmelerden şekil 2.5b de görüldüğü gibi hesaplanır. Bunlar ikinci derece kayma akımlarının statik olarak hesaplanan kısmını elde etmek için integre edilebilir. Hesaplanamayan kısım

$$K_1 = -13lc^4/168 \quad (2.84a)$$

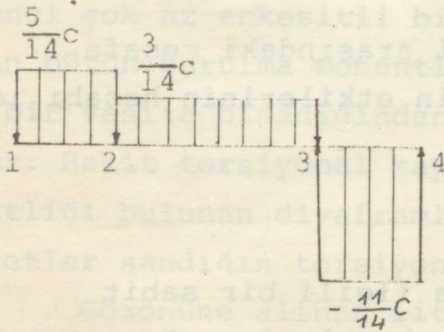
$$K_2 = 0 \quad (2.84b)$$

$$K_3 = -13lc^4/168. \quad (2.84c)$$

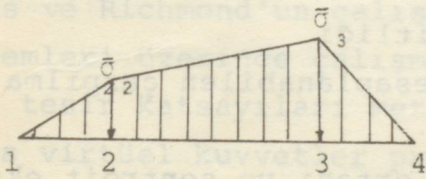
sabit terimlerine ait üç cebirsel denklem çözülerek elde edilir. Stüps pozisyon şekil 2.5a da görülen kayma akımının Karman-Christensen yayılımının değerlerini verir.



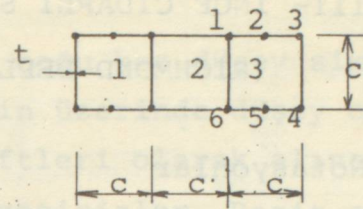
(a) Boyutlar



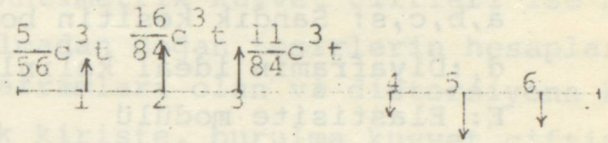
(b) Analog giriş yükü



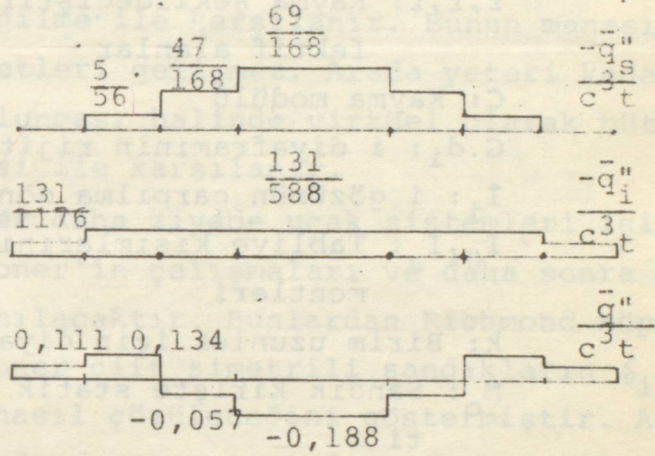
(c) Normal gerilme yayılımı

Şekil 2.4 Üç gözlü
eleman

(a) Boyutlar



(b) Eksenel kuvvetler

(c) İkinci derece kayma
gerilmesiŞekil 2.5 İdealize edilmiş
çeyrek üç gözlü eleman

III- İNCE CİDARLI SANDIK KİRİŞLERİN BURULMASI

(RICHMOND DEPLASMAN METODU)

Notasyonlar

A: Sandık kesitin kapalı alanı

A_u, A_a : Efektif kirişin sırayla üst ve alt filanşlarını alanı

a,b,c,s: Sandık kesitin boyutları

d_i : Diyaframın ideal kalınlığı

E: Elastisite modülü

e: Scentroid eksenini ile gövde eksenini arasındaki mesafe

$\bar{f}, f, f^T$: Kayma şekil değiştirme etkilerinin hesabı için efektif alanlar

C: Kayma modülü

$G.d_i$: i diyaframının rijitliği

I_i : i gözünün çarpılma dönmesi ile ilgili bir sabit

I_u, I_a : Tabliye kısımlarının kendi eksenlerine göre atalet momentleri

k: Birim uzunluk için diyafram rijitliği

M_o : Sandık kiriste statik olarak hesaplanabilen çarpılma momenti

$M_{Eff}^u, N_{Eff}^u, M_{Eff}^a, N_{Eff}^a$: Sırayla gövde ortası ve sentroit eksenini ile ilgili gerilme bileşenleri

N: Sandık giriş gövdesindeki aksenal kuvvet

q: Bredt-Batha kayma kuvveti (akımı)

R: Mesnet reaksiyonu

S,P: Tatbik edilen yük vektörleri

t_g, t_u, t_a : Sırayla gövdenin, üst plağın ve alt plağın kalınlığı

W,C: Tatbik edilen yükler

w: Yayılı burulma yükünün şiddeti

Y: Rijitlik matrisi

u,v,e: Genelleştirilmiş deplasmanlar (sırayla torsiyonel, torsiyonel ve çarpılma)

Q,V,X: Genelleştirilmiş gerilme bileşenleri (sırayla torsiyonel distorsiyona ve çarpılma)

$\delta v, \delta u$: Sırayla üst köşelerin distorsiyon ve torsiyon ile ilgili düşey yer değiştirmeler

μ : Poisson oranı

α, β, λ : Sabitler

1.GİRİŞ

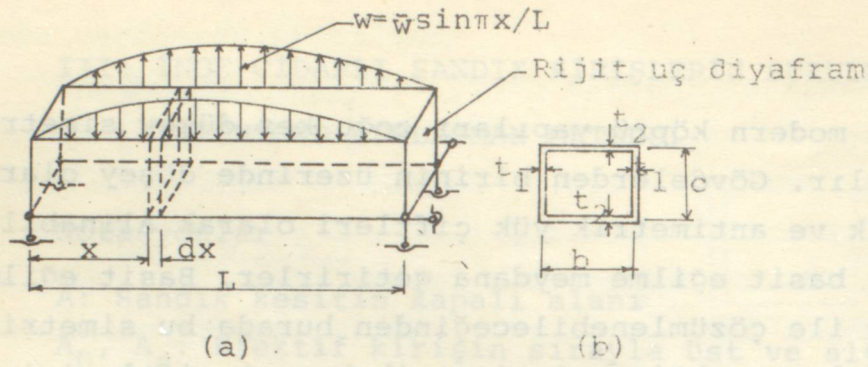
Zamanımızda modern köprü yapıları çoğu kez düşey simetri eksenli sandık şeklini alır. Gövdelerden birinin üzerinde düşey olarak etkiyen bir yük simetrik ve antimetrik yük çiftleri olarak alınabilir. Simetrik yük çiftleri basit eğilme meydana getirirler. Basit eğilme bilinen statik metotlar ile çözümlenebileceğinden burada bu simetrik yük çiftlerinden söz edilmeyecektir. Antimetrik kuvvet çiftleri ise burulma meydana getirir. Burada bu burulmadan doğan tesirlerin hesapları verilecektir. Yalnızca uçlarında diyaframları olan ve distorsiyona karşı direnci çok az enkesitli bir sandık kirişte, burulma kuvvet çiftinden doğan bütün burulma momentleri, Yükleri düşeyden yataya dönüştürmek için bir vasıta olmadığından fark-eğilme ile karşılanır. Bunun manası şudur: Basit torsiyonel kayma kuvvetleri gelişmez. Arada yeteri kadar rijitliği bulunan diyaframların bulunması halinde virtüel olarak bütün kuvvetler sandığın torsiyonel etkisi ile karşılanır.

Gözönüne alınan literatürler daha ziyade uçak sistemleri içindir. Burada yalnızca Reissner ve Ebner'in çalışmaları ve daha sonra Argyris ve Richmond'un çalışmaları anılacaktır. Bunlardan Richmond köprü sistemleri üzerinde çalışmıştır. Ebner çift simetrikli sandıkların δ_{ik} veya tesir katsayıları metodu ile nasıl çözüleceğini göstermiştir. Argyris virtüel kuvvetler prensibine dayanan δ_{ik} metodunun bir matris formülünü ve virtüel deplasman prensibine dayanan deplasman ve rijitlik matrisleri formülünü vermiştir. O bu metotların modern uçak kanatlarını kompleks sistemlerine nasıl uygulanabileceğini göstermiştir. Richmond da bu esasları köprü sistemlerine uygulamıştır.

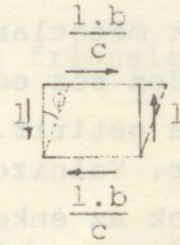
2.YAKLAŞIK ÇÖZÜM

-Rijit uç diyaframlı basit mesnetli sandık kirişler:

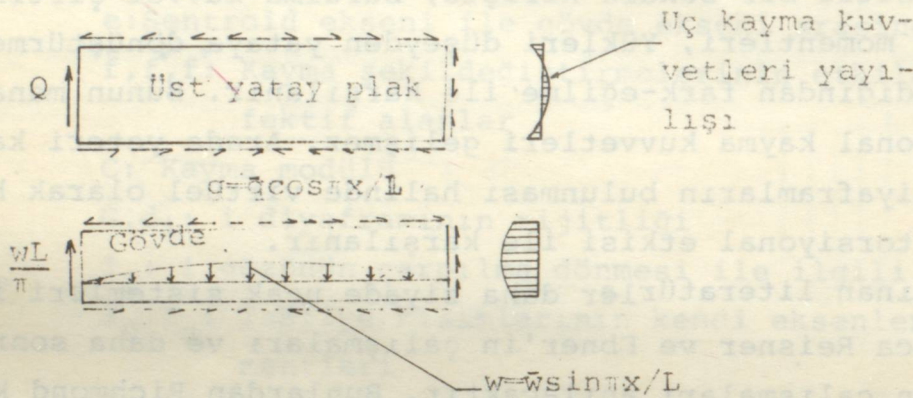
Şekil 3.1a da sabit enkesitli ve uçlarında çarpılmaya müsait sandık kiriş gösterilmiştir. Başka bir deyişle bir düzlemde yükler tatbik edildikten sonra uç enkesitler değişmez ve gövdelerin uçları e-nine yatay eksene göre ters yönde serbest döner. Uç kesitlerin kendi düzlemlerindeki distorsiyonları rijit diyaframlar ile önlenmiştir. Benzer distorsiyon başka kısımlarda başka hiç bir yapısal tesir olmaksızın (dx') kalınlığında elemanter bir diyafram serisi olarak etkiyen sürekli iç diyafram tarafından karşılanır. Sürekli iç diyaframın distorsiyona direnme yeteneği şekil 3.2 de gösterilen kayma kuvvetleri ile oluşan iç diyaframın birim kalınlığındaki ϕ şekildeğiştirmesi ile belirlenir.



Şekil 3.1



Şekil 3.2



Şekil 3.3

Böyle bir iç diyafram ortada özel diyaframı bulunmayan sandık kirişin kanatlarının çevrelediği bir kapalı çerçeveyi temsil eder. Şekil 3.2'de görüldüğü gibi, bu yapıların davranışları için bir tolerans yapılmasıyla geniş bir şekilde hesaplanır. Kapalı şekiller için elastisite modülünü kullanılırken bu değer $1/(1-\nu^2)$ ile artırılmalıdır.

Eşdeğer bir iç diyafram, münferit diyaframlara ait diyafram rijitliğinin diyafram aralığı ile bölünmesiyle bulunabilir. Burada yaklaşık çözüm ve elastik zemine oturan kiriş (BEF) arasında tam bir analogi vardır. Bu sebepten bu işlemin teorik sınırları, normal kiriş teorisi deki elastik mesnetler serisi yerine bir elastik zemin konulduğu zamana kadar aynı duruma idantik olarak tekabül eder. Pratik terimlerde sınırlandırmalar, ana gayenin burulma gerilmeleri ve basit eğilme gerilmelerinin zayıf şiddetine ve farklı diyafram rijitliklerinin tesiri için bir düzeltme edinme olduğundan çok küçük olabilecektir.

Yapının geometrisi ve mesnet şartları, bu tip sistemlerin önemli karakteristikleri muhafaza edilerek mümkün olduğu kadar basit bir analizi

metik yöntem ile çözülmüştür. Yön olarak ters fakat siddet olarak aynı olan yükleme sistemi şekil 3.1a da gösterilmiştir. Keza bu özel sisteme ait en basit şekildir ve gerçek çözümler gösterildiğine göre deplasman ve gerilmelerin değişimi de benzer şekildedir.

Yaklaşık çözümde üç yeni kabul daha yapılacaktır. Bunlardan birincisi her bir bağımsız plağın eğilme gerilmeleri ve deformasyonların mühendislik teorisi ile hesaplanabilmesidir. Yani düzlem kesit gene düzlem kalır. İkincisi kayma şekil değiştirmesinden meydana gelen deformasyonların basit torsiyonel kaymadan meydana gelmedikçe ihmal edilebilmesi. Ve üçüncü kabul de kayma şekil değiştirmesinin sebeb olduğu boyuna doğrultudaki deformasyonlar (çarpılma) boyuna gerilmeleri ihmal edilebilecek kadar az artıracaktır. Saf torsiyon, meydana gelen diyafram tesiri olmaksızın herhangi bir kesitte saf dönmeye sebeb olur. Öyleki bu kabuller gereğince ayrı kanatlarda yalnız eğilme gerilmelerinden meydana gelen deformasyonların toplam tesirinin analizde gözönüne alınmasını gerektirir.

Şekil 3.3 üst plağı ve üzerine tatbik edilen yük ile etkilenen sandığın gövdelerinden biri ve sürekli iç diyafram olmadığı durumda mevcut olabilecek kayma kuvvetlerini gösterir. Gövdelerin herhangi bir karşılıklı düşey kesitindeki toplam kayma kuvveti statik denge için

$$w(L/\pi) \cos(\pi x/L)$$

olmak durumundadır. Ve buna binaen uzun kenarlardaki kayma kuvvetlerinin şiddeti

$$q = \bar{q} \cdot \cos(\pi x/L)$$

ile verilir. Aynı gövdelerin karşı kenarlarındaki kayma kuvvetleri şiddetleri elemanter kuvvet çiftleri meydana getirir. Basit olarak mesnetlenen uçlardaki integrasyon gövdelerde uygulanan yüklerden meydana gelen eğilme momentinin bir miktar azaltılmasıyla hesaplanır. Gövdedeki toplam eğilme momentleri

$$M_1 = w(L^2/\pi^2) \cdot \sin(\pi x/L) - \bar{q} \cdot cL/\pi \cdot \sin(\pi x/L) \quad (3.1a)$$

ve yatay plak üzerindeki eğilme momenti

$$M_2 = \bar{q} \cdot b \cdot L/\pi \cdot \sin(\pi x/L) \quad (3.1b)$$

olarak bulunur.

Herbir kanat için bilinen kiriş teorisi uygulanıp ortak boyuna kenarlardaki gerilmeler eşitlenerek

$$\frac{6 \cdot \bar{w} L^2}{t_1 c^2} \cdot \frac{\sin \pi x}{L} - \frac{\bar{q} c L}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi x}{L} = \frac{6 \bar{q} b L}{t_2 b^2 \pi} \cdot \frac{\sin \pi x}{L} \quad (3.2a)$$

buradan kayma kuvveti şiddeti ve boyuna kenar gerilmeler $(\sigma_x)_e$

$$\bar{q} = \frac{b t_2}{c (c t_1 + b t_2)} \cdot \frac{\bar{w} L}{\pi} \cos \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (3.2b)$$

$$(\sigma_x)_e = \frac{6}{c (c t_1 + b t_2)} \cdot \frac{\bar{w} L^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin \pi x}{L} \quad (3.2c)$$

olarak bulunur.

Yük, sanli üst ve alt enine bağlantı ile bağlanan iki ayrı k varmış gibi tam olarak sandığın fark eşilmesi ile taşınır. Ara diyafların olmaması durumunda bağlantının tesiri flanşlardaki farklı şek değiştirme yüzünden gövde hareketine flanşların tesiri oldukça büyük Böylece herhangi bir kirişte

$$w = \bar{w} \sin \frac{\pi x}{L}$$

şiddetindeki bir yükten meydana gelen eğilme momenti

$$M = \bar{w} L^2 / \pi^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

olabilecektir.

s Sandığın gövde elemanlarında olduğu gibi aynı gerilme ve defo masyon meydana getiren kiriş I_{Eff} atalet momenti

$$\frac{M}{I_{Eff}} \cdot \frac{c}{2} = (\sigma_x)_e$$

eşitliği ve $(\sigma_x)_e$ (3.2c) eşitliğinde verildiği gibi alınarak

$$I_{Eff} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{c t_1}{6} + \frac{b t_2}{6} \right) \quad (3.3)$$

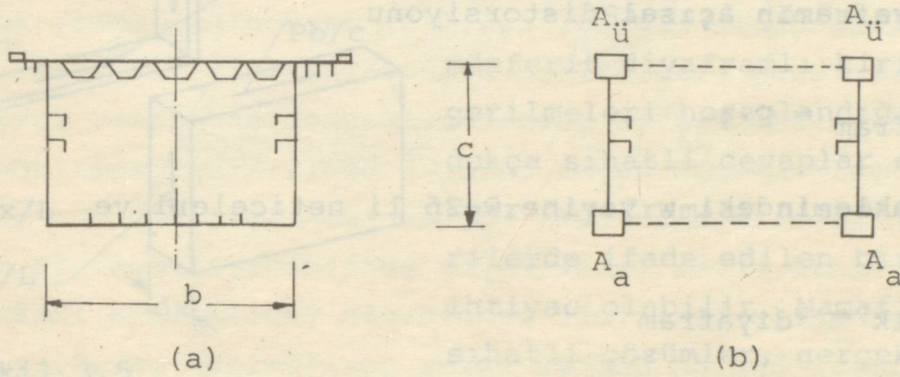
ile belirlenir.

Örneğin, sandığın gövdelerine idantik bir gövde ve yatay pl 1/6 ine eşit enkesit alanı olan bir merkezi flans ihtiva eden bir k gibi.

Aynı çözüm yolu, şekil 3.4a da gösterilen düşey simetri eksenli kompleks bir enkesit'e kolaylıkla tatbik edilebilir. Öyleyse eşdeğer kiriş orijinaline idantik bir gövde ve alanları

$$A_{\bar{u}} = 2I_{\bar{u}}/b^2 \quad \text{ve} \quad A_a = 2I_a/b^2 \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilen üst ve alt flanşlar ihtiva eder. Burada $I_{\bar{u}}$ ve I_a sırayla üst ve alt plağın rijitleştiriciler dahil atalet momentidir. I_{Eff} bir tek kiriş için genel yoldan hesaplanabilir.



Şekil 3.4

Sandığın herhangi bir plağının düzlemdeki deformasyonları plağın eğriliğini belirlediğinden kenarlardaki boyuna şekildeğiştirmelere bağlıdır. Bundan başka verilen kenar şekildeğiştirme veya gerilmelere ait eğrilik ve deformasyonlar plakların b veya c genişlikleri ile ters orantılıdır. Gövdeler bir v_1 miktarı kadar düşey olarak yerdeğiştirdiğinde yatay plak ortak kenarlarda eşit olarak şekildeğiştirme olacak şekilde yatay olarak $v_2 = -v_1 c/b$ kadar yerdeğiştirir. v_1 şekil 3.1a da olduğu gibi gövdeler için aşağı doğru pozitif alınır. Ve v_2 daha ötedeki plaktan yakındaki plağa doğru olduğu zaman pozitif alınır. Gövdeye kiriş teorisi uygulanarak

$$v_1 = \frac{\bar{w}}{EI_{\text{Eff}}} \cdot \frac{L^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3.5)$$

bulunur.

Sürekli bir iç diyaframın toplam tesiri şimdilik gövde üzerindeki $p = \bar{p} \sin \pi x/L$ ve yatay perde üzerindeki $p(b/c)$ nin (şekil 3.5 de görüldüğü gibi) iç diyaframın birim uzunluk reaksiyonunun ilave edilmesiyle gözönüne alınabilir. Diyafram reaksiyonlarının sinüzoidal değişimi

sandık mesnetlerinin tabii durumu ve kabul edilen yük sisteminden ne celendirilebilir. Gövdenin üzerindeki yük şiddeti oradaki p ile azalır ve bir miktar artan p yatay plakta saf bir torsiyonal yük şeklindeki $p(b/c)$ reaksiyonu ile beraber etkidiği düşünülebilir. Şimdiye kadar pılan kabullere göre bu sistemin tesirleri ihmal edilebilir. Sandık geri kalan yük yalnızca gövde üzerinde etkiyen ve fark-eğilme ile taşabilecek $(w-2p)$ dir. Sandık enkesitinin açısal distorsiyonu

$$\psi_{\text{sandık}} = 2v_1/b - 2v_2/c = 4v_1/b \quad (3.6)$$

olacaktır. Diyaframın açısal distorsiyonu

$$\psi_{\text{diyafram}} = P \cdot \phi \quad (3.7)$$

dir. (3.5) denklemindeki w yerine $\bar{w}-2\bar{p}$ li neticeleri ve

$$\psi_{\text{sandık}} = \psi_{\text{diyafram}}$$

şartı kullanılarak

$$\frac{4}{b} \cdot \frac{\bar{w}-2\bar{p}}{EI_{\text{Eff}}} \cdot \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{\sin \pi x}{L} = p \phi \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3.8)$$

veya

$$\bar{p} = \frac{\bar{w}}{2(b\phi/8\delta+1)} \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada δ , $w = 1 \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$ şeklinde sinüzoidal değişimli bir yük ile yüklenmiş I_{Eff} atalet momentli eşdeğer bir kirişin maksimum eğilme sehimidir. Öyleyse sehimler

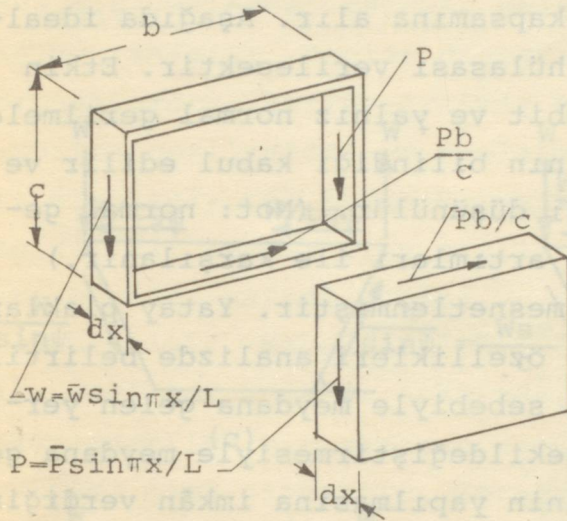
$$v_1 = \frac{1}{(1+8\delta/b\phi)} \cdot \frac{\bar{w}}{EI_{\text{Eff}}} \cdot \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{\sin \pi x}{L}$$

dir. Eğer yük fark-eğilmesiz saf torsiyon ile taşınırsa $w-2p$ sıfır $p = w/2$ olmalıdır. Eğer $b\phi/8\delta$ bire göre küçük ise yani diyafram flakslitesi sandığın eğilme fleksibilitesine göre küçük ise bu (3.9) eşit ginden görülebilir. $1/(b\phi/8\delta+1)$ faktörü, sandığın torsiyonal dayanır ölçmek için ve verilen bir sandığın (3.9) eşitliğinden bulunabilen t siyonda taşınan yükün önceden hesaplanan bir yüzdesi olacak olan ϕ yafram fleksibilitesi için görülür. Uç liflerdeki gerilmeler eşdeğer

kirişe etkiyen

$$M = (\bar{w} - 2\bar{p})L^2/\pi^2 \cdot \sin(\pi x/L) \quad (3.11)$$

eğilme momentinden bulunabilir.



Şekil 3.5

bile diyafram terimleri kullanılarak en iyi şekilde elde edilebilir. Yukarıda izah edilen yaklaşık metot bir yapının genel davranışı hakkında çabuk bilgi edinmek için çok yaklaşıktır. Kompleks sistemler için 6 prop lemde yukarıda uygun atalet momenti olarak verilen I_{Eff} kullanılarak açıklığa birim şiddette bir üniform yayılı yükün tatbik edilmesiyle çabucak tayin edilir. Standart formüle dayanan ortadaki sehim hakkında bilgi edinmek genellikle mümkün olabilecektir.

3. MÜNFERİT DİYAFRAMLI TRAPEZ ENKESİTLİ SANDIK KİRİŞLER İÇİN RICHMOND DEPLASMAN ÇÖZÜMÜ

3.1. GİRİŞ

Düşey simetri eksenli merkezi diyaframli sandık kirişlerdeki burulma yükünün tesiri her diyafram pozisyonunda enkeseit deplasman terimi ile gözlemlenir. Verilen metot virtüel kuvvet veya tamamlayıcı enerji metoduna dayanır.

Metodun tatbikatı düşey bir simetri eksenli derinlik ve genişliği sabit, basit mesnetli veya belirli sayıda iç noktalarda mesnetlenmiş kirişler için geçerlidir. Atalet momenti ve kalınlıklar her gözde sabittir.

$$2A = 2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot c$$

$$2A = (a+b) \cdot c \quad (3.13)$$

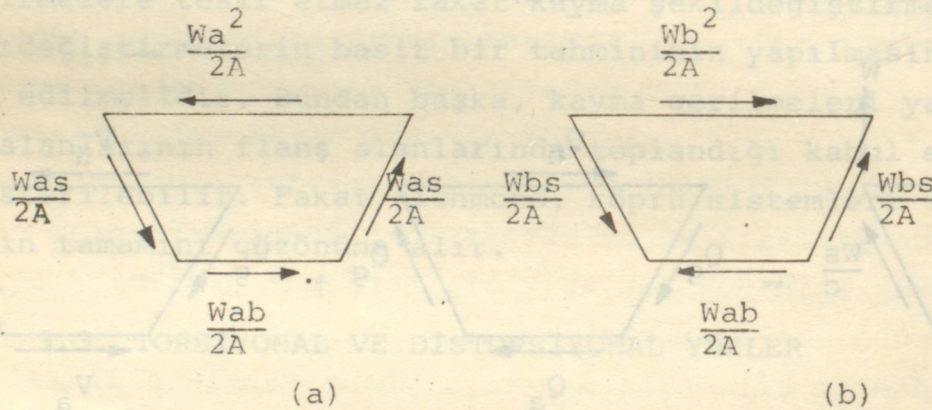
Her elemanın üzerindeki toplam torsiyonal kuvvetler

$$Q_{\ddot{u}} = q \cdot a = \frac{W \cdot a^2}{2A} \quad (3.14a)$$

$$Q_g = q \cdot s = \frac{W \cdot a}{2A} \cdot s \quad (3.14b)$$

$$Q_a = q \cdot b = \frac{W \cdot a \cdot b}{2A} \quad (3.14c)$$

olarak bulunur. Bunlar şekil 3.7a da gösterilmiştir.



Şekil 3.7

Şekil 3.6f deki kuvvetleri meydana getiren burulma yüklerinin $(W \cdot a)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Görülüyor ki bunlar Bredth-Batho torsiyon teorisi ile verilen bir saf torsiyon kuvvetlerinin integrasyonu ile elde edilen kuvvetlere eşittir. Statik denge gereği şekil 3.6e deki kuvvetler şekil 3.6f ve g deki kuvvetlerin toplamına eşit olmalıdır. radan distorsiyonal kayma kuvvetleri şu şekilde verilebilir:

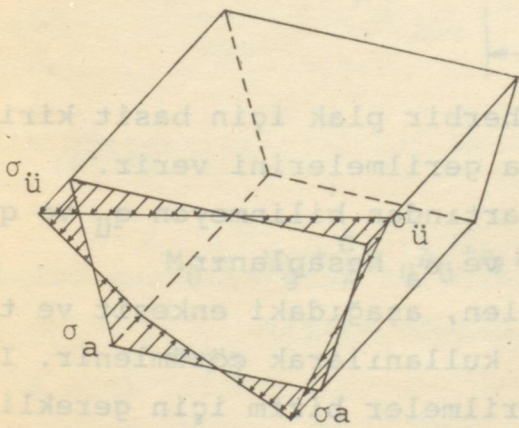
$$V_{\ddot{u}} = \frac{W \cdot a^2}{(a+b)c} - \frac{W(a-b)}{c} = \frac{W \cdot b^2}{2A} \quad (3.15a)$$

$$V_g = \frac{W \cdot s}{c} - \frac{W \cdot a \cdot s}{(a+b)c} = \frac{W \cdot b \cdot s}{2A} \quad (3.15b)$$

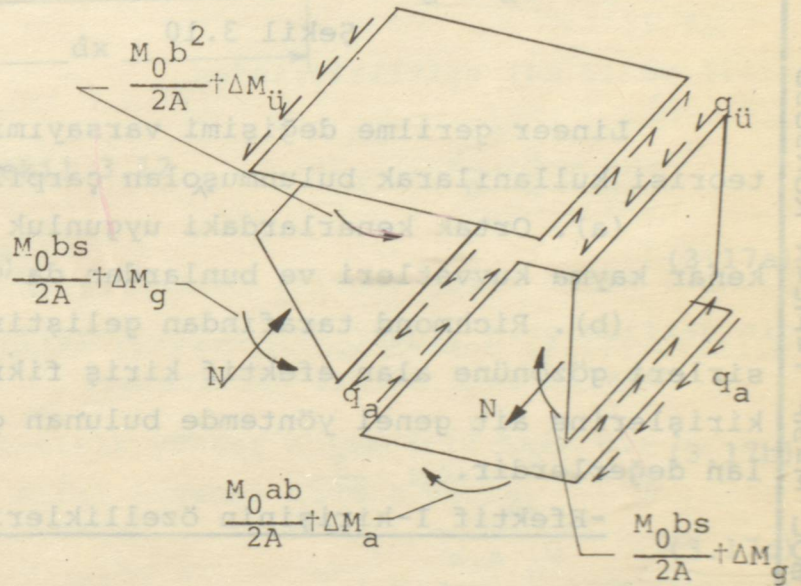
$$V_a = \frac{W.a.b}{2A} \quad (3.15c)$$

3.4. TRAPEZ ENKESİTLİ İNCE CİDARLI SANDIK KİRİŞLERİN ÇARPILMASI

Trapez enkesitli ince cidarlı bir sandık kirişin enkesiti üstündeki dış yüklerden meydana gelen iç kayma kuvvetleri distorsiyonal bir biçime sahiptir. Bunlar distorsiyonal kayma kuvvetleri (V) gibi işlem göreceklere. Birleştirilmiş kayma kuvveti tesiri ile boyuna doğrultuda çarpılma gerilmeleri ve deplasmanları meydana gelecektir. Genelleştirilmiş distorsiyonal kayma kuvvetleri yalnızca uçlarında distorsiyona dayanıklı bir sandık için statik olarak hesaplanır. Öyleyse, sandık kenarları boyunca mafsallı gibi ve uçlarında ince plak diyaframa haiz olduğu düşünülebilir. Kabul edilebileceği gibi, eğer çarpılma gerilmelerinin enine değişimi köşeler arasında lineer ise sandık statik olarak tamamen hesaplanabilen bir sisteme dönüştürülebilir. Çarpılma gerilmeleri şekil 3.8 deki gibi olacaktır. Torsiyonal bileşene haiz bir enkesitteki kayma kuvvetleri genelleştirilmiş bir Q kayma kuvveti gibi işlem görür.



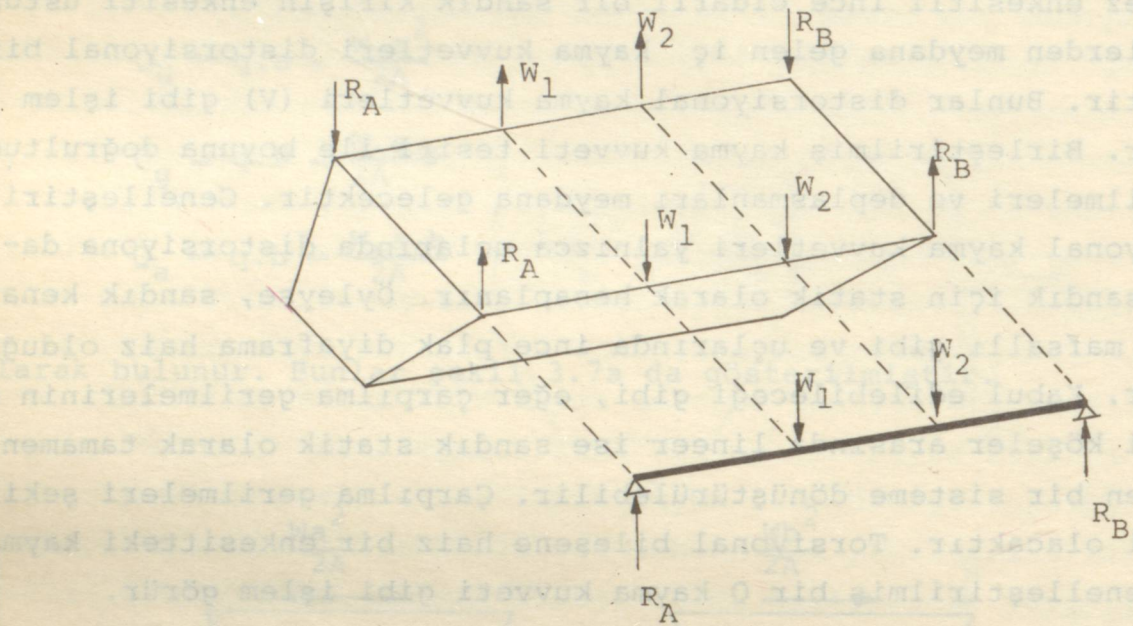
Şekil 3.8



Şekil 3.9

Şekil 3.9 sandığın her bir plağındaki iç moment ve eksenel kuvvetleri ayrı ayrı gösterir. Yalnız gövdelere etkiyen eksenel kuvvetler (N) ile gösterilmiştir. Çünkü simetrik enkesit ve antimetrik yüklü bir sistemde üst ve alt flanştaki eksenel kuvvetlerin sıfır olması gerekir. Eğilme momentleri iki kısımda gösterilebilir. Birinci kısım sanki uçlar arasında kayma gerilmelerinin tesiri yokmuş gibi yüklerin distorsiyonal bileşkelerinden meydana gelen M_0 'ın bir yüzdesi olarak verilmiştir.

M_o , uçlarında rijit diyafram bulunan ve statik olarak hesaplanan sac için şekil 3.10 da görüldüğü gibi hayali bir kirişten bulunabilir. ΔM , q_u ve q_a kenar kayma kuvvetlerinin tesirine tekâbul eder. za bu kenar kayma kuvvetleri gövdelerde N aksenel kuvvetlerini meydana getirir.



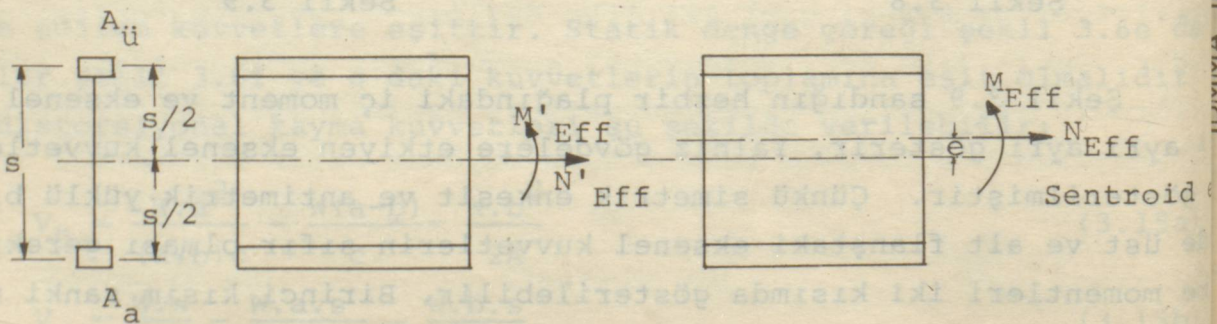
Şekil 3.10

Lineer gerilme değişimi varsayımı her bir plak için basit kiriş teorisi kullanılarak bulunmuş olan çarpılma gerilmelerini verir.

(a). Ortak kenarlardaki uygunluk şartından bilinmeyen q_u ve kenar kayma kuvvetleri ve bunlardan da σ_u ve σ_a hesaplanır.

(b). Richmond tarafından geliştirilen, aşağıdaki enkesit ve sirleri gözönüne alan efektif kiriş fikri kullanılarak çözümlenir. kirişlerine ait genel yöntemde bulunan gerilmeler bizim için gerekli olan değerlerdir.

-Efektif I-kirişinin özellikleri:



Şekil 3.11

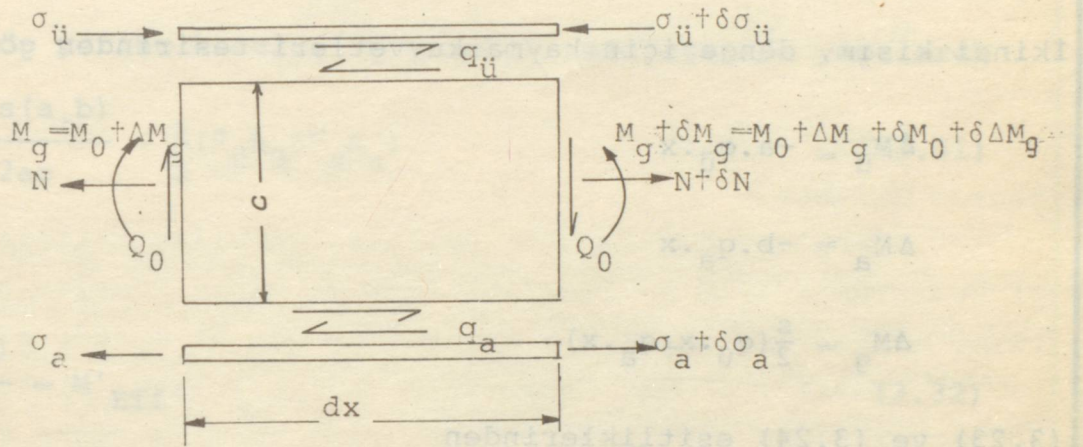
Gövde: Gerçek kesitte olduğu gibi

$$\text{Üst flanş alanı: } A_{\bar{u}} = \frac{2I_{\bar{u}}}{a^2} \quad (3.16a)$$

$$\text{Alt flanş alanı } A_a = \frac{2I_a}{b^2} \quad (3.16b)$$

Burada $I_{\bar{u}}$ ve I_a sırayla üst ve alt tabliye kısımlarının kendi düşey simetri eksenlerine göre atalet momentidir.

-Gövde yüksekliğinin ortası ile ilgili tesirlerin çıkarılması:



Şekil 3.12

$$M_0 = M_g + \frac{c}{2} (\sigma_{\bar{u}} A_{\bar{u}} + \sigma_a A_a) \quad (3.17a)$$

veya

$$M_g = M_0 - \frac{c}{2} (\sigma_{\bar{u}} A_{\bar{u}} + \sigma_a A_a) \quad (3.17b)$$

$$\Delta M_g = - \frac{c}{2} (\sigma_{\bar{u}} A_{\bar{u}} + \sigma_a A_a) \quad (3.17c)$$

ile gösterilerek gövde momenti

$$M_g = M_0 + \Delta M_g \quad (3.18)$$

bulunur. Burada M_0 , flanş ve gövde arasında birbirine tesir eden kaymaların bulunmadığı düşünülerek elde edilecek momenttir. İkinci kısımda ΔM kenar kayma kuvvetlerinin tesirini gösterir. Keza kenar kayma kuvvetleri gövdede

$$N = \sigma_{\bar{u}} A_{\bar{u}} - \sigma_a A_a \quad (3.19)$$

ile verilen N eksenel kuvvetini meydana getirir.

Şekil 3.9 da gösterilen bir trapez sandık kesitinde eğilme momentinin iki kısım ihtiva ettiği görülmüştü.

$$\text{Üst plaktaki moment} = \frac{M_0 \cdot b^2}{2A} + \Delta M_{\bar{u}} \quad (3.20)$$

$$\text{Alt plaktaki moment} = \frac{M_0 \cdot a \cdot b}{2A} + \Delta M_a \quad (3.21)$$

$$\text{Gövdedeki moment} = \frac{M_0 \cdot b \cdot s}{2A} + \Delta M_g \quad (3.22)$$

İkinci kısım, denge için kayma kuvvetleri tesirinden gösterilir.

$$\Delta M_{\bar{u}} = -a \cdot \sigma_{\bar{u}} \cdot x \quad (3.23)$$

$$\Delta M_a = -b \cdot \sigma_a \cdot x \quad (3.24)$$

$$\Delta M_g = \frac{s}{2} (\sigma_{\bar{u}} \cdot x + \sigma_a \cdot x) \quad (3.25)$$

(3.23) ve (3.24) eşitliklerinden

$$\Delta M_g = \frac{s}{2} \left(\frac{\Delta M_{\bar{u}}}{a} + \frac{\Delta M_a}{b} \right) \quad (3.26)$$

bulunur. Basit kiriş teorisi kullanılarak çarpılma gerilmelerini bulmak için gerilmelerin lineer değiştiği kabulüne müsaade edilir.

Kenarlardaki normal gerilmeler:

$$\sigma_{\bar{u}} = \left(\frac{M_0 \cdot b^2}{2A} + \Delta M_{\bar{u}} \right) \frac{a}{2I_{\bar{u}}} \quad (3.27)$$

$$\sigma_a = \left(\frac{M_0 \cdot a \cdot b}{2A} + \Delta M_a \right) \frac{b}{2I_a} \quad (3.28)$$

Bilinmeyen $\Delta M_{\bar{u}}$ ve ΔM_a (3.27) ve (3.28) den hesaplanır ve (3.26) denkleminde yerine konular ve gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$\Delta M_g = \frac{M_0 \cdot s}{4A \cdot a} (a^2 + b^2) - s \left(\frac{I_{\bar{u}} \sigma_{\bar{u}}}{a^2} + \frac{I_a \sigma_a}{b^2} \right) \quad (3.29)$$

bulunur. Gövdedeki toplam moment

$$M_g = \frac{M_0 \cdot b \cdot s}{2A} + \frac{M_0 \cdot s}{4A \cdot a} (a^2 + b^2) - \frac{s}{2} \left(\frac{2I_{\ddot{u}}}{a^2} + \frac{2I_a}{b^2} \right) \quad (3.30)$$

şeklinde ifade edilir.

$$A_{\ddot{u}} = \frac{2I_{\ddot{u}}}{a^2} \quad (3.30a)$$

ve

$$A_a = \frac{2I_a}{b^2} \quad (3.30b)$$

(3.30) denkleminde yerine konulur ve gerekli sadeleştirme yapılarak

$$M_g = \frac{M_0 \cdot s(a+b)}{2ac} - \frac{s}{2} (\sigma_{\ddot{u}} A_{\ddot{u}} + \sigma_a A_a) \quad (3.31)$$

yazılabilir.

$$\frac{M_0 \cdot s(a+b)}{2ac} = M'_{Eff} \quad (3.32)$$

ile gösterilirse (3.31) eşitliği

$$M_g = M'_{Eff} - \frac{s}{2} (\sigma_{\ddot{u}} A_{\ddot{u}} + \sigma_a A_a) \quad (3.33)$$

şeklini alır. Gövdede iki kısımdan ibaret toplam moment (3.18) eşitliği ile aynı biçimdedir.

Bundan başka enkesit simetrik yükler antimetrik iken üst ve alt flanştaki kuvvetlerin toplamı sıfır eksenel kuvvet verir.

$$N = (q_{\ddot{u}} - q_a) x = \Delta M_{\ddot{u}}/a - \Delta M_a/b \quad (3.34)$$

dir. $\Delta M_{\ddot{u}}$ ve ΔM_a in değerleri yerine konulur,

$$A_{\ddot{u}} = \frac{2I_{\ddot{u}}}{a^2}, \quad A_a = \frac{2I_a}{b^2} \quad (3.35)$$

alınır sadeleştirme yapılır,

$$N = (\sigma_{\ddot{u}} A_{\ddot{u}} - \sigma_a A_a) + \frac{M_0(a-b)}{a \cdot c} \quad (3.36)$$

ve

$$\frac{M_0(a-b)}{a \cdot c} = N'_{\text{Eff}} \quad (3.37)$$

ile gösterilirse

$$N = (\sigma_{\ddot{u}} A_{\ddot{u}} - \sigma_a A_a) + N'_{\text{Eff}} \quad (3.38)$$

elde edilir. Gövdenin ortası ile ilgili tesirler

$$M'_{\text{Eff}} = M_0 \frac{s(a+b)}{2ac} \quad (3.39)$$

$$N'_{\text{Eff}} = M_0 \frac{a-b}{ac} \quad (3.40)$$

olarak bulunur. Efektif kirişin sentroit eksenini ile ilgili tesirler

$$M_{\text{Eff}} = M'_{\text{Eff}} + N'_{\text{Eff}} \cdot e \quad (3.41)$$

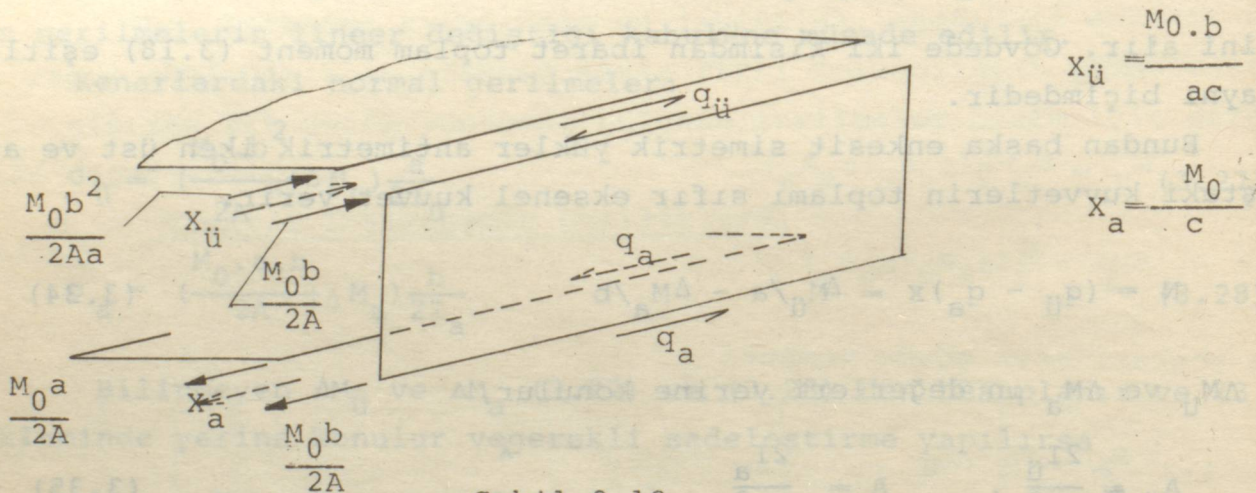
$$N_{\text{Eff}} = N'_{\text{Eff}} \quad (3.42)$$

olarak bulunur.

Çarpılma gerilmeleri yayılışı genelleştirilmiş çarpılma momentini belirlemek için kullanılabilir. Ne varki köşeler arasında lineer gerilme değişimine basit bir alternatif olarak müsaade edilir.

Şekil 3.9 daki momentlerin birinci kısmı statik olarak eşdeğer kuvvet çiftleri ile tayin edilir. Plak köşelerindeki kuvvetlerin toplamı çift teşkil eden kuvvetleri verir.

Bu dört boyuna kuvvet grubu $M_0 = 1$ iken X çarpılma momentinin birim değerini belirleyecektir.

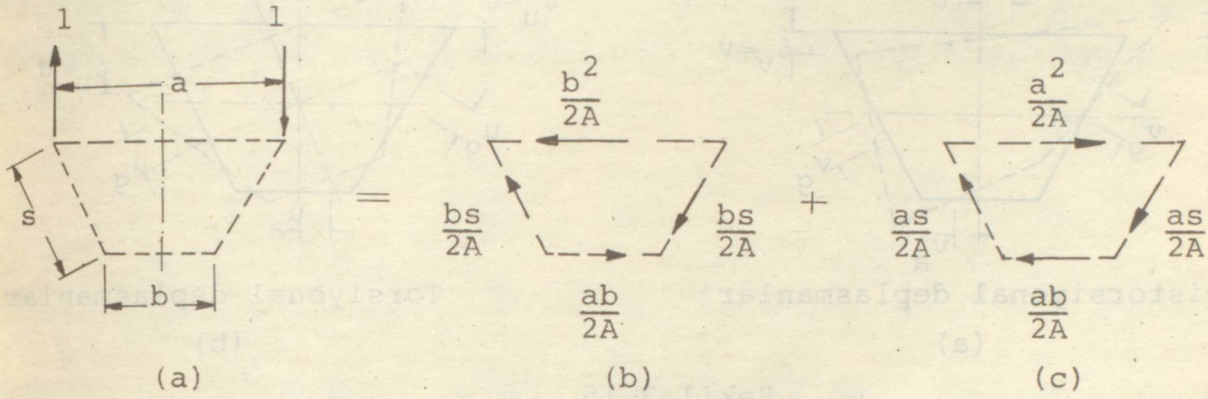


Şekil 3.13

3.5. GENELLEŞTİRİLMİŞ DEPLASMAN VE KUVVET DEĞİŞKENLERİ

-Genelleştirilmiş Kuvvetler:

Genelleştirilmiş kuvvet terimi doğrultusu ve rölatif şiddeti belirlenmiş kuvvetler grubunu göstermek için kullanılır. Sonra grub bir tek sayı ile tayin edilir.



Şekil 3.14

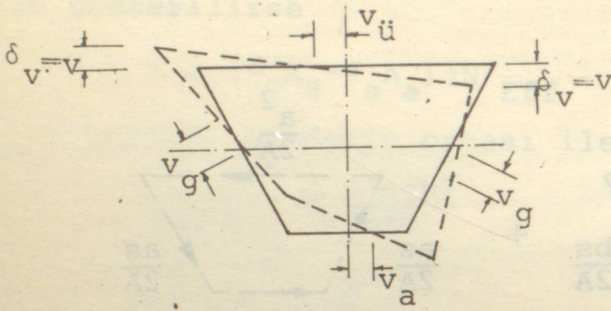
Şekil 3.14a da verilen birim burulma yükleri düşey olarak etkir ve bir düşey eksenli bir trapezin kenarları boyunca etkiyen (şekil 3.14 b ve c) iki düzlemsel kuvvet grubunun toplamına idantiktir. $2A$ kapalı trapez alanının iki katıdır. Şekil 3.14b'deki kuvvetler, herhangi köşedeki kuvvetlerin bileşkesi yerini alan kuvvetlerin bileşkesine eşit ve tamamen karşıt olduklarından kendi kendilerini dengelerler. Bunlar genelleştirilmiş distorsiyonal kuvvetlerin birim değerini belirleyecektir. Şekil 3.14c'deki kuvvetler 1.a burulma momentini temsil etmesi gerektiğinden kendi kendilerini dengelemezler. Bunlar, kenar boyunca

$$q = \frac{1 \cdot a}{2A} \quad (3.43)$$

torsiyonunun Bredth-Batho tarafından verilen saf torsiyonal kayma kuvvetlerinin intekre edilmesiyle elde edilen kuvvetlere eşittir. Bu genelleştirilmiş torsiyonal kuvvetlerin birim değerleri ile belirtilecektir.

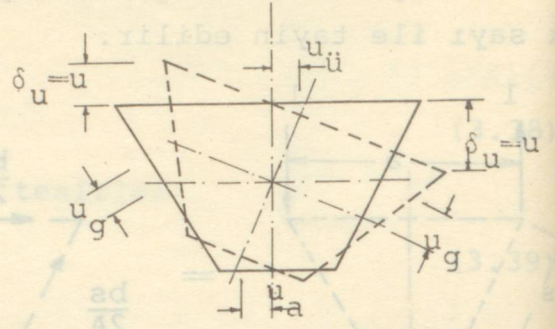
-Genelleştirilmiş Deplasmanlar:

Şekil 3.15 de verilen iki deplasman takımı kuvvet gruplarının doğrultusundadır. Yani deplasmanların doğrultuları bir trapez kenarları tarafından belirlenir. Distorsiyonal deplasmanlar, genelleştirilmiş bir distorsiyonal kuvvete tekabül eden kuvvetler ile çarpıldığında bir birim miktar iş yapar, fakat genelleştirilmiş bir torsiyonal kuvvet ile çarpıldığında toplamı sıfır olan bir iş meydana getiren deplasman grubudur. Belirlemenin son kısmı



Distorsiyonal deplasmanlar

(a)



Torsiyonal deplasmanlar

(b)

Şekil 3.15

$$2.s.v_g = a.v_u + b.v_a \quad (3.44)$$

bağıntısı ile verilir. Genelleştirilmiş bir distorsiyonal deplasmanı birim değeri, geçici bir birim genelleştirilmiş distorsiyonal kuvvet işlem gördüğünde birim miktarda iş meydana getiren distorsiyonal deplasmanlar grubu olarak belirlenecektir.

Torsiyonal deplasmanlar,

$$2.s.u_g = b.u_u + a.u_a \quad (3.45)$$

bağıntısı ile verilir ve bir genelleştirilmiş distorsiyonal kuvvet işlem yapıldığında sıfır miktarda bir iş meydana getirir. Fiziksel delerde bu açıklamalar enkesitin bir rijit cisim dönmesine tekâbul Genelleştirilmiş bir torsiyonal deplasmanın birim değeri geçici olarak bir birim genelleştirilmiş torsiyonal kuvvet ile işlem yapıldığında birim miktarda iş meydana getiren torsiyonal grup deplasmanı olarak belirlenir.

Tabii eksene göre simetrik trapez enkesitler gözönüne alınarak yüklemenin antimetrik şekli, birim genelleştirilmiş deplasmanın bu durumlarını tadil edebilecek ve yalnız yarım sistem veya enkesit üzerinde alındığında iş miktarının birim olabileceği hakkında bir fikir verilebilir. Belirtilen genelleştirilmiş deplasmanlar torsiyon ve distorsiyon ile sırayla u ve v olarak yazılabilecektir.

Bir trapez enkesitli sandığın belirlenen deplasmanları yanlarında alınmıştır. Sınır şartları şekil 4.14a'daki gibi birim vir kuvvet tatbik edilerek tamamen hesaplanabilen düşey yerdeğiştirme miktarları ile tayin edilir. Şekil 3.15'in yerdeğiştirme sistemleri üzeri

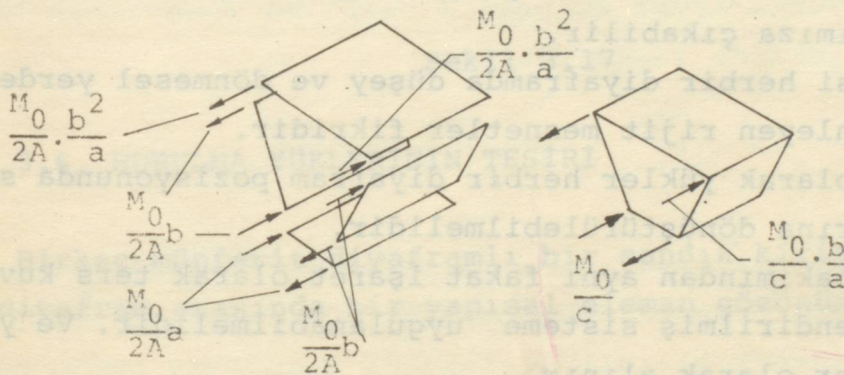
birim yüler ile meydana gelen iş şekil 3.14b ve c nin grupları içindeki yüklerin kısımlara ayrılmasıyla bulunur. Eğer δ_u torsiyonal deplasman sebebiyle hasıl olan üst köşenin düşey yerdeğiştirmesi ve δ_v distorsiyonal deplasman sebebiyle hasıl olan üst köşenin düşey yerdeğiştirmesi ise (şekil 3.15 deki gibi) dönmede kuvvet gruplarının gözönüne alınan vîrtüel işi

$$1 \cdot \delta_u = 1 \cdot u \quad \text{yani} \quad \delta_u = u \quad (3.46a)$$

$$1 \cdot \delta_v = 1 \cdot v \quad \text{yani} \quad \delta_v = v \quad (3.46b)$$

dir. Alt köşenin düşey yerdeğiştirmeleri de aynı şekilde bulunur.

-Genelleştirilmiş Çarpılma Momentleri:



Şekil 3.16

Kesitler üzerinde M_0 'ın birim değerinden meydana gelen çarpılma gerilme yayılımı genelleştirilmiş çarpılma momentini belirlemek için kullanılabilir, fakat bu enkesit detaylarına bağlı olan dezavantajlara haiz olacaktı. Köşeler arasındaki gerilmelerin lineer değişimi en basit bir alternatif olarak kabul edilir. Şekil 3.9 un momentlerinin birinci kısmı statik olarak eşdeğer kuvvetlerin (şekil 3.16) yerine tayin edilir. Sıra ile tesir eden kayma kuvvetleri dahil edildikten sonra hasıl olan gerilmeler bitişik kuvvetlerin (şekil 3.13b) tertip edilmesiyle değiştirilmeyecektir.

Bu dört boyuna kuvvet grubu $M_0 = 1$ olduğunda birim genelleştirilmiş çarpılma momentini belirleyecektir.

-Genelleştirilmiş Çarpılma Dönmesi:

Genelleştirilmiş çarpılma gerilmelerinin bir birim genelleştirilmiş çarpılma momenti ile üzerinde işlem yapıldığında yarım sistem zerinde bir birim değerde iş meydana getiren çarpılma deplasmanlarını bir bölümü olarak belirlenir.

Genelleştirilmiş çarpılma dönmesi ve momenti sırayla θ ve X olarak yazılmıştır.

-Yükleme:

Teorinin gelişimi yalnızca düğüm kuvvetleri pozisyonlarını göz önüne alır. Sistemlerin lineer teorisi süperpozisyon prensibinin tatbik edilebileceğini gösterir. Böylece değişik kısımlarda tatbik edilen bir yük takımları altında sistemin davranışı analiz edilir ve sonra çoklu yüklemeye ünitelerinin tesirleri temel çözümlerin birleştirilmesi ile hesaplanabilir.

Yukarıdaki uygulama ile diyaframlar arasında burulmaya sebep olan birkaç göz üzerindeki bir çizgisel yük veya bir münferit yük gibi durumlar karşımıza çıkabilir.

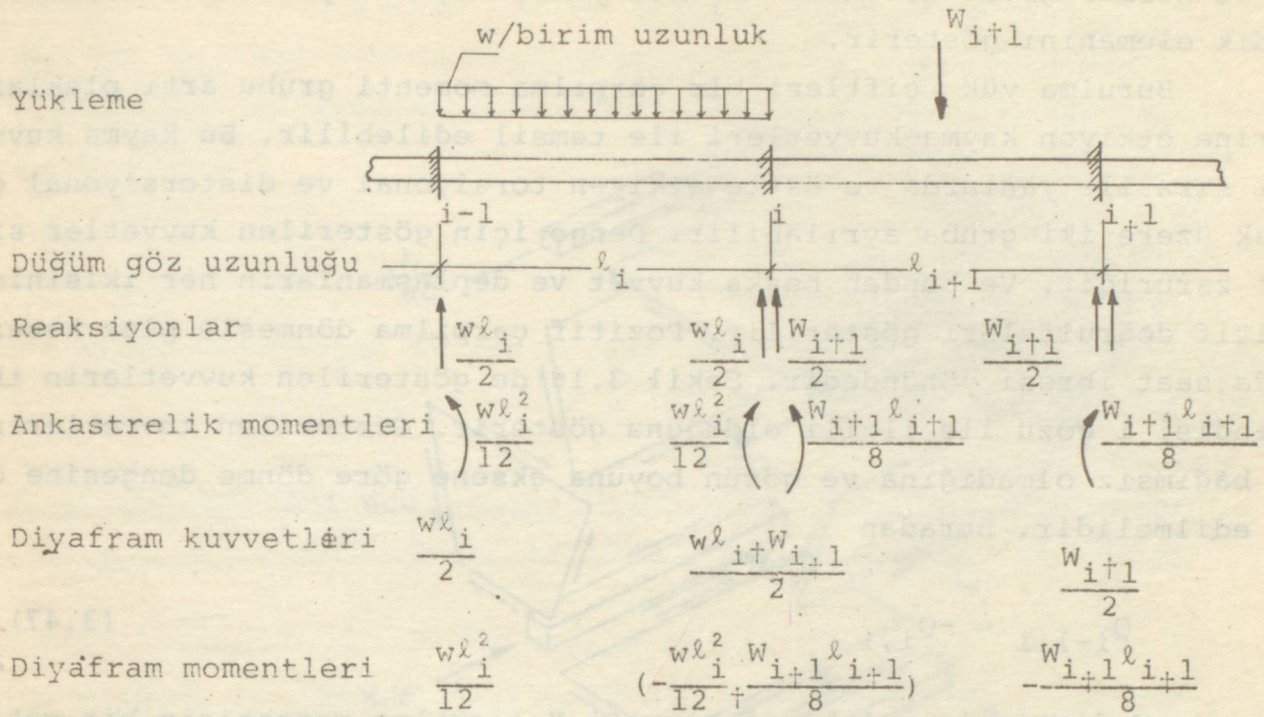
- Birincisi her bir diyaframda düşey ve dönmesel yer değiştirmeleri önleyen rijit mesnetler fikridir.
- İkinci olarak yükler her bir diyafram pozisyonunda sebep olduğu yük pozisyonlarına dönüştürülebilmelidir.
- Şiddet bakımından aynı fakat işaret olarak ters kuvvetler olarak mesnetlendirilmiş sisteme uygulanabilmelidir. Ve yük ve reaksiyonları da bu kuvvetler olarak alınır.

Not: Genellikle eşit uzunluk ve yüklemeye haiz gözler aynı gözler da aradaki diyaframlar üzerine eşit fakat ters işaretli momentler meydana getirir. Böyle bir durumda yük elemanına tekâbul eden vektör sıfır olur.

Sandık için diyafram tesiri sürekli diyafram ortamı ile temsil edilir. Bu durumda sonuç moment

$$w \cdot l^2 / 12$$

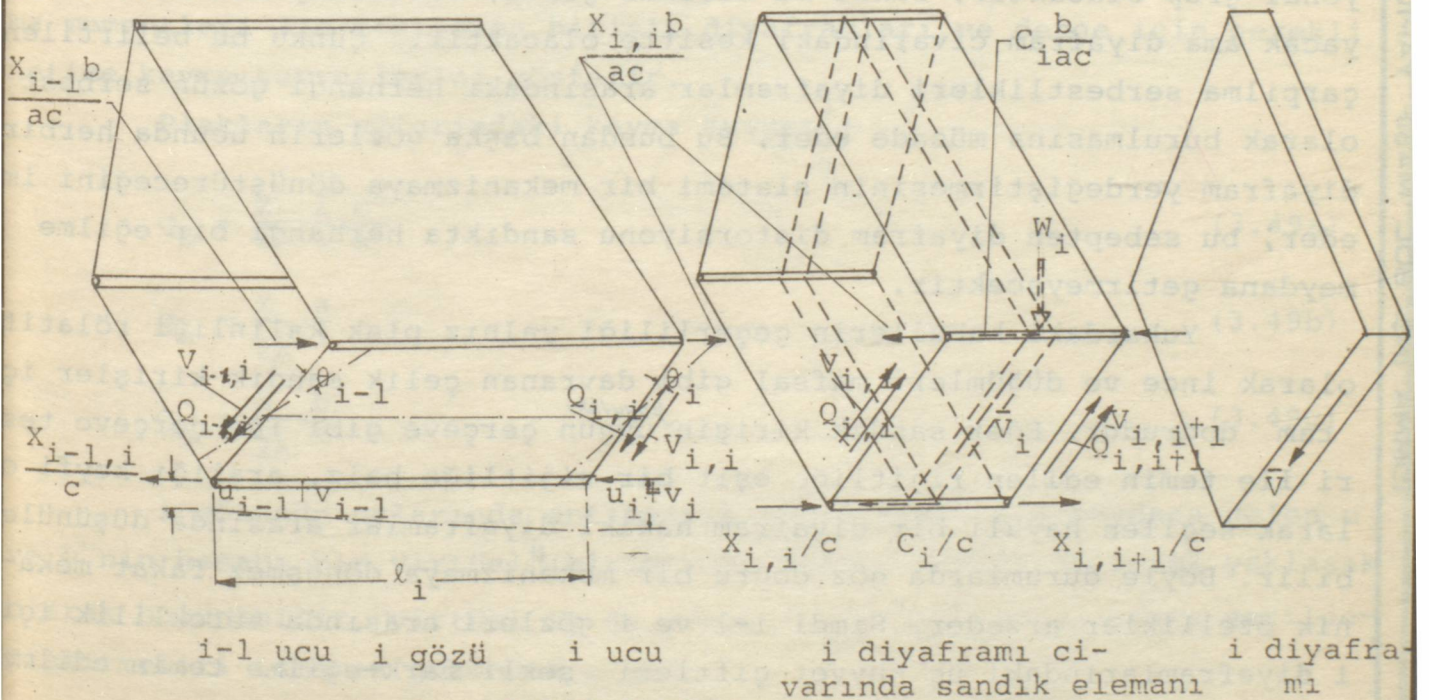
tatbik edilemez.



Şekil 3.17

3.6. BURULMA YÜKLERİNİN TESİRİ

Birkaç münferit diyaframalı bir sandık kirişin burulma problemi her bir diyafram arasında bir yapısal eleman gözönüne alınarak çözülebilir.



Şekil 3.18

Şekil 3.18 bir sandık kiriş gözünü, gözler arasındaki bir diyafram ve herbir gövde üstündeki W_i ile yüklenmiş i diyaframı civarında sandık elemanını gösterir.

Burulma yük çiftleri bir çarpılma momenti grubu artı plaklar üzerine etkiyen kayma kuvvetleri ile temsil edilebilir. Bu kayma kuvvetleri sıra ile yanlarda ve üstte etkiyen torsiyonal ve distorsiyonal olmak üzere iki gruba ayrılabilir. Denge için gösterilen kuvvetler sistemi zaruridir. Ve bundan başka kuvvet ve deplasmanların her ikisinin pozitif doğrultuları gösterilir. Pozitif çarpılma dönmesi plak kenarında saat ibresi yönündedir. Şekil 3.18 de gösterilen kuvvetlerin i ci indisi i gözü ile ilgili olduğunu gösterir. Gösterilen kuvvetlerin hep bağımsız olmadığına ve gözün boyuna eksene göre dönme dengesine katkı edilmelidir. Buradan

$$Q_{i-1,i} = -Q_{i,i} \quad (3.47)$$

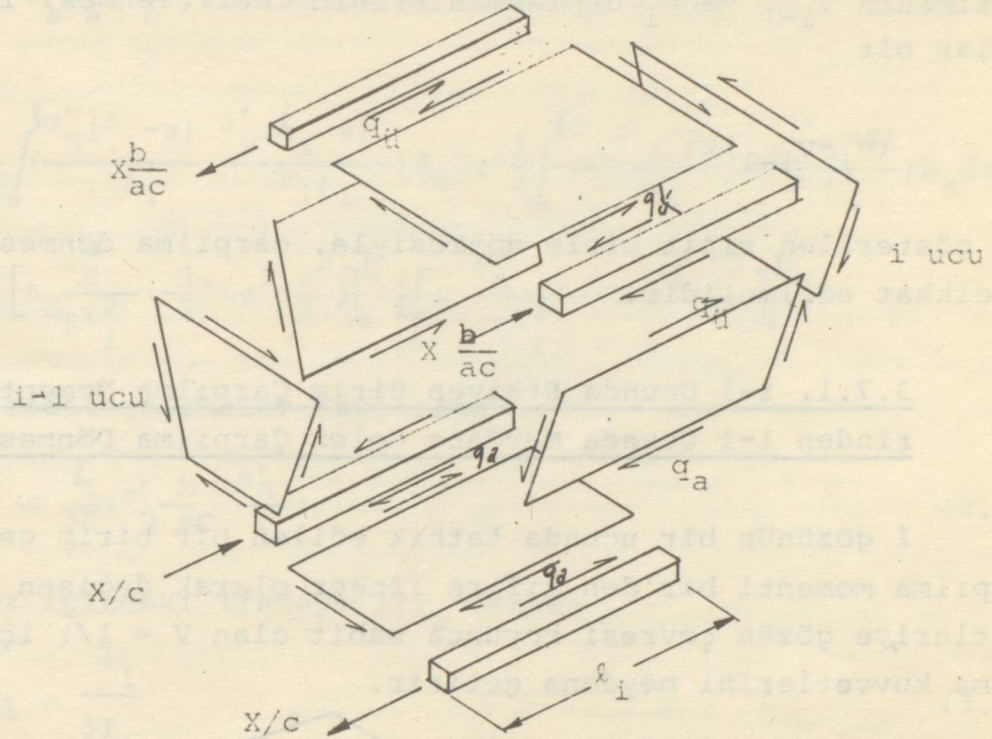
bulunur. V distorsiyonal kayma kuvveti X çarpılma momentinin bir netisidir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$V_{i-1,i} = -V_{i,i} = -(X_{i-1,i} + X_{i,i})/l_i \quad (3.48)$$

Rijit olan herbir diyaframda çarpılma fikri gözönüne alınmayabilir. Burulma yükleri diyafram pozisyonlarında tatbik edildiğinde diyafram civarındaki sandık bitişik gözlerdeki uygunluğu temin eden torsiyonal grup olacaktır, fakat bu kısımda gözde, distorsiyonal kuvvet olmayacak ama diyafram civarındaki kesitte olacaktır. Çünkü bu belirtilen çarpılma serbestlikleri diyaframlar arasındaki herhangi gözün serbest olarak burulmasına müsaade eder. Bu bundan başka gözlerin ucunda herbir diyafram yerdeğiştirmesinin sistemi bir mekanizmaya dönüştüreceğini gösterir; bu sebepten diyafram distorsiyonu sandıkta herhangi bir eğilme meydana getirmeyecektir.

Yukardaki kabullerin geçerliliği yalnız plak kalınlığı rölatif olarak ince ve düğümleri mafsalsal gibi davranan çelik sandık kirişler için tam doğrudur. Eğer sandık kirişin ^{boyutları} uygun çerçeve gibi ise çerçeve temini ile temin edilen rijitliğe eşit bir rijitliğe haiz, aralığı keyfi olarak seçilen hayali bir diyafram hakiki diyaframlar arasında düşünülebilir. Böyle durumlarda göz doğru bir mekanizmaya dönüşmez fakat mekanik özellikler arzeder. Şimdi i-1 ve i gözleri arasında süreklilik i diyaframlarındaki uç kuvvet çiftleri şekli fark-eğilme temin edilmesi gereği ile meydana gelir.

3.7. UÇ KUVVETLER VE DEPLASMANLAR ARASINDAKİ BAĞINTI



Şekil 3.19

Yukarıdaki şekil i gözünün açılmış şeklini ve i ucunda X çarpılma momentleri ile etkilenen bitişik diyaframları ve denge için gerekli netice kayma kuvvetlerini gösterir.

Plakların uçlarındaki kayma kuvveti:

$$q_u = \frac{X}{2A} \times \frac{1}{l} \times \frac{b^2}{a} \quad (3.49a)$$

$$q_a = \frac{X}{2A} \times \frac{a}{l} \quad (3.49b)$$

$$q_g = \frac{X}{2A} \times \frac{b}{l} \quad (3.49c)$$

i gözünün uçlarında antimetrik yük sistemi ile meydana gelen u ve v nin hesabı bir virtüel iş (birim yük) metodu tatbik edilerek yaklaşık olarak bulunabilir, virtüel iş de gerekli olan normal ve kayma şekil değiştirmelerini tamamen gözönüne alınır.

Bundan başka hesaplanan çarpılma momentleri her bir uçta kendilerini dengelerler.

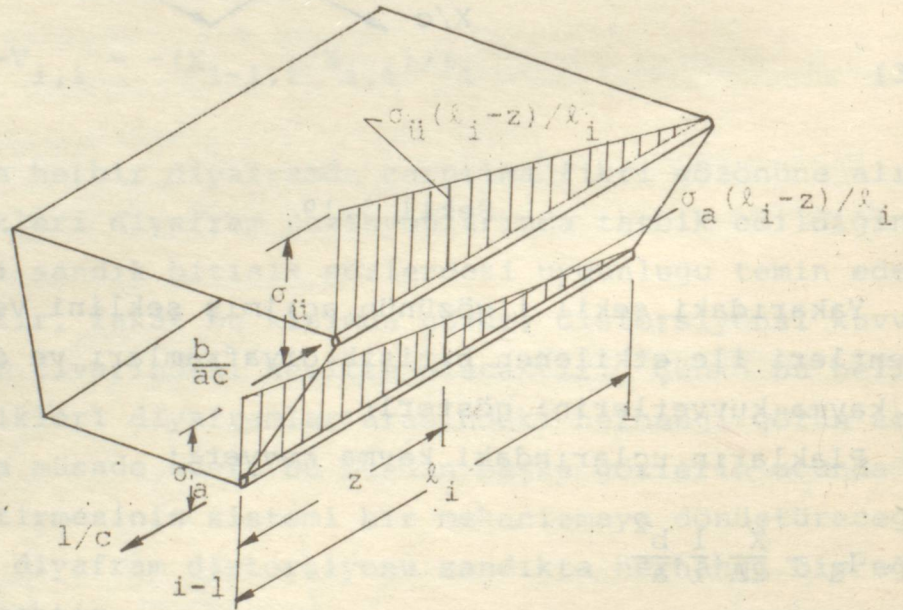
Göz diyaframsız olduğunda, mekaniksel serbestlik ile uçlarda bozulmanın v_{i-1} ve v_i deplasmanlarının belirlenmesi ile çözümlenebilir. Bunlar bir

$$(v_i - v_{i-1})/\ell$$

ile gösterilen rijit cisim dönmesiyle, çarpılma dönmesine yardım etme ne dikkat edilmelidir.

3.7.1. i-1 Ucunda Etkiyen Birim Çarpılma Momentinin Eğilme Torklarından i-1 Ucunda Meydana Gelen Çarpılma Dönmesi ($\theta_{i-1,i-1}$):

i gözünün bir ucunda tatbik edilen bir birim genelleştirilmiş çarpılma momenti bir'den sıfıra lineer olarak değişen iç çarpılma momentleriye gözün çevresi boyunca sabit olan $V = 1/\ell$ iç distorsiyonel kayma kuvvetlerini meydana getirir.



Şekil 3.20

i-1 ucundaki bir birim çarpılma momentinden meydana gelen çarpılma dönmesi ($\theta_{i-1,i-1}$), bu uçta bir birim virtüel çarpılma momenti tatbik edilerek üst ve alt çarpılma gerilmeleri (σ'_u, σ'_a) hesaplanabilir.

Birim yük metodu ile

$$1.\theta_{i-1,i-1} = \int (\text{sistemde birim yükten meydana gelen virtüel gerilme}) \times (\text{sistemde hakiki şekildeğiştirme}).dv \quad (3.50)$$

ve $\sigma'_{uu} = \frac{b}{a.c}$ ve $\sigma'_{aa} = \frac{1}{c}$ kullanılarak buradaki yarım izafi dönme bulunabilir.

$$\begin{aligned} \theta_{i-1,i-1} &= \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left(\frac{\sigma'_{uu}(l_i-z)}{l_i} \times \frac{\sigma'_{uu}(l_i-z)}{E.l_i} \right) A_u dz + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left(\frac{\sigma'_{aa}(l_i-z)}{l_i} \times \frac{\sigma'_{aa}(l_i-z)}{E.l_i} \right) A_a dz \\ &= \frac{1}{2} \left[A_u \frac{\sigma'^2_{uu}}{E l_i^2} \left(-\frac{1}{2} 2 l_i z^2 + \frac{z^3}{3} \right) \right]_0^{l_i} + \frac{1}{2} \left[A_a \frac{\sigma'^2_{aa}}{E l_i^2} \left(-\frac{1}{2} 2 l_i z^2 + \frac{z^3}{3} \right) \right]_0^{l_i} \end{aligned}$$

buradan gerekte sadeleştirmeler yapılarak

$$\theta_{i-1,i-1} = \frac{l_i}{3E} \left(\sigma'_{uu} \frac{b}{a.c} + \sigma'_{aa} \frac{1}{c} \right) \quad (3.51)$$

bulunur. Parantez içindeki ifadeye $1/I_1$ dersek

$$E\theta_{i-1,i-1} = \frac{l_i}{3I_1} \quad (3.51a)$$

elde edilir.

Not: I_1 , atalet momenti boyutuna haizdir ve sadece çarpılma momentlerini bulmak için kullanılabilir. Çarpılma gerilmelerini bulmak için kullanılamaz.

3.7.2. i-1 Ucunda Etkiyen Birim Çarpılma Momentinin Eğilme Tesirinden i Ucunda Meydana Gelen Çarpılma Dönmesi ($\theta_{i,i-1}$):

Yukarıdaki bağıntılara benzer şekilde

$$E\theta_{i,i-1} = - \frac{l_i}{6I_1} \quad (3.52)$$

elde edilir.

3.7.3. i-1 Ucunda Etkiyen Birim Çarpılma Momenti ile İlgili Distorsiyonel Şekildeğiştirmenin i-1 Ucunda Meydana Getirdiği Çarpılma Dönmesi ($\theta_{i-1,i-1}$):

Daha önce de belirtildiği gibi, kayma şekildeğiştirmesinden meydana gelen, herhangi enkesitteki kayma kuvveti şiddetinin köşeler

arasında sabit olduğu kabul edilir. Kayma şekildeğiştirmesinin meydana getirdiği çarpılma dönmesi yarım enkesit üzerinde birim yük metodu ile hesaplanır. Şekil 3.19 plak uçlarında kayma kuvveti şiddetini gösterir

$$1.\theta_{i-1,i-1} = \int (sistemde birim yükten meydana gelen virtüel gerilme (sistemdeki hakiki şekildeğiştirme).dv \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\int_0^l \left(\frac{b^2}{l_i \cdot 2A \cdot at_{\bar{u}}} \times \frac{b^2}{l_i \cdot 2A \cdot at_{\bar{u}}} G \right) a \cdot t_{\bar{u}} dz \right. \\ & + \int_0^l \left(\frac{a}{l_i \cdot 2At_a} \times \frac{a}{l_i \cdot 2At_a} G \right) b t_a dz \\ & \left. + \int_0^l \left(\frac{b}{l_i \cdot 2At_g} \times \frac{b}{l_i \cdot 2At_g} G \right) 2st_g dz \right] \end{aligned}$$

değerler yerine konularak

$$\theta_{i-1,i-1} = \frac{1}{8G} \left(\frac{b^4 l_i}{l_i^2 A^2 at_{\bar{u}}} + \frac{a^2 b l_i}{l_i^2 A^2 t_a} + \frac{b^2 2sl_i}{l_i^2 A^2 t_g} \right)$$

gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$E\theta_{i-1,i-1} = \frac{1}{8} \times \frac{E}{G} \times \frac{1}{l_i A^2} \left(\frac{b^4}{at_{\bar{u}}} + \frac{a^2 b}{t_a} + \frac{2sb^2}{t_g} \right) \quad (3.54)$$

elde edilir. Burada

$$f^* = \frac{G \times a}{E \times b} \times \frac{8A^2}{\frac{b^3}{t_{\bar{u}}} + \frac{a^3}{t_a} + \frac{2abs}{t_g}} \quad (3.55)$$

ile gösterilirse

$$E\theta_{i-1,i-1} = \frac{1}{l_i f^*} \quad (3.56)$$

bulunur.

3.7.4. i-1 Ucunda Etikiyen Birim Çarpılma Momenti ile İlgili torsiyonal Kayma Şekildeğiştirmesinin i Ucunda Meydana Getiren Çarpılma Dönmesi:

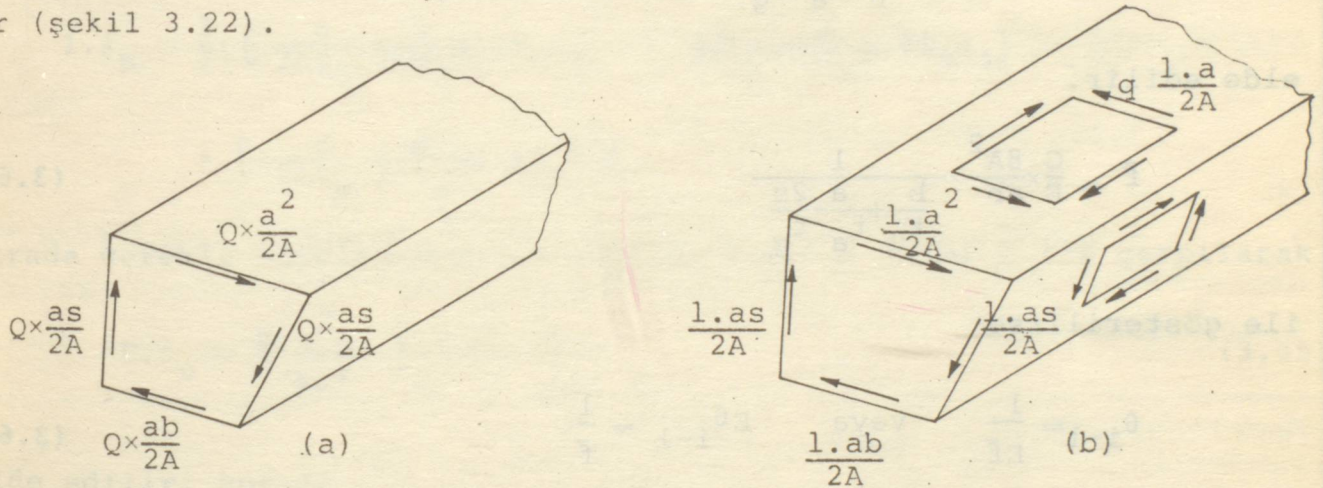
Yukarıda belirlendiği gibi bulunur. Yalnız burada integral 0 dan a yerine 0 dan -a ya kadar yapılmalıdır. Bu durumda aşağıdaki değer elde edilir.

$$E\theta_{i,i-1} = + \frac{1}{\ell_i f} \quad (3.57)$$

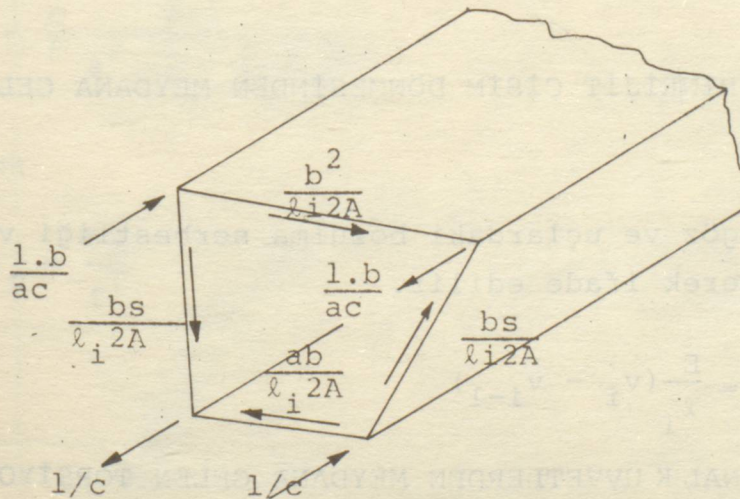
3.7.5. i-1 Ucunda Etkiyen Genelleştirilmiş Torsiyonal Kuvvetlerin i Gözünde Meydana Getirdiği Çarpılma Dönmesi:

Genelleştirilmiş torsiyonal kuvvetler kendi kendilerini dengeleyemezler. Burada gözün bir ucundaki torsiyonal kuvvetler diğer ucundaki torsiyonal kuvvetlere ve ters olmalıdır. Böylece denge sağlanır. Bu durum i gözünün izafi dönmesini karşılar.

Şekil 3.21 sandığın çevresinde gözün bir ucunda tatbik edilen birim torsiyonal kuvvetlerden meydana gelen kayma kuvvetlerini gösterir. Birleştirilmiş çarpılma, torsiyonda olduğu gibi uç deplasmanları meydana getiren bir virtüel birim çarpılma momenti tatbik edilerek belirlenebilir (şekil 3.22).



Şekil 3.21



Şekil 3.22

$$1.\theta_{i-1} = \int (\text{sistemde birim yükten meydana gerilmeler}) \times (\text{sistemdeki gerçek şekildeğişmeler}).dv \quad (3.58)$$

$$= \int_0^l \left(\frac{b^2}{2\ell_i A a t_{\bar{u}}} \times \frac{1.a}{2A t_{\bar{u}} G} \right) a t_{\bar{u}} dz + \int_0^l \left(\frac{a.b}{2\ell_i A b t_a} \times \frac{1.a}{2A t_a G} \right) b t_a dz$$

$$- \int_0^l \left(\frac{b}{2\ell_i A t_g} \times \frac{1.a}{2A G t_a} \right) 2st_g dz$$

integral alınıp gerekli işlemler yapılarak

$$\theta_{i-1} = \frac{1}{8A^2 G} \left(\frac{b^2 a}{t_{\bar{u}}} + \frac{a^2 b}{t_a} - \frac{2abs}{t_g} \right) \quad (3.59)$$

bulunur. Her iki taraf E ile çarpılır ve parantez içindeki ortak ab parantez dışına çıkarılarak

$$E\theta_{i-1} = \frac{E}{G} \times \frac{ab}{8A^2} \left(\frac{b}{t_{\bar{u}}} + \frac{a}{t_a} - \frac{2s}{t_g} \right) \quad (3.60)$$

elde edilir.

$$\bar{f} = \frac{G}{E} \times \frac{8A^2}{ab} \times \frac{1}{\frac{b}{t_{\bar{u}}} + \frac{a}{t_a} - \frac{2s}{t_g}} \quad (3.61)$$

ile gösterilirse

$$\theta_{i-1} = \frac{1}{E\bar{f}} \quad \text{veya} \quad E\theta_{i-1} = \frac{1}{\bar{f}} \quad (3.62)$$

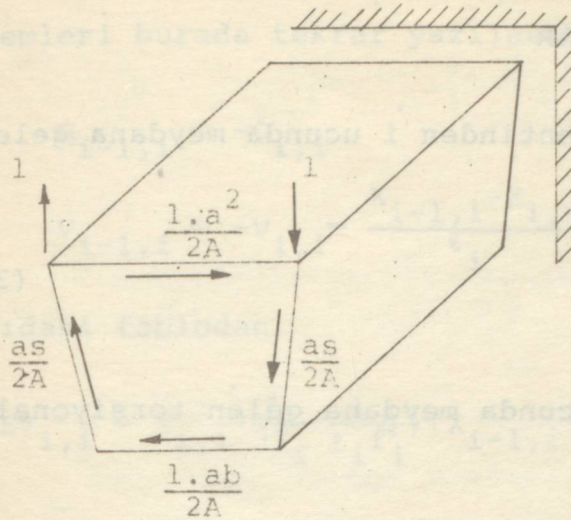
elde edilir.

3.8. GÖVDELERİN RİJİT CİSİM DÖNMESİNDEN MEYDANA GELEN ÇARPILMA DÖNMESİ

Diyaframsız göz ve uçlardaki bozulma serbestliği v_{i-1} ve v_i lasmanları belirlenerek ifade edilir.

$$E\theta_i = E\theta_{i-1} = \frac{E}{\ell_i} (v_i - v_{i-1}) \quad (3.63)$$

3.9. TORSİYONAL KUVVETLERDEN MEYDANA GELEN TORSİYONAL DEPLASMANLAR



Şekil 3.23

Gözün dönmeye karşı sabit olması esassından uçtaki u deplasmanı belirlenebilir; ve bu sebepten sadece u olarak belirlenen $u_i - u_{i-1}$ hesaplamak mümkündür.

$$1.\delta_u = \frac{1}{2} \int (\text{sistemde birim yükten meydana gelen virtüel gerilmeler}) \times (\text{sistemdeki gerçek şekildeğiştirmeler}).dv \quad (3.64)$$

$$1.\delta_u = \frac{1}{2} \left(\left[\left(\frac{a}{2At_u} \times \frac{a}{2At_u G} \right) at_u \ell_i \right] + \left[\left(\frac{a}{2At_a} \times \frac{a}{2At_a G} \right) bt_a \ell_i \right] + \left[\left(\frac{a}{2At_g} \times \frac{a}{2At_g G} \right) 2st_g \ell_i \right] \right)$$

Burada gerekli sadeleştirmeler yapıp her iki taraf E ile çarpılarak

$$E.\delta_u = \frac{E}{G} \times \frac{a^2}{8A^2} \left(\frac{a}{t_u} + \frac{b}{t_a} + \frac{2s}{t_g} \right) \ell_i \quad (3.65)$$

elde edilir. Burada

$$f^T = \frac{G}{E} \times \frac{8A^2}{a^2 \left(\frac{a}{t_u} + \frac{b}{t_a} + \frac{2s}{t_g} \right)} \quad (3.66)$$

kullanılarak

$$E.\delta_u = \frac{\ell_i}{f^T} \quad (3.67)$$

bulunur.

3.10. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇARPILMA MOMENTLERİNDEN MEYDANA GELEN TORSİYONALDEPLASMANLAR

Son olarak X_i çarpılma momentinden i ucunda meydana gelen torsiyonel deplasmanlar

$$E \cdot u_{i,i} = \frac{X_i}{\bar{f}} \quad (3.68)$$

ve X_{i-1} çarpılma momentinden $i-1$ ucunda meydana gelen torsiyonel deplasman

$$E \cdot u_{i-1,i} = -\frac{X_{i-1}}{\bar{f}} \quad (3.69)$$

olarak yazılabilir. Netice olarak izafi torsiyonel deplasmanlar

$$E(u_{i,i} - u_{i-1,i}) = \frac{1}{\bar{f}}(X_{i,i} + X_{i-1,i}) \quad (3.70)$$

olarak verilir.

3.11. MATRİS FORMÜLLERİNİN ÇIKARILMASI

i gözünün her bir ucundaki çarpılma dönmeleri ve izafi torsiyonel deplasmanlar $\bar{f}, f^*, f^T$ ve I_i parametreleri kullanılarak aşağıda aşağıda özet olarak verilmiştir.

Genelleştirilmiş Kuvvetler	Tesir	$E(u_i - u_{i-1})$	$E\theta_{i-1,i}$	$E\theta_{i,i}$
X_i çarpılma momentleri	Eğilme		$-X_i \frac{\ell_i}{16I_i}$	$X_i \frac{\ell_i}{3I_i}$
	Distorsiyonel kayma şekil-değiştirmesi	$\frac{1}{\bar{f}}(X_i + X_{i-1})$	$X_i \frac{1}{\ell_i f^*}$	$X_i \frac{1}{\ell_i f^*}$
X_{i-1} çarpılma momentleri	Distorsiyonel kayma şekil-değiştirmesi		$X_{i-1} \frac{1}{\ell_i f^*}$	$X_{i-1} \frac{1}{\ell_i f^*}$
	Eğilme		$X_{i-1} \frac{\ell_i}{3I_i}$	$-X_{i-1} \frac{\ell_i}{6I_i}$
Q_i torsiyon		$Q_i \ell_i / f^T$	$Q_i / \bar{f}$	$Q_i / \bar{f}$
uçlardaki diyaf-ram fleksibilitesi	rijit cisim dönmesi		$\frac{E}{\ell_i}(v_i - v_{i-1})$	$\frac{E}{\ell_i}(v_i - v_{i-1})$

Bütün denklemlerin birarada gözükmesi yönünden (3.47) ve (3.48) denklemleri burada tekrar yazılacak ve yeni denklem numarası verilecekt.

$$Q_{i-1,i} = -Q_{i,i} \quad (3.71)$$

$$V_{i-1,i} = -V_{i,i} = \frac{X_{i-1,i} + X_{i,i}}{\ell_i} \quad (3.72)$$

yukarıdaki tablodan

$$E\theta_{i,i} = X_{i,i} \left(\frac{\ell_i}{3I_i} + \frac{1}{\ell_i f_i^*} \right) + X_{i-1,i} \left(-\frac{\ell_i}{6I_i} + \frac{1}{\ell_i f_i^*} \right) + \frac{Q_{i,i} + E}{\bar{f}_i} (v_i - v_{i-1}) \quad (3.73)$$

$$E\theta_{i-1,i} = X_{i,i} \left(-\frac{\ell_i}{6I_i} + \frac{1}{\ell_i f_i^*} \right) + X_{i-1,i} \left(\frac{\ell_i}{3I_i} + \frac{1}{\ell_i f_i^*} \right) + \frac{Q_{i,i} + E}{\bar{f}_i} (v_i - v_{i-1}) \quad (3.74)$$

$$E(u_i - u_{i-1}) = \frac{Q_{i,i} \ell_i}{f_i^T} + \frac{1}{\bar{f}_i} (X_{i,i} + X_{i-1,i}) \quad (3.75)$$

yazılabilir.

Yukarıdaki denklemleri kolaylık bakımından iki göz için yazalım.

Burada

$$\bar{A} = \left(\frac{\ell_i}{3I_i} + \frac{1}{\ell_i f_i^*} \right) \quad \text{ve} \quad \bar{B} = \left(-\frac{\ell_i}{6I_i} + \frac{1}{\ell_i f_i^*} \right) \quad (3.75)$$

olarak gösterelim. Bu durumda

$$\bar{A} - \bar{B} = \frac{\ell_i}{2I_i} \quad (3.76)$$

olur. Bunların değerleri (3.73) ve (3.74) denklemlerinde yerine konularak

$$E\theta_2 = \bar{A}X_2 + \bar{B}X_1 + \frac{Q_2 + E}{\bar{f}} (v_2 - v_1) \quad (3.77)$$

$$E\theta_1 = \bar{B}X_2 + \bar{A}X_1 + \frac{Q_2 + E}{\bar{f}} (v_2 - v_1) \quad (3.78)$$

$$E(u_2 - u_1) = \frac{Q_2 \ell_i}{f^T} + \frac{1}{\bar{f}} (X_1 + X_2) \quad (3.79)$$

yazılabilir. (3.78) denklemi (3.77) den çıkarılarak

$$E(\theta_2 - \theta_1) = X_2(\bar{A} - \bar{B}) - X_1(\bar{A} - \bar{B})$$

$$= (\bar{A} - \bar{B})(X_2 - X_1)$$

$$X_2 = \frac{E(\theta_2 - \theta_1)}{(\bar{A} - \bar{B})} + X_1$$

veya

$$X_2 = \frac{E(\theta_2 - \theta_1) 2I_1}{l} + X_1 \quad (3.80)$$

olarak bulunur. Bu değer (3.77) denkleminde yerine konularak

$$E\theta_2 = \bar{A} \left(\frac{E(\theta_2 - \theta_1) 2I_1}{l} + X_1 \right) + \bar{B} X_1 + \frac{Q_2}{\bar{f}} + \frac{E(v_2 - v_1)}{l}$$

$\bar{A}$ ve $\bar{B}$ nin değerleri yerlerine konularak

$$E\theta_2 - X_1 \left(\frac{2}{6I} + \frac{2}{lf^*} \right) + \frac{2E\theta_2}{3} + \frac{2EI_1\theta_2}{2f^*} + \frac{2E\theta_1}{3} + \frac{2EI_1\theta_1}{2f^*} + \frac{Q_2}{f} + \frac{E(v_2 - v_1)}{l} \quad (3.81)$$

yazılır. Q_2 nin değeri (3.81) denkleminde hesaplanarak

$$Q_2 = -X_1 \left(\frac{\bar{f}}{6I} + \frac{2\bar{f}}{lf^*} \right) + \frac{f\bar{f}\theta_2}{3} - \frac{2EI\bar{f}\theta_2}{2f^*} + \frac{2E\bar{f}\theta_1}{3} + \frac{2EI\bar{f}\theta_1}{2f^*} - \frac{E\bar{f}(v_2 - v_1)}{l} \quad (3.82)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.79) denkleminde X_2 nin değeri yerine konularak

$$Q_2 = \frac{E(u_2 - u_1)f^T}{l} - \frac{f^T}{lf} (2X_1 + \frac{E(\theta_2 - \theta_1) 2I}{l}) \quad (3.83)$$

hesaplanır. (3.83) ve (3.82) denklemleri eşitlenerek

$$X_1 \left(-\frac{2f^T}{lf} + \frac{lf}{6I} + \frac{2\bar{f}}{lf^*} \right) = \frac{E(u_2 - u_1)f^T}{l} + \frac{E(\theta_2 - \theta_1) 2If^T}{lf} + \frac{E\bar{f}\theta_2}{3} - \frac{2E\bar{f}I\theta_2}{2f^*}$$

$$- \frac{2E\bar{f}\theta_1}{3} + \frac{2EI\bar{f}\theta_1}{2f} - \frac{E\bar{f}(v_2 - v_1)}{l} \quad (3.84)$$

elde edilir. Her iki taraf $\frac{2}{E\bar{f}}$ ile çarpılır ve

$$X_1 = \frac{1}{\frac{lf}{3I} + \frac{4}{lf^*} - \frac{4f^T}{lf^2}} \quad (3.85)$$

olarak belirlenerek (3.84) denklemi

$$\frac{X_1}{E\xi} = \theta_2 \left(\frac{4If^T}{\ell^2 \bar{f}^2} + \frac{2}{3} \frac{4I}{\ell^2 \bar{f}^*} \right) + \theta_1 \left(\frac{4}{3} + \frac{4I}{\ell^2 \bar{f}^*} - \frac{4If^T}{\ell^2 \bar{f}^2} \right) - \frac{2f^T}{\ell \bar{f}} (u_2 - u_1) - \frac{2}{\ell} (v_2 - v_1) \quad (3.86a)$$

veya

$$\frac{X_1}{E} = \theta_2 \left(\xi - \frac{I}{\ell} \right) + \theta_1 \left(\xi + \frac{I}{\ell} \right) - \frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} (u_2 - u_1) - \frac{2\xi}{\ell} (v_2 - v_1) \quad (3.86b)$$

şeklini alır. Denklem yeniden düzenlenerek

$$\begin{aligned} \frac{X_1}{E} = & \frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} u_1 + \frac{2\xi}{\ell} v_1 + \left(\xi + \frac{I}{\ell} \right) \theta_1 \\ & - \frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} u_2 - \frac{2\xi}{\ell} v_2 + \left(\xi - \frac{I}{\ell} \right) \theta_2 \end{aligned} \quad (3.87)$$

elde edilir.

Cözün boyuna doğrultudaki eksenine göre dönme dengesinden (3.71)

$$Q_1 = -Q_2$$

yazılır. Mamafih, (3.87) denklemi

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{E} = & \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}^2} - \frac{f^T}{\ell} \right) u_1 + \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}} \right) v_1 + \left(\frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} \right) \theta_1 \\ & - \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}^2} - \frac{f^T}{\ell} \right) u_2 - \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}} \right) v_2 + \left(\frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} \right) \theta_2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde (3.72) denkleminde

$$v_1 = \frac{X_1 + X_2}{\ell} \quad (3.89)$$

yazılır. Her iki taraf E ile bölünür ve X_2 nin yukarıdaki değeri yerine konularak

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{E} = & \frac{1}{E\ell} \left(2X_1 + \frac{E(\theta_2 - \theta_1)2I}{\ell} \right) \\ = & \frac{2X_1}{E\ell} + \frac{(\theta_2 - \theta_1)2I}{\ell^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan başka X_1/E nin değeri (3.87) den yerine konulup sadeleştirme yapılarak

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{E} &= \frac{4f^T}{\ell^2 \bar{f}} u_1 + \frac{4\xi}{\ell^2} v_1 + \frac{2\xi}{\ell} \theta_1 \\ &\quad - \frac{4f^T}{\ell^2 \bar{f}} \xi u_2 - \frac{4\xi}{\ell^2} v_2 + \frac{2\xi}{\ell} \theta_2 \end{aligned} \quad (3.90)$$

yazılabilir.

$$\beta^* = \xi - \frac{I}{\ell} \quad (3.91)$$

ile belirlenir ve $i-1$ ve i göz uçları için genelleştirilerek (ikinci disin i gözünü gösterdiği hatırd tutulmalı) aşağıdaki denklem takımını elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{Q_{i-1,i}}{E} &= u_{i-1} \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}^2} + \frac{f^T}{\ell} \right) + v_{i-1} \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}} \right) + \theta_{i-1} \left(\frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} \right) \\ &\quad - u_i \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}^2} + \frac{f^T}{\ell} \right) - v_i \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}} \right) + \theta_i \left(\frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{i-1,i}}{E} &= u_{i-1,i} \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}} \right) + v_{i-1} \left(\frac{4\xi}{\ell^2} \right) + \theta_{i-1} \left(\frac{2\xi}{\ell} \right) \\ &\quad - u_i \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}} \right) - v_i \left(\frac{4\xi}{\ell^2} \right) + \theta_i \left(\frac{2\xi}{\ell} \right) \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} X_{i-1,i} &= u_{i-1} \left(\frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} \right) + v_{i-1} \left(\frac{2\xi}{\ell} \right) + \theta_{i-1} \left(\xi + \frac{I}{\ell} \right) \\ &\quad - u_i \left(\frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} \right) - v_i \left(\frac{2\xi}{\ell} \right) + \theta_i (\beta^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_i}{E} &= -u_{i-1} \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}^2} + \frac{f^T}{\ell} \right) - v_{i-1} \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}} \right) - \theta_{i-1} \left(\frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} \right) \\ &\quad + u_i \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}^2} + \frac{f^T}{\ell} \right) + v_i \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}} \right) + \theta_i \left(\frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_i}{E} &= -u_{i-1} \left(\frac{4f^T \xi}{\ell^2 \bar{f}} \right) - v_{i-1} \left(\frac{4\xi}{\ell^2} \right) - \theta_{i-1} \left(\frac{2\xi}{\ell} \right) \\ &\quad + u_i \left(\frac{2f^T \xi}{\ell^2} \right) - v_i \left(\frac{4\xi}{\ell^2} \right) + \theta_i \left(\frac{2\xi}{\ell} \right) \end{aligned} \quad (3.92b)$$

$$\frac{X_i}{E} = u_{i-1} \left(\frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} \right) + v_{i-1} \left(\frac{2\xi}{\ell} \right) + \theta_{i-1} (\beta^*)$$

$$-u_i \left(\frac{2f^T \xi}{\ell \bar{f}} \right) - v_i \left(\frac{2\xi}{\ell} \right) + \theta_i \left(\xi + \frac{I}{\ell} \right)$$

i gözünün uçlarındaki kuvvetler ve deplasmanlar arasındaki bağıntıyı gösteren (3.92) denklemleri matris biçiminde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} Q \\ V \\ X \end{bmatrix}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \left(\frac{4\xi}{\ell^2} f^2 + \frac{f^T}{\ell} \right) & \frac{4\xi}{\ell^2} f & \frac{2\xi}{\ell} f \\ \frac{4\xi}{\ell^2} f & \frac{4\xi}{\ell^2} & \frac{2\xi}{\ell} \\ \frac{2\xi}{\ell} f & \frac{2\xi}{\ell} & \left(\frac{I}{\ell} + \xi \right) \end{bmatrix}_i \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_{i-1}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\left(\frac{4\xi}{\ell^2} f^2 + \frac{f^T}{\ell} \right) & -\frac{4\xi}{\ell^2} f & \frac{2\xi}{\ell} f \\ -\frac{4\xi}{\ell^2} f & -\frac{4\xi}{\ell^2} & \frac{2\xi}{\ell} \\ -\frac{2\xi}{\ell} f & -\frac{2\xi}{\ell} & \beta^* \end{bmatrix}_i \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_i \quad (3.93a)$$

$$\begin{bmatrix} Q \\ V \\ X \end{bmatrix}_{i,i} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{4\xi}{\ell^2} f^2 + \frac{f^T}{\ell} \right) & -\frac{4\xi}{\ell^2} f & -\frac{2\xi}{\ell} f \\ -\frac{4\xi}{\ell^2} f & -\frac{4\xi}{\ell^2} & -\frac{2\xi}{\ell} \\ \frac{2\xi}{\ell} f & \frac{2\xi}{\ell} & \beta^* \end{bmatrix}_i \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_{i-1}$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(\frac{4\xi}{\ell^2} f^2 + \frac{f^T}{\ell} \right) & \frac{4\xi}{\ell^2} f & -\frac{2\xi}{\ell} f \\ \frac{4\xi}{\ell^2} f & \frac{4\xi}{\ell^2} & -\frac{2\xi}{\ell} \\ -\frac{2\xi}{\ell} f & -\frac{2\xi}{\ell} & \left(\frac{I}{\ell} + \xi \right) \end{bmatrix}_i \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_i \quad (3.93b)$$

Burada

$$\xi = \frac{1}{\frac{l}{3I_i} + \frac{4}{lf^*} - \frac{4f^T}{lf^2}}$$

$$\beta^* = \xi - \frac{I_i}{l}$$

$$f = \frac{f^T}{f}$$

dir.

(3.93) denklemini sembolik olarak

$$\frac{1}{E} S_{i-1,i} = (Y_{AA})_i \Delta_{i-1} + (Y_{AB})_i \Delta_i$$

(3.94)

$$\frac{1}{E} S_{i,i} = (Y_{BA})_i \Delta_{i-1} + (Y_{BB})_i \Delta_i$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada S uç kuvvetlerin kolon matrisi ve deplasmanların kolon matrisidir.

3.12. DİYAFRAM ÖZELLİKLERİ

Sistem, distorsiyonel kuvvetler, gözün ucunda etkiğinde ay biçimde ve işarette olan ve $\bar{V}$ ile gösterilen kuvvetlerin tesir ettiği kabul edilen diyaframlar ile tamamlanır. Diyaframlar plak veya rijit gömülü çerçeve olabilir. Distorsiyon kuvvetleri ve deplasmanlar arasındaki bağıntı

$$E \cdot v_i = \frac{\bar{V}_i}{d_i} \quad (3.95)$$

veya

$$d_i = \frac{\bar{V}_i}{v_i} \cdot \frac{1}{E} \quad (3.96)$$

ile belirlenir. Burada d_i ye birim uzunluklu diyaframın idealize kalınlığı denilebilir.

-Uniform Kalınlıklı Bir Dikdörtgen Plak Diyaframın " d_i " idealize kalınlığı

Şekil 3.24 de kendisini deforme eden kuvvetlere maruz dikdörtgen bir plak diyafram gösterilmiştir.

$$\text{Kayma gerilmesi} = \frac{\bar{V}b^2}{2Abt} = \frac{\bar{V}b}{2At}$$

$$\text{Kayma şekil değiştirmesi} = \frac{\bar{V}b}{2AGt} = \phi$$

diğer yandan

$$v_i = \frac{\phi b}{4} = \frac{\bar{V}_i b^2}{8AGt} \quad (3.98)$$

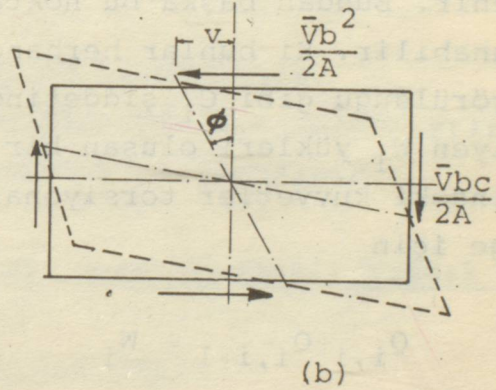
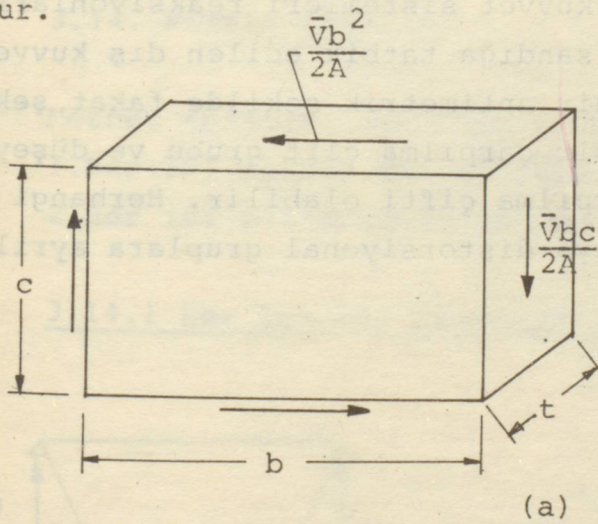
dir. Buradan

$$\frac{v_i}{\bar{V}_i} = \frac{b^2}{8AGT} \quad (3.99)$$

(3.99) denklemi (3.96) denkleminde yerine konulur ve A bc alınarak

$$d_i = \frac{C}{F} \cdot \frac{8ct}{b} \quad (3.100)$$

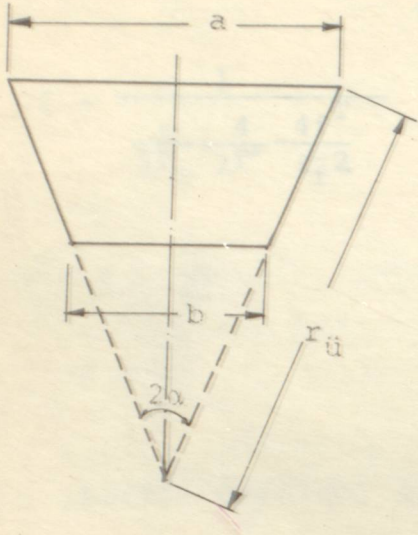
bulunur.



Şekil 3.24

-Üniform Kalınlıklı Trapez bir Plak Diyaframın "d_i" idelize Kalınlığı

Trapez kesitli plak diyaframın tam analizi oldukça zor bir problem. İki yaklaşım kabul edilebilir. Bunlar ya bir eşdeğer plak olarak kabul edilerek yada Richmond tarafından geliştirilen ve aşağıda verilen ifade kullanılarak çözülür.



Şekil 3.25

$$d_i = \frac{G}{E} \cdot \frac{16A^2 t \alpha \cdot r_u}{a^2 b^2 \cos^2 \alpha (s - s^2 / 2r_u)} \quad (3.101)$$

Burada r_u üst köşeden yan kenarların birleşim noktasına olan mesafe, 2α yan kenarlar arasındaki açıdır.

3.13. DENGİ ŞARTI

i düğümündeki diyafram civarında bir sandık elemanı, i ve $i+1$ gibi bitişik iki göze tatbik edilen uç kuvvet sistemleri reaksiyonları ve keza diyafram üzerine etkiyen kuvvet sistemleri reaksiyonları ile kilenir. Bundan başka bu noktada sandığa tatbik edilen dış kuvvetler bulunabilir. Ki bunlar herhangi bir antimetrik şekilde fakat Şekil 3.25 de görüldüğü gibi C_i şiddetinde bir çarpılma çift grubu ve düşey olarak etkiyen W_i yükleri oluşan bir çarpılma çifti olabilir. Herhangi W_i şiddetindeki kuvvetler torsiyonel veya distorsiyonel gruplara ayrılabilir. Denge için

$$Q_{i,i} + Q_{i,i+1} = W_i$$

$$\bar{V}_i + V_{i,i} + V_{i,i+1} = W_i$$

$$X_{i,i} + X_{i,i+1} = C_i$$

veya matris şeklinde

$$\bar{S}_i + S_{i,i} + S_{i,i+1} = P_i$$

yazılabilir. Burada $\bar{S}_i$, $(0, \bar{V}_i, 0)$ kolon matrisi ve P_i yüklerin

$$F_i = \begin{bmatrix} W_i \\ W_i \\ C_i \end{bmatrix}$$

kolon matrisidir. Diyafram rijitlik matrisi

$$\bar{Y}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

olarak belirlenirse (3.94) ve (3.102) denklemleri deplasman terimlerinde (3.103) ün sol tarafına konulduğu gibi olabilir.

$$(Y_{BA})_{i,i-1} + \{(Y_{BB})_{i,i} + (Y_{AA})_{i+1,i+1} + \bar{Y}_i\} (Y_{AB})_{i+1,i+1} = P_i/E \quad (3.105)$$

bütün diyafram pozisyonları için tekrarlanarak komple rijitlik matrisinin alt matrisleri olacak olan Y grup matrisli matris takımları çıkarılır. $(Y_{BB})_{i,i} + (Y_{AA})_{i+1,i+1} + \bar{Y}_i$, $(Y_{AB})_{i,i}$ ve $(Y_{BA})_{i,i}$ nin değerleri (3.93) ve (3.104) denklemlerinde verilmiştir.

3.14. MESNET ŞARTLARI

Mesnet şartları iki durumda gözönüne alınacaktır.

1. Her iki mesnet üst köşenin yerdeğiştirmeleri önlenmiştir.
2. Her iki alt köşenin yerdeğiştirmeleri önlenmiştir.

3.14.1 Her İki Üst Köşesinde Rijit Olarak Mesnetli Sandık Kiriş:

Uygunluk Şartı



Şekil 3.26

Eğer sandık herhangi n düğümünde üst köşelerinde rijit olarak mesnetlenirse (şekil 3.26) burada yerdeğiştirmeler olmaz. Yani torsiyonal ve distorsiyonal yerdeğiştirmelerin toplamı sıfır olur.

$$u_n + v_n = 0 \quad (3.106a)$$

veya

$$v_n = -u_n \quad (3.106b)$$

Bu yüzden v_n ile ilgili rijitlik matrisi kolonları u_n ile ilgili rijitlik matrisi kolonlarından çıkarılabilir. Bu durumda düğümün serbestlik derecesi azalmış olur.

Denge Şartı:

n mesnedindeki statik denge gereğince

$$Q_{n,n} + Q_{n,n+1} = R_n + W_n \quad (3.107)$$

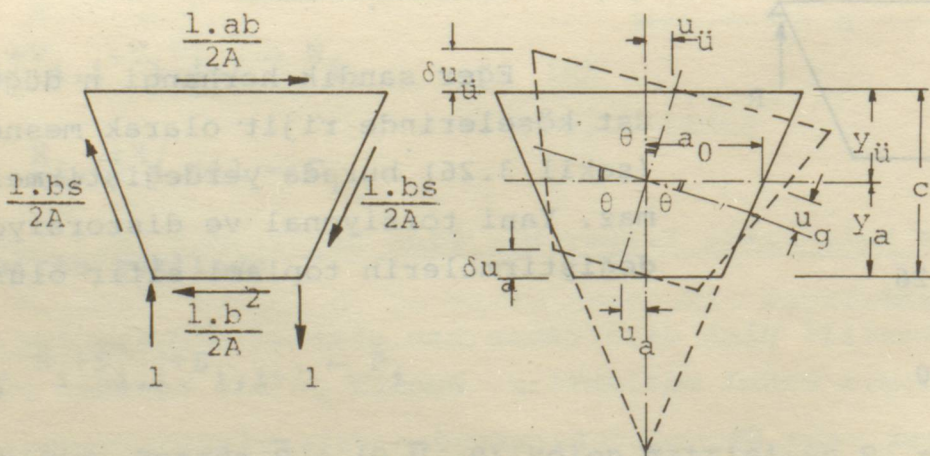
$$\bar{V}_n + V_{n,n} + V_{n,n+1} = R_n + W_n \quad (3.108)$$

olmalıdır. Burada R_n n mesnedindeki düşey reaksiyon ve W_n daha önce de belirlendiği gibi n düğümündeki düğüm yüküdür. (3.107) ve (3.108) denklemlerinde R_n bilinmeyenleri her iki denklemin birbirinden çıkarılması ile yok edilebilir. Bu çıkarmadan sonra elde edilen yeni denklem rijitlik ve yük matrislerinin bir sıranın diğerinden çıkarılmasına eşdeğerdir.

3.14.2 Her İki Alt Köşesinde Rijit Olarak Mesnetli Sandak Kirişi

Bu durumda alt köşelerdeki düşey yerdeğiştirmeler virtüel bir kuvvetler (birim burulma çifti teşkil eden) tatbik edilerek bulunabilir. Yerdeğiştiren sistemler (torsiyonal ve distorsiyonal) ile yapılan iş yükün torsiyonal ve distorsiyonal yük gruplarına ayrılması ile ve kuvvet gruplarında virtüel iş gözönüne alınması ile bulunur.

a. Torsiyonal Deplasmanlar:



Sekil 3.27

Şeklin geometrisinden

$$\theta = \frac{2u}{a}$$

$$u_a = \frac{2uy_a}{a}$$

$$u_g = \frac{2ua_0c}{sa}$$

$$u_u = \frac{2uy_u}{a}$$

$$a_0 = \frac{1}{2c} (ay_a - by_a + cb)$$

Birim yük metodu ile

$$1.2\delta_u = \frac{b^2}{2A}u_a + \frac{2bs}{2A}u_g + \frac{ab}{2A}u_u \quad (3.109)$$

yukarıdaki değerler yerine konulur ve gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$\delta_u = u_a \frac{b}{a} \quad (3.110)$$

bulunur.

b. Distorsiyonal Deplasmanlar:

Bunlar da torsiyonel deplasmanlardakine benzer yöntemle aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\delta_v = v_a \frac{a}{b} \quad (3.111)$$

Uygunluk Şartları

Eğer sandık giriş herhangi n düğümünde her iki alt köşesinden rijit olarak mesnetli ise burada yerdeğiştirme olmaz. Alt köşelerde sıfır yerdeğiştirme için

$$u_n \cdot \frac{b}{a} + v_n \cdot \frac{a}{b} = 0 \quad (3.112a)$$

veya

$$v_n = -u_n \cdot \frac{b^2}{a^2} \quad (3.112b)$$

olur. Burada v_n ile ilgili rijitlik matrisi kolonları $\frac{b^2}{a^2}$ ile çarpıldıktan sonra u_n ile ilgili kolonlardan çıkarılır.

-Denge Şartları:

Alt köşeler ile ilgili reaksiyonlar

$$Q_{n,n} + Q_{n,n+1} = W_n + R_n \cdot \frac{b}{a} \quad (3.113)$$

$$\bar{V}_n + V_{n,n} + V_{n,n+1} = W_n + R_n \cdot \frac{b}{a} \quad (3.114)$$

yazılabilir. Bu iki denklemden R_n reaksiyonu yok edilerek

$$Q_{n,n} + Q_{n,n+1} - \frac{b^2}{a^2} (\bar{V}_n + V_{n,n} + V_{n,n+1}) = 0 \quad (3.115)$$

bulunur. Bu da rijitlik ve yük matrislerinde bir sıranın b^2/a^2 ile çarpıldıktan sonra diğer bir sıra ile çebirsel olarak toplanmasına özdeş tir.

3.15. DİYAFAAMLAR ARASINDA TATBİK EDİLEN YÜKLERDEN DOĞAN ENİME EĞİLME GERİLMELERİ

Bu gerilmeler söz konusu diyaframlar arasında ara yüklemenin sebep olduğu daha önceki distorsiyonal yerdeğiştirmelerden bulunabilir. Deplasman çözümleri, eşdeğer ara yüklemeler için düğüm (diyafram) pozisyonundaki değişkenleri ($v, \theta, v.s$) çıkarır.

a. i gözünün orta kesitinde W münferit yükü için, orta kesitteki distorsiyonal yerdeğiştirme

$$E_v = \frac{W l^3}{192 I_{Eff}} \quad (3.116)$$

dir. Deplasman çözümü gözün orta noktasındaki aşağıda verilen distorsiyonal yerdeğiştirmelerin çıkarılmasını sağlar.

$$E_v = E(\theta_1 - \theta_2) \frac{l}{4} + \frac{E}{2} (v_1 + v_2) \quad (3.117)$$

(3.116) ve (3.117) nin toplamı gözün ortasındaki toplam distorsiyonal yerdeğiştirmeyi verir.

$$E_v = \frac{W l^3}{192 I_{Eff}} + E(\theta_1 - \theta_2) \frac{l}{4} + \frac{E}{2} (v_1 + v_2) \quad (3.118)$$

b. w şiddetinde bir üniform yayılı yük için, benzer çözüm şekli uygulanabilir. Bu durumda i gözünün ortasında toplam distorsiyonal yer-değiştirme

$$E v = \frac{w l^4}{384 I_{Eff}} + E (e_1 - e_2) \frac{l}{4} + \frac{E}{2} (v_1 + v_2) \quad (3.119)$$

şeklinde bulunur.

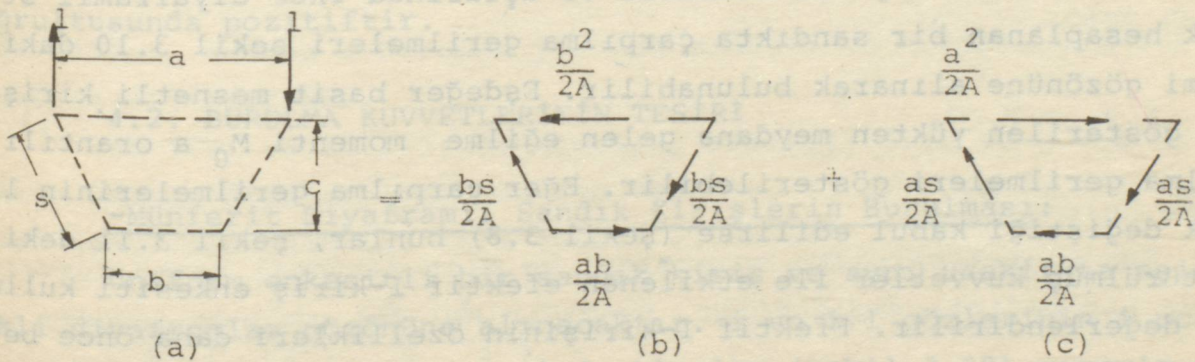
4. SÜREKLİ DİYAFRAMLI TRAPEZ SANDIKLAR

4.1. GİRİŞ

Bu kısımda açıklanan çalışmaların esası Ebner'in münferit deforme olabilir sandık teorisi ve Resinger tarafından köprü sistemleri için geliştirilen teori ve dikdörtgen sandıklar için Richmond ve Dalton tarafından geliştirilen trapez enkesitli sandıklar için çok genel biçimdeki teoriye dayanmaktadır.

Düsey simetri eksenli trapez enkesitli sandık kirişler üstündeki burulma yüklerinin tesiri, sürekli diyaframli sandıklar için gözönüne alınabilecektir.

4.1.1 Genelleştirilmiş Kuvvetler (enkesit düzleminde):



Şekil 3.28

Genelleştirilmiş kuvvet ifadesi, doğrultusu ve izafi şiddeti belirlenmiş kuvvetler grubunu göstermek için kullanılır. Sonra grup birtek sayı ile ifade edilir.

Şekil 3.28a'nın birim burulma yükleri düşey olarak etkir ve pezin kenarları boyunca etkiyen iki düzlemsel kuvvet grubu (şekil 3.28 b ve c) toplamına eşdeğerdir. 2A kapalı trapez alanının iki katıdır. Şekil 3.28 b'nin kuvvetleri genelleştirilmiş distorsiyonal kuvvetlerin birim değerini ve şekil 3.28 c'nin kuvvetleri genelleştirilmiş torsiye kuvvetlerin Q birim değerlerini belirler.

4.1.2. Genelleştirilmiş Deplasmanlar (enkesit düzleminde):

Genelleştirilmiş distorsiyonal deplasmanın v birim değeri (şekil 3.15 a) birim genelleştirilmiş distorsiyonal kuvvet ile işlem yapıldığında da yarım enkesit üzerinde birim miktarda iş ve birim genelleştirilmiş torsiye kuvvet ile işlem yapıldığında sıfır miktarda bir iş meydana getiren deplasmanlar grubu olarak belirlenir.

Genelleştirilmiş torsiye deplasman u birim değeri (şekil 3.15 b) yukarıda belirlenen torsiyon ve distorsiyon ifadeleri becaıışı ile belirlenir.

Bunlardan şu netice çıkar ki vırtüel iş fikri tatbık edilerek u ve v ile ilgili düşey yerdeğıştırmeler sırayla δ_u ve δ_v dir ve

$$\delta_u = u \quad \text{ve} \quad \delta_v = v \quad (3.12)$$

ile verilir.

4.1.3. Genelleştirilmiş Kuvvetler (çarpılan enkesitte):

Kenarları boyunca maısalılı ve uçlarında ince diyaframlı statik olarak hesaplanan bir sandıkta çarpılma gerilmeleri şekil 3.10 daki sistemı gözönüne alınarak bulunabilir. Eşdeğer basit mesnetli kiriş tünde gösterilen yükten meydana gelen eğilme momenti M_0 a orantılı çarpılma gerilmeleri gösterilebilir. Eğer çarpılma gerilmelerinin lineer olarak değıştiğı kabul edilirse (şekil 3.8) bunlar, şekil 3.11 deki dönuştürülmüş kuvvetler ile etkilenen efektif I-kiriş enkesiti kullanılarak değıerlendirilir. Efektif I-kirişinin özellikleri daha önce belirlendiğı gibidir.

$$M'_{Eff} = M_0 \frac{s(a+b)}{2as} \quad \text{ve} \quad N'_{Eff} = M_0 \cdot \frac{a-b}{ac} \quad (3.12)$$

veya efektif kirişin sentroid ekseninde

$$M_{Eff} = M'_{Eff} N'_{Eff} \cdot e \quad \text{ve} \quad N_{Eff} = N'_{Eff} \quad (3.122)$$

dir. I-kirişinin üst ve altındaki gerilmeler sandığın köşe gerilmelerine tekabül eder.

Çarpılma gerilme yayılımı genelleştirilmiş çarpılma momentlerinin belirlemek için kullanılabilir. Fakat köşeler arasındaki gerilmelerin lineer değişmesine daha basit bir alternatif olarak müsaade edilir. Şekil 3.16 a da köşelerdeki kuvvetler her bir plak gerilme yayılımına statik olarak eşdeğerdir ve $M_0 = 1$ iken X genelleştirilmiş çarpılma momentlerinin birim değerini belirleyecektir.

4.1.4. Genelleştirilmiş Deplasmanlar (çarpılmış enkesitte):

Genelleştirilmiş bir çarpılma dönmesinin θ birim değeri bir birim genelleştirilmiş çarpılma momenti ile işlem yapıldığında yarım enkesit üzerinde bir birim miktarda iş meydana getiren çarpılma deplasmanının bir kesri olarak belirlenir.

θ ve X eğratalet momenti I_i boyutunda ise basit kirişteki eğim ve eğilme momentlerinin hesaplandığı şekilde düşünülebilir. Burada I_i daha önce belirlendiği gibi

$$I_i = \frac{1}{\frac{\sigma'_a}{c} + \frac{\sigma'_u}{c} \left(\frac{b}{a}\right)} \quad (3.123)$$

dir. σ'_u ve σ'_a sırayla bir birim çarpılma momentiyile meydana gelen üst ve alt köşe çarpılma gerilmeleridir. İşaretler şekil 3.16 a daki kuvvetler doğrultusunda pozitifdir.

4.2. BURULMA KUVVETLERİNİN TESİRİ

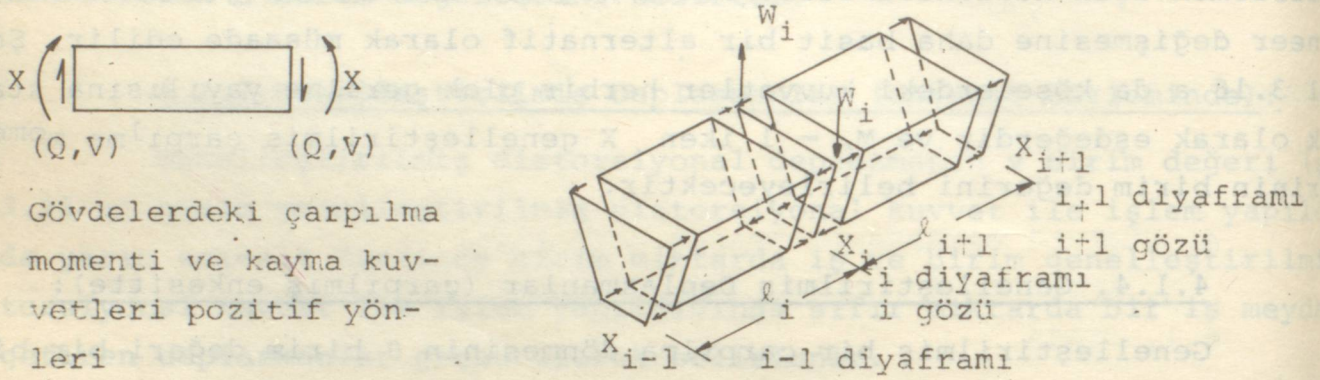
-Münferit Diyaframlı Sandık Kirişlerin Burulması:

Uniform enkesitli bir sandık giriş ve aynı uzaklıkta eşit rijitlikli diyaframlar gözönüne alınacaktır. i ve $i+1$ gözlerinin i ucundaki çarpılma dönmesine ait en genel denklemler (şekil 3.29) sırayla

$$E\theta_{i,i} = X_i \left(\frac{\ell}{3I_i} + \frac{1}{\ell f} \right) - X_{i-1} \left(-\frac{\ell}{6I_i} + \frac{1}{\ell f} \right) - \frac{Q_i}{f} \frac{E}{\ell} (v_i - v_{i-1}) \quad (3.124)$$

$$E\theta_{i,i+1} = -X_{i+1} \left(-\frac{\ell}{6I_i} + \frac{1}{\ell f} \right) + X_i \left(\frac{\ell}{3I_i} + \frac{1}{\ell f} \right) + \frac{Q_{i+1}}{f} \frac{E}{\ell} (v_{i+1} - v_i)$$

olarak yazılabilir. Burada Q_i i gözündeki torsiyonal kayma kuvveti, f ve $\bar{f}$ sırayla V ve Q kayma kuvvetleri ile ilgili kayma şekildeğiştirmesinin tesirinin hesaplanmasına ait efektif alanlar olup daha önceki konularda verilmiştir (3.55 ve 3.61 formülleri).



Şekil 3.29

-Torsiyonal Deplasmanlar:

$$E(u_i - u_{i-1}) = Q_i / f^T - \frac{1}{\bar{f}} (X_i - X_{i-1}) \quad (3.12)$$

şeklinde bulunabilir.

-Distorsiyonal Deplasmanlar:

Distorsiyonal deplasmanlar diyafram üzerinde etkiyen $\bar{V}$ distorsiyonal kayma kuvvetlerinden bulunabilir. d_i efektif kalınlıklı özel diyafram için

$$E \cdot v_i = \bar{V}_i / d_i \quad (3.12)$$

şeklinde bulunabilir.

Son olarak çarpılma momentleri ve distorsiyonal kayma kuvvetleri arasında bir bağıntı yazılabilir. Sandığın her iki gözünün dengesi gereği

$$V_{i,i} = -V_{i-1,i-1} = (X_i - X_{i-1}) / \ell \quad (3.12)$$

olur.

-Sürekli Diyaframlı Sandık Kirişlerin Burulması:

Münferit diyaframlı sandığın i diyaframındaki uygunluk için

$$\theta_{i,i} + \theta_{i,i+1} = 0 \quad (3.128)$$

(3.124) eşitliğine ilave edilir ve limit durumunda ℓ sıfırı alınır

$$\frac{x}{I_i} - \frac{1}{f^*} \frac{d^2 x}{dx^2} + \frac{1}{f} \frac{dQ}{dx} + E \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (3.129)$$

verilir. i diyaframı civarında (i düğümünde) sandığın bir elemanı üstünde distorsiyonel kayma kuvvetleri toplamı yükün distorsiyonel bileşkesine eşittir.

$$W_i = V_{i,i} - V_{i,i+1} + \bar{V}_i \quad (3.130)$$

ve (3.126) ve (3.127) eşitlikleri kullanılarak

$$W_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{\ell} - \frac{X_{i+1} - X_i}{\ell} + E d_i v \quad (3.131)$$

ve ℓ ile bölünerek

$$\frac{W_i}{\ell} = - \frac{X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}}{\ell^2} + E d_i \frac{v}{\ell} \quad (3.132)$$

bulunur. Burada ℓ nin sıfıra limit durumu alınarak

$$\frac{d^2 x}{dx^2} + w = kv \quad (3.133)$$

elde edilir. Burada w burulma yükünün şiddeti ve k birim uzunluk için diyafram rijitliğidir.

(3.129) ve (3.133) denklemleri birleştirilir ve x yok edilirse tanzim edilen diferansiyel denklem verilir. (3.129) ve (3.133) diferansiyel denklemlerinin iki kere türevi alınarak

$$\frac{d^2 x}{dx^2} + \frac{1}{f^*} \frac{d^4 x}{dx^4} + \frac{1}{f} \frac{d^3 Q}{dx^3} + \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad (3.134)$$

$$\frac{d^4 x}{dx^4} = k \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.135)$$

$\frac{d^4 x}{dx^4}$ ve $\frac{d^2 x}{dx^2}$ nin değeri (3.134) denkleminde yerine konulur ve I_i ile çarpı-

olarak

$$EI_i \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{I_i}{f^*} \left(k \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + kv + \frac{I_i}{f} \frac{d^3 Q}{dx^3} = w \quad (3.135)$$

verilir. Bu üniform yayılı burulma yükünün tesiri altında k rijitliği haiz sürekli diyaframlı bir sandık kirişin diferansiyel denklemidir.

-Münferit BurulmaYükleri:

Eğer yükleme sistemi münferit burulma yüklerine sınırlanırsa münferit burulma yükleri arasında torsiyonal kayma kuvveti Q sabit ve burulma yükü $w=0$ dır. (3.136) denkleminde bu basitlikler gözönüne alınarak

$$EI_i \frac{d^4 v}{dx^4} - k \frac{I_i}{f^*} \frac{d^2 v}{dx^2} + kv = 0 \quad (3.137)$$

diferansiyel denklemi bulunur.

-Sınır Şartları:

Yukarıda açıklanan diferansiyel denklemin komple çözümü için dört integral sabiti sınır şartları kullanılarak hesaplanabilir. Bir fir çarpılma momenti sınır şartı (3.124) eşitliğinden biri kullanılarak geliştirilebilir.

$$\theta = \frac{X_{i-1} X_i}{3I_i f^*} + \frac{X_{i-1}^2 X_i}{6I_i f^*} - \frac{Q_i E}{f} (v_i - v_{i-1})$$

Burada $\theta=0$ konur ve ℓ sifıra limit alınarak

$$0 = -\frac{1}{f} \cdot \frac{dx}{dx} \frac{Q}{f} + E \frac{dv}{dx}$$

ve

$$v = \frac{dx}{dx}$$

olduğundan

$$E \frac{dv}{dx} = \frac{v}{f} \frac{Q}{f} \quad (3.138)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Eğer münferit P burulma yükleri açıklık kısmında simetrik bir andık sistemin açıklık ortasında yüklenirse bu yüklenmiş enkesitte çarılma sıfır olacaktır. Torsiyonal ve distorsiyonal kayma kuvvetleri yükün ki tarafından biri üstünde eşit şiddette olacaktır (şekil 3.29). Yani

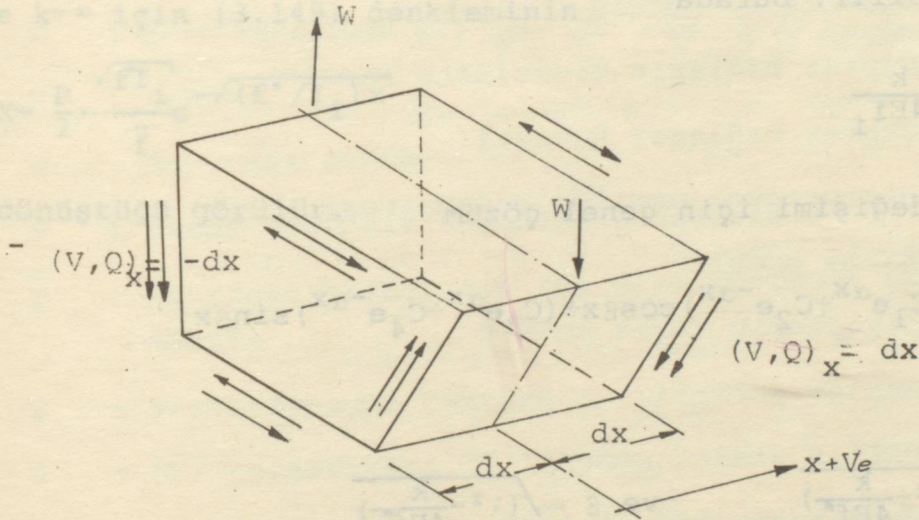
$$Q = -P/2 \quad \text{ve} \quad V = -P/2$$

e (3.138) eşitliği

$$E \frac{dv}{dx} = -\frac{P}{2} (1/f^* - 1/\bar{f}) \quad (3.139)$$

azılabilir.

(3.129) ve (3.133) denklemlerinden elde edilen distorsiyonal kayma kuvvetleri geneldir.



Şekil 3.30

$$\frac{dx}{I_i dx} - \frac{1}{f^*} \cdot \frac{d^3 x}{dx^3} + \frac{1}{\bar{f}} \cdot \frac{d^2 Q}{dx^2} + E \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (3.140)$$

$$\frac{d^3 x}{dx^3} + \frac{dw}{dx} = k \frac{dv}{dx} \quad (3.141)$$

X yok edilir ve w=0 ve Q=sabit, oluşu gözönüne alınır

$$V = -EI_i \times \frac{d^3 v}{dx^3} + \frac{k}{f^*} \frac{dv}{dx} \quad (3.142)$$

V = -P/2 neticesi yerine konulduğunda

$$\frac{P}{2} = EI_i \times \frac{d^3 v}{dx^3} - \frac{k}{f^*} \frac{dv}{dx} \quad (3.143)$$

olarak yazılır.

Genel durumda $X=0$ ve $v=0$ olan bir rijit ince diyaframı gereken bir serbest uçta (3.129) ve (3.133) denklemleri

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (3.144)$$

şekline dönüşür.

-Son Derece Uzun Bir Kiriş Üzerinde Burulma Yükləri:

Yukarıda elde edilen ((3.133) ve (3.139) denklemlerinden elde edilenleri genel olarak

$$v^{(4)} - \frac{k}{Ef^*} v'' + 4\lambda^4 v = 0 \quad (3.145)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\lambda^4 = \frac{k}{4EI_i}$$

$\lambda^2 - \frac{k}{4Ef^*} > 0$ değişimi için genel çözüm

$$v = (C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}) \cos \beta x + (C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x}) \sin \beta x \quad (3.146)$$

Burada

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{k}{4Ef^*}} \quad \text{ve} \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{k}{4Ef^*}}$$

dir.

Son derece uzun bir kiriş için $C_1 = C_3 = 0$, C_2 ve C_4 (3.139) denlemi ve $P/2 = \int_0^L k \cdot v \cdot dx$ şartı kullanılarak bulunur, daha sonra son derece uzun bir kiriş için (3.143) denlemi çok uygun düşer. Çözüm

$$v = \frac{P}{2\alpha\beta} e^{-\alpha x} \left\{ \beta \left[\frac{\lambda^2}{k} + \frac{1}{2E} (1/f^* - 1/\bar{f}) \right] \cos \beta x + \left[\frac{\lambda^2}{k} - \frac{1}{2E} (1/f^* - 1/\bar{f}) \right] \sin \beta x \right\} \quad (3.147)$$

$$x = \frac{P}{2\alpha\beta} e^{-\alpha x} \left\{ \beta \left(1/2 + \frac{\lambda^2 I_i}{\bar{f}} \right) \cos \beta x + \alpha \left(-1/2 + \frac{\lambda^2 I_i}{\bar{f}} \right) \sin \beta x \right\} \quad (3.148)$$

dir.

Eğer sandığın özellikleri $\lambda^2 - \frac{k}{4Ef^*} < 0$ değişiminde ise

$$\bar{\beta} = \sqrt{\left(\frac{k}{4Ef^*} - \lambda^2\right)}$$

β yerine geçer ve hiperbolik fonksiyonlar kullanılır. Bu yerine koymalar aşağıdaki dönüşümler çerçevesinde olacaktır.

$$\cos i\beta = \cosh \bar{\beta}x$$

$$\sin i\beta = i \sinh \bar{\beta}x$$

böylece

$$x = \frac{P}{2\alpha\bar{\beta}} e^{-\alpha x} \left\{ \bar{\beta} \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2 I_i}{\bar{f}} \right) \cosh \bar{\beta}x + \alpha \left(-\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2 I_i}{\bar{f}} \right) \sinh \bar{\beta}x \right\} \quad (3.149)$$

(3.149) denklemi pratik olarak rijit enkesitli bir giriş için bile geçerlidir. Ve $k=\infty$ için (3.149) denkleminin

$$x = \frac{P}{2} \frac{\sqrt{f^* I_i}}{\bar{f}} e^{-\sqrt{(f^*/I_i)}x} \quad (3.150)$$

şekline dönüştüğü görülür.

IV- SANDIK KESİTLİ KÖPRÜLERİN PFF ANALOJİSİ İLE HESABI

Notasyonlar

- A : Gözün veya elemanın alanı
 A_b : Çapraz bağlantı alanı
 A_p : Diyafram orta yüzeyinin alanı
 a : Sandık kesitin üst flans kısmının genişliği
 b : Sandık kesitin alt flansının genişliği
 c : Sandık gözün yüksekliği
 D : Plâkın eğilme rijitliği
 d : Üst plak konsolunun genişliği
 E : Elastisite modülü
 E_b : Çapraz bağların elastisite modülü
 F_b : Çapraz bağlantı kuvveti
 F_d : Distorsiyon gerilme parametresi
 G : Kayma modülü
 G_p : Diyaframın kayma modülü
 I : Atalet momenti
 I_b : BEF'in atalet momenti
 I_c : Sandık girişin atalet momenti
 k : Zemin modülü
 l : Panel uzunluğu
 M : Eğilme momenti
 m : Boyutsuz eğilme momenti
 P : Münferit yük
 p : Yayılı yük

- Q : Rijitlik
 q : Boyutsuz rijitlik
 q_b : Düşey eksene göre eğilmede kaymaya ait katsayı
 q_d : Diyafram üzerinde kayma akımı
 q_s : Saint Venant torsiyonundan meydana gelen kaymaya ait katsayı
 q_w : Kalıcı çarpılma dan meydana gelen kaymaya ait katsayı
 r_s : Çarpılma gerilmesine ait yaklaşım oranı
 r_θ : θ BEF parametresine ait yaklaşım oranı
 s : Gövdenin genişliği
 t : Plak kalınlığı
 t_p : Diyafram kalınlığı
 V_1 : Birim torsiyonel yük için alt plak orta kesitinde kesme kuvveti.
 W : Sehim
 w : Boyutsuz sehim
 y : Yatay sentroit ekseninden uzaklık
 $\bar{y}$: Sentroit eksenini ile üst plak sentroit eksenini arasındaki mesafe
 α : Partisiposyon faktörü
 β : BEF parametresi
 δ_b : Birim torsiyonel yük için bağlayıcı deplasman
 δ_1 : Birim torsiyonel yükte düşey sehim
 μ : Poissan oranı
 σ_r : Gövdenin üstündeki çarpılma gerilmesi
 σ_t : Distorsiyon gerilmesi
 σ_w : Çarpılma gerilmesi
 ψ : Plak düzlemi deplasman katsayısı

1. GİRİŞ

Sandık kirişler, karayolu köprülerinde gözönüne alınabilen avantajlar sağlar. Çünkü bunlar yüksek torsiyonal rijitliğe haizdir. rijitlik enine olarak köprü eksenine göre simetrik olmayan yükler içine flanş gerilmelerinin hemen hemen uniform yayılışını temin eder. Bununla beraber analitik çalışmalar göstermiştir ki sandık kirişler ne olarak uniform olmayan yüklerden dolayı en kesit deformasyonuna mar kalır. Bu davranış enkesitin uniform olmayan çarpılmasını ve bu çarpımadan dolayı da boyuna ve enine gerilmelerde bir artış meydana gelir. gerilme artışları da sandık kesitli kişilerin dezavantajıdır. Fakat dezavantajlar, enkesit deformasyonlarını önleyen belirli aralıklarla nulan enine diyaframlar ve çapraz bağlantılarla ortadan kaldırılabilir.

Genel köprü boyutları için, enkesit deformasyonundan doğan boyuna çarpılma gerilmeleri torsiyonda kalıcı çarpılmadan doğan boyuna gerilmelerden doğar. Halbuki rijit enkesit durumunda enkesit deformasyonundan doğan enine gerilmelere elemanter torsiyon analizinde önem verilmmez. Bu gerilmeler köprü hesabında oldukça önemlidir.

Bu analizin maksadı sandık kirişler için basitleştirilmiş analitik bir işlem vermek ve hesap yapana, yükleme, boyutlar ve çözümlemeler arasında birbirlerine tesirliliği hakkında bir bilgi vermektir.

Elastik zemine oturan kiriş analojisi, rijit veya deforme olabilir iç diyaframlar, enine veya boyuna plak elemanları, prizmatik olmayan kesitler, iç mesnetler üzerinde süreklilik ve keyfi uç mesnet şartlarını gözönüne alan analitik bir yöntem temin eder. Burada analoji te gözlü doğru eksenli sandık kirişler için verilmiştir. Daha sonra çok lü kirişlere nasıl tatbik edilebileceği gösterilmiştir.

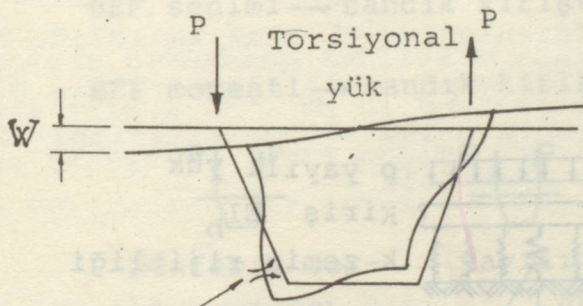
2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞ ANALOJİSİ

2.1. Analojinin Ana hatları :

Enkesit deformasyonuna sebep olan bir yüklemeye maruz bir sandık gözün çözümü elastik zemine oturan kirişlerdeki idantik olan bir dırsiyel denklem ile tarif edilebilir. Sandık gözünün ve elastik zemine oturan kirişin fiziksel özellikleri arasında direkt bir analoji mevcuttur. Benzer bir analoji silindirik kabuklarda eğilmenin takdiri için lanışlılık temin etmiştir.

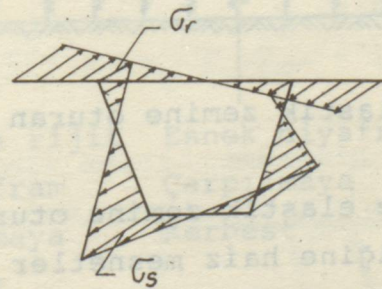
Enkesit deformasyonu enkesit düzleminde hareketler meydana getirir. Enkesit deformasyonunun yaklaşık teorisini geliştirmek için, hareket eden düzlemde gözönüne alınan esas kabul, açık kesitli ince gövdeli kirişlerin torsiyon teorisinden temin edilir. Çarpılma tesiri ile beraber bulunan distorsiyonların plak enkesitinde oluşan vasat kayma şekil değiştirmesini iptal ettiği kabul edilir. Eğer deformasyonlar kiriş boyunca sabit değilse bazı çarpılma deformasyonlarının mevcut olması gerektiği anlaşılır. Sandık gözler için bu çarpılma deplasmanının St.Venant torsiyonu ile ilgili çarpılma ile değil enkesit deformasyonundan doğduğu söylenebilir. Açık kesitler için ince gövdeli kiriş teorisindeki gibi çarpılma, plak enkesitlerinin düzlem eğilmesi olarak gözönüne alınabilir.

Genel olarak çarpılma deplasmanları sandık gözün eksenini boyunca sabit değildir. Boyuna gerilmeler çarpılma zorlamasından doğar. Eğer bu çarpılma gerilmeleri kiriş boyunca uygun olarak değişirse, kayma kuvvetleri boyuna dengelerin gözönüne alınmasını gerektirir. Plakların düzlemlerindeki bu kaymalarda keza kesitten kesite değişir.



Enine eğilmeden distorsiyon gerilmesi

a. Enkesit deformasyonu



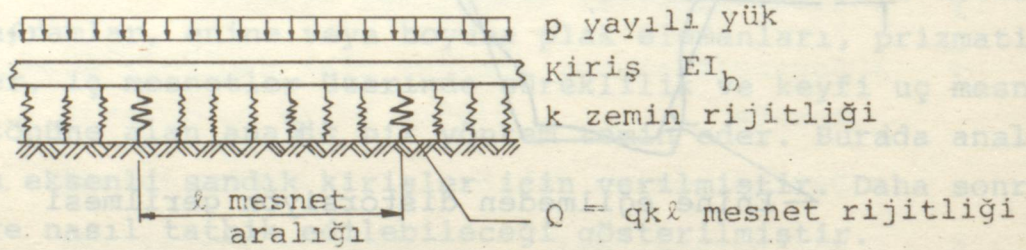
b. Çarpılma gerilmesi diyagramı

Şekil:(4.1) de gösterilen W distorsiyon miktarı W' ile orantılı çarpılma deplasmanlarına yol açar. Çarpılma gerilmeleri w'' ve kaymalar W''' ne bağlıdır. Çarpılda birim uzunluktaki kuvvetler ve mukavemet eden deformasyonlar W''' ile orantılıdır. Bunlar gözönüne alınarak W için diferansiyel denklem

$$E_c W'''' + k.W = P \quad (4.1)$$

biçiminde verilebilir. Burada C_d çarpılmaya özgül bir enkesit özelliği, k = sandık gözün birim uzunluğunun deformasyon rijitliği ve P = birim uzunlukta tatbik edilen genelleştirilmiş distorsiyonal kuvvettir. C_d k ya tekabül eden özelliklere ait ifadeler daha sonra verilecektir.

Bir sandık göz enkesitinin deformasyonu için verilen diferansiyel denklemin elastik zemine oturan kirişlerdekine benzerliği Vlasov tarafından gösterilmiştir. Elastik zemine oturan kiriş teorisi üzerine çok çalışma vardır. Bu sebepten teori burada detaylı olarak verilmeye sadece semboller gösterilecek ve bazı neticeler verilecektir.



Şekil 4.2 Elastik zemine oturan kiriş

Şekil 4.2 k modülünde elastik zemine oturan, mümkün olduğu kadar muntazam aralıklı Q rijitliğine haiz mesnetler ile mesnetlenen, atalet momentli bir kirişi gösterir. Mesnet rijitliği, l mesnet aralığı ve k zemin modülü terimleri ile $q = Q/kl$ ile boyutsuz olarak ifade edilir. P yayılı yükü ve W kiriş sehimini için (her ikisinde aşağı yönde pozitif) BEF'e ait diferansiyel denklem

$$W'''' + 4G^*W = p \quad (4.2)$$

dir. Burada β BEF parametresi olup

$$\beta = \frac{4}{4EI_b} \sqrt{\frac{k}{4EI_b}} \quad (4.3)$$

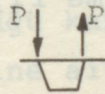
olarak verilir. (4.2) diferansiyel denklemin, sandık gözlere ait (4.1) denkleminde benzerliği aşıkardır.

Deformasyon meydana getiren karayolu köprüsü yükleri bileşenleriyle işlem yapıldığında kolaylık için, enkesit deformasyonlarının değiştirilmesi Şekil 4.1 de gösterilen torsiyonel yükleme ile yapılır. Bu yüklemenin yalnız deformasyon bileşeni çözününe alınır, bunların burulma tesirleri bilinen torsiyon teorisi kullanılarak ayrıca incelenebilir.

Torsiyonel yükleme maruz sandık kesit ile BEF arasındaki analogi şekil 4.3 de özetlenmiştir. W BEF sehimleri

BEF sehimi → sandık kirişte distorsiyon gerilmesi

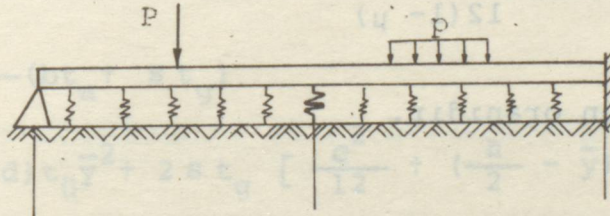
BEF momenti → sandık kirişte çarpılma gerilmesi



Münferit torsiyonel yük



yayılı torsiyonel yük



Kaymaya rijit diyafram
Çarpılmaya serbest

Esnek diyafram
Çarpılmaya serbest

Rijit diyafram
Çarpılma yok

Sekil:4.3 SANDIK KIRIŞ VE BEF ARASINDA ANALOJİ

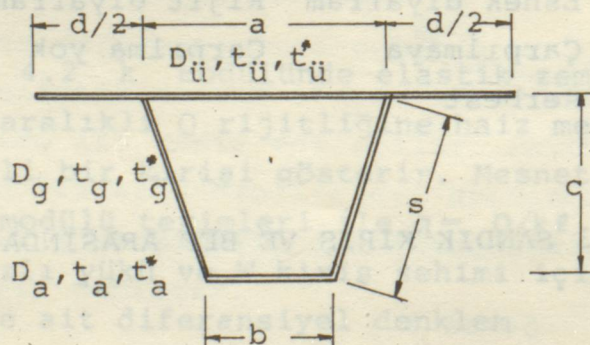
Sandık kesitin deformasyonu ve çarpılma gerilmeleri ile orantılıdır; BEF eğilme momenti sandık kesitteki çarpılma gerilmeleri ile orantılıdır. BEF deki münferit yükler sandık kesitteki münferit torsiyonel yayılı yükler, yayılı torsiyonel yüklerine tekabül eder. Enkesitin, çevre tesiri ile temin edilen torsiyonel yüklemeye dayanımı BEF'in k min modülü tesirine analogdur. Sandık kesitteki kalıcı çarpılma ile ilişkili olan torsiyonel yük dayanımı I_b atalet momentli BEF'e bağlanır. Sandık kesitin enine diyafram ve çapraz bağlantısı BEF'e ait iç mesnetlere tekabül eder. Kaymada rijit fakat çarpılmaya serbest diyafram basit mesnede, kaymada fleksibil fakat çarpılmaya karşı serbest diyafram elastik mesnet'e, kayma ve çarpılmada rijit diyafram ankastre mesnet'e tekabül eder.

2.2. Enkesitin Deformasyona Dayanımı :

Zemin modülüne tekabül eden bu özellik, simetrik tek gözlü sandık kesit için geliştirilmiştir. Sandık kesitin kısımlarına ait notasyon şekil 4.4 de gösterilmiştir. t plak kalınlığı boyuna doğrultuda efektif kalınlık; Muntazam olarak yerleştirilen boyuna rijitleştiriciler t plak kalınlığını elde etmek için düzenlenir. t^* plak kalınlığı kaymada efektif kalınlıktır, yalnız t^* ^{kendine} yardım eden rijitleştirilmiş plak için kabul edilir. Tek bir plak elemanının enine eğilme rijitliği D ile ölçülür. Rijitleştirilmemiş bir plak için

$$D = \frac{E_t^3}{12(1-\mu)} \quad (4.4)$$

dir. Burada μ poisson oranıdır.



Şekil: 4.4 Sandık enkesit özellikleri

Enine olarak rijitleştirilmiş plaklar için D "American Institute of Steel Construction (AISC) Orthotropic plate Deck Bridge Manuel" de açıklandığı gibi çıkarılabilir. Bir enine rijitleştiricili plağın efektif genişliği için yaklaşık ifade

$$d_o = \frac{d_s \tanh(5.6 \frac{d_s}{b})}{\frac{5.6 d_s}{b} (1 - \mu^2)} \quad (4.5)$$

dir. Bura yalnız (4.5) denklemi için d_s = rijitleştirici aralığı, d_o = plak efektif genişliği ve b = enine doğrultuda plak açıklığıdır. (4.5) denklemi AISC Manual de verilen eğrilerin uygunluğu ve plağın açıklık ortasında bir çizgisel tasrif ile eğildiği kabulüyle elde edilir. Enine eğilme rijitliği d_o plak genişliği ile etkilenen rijitleştiricinin atalet momenti hesaplanarak ve $D = EI/d_s$ kullanılarak elde edilir.

Kompozit betonarme tabliyeli çelik sandık kirişler gibi üniform olmayan kesit için t , t^* ve D , E elastisite modülünün uygun olarak bazı oranlarla dönüştüğü kabul edilir. Sandık kesitin yatay sentroid eksenine göre eğilmesine ait enkesit özellikleri

$$F = (a + d)t_u + 2s \times t_g + b \times t_a \quad (4.6)$$

$$\bar{y} = \frac{c}{F} (bt_a + st_g) \quad (4.7)$$

$$I_c = (a+d)t_u \bar{y}^2 + 2s \times t_g \left[\frac{c^2}{12} + \left(\frac{c}{2} - \bar{y} \right)^2 \right] + bt_a (c - \bar{y})^2 \quad (4.8)$$

dir. Burada F = Sandık kesitin enkesit alanı, $\bar{y}$ sentroit ile üst flans sentroidi altında kalan mesafe, ve I_c = atalet momenti (kareli terimler ihmal edilmiştir).

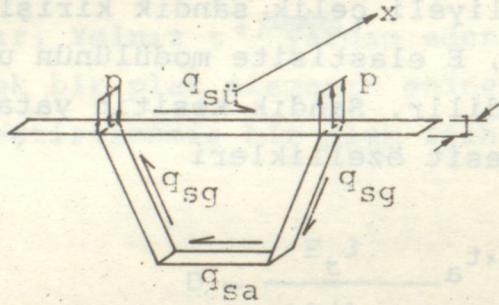
Şekil 4.1 de görüldüğü gibi gövdelerin üzerinde tatbik edilen birim üniform yayılı yüke maruz bir sandık kesit için kesitin dolu kısımlarında St.Venant torsiyonu sebebiyle meydana gelen kayma akımları boyuna değişim oranları

$$q_{sü} = \left(\frac{a}{a+b} \right) \frac{a}{c} \quad (4.9 a)$$

$$q_{sa} = \left(\frac{a}{a+b} \right) \frac{b}{c} \quad (4.9 b)$$

$$q_{sg} = \left(\frac{a}{a+b} \right) \frac{s}{c} \quad (4.9 c)$$

dir. Goodier (4.9) denkleminin yakın ifadeleri verir. q_s lerin pozitif doğrultuları Şekil 4.5 de gösterilmiştir. Knittel, sandık kesitlerinin yüklü düğümlerinin W sehimleri çıkarmak için bir yöntem verir. Bu him birim uniform torsiyonel yük için δ_1 ile gösterilir. Bu alt planda orta noktasında kesilmesiyle statik olarak hesaplanabilen birim uzunluğunda bir sandık kesit gözönüne alınarak hesaplanır.



Şekil 4.5 St. Venant Torsiyon birim kayma kuvvetleri

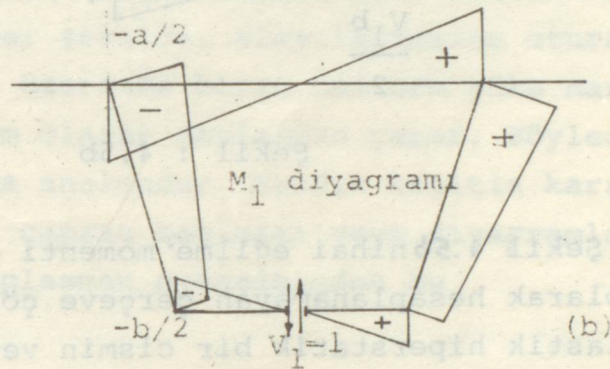
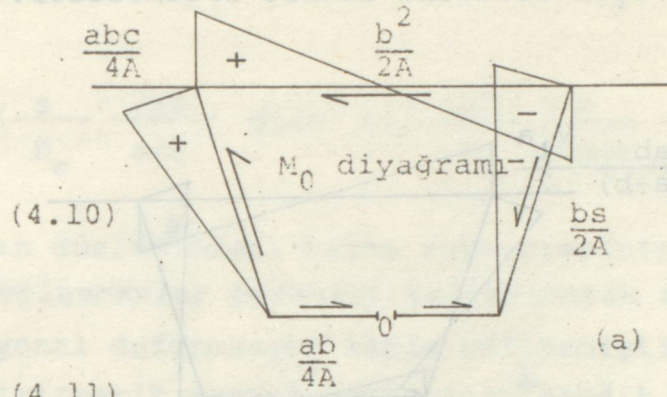
Birim genelleştirilmiş yükten meydana gelen δ_1 distorsiyona sehimli birim yük metodu ile bulunabilir. Düşey simetri eksenine ^{Şekil 4.5} bir trapez sandık birim genelleştirilmiş yüklerin tesiri altında V_{Qs} rılmıştır.

$$\delta_{11} V_1 = -\delta_{10} \quad (4.10)$$

Burada $M_1^2 ds$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2 ds}{EI} \quad (4.11)$$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0 ds}{EI}$$



Şekil : 4.5a

$2A = (a+b)c$ olduğunu gözönüne alır yukardaki intekraller kullanılarak

$$\delta_{11} = \frac{2}{24} \left[\frac{b^3}{D_a} + \frac{a^3}{D_{\bar{u}}} + \frac{2s}{D_{\sigma}} (b^2 + a.b + a^2) \right] \quad (4.12)$$

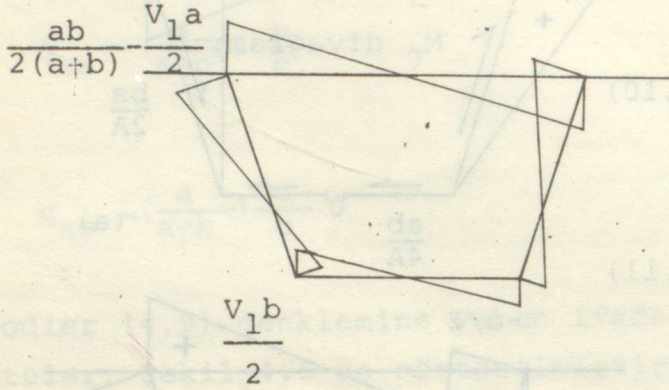
ve

$$\delta_{10} = - \frac{2}{24(a+b)} \left[\frac{1}{D_{\bar{u}}} . b . a^3 + \frac{s}{D_{\sigma}} . b . a (b + 2a) \right] \quad (4.13)$$

(4.12) ve (4.13) denklemleri (4.10) da yerine konulur ve denklem çözülürse

$$V_1 = \frac{\left[\frac{b.a^3}{D_{\bar{u}}} + \frac{s.a.b}{D_{\sigma}} (b + 2a) \right]}{(a+b) \left[\frac{b^3}{D_a} + \frac{a^3}{D_{\bar{u}}} + \frac{2s}{D_{\sigma}} (b^2 + b.a + a^2) \right]}$$

elde edilir. V_1 in üst flanşta düzlem kayma kuvveti dışında birim torsiyonel yük için olduğuna dikkat edilmelidir.



Şekil : 4.5b

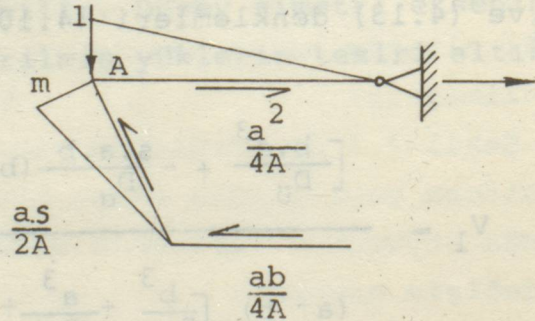
Şekil 4.5b nihai eğilme momenti diyagramını gösterir. Böylece statik olarak hesaplanamayan çerçeve çözülmüş olur, Verilen kuvvetler maruz elastik hiperstatik bir cismin verilen bir nokta ve doğrultusundaki δ sehimini birim yük metodu (virtüel kuvvet) ile hesaplanılabilir. Eğilme enerjisi durumunda

$$\delta_{kf} = \int_L \frac{M \cdot m}{EI} \cdot ds \quad (4.14)$$

dir. Burada m k daki birim yük ile meydana gelen momentlerdir. Yarı sistem ile çalışarak

$$m = \frac{a \cdot b}{2(a+b)} \quad (4.15)$$

bulunur.



Şekil : 4.5c)

A noktasında düşey sehim

$$\delta_1 = \frac{ab}{24(a+b)} \left\{ \frac{s}{D_a} \left[\frac{2ab}{a+b} - V(2a+b) \right] + \frac{a^2}{D_{\bar{u}}} \left[\frac{b}{a+b} - V \right] \right\} \quad (4.16)$$

dir. 4.16 denklemi plakların düzlemindeki kayma kuvvetlerinin işinin göz-önüne alınmadan virtüel deplasmanlar prensibi kullanılarak elde edilir. Çünkü δ_1 de torsiyonal deformasyon dahil edilmemiştir.

Diyaframsız bir prizmatik sandık kesit için δ_1 sandık kesitin uzunluğu boyunca değişmez. Benzer şekilde, elastik zemine oturan ankastre edilmemiş kiriş, bütün uzunluk üzerinde birim üniform yüke maruz olduğu zaman eğilmesiz $1/k$ ile üniform olarak deplasman yapar. Böylece sandık kesitinin $1/\delta_1$ i BEF in k sına analogdur. Sandık kesitin karşıt köşeleri arasındaki uzaklık değişimi çapraz bağlantı veya diyaframların deformasyonunu belirler. Virtüel deplasman prensibinden bu

$$\delta_b = \frac{2(1 + \frac{a}{b}) \delta_1}{\sqrt{1 + (\frac{a+b}{2c})^2}} \quad (2.12)$$

ile verilir.

Gövdenin altında δ_1 enkesit deformasyonuna tekabül eden distorsiyon gerilmesi

$$\sigma_t = F_d = \frac{b \cdot V_1}{2 W_m} \quad (4.13)$$

dir ve gövde üstündeki distorsiyon gerilmesi

$$\sigma_t = F_d = \frac{a}{2 W_m} \left(\frac{b}{a+b} - V_1 \right) \quad (4.14)$$

dir. 4.13 ve 4.14 denklemlerinde W_m = Sandık kesitin açıklık doğrultusunda birim uzunluktaki plak mukavemet momenti enine olarak rijitleşti-

rilmiş bir plak için. W_m rijitleştirici kesiti artı efektif plak genişliği birleşiminin kesit mukavemet momentinden daha küçüktür.

Enkesitin bu üniform deformasyonu ile ilgili çarpılma gerilmeleri yoktur. Genel durumlarda yüklemenin burulma tesiri çarpılma gerilmesi için küçüktür (genellikle ihmal edilir). Bunların çıkarılması Bercotter tarafından açıklanmıştır.

2.3. Enkesitin Çarpılma Şekildeğiştirmesine Dayanımı:

I_b BEE atalet momentine tekabül eden sandık kesit özelliği çarpılma şekil değıştirmesi ile dengelenen torsiyonel yükün miktarı gözne alınarak çıkarılır. Şekil: 4.1 de her bir plak boyunca lineer gerilme değışimli çarpılma gerilmeleri diyagramı gösterilmiştir, gövdenin tındaki σ_s çarpılma gerilmeleri referans değıeri olarak kullanılır. Simetri özelliğı ile, çarpılma gerilmeleri ne bir net eksenel basınca ve nede yatay eksene göre moment de hasil olur. Sırayla gövdenin üst altındaki σ_r ve σ_s çarpılma gerilmesi arasındaki bağıntı düşey sırtı eksenine göre moment meydana getirmeyen çarpılma gerilmeleri şartı ile elde edilir.

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} = \frac{b^2 t_a + \frac{s(a+2b)}{3} t_a}{\frac{(a+d)^3}{a} t_u + s(2a+b) t_a} \quad (4.15)$$

Her bir plaktaki düzlem kayma kuvveti değıeri $\frac{d^2 \sigma_s}{dx^2}$ ile rantılı kalıcı (restrain) çarpılma ile meydana gelir. Üst, alt ve gövde plakları için $d^2 \sigma_s / dx^2$ katsayıları

$$q_{wu} = a \left[i_w - \frac{b}{4} t_a - \frac{s}{2} \left(1 - \frac{\sigma_r}{\sigma_s} \right) t_g + \frac{(a+d)^3}{6a^2} \cdot \frac{\sigma_r}{\sigma_s} \cdot t_u \right] \quad (4.16)$$

$$q_{wa} = -b \left[i_w - \frac{b}{12} t_a \right] \quad (4.17)$$

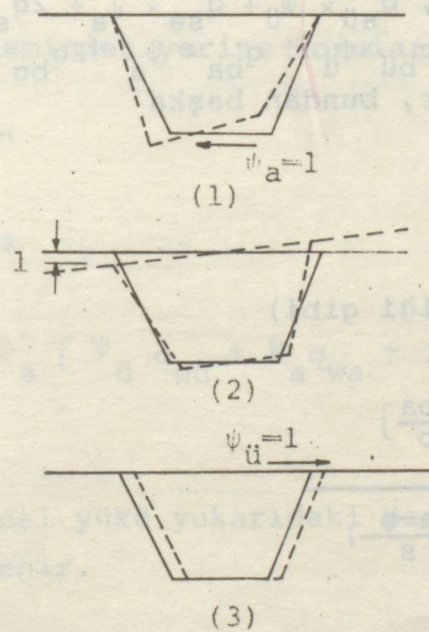
$$q_{wg} = c \left[i_w - \frac{b}{4} t_a - \frac{s}{6} \left(2 - \frac{\sigma_r}{\sigma_s} \right) t_g \right] \quad (4.18)$$

dir. Örneğin $(q_{wu}) d^2 \sigma_s / dx^2$ üst plağın $(a+d)$ tüm genişliğı için ka değıerini verir. Bu ifadeler, alt plak ortasında sıfır kayma için boy doğrultudaki denge gereklerinden elde edilir. i_w değıeri, kayma sirk

yon teoremini tatmin için gerekli bir toplam terimini gösterir. Mafih, bu terim ihmal edilebilir. Çünkü aşağıdaki gelişmelerde bu iptal edilecektir. q_w ye ait işaret kabulü Şekil:4.5 dekilere tekabül eder.

$q_w \frac{d^2 \sigma_s}{dx^2}$ kayma kuvvetleri ile dengelenen torsiyonal yük virtüel deplasmanlar prensibi kullanılarak hesaplanır. İlk önce, bu enkesit deformasyonu boyunca plak elemanlarının enine doğrultulardaki hareketlerini hesaplamak için gereklidir. Şekil:4.6 enkesit deformasyonuna ait deplasman bileşenini vermek için lineer olarak birleştirilebilen 3 deplasman bileşenini gösterir. Her bir plağa ait deplasman katsayısı uygun bir indis ile ψ olarak gösterilir. Pozitif doğrultular Şekil 4.5 te gösterilmiştir. Bu deplasman katsayıları

$$\begin{bmatrix} \psi_u \\ \psi_a \\ \psi_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{-2c}{a} & -1 \\ 0 & -\frac{c}{s} & \frac{-(a-b)}{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$



Şekil 4.6 - Enkesite ait deplasman bileşenleri

matris ifadeleri ile verilir. α_1 şekil 4.6'nin $i (i=1, 2, 3)$ bileşiminin iştirakini belirler. Eğer α_2 bire eşit bir takım teşkil eden gövde üstünün W düşey deplasman katsayısı bire eşit olur. α_1 ve α_2 değerleri ne St.Venant torsiyonundan ve ne de sandık kesitin düşey sentroit eksenine göre eğilmeden hasil olan kayma kuvvetlerin enkesit deplasmanında yaptığı iş gereğiyle bulunur. Plaklardaki St.Venant torsiyonuna ait kayma kuvvetleri (4.9) denklemi ile verilen oranlardadır. Plaklarda düşey sentroit eksenine göre eğilmeye ait kayma kuvvetleri aşağıdaki oranlardadır:

$$q_{b\bar{u}} = a \left[i_b - \frac{b}{4} t_a - \frac{s}{2} \left(1 + \frac{a}{b} \right) t_g - \frac{(a+d)^3}{6a^2} \cdot \frac{d}{a} t_{\bar{u}} \right] \quad (4.18)$$

$$q_{ba} = b \left[i_b - \frac{b}{12} t_a \right] \quad (4.18)$$

$$q_{bg} = s \left[i_b - \frac{b}{4} t_a - \frac{s}{6} (2a + b) t_g \right] \quad (4.18)$$

(4.18) denklemindeki i_b , (4.16) denklemindeki i_w ile aynı manaya sahiptir. Serbest ucunda torsiyonel veya eğilme kayma kuvvetleri ile yüklü olmuş konsol sandık kiriş için, $q_{s\bar{u}} \times \psi_{\bar{u}} + q_{sa} \times \psi_a + 2q_{sg} \times \psi_g = 0$ ise St.Venant torsiyonunun işi ve $q_{b\bar{u}} \times \psi_{\bar{u}} + q_{ba} \times \psi_a + 2q_{bg} \times \psi_g = 0$ ise düşey eksene göre eğilme işi yoktur, bundan başka

$$\alpha_1 = \frac{2c}{b} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \quad (4.19)$$

$$\alpha = 1 \text{ (kabul edildiği gibi)} \quad (4.19)$$

$$\alpha_3 = \frac{2c \left[\frac{q_{bg}}{s} - \frac{q_{ba}}{b} \right]}{q_{b\bar{u}} - q_{ba} - q_{bg} \left(\frac{a-b}{s} \right)} \quad (4.19)$$

dir. (4.17) denkleminde sınır deplasman katsayıları yerine konularak

$$\psi_{\ddot{u}} = \alpha_1 \quad (4.20 \text{ a})$$

$$\psi_a = \alpha_1 - \frac{2c}{a} - \alpha_3 \quad (4.20 \text{ b})$$

$$\psi_{\sigma} = -\frac{c}{s} - \frac{a-b}{2s} \alpha_3 \quad (4.20 \text{ c})$$

elde edilir.

Akt plak deplasmanı $\psi_a W$ ve bu plak ortasındaki çarpılma gerilmesi sıfırdır. σ_s referans çarpılma gerilmesi çarpılma anında alt plağın eğilmesi ile W ye bağlanır.

$$\sigma_s = E \cdot \frac{b}{2} \psi_a \cdot W'' \quad (4.21)$$

P_W yayılı torsiyonel yük, δW virtüel deplasman kullanılarak ve (4.16) denklemindeki P_W ve q_W nin işi gözönüne alınarak birleştirilen kalıcı çarpılma ile dengelenir. Bu durumda

$$2P_W \times \delta W - (q_{W\ddot{u}} \times \psi_{\ddot{u}} + q_{Wa} \times \psi_a + 2q_{W\sigma} \times \psi_{\sigma}) \left(\frac{d^2 \sigma_s}{dx^2} \right) \cdot \delta W = 0$$

olur. (4.21) denkleminde yerine konularak

$$P_W = EI_b W'''' \quad (4.22)$$

yazılabilir. Burada

$$I_b = \frac{b}{4} \psi_a \left[\psi_{\ddot{u}} q_{W\ddot{u}} + \psi_a q_{Wa} + 2 \psi_{\sigma} q_{W\sigma} \right] \quad (4.23)$$

dür.

P_d torsiyonel yükü yukarıdaki paragrafta verilen enkesit deformasyonu ile dengelenir.

$$P_d = \frac{W}{\delta_l} \quad (4.24)$$

Tatbik edilen torsiyonel yüke toplam dayanım (4.22) ve (4.24) denklemlerinin toplamı olarak verilir ve şu şekilde yazılır:

$$P = P_d + P_w = \frac{W}{\delta_1} + EI_b W'''' \quad (4.25)$$

Aşıkârdır ki (4.25) denklemi k ya tekabül eden $\frac{1}{\delta_1}$ li (4.2) BFF diferansiyel denklem biçimine haizdir.

2.4. Diyafram Özellikleri:

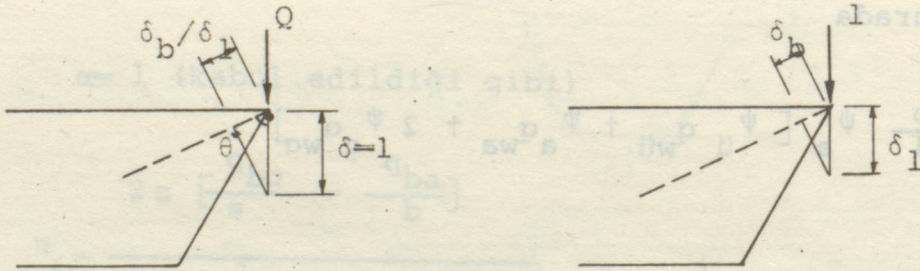
Bir sandık kirişteki diyafram ve çapraz bağlantıların kalıcı kesit deformasyonu elastik zemine oturan kirişlerdeki iç mesnetlerinki kalıcı sehimleri gibidir. Sandık kiriş davranışında diyafram fleksibilitesinin etkisi, BFF analojisinde buna tekabül eden mesnet fleksibilitesi çıkarılarak hesaplanır.

2.4.1 Çapraz bağlantılar:

İlk önce çapraz bağlantı çiftleri ile rijitleştirilmiş bir sandık kesit gözönüne alınır. Her bağlantı çifti şu özelliklere haizdir:

(1) l_b : uzunluk, (2) A_b : alan ve (3) E_b : elastisite modülü.

Bağlayıcı rijitliği, birim torsiyonel yerdeğiştirmeyi meydana getirmek için gerekli ve her dövdenin üstünde etkiyen, Q ile döster münferit torsiyonel yükün şiddeti olarak belirlenir.



Şekil :4.7

Diyagonaldeki kuvveti P^* olarak ve birim distorsiyonal yük için diyagonal uzunluğu değişiminin δ_b olduğunu kabul edelim. Öyleyse

$$\frac{P^*}{A_b} = E_b \cdot \epsilon$$

veya

$$P^* = \frac{E_b \cdot A_b}{L_b} \times \frac{\delta_b}{\delta_1}$$

$$Q = P^* \cos \theta^* \quad \cos \theta^* = \frac{\delta_b}{\delta_1}$$

ve buradan

$$Q = \frac{E_b \cdot A_b}{L_b} \cdot \left(\frac{\delta_b}{\delta_1} \right)^2 = E_b A_b \frac{4c^2 \left(1 + \frac{a}{b} \right)^2}{L_b^3} \quad (4.26)$$

bulunur. Burada δ_b ve δ_1 (4.11) ve (4.12) denklemleri ile verilmiştir. Boyutsuz bağlantı rijitliği

$$q = \frac{Q \cdot \delta_1}{l} = \frac{E_b \cdot A_b}{L_b} \cdot \frac{\delta_b^2}{2\delta_1} \quad (4.27)$$

2.4.2. Diyaframlar :

Bir plak diyaframın rijitliği eşdeğer bir çapraz bağlantı çiftinden elde edilir. Basit kayma da dikdörtgen plak diyafram aynı

$$A_b = \frac{G_p t_p L_p}{2E_p A_p} \quad (4.28)$$

alanlı çapraz bağlantı rijitliğine haiz olacaktır. Burada A_p , E_p , G_p ve t_p sırayla plak diyaframın orta düzlem alanı, elastisite modülü, kayma modülü ve kalınlığıdır. Çünkü sandık kesitin davranışı diyafram

rijitliğinde ehemmiyetsiz değişmeler ile fazla etkilenmez. Trapez kesitler için (4.28) denklemi Şekil 4.4 deki notasyonlara göre

$$A_b = \frac{G_p t_p c^2}{E_b (a+b)} \left[1 + \left(\frac{a+b}{2c} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (4.29)$$

şeklini alır.

(4.26) ve (4.27) denklemleri BEF'e ait analog mesnet rijitliklerini bulmak için kullanılır. Bu gelişmede plak diyaframların çarpılma gerilmelerinin ihmal edildiği gözönüne alınır.

2.5. Yaklaşık çarpılma gerilmeleri :

Sandık kesitin iki yarısının ters doğrultularda, yatay eksene göre eğilmesinde enkesit deformasyonu benzeşiminden 4.23 denklemindeki I_b yaklaşık olarak

$$I_b \approx \frac{1}{4} I_c \quad (4.30)$$

teklif edilir. Burada I_c gözün yatay sentroit eksenine göre atalet momentidir. σ_w çarpılma gerilmesi yatay eksene göre eğilme analogisi ile yaklaşık olarak ifade edilir:

$$\sigma_w \approx E_y W'' \quad (4.31)$$

(4.3) denklemindeki β BEF parametresinin (4.30) denkleminin I_b kullanılarak hesaplanan β nin (4.23) denkleminde I_b kullanılarak hesaplanan β ya oranı r_β , I_b yaklaşıklığının kullanılmasından sıt olan hatayı gösterir.

$$r_\beta = \sqrt{\frac{4I_b}{I_c}} \quad (4.32)$$

(4.32) denklemindeki I_b için (4.23) denklemi kullanılır. Yaklaşık I_b değeri tam olsa bile (bu üniform duvar kalınlığına haiz tabliye çıkırtısı olmayan kare kesitler için tam doğrudur) (4.31) denklemindeki σ_w çarpılma gerilmesini hesaplamak için toplam hata söz konusudur. (4.32) denkleminin kullanılışıyla hesaplanan gövdenin altındaki σ_s referans çarpılma gerilmesinin (4.21) denklemi kullanılarak elde edilen orana

$$r_s = \frac{2(c-\bar{y})}{b \psi_a} \quad (4.33)$$

ile verilir. Her iki ifade için aynı W'' kabul edilmiştir. Bu hata oranları enkesit genişliği değişimi için çıkarılmıştır. r_β oranı bire eşit veya birden büyüktür, Bu da hem distorsiyon ve hem de çarpılma gerilmelerinin daha büyük değere haiz olduğunu gösterir. r_s oranı daima bire eşit veya birden küçüktür. Buda farkların denkleştiğini gösterir. Bu oranlar aynı b/a ve c/a ya haiz değişik sandık şekiller için tablo 4.1 de gösterilmiştir. Değişimde maksimum $r_\beta \approx 1,25$, daha ince gövdeler ve daha sığ kesitler için oran 1 e yaklaşmaktadır. Pratikteki flanş ve gövde oranları için r_β ençok 1,15 e ulaşır ve genellikle 1,10 dan azdır.

3. Sandık kiriş ile ilgili BEF'e ait çözümler:

Elastik zemine oturan kirişlere ait çözümlerin bir kısmı burada sunulmuştur. Sandık kirişlerin çözümüne ait bağıntılar gözönüne alınmıştır. Kullanılan hesaplama yöntemi Miran da ve Nair tarafından açıklanmıştır. Çözümde çıkarılan en büyük parametre BEF iç mesnetleri arasında veya sandık kiriş iç diyaframları arasındaki (βl) boyutsuz panel uzunluğudur. Sandık kiriş için

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{1}{4EI_b \delta_1}} \approx \sqrt[4]{\frac{I}{EI_c \delta_1}} \quad (4.34)$$

dir. İkinci ifade de $I_b \approx \frac{1}{4} I_c$ kullanılır. BEF mesnet veya sandık kiriş diyaframlarının q boyutsuz rijitliği keza çözümde önemli tesire haizdir.

3.1. Özel Yükleme Örnekleri:

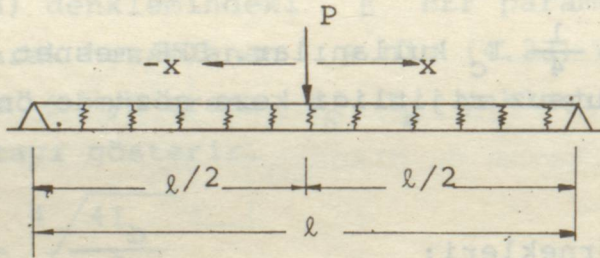
Aşağıda birkaç uygun örnek kısaca açıklanacaktır. Bütün örneklerde kiriş iki ucunda basit mesnetli ve yalnız bir kenarında yüklü olduğu kabul edilir.



Tablo 4.1 Yaklaşık I_b için hata analizi

Trapez sandıklar: $a = 100$, $c = 100$, $b = 50$, $t_a = 1$						
t a	0,25	0,50	1,00	0,25	0,50	1,00
	r_β			r_s		
a) $d = 0$						
0,50	1,08	1,13	1,18	0,85	0,83	0,80
1,00	1,06	1,10	1,16	0,77	0,77	0,78
2,00	1,06	1,09	1,14	0,65	0,67	0,68
b) $d = 50$						
0,50	1,10	1,16	1,21	0,84	0,81	0,79
1,00	1,07	1,13	1,19	0,77	0,76	0,74
2,00	1,07	1,11	1,16	0,66	0,66	0,67
c) $d = 100$						
0,50	1,10	1,16	1,23	0,85	0,81	0,78
1,00	1,07	1,13	1,20	0,78	0,76	0,74
2,00	1,07	1,12	1,17	0,68	0,68	0,67

3.1.1. Açıklık Ortasında Münferit Yük:



Şekil:4.8. Açıklık ortasında münferit yüke maruz elastik zemine oturan kiriş

Şekil 4.8 de olduğu gibi BEF ortasında münferit P yüküne maruz olduğu zaman herhangi bir kesitteki sehim

$$W_x = \frac{P\beta}{2k(\cosh\beta l + \cos\beta l)} [\cos\beta x \sinh\beta(l-x) - \cosh\beta x \sin\beta(l-x) + \sin\beta x \cosh\beta(l-x) - \sinh\beta x \cos\beta(l-x)] \quad (4.35)$$

dir.

Açıklık ortasında $x = 0$ konulursa

$$W = \frac{P\beta}{2k} \left(\frac{\sinh\beta l - \sin\beta l}{\cosh\beta l + \cos\beta l} \right) \quad (4.36)$$

ölür. Burada parantez içindeki kısım boyutsuz w olarak belirlenir ve $k = 4\beta^4 EI_b$ olduğuna dikkat edilirse açıklık ortasında boyutsuz w sehi-mi

$$w = \frac{8EI_b \beta^3}{P} W \quad (4.37)$$

olarak verilir.

BEF in açıklık ortasındaki moment

$$M = \frac{P}{4\beta} \left(\frac{\sinh\beta l + \sin\beta l}{\cosh\beta l + \cos\beta l} \right) \quad (4.38)$$

dir. Parantez içindeki kısım m olarak belirlenir ve m çekilirse hakiki M momenti terimi ile

$$m = \frac{4\beta}{P} M = \frac{4EI_b \beta}{P} .W'' \quad (4.39)$$

ile belirlenir. Açıklık ortasında kesme kuvveti

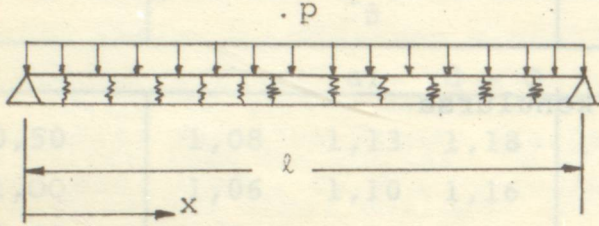
$$V = \frac{P}{2} \quad (4.40)$$

ölür.

Yukarıda βl nin fonksyonu olarak belirlenen m ve W , bu βl e, bağlı olarak abak haline getirilmiştir. (Abak no.4.1).

Aynı değerler ortasında münferit yük tesirine maruz BEF için 4.2~ 4.4 abakları düzenlenmiştir.

3.1.2. Uniform yüklü BEF :



Sekil 4.9 Uniform yüke maruz BEF

BEF P uniform yayılı çizgisel yüküne maruz iken herhangi bir kesitteki sehim şöyle ifade edebiliriz:

$$w_x = \frac{P}{k} \left[1 - \frac{\cosh \beta x \cos \beta (l-x) + \cos \beta x \cosh \beta (l-x)}{\cosh \beta l + \cos \beta l} \right] \quad (4.41)$$

Açıklık ortasında sehim, moment ve kesme kuvveti de $(x = \frac{l}{2})$ gözönüne alınarak aşağıdaki şekilde bulunur.

Sehim:

$$w = \frac{P}{2k} \left[2 - \frac{4 \cosh \left(\frac{\beta l}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta l}{2} \right)}{\cosh \beta l + \cos \beta l} \right] \quad (4.42)$$

parantez içindeki ifade w ile gösterilir ve $k = 4 EI_b \beta^4$ gözönüne alınarak

$$w = \frac{8 \beta^4 EI_b}{P} W \quad (4.43)$$

bulunur.

Moment :

$$M = \frac{P}{4\beta^2} \left[\frac{4\sinh\left(\frac{\beta l}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\cosh\beta l + \cos\beta l} \right] \quad (4.44)$$

parantez içindeki ifade m ile gösterilerek

$$m = \frac{4\beta^2}{P} M \quad (4.45)$$

bulunur.

Kesme kuvveti: $V = 0$ dır.

Sözü edilen üniform yayılı yüke maruz BEF'e ait bu W, m ve reaksiyonlar için βl nin fonksiyonu olarak abaklar düzenlenmiştir (4.5 ~ 4.8 abakları).

$\beta l > \pi$ iken sandık kiriş gövdesi sonsuz bir kiriş gibi gözönüne alınabilir ve pratik maksatlar için aşağıdaki yaklaşımlar yeterlidir.

$$W = \frac{P}{k} (1 - e^{-\beta x} \cos \beta x) \quad (4.46)$$

$$M = \frac{P}{2\beta} (e^{-\beta x} \sin \beta x) \quad (4.47)$$

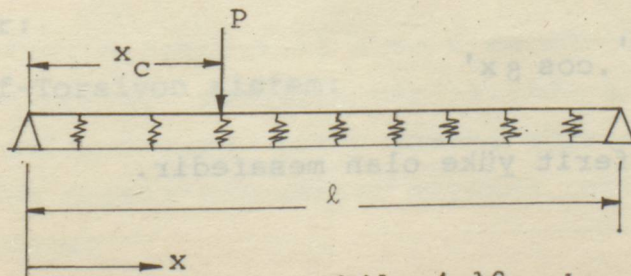
$$V = \frac{-P}{2\beta} \cdot e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) \quad (4.48)$$

Her iki mesnetten π/β dan daha büyük mesafelerde

$$W = Pk \quad (4.49)$$

gözönüne alınabilir ve pratik olarak kirişte eğilme yoktur.

3.1.3- Açıklığın herhangi bir noktasında bir P münferit yüküne maruz BEF.



Şekil :4.10

Kiriş açıklık boyunca herhangi bir noktada bir P münferit yüküne maruz olduğu zaman, trigonometrik biçimde yaklaşık çözümler kullanmak çok uygundur. Bu yüzden sırayla sehim, moment ve kesme kuvveti şu şekilde verilebilir:

$$W = W' - \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI_b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x_c}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{mn^4} \quad (4.50)$$

$$M = M' - \frac{2Pl^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x_c}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{mn^2} \quad (4.51)$$

$$V = V' - \frac{2P}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x_c}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{mn} \quad (4.51)$$

Burada

W' , M' , V' sırayla elastik zemin tesiri olmaksızın P etkisi meydana gelen sehim, eğilme momenti ve kesme kuvvetidir.

$$m = 1 + \left(\frac{n^4}{4}\right) (\pi/\beta l)^4$$

$\beta l > \pi$ iken kiriş gene yarı sonsuz bir kiriş gibi gözönüne alınabilir. Yükler ve kesitler her iki mesnetten π/β dan daha uzakta yer aldığı anda sonsuz bir kiriş için verilen aşağıdaki çözümler pratik amaçlar için uygun olduğu gözönüne alınabilir.

$$W = \frac{P\ell}{2k} \cdot e^{-\beta x'} (\cos \beta x' + \sin \beta x') \quad (4.52)$$

$$M = -\frac{P}{4\beta} \cdot e^{-\beta x'} (\sin \beta x' - \cos \beta x') \quad (4.53)$$

$$V = -\frac{P}{2} \cdot e^{-\beta x'} \cdot \cos \beta x'$$

Burada x' münferit yüke olan mesafedir.

3.1.4- Yatay Yükler ve Diğer Eksantrik düşey yükler:

Daha önceki incelemelerde, saf-torsiyon ve saf kayma sistemleri yalnız gövdenin üst kenarları üzerinde direkt olarak yüklenmiş yükler için elde edilmiştir. Aşağıda diğer yükleme durumlarından söz edilecektir.

Yatay Yükler:

Kirişin sırayla alt ve üst flanşları boyunca $H_{\bar{u}}$ ve H_a kuvvetlerine maruz olduğunu kabul edelim (Şekil 4.11). Yükler, $[H_{\bar{u}}y_{\bar{u}} - H_a(c - y_{\bar{u}})]$ ye eşit bir moment ile beraber burulma merkezinden geçen $H = H_{\bar{u}} + H_a$ bileşke kuvveti şeklinde düşünülebilir. Burada

$$y_{\bar{u}} = (\alpha_a \lambda + 2\lambda + 1) \cdot c / (\alpha_{\bar{u}} + \lambda + 2)$$

$$\alpha_{\bar{u}} = \frac{12 I_{\bar{u}}}{A_c a^2} ; \quad \alpha_a = \frac{12 I_a}{A_c b^2} ; \quad \lambda = \frac{b}{a}$$

dür. Bu dönüşümlerde

$$H_{\bar{u}1} = H(1 - \frac{y_{\bar{u}}}{c}) \quad \text{ve} \quad H_{a1} = H(\frac{y_{\bar{u}}}{c})$$

ve

$$H_{\bar{u}2} = H_{a2} = [H_{\bar{u}}y_{\bar{u}} - H_a(c - y_{\bar{u}})] / c = [H(\alpha_a \lambda + 2\lambda + 1) / (\alpha_{\bar{u}} + \lambda + 2)] - H_a$$

değerini ihtiva eden antisimetrik kuvvet çifti olarak düşünülebilir.

$H_{\bar{u}1}$ ve H_{a1} kirişi simetrik olarak yatay eğilmeye zorlar. Halbuki, $H_{\bar{u}2}$ ve H_{a2} kiriş enkesitinin burulmasını ve distorsiyonunu sağlar.

Şekil : 4.12 ye bakarak, plak kuvvetleri antisimetrik yüklerden çıkarılabilir:

a: Saf-Torsiyon sistem:

$$P_{t\ddot{u}} = \frac{a}{s} \cdot P_{tg}$$

$$P_{ta} = \frac{b}{s} \cdot P_{tg}$$

(4.54)

$$P_{tg} = \frac{s[\alpha_a \lambda + 2\lambda + 1)H_{\ddot{u}} + (\alpha_{\ddot{u}} - \alpha_a \lambda - \lambda + 1)H_a]}{(b + a)(\alpha_{\ddot{u}} + \lambda + 2)}$$

b) Saf-kayma sistemi:

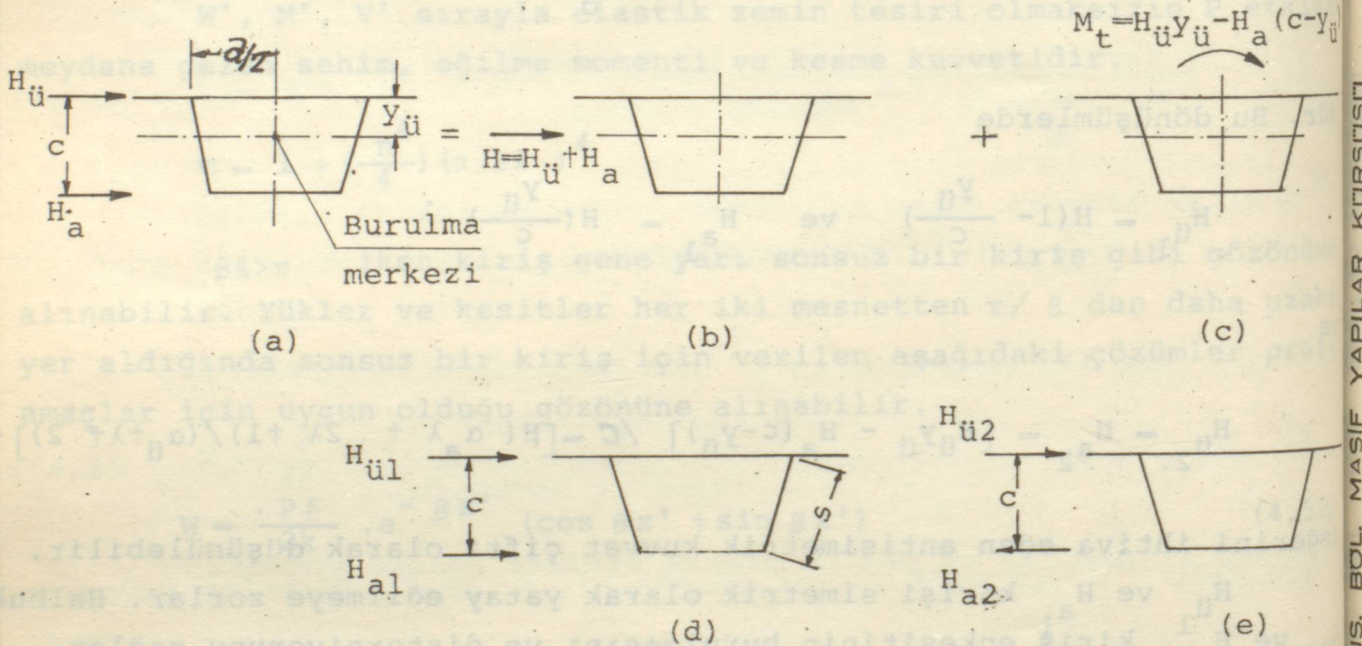
$$P_{s\ddot{u}} = -\frac{b_a}{s} P_{sg}$$

$$P_{sg} = -P_{tg}$$

(4.55)

$$P_{sa} = -\frac{b_{\ddot{u}}}{s} P_{sg}$$

Bundan dolayı, kiriş yukarıda açıklandığı gibi gövde, elastik zemine oturan eşdeğer bir kiriş gibi gözönüne alınarak analiz edilebilir.



Şekil: 4.11 Yatay yüklerin genel ayrırımı

$$\begin{array}{cc}
 P_{t\bar{u}} = \frac{a}{a+b} H_{\bar{u}2} & P_{s\bar{u}} = \frac{b}{a+b} H_{\bar{u}2} \\
 P_{tg} = \frac{s}{a+b} H_{\bar{u}2} & P_{tg} = -\frac{s}{a+b} H_{\bar{u}2} \\
 P_{ta} = \frac{a}{a+b} H_{\bar{u}2} & P_{sa} = \frac{a}{a+b} H_{\bar{u}2}
 \end{array}$$

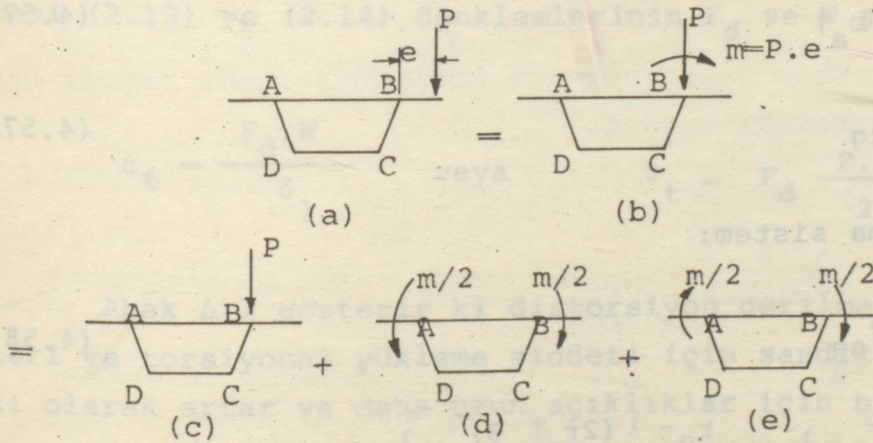
(a) saf torsiyon

(b) saf kayma

Şekil: 4.12- Yatay yüklerin saf-kayma ve saf-torsiyon sistemleri

Konsol tabliye döşemelerinde düşey yükler:

Şekil 4.13 de konsol kolda B den e uzaklıkta düşey P yükleri tatbik edilmiştir. Bu yükün B ayrıtı boyunca etkiyen P kuvveti ve $m = P.e$ momenti ile gözönüne alınabileceği aşıkârdır. Burada yalnız m momentlerinin sebep olduğu tesirler incelenecektir. Zira P yüklerinden meydana gelen tesirler daha önce incelenmişti.



Şekil:4.13 Konsol tabliyede düşey yükler

Mamafih, m şekil.4.13 e ve d de görüldüğü gibi iki moment gurubu ile düşünülebilir. Bunların her ikisinde A ve B kenarları boyunca etkimektedir. Birinci durum düşey eksene göre simetrik olup enine doğrultuda eğilme ve normal gerilmeler meydana getirir. Her plağın kalınlığı üniform olduğunda:

$$M_{BC} = -M_{AD} = \frac{3r_{\ddot{u}}(3r_a + 2)}{(3r_{\ddot{u}} + 2)(3r_a + 2) - 1}$$

$$M_{BA} = -M_{AB} = \frac{m}{2} - M_{BC} \quad (4.56)$$

$$M_{CB} = -M_{DA} = \frac{M_{BC}}{3r_a + 2}$$

şeklinde yazılabilir.

m momenti saat akrebi yönünde pozitif olarak gözönüne alınır.

İkinci kısım (Şekil 4.13 e) anti simetriktir ki iki enine yerel eğilmeye sebep olur, saf-torsiyon ve saf-kayma sistemlerine tekabül eden düzlem kuvvetler meydana getirir. Herbir plak elemanındaki bu kuvvetlerin toplamı uygun analiz metotları ile hesaplanabilir.

Her plak üniform kalınlıklı iken:

a) - Saf torsiyon sistem :

$$P_{t\ddot{u}} = \frac{a}{s} P_{tg} \quad (4.57 a)$$

$$P_{tg} = \frac{sm}{c(b_{\ddot{u}} + b_a)} \quad (4.57 b)$$

$$P_{ta} = \frac{b}{s} \cdot P_{tg} \quad (4.57 c)$$

b) - Saf-kayma sistem:

$$P_{s\ddot{u}} = \frac{b}{s} P_{sq} \quad (4.58 a)$$

$$P_{sq} = \frac{sm}{b c} \left[\frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{r_{\ddot{u}} - \lambda(2r_a + 3)}{(r_{\ddot{u}} + 2)(r_a + 2) - 1} \right] \quad (4.58 b)$$

$$P_{sa} = -\frac{a}{s} \cdot P_{sq} \quad (4.58 c)$$

Yukarıdaki kuvvetler, gövdenin üst kenarı üzerinde direkt olarak

tatbik edilen P den meydana gelen kuvvetler (Şekil 4.13 c) ile toplanabilir ve analiz gereğince yapılabilir.

İlâveten, aşağıdaki yersel enine momentler netice olarak şöyle yazılabilir:

$$M_{BC} = M_{AD} = \frac{r_{\ddot{u}}(r_a + 2) \cdot m}{[(r_{\ddot{u}} + 2)(r_a + 2) - 1]^2} \quad (4.59 \text{ a})$$

$$M_{BA} = M_{AB} = \frac{m}{2} - M_{EC} \quad (4.59 \text{ b})$$

$$M_{CB} = M_{DA} = \frac{M_{BC}}{r_a + 2} \quad (4.59 \text{ c})$$

Dikkat edilmelidir ki saf-torsiyon için verilen kuvvetler (denklem 4.57) guseli tabliyelili kesitler için de geçerlidir.

Gövdeler arasında etkiyen yükler için, benzer denklemler çıkarılabilir. Fakat burada bu verilmeyecektir.

3.2- Gerilmeler

3.2.1- Distorsiyon gerilmesi: Sandık kirişteki distorsiyon gerilmesi (2.13) ve (2.14) denklemlerinin F_d ve W sehimine bağlıdır.

$$\sigma_t = \frac{F_d \cdot W}{\delta_1} \quad \text{veya} \quad \sigma_t = F_d \frac{P \cdot \beta \cdot W}{2} \quad (4.60)$$

Abak 4.1 gösterir ki distorsiyon gerilmesi, sabit enkesit özellikleri ve torsiyonal yükleme şiddeti için sandık kiriş açıklığı ile hızlı olarak artar ve daha uzun açıklıklar için bir limit değere ulaşır.

3.2.2- Çarpılma gerilmesi:

Analög sandık kirişte çarpılma gerilmesi torsiyonal münferit yükün bulunduğu kısımda, (4.23) denkleminde I_b li (4.21) denklemi kullanılarak hesaplanabilir. Eğer $I_b \approx \frac{1}{4} I_c$ kullanılırsa (4.31) ve

(2.34) denklemlerinden

$$\sigma_w = \frac{P \cdot y \cdot m}{\beta I_c} \quad (4.61)$$

bulunur. Ayrıca eğilme teorisi kullanılarak $\sigma_w \approx \frac{M \cdot y}{I_b}$ veya

$$\sigma_w = \frac{P \cdot y \cdot m}{4 I_b^3} \quad \text{veya} \quad \sigma_w = \frac{P \cdot y \cdot m}{\beta I_c} \quad \text{olur}$$

Açıklık *küçül düğünde* çarpılma gerilmelerinin artışı distorsiyon gerilmelerinininkinden daha yavaş olacağı aşıkârdır.

Abak (4.4) muntazam olarak yerleştirilmiş rijit mesnetler üzerinde sürekli bir BEF'e ait bir iç mesnette reaksiyon için tesir çizgisini gösterir. P münferit torsiyonel yüke maruz bir sandık göz için diyafram üstünde etkiyen burulma momenti $P \cdot a \cdot R / p$ ile verilir. Bir plak diyaframda buna tekabül eden kayma gerilmesi

$$\tau_p = \frac{\frac{P \cdot a \cdot R}{P}}{h(a+b)t_p} \quad (4.62)$$

dir.

Tam olarak etkin basınca maruz bağlantıya haiz çapraz bağlantı çifti için bir bağlantıdaki kuvvet

$$F_b = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^2}}{2 \left(1 + \frac{a}{b}\right)} \cdot P \frac{R}{p} \quad (4.63)$$

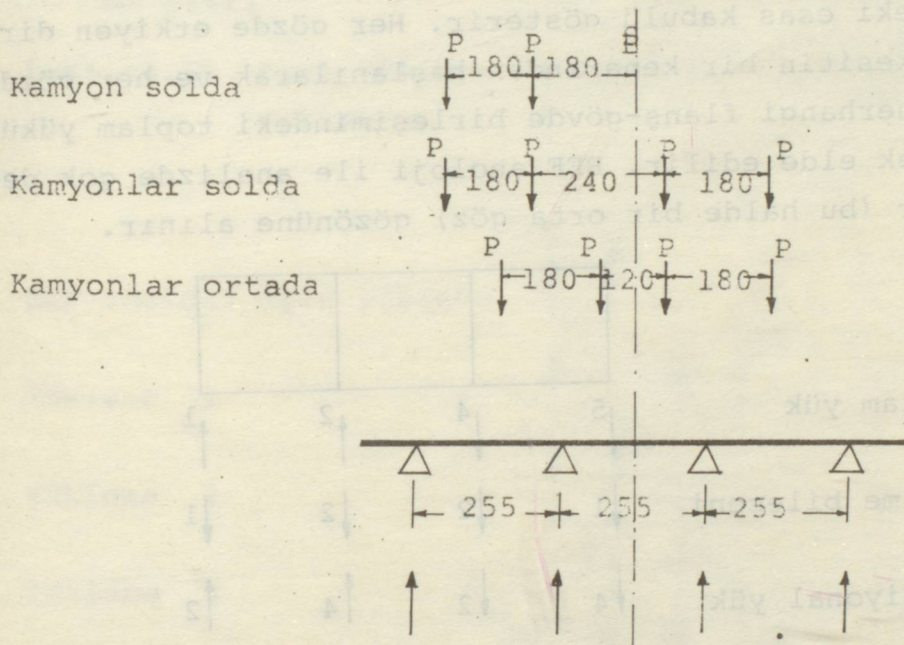
dür.

4. Çok Gözlü Sandık Kirişlerin Yaklaşık Analizi

Burada sunulacak analiz, yukarıda belirtilen tek gözlü sandık kirişlerin enkesit deformasyonu tesirleri analizine ait BEF analogisi istinad ettirilir. Tek gözlü sandık kirişlerde basitlik için çarpılma rijitliğinde bir yaklaşıklık kullanılmıştı. Çok gözlü sandık kirişleri

ayrıca bir yaklaşım daha ilave edilir. Bu yaklaşımda enkesit deformasyonu ve torsiyonun karışık tesirlerinin ihmal edilmesidir.

Bir düz eksenli sandık kirişli köprünün sabit yükünün enine doğrultudaki yayılışı oldukça üniformdur ve enkesit farklı deforme olmaz. Hareketli yükler ise mühim mertebede enkesit deformasyonu meydana getirebilir. Bu yüzden bizi doğrudan doğruya hareketli yükler ilgilendirir. Özel bir enkesitte tekerlek yüklerinin tesiri tabliye-gövde birleşiminde düşey yer değiştirmeleri önlemek için gerekli "bağ kuvvetler" hesaplanarak elde edilir. Bu işlem Şekil 4.14 de verilmiştir. Tabliye enine doğrultuda bir kiriş şeridi gibi kabul edilir ve yalnız düşey bağ-kuvvetler çıkarılır. Çünkü gövdenin dönme rijitliği tabliyeninkine kıyasla



Kamyon solda 1.06P 1.07P -0.14P 0.01P

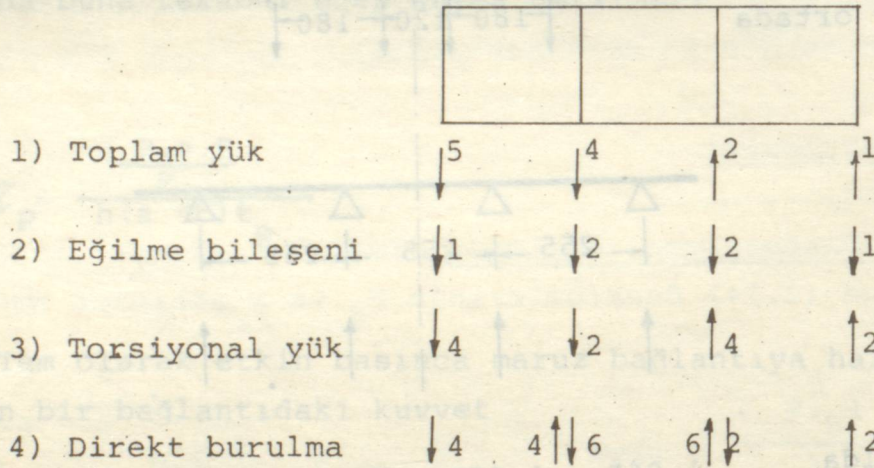
Kamyonlar solda 1.05P 1.18P 1.46P 0.31P

Kamyonlar ortada 0.27P 1.73P 1.73P 0.27P

Şekil:4.14 Sandık kirişte tabliye üzerindeki tekerlek yüklemeleri

küçüktür. Öyleyse dengelenen bağ-kuvvetleri sandık kirişe bir yüklem olarak uygulanır ve bunun neticesi değerlendirilir. Gövdeler ve alt flanşlardaki kuvvetler yalnız bu yüklemekten doğar çünkü bu elemanlar bağ kuvvetleri etkidiğinde gerilme olmazlar.

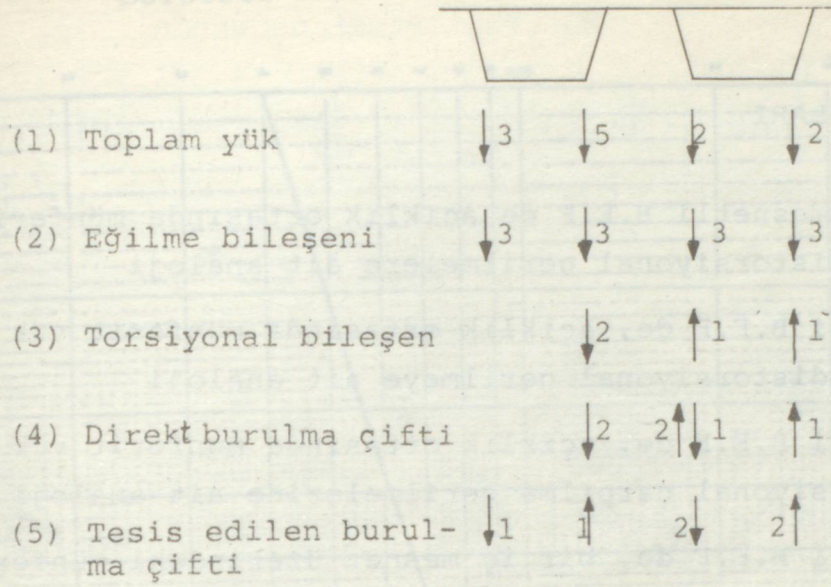
Genel olarak yüklem enkesitin basit eğilmesini meydana getiren bir eğilme bileşeni ihtiva eder. Bu bileşen enkesiti deformeye zorlayan torsiyonel bileşeni elde etmek için toplam yüklemekten çıkarılır. Bu işlem Şekil 4.15 te gösterilmiştir. Birinci satır Şekil 4.14 te gösterilen manada enkesitteki toplam yükü, ikinci satır eğilme bileşenini gösterir ki burada basitlik için gövdenin eğilme rijitliğine iştiraki ilâve edilmiştir. Üçüncü satır net torsiyonel bileşeni gösterir. Dördüncü satır bu gelişmedeki esas kabulü gösterir. Her gözde etkiyen direkt torsiyonel yük, enkesitin bir kenarından başlanılarak ve her gözdeki torsiyonel yük için herhangi flanş-gövde birleşimindeki toplam yükün değeri gösterilerek elde edilir. BEF anoloji ile analizde çok değişik olarak yüklü gözler (bu halde bir orta göz) gözönüne alınır.



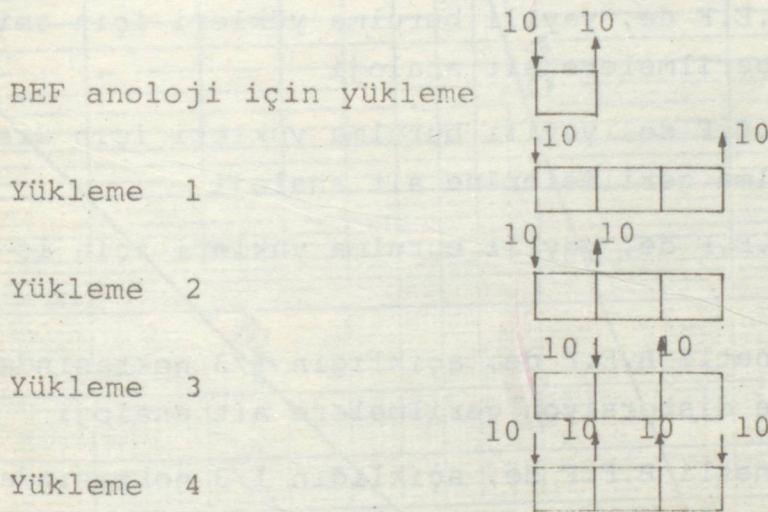
Şekil 4.15 Sürekli gözlere haiz çok gözlü kirişlere ait göz yüklemesi

Benzer bir yaklaşımda ayrı gözlere, çok değişik olarak yüklenmiş gözler haiz çok gözlü sandık kirişi belirlemek için kullanılır. Bunun için Şekil 4.16 da gösterildiği gibi ilâve bir adım daha gereklidir. Eğer direkt torsiyonel yükler göz olmayan yerde vukubulursa bu satır 5 de görüldüğü gibi bitişik gözlere işaretlenir.

BOYUTSUZ PANEL ÖZÜMLÜKÜ



Şekil:4.16 Ayrı gözlerle haiz çok gözlü kirişlere ait göz yüklemesi

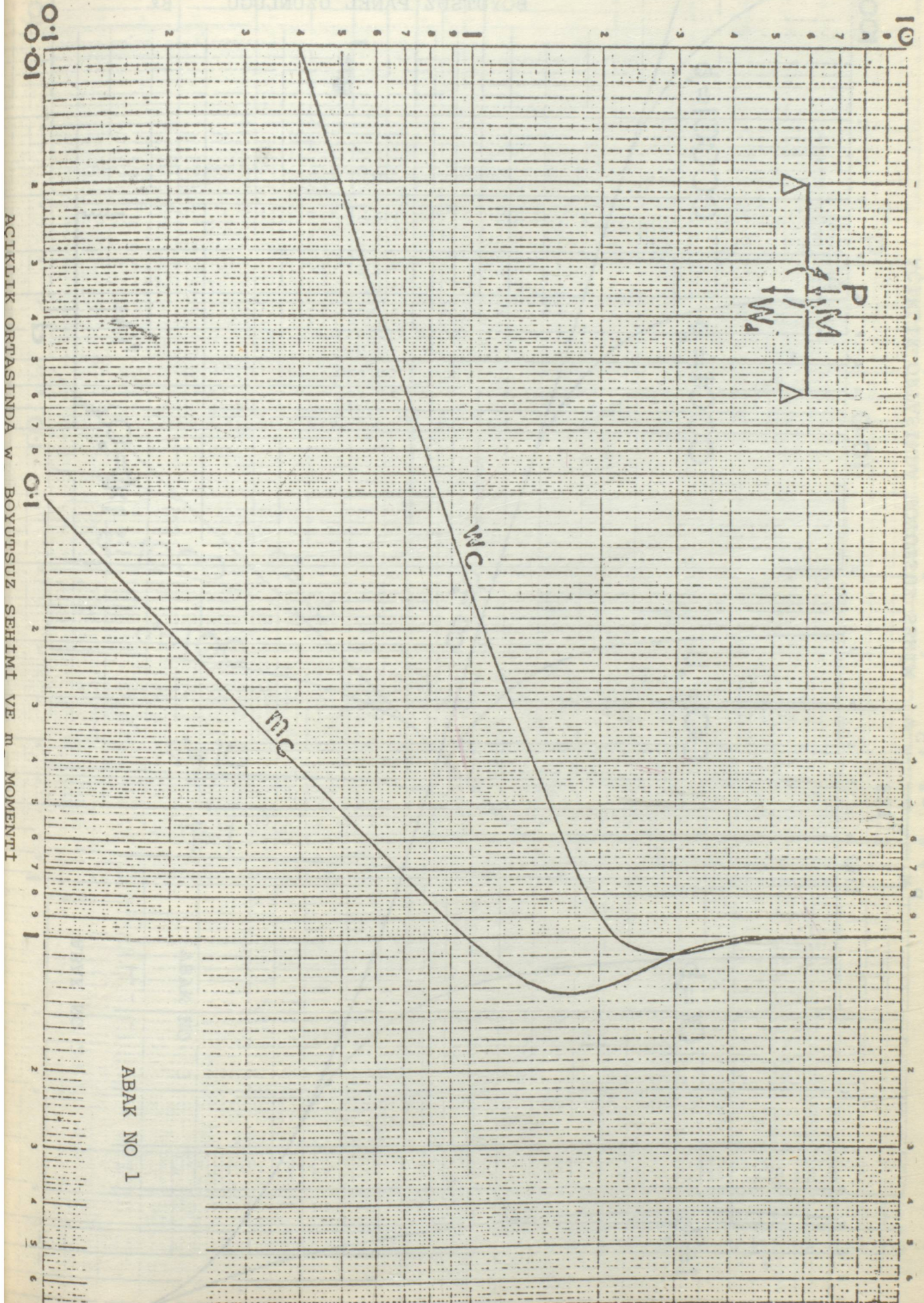


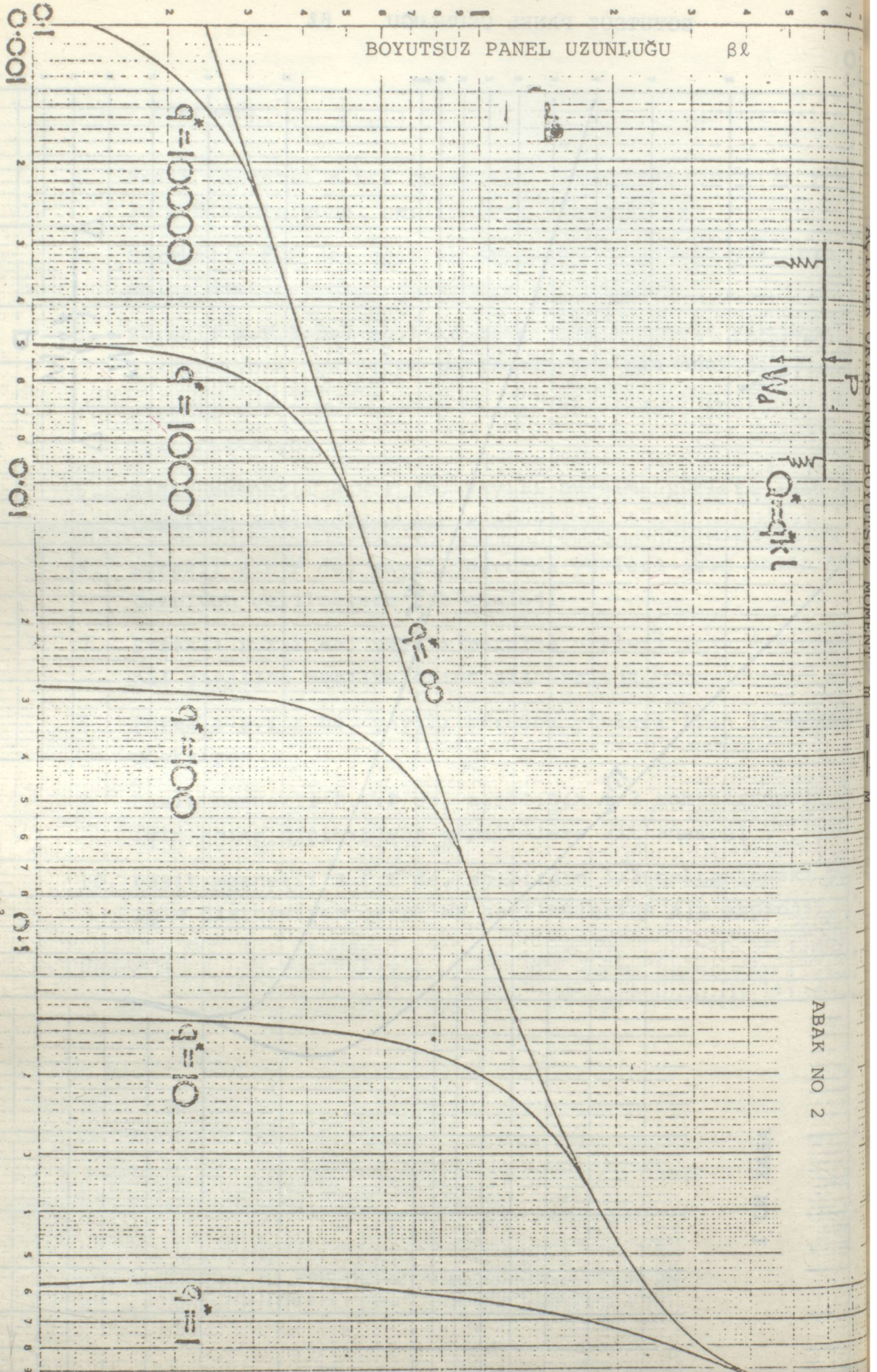
Şekil:4.17 Üç gözlü sandık kirişte torsiyonal yük düzenlemeleri

B.E.F ABAKLARI

1. Basit mesnetli B.E.F de açıklık ortasında münferit yük için distorsiyonal gerilmelere ait analoji
2. Sürekli B.E.F de, açıklık ortasında münferit yük için enine distorsiyonal gerilmeye ait analoji
3. Sürekli B.E.F de, açıklık ortasında münferit yük için distorsiyonal çarpılma gerilmelerine ait analoji
4. Sürekli B.E.F de, bir iç mesnet üzerindeki münferit yük için reaksiyon
5. Basit mesnetli B.E.F de, yayılı burulma yükleri için distorsiyon gerilmelere ait analoji,
6. Sürekli B.E.F de, yayılı burulma yükleri için enine distorsiyon gerilmelere ait analoji
7. Sürekli B.E.F de, yayılı burulma yükleri için distorsiyonal çarpılma gerilmelerine ait analoji
8. Sürekli B.E.F de, yayılı burulma yükleri için iç mesnet reaksiyon
9. Basit mesnetli B.E.F de, açıklığın 1/3 noktasındaki yük için enine distorsiyon gerilmelere ait analoji
10. Basit mesnetli B.F.F de, açıklığın 1/3 noktasındaki yük için distorsiyon çarpılma gerilmelerine ait analoji

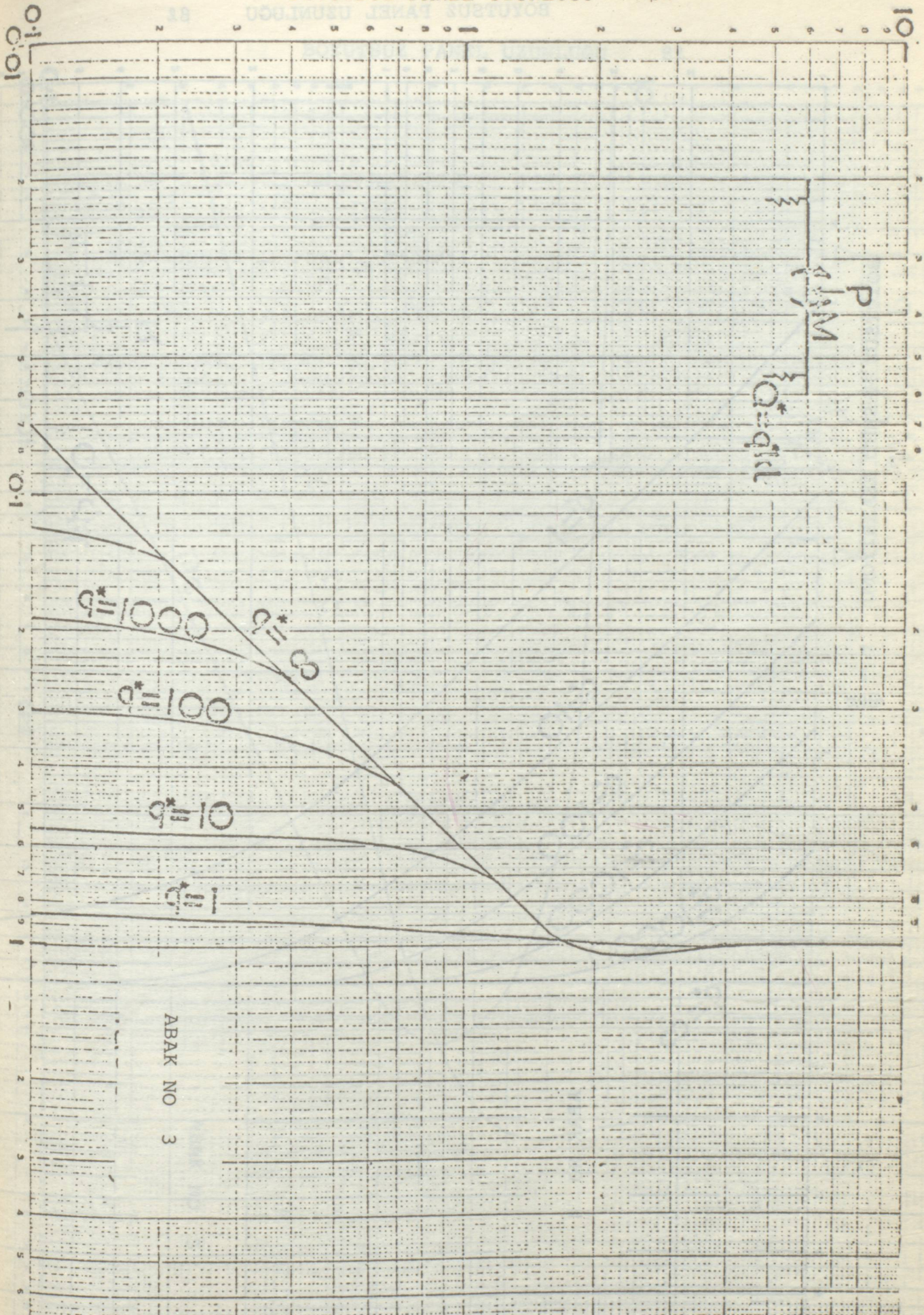
BOYUTSUZ PANEL UZUNLUĞU

 βl 

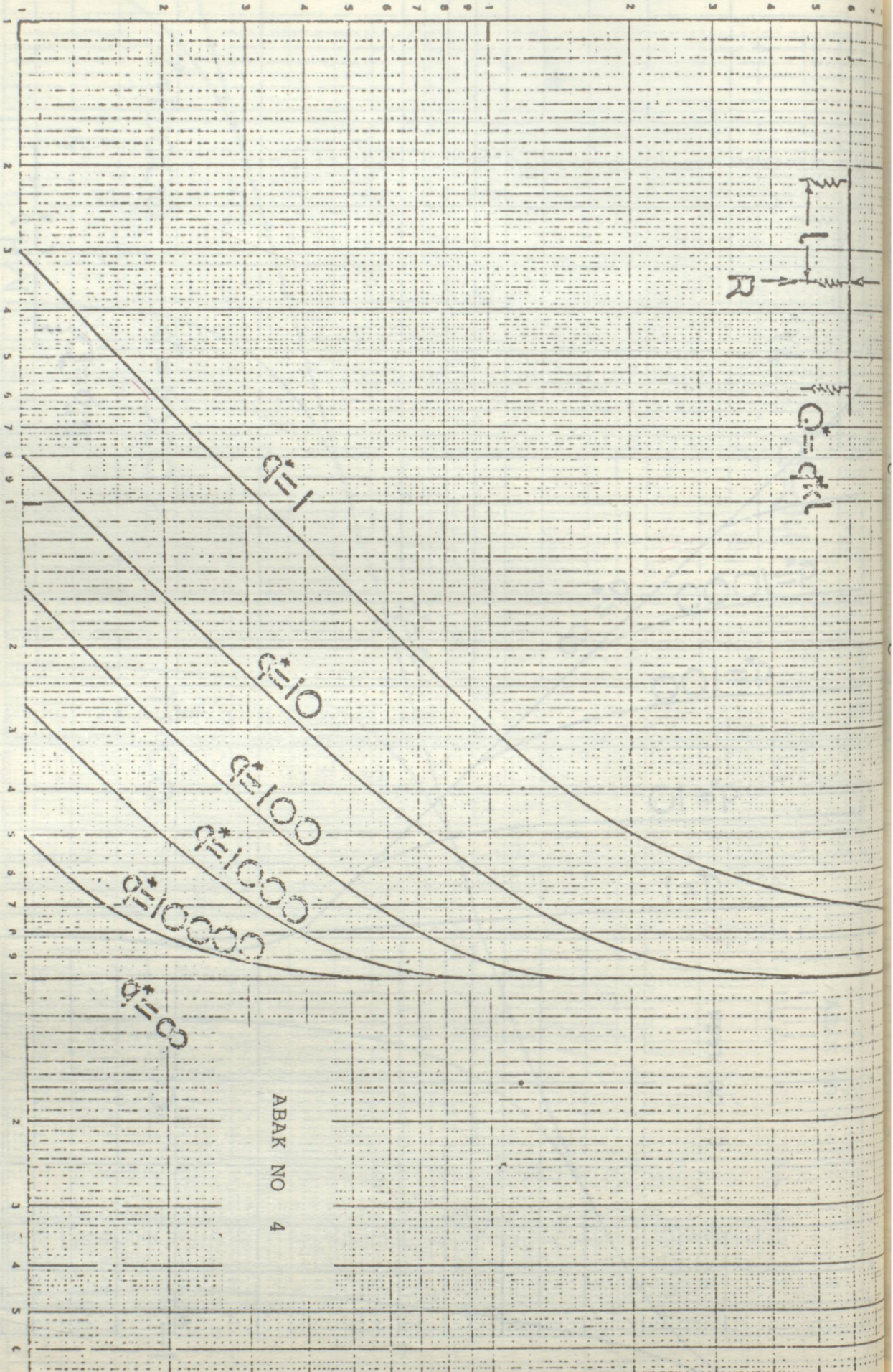
BOYUTSUZ PANEL UZUNLUĞU βl βl 

AÇIKLIK ORTASINDA BOYUTSUZ SEHİM

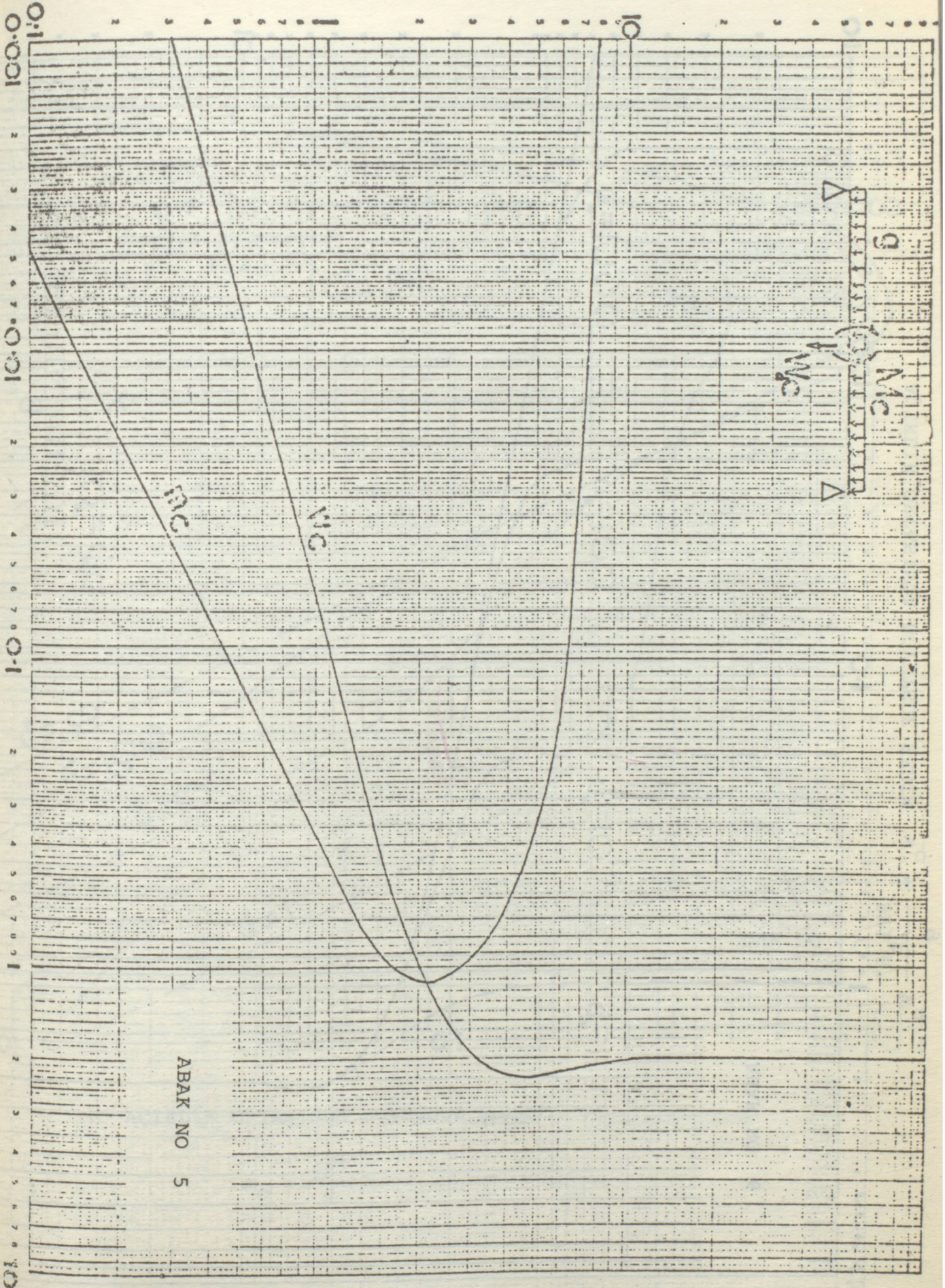
$$w_c = \frac{8EI_b \beta^3}{P} w_d$$

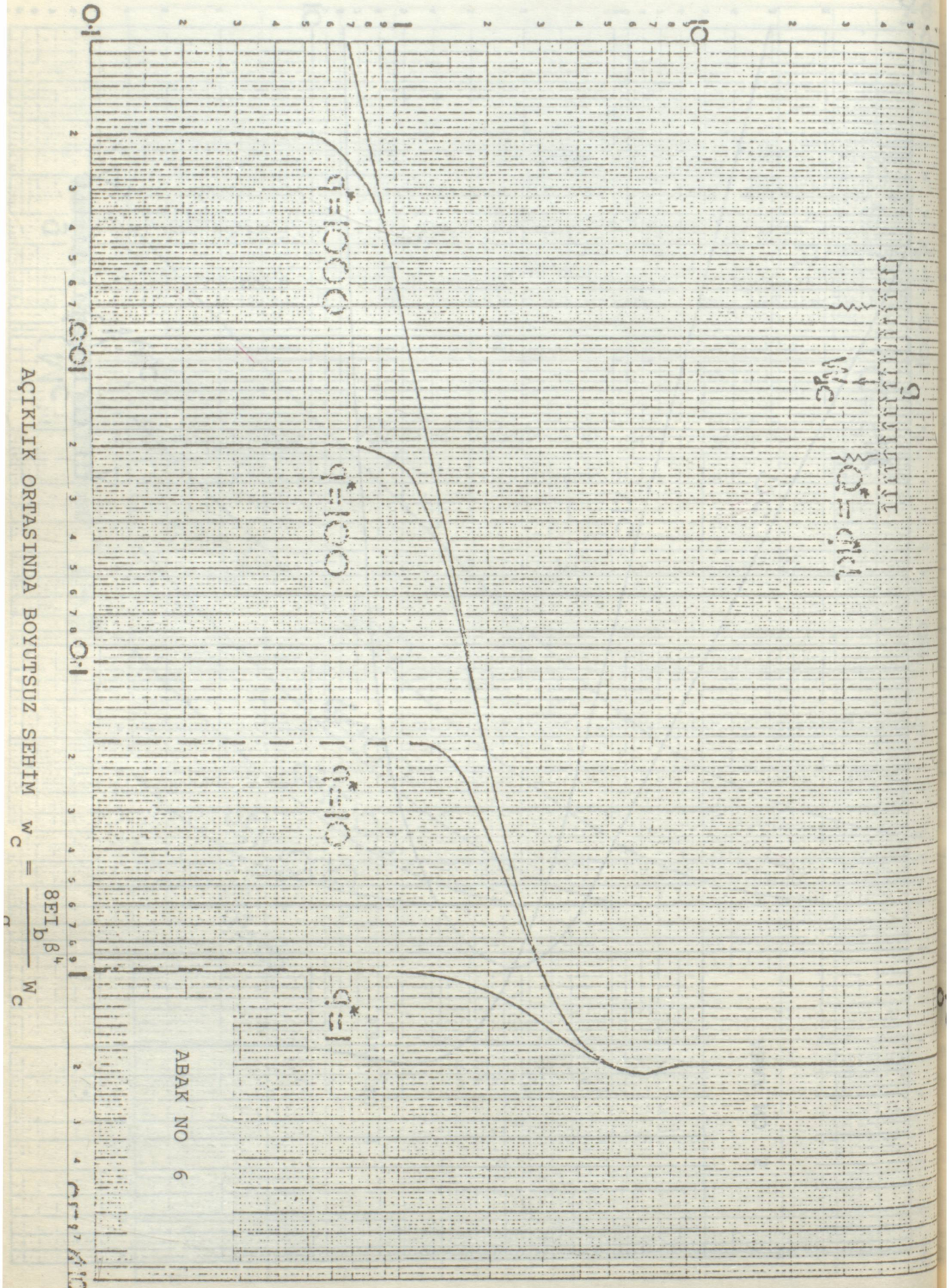


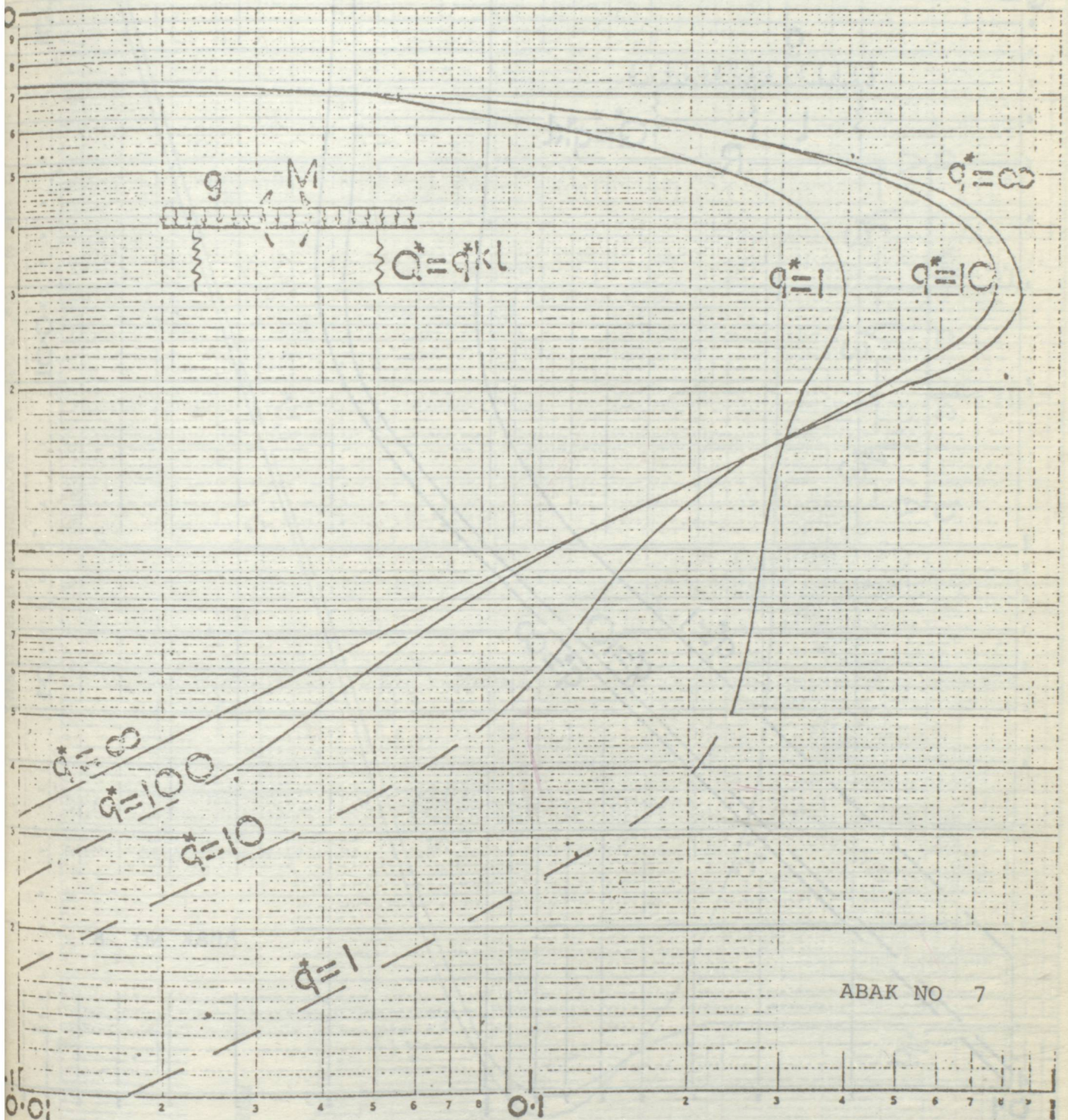
BOYUTSUZ MESNET REAKSİYONU $r = \frac{R}{P}$



BOYUTSUZ PANEL UZUNLUĞU

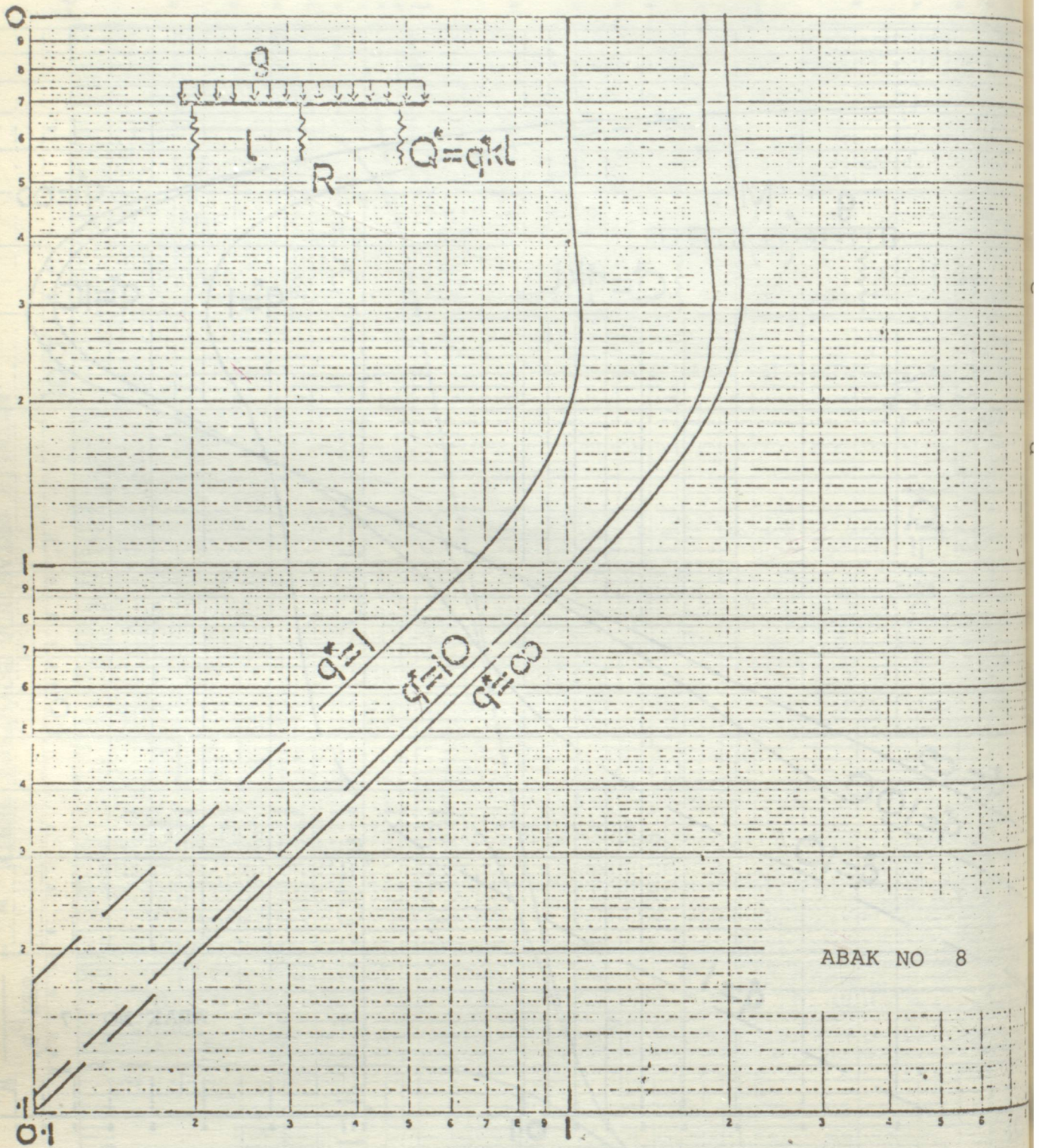
 βl AÇIKLIK ORTASINDA BOYUTSUZ w ŞEHİTİ VE m MOMENTİ





AÇIKLIK ORTASINDA BOYUTSUZ MOMENT

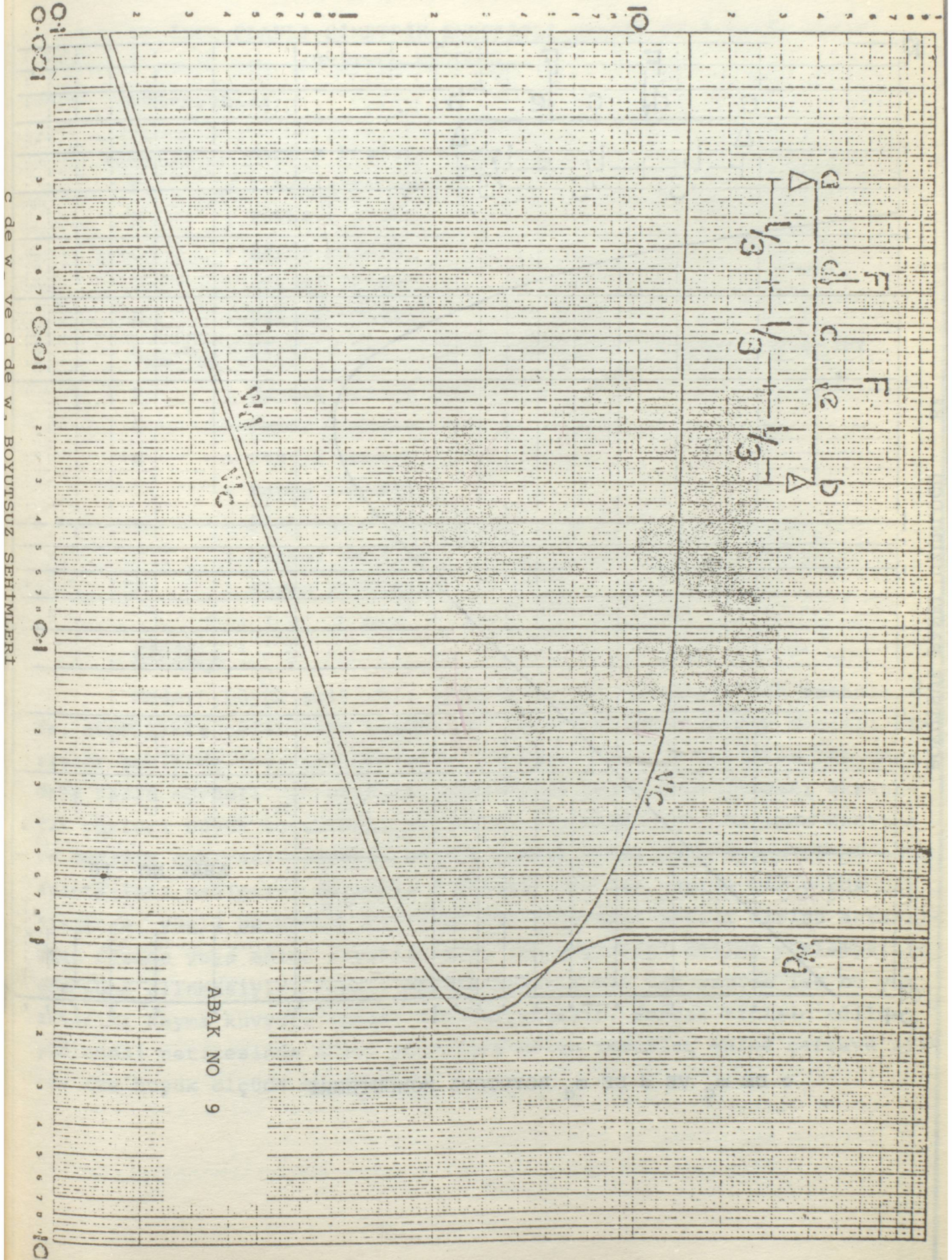
$$m_c = \frac{4\beta^2}{g} M$$

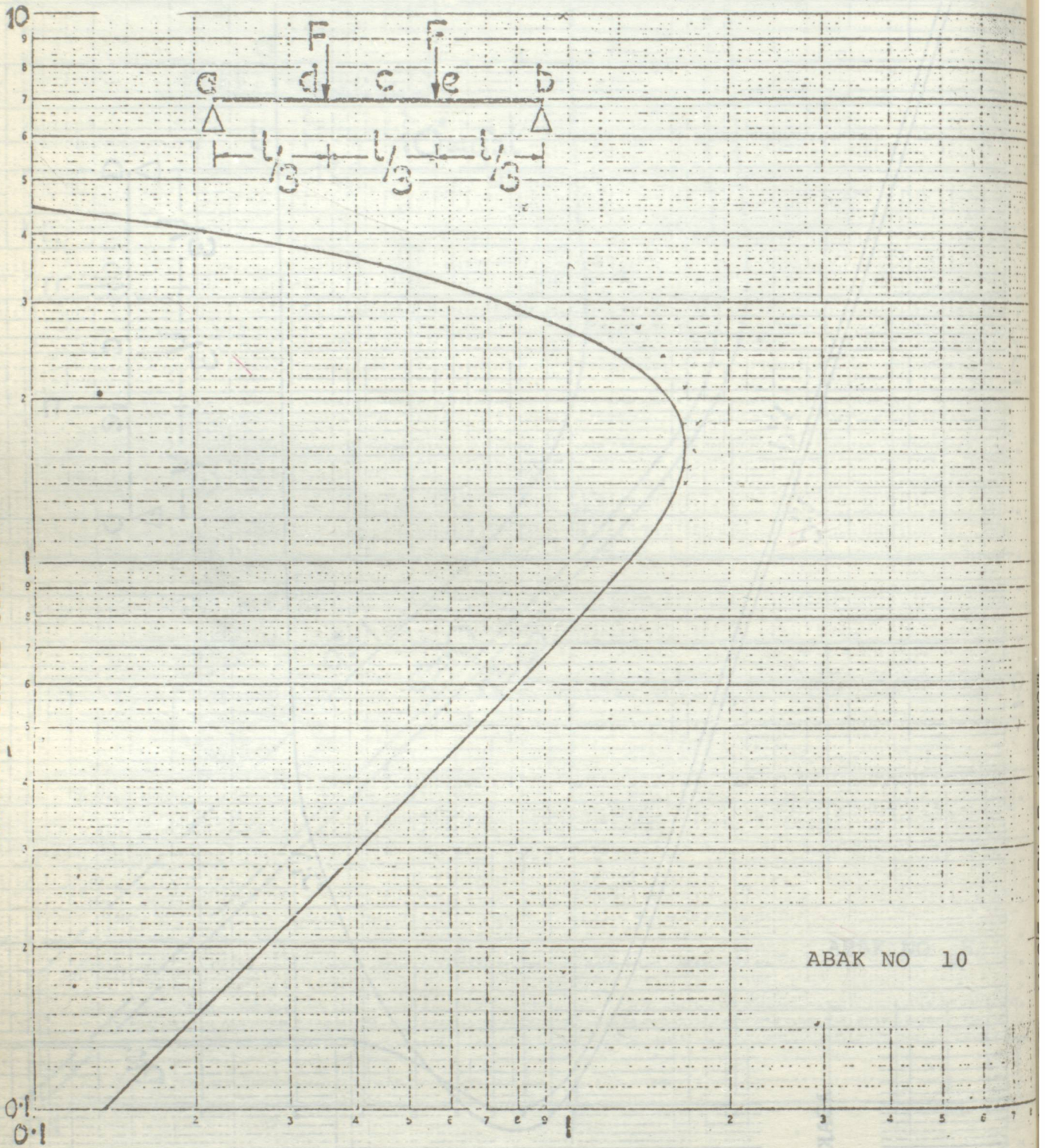


BOYUTSUZ MESNET REAKSİYONU

$$r = \frac{R\beta}{g}$$

BOYUTSUZ PANEL UZUNLUĞU

 βl 

BOYUTSUZ PANEL UZUNLUĞU βl 

ABAK NO 10

c DE m_c VE d DE m_d BOYUTSUZ MOMENTLERİ

V- İNCE PLAKLI SİMETRİK ENKESİTLİ SANDIK KİRİŞLERİN HESABI (KNİTTEL METODU)

Notasyonlar

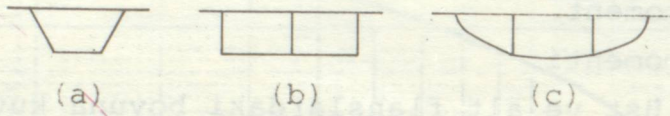
- a, b, c, s : Sandık kesitin boyutları
 E : Elastisite modülü
 F : Enkesit alanı
 G : Kayma modülü
 I : Atalet momenti
 M : Eğilme momenti
 $n_{xa}, n_{xü}$: Sırayla üst ve alt flanşlardaki boyuna kuvvetler
 P : Tatbik edilen yük
 Q : Kesme kuvveti
 S : Statik moment
 T : Kayma kuvveti
 t : Plak kalınlığı
 σ : Normal gerilme
 τ : Kayma gerilmesi

GİRİŞ :

Modern büyük açıklıklı köprülerin üst yapıları, son zamanlarda, genellikle çelik veya beton, tek veya çok gözlü sandık kesitli kirişler şeklinde inşa edilmektedir. Bu kapalı sandık kirişler iki veya daha fazla gövdeli "T" açık kirişlere göre enine doğrultudaki eksantrik yükleri büyük torsiyonal rijitliği ile daha uygun biçimde dağıtma ve değişik cebirsel işaretli eğilme momentlerine daha uygun olmak gibi avantajlara sahiptir. Halbuki, T kesitli bir üst yapıda bir yükün bir kısmının, yüklü bulunduğu kirişten bitişindeki yüksüz kirişe aktarılması döşeme veya enine diyaframların (enlemelerin) eğilme yüklemesinin gözönüne alınmasıyla, kapalı sandık kesitli bir üst yapıda ise bu yük aktarımı kayma kuvveti tesiri ile gerçekleşir. Sandık kirişin eğilme yüklemesi neticesinde düşey gövdelere gelen tesirler enine çerçeve sistem ile büyük ölçüde küçülür.

2. GENEL

Şekil 5.1 a,b,c de görüldüğü gibi herhangi simetrik enkesiti iki veya daha fazla gövdeli, bir tabliye ve bir alt plağa haiz ve re netler arasında enine olarak yerleştirilen diyaframlar ile rijitleştirilmiş bir sandık kiriş gözönüne alınmıştır. Bu tip kapalı bir sistem alternatif olarak, bir katlanmış plak sistem olarak düşünülebilir. Birleşen plaklar kenarları boyunca rijit olarak birleştirilirse, öze



Şekil : 5.1 Köprü inşaatındaki sandık kirişlerin enkesit şekilleri

likle betonarme sistemlerde, birleştirilmiş katlanmış plak sistem olarak düşünülmekte herhangi bir aykırılık olmaz.

Bu çeşit bir sistemin gövdelerinden biri boyunca çok değişken olmayan lineer yük tesir ediyorsa, sistem bu yük tesiri altında, genellikle boyuna doğrultuda eğilmeye maruz kalır ve enkesit de boyuna eksenine göre döner.

Sandık kirişin gerilme ve şekil değiştirme şartlarını tesis etmek için aşağıdaki basitleştirilmiş kabuller gerçekleşmelidir.

Münferit plakların veya döşemelerin ve keza sandık kirişin eni nisliği boylarına göre küçük olmalıdır. Nitekim burada, eğilme de enkesiti düzlem kalan narin bir kiriş gözönüne alınır. Bunun neticesi olarak, üst plak (tabliye plağı) ve alt plak gerilme aktarımında tam olarak katılır ve bunun için burada plağın faydalı tabla genişliği problemini gözönüne almak gereksizdir. Bundan başka katlanmış plak sistemin kenarlarının (plakların ara kesitlerinin) torsiyondan meydana gelen düşey deplasmanlarının boyuna doğrultuda eğilmeden meydana gelen deplasmanlara kıyasla küçük olduğu kabul edilir. Bu faraziye betonarme inşaatda kullanılan sandık kirişlerin plak kalınlıkları ile tam uyumlu Çelik inşaatda uygun aralıklar da yerleştirilen enine rijitlik elemanlarının konulmasıyla gene uygunluk sağlanabilir.

Torsiyon ile ilgili çarpılma şekil değiştirmemesini sağlayan

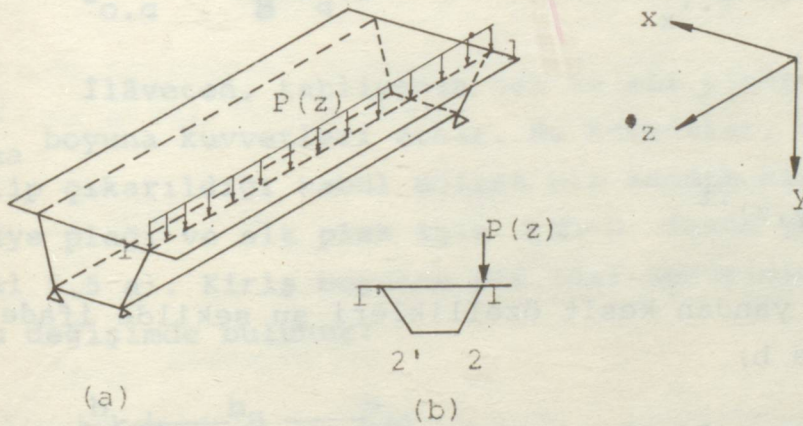
kuvvetler gözönüne alınmayacak ve "Saf" St. Venant torsiyon durumu bahsedilecektir. Bu düşünceler uygun görülebilir. Çünkü gerilmelerin süperpozisyonunda çarpılma gerilmeleri eğilme gerilmelerine oranla küçük önemindedir.

Enine doğrultudaki eğilme tesirini gözönüne almak için sandık kiriş, boyuna doğrultuda beraber çalışan ve bir diğerine tesiri olmayan çok sayıda benzer kapalı çerçeveler şeklinde düşünülebilir. Yalnız mertebe olarak sınırlı bölgelerde, örneğin mesnetler üzerindeki diyaframlar civarında, eğilme gerilmeleri kalıcı deformasyonlar meydana getirir. Bunlar basit enine eğilmesinin yerel bozulması gibi düşünülebilir.

Burada tek ve üç gözlü enkesit şekline haiz sandık kirişlerin analizi anılacaktır. Farklı şekillerde enkesitlere haiz kirişler aşağıda anlatılanlara benzer yollardan çözümlenebilir.

3. TEK GÖZLÜ SANDIK KİRİŞLER

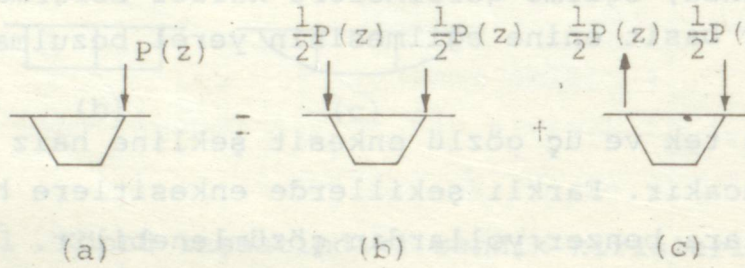
Şekil 5.2 a ve b de gösterilen trapez en kesitli sandık kiriş gözönüne alınmıştır ve $P(z)$ lineer yükünün (1) kenarı boyunca ektidiği düşünülmüştür. Eksantrik olan bu $P(z)$ lineer yükü şekil 5.3 b ve c de



Şekil : 5.2 tek gözlü, trapez enkesitli sandık kiriş

görüldüğü gibi simetrik $+\frac{1}{2}P(z)$ ve antimetrik $-\frac{1}{2}P(z)$ yükler ayrılabilir. Simetrik olan yüklemde kiriş sadece boyuna doğrultuda eğilmeye maruz kalacaktır. İkinci antimetrik yüklemde enkesit eğilme ye maruz kaldığı gibi aynı zamanda burulmaya da maruz kalır.

Simetrik yükleme sandık kirişte boyuna doğrultuda $M(z)$ eğilme momentini ve $Q(z)$ kesme kuvvetini meydana getirir. Bunlardan meydana gelen gerilmelerde sırayla



Şekil: 5.3 Tek gözlü sandık kirişe ait yük dönüşümü

$$\sigma(x,y) = \frac{M(z) \cdot y}{I_x} \quad (5.1)$$

$$\tau(y,z) = \frac{Q(z) \cdot S(y)}{t \cdot I_x} \quad (5.2)$$

ve kayma kuvveti

$$T(y,z) = \tau(y,z) \cdot t \quad (5.2)$$

yazılabilir. Diğer yandan kesit özellikleri şu şekilde ifade edilebilir. (Şekil:5.3 a ve b)

$$\text{Enkesit alanı: } F = 2F_k + F_{\bar{u}} + F_a + 2F_g \quad (5.3)$$

Burada:

$$F_i = b_i \cdot t_i \quad \text{ve} \quad F_a = s \cdot t_a$$

Sentroid ekseninin yeri

$$\Delta y = \frac{c}{2F} (2F_k + F_{\ddot{u}} - F_a) \quad (5.4 \text{ a})$$

$$y_{\ddot{u}} = \frac{c}{2} - \Delta y = \frac{c}{F} \cdot (F_a + F_g) \quad (5.4 \text{ b})$$

$$y_a = \frac{c}{2} \Delta y = \frac{c}{F} (2F_k + F_{\ddot{u}} + F_g) \quad (5.4 \text{ c})$$

Atalet momenti

$$I_x = (2F_k + F_{\ddot{u}}) \cdot y_{\ddot{u}}^2 + F_a \cdot y_a^2 + 2F_g \left(\frac{c^2}{12} + \Delta y^2 \right) \quad (5.5)$$

Statik moment (şekil 5.4 b)

$$S_{1,r} = F_k \cdot y_{\ddot{u}} \quad (5.6 \text{ a})$$

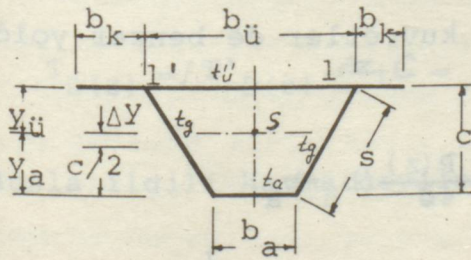
$$S_{1,l} = \frac{1}{2} F_{\ddot{u}} \cdot y_{\ddot{u}} \quad (5.6 \text{ b})$$

$$S_{1,g} = \frac{1}{2} (2F_k + F_{\ddot{u}}) \cdot y_{\ddot{u}} = \frac{1}{2} F_a \cdot y_a + F_g \cdot \Delta y \quad (5.6 \text{ c})$$

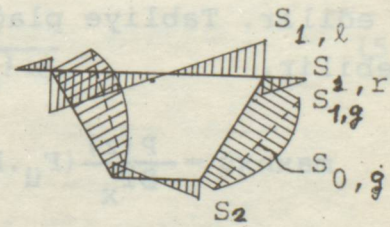
$$S_2 = \frac{1}{2} F_a \cdot y_a \quad (5.6 \text{ ç})$$

$$S_{0,g} = \frac{1}{8} F_g \cdot c \quad (5.6 \text{ d})$$

İlâveten, tabliyenin üst ve alt plağında x doğrultusunda $n_{x\ddot{u}}$ ve n_{xa} boyuna kuvvetleri etkir. Bu kuvvetler, simetri düzlemi boyunca kesilip çıkarıldığı kabul edilen bir sandık kirişin (dz) elemanında tabliye plağı ve alt plak için $\sum X=0$ denge şartından hesaplanabilir. (Şekil 5.5 a). Kiriş boyunca bir (dz) değişiminden $T(y,z)$ kayma kuvveti şu değişimde bulunur:



(a)

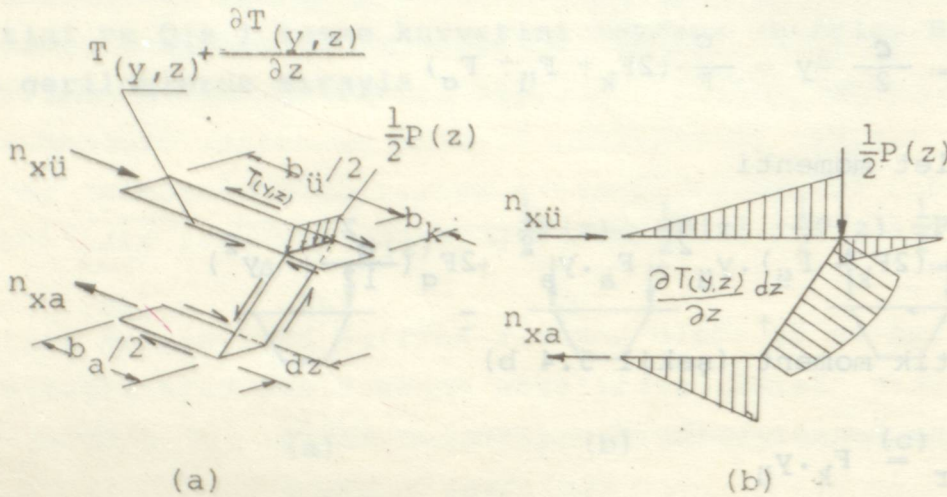


(b)

Şekil:5.4 Tek gözlü sandık kirişin enkesit boyutları ve statik momenti diyagramı

$$\frac{\partial T}{\partial z} \cdot dz = T' dz = \frac{dQ(z)}{dz} \cdot \frac{S(y)}{I_x} \cdot dz = -P(z) \cdot \frac{S(y)}{I_x} \cdot dz \quad (5.7)$$

$T' \cdot dz$ in enkesit üzerindeki yayılışı Şekil 5.5 b de görüldüğü gibidir.



Şekil:5.5 Elemanter uzunluklu bir sandık kirişe etkiyen gerilme bileşenleri

Sandık kiriş simetrik yük altında enine eğilmeden bağımsız olduğunda, x doğrultusunda eğimli gövdelerin altında kuvvet olmadığı gösterilebilir. Buradan

$$\max n_{xa} + \int T' \cdot dx = 0 \quad (5.8)$$

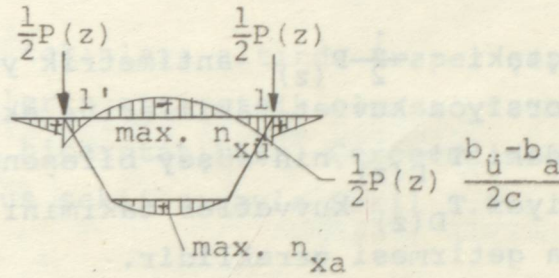
ve integrasyon çözülüp yerine konularak

$$\max n_{xa} = \frac{P(z)}{8I_x} \cdot F_a \cdot b_a \cdot y_a \quad (5.9)$$

elde edilir. Tabliye plağındaki boyuna kuvvetler de benzer yoldan elde edilebilir.

$$\max n_{xü} = \frac{P(z)}{8I_x} (F_{ü} \cdot b_{ü} - 4F_k \cdot b_k) y_{ü} - \frac{P(z)}{4c} (b_{ü} - b_a) \quad (5.10)$$

(5.10) denkleminin ikinci kısmı eğimli gövdedeki kayma kuvveti integralin yatay bileşeni ile eşdeğerdir. Bu sebepten, alt plakta 2 ayrıtında sıfır ve simetri ekseninde maksimum değere ulaşan bir çekme kuvveti tesir eder. Bu artış kuadratik bir parabolle benzer. Üst plakta da benzer yayılıştâ basınç kuvveti tesir eder fakat 1 ve 1' ayrıtları arasındaki bölgede bulunan sabit çekme kuvvetleri süperpoze edilir (Şekil 5.6). Bu son anılan kuvvetin şiddeti eğimli gövdenin eğimine tekabül eder.



Şekil 5.6 Sandık kirişin üst ve alt plaklarında boyuna n_x kuvvetlerinin diyagramı

$\pm \frac{1}{2} P(z)$ antimetrik yüklemesi birim uzunlukta

$$m_D(z) = -\frac{1}{2} P(z) b_u \quad (5.11)$$

Şiddetinde torsiyonal moment meydana getirir. Böylece Bredth formülüne göre kayma akımı (kayma kuvveti) şiddetindeki değişim elde edilir:

$$\frac{dT_D(z)}{dz} = T'_D(z) = \frac{m_D(z)}{(b_u + b_a) \cdot c} = P(z) \cdot \frac{b_u}{2(b_u + b_a) \cdot c} \quad (5.12)$$

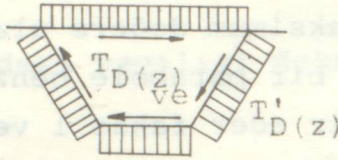
$T_D(z)$ kayma akımı

$$T_D(z) = \int T'_D(z) \cdot dz + C = Q(z) \cdot \frac{b_u}{2(b_u + b_a) \cdot c} \quad (5.13)$$

ve bununla ilgili kayma gerilmesi

$$\tau_D(z) = \frac{1}{t} \cdot T_D(z)$$

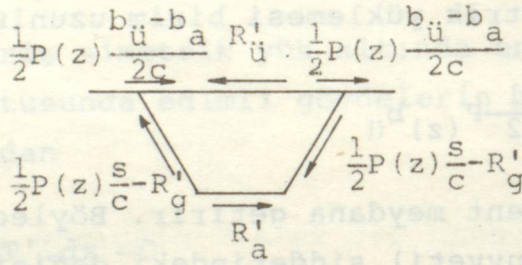
şeklinde bulunur.



Şekil:5.7 Torsiyonal kayma akımı $T_D(z)$ ve $T'_D(z)$ kayma akımı değişiminin diyagramı

Başlangıçtaki $+\frac{1}{2}P(z)$ antimetrik yükleme tekrar ele alınarak dengelenen saf torsiyon kuvvet takımlarına eklenmelidir. Bu kuvvetler takımının, gövdedeki $T'_D(z)$ nin düşey bileşeni ile beraber ihmal edile yatay plakta etkiyen $T_D(z)$ kuvvetler takımını ve her durumda $\frac{1}{2}P(z)$ kuvvetini meydana getirmesi gereklidir.

Bu sonuca göre, sandık kirişin münferit plakları için T_D nin bileşenleri aşağıdaki biçimde yazılabilir (Şekil 5.8):



Şekil:5.8 Tek gözlü sandık kirişte etkiyen antimetrik kuvvetler takımı

$$R'_u = T'_D \cdot b_u \quad (5.14 a)$$

$$R'_a = T'_D \cdot b_a \quad (5.14 b)$$

$$R'_g = T'_D \cdot s \quad (5.14 c)$$

Bunlardan başka, eğimli gövdeler ve üst plak doğrultusunda $\frac{1}{2}P(z)$ kuvveti bileşenlere ayrılarak

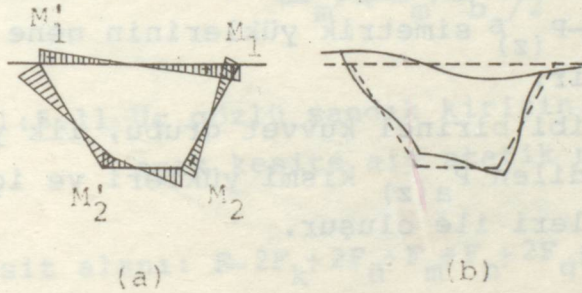
$$\frac{1}{2}P(z) \cdot \frac{s}{c} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2}P(z) \cdot \frac{b_u - b_a}{2c}$$

elde edilir.

Bu bileşenler R' kuvvetleri ile toplanabilir ve böylece basit eğilmedeki yük ile yüklü sandık kesit dengesinden istenen kuvvet takımları elde edilir.

Şekil 5.8 kuvvet takımları altında trapez çerçeveyi gösterir. Sistemin simetrik kuvvetlerin antimetrik olması yüzünden çerçeve statik olarak birinci dereceden hiperstatiktir. Çerçevenin enine eğilme moment diyagramı ve deforme olmuş şekli sırayla Şekil 5.9 a ve b de gösterilmiştir.

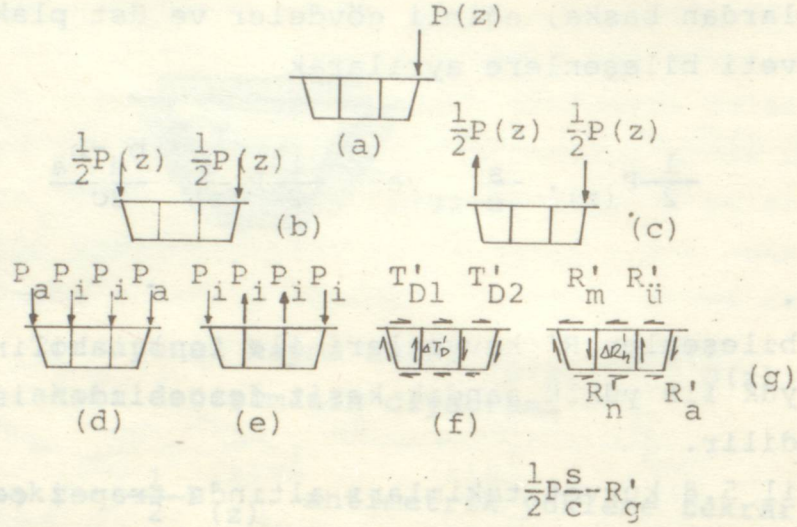
Dikdörtgen kesitli özel sandık kiriş için yukarıdaki neticelerden $b_a = b_u$ ve $s = c$ konularak doğrudan doğruya çıkarılabilir.



Şekil:5.9 Tek gözlü sandık kirişlere ait enkesit eğilme momenti diyagramı ve deformasyonu

4. ÜÇ GÖZLÜ SANDIK KIRIŞLAR

Başlangıçta yapılacak kabuller daha önce izah edilen tek gözlü sandık kiriştekilerin aynısıdır. Burada yapılacak başka bir kabul: çok fazla değişken olmayan lineer $P(z)$ yükünün sandık kirişin dış gözlerinden biri üzerinde etkidir. (Şekil 5.10 a) Yükleme burada şu şekilde dönüştürülebilir. Karşılıklı kısmi yükleme şartlarını her biri sırayla sistemde boyuna doğrultuda yalnız eğilme (enkesit eğilmesi) ve boyuna eksenine göre burulma meydana getiren kısımlardan elde edilir.



Şekil:5.10 Üç gözlü sandık kirişe ait yük aktarımı

4.1.- SİMETRİK YÜKLEME

Hemen görülür ki, her dış gövde boyunca $\frac{1}{2}P(z)$ yükü etkileyen simetrik yükleme (şekil 5.10 b), yük kısımlarının üst ve alt plaklar vasıtasıyla iki iç gövdeye-kayma kuvvetleri ve eğilme momentleri düşürülmesinden-aktarılması gerektiğinden yalnız boyuna doğrultuda basit eğilme meydana gelmez. Keza $\frac{1}{2}P(z)$ simetrik yüklerinin gene simetrik yük gruplarına ayrılması gerekir.

Şekil 5.10 d deki gibi birinci kuvvet grubu, ilk yerleştirme için dış gövdelere tahsis edilen $P_a(z)$ kısmi yükleri ve iç gövdelere tahsis edilen $P_i(z)$ kısmi yükleri ile oluşur.

$$P_a(z) + P_i(z) = \frac{1}{2}P(z) \quad (5.15)$$

Ve ikinci olarak katlanmış plak sistemin bütün kenarları (düzlem kesitin eğilmeden sonra düzlem kalması kabulünden) uygun eğriler şeklinde sehim yapacak veya diğer bir deyişle enkesitin ayrıtları izafi olmayacak deplasmanlara maruz kalacaktır. Eğer bu şartlar sağlanırsa sistemin boyuna eğilmesi temin edilir.

İkinci simetrik yükler grubu (Şekil:5.10e) birinci yük grubu ile birleştirildiğinde $\frac{1}{2}P(z)$ ye eşit yükler elde edilmelidir. Buradan görülür ki dış gövdeler için

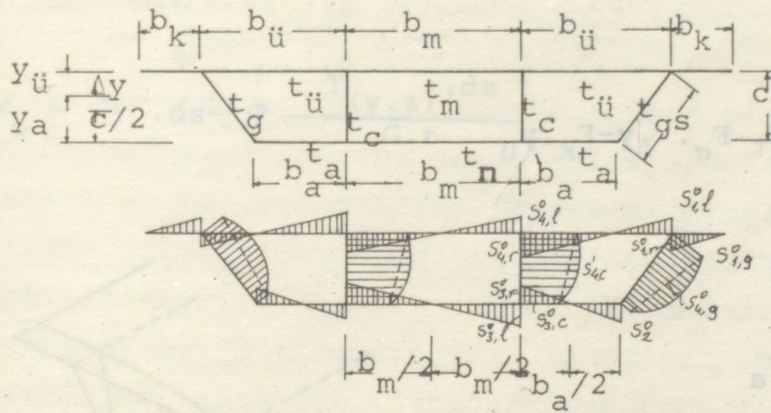
$$\frac{1}{2}P(z) - P_a(z) = P_i(z) \quad (5.16 a)$$

ve iç gövdeler için

$$0 - P_i(z) = P_i(z) \quad (5.16 b)$$

olur. Keza ikinci grup (denge için) sandık kirişte sadece eğilme meydana getiren ve simetrik deformasyona sebep olan $\pm P_i(z)$ kuvvetlerini ihfiva eder.

Şekil 5.11 a daki notasyonlar kullanılarak gerekli kesit özellikleri aşağıdaki gibi hesaplanır:



Şekil:5.11 Üç gözlü sandık kirişin enkesit boyutları ve açık kesite ait statik moment diyagramı

$$\text{Enkesit alanı: } F = 2F_k + 2F_{\bar{u}} + F_m + F_n + 2F_g + 2F_c + 2F_a \quad (5.17)$$

burada $F_i = b_i \cdot t_i$ $F_g = S \cdot t_g$ $F_c = c \cdot t_c$

sentroid ekseninin yeri:

$$\Delta y = -\frac{c}{2F} (2F_k + 2F_{\bar{u}} + F_m - 2F_a - F_n), \quad (5.18 a)$$

$$y_{\bar{u}} - \frac{c}{2} - \Delta y = -\frac{c}{F} (2F_a + F_n + F_g + F_c) \quad (5.18 b)$$

$$y_a - \frac{c}{2} + \Delta y = -\frac{c}{F} (2F_k + 2F_{\bar{u}} + F_m + F_g + F_c) \quad (5.18 c)$$

Atalet momenti

$$I_x = (2F_k + 2F_{\bar{u}} + F_m) y_{\bar{u}}^2 + (2F_a + F_n) y_a^2 + (2F_g + 2F_c) \cdot \left(\frac{c^2}{12} + \Delta y^2 \right) \quad (5.19)$$

Açık profillerin statik momenti (şekil 5.11 b)

$$S_{2.o} = \frac{1}{2} F_a \cdot y_a \quad (5.20 a)$$

$$S_{1.g} = \frac{1}{2} F_a \cdot y_a + F_g \cdot \Delta y \quad (5.20 b)$$

$$S_{1.r} = F_k \cdot y_{\bar{u}} \quad (5.20 c)$$

$$S_{1.\bar{x}} = \frac{1}{2} F_a \cdot y_a + F_g \cdot \Delta y - F_k \cdot y_{\bar{u}} \quad (5.20 d)$$

$$S_{3.r} = \frac{1}{2} F_a \cdot y_a \quad (5.20 e)$$

$$S_{3.l} = \frac{1}{2} F_n \cdot y_a \quad (5.20 f)$$

$$S_{3.c} = \frac{1}{2} (F_n + F_a) \cdot y_a \quad (5.20 g)$$

$$S_{4.r} = \frac{1}{2} (F_n + F_a) y_a + F_c \Delta y - \frac{1}{2} F_m \cdot y_{\bar{u}} \quad (5.20 h)$$

veya

$$S_{4.r} = \frac{1}{2} F_a \cdot y_a + F_g \cdot \Delta y - F_k \cdot y_{\bar{u}} - F_{\bar{u}} \cdot y_{\bar{u}} \quad (5.20 i)$$

$$S_{4.l} = \frac{1}{2} F_m \cdot y_{\bar{u}} \quad (5.20 j)$$

$$S_{4.c} = \frac{1}{2} (F_n + F_a) \cdot y_a + F_c \cdot \Delta y \quad (5.20 k)$$

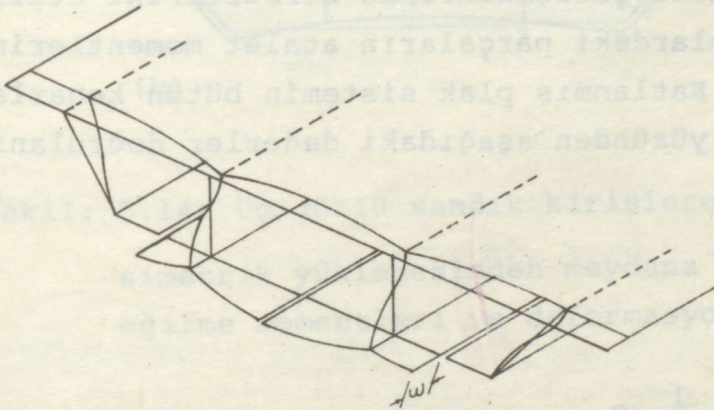
$$S_{o.s} = \frac{1}{8} F_g \cdot c \quad (5.20 l)$$

$$S_{o.c} = \frac{1}{8} F_c \cdot c \quad (5.20 m)$$

$P_a(z)$ ve $P_i(z)$ hesaplamak için, kirişte boyuna doğrultuda basit eğilmeye ait kayma kuvvetlerinden başlanacaktır. Üç gözlü sandık kirişte kayma kuvveti genellikle statik olarak bilinmeyen arzeder. Mamafih, simetriden dolayı yalnız bir bilinmeyen hesaplanacaktır. Bu gaye için her üç göz z boyuna doğrultusunda alt plak ortasından kesilir. Böylece statik olarak hesaplanabilen kayma kuvveti yayılışlı bir açık kesit elde edilir. Dış gözlerdeki kesilen kenarlar bir diğerine göre w_o deplasmanı yapar. Bu w_o deplasmanı, dış gözün çevresi boyunca integrasyon ile kayma şekil değiştirme açısından hesaplanabilir. (Şekil 5.12).

$$\gamma = \frac{T(y,z)}{G.t} \quad (5.21)$$

$$w_o = \int \gamma . ds = \oint \frac{T(y,z) . ds}{G.t} \quad (5.22)$$



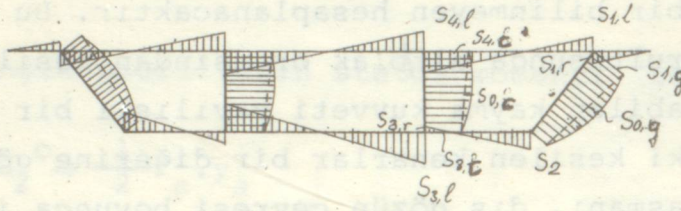
Şekil: 5.12 Üç gözlü sandık kirişin boyuna deformasyonu

Deformasyonların uygunluğu gereğince w deplasmanı kapalı kesitler için sıfır olmalıdır. Bu sebepten sabit bir kayma akımı

$$X_a = \frac{\oint \frac{T(y,z) . ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (5.23)$$

olmalı keza w_o deplasmanını kaldıran dış gözlerdeki statik olarak hesap-

lanan kayma kuvveti üzerine süperpoze edilmelidir. (Şekil 5.13) de kayma kuvvetlerinin yayılışı gösterilmiştir.



Şekil: 5.13 Kapalı sandık kesite ait statik moment diyagramı

Sandık kirişin boyuna doğrultusunda (z doğrultusunda) ki kesimde üst ve alt plaklarda sıfır kayma kuvveti noktalarında dört enkesit parçası elde edilir (iki dış ∇ şeklinde ve iki iç I şeklinde). Bunlar boyuna doğrultudaki çalışmalarında birbirlerini etkilemezler. Sırayla dış ve iç kısımlardaki parçaların atalet momentlerini I_{xa} ve I_{xi} olarak gösterelim. Katlanmış plak sistemin bütün kenarlarının deplasmanlarının eşitliği yüzünden aşağıdaki değerler doğrulanır:

$$\frac{P_a(z)}{P_i(z)} = \frac{I_{xa}}{I_{xi}} \quad (5.24 a)$$

$$P_a(z) + P_i(z) = \frac{1}{2} P(z) \quad (5.24 b)$$

ve bu iki denklemin çözümünden

$$P_a(z) = \frac{1}{2} P(z) \cdot \frac{I_{xa}}{I_{xa} + I_{xi}} = \frac{1}{2} P(z) \cdot \frac{I_{xa}}{I_x} \quad (5.25 a)$$

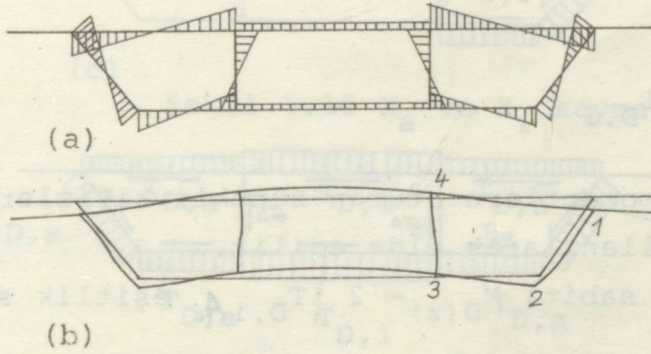
$$P_i(z) = \frac{1}{2} P(z) \cdot \frac{I_{xi}}{I_{xa} + I_{xi}} = \frac{1}{2} P(z) \cdot \frac{I_{xi}}{I_x} \quad (5.25 b)$$

elde edilir. Eğer

$$T_{(y,z)} = \frac{Q(z) \cdot S(y)}{I_x} \quad (5.26)$$

kayma kuvvetine ait ifade de $Q(z) = I_x$ konulursa keza I_{xa} ve I_{xi} sırayla dış ve iç gövdelerde etkiyen kayma kuvveti bileşenlerinin düşey bileşenleri düşüncesini ortaya koyabilir.

$P_a(z)$ ve $P_i(z)$ hesaplandığında ikinci $\pm P_i(z)$ kuvvet grubunun etkisi keza gösterilebilir. Yükleme ve sistem yönünden simetrik olan üç gözlü çerçeve enkesiti statik olarak 5.ci dereceden hiperstatiktir. Enine eğilme momenti yayılımı ve deformasyonu sırayla Şekil 5.14 a ve b de gösterilmiştir.



Şekil: 5.14 Üç gözlü sandık kirişlere ait $\pm \frac{1}{2} P_i(z)$ simetrik yüklemesinden meydana gelen enkesit eğilme momentleri ve deformasyonlar diyagramı

4.2.- Antimetrik Yükleme Kısım

Şekil 5.10 c deki $\pm \frac{1}{2} P(z)$ antimetrik yükleme iki kısma ayrılacaktır. Bu yüklemelerden biri saf torsiyon (Şekil 5.10 f) ve diğeri enkesitin antimetrik eğilmesini (Şekil 5.10 a) meydana getirir.

Birim uzunlukta yayılı torsiyonal moment:

$$m_D(z) = \frac{1}{2} P(z) \cdot (2 b_{\bar{u}} + b_m) \quad (5.27)$$

ve torsiyonal moment

$$M_D(z) = \int m_D(z) \cdot dz + C = -\frac{1}{2} Q(z) \cdot (2 b_{\bar{u}} + b_m) \quad (5.28)$$

elde edilir. Her üç göze Bredth formülü uygulanarak "kayma akımı" elde edilir. 1.inci göz için Şekil 5.15 den şu şekilde verilebilir:

$$-T_{D,i-1} \int_{i,i} \frac{ds}{t} + T_{D,i} \int_{i,i} \frac{ds}{t} - T_{D,i+1} \int_{i,i+1} \frac{ds}{t} = 2G\theta A_i \quad (5.29)$$

(5.29) denkleminin solundaki birinci ve üçüncü terimler sırayla $i-1$ ve i gözleri arasındaki gövdeye ve i ve $i+1$ gözleri arasındaki gövdeye ilave edilir. Integralin ikinci terimi i gözünün çevresine izafe edilir.

Yeni

$$Y_i = \frac{1}{G\theta} \cdot T_{D,i} \quad (5.30)$$

bilinmeyenleri rijit momentlere oturan sürekli kirişlere ait meşhur üç momentler denklemi kullanılarak elde edilir.

I_D torsiyonal sabiti $M_{D(z)} = 2 \sum T_{D,i} A_i$ eşitlik şartından ve

$$I_D = \frac{1}{G\theta} \cdot M_{D(z)} \quad (5.31)$$

belirlemesinden

$$I_D = \frac{2}{G\theta} \cdot \sum T_{D,i} A_i = 2 \sum Y_i A_i \quad (5.32)$$

şeklinde elde edilir.

Münferit gözlere etkiyen kayma akımları (Şekil 5.16)

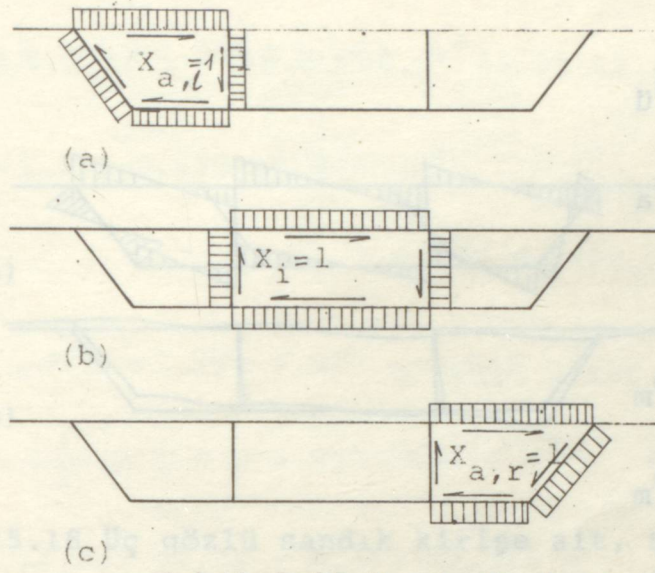
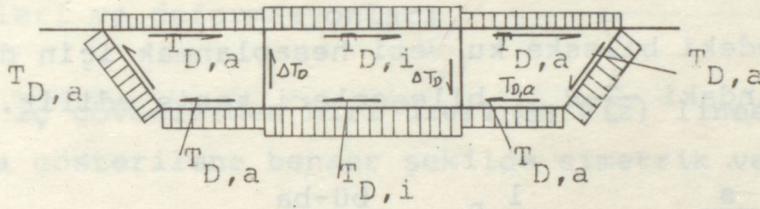
$$T_{D,i}(z) = G\theta \cdot Y_i - Y_i \frac{M_{D(z)}}{I_D} \quad (5.33)$$

dir.

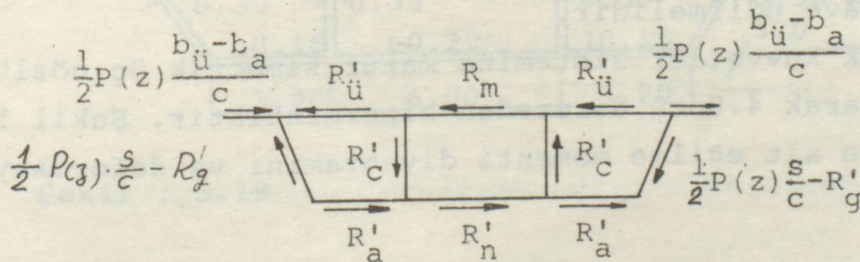
$T'_{D,i}(z)$ kayma akımı değişimi

$$T'_{D,i}(z) = Y_i \frac{M_{D(z)}}{I_D} \quad (5.34)$$

şeklindedir.

Şekil 5.15 X_a ve X_i kayma akımıŞekil: 5.16 Uç gözlü sandık kirişe ait $T_D(z)$ torsiyonel kayma akımı diyagramı

Başlangıçtaki antisimetrik $\pm \frac{1}{2}P(z)$ yüklerini tekrar vermek için saf torsiyon durumuna dengelenen bir kuvvet takımı (Şekil 5.17 ye uygun şekilde) süperpoze edilmelidir. Öyleki yatay plakların $T'_D(z)$ i ve iç gövdelerin $T'_D(z)$ i ihmal edilir ve $\pm \frac{1}{2}P(z)$ i meydana getirmek için gövdelerin $T'_D(z)$ düşey bileşeni tekrar birleştirilir.



Şekil 5.17 Uç gözlü sandık kirişe etkiyen antisimetrik kuvvet grupları

Dengelenen kuvvet takımlarının R' münferit kuvvetleri aşağıda verilen değerdedir:

$$R'_{\bar{u}} = T'_{D.a} \cdot b_{\bar{u}} \quad (5.35 a)$$

$$R'_a = T'_{D.a} \cdot b_a \quad (5.35 b)$$

$$R'_c = \Delta T'_{D.c} \quad (5.35 c)$$

$$R'_m = T'_{D.i} \cdot b_m \quad (5.35 d)$$

$$R'_n = T'_{D.i} \cdot b_m \quad (5.35 e)$$

$$R'_g = T'_{D.a} \cdot s \quad (5.35 f)$$

Dış gövdedeki bileşke kuvveti hesaplanmak için dış gövde ve üst plak doğrultularındaki $\frac{1}{2}P(z)$ bileşenleri tesis edilir.

$$\frac{1}{2}P(z) \cdot \frac{s}{c} \quad , \quad \frac{1}{2}P(z) \cdot \frac{b_{\bar{u}} - b_a}{c}$$

Dış gövdede dengelenen gruba ait kuvvet

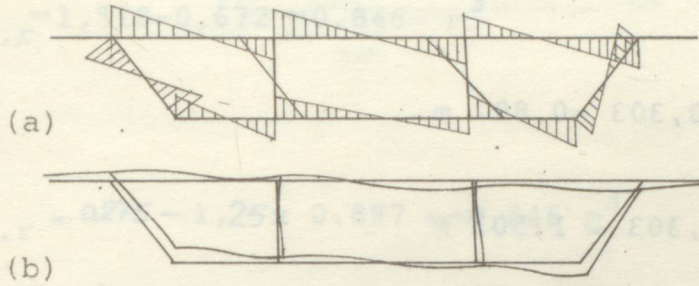
$$\frac{1}{2}P(z) \cdot \frac{s}{c} - R'_g$$

dir. Üst plaktaki $R'_{\bar{u}}$ kuvvetlerine

$$\frac{1}{2}P(z) \cdot \frac{b_{\bar{u}} - b_a}{c}$$

yatay bileşeni ilâve edilmelidir.

Antimetrik kuvvetler sistemine maruz simetrik üç gözlü kapalı çerçeve statik olarak 4.üncü dereceden hiperstatiktir. Şekil 5.18 a ve b bu tip çerçeveye ait eğilme momenti diyagramını ve deformasyonunu gösterir.



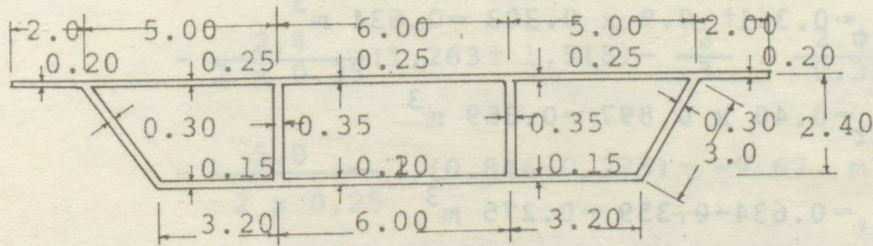
Şekil:5.18 Üç gözlü sandık kirişe ait, Şekil 17 ye uygun antimetrik yük grubundan meydana gelen enkesit eğilme momentleri ve deformasyonları

Eğer iç gövdelerden biri üzerinde $P(z)$ lineer yükü etkirse, Şekil 5.10 da gösterilene benzer şekilde simetrik ve antimetrik yükler ayrılabilir.

Dış gövdelerin düşey olması özel halinde yukarıda verilen ifadelerde $b_a = b_{\bar{a}}$ ve $s = c$ konulur ve aynı işlemler tekrarlanır.

5.ÖRNEK :

Yukarıda verilen ifadelerin daha iyi anlaşılması yönünden Şekil 19 da enkesit boyutları verilen üç gözlü sandık kiriş sayısal olarak çözülecektir.



Şekil : 5.19

Enkesit Özellikleri

$$F = 2(0.40 + 1.25 + 0.48 + 0.90 + 0.84) + 1.5 + 1.2 = 10.44 \text{ m}^2$$

$$\Delta y = 0.303 \text{ m}$$

$$y_{\bar{u}} = \frac{2.4}{2} - 0.303 = 0.897 \text{ m}$$

$$y_a = \frac{2.4}{2} + 0.303 = 1.503 \text{ m}$$

$$I_x = 10.73 \text{ m}^4$$

$$\frac{1}{2} P_{(z)} \text{ Simetrik yükleri grubu}$$

$Q_{(z)} = I_{(z)}$ için açık kesite ait statik olarak hesaplanan kayma kuvveti

$$T^0_{(y)} = S^0_{(y)}$$

dir.

S^0 statik momentleri (şekil 20)

$$S^0_2 = \frac{1}{2} \cdot 0.48 \times 1.503 = 0.361 \text{ m}^3$$

$$S^0_{1.\sigma} = 0.361 + 0.9 \times 0.303 = 0.634 \text{ m}^3$$

$$S^0_{1.r} = 0.40 \times 0.897 = 0.359 \text{ m}^3$$

$$S^0_{1.\ell} = 0.634 - 0.359 = 0.275 \text{ m}^3$$

$$S^0_{3.r} = \frac{1}{2} \cdot 0.48 \times 1.503 = 0.361 \text{ m}^3$$

$$S_{3.l}^O = \frac{1}{2} \times 1.2 \times 1.503 = 0.902 \text{ m}^3$$

$$S_{3.c}^O = 0.361 + 0.902 = 1.263 \text{ m}^3$$

$$S_{4.r}^O = 1.518 - 0.672 = 0.846 \text{ m}^3$$

veya

$$S_{4.r}^O = 0.275 - 1.25 \times 0.897 = -0.846 \text{ m}^3$$

$$S_{4.l}^O = \frac{1}{2} \times 1.5 \times 0.897 = 0.672 \text{ m}^3$$

$$S_{4.c}^O = 1.263 + 0.84 \times 0.303 = 1.518 \text{ m}^3$$

$$S_{O.g}^O = \frac{1}{8} \cdot 0.9 \times 2.4 = 0.27 \text{ m}^3$$

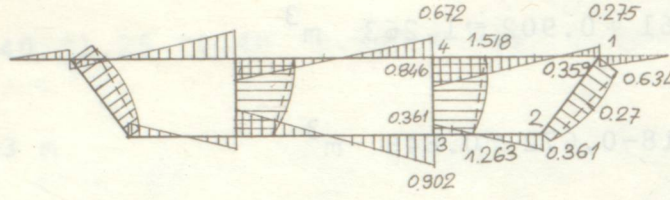
$$S_{O.c}^O = \frac{1}{8} \times 0.84 \times 2.4 = 0.262 \text{ m}^3$$

Dış gözlerde kesilen kenarların G-katlanma doğrultusunda $G.\omega_O$ deplasmanı :

$$\begin{aligned} G.\omega_O &= \oint \frac{S^O(y) \cdot ds}{t} = \\ &= \frac{3.00}{2 \times 0.30} \cdot (0.634 + 0.361) + \frac{2}{3} \cdot \frac{3.00}{0.30} \times 0.27 \\ &\quad - \frac{2.4}{2 \times 0.35} (1.263 + 1.518) - \frac{2}{3} \cdot \frac{2.4}{0.35} \times 0.262 \\ &\quad - \frac{5.0}{2 \times 0.25} \cdot (0.846 - 0.275) = -9.67 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$X_a = 1$ den meydana gelen G-katlanma birim deplasmanı (şekil 21)

$$G.\omega_1 = \oint \frac{ds}{t} = \frac{3.00}{0.30} + \frac{3.20}{0.15} + \frac{2.4}{0.35} + \frac{5.00}{0.25} = 58.19$$

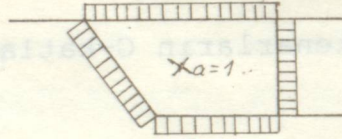


Şekil : 5.20

Bunlardan hiperstatik bilinmeyen değer

$$X_a = - \frac{-9,67}{58,19} = 0,166 \text{ m}^3$$

olarak elde edilir.



Şekil : 5.21

Kapalı kesitin statik momenti aşağıdaki süperpozisyonlar ile elde edilir:

$$S_2 = 0,361 + 0,166 = 0,527 \text{ m}^3$$

$$S_{1.g} = 0,634 + 0,166 = 0,800 \text{ m}^3$$

$$S_{1.r} = 0,359 \text{ m}^3$$

$$S_{1.l} = 0,275 + 0,166 = 0,441 \text{ m}^3$$

$$S_{3.r} = 0,36 + 0,166 = -0,195 \text{ m}^3$$

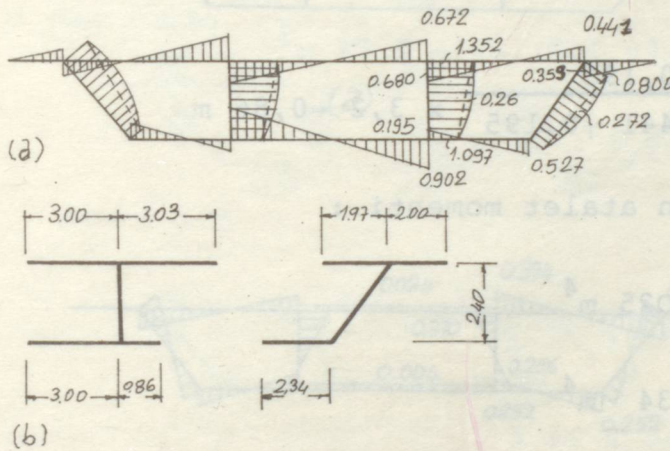
$$S_{3.l} = 0,902 \text{ m}^3$$

$$S_{3.c} = -1,263 + 0,166 = -1,097 \text{ m}^3$$

$$S_{4.r} = -0,846 + 0,166 = -0,680 \text{ m}^3$$

$$S_{4.l} = 0,672 \text{ m}^3$$

$$S_{4.c} = -1,518 + 0,166 = -1,352 \text{ m}^3$$



Sekil : 5.22

Kontrol:

$$\begin{aligned} \oint \frac{S(y) ds}{t} &= 0 = \frac{300}{2 \times 0,30} (0,800 + 0,527) + \frac{2}{3} \cdot \frac{3,0}{0,30} \cdot 0,27 \\ &+ \frac{3,2}{2 \times 0,15} \cdot (0,527 - 0,195) - \frac{2,4}{2 \times 0,35} (1,097 + 1,352) \\ &- \frac{2}{3} \cdot \frac{2,4}{0,35} \times 0,262 - \frac{5,0}{2 \times 0,25} (0,680 - 0,441) = 0 \end{aligned}$$

Sıfır kayma kuvveti noktaları dış ve iç gövdelere ait uygun tablo genişliklerini verir:

Dış gövde:

$$b_{ü.d} = \frac{0,441}{0,441 + 0,680} \times 5,00 = 1,97 \text{ m}$$

$$b_{a.d} = \frac{0,527}{0,527 + 0,195} \cdot 3,2 = 2,34 \text{ m}$$

İç gövde:

$$b_{ü.i} = \frac{0,680}{0,441 + 0,680} \times 5,00 = 3,03 \text{ m}$$

$$b_{a.i} = \frac{0,195}{0,441 + 0,195} \times 3,2 = 0,86 \text{ m}$$

Her bir parçanın atalet momenti :

$$I_{xd} = 2,025 \text{ m}^4$$

ve

$$I_{xi} = 3,34 \text{ m}^4$$

Gövdelerde etkiyen kayma kuvveti bileşenlerinin düşey bileşenleri kontrolü yoluyla hesaplanacaktır.

Orta gövde :

$$\int S(y) ds = \frac{2,4}{2} (0,800 + 0,527) + \frac{2}{3} \cdot 2,4 \times 0,27 = 2,024 \approx 2,025$$

İç gövde :

$$\int S(y) \cdot ds = \frac{2,4}{2} (1,097 + 1,352) + \frac{2}{3} \cdot 2,4 \times 0,262 = 3,358 \approx 3,34$$

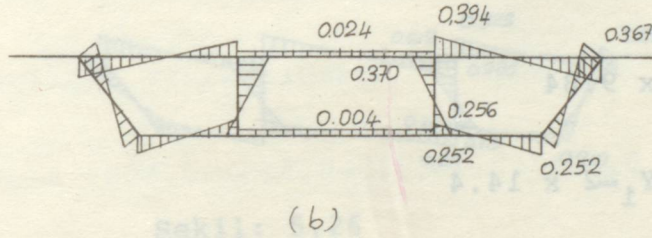
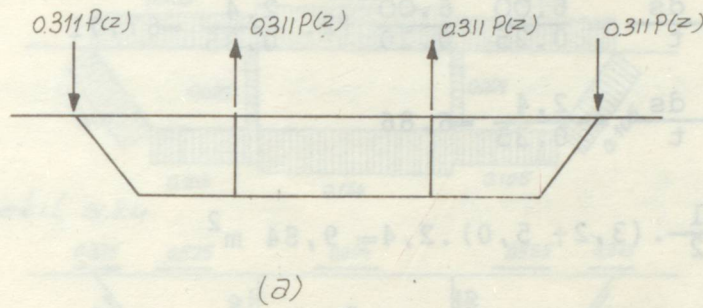
Böylece $\frac{1}{2} P_{(z)}$ simetrik yükü şu şekilde kısımlara ayrılabilir:

$$P_d(z) = \frac{2,025}{10,73} P_{(z)} = 0,189 \cdot P_{(z)}$$

$$P_i(z) = \frac{3.34}{10.73} P(z) = 0.311 \cdot P(z)$$

Şekil 5.23 a ya tekabül eden yük yayılımı ile şekil 5.23 b de gösterilen eğilme momenti diyagramı elde edilir. Sistem statik olarak 5 bilinmeyenlidir.

Eğilme momentleri açı metodu ile hesaplanır.



Şekil 5.23

- $\frac{1}{2}P(z)$ antimetrik yük grubu:

Saf torsiyon:

Yayılmış torsiyonel moment $m_D(z) = \frac{1}{2}P(z) \cdot (2 \times 5.00 + 6.00) = 8 P(z)$

Torsiyonal moment $M_D(z) = \int m_D(z) \cdot dz + C = 8Q(z)$

Kayma akımını hesaplamak için sandık kesitin dış ve iç gözleri de Bredt teoremi tatbik edilecektir.

$$\text{Dış gözler : } \oint \frac{ds}{t} = \frac{3.00}{0.30} + \frac{3.2}{0.15} + \frac{2.4}{0.35} + \frac{5.00}{0.25} = 58.19$$

$$\text{İç gözler : } \oint \frac{ds}{t} = \frac{6.00}{0.25} + \frac{6.00}{0.20} + 2 \cdot \frac{2.4}{0.35} = 67.71$$

$$\text{İç gövde : } \int \frac{ds}{t} = \frac{2.4}{0.35} = 6.86$$

$$\text{Dış gözler } A_d = \frac{1}{2} \cdot (3.2 + 5.0) \cdot 2.4 = 9.84 \text{ m}^2$$

$$\text{İç gözler } A_i = 6.00 \times 2.4 = 14.4 \text{ m}^2$$

Üç kayma denklemi :

$$58.19 Y_d - 6.86 Y_i = 2 \times 9.84$$

$$-2 \times 6.86 Y_d + 67.71 Y_i = 2 \times 14.4$$

ve bu denklemlerin çözümünden

$$Y_d = 0.398 \text{ m}^2 \text{ ve } Y_i = 0.506 \text{ m}^2$$

bulunur.

Y_d ve Y_i ile I_D torsiyonal sabiti $I_D = 30.22 \text{ cm}^4$ ve dış ve iç gözlerin kayma akımı (şekil 5.24) elde edilir.

$$T_{D.d} = \frac{0.398}{30.22} \cdot M_D = 0.013165 M_D = 0.105 Q(z)$$

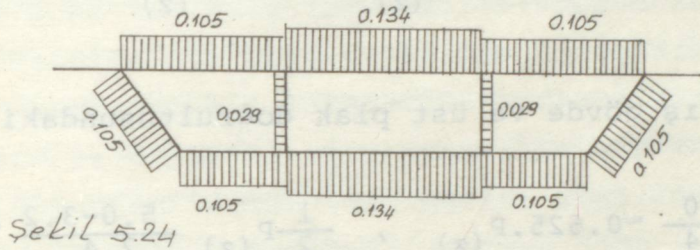
$$T_{D.i} = \frac{0.506}{30.22} M_D = 0.016741 M_D = 0.134 Q(z)$$

Dış gözlere ait maksimum kayma gerilmesi :

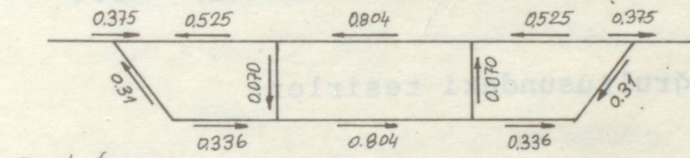
$$\max \tau_{D.d} = \frac{T_{D.d}}{t_a} = \frac{0.105}{0.15} \cdot Q(z) = 0.7 Q(z)$$

İç gözlere ait maksimum kayma gerilmesi :

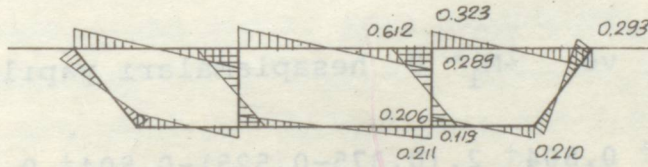
$$\max \tau_{D.i} = \frac{T_{D.i}}{t_r} = \frac{0.134}{0.20} \cdot Q(z) = 0.67 Q_z$$



Şekil 5.24



Şekil 5.25



Şekil: 5.26

Enkesitin antimetrik eğilmesi:

Sırayla dış ve iç gözlere ait kayma akımı:

$$T'_{D.d} = 0.105 \cdot P(z)$$

$$T'_{D.i} = 0.134 \cdot P(z)$$

R' antimetrik dengelenen kuvvetler grubu :

$$R'_{\ddot{u}} = 5.0 \times 0.105 \cdot P(z) = 0.525 \cdot P(z)$$

$$R'_m = 6.0 \times 0.134 \cdot P_{(z)} = 0.804 \cdot P_{(z)}$$

$$R'_a = 3.2 \times 0.105 \cdot P_{(z)} = 0.336 \cdot P_{(z)}$$

$$R'_n = 6.0 \times 0.134 \cdot P_{(z)} = 0.804 \cdot P_{(z)}$$

$$R'_g = 3.0 \times 0.105 \cdot P_{(z)} = 0.315 \cdot P_{(z)}$$

$$\Delta R_c = 2.4 \times (0.134 - 0.105) \cdot P_{(z)} = 0.070 \cdot P_{(z)}$$

$\frac{1}{2} P_{(z)}$ in dış gövde ve üst plak doğrultusundaki bileşimleri:

$$\frac{1}{2} P_{(z)} \cdot \frac{3.0}{2.4} = 0.625 \cdot P_{(z)} \quad , \quad \frac{1}{2} P_{(z)} \cdot \frac{5.0-3.2}{2.4} = 0.375 \cdot P_{(z)}$$

Dış gövde doğrultusundaki tesirler:

$$(0.625 - 0.315) \cdot P_{(z)} = 0.31 \cdot P_{(z)}$$

kontrol için $\Sigma X = 0$ ve $\Sigma M_1 = 0$ hesaplamaları yapılacaktır.

$$\Sigma X = 2.0,336 + 0.804 + 2 \cdot (0,375 - 0,525) - 0,804 + 0,31 \cdot \frac{2 \cdot (5.0 - 3.2)}{3.0} = 0$$

$$\Sigma M_1 = 0.31 \cdot \frac{2.4}{3.0} \cdot (5.0 + 6.0 + \frac{5.0+3.2}{2}) + 0.31 \cdot \frac{5.0-3.2}{3.0} \cdot \frac{2.4}{2} -$$

$$(2.0,336 + 0.804) \cdot 2.4 - 0,07 \cdot 60 = 0$$

Eğilme momentlerin hesabı için her kuvvetin yarım değerleri çerçevenin her düğümüne tatbik edilir ve düşey ve yatay doğrultularda birleştirilir. Sistem 4.kere hiperstatiktir. $P_{(z)}$ e ait eğilme momentleri Şekil.5.26 da gösterilmiştir.

6.SONUÇ :

Sabit simetrik enkesitli tek ve çok gözülü sandık kirişlerde gerilmeler ve deplasmanların hesaplanmasına ait basitleştirilmiş bir

sap metodu gösterilmiştir. Yükler uygun bir şekilde simetrik ve antimetrik olarak düzenlenerek, boyuna doğrultuda basit eğilme, enine doğrultuda basit eğilme ve Saint-Venant saf kayma bağımsız durumlarını elde etmek mümkündür. Bu durumlar basit işlemler ile analiz edilebilir. Analiz bu maksat için bir üç gözlü sandık kiriş örneği ile pekiştirilmiştir.

VI. KATLANMIŞ PLAK METODU

1. GİRİŞ

Fourier serilerini kullanarak bir harmonik analiz köprüde münferit ve yayılı yüklerin her ikisi için analiz etmekte kullanılabildiğinden bu metot, ideal olarak iki ucunda basit mesnetli sandık kirişli köprülere uygun gelir. Köprü boyuna ayritlar boyunca birleştirilmiş bir seridikdörtgen plak olarak düşünülebilir. Her plak ilk önce plak düzlemine dik yükler için elastik plak teorisi ve plak düzlemindeki yükler için iki boyutlu düzlem gerilme (levha) teorisi ile bağımsız olarak analiz edilebilir. Öyleyse tek bir plak için rijitlik matrisi harmonik Fourier serileri terimleri ile ifade edilebilir. Herbir harmonik için plak yalnız her boyuna kenarda dört serbestlik derecelidir. Direkt rijitlik çözümlü birleştirilmiş plaklardan oluşan tüm sistemi analiz etmek için kullanılır.

Keza bu metot çözüm için sayısal ^{bilgisayar} kullanılmasını gerektirir fakat daha sür'atli çözüm sağlar ve birkaç serbestlik derecesini ihtiva ettiğinde sonlu elemanlar metodundan daha az bir depolamayı gerektirir. Herhangi bir yükleme, Fourier serileri ile temsil edilebildiği gibi çok uzun düşünülebilir ve çözüm elastisite teorisinin kabulleri ile tamamlanır.

Katlanmış plak metoduna dayanan bütün analiz ve bilgisayar programları incelenmiştir.

Metot, De Fries Skene ve Scordelis tarafından geliştirilen Goldberg ve Leve tarafından formüle edilen metodun genişletilmiş halidir. Mamafih, metodu beton sandık kirişlere tatbik etmek, çıkarılan denklemlerin toplanıp biraraya getirilmesinden ibarettir.

2. ÇOK GÖZLÜ KATLANMIŞ PLAKLARIN TEORİK ANALİZİ

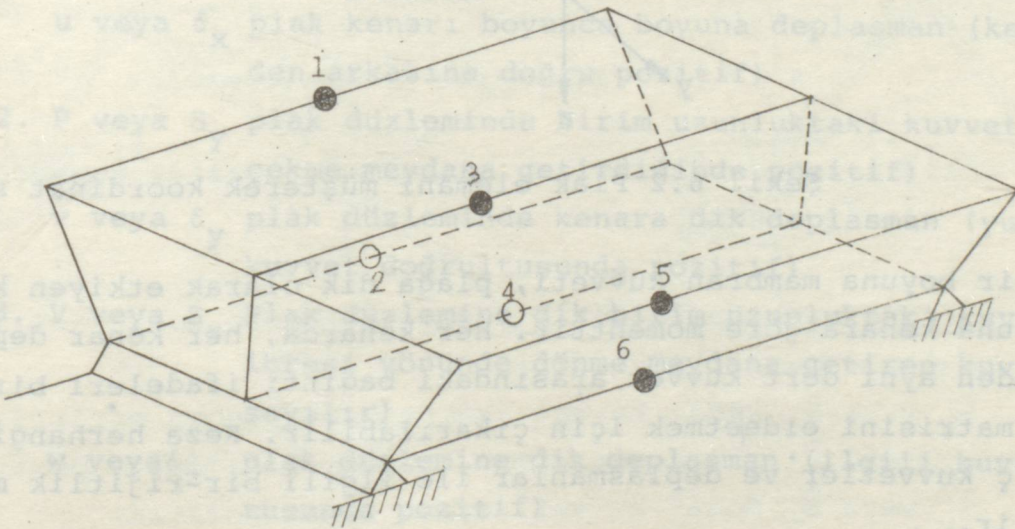
Sistem arakesitlerde birleştirilen elemanlar toplamı olarak düşünülebilir. İki ucunda basit olarak mesnetli bir çok gözlü katlanmış plak sistemi durumunda (şekil 6.1) sistem elemanları boyuna arakesitlerde birleştirilmiş enine uç diyaframlarla çerçeve haline getirilmiş münferit dikdörtgen plaklar olarak alınabilir. Böyle bir sistem De Fries ve Scordelis tarafından açıklanan rijitlik metodunun genişletilmesiyle analiz edilebilir.

2.1. İç Diyaframı Olmayan Çok Gözlü Katlanmış Plakların Çözümü

Sistem iki ucunda basit mesnetli olması nedeniyle herhangi keyfi boyuna yayılışa haiz yükler için bir analiz bir harmonik seri kullanılarak çözümlenebilir. Tatbik edilen yükler ilk olarak Fourier serisi bileşenleri şeklinde halledilir. Analiz herbir harmoniğin bütün yükleme bileşenleri için yerine getirilebilir ve sonra nihâi neticeler yükü temsil etmek için kullanılan harmoniklerin tümüne ait neticelerin toplamı ile elde edilebilir. Geniş hesaplamaları kapsamına alan bir çözüm tekniği, herhangi bir harmonik için yeniden kullanılabilen bir tek harmonik için geliştirilmiştir ve böylece yaklaşım sayısal bilgisayar uygulamasına oldukça uygun düşer. Herbir harmoniğe ait analizin haiz olduğu avantaj böyle yüklerin aynı değişimli deplasmanları meydana getireceği ve niteki tek karakteristik değerin herhangi kuvvet veya deplasmanı açıklamak için kullanılışıdır. Örneğin deplasman

$$r(x) = r_0 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

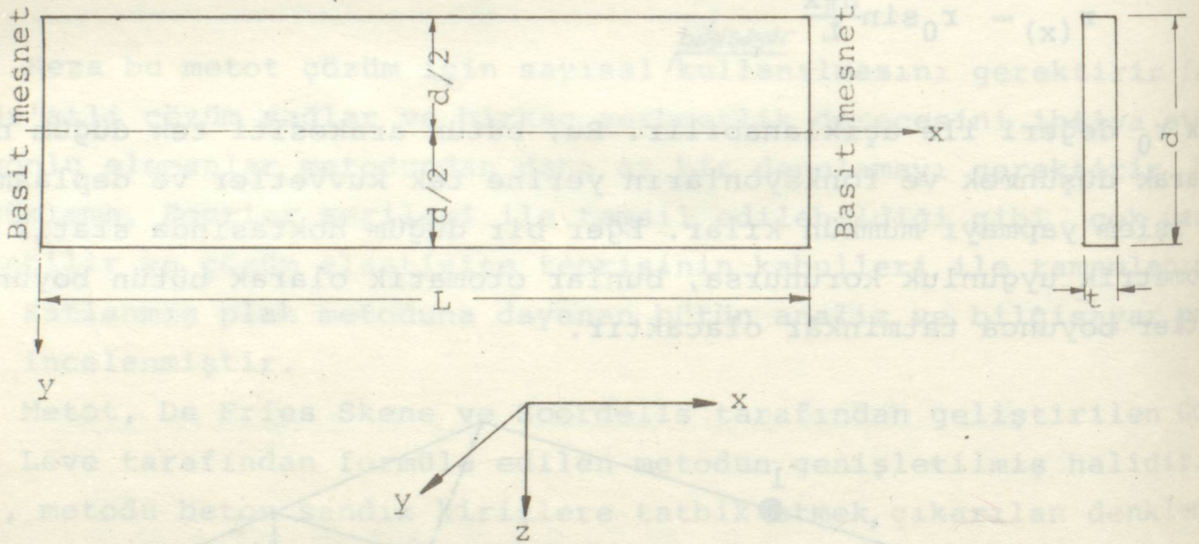
tek r_0 değeri ile açıklanabilir. Bu, bütün arakesiti tek düğüm noktası olarak düşünmek ve fonksyonların yerine tek kuvvetler ve deplasmanlar ile işlem yapmayı mümkün kılar. Eğer bir düğüm noktasında statik denge ve geometrik uygunluk korunursa, bunlar otomatik olarak bütün boyuna arakesitler boyunca tatminkâr olacaktır.



Şekil 6.1 Basit mesnetli çok gözlü katlanmış plak

Her arakesit veya düğüm noktası dört serbestlik derecelidir. uç diyaframlara paralel bir düzlemde düşey olarak veya yatay olarak hareket edebilir, boyuna doğrultuda arakesite paralel olarak hareket edebilir ve gene arakesite paralel bir eksene göre dönebilir. Şekil 6.1'deki sistem 6 arakesitlidir ve netice olarak serbestlik derecesi toplamı $4 \times 6 = 24$ dür.

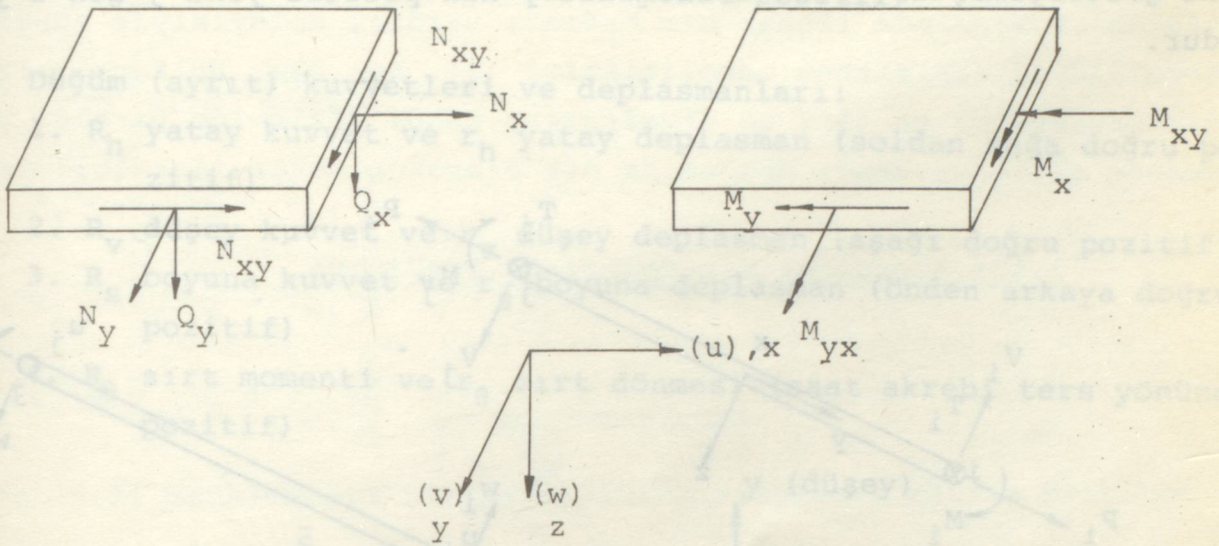
Her münferit plak, yüzeyinde yükler etkiyen ve iki boyuna kenar boyunca deplasmanlar ve kuvvetler bulunan serbest bir cisim olarak alınabilir (Şekil 6.2). Bu tesirlerden dolayı plağın tamamında iç kuvvetler ve deplasmanlar meydana gelecektir (Şekil 6.3). Boyuna kenarlar deplasmana karşı sabitleştirilmesi hali için, yüzeysel yüklerden meydana gelen iç ve kenar kuvvet ifadeleri: plak düzlemine dik yükler için klasik plak teorisi ve plak düzleminde etkiyen yükler için düzlem gerilme "leha" teorisi olarak belirlenen elastisite denklemleri kullanılarak çıkarılabilir. Burada sabitleşmeyi sağlayan kuvvetlere ankastre kenar kuvvetleri denir. Ve bunlar enine membran kuvvetlerini ihtiva eden her bir kenar



Şekil 6.2 Plak elemanı müşterek koordinat sistemi

nardaki bir boyuna membran kuvveti, plağa dik olarak etkiyen kayma kuvveti ve boyuna kenara göre momenttir. Her kenarda, her kenar deplasmana tekabül eden aynı dört kuvvet arasındaki bağıntı ifadeleri bir elemanın rijitlik matrisini elde etmek için çıkarılabilir. Keza herhangi bir ağırlıttaki iç kuvvetler ve deplasmanlar ile ilgili bir rijitlik matriside verilebilir.

Rijitlik matrislerini verebilmek için önce koordinat sistemlerini belirlemek gereklidir. Burada iki koordinat sisteminden söz edilebilir. Birincisi her plak elemanın kendi eksenlerine çakışık koordinat sistemi ki bunu "cubuk koordinat sistemi" olarak anacağız. İkinci koordinat



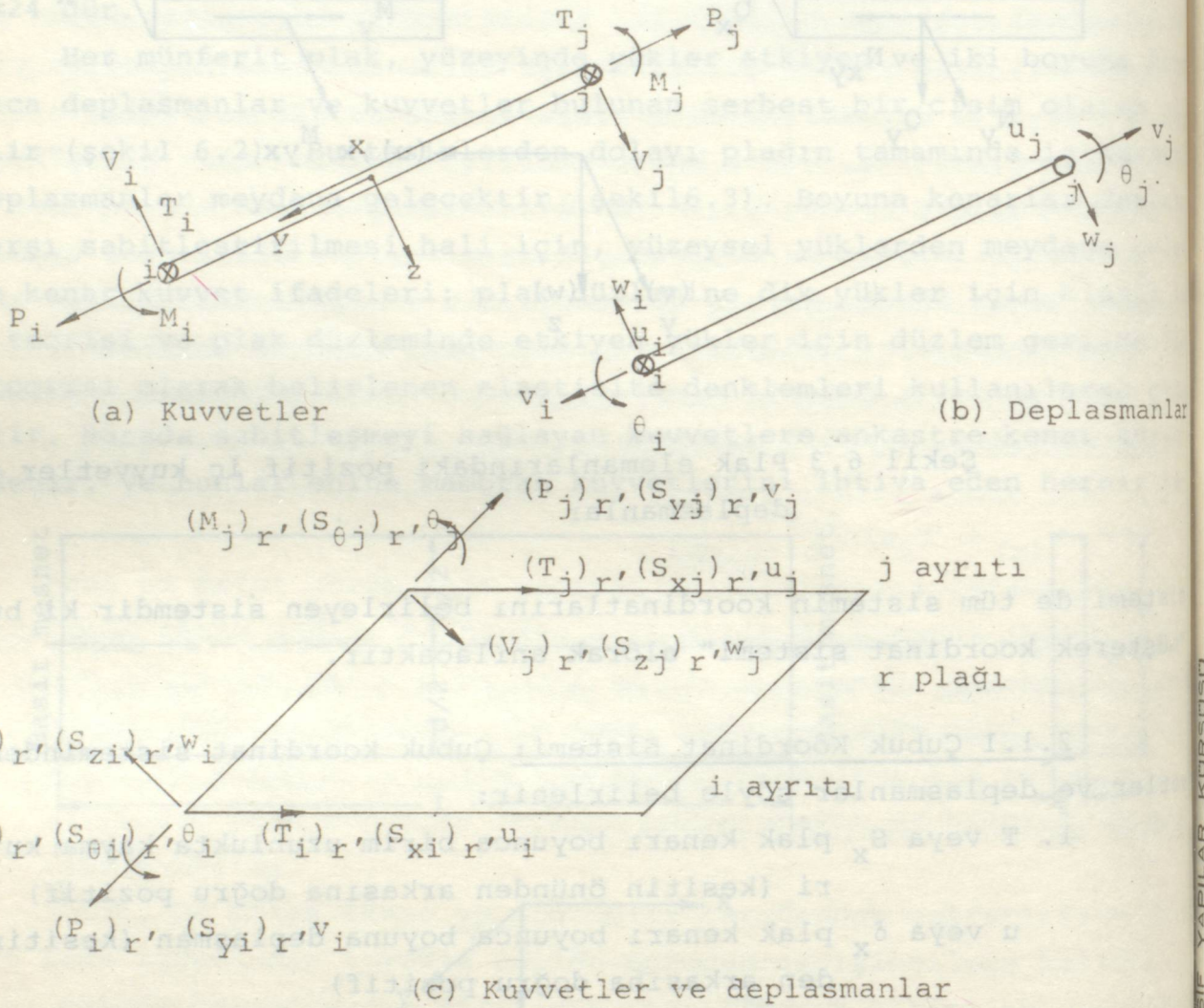
Şekil 6.3 Plak elemanlarındaki pozitif iç kuvvetler ve deplasmanlar

sistemi de tüm sistemin koordinatlarını belirleyen sistemdir ki bu da "müşterek koordinat sistemi" olarak anılacaktır.

2.1.1 Çubuk Koordinat Sistemi: Çubuk koordinat sistemindeki kuvvetler ve deplasmanlar şöyle belirlenir:

1. T veya S_x plak kenarı boyunca birim uzunlukta kayma kuvvetleri (kesitin önünden arkasına doğru pozitif)
 u veya δ_x plak kenarı boyunca boyuna deplasman (kesitin önünden arkasına doğru pozitif)
2. P veya S_y plak düzleminde birim uzunlukta kuvvet (plakta çekme meydana getirdiğinde pozitif)
 v veya δ_y plak düzleminde kenara dik deplasman (yukarıdaki kuvvet doğrultusunda pozitif)
3. V veya S_z Plak düzlemine dik birim uzunlukta kuvvet (saat ibresi yönünde dönme meydana getiren kuvvet pozitif sayılır)
 w veya δ_z plak düzlemine dik deplasman (ilgili kuvvet doğrultusunda pozitif)
4. M veya S_θ boyuna kenar eksenine göre eğilme momenti (saat ibresi tersi yönünde pozitif)
 θ veya δ_θ boyuna kenara göre dönme (moment doğrultusunda pozitif)

Çubuk koordinat sisteminde kuvvetler ve deplasmanlar şekil 6.4 de gösterilmiştir. Plak düzleminde y nin pozitif yönü j den i ye doğrudur.



Şekil 6.4 Çubuk koordinat sisteminde pozitif kuvvetler ve deplasmanlar

2.1.2 Müşterek Koordinat Sistemi: Müşterek koordinat sisteminde

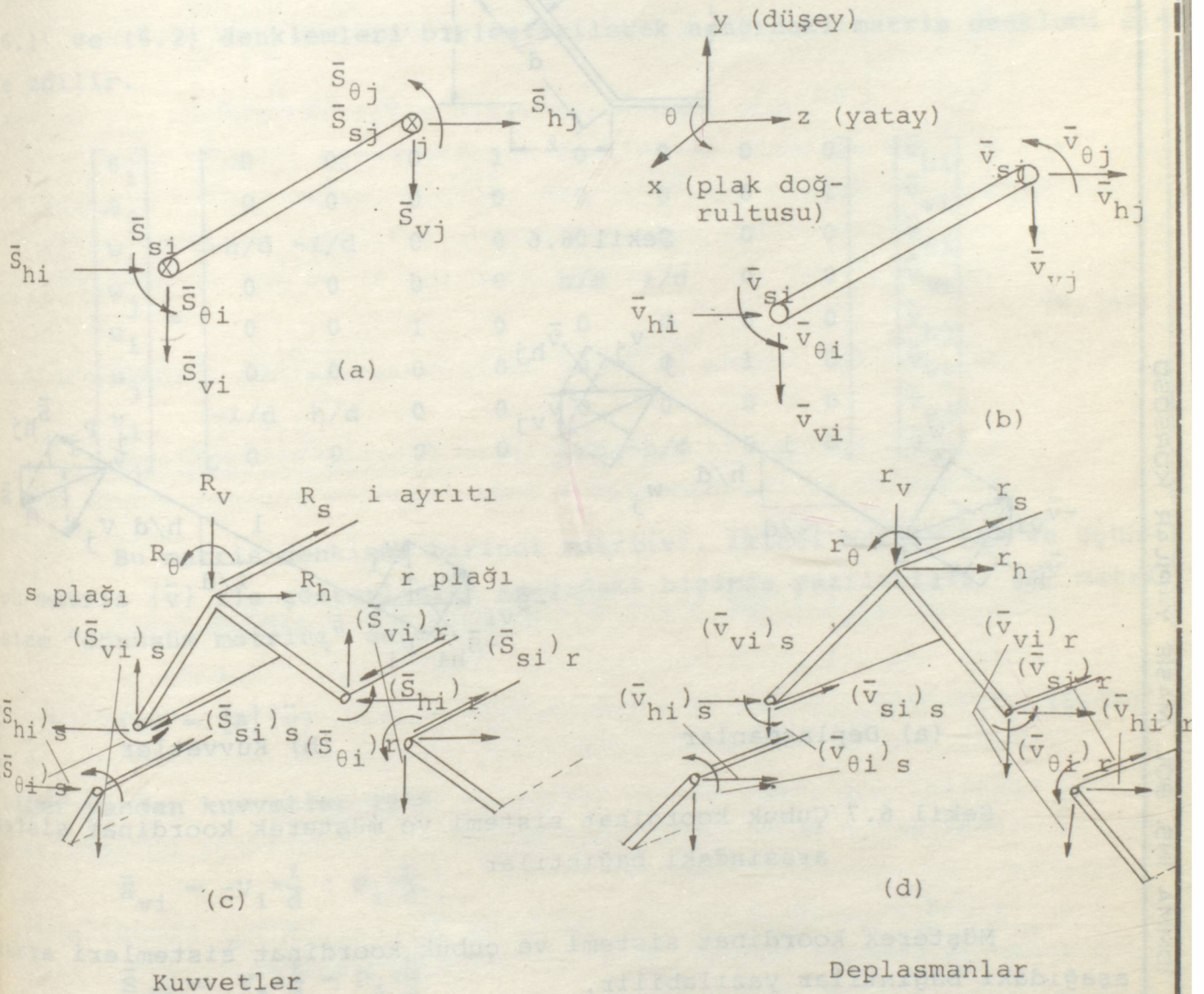
kuvvetler ve deplasmanlar şöyledir:

1. $\bar{S}_h$ veya $\bar{S}_z$ yatay kuvvet (soldan sağa doğru pozitif)
 $\bar{v}_h$ veya $\bar{v}_z$ yatay deplasman (soldan sağa doğru pozitif)
2. $\bar{S}_v$ veya $\bar{S}_y$ düşey kuvvet (aşağı doğru pozitif)
 $\bar{v}_v$ veya $\bar{v}_y$ düşey deplasman (aşağı doğru pozitif)
3. $\bar{S}_s$ veya $\bar{S}_x$ boyuna kuvvet (önden arkaya doğru pozitif)
 $\bar{v}_s$ veya $\bar{v}_x$ boyuna deplasman (önden arkaya doğru pozitif)

4. $\bar{S}_\theta$ sırt momenti (saat akrebi tersi yönünde pozitif)
 $\bar{v}_\theta$ dönme (saat akrebi tersi yönde pozitif)

Düğüm (ayrıt) kuvvetleri ve deplasmanları:

1. R_h yatay kuvvet ve r_h yatay deplasman (soldan sağa doğru pozitif)
2. R_v düşey kuvvet ve r_v düşey deplasman (aşağı doğru pozitif)
3. R_s boyuna kuvvet ve r_s boyuna deplasman (önden arkaya doğru pozitif)
4. R_θ sırt momenti ve r_θ sırt dönmesi (saat akrebi ters yönünde pozitif)

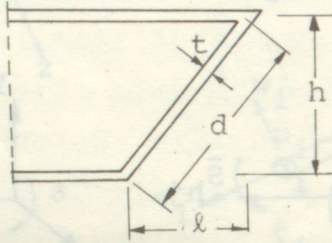


Şekil 6.5 Müşterek koordinat sisteminde kuvvetler, deplasmanlar ve bunların pozitif doğrultuları

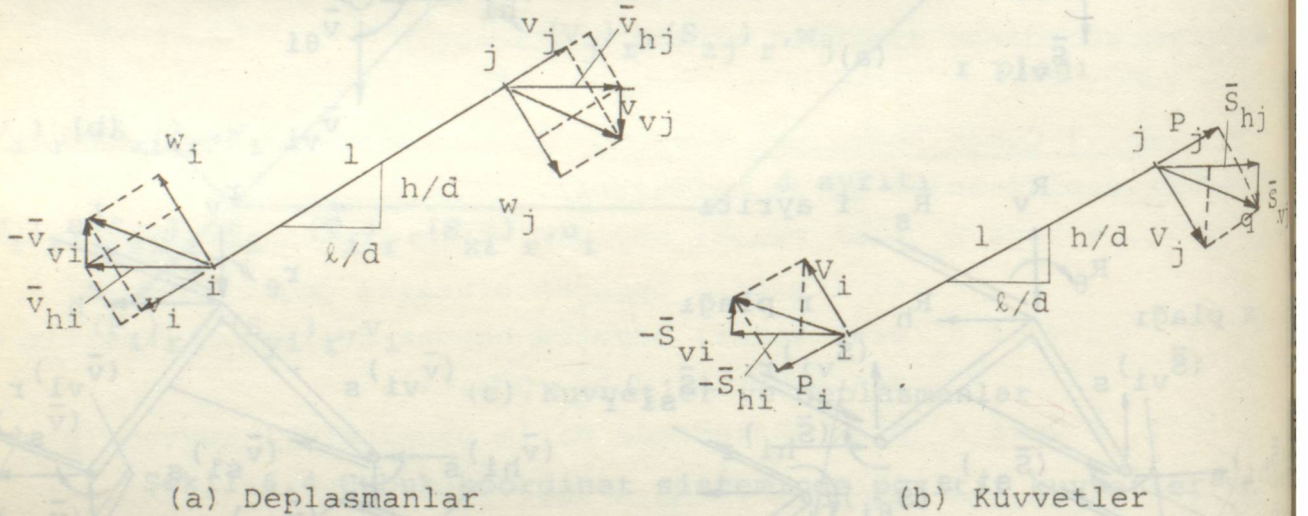
2.1.3 Esas Kabuller:

Burada şu kabuller esas alınmıştır: (1). bütün kuvvetler ve deplasmanlar arasında lineer bir bağıntı vardır, dolayısıyla süperpozisyon geçerlidir; (2). sistem monolitikdir; (3). her plak üniform kalınlıklı dikdörtgendir; ve (4). uç diyaframlar kendi düzlemine paralel yönde sınırlı derecede rijit ve kendi düzlemine dik olarak oldukça fleksibildir.

2.1.4 Koordinat Sistemlerinin Dönüşümü:



Şekil 6.6



Şekil 6.7 Çubuk koordinat sistemi ve müşterek koordinat sistemi arasındaki bağıntılar

Müşterek koordinat sistemi ve çubuk koordinat sistemleri arasındaki aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$(\theta_i)_r = (\theta_i)_s = r_{\theta i}$$

$$(u_i)_r = (u_i)_s = r_{u i}$$

(6.1)

plak genişliği d , plak kalınlığı t , yatay izdüşüm ℓ , dikey izdüşüm h olmak üzere şu bağıntılar yazılabilir:

$$\begin{aligned} v_i &= \bar{v}_{vi} \times \frac{h}{d} - \bar{v}_{hi} \times \frac{\ell}{d} \\ v_j &= -\bar{v}_{vj} \times \frac{h}{d} + \bar{v}_{hj} \times \frac{\ell}{d} \\ w_i &= -\bar{v}_{vi} \times \frac{\ell}{d} - \bar{v}_{hi} \times \frac{h}{d} \\ w_j &= \bar{v}_{vj} \times \frac{\ell}{d} + \bar{v}_{hj} \times \frac{h}{d} \end{aligned} \quad (6.2)$$

(6.1) ve (6.2) denklemleri birleştirilerek aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ w_i \\ w_j \\ u_i \\ u_j \\ v_i \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -h/d & -\ell/d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h/d & \ell/d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\ell/d & h/d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ell/d & -h/d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_{hi} \\ \bar{v}_{vi} \\ \bar{v}_{si} \\ \bar{v}_{\theta i} \\ \bar{v}_{hj} \\ \bar{v}_{vj} \\ \bar{v}_{sj} \\ \bar{v}_{\theta j} \end{bmatrix} \quad (6.3a)$$

Bu matris denklemi birinci matris $\{v\}$, ikinci matris $[A]$ ve üçüncü matris $\{\bar{v}\}$ ile gösterilerek aşağıdaki biçimde yazılabilir. $[A]$ matrisine "dönüşüm matrisi" denir.

$$\{v\} = [A] \{\bar{v}\} \quad (6.3b)$$

Diğer yandan kuvvetler için

$$\begin{aligned} \bar{S}_{vi} &= -v_i \times \frac{\ell}{d} + p_i \times \frac{h}{d} \\ \bar{S}_{vj} &= v_j \times \frac{\ell}{d} - p_j \times \frac{h}{d} \\ \bar{S}_{hi} &= -v_i \times \frac{h}{d} - p_i \times \frac{\ell}{d} \\ \bar{S}_{hj} &= v_j \times \frac{h}{d} + p_j \times \frac{\ell}{d} \end{aligned} \quad (6.4)$$

yazılabilir. Ve bunlar genel olarak yukarıdaki (6.3a) denklemine benzer şekilde aşağıdaki matris denklemi biçiminde yazmak mümkündür.

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{hi} \\ \bar{S}_{vi} \\ \bar{S}_{si} \\ \bar{S}_{\theta i} \\ \bar{S}_{hj} \\ \bar{S}_{vj} \\ \bar{S}_{sj} \\ \bar{S}_{\theta j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h/d & 0 & 0 & 0 & -l/d & 0 \\ 0 & 0 & -l/d & 0 & 0 & 0 & h/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h/d & 0 & 0 & 0 & l/d \\ 0 & 0 & 0 & l/d & 0 & 0 & 0 & -h/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \\ M_j \\ V_i \\ V_j \\ T_i \\ T_j \\ P_i \\ P_j \end{bmatrix} \quad (6.5a)$$

veya kısaca

$$\{\bar{S}\} = [A^T] \{S\} \quad (6.5b)$$

olarak yazılabilir. Burada $[A^T]$, $[A]$ dönüşüm matrisinin transpoz'u dur.

2.1.5 Kuvvetler ve Deplasmanların Fourier Bileşenleri:

Kuvvetler ve deplasmanlar x doğrultusunda Fourier sinüs serileri ile ifade edilebilirler:

$$V = S_z = \sum S_{nz} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad P = \sum P_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad M = \sum M_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$v_y = \sum v_{ny} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \theta = \sum \theta_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{v.s} \quad (6.6)$$

Sinüs serileri ile ifade edilen kuvvetler ve deplasmanlar $x=0$ ve $x=L$ sıfır olacaklardır ve böylece basit mesnet sınır şartları uçlarda sağlanacaktır.

x doğrultusundaki bütün $(\bar{S}_x, R_x, \bar{v}_x(u), S_x$ ve $V_x)$ kuvvetler ve deplasmanlar fourier cosinüs serileri ile ifade edilebilir:

$$\bar{S}_x = \bar{S}_s = -\sum \bar{S}_{nx} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad S_x = -\sum S_{nx} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad n=1,2,\dots$$

$$\bar{v}_s = \bar{v}_x = \sum \bar{v}_{nx} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad u_x = -\sum u_{nx} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{v.s} \quad (6.7)$$

Kuvvetler ve deplasmanlar x doğrultusunda $x=0$ ve $x=L$ de maksimum olacaktır. Eğer n tek ise maksimum kuvvetler ve deplasmanlar ters işaretli olurlar. Örneğin

$$x=0 \text{ da } u_x = -\sum u_{nx}, \quad x=L \text{ de } u_x = \sum u_{nx}$$

Bu deplasmanlar plağın her iki ucunda eşit ve ters olduğunda eğer u_{nx} pozitif ise çekme, negatif ise basınç meydana getirir.

Eğer n çift terimler ihtiva ederse x doğrultusunda $x=0$ ve $x=L$ de kuvvetler veya deplasmanlar her iki uçta da aynı işaretli olacaktır. Örneğin

$$x=0 \text{ ve } x=L \text{ durumunda } u_x = -\sum u_{nx}$$

Yani $-\sum u_{nx}$ plakta bir rijit cisim deplasmanı olur.

Daha sonraki paragraflarda denklemler sinüs ve cosinüs serilerinin herbiri için yazılır. $\sin \frac{n\pi x}{L}$ ve $\cos \frac{n\pi x}{L}$ son olarak bütün denklemlerden çıkarılacak ve sadelik için denklemlerde sadece katsayılar gözükcektir. Örneğin (6.3b) ve (6.5b) denklemleri

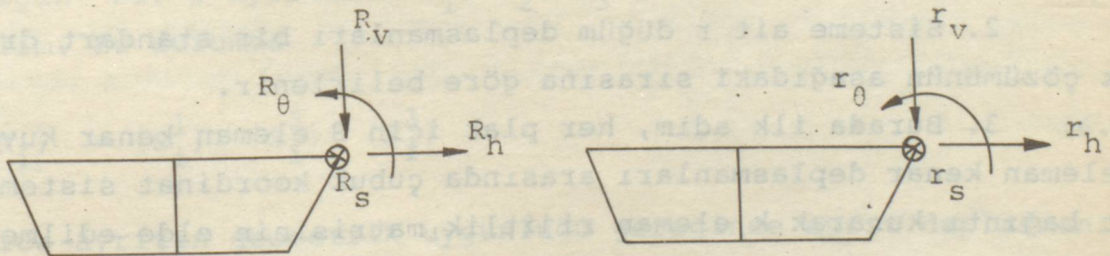
$$\{v_n\} = [A]\{\bar{v}_n\} \quad (6.8)$$

$$\{\bar{S}_n\} = [A^T]\{S_n\} \quad (6.9)$$

şeklını alır.

2.1.6 Yalnız Düğüm (Ayrıt) Yüklerine Maruz Sisteme ait Çözüm:

1. Ankastre kenar çözüm için bulunan düğüm (ayrıt) ankastrelik kuvvetlerine, verilen dış düğüm kuvvetleri ve eşit ve ters kuvvet takımları ilave edilir. Bu toplam, ayrıtlarda R dış yükü olarak düşünülür (Şekil 6.8).



Düğüm kuvvetleri

Düğüm deplasmanları

Şekil 6.8 Müşterek koordinat sisteminde pozitif düğüm kuvvetleri ve deplasmanları

Müşterek koordinat sisteminde, bir i düğümünde etkiyen R düğüm kuvvetleri iki kısım ihtiva eder.

a. Dıştan tatbik edilen kuvvetler R_i^0

b. i düğümünde birleşen $r_1, r_2, r_3, \dots$ v.s plakların ankastre kenar kuvvetleri reaksiyonlarının toplamı R_i^f

Bu durumda toplam düğüm kuvveti

$$[R_{ni}] = [R_{ni}^0] + [R_{ni}^f] = [R_{ni}^0] - \sum [R_{ni}^f]_r \quad (6.10)$$

Eğer r plağı i ayırıtından j ayırıtına doğru uzanırsa müşterek koordinat sistemindeki R_n^f ankastre kenar kuvvetleri çubuk koordinat sistemindeki S_n^f ankastre kenar kuvvetleri ile (6.6) ve (6.7) denklemlerine benzer şekilde aşağıdaki *matris* ile bağlanır.

$$[R_n^f]_r = \begin{bmatrix} R_{ni}^f \\ R_{nj}^f \end{bmatrix} = [A_n^T]_r [S_n^f]_r \quad (6.11)$$

burada

$$[R_n^f]_r = \begin{bmatrix} R_{ni}^f \\ R_{nj}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{nzi}^f \\ R_{nyi}^f \\ R_{nxi}^f \\ R_{nei}^f \\ R_{nzj}^f \\ R_{nyj}^f \\ R_{nxi}^f \\ R_{nej}^f \end{bmatrix}_r \quad [S_n^f]_r = \begin{bmatrix} M_{ni}^f \\ M_{nj}^f \\ S_{ni}^f \\ S_{nj}^f \\ V_{ni}^f \\ V_{nj}^f \\ P_{ni}^f \\ P_{nj}^f \end{bmatrix}_r \quad (6.12)$$

2. Sisteme ait r düğüm deplasmanları bir standart direkt rijitlik çözümünün aşağıdaki sırasına göre belirlenir.

3. Burada ilk adım, her plak için S eleman kenar kuvvetleri ve v eleman kenar deplasmanları arasında çubuk koordinat sistemine göre bir bağıntı kurarak k eleman rijitlik matrisinin elde edilmesidir (şekil 6.4).

$$\{S\} = [k]\{v\} \quad (6.13)$$

4. (6.13) denklemindeki S kenar kuvvetleri ve v kenar deplasmanları müşterek koordinat sisteminde (şekil 6.5), $\bar{S}$ ve $\bar{v}$ daha önceki paragraflarda görüldüğü gibi bir A deplasman dönüşüm matrisi ve onun transpoz'u A^T ile çözümlenebilir ((6.3b) ve (6.5b) denklemleri).

5. (6.3b) ve (6.5b) denklemleri (6.13) denkleminde yerine konularak aşağıdaki neticeler bulunur:

$$[\bar{S}] = [A^T] [k] [A] (\bar{v}) \quad (6.14a)$$

veya

$$[\bar{S}] = [\bar{k}] (\bar{v}) \quad (6.14b)$$

Burada

$$[\bar{k}] = [A^T] [k] [A] \quad (6.15)$$

dir. $\bar{k}$ matrisi müşterek koordinat sisteminde 8x8 boyutunda eleman rijitlik matrisidir.

6. (6.14) denklemini aşağıdaki gibi bölümlere ayırabiliriz.

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_i \\ \bar{S}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{ii} & \bar{k}_{ij} \\ \bar{k}_{ji} & \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

Burada i ve j plağın iki kenarındaki ayrit no.larını gösterir. Yukarıdaki işlem her plak için tekrarlanmalıdır.

7. Herhangi bir ayritın (düğümün) statik dengesi ayrit kuvvetlerinin, özel ayrit biçimindeki plak kenarları üzerinde etkiyen eleman kuvvetlerinin toplamına eşit olmasını gerektirir. Konuyu daha iyi anlatabilmek için bir i ayritında r_1, r_2, r_3 gibi üç elemanın birleştiğini kabul edelim. Bu durumda

$$\{R_i\} = \{S_i^1\} + \{S_i^2\} + \{S_i^3\} \quad (6.17)$$

olur. Ayrıca ayritın geometrik uygunluğu gereğince ayrit deplasmanının plak kenar deplasmanına eşit olması gerekir.

$$\{r_i\} = \{\bar{v}_i^1\} = \{\bar{v}_i^2\} = \{\bar{v}_i^3\} \quad (6.18)$$

8. Tüm sistem için K rijitlik matrisi, şimdi (6.16) denkleminin eleman rijitlik matrisleri toplanarak uygun bir şekilde temsil edilebilir. m ayırıt için K matrisinin boyutu $4m \times 4m$ olur. Örneğin şekil 6.1'deki sistem için aşağıdaki biçimde alınacak olan K matrisi 24×24 lük bir boyuta haiz olacaktır.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12}^T & K_{22} & 0 & K_{24} & 0 & 0 \\ K_{13}^T & 0 & K_{33} & K_{34} & K_{35} & 0 \\ 0 & K_{24}^T & K_{34}^T & K_{44} & 0 & K_{46} \\ 0 & 0 & K_{35}^T & 0 & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & 0 & K_{46}^T & K_{56}^T & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Bu matris denklemi genel bir sistem için sembolik biçimde

$$\{R\} = [K] \{r\} \quad (6.19a)$$

olarak yazılabilir.

(6.19) denklemindeki indisler ayırıt numaralarını gösterir. Diyagonal K_i matrisi i ayırıtında tatbik edilen birim deplasman sebebiyle i düğümünde oluşan kuvvetleri gösterir. Her diyagonal terim i ayırıtında birleşen bütün plak elemanlarının $\bar{K}$ plak eleman rijitliklerinin toplamıdır.

$$K_i = \sum_e \bar{K}_i^e \quad (6.20)$$

Burada e indisi plak elemanı numarasını gösterir. Diyagonal dışındaki K_{ij} alt matrisleri j düğümündeki birim deplasmandan i düğümünde meydana gelen kuvvetleri gösterir. Eğer ayırıtlar arasında bir plak elemanı varsa sadece iki ayırıt çifti teşkil eder. Genel durumda böyle bir eleman vardır.

$$K_{ij} = K_{ji} \quad (6.21)$$

Ayırıt numaraları keyfi olarak işaretlenmiştir fakat herhangi bir plağın ayırıt no.ları arasındaki maksimum fark minimum olacak şekilde düzenlenmelidir. Bu anlamda K matrisi mümkün olan en dar band genişliğinde

liğine ve bilgisayarda hızlı bir çözüm neticesine haiz olacaktır.

Bilinmeyen deplasmanlar için, daha önce biçimlenen sistemin rijitlik matris denklemi (6.19a), üç boyutlu matrisler için Clough, Wilson ve King tarafından sunulan işlemlere benzer bir hatırlatma kullanılarak çözümlenebilir.

9. Çubuk koordinat sisteminde r bilinmeyen deplasmana haiz bir sistemde v plak kenar deplasmanları (6.18) ve (6.3b) denklemlerinin kullanılmasıyla hesaplanabilir.

10. Her plaktaki iç kuvvetler ve deplasmanlar daha önce açıklanan plak kenar deplasmanları ve bu değerlerin bağıntı ifadeleriyle (6.22) (6.23) ve (6.24) denklemlerinden hesaplanabilir.

$$\{v_n\}_r = \begin{bmatrix} \theta_{ni} \\ \theta_{nj} \\ w_{ni} \\ w_{nj} \\ u_{ni} \\ u_{nj} \\ v_{ni} \\ v_{nj} \end{bmatrix} = [A]_r [r_n]_r = [A]_r \begin{bmatrix} r_{ni} \\ r_{nj} \end{bmatrix} = [A]_r \begin{bmatrix} r_{hni} \\ r_{vni} \\ r_{sni} \\ r_{\theta ni} \\ r_{hnj} \\ r_{vnj} \\ r_{snj} \\ r_{\theta nj} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$\begin{bmatrix} M_{ni} \\ M_{nj} \\ V_{ni} \\ V_{nj} \\ T_{ni} \\ T_{nj} \\ P_{ni} \\ P_{nj} \end{bmatrix} = [S_n^f]_r + [S_n]_r = [S_n^f]_r + [k_n]_r [v_n]_r = \begin{bmatrix} M_{ni}^f \\ M_{nj}^f \\ V_{ni}^f \\ V_{nj}^f \\ T_{ni}^f \\ T_{nj}^f \\ P_{ni}^f \\ P_{nj}^f \end{bmatrix} + [k_n]_r \begin{bmatrix} \theta_{ni} \\ \theta_{nj} \\ w_{ni} \\ w_{nj} \\ u_{ni} \\ u_{nj} \\ v_{ni} \\ v_{nj} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$(\theta_i)_r = \sum_n (\theta_{ni})_r \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.24a)$$

$$(w_i)_r = \sum_n (w_{ni})_r \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.24b)$$

$$(u_i)_r = -\sum_n (u_{ni})_r \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (6.24c)$$

$$(v_i)_r = \sum_n (v_{ni})_r \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.24d)$$

$$(M_i)_r = \sum_n (M_{ni})_r \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.24e)$$

$$(V_i)_r = \sum_n (V_{ni})_r \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.24f)$$

$$(T_i)_r = -\sum_n (T_{ni})_r \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (6.24g)$$

$$(P_i)_r = \sum_n (P_{ni})_r \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.24h)$$

r plağındaki boyuna gerilmeler

$$(\sigma_x)_r = (E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma_{yr}) = E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} (u_{ni})_r \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{\nu}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (P_{ni})_r \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.25)$$

bağıntısı ile bulunur.

2.1.7 Eleman Rijitlik Matrisinin Teşkili:

Plak kenar kuvvetleri ve deplasmanları çubuk koordinat sisteminde (şekil 6.4) gösterilmiştir. Bir elemandaki tesirleri elemanda $(\theta_i, \theta_j, w_i, w_j)$ leri meydana getiren eğilme tesirleri ve yalnız (u_i, u_j, v_i, v_j) deplasmanlarını meydana getiren düzlem gerilme (levha) tesirleri olarak gözönüne alınabilir. Bu iki grup tesirin herbiri için rijitlik matrisi ayrı ayrı teşkil edilerek bir matris halinde gösterilebilir.

a. Plağın basit eğilmesi haline (ince plak teorisine) ait matris denklemleri: Bu sistem için kuvvet deformasyon bağıntısı

$$\begin{bmatrix} M_{ni} \\ M_{nj} \\ V_{ni} \\ V_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{ni} \\ \theta_{nj} \\ w_{ni} \\ w_{nj} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

şeklinde veya sembolik olarak

$$[S_{ns}] = [k_{ns}] \{v_{ns}\} \quad (6.26b)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$S_{ns} = M_{ni}, M_{nj}, V_{ni}, V_{nj}$ ince plak teorisinde plak kuvvetleri

$v_{ns} = \theta_{ni}, \theta_{nj}, w_{ni}, w_{nj}$ ince plak teorisinde plak deplasmanları

k_{ns} ince plak teorisine ait plak rijitlik matrisi

$$k_{11} = \frac{2\alpha}{d} \times \frac{D}{A} (\sinh \alpha \cos \alpha - \alpha) = k_{22} \quad (6.27a)$$

$$k_{12} = \frac{2\alpha}{d} \times \frac{D}{A} (\alpha \cosh \alpha - \sinh \alpha) = k_{21} \quad (6.27b)$$

$$k_{13} = \left(\frac{\alpha}{d}\right)^2 D \left[\frac{1}{A} (\sinh^2 \alpha + \alpha^2) + \nu\right] = k_{31} = k_{24} = k_{42} \quad (6.27c)$$

$$k_{14} = 2 \left(\frac{\alpha}{d}\right)^2 \frac{D}{A} (\alpha \sinh \alpha) = k_{41} = k_{23} = k_{32} \quad (6.27d)$$

$$k_{33} = 2 \left(\frac{\alpha}{d}\right)^3 \frac{D}{A} (\cosh \alpha \sinh \alpha) = k_{44} \quad (6.27e)$$

$$k_{34} = 2 \left(\frac{\alpha}{d}\right)^3 \frac{D}{A} (\alpha \cosh \alpha + \sinh \alpha) = k_{43} \quad (6.27f)$$

$$\alpha = \frac{n\pi d}{L} \quad (6.28a)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6.28b)$$

$$A = \sinh^2 \alpha - \alpha^2 \quad (6.28c)$$

t = plak kalınlığı

E = Elastisite modülü

ν = Poisson oranı

b. Plakın düzlem gerilmesi (levha teorisi) hali için matris denk-

lemi: Levha teorisinde kuvvet deplasman bağıntısı

$$\begin{bmatrix} T_{ni} \\ T_{nj} \\ P_{ni} \\ P_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ni} \\ u_{nj} \\ v_{ni} \\ v_{nj} \end{bmatrix} \quad (6.29a)$$

şeklinde veya sembolik biçimde

$$[S_{np}] = [k_{np}] \{v_{np}\} \quad (6.29b)$$

olarak yazılabilir. Burada

$S_{np} = T_{ni}, T_{nj}, P_{ni}, P_{nj}$ levha teorisinde plak kuvvetleri

$v_{np} = u_{ni}, u_{nj}, v_{ni}, v_{nj}$ levha teorisinde plak deplasmanları

k_{np} = Levha teorisinde plak rijitlik matrisi

$$k_{55} = 2 \frac{D'}{A'} \left(\frac{\alpha}{d} \right) (\alpha - \lambda \cosh \alpha \sinh \alpha) = k_{66} \quad (6.30a)$$

$$k_{56} = -2 \frac{D'}{A'} \left(\frac{\alpha}{d} \right) (\alpha \cosh \alpha - \lambda \sinh \alpha) = k_{65} \quad (6.30b)$$

$$k_{57} = -2D' \left(\frac{\alpha}{d} \right) \left[\frac{1}{A'} (\lambda \sinh^2 \alpha) + \frac{1+\nu}{2} \right] = k_{75} = k_{68} = k_{86} \quad (6.30c)$$

$$k_{58} = -2 \frac{D'}{A'} \left(\frac{\alpha}{d} \right) (\alpha \sinh \alpha) = k_{85} = k_{67} = k_{76} \quad (6.30d)$$

$$k_{77} = -2 \frac{D'}{A'} \left(\frac{\alpha}{d} \right) (\alpha + \lambda \cosh \alpha \sinh \alpha) = k_{88} \quad (6.30e)$$

$$k_{78} = -2 \frac{D'}{A'} \left(\frac{\alpha}{d} \right) (\alpha \cosh \alpha + \lambda \sinh \alpha) = k_{87} \quad (6.30f)$$

$$\lambda = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad (6.31a)$$

$$D' = \frac{Et^3}{(1+\nu)^2} \quad (6.31b)$$

$$A' = \alpha^2 - \lambda^2 \sinh^2 \alpha \quad (6.31c)$$

Çubuk koordinat sisteminde sistemin tamamına ait deplasman-kuvvet bağıntısı yukarıda elde edilen (6.26) ve (6.29) denklemleri birleştirilerek bir r plağı için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[S_n]_r = \begin{bmatrix} S_{ns} \\ S_{np} \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} k_{ns} & 0 \\ 0 & k_{np} \end{bmatrix}_r \begin{bmatrix} v_{ns} \\ v_{np} \end{bmatrix}_r = [k_n]_r [v_n]_r \quad (6.32)$$

(6.32) denkleminde k_n, S_n, v_n in değerleri yerine konularak aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} M_{ni} \\ M_{nj} \\ V_{ni} \\ V_{nj} \\ T_{ni} \\ T_{nj} \\ P_{ni} \\ P_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{ni} \\ \theta_{nj} \\ w_{ni} \\ w_{nj} \\ u_{ni} \\ u_{nj} \\ v_{ni} \\ v_{nj} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

2.1.8 Ankastre kenar kuvvetleri ve plağın herhangi bir noktasındaki plak momentlerinin hesabı:

-Ankastre kenar kuvvetlerine ait ifadeler:

Bir r plağında y doğrultusu i düğümünden j düğümüne doğru uzandığında ankastre kenar kuvvetler aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$M_i^f = \sum_{n=1} M_{ni}^f \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.34a)$$

$$M_j^f = \sum_{n=1} M_{nj}^f \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.34b)$$

$$V_i^f = \sum_{n=1} V_{ni}^f \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.34c)$$

$$V_j^f = \sum_{n=1} V_{nj}^f \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.34d)$$

$$T_i^f = \sum_{n=1} T_{ni}^f \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (6.34e)$$

$$T_j^f = \sum_{n=1} T_{nj}^f \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (6.34f)$$

$$P_i^f = \sum_{n=1} P_{ni}^f \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.34g)$$

$$P_j^f = \sum_{n=1} P_{nj}^f \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.34h)$$

$M_{ni}^f, M_{nj}^f, V_{ni}^f, V_{nj}^f, T_{ni}^f, T_{nj}^f, P_{ni}^f, P_{nj}^f$ değerleri toplam olarak S_n^f şeklinde gösterilebilir.

-Uniform yük tesirinde meydana gelen ankastre kenar kuvvetleri:

Plaka dik ve bir birim alana etkiyen q uniform yükü için $[S_n^f]$ in değerleri:

$$M_{ni}^f = \frac{4q}{L} \left(\frac{d}{a}\right)^3 \left[\frac{\sinh \alpha - \alpha}{\sinh \alpha + \alpha} \right] \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) = -M_{nj}^f \quad (6.35a)$$

$$V_{ni}^f = \frac{8q}{L} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \left[\frac{\cosh \alpha - 1}{\sinh \alpha} \right] \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) = -V_{nj}^f \quad (6.35b)$$

$$T_{ni}^f = T_{nj}^f = P_{ni}^f = P_{nj}^f = 0 \quad (6.35c)$$

ile verilir (şekil 6.9).

Plak düzleminde bir birim alanda etkiyen q' yükü için (sandık kirişli köprülerin düşey gövdeleri) ve y doğrultusunun i düğümünden j ye doğru uzanması halinde $[S_n^f]$ in değeri:

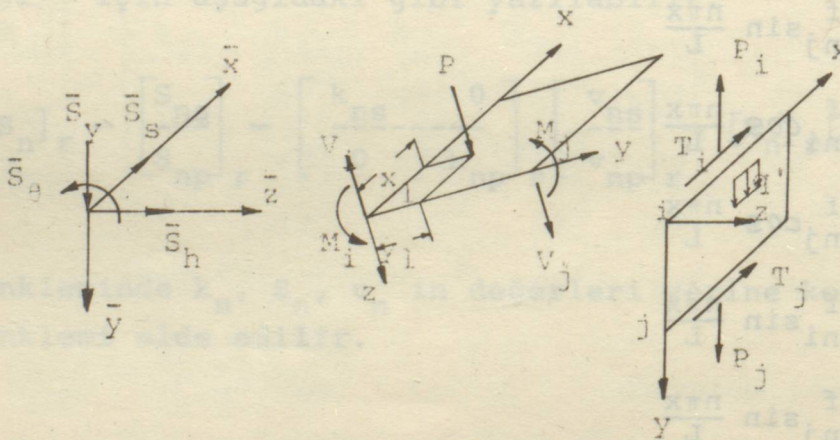
$$M_{ni}^f = M_{nj}^f = V_{ni}^f = V_{nj}^f = 0 \quad (6.36a)$$

$$T_{ni}^f = \frac{16q'L}{n^2\pi^2} \left[\frac{\sinh \alpha - \alpha}{\alpha \sinh \alpha} \right] \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) = -T_{nj}^f \quad (6.36b)$$

$$P_{ni}^f = \frac{16q'L}{(1+\nu)n^2\pi^2} \left[\frac{\cosh \alpha - 1}{\alpha \sinh \alpha} \right] \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) = -P_{nj}^f \quad (6.36c)$$

ile verilir.

-Bir Mükerrerit Yük Tesirinde Meydana Gelen Ankastre Kenar Kuvvetleri (şekil 6.9):



(a) Müsterek koordinatlar (b) Çubuk koordinatları

$x=x_1$, $y=y_1$ de plağa dik olarak tatbik edilen münferit bir P yüküne ait $[S_n^f]$ in değeri:

$$M_{ni}^f = \frac{2P}{n\pi A} \sin \frac{n\pi x_1}{L} (n_1 \sinh \alpha \sinh n_2 - \alpha n_2 \sinh n_1) \quad (6.37a)$$

$$M_{nj}^f = -\frac{2P}{n\pi A} \sin \frac{n\pi x_1}{L} (n_2 \sinh \alpha \sinh n_1 - \alpha n_1 \sinh n_2) \quad (6.37b)$$

$$V_{ni}^f = \frac{2P}{LA} \sin \frac{n\pi x_1}{L} (U \sinh \alpha - \alpha U') \quad (6.37c)$$

$$V_{nj}^f = -\frac{2P}{LA} \sin \frac{n\pi x_1}{L} (U' \sinh \alpha - \alpha U) \quad (6.37d)$$

$$T_{ni}^f = T_{nj}^f = P_{ni}^f = P_{nj}^f = 0 \quad (6.37e)$$

ile verilir. Burada

$$n_1 = \frac{n\pi y_1}{L} \quad (6.38a)$$

$$n_2 = \frac{n\pi (d-y_1)}{L} = \alpha - n_1 \quad (6.38b)$$

$$A = \sinh^2 \alpha - \alpha^2 \quad (6.38c)$$

$$U = \sinh n_2 + n_1 \cosh n_2 \quad (6.38d)$$

$$U' = \sinh n_1 + n_2 \cosh n_1 \quad (6.38e)$$

dir.

2.1.9 Plağın Herhangi Bir Noktasındaki Momentler:

Sırayla x ve y doğrultularında bir birim genişlikteki eğilme momentlerini M_x ve M_y ile gösterelim. Bir r plağında herhangi (x,y) noktasındaki M_x ve M_y nin değerleri

$$(M_x)_r = (M_{xc})_r + (M_{xs})_r = \sum_{n=1}^{\infty} (M_{nxc})_r \sin \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} (M_{nxs})_r \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$(M_y)_r = (M_{yc})_r + (M_{ys})_r = \sum_{n=1}^{\infty} (M_{nyc})_r \sin \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} (M_{nys})_r \sin \frac{n\pi x}{L}$$

(6.39 a ve b)

olarak ifade edilir.

Yukarıdaki denklemlerde M_{xc} ve M_{yc} süreklilikten meydana gelen momentler ve M_{xs} ve M_{ys} kenarları boyunca basit mesnetli plağa ait momentlerdir. M_{nxc} ve M_{nyc} nin değerleri aşağıdaki denklemler ile hesaplanabilir.

$$(M_{nxc})_r = (-C_{n1}M_{ni} + C'_{n1}M_{nj} - C_{n3}w_{ni} + C'_{n3}w_{nj})_r \quad (6.40a)$$

$$(M_{nyc})_r = (-C_{n2}M_{ni} + C'_{n2}M_{nj} + C_{n4}w_{ni} - C'_{n4}w_{nj})_r \quad (6.40b)$$

Burada w_{ni} , w_{nj} , M_{ni} ve M_{nj} (6.22) ve (6.23) denklemlerinden hesaplanır; ve C_{n1} , ..., C_{n4} , C'_{n1} , ..., C'_{n4} aşağıdaki formüller ile verilen katsayılardır.

$$C_{n1} = m_x + \nu m_y \quad (6.41a)$$

$$C'_{n1} = m'_x + \nu m'_y \quad (6.41b)$$

$$C_{n2} = m_y + \nu m_x \quad (6.41c)$$

$$C'_{n2} = m'_y + \nu m'_x \quad (6.41d)$$

$$m_x = \frac{1}{2} \times \frac{\sinh \eta'}{\sinh \alpha} (\alpha \coth \alpha - \eta' \coth \eta') \quad (6.41e)$$

$$m_y = \frac{\sinh \eta'}{\sinh \alpha} - m_x \quad (6.41f)$$

$$m'_x = \frac{1}{2} \frac{\sinh \eta}{\sinh \alpha} (\alpha \coth \alpha - \eta \coth \eta) \quad (6.41g)$$

$$m'_y = \frac{\sinh \eta}{\sinh \alpha} - m'_x \quad (6.41h)$$

$$C_{n3} = D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{(1-\nu)^2}{2 \sinh \alpha} \sinh \eta' \left[\frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)} + \alpha \coth \alpha - \eta' \coth \eta' \right] \quad (6.41i)$$

$$C'_{n3} = D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{(1-\nu)^2}{2 \sinh \alpha} \sinh \eta \left[\frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)} + \alpha \coth \alpha - \eta \coth \eta \right] \quad (6.41j)$$

$$C_{n4} = D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{(1-\nu)^2}{2 \sinh \alpha} \sinh \eta' (\alpha \coth \alpha - \eta' \coth \eta') \quad (6.41k)$$

$$C'_{n4} = D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{(1-\nu)^2}{2 \sinh \alpha} \sinh \eta (\alpha \coth \alpha - \eta \coth \eta) \quad (6.41l)$$

$$\eta = \frac{n\pi y}{L} \quad (6.42a)$$

$$\eta' = \frac{n\pi (d-y)}{L} = \alpha - \eta \quad (6.42b)$$

-Basit Mesnetli Plaklarda Momentler:

Plağa dik üniform yükler için

$$M_{nxs} = \frac{4qL^2}{n^3\pi^3} \left\{ 1 - \left[\frac{\sinh\alpha}{2(\cosh\alpha+1)}(1-\nu)+1 \right] \cosh n \right. \\ \left. + \left[\frac{-\alpha(1-\nu)+2\sinh\alpha}{2(\cosh\alpha-1)} + \frac{n}{2}(1-\nu) \right] \sinh n \right\} \quad (6.43a)$$

$$M_{nys} = \frac{4qL^2}{n^3\pi^3} \left\{ \nu + \left[\frac{\sinh\alpha}{2(\cosh\alpha+1)}(1-\nu)-\nu \right] \cosh n \right. \\ \left. + \left[\frac{\alpha(1-\nu)+2\nu\sinh\alpha}{2(\cosh\alpha+1)} - \frac{n}{2}(1-\nu) \right] \sinh n \right\} \quad (6.43b)$$

$x=x_1$, $y=y_1$ de ve plağa dik P münferit yükü için

$y > y_1$

$$M_{nxs} = \frac{P \sinh n_1}{\sinh \alpha} \left(\frac{1-\nu}{n\pi} \right) \left[(W + \frac{1+\nu}{1-\nu}) \sinh n' - n' \cosh n' \right] \sin \xi_1 \quad (6.44a)$$

$$M_{nys} = \frac{-P \sinh n_1}{\sinh \alpha} \left(\frac{1-\nu}{n\pi} \right) \left[(W - \frac{1+\nu}{1-\nu}) \sinh n' - n' \cosh n' \right] \sin \xi_1 \quad (6.44b)$$

$y < y_1$

$$M_{nxs} = \frac{P \sinh n_2}{\sinh \alpha} \left(\frac{1-\nu}{n\pi} \right) \left[(W' + \frac{1+\nu}{1-\nu}) \sinh n - n \cosh n \right] \sin \xi_1 \quad (6.44c)$$

$$M_{nys} = \frac{-P \sinh n_2}{\sinh \alpha} \left(\frac{1-\nu}{n\pi} \right) \left[(W' - \frac{1+\nu}{1-\nu}) \sinh n - n \cosh n \right] \sin \xi_1 \quad (6.44d)$$

Burada

$$\xi_1 = \frac{n\pi x_1}{L} \quad (6.45a)$$

$$n_1 = \frac{n\pi y_1}{L} \quad (6.45b)$$

$$n_2 = \frac{n\pi(d-y_1)}{L} = \alpha - n_1 \quad (6.45c)$$

$$W = \alpha \coth \alpha - n_1 \coth n_1 \quad (6.45d)$$

$$W' = \alpha \coth \alpha - n_2 \coth n_2 \quad (6.45e)$$

Yukarıdaki denklemler, seriler aynı noktaya yaklaştığında münferit yük altındaki noktaya direkt olarak uygulanamaz. $d < x_1 < (L-d)$, $y_1 > 2c$ ve $L > 2d$

için aşağıdaki formüller uygulama noktasında P den meydana gelen M_x ve M_y momentlerini hesaplamakta kullanılabilir.

$$M_{ys} = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \log_e \left(\frac{2d \sin \frac{\pi y_1}{d}}{\pi c} \right) + 1 \right] \quad (6.46a)$$

$$M_{xs} = M_{ys} - \frac{(1-\nu)P}{4\pi} \quad (6.46b)$$

Burada c = münferit P yükünün üniform olarak yayılı kabul edilen dairenin çapı.

(6.46) denklemlerinin hakiki (M_{xs} , M_{ys}) momentlerini verdiği dikkat edilmelidir. Hâlbuki (6.44) denklemleri sadece (M_{nxs} , M_{nys}) Fourier katsayılarını verir.

2.1.10 Koordinat doğrultusunda yükler ve kuvvetler:

$\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ müşterek koordinat eksenlerinin pozitif doğrultuları şekil 6.9 da gösterildiği gibidir. Çubuk koordinat sisteminin x absislerinin pozitif doğrultusu müşterek koordinat sistemindeki aynısıdır. y ordinatı pozitif doğrultusu x ve y ile bir sol el sisteminde iken çubuk y ordinatının pozitif doğrultusu i düğümünden j düğümüne doğru alınır. Plak düzlemindeki yüklerin pozitif doğrultusu y nin pozitif doğrultusu gibi, plağa dik olan yüklerin pozitif doğrultusu z nin pozitif doğrultusu gibi alınır.

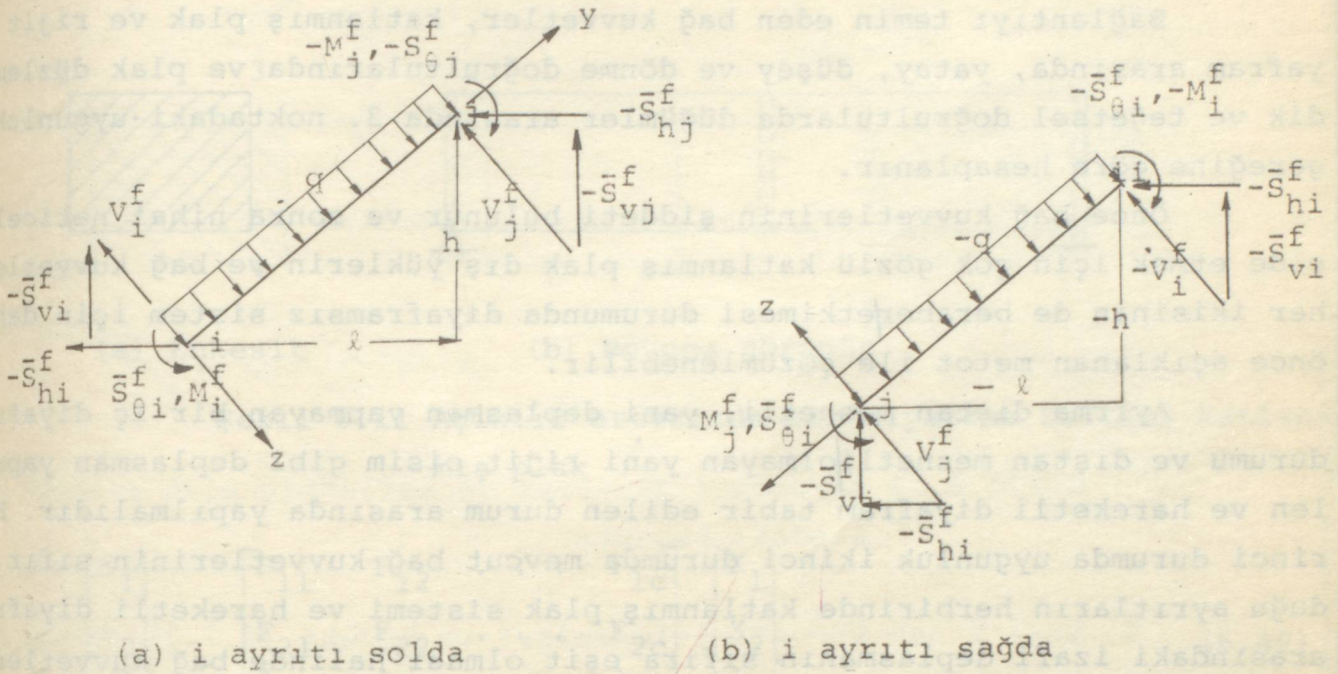
Pratik olarak plağın iki ayırından biri i düğümü olarak alınabilir. Örneğin şekil 6.10a da sol taraftaki düğüm j , şekil 6.10b de sağ taraftaki düğüm i olarak alınır. Yalnız pozitif z doğrultusu şekil 6.10a da aşağı doğru şekil 6.10b de yukarı doğru gösterilir. Mamafih, q üniform yükü şekil 6.10a da pozitif, şekil 6.10b de negatif olarak gözönüne alınır. (6.35) denkleminin kullanılışında pozitif ankastre kenar kuvvetleri M_i^f ve V_i^f şekil 6.10a da pozitif, şekil 6.10b de negatiftir. A dönüşüm matrisi uygulanarak

$$\bar{S}_i^f = M_i^f \quad (6.47a)$$

$$\bar{S}_{vi}^f = -\frac{\lambda}{d} V_i^f \quad (6.47b)$$

$$\bar{S}_{hi}^f = -\frac{h}{d} V_i^f \quad (6.47c)$$

elde edilir. λ ve h şekil 6.10a da pozitif, şekil 6.10b de negatiftir.



Şekil 6.10 Ayrıtların yerdeğiştirmesi durumunda kuvvet ve yüklerin doğrultuları

2.2 Rijit İç Diyaframlı Çok Gözlü Katlanmış Plakların Çözümü

Bu tür sandık-kirişli köprü sistemlerinde iç diyaframlar, daha önceki paragrafta yük dağıtım özelliklerini düzenlemek için izah edilen çok gözlü katlanmış plak sistemlerini toplayabiliriz. Buradaki incelemede bu diyaframlar, kendi düzleminde son derece rijit kendi düzlemine dik doğrultuda oldukça esnek olarak kabul edilir. Basitlik için şekil 6.11 de gösterilen, bir gözlü, tam açıklık ortasında rijit diyaframı olan bir sistem gözönüne alalım.

Katlanmış plak^{ve} rijit diyaframlar arasında bağlantıyı temin eden bağ kuvvetler kullanılarak kuvvet metodu tatbik edilebilir. Bu bağ kuvvetler her boyuna ayrıtta, yatay, düşey ve dönme bileşenleri olmak üzere üç ayrıttaki kuvveti toplamı ve her plak için, plağın iki uzun kenarı arasında üçgen yayılışa haiz normal ve teğetsel yayılışlı 4 plak kuvveti toplamı ile temsil edilir. Şekil 6.11 de görülen sistem toplam 28 bağ kuvvetine haizdir. Bağlantıyı temin eden kuvvetlerin hepsi açıklık doğrultu-

sunda diyafram kalınlığına eşit bir uzunluk üzerinde üniform olarak yayı-
lı kabul edilir.

Bağlantıyı temin eden bağ kuvvetler, katlanmış plak ve rijit di-
yafram arasında, yatay, düşey ve dönme doğrultularında ve plak düzlemine
dik ve teğetsel doğrultularda düşümler arasında 3. noktadaki uygunluk
gereğine göre hesaplanır.

Önce bağ kuvvetlerinin şiddeti bulunur ve sonra nihai neticeleri
elde etmek için çok gözlü katlanmış plak dış yüklerin ve bağ kuvvetlerin
her ikisinin de beraber etkimesi durumunda diyaframsız sistem için daha
önce açıklanan metot ile çözümlenebilir.

Ayırma dıştan mesnetli, yani deplasman yapmayan bir iç diyafram
durumu ve dıştan mesnetli olmayan yani rijit cisim gibi deplasman yapabi-
len ve hareketli diyafram tabir edilen durum arasında yapılmalıdır. Bi-
rinci durumda uygunluk ikinci durumda mevcut bağ kuvvetlerinin sıfır ol-
duğu ayrıtların herbirinde katlanmış plak sistemi ve hareketli diyafram
arasındaki izafi deplasmanın sıfıra eşit olması halinde bağ kuvvetleri-
nin sıfır olduğu ayrıtlarda katlanmış plak sistemin toplam veya mutlak
deplasmanları gerektirir. Her durumdaki çözüme ait işlemler aşağıda açık-
lanmıştır.

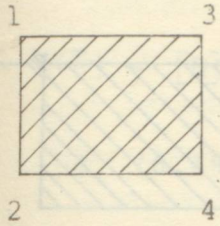
2.2.1 Dıştan Mesnetli iç diyafram:

1. Bağ kuvvetleri sıfıra eşit sistem verilen dış yüklemeye göre
hesaplanır. Bu daha önceki paragraflarda diyaframsız sandık kirişlerde
açıklanan ile aynıdır. Bu durum için bağ kuvvetlerinin sıfır olarak et-
kidiği ayrıtlarda belirlenen deplasmanlar bir deplasman vektörü olarak
bulunur.

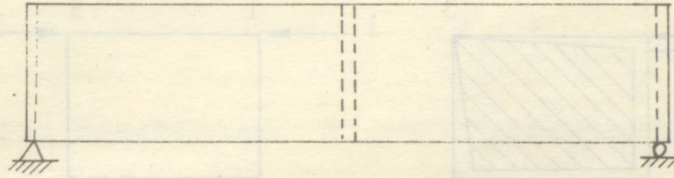
$$\{\delta\}_0 = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta \\ 2 \\ \vdots \\ \delta_c \end{Bmatrix} \quad (6.48)$$

2. Diyaframsız katlanmış plak sistem her X bağ kuvvetinin birim
değeri için hesaplanır ve buna tekabül eden Fleksibilite matrisi teşkil
edilir.

Diyafraam



(a) Enkesit



(b) Boyuna görünüş

Şekil 6.11 Açıklık ortasında bir diyafraam bulunan katlanmış plak

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_c \end{Bmatrix}_x = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1c} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{c1} & F_{c2} & \dots & F_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_c \end{Bmatrix} \quad (6.49)$$

veya basit olarak

$$\{\delta\}_x = [F]\{X\} \quad (6.49a)$$

3. Bu durumda diyafraam deplasman yapmadığından, ayritların her birinde katlanmış plak sisteminin toplam veya mutlak deplasmanı sifıra eşit olmalıdır.

$$\{\delta\} = \{\delta\}_0 + \{\delta\}_x = 0 \quad (6.50)$$

4. (4.49a) denklemi (6.50) denkleminde yerine konularak bağ kuvveteler bulunur.

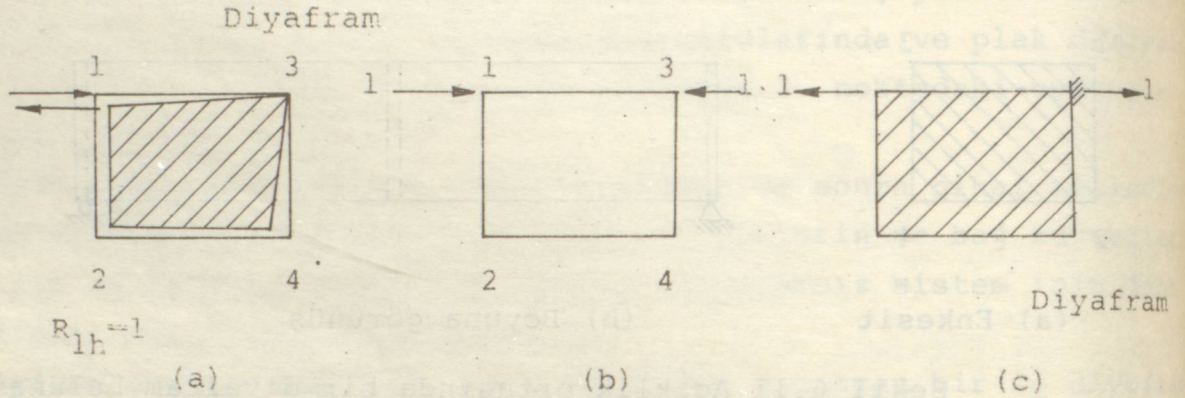
$$\{\delta\}_0 + [F]\{X\} = 0 \quad (6.51)$$

$$\{X\} = -[F]^{-1} \{\delta\}_0 \quad (6.51a)$$

2.2.2 Dıştan mesnetsiz iç diyafraam (hareketli diyafraam):

1. Rijit diyafraam dıştan mesnetli olmadığı fakat katlanmış plak sistem ile doğrudan doğruya mesnetli (şekil 6.12a) olduğundan her bağ kuvveti bileşeni, diyafraam bir serbest cisim gibi gözönüne alındığında

kendi kendini dengelemelidir (şekil 6.12c)



Şekil 6.12 Hareketli diyafram ve katlanmış plak sistem arasındaki bağıntı

2. Yeni $\bar{X}$ bağ kuvveti bileşenleri ve önceki (2.2.1) paragrafındaki münferit X bağ kuvvetleri arasındaki bağıntı bir B dönüşüm matrisi ile belirlenir.

$$\{X\} = [B] \{\bar{X}\} \quad (6.52)$$

Genel durumda rijit diyafram, X den başka üç elemana haiz olacaktır. Üç x rijit cisim deplasmanı (2 öteleme ve bir plak düzlemi dönmesi) görülebilir. B matrisi statik olarak belirlenen manada katlanmış plak sistemi ile bağlanan (şekil 6.12a'nın 3. ayrıtındaki bir rijit bağlantı ile) rijit diyafram kabulü ile biçimlenir. Sabit kalan 1, 2, 4 ayrıtlarında katlanmış plak ile diyafram arasındaki bağlantı kuvvetleri ayrıtlar arasında plak boyunca yayılmış olduğu kadar yeni bağ takımlarını tanımlar. Bu $\bar{X}$ bağlarının herbiri tek diyaframa (şekil 6.12c) tatbik edilerek, 3 ayrıtında gerekli dengeleme mesnet kuvvetleri bulunur ve başlangıç X bağ sistemine tekabül eden katlanmış plak sistemindeki netice kuvvetler B matrisinden bulunabilir.

B ve $\bar{X}$ matrisleri, diyaframın katlanmış plak sisteme başlangıçta statik olarak ne şekilde bağlı olduğu kabulüne bağlıdır. Örneğin diyafram bir mafsallı ayrıt (2 reaksiyon) ve yukarıda kullanıldığı gibi ankastre ayrıttan (3 reaksiyon) ziyade hareketli ayrıt (1 reaksiyon) ile sisteme bağlanabilir.

3. B matrisinin transpoz'u keza yerdeğiştirebilen diyafram ve katlanmış plak sistemi arasında katlanmış plak sistemin 6 toplam veya mutlak deplasmanları ile izafi deplasmanları birbirine bağlayacaktır.

$$\{\bar{\delta}\} = [B]^T \{\delta\} \quad (6.53a)$$

$$\{\bar{\delta}\}_0 = [B]^T \{\delta\}_0 \quad (6.53b)$$

$$\{\bar{\delta}\} = [B]^T \{\delta\}_x \quad (6.53c)$$

4. (6.49) ve (6.52) denklemleri (6.53c) denkleminde yerine konularak

$$\begin{aligned} \{\bar{\delta}\}_x &= [B]^T [F] [B] \{\bar{X}\} \\ &= [\bar{F}] \{\bar{X}\} \end{aligned} \quad (6.54)$$

yazılır. Burada

$$[\bar{F}] = [B]^T [F] [B] \quad (6.55)$$

hareket edebilir diyafram ve katlanmış plak sistemi arasındaki bağıntılar için modife edilen fleksibilite matrisidir.

5. $\bar{X}$ bağ kuvvetleri hareket edebilen diyafram ve katlanmış plak sistem arasında izafi deplasmanların sıfıra eşitliği düşünülerek bulunabilir.

$$\{\bar{\delta}\} = \{\bar{\delta}\}_0 + \{\bar{\delta}\}_x = 0 \quad (6.56)$$

(6.54) denklemi (6.56) denkleminde yerine konularak

$$\begin{aligned} \{\bar{\delta}\}_0 + [\bar{F}] \{\bar{X}\} &= 0 \\ \{\bar{X}\} &= -[\bar{F}]^{-1} \{\bar{\delta}\}_0 \end{aligned} \quad (6.57)$$

azılır. Original sistemde münferit X bağ kuvvetleri (6.52) denkleminden bulunabilir.

6. Sistemde birden fazla diyafram varsa, analiz için bu işlem, her diyaframda olması gereken bağlar hariç esasta aynıdır.

Mamafih, kuvvet dönüşüm mütrisi ilave dikkati gerektirir. c sa-
da diyaframın olduğunu kabul edelim. Bu durumda (6.52) denklemi aşağı-
daki genelleştirilmiş şekilde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} X_I \\ X_{II} \\ \vdots \\ X_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & B_{II} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & B_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_I \\ \bar{X}_{II} \\ \vdots \\ \bar{X}_C \end{Bmatrix} \quad (6.58)$$

Burada indisler diyafram n0.sunu gösterir. Bütün diyaframların benzer olması durumunda kuvvet dönüşüm alt matrisleri birbirine eşit olacaktır.

$$B_I = B_{II} = \cdot \cdot \cdot = B_C \quad (6.59)$$

Diğer yandan herhangi diyafram (örneğin i diyaframı) deplasman yapmayacak biçimde dıştan mesnetlendiği zaman ona tekabül eden B_i dönüşüm matrisi $\bar{X}_i = X$ şeklinde bir birim matrise dönüşür.

3. BİLGİSAYAR PROGRAMLARI

Bu bölümde açıklanan analiz için iki genel bilgisayar programı yazılmıştır. Birinci program MULTPL olarak isimlendirilmiş olup iç diyaframı olmayan çok gözlü katlanmış plak sistemler içindir. İkinci program MUPDI olarak isimlendirilmiştir ve iç diyaframlı katlanmış plak sistemler içindir. Her iki programda FORTRAN IV dilinde yazılmıştır. Bu programlara ait giriş, çıkış, işaret kabulleri ve sınırlamaların detaylı açıklaması aşağıda verilmiştir.

3.1 Giriş Bilgileri :

1. Sistemin geometrisi ve boyutları (plakların, ayırıtların ve diyafram v.s sayısı anlamında).
 2. Herbir plağa ait boyutlar ve malzeme özellikleri.
 3. Üiform ve kısmi yüzeysel yüklerin şiddeti ve yeri.
 4. Boyuna ayırıtlardaki sınır şartları. Bilinen kuvvetler ve deplasmanların herhangi kombinasyonu kullanılabilir.
 5. Toplam münferit ayrit yüklerinin şiddeti ve yeri.
 6. Her diyaframın yeri ve kalınlığı ve her ayrit ve plak elemanı üzerindeki ankastrelik şartlarına ait açıklama.
- Bu sadece MUPDI programında kullanılır.

3.2 Çıkış Bilgileri :

- 1.Kontrol için bütün giriş bilgileri özellikle yazılır.
- 2.MUPDI programı ile çözümde her diyafram ve katlanmış plak sistem arasındaki bağ ayrıt ve plak kuvvetleri yazılır.
- 3.İstenilen yerlerdeki netice yatay, düşey, dönmesel ve boyuna ayrıt deplasmanları verilir.
- 4.Plak uzunluğu boyunca her x absisinde ve plak genişliği ortasındaki bütün iç kuvvetler ve deplasmanlar yazılır.

3.3 Sınırlamalar ve Gerekli Şartlar :

- 1.Maksimum eleman ve ayrıt sayısı MULTPL için 150' ve 100, MUPDI için 30 ve 20 dir.
- 2.Yükleri ifade etmek için uygun Fourier serilerinin 100 sıfır olmayan terimi kullanılabilir.
- 3.Herhangi plak elemanının iki ayrıtı (kenarı) arasındaki maksimum mutlak fark 4 dür.
- 4.Bütün yüzeysel yükler yüklenmiş alanlar üzerinde üniform yayılıdır. Bunlar plağın arzu edilen herhangi uzunluğu üzerinde yayılı olabilir.
- 5.Ayrıt yükleri istenilen herhangi ayrıtın üzerinde münferit veya üniform yayılı çizgisel yükler olabilir.
- 6.MUPDI programı için, ayrıtlar ve plak elemanlarında ankastrelik şartları girişte gösterilen ankastrelik ile gösterilir. Eğer birden fazla diyafram varsa ankastrelik şartı bütün diyaframlar için aynıdır. Fakat her diyafram'ya dıştan mesnetli yada mesnetsizdir.
- 7.MUPDI programı için, katlanmış plak sistemi ve bütün diyaframlar arasındaki maksimum bağ kuvveti 120 den fazla olmamalıdır. Maksimum diyafram sayısı 4 dür.

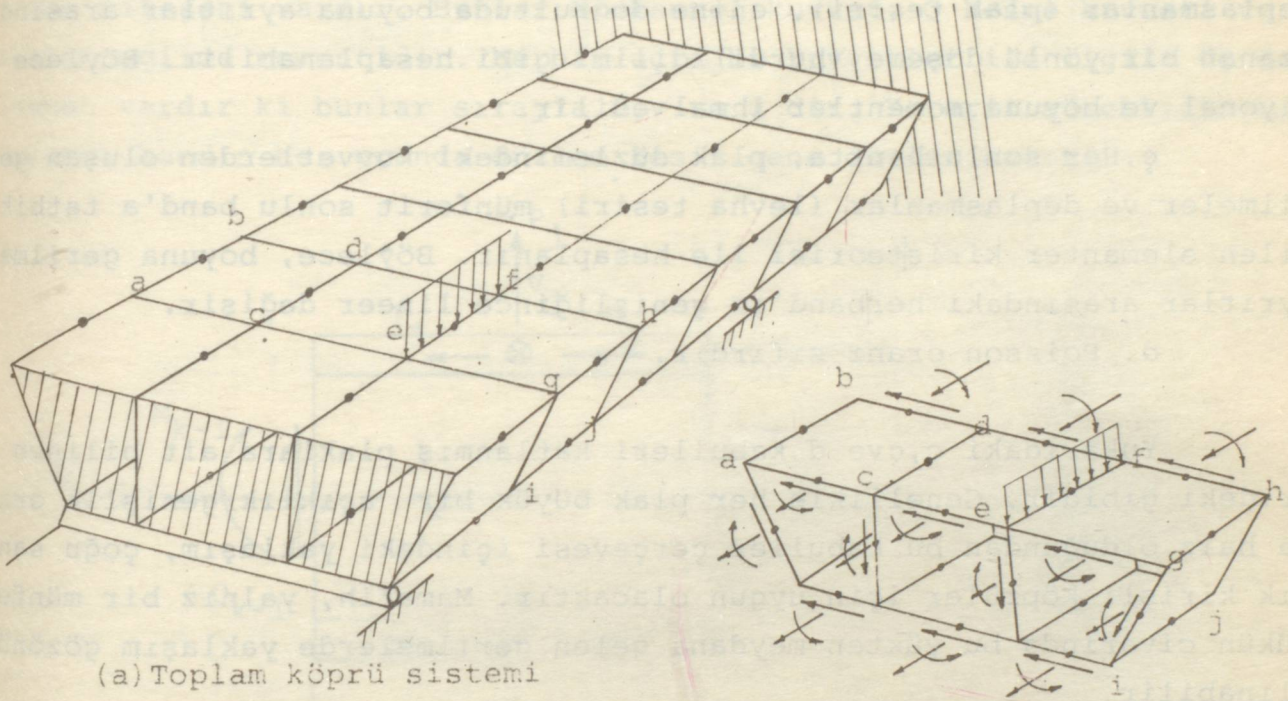
4. Notasyonlar:

- [A] Deplasman dönüşüm matrisi
 $[A^T]$ Dönüşüm matrisi transpozesi
[B] Dönüşüm matrisi
d Plak genişliği
D plak rijitliği
E Elastisite modülü
[F] Fleksibilite matrisi
h Plak elemanı düşey izdüşümü
[k] Çubuk koordinat sisteminde rijitlik matrisi
 $[K]$ Müsterek koordinat sisteminde rijitlik matrisi
 l Plak elemanı yatay izdüşümü
L Plak elemanı boyu
P Dış yükler
 r_h, r_v, r_s, r_θ Düğüm deplasmanları sırayla yatay, düşey, boyuna doğrultuda ve dönme
 R_h, R_v, R_s, R_θ Düğüm kuvvetleri sırayla düşey, yatay, boyuna doğrultuda ve boyuna doğrultuya göre dönme
{S} $S_x, S_y, S_z, S_\theta, T, P, V, M$ Çubuk koordinat sisteminde plak kenar kuvvetleri
 $\{\bar{S}\}$ $\bar{S}_h, \bar{S}_v, \bar{S}_s, \bar{S}_\theta$ veya $\bar{S}_z, \bar{S}_y, \bar{S}_x, \bar{S}_\theta$ Müsterek koordinat sisteminde plak kenar kuvvetleri
 $\{S_n^f\}$ Plak ankastre kenar kuvvetleri
t plak kalınlığı
{v} u, v, w, θ Çubuk koordinat sisteminde eleman deplasmanları
 $\{\bar{v}\}$ $\bar{v}_h, \bar{v}_v, \bar{v}_s, \bar{v}_\theta$ Müsterek koordinat sisteminde eleman deplasmanları
x, y, z Koordinat eksenleri
 ν Poisson oranı
[X] Bağ kuvvetleri (dıştan mesnetli diyaframlı sistemde)
 $\{\delta\}$ Deplasman vektörü
 $\{\delta_0\}$ Dış yüklerden meydana gelen deplasman vektörü
 $\{\delta\}_x$ Bağ kuvvetlerinden meydana gelen deplasman vektörü
 $[\bar{X}]$ Bağ kuvvetleri (dıştan mesnetsiz diyaframlı sistemde)

VII-SANDIK KİRİŞLERİN SONLU BANDLAR METODU İLE HESABI

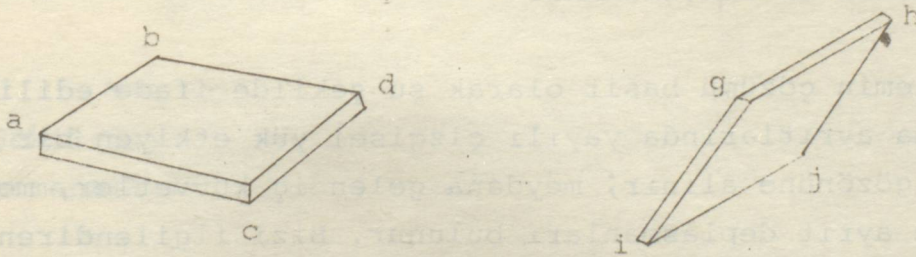
1. GİRİŞ

Bu bölümde iki ucunda keyfi sınır şartları bulunan sistemlere uygulanabilen bir sonlu band metodu geliştirilecek ve açıklanacaktır. Bu metotta kullanılan esas sistem elemanı, boyuna doğrultuda her plak e-lamanının sonlu sayıda bandlara bölünmesiyle elde edilen bir sonlu bantdır (şekil 7.1). Bu sonlu bandların herbiri plağın boyuna ayrıtları ara-



(a) Toplam köprü sistemi

(b) Tipik tüm enine band



(c) Tipik sonlu band

Şekil 7.1 Analitik band modeli

sındaki enine uzaklığa eşit bir genişliktedir. Hesapta sonlu bandlar enine olarak köprünün bir ucundan öbür ucuna kadar bütün köprü enkesitinde içten bağımlıdır (şekil 7.1b). Çözüm, açıklık boyunca bir enine bantın köprünün ta anılan ucuna kadar bağımlı olduğu esasına dayanan bir

metot ile sağlanır. Köprünün iki ucunda ve ara mesnetlerdeki sınır şartları problemin çözümünde gerekli bütün bilinmeyenleri çözmek için yeteri kadar denklemi sağlar.

Kullanılan esas kabuller şunlardır:

a. Her sonlu band üniform kalınlıklı dikdörtgen olup elastik, izotrop ve homojen malzemeden yapılmıştır.

b. Kuvvetler ve deformasyonlar arasında lineer bir bağıntı vardır. Yani süperpozisyon geçerlidir.

c. Her sonlu bantta, plağa dik kuvvetlerden oluşan gerilme ve deplasmanlar (plak tesiri), enine doğrultuda boyuna ayrıtlar arasında uzanan bir yönlü döşeme (hurdi) dilimi gibi hesaplanabilir. Böylece torsiyonal ve boyuna momentler ihmal edilir.

ç. Her sonlu bantta, plak düzlemindeki kuvvetlerden oluşan gerilmeler ve deplasmanlar (levha tesiri) münferit sonlu band'a tatbik edilen elemanter kirişteorisi ile hesaplanır. Böylece, boyuna gerilmeler ayrıtlar arasındaki her band'ın genişliğince lineer değişir.

d. Poisson oranı sıfırdır.

Yukarıdaki c, ç ve d kabulleri katlanmış plaklara ait bilinen teorideki gibidir. Genellikle her plak büyük bir açıklık/genişlik oranına haiz olduğundan bu kabuller çerçevesi içindeki yaklaşım, çoğu sandık kirişli köprüler için uygun olacaktır. Mamafih, yalnız bir münferit yükün civarında bu yükten meydana gelen gerilmelerde yaklaşım gözönüne alınabilir.

2. METODUN GENEL AÇIKLAMASI

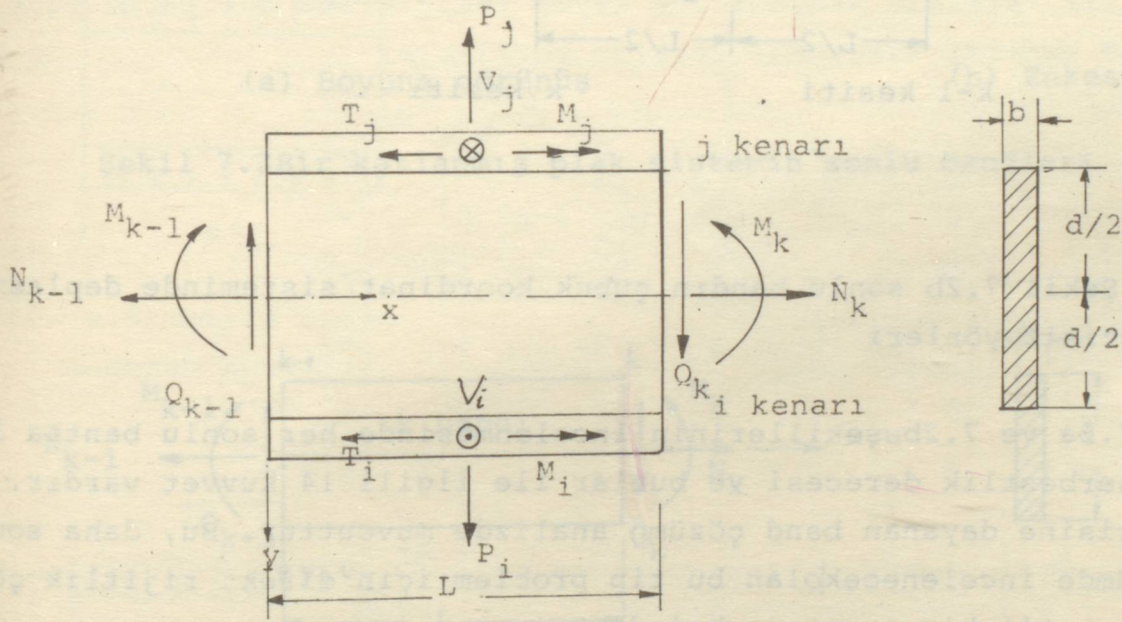
Problemin çözümü basit olarak şu şekilde ifade edilir:

Boyuna ayrıtlarında yayılı çizgisel yük etkiyen bir sürekli sandık kiriş gözönüne alınır; meydana gelen iç kuvvetler, momentler, gerilmeler ve ayrıt deplasmanları bulunur. Bizi ilgilendiren özellik, herhangi enine kesitte boyuna gerilme yayılışı, her plaktaki membran kayma kuvvetleri ve enine plak eğilme momentleridir. Yalnız ayrıt yüklerinin gözönüne alındığı ve bunların her band uzunluğu üzerine üniform olarak yayılı olduğu kabulüne dikkat edilmelidir.

Eğer tek bir sonlu band bir serbest cisim gibi alınırsa bu dört kenarında elastik mesnetlere oturan plağa benzer. Bandın iki boyuna uçundaki sınır şartları, açıklık boyunca diğer bandlar ile veya yeterli olması gereken mesnet şartları ile süreklilik veya dengeyi gerektirir.

Çizgisel yükler band'ın iki boyuna kenarı boyunca etkimektedir. Bu çizgisel yükler enine olarak bir yönde plak eğilmesi ve keza düzlemde mamb-
ran gerilmelerini meydana getirir. Her ayrıttaki denge, ayrıt ile bağımlı
bandlar üzerinde bütün yüklerin toplamının ayrıtlar üzerinde etkileyen
çizgisel dış yüke eşit olmasını gerektirir. İlaveten bu bandlar yeterli
uygunluk gereği aynı ayrıt deplasmanlarına haiz olmalıdır.

Sistemden çıkarılan tipik bir sonlu band, kuvvetler ve bu kuvvetler ile ilgili deplasmanların pozitif yönleri ile şekil 7.2 a ve b de verilmiştir. Bandın heriki boyuna ucunda ($k-1$ ve k kesitlerinde) üç gerilme bileşeni vardır. Bunlar N aksenal kuvvet, Q kesme kuvveti ve M düzlem eğilme momentidir. Herbir uçta bu kuvvetler ile ilgili üç deplasman vardır ki bunlar sırayla u, v ve ψ dir. Yeterli süreklilik bulunduğu bandın her ucunda düzlem kesit gene düzlem kalır.

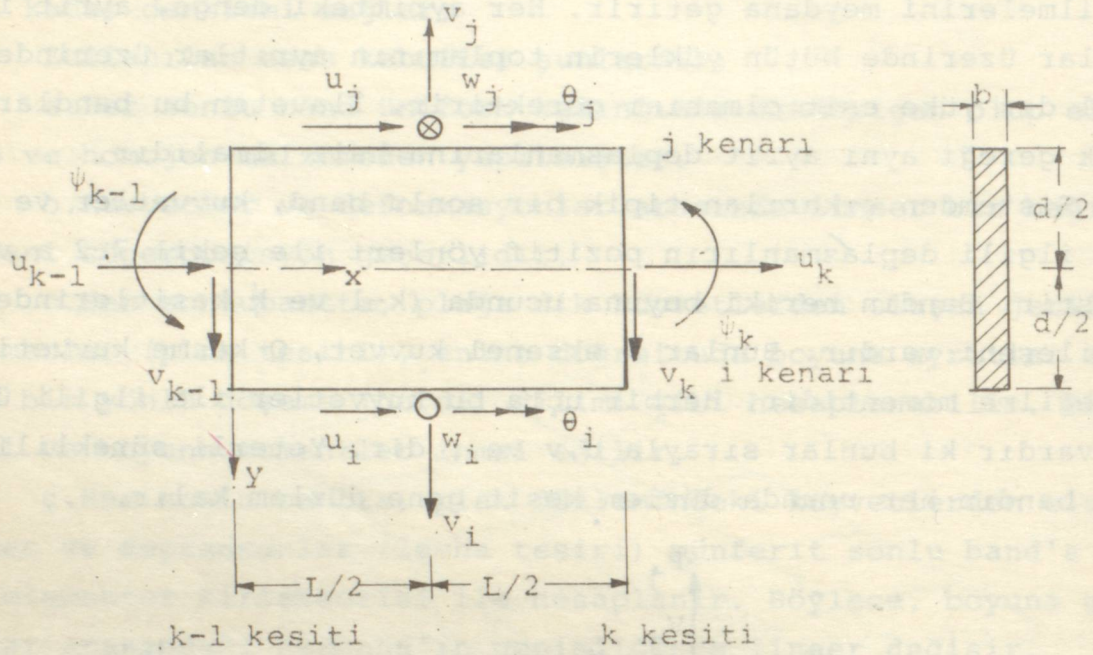


k-1 kesiti

k kesiti

Şekil 7.2a Sonlu bandın çubuk koordinat sisteminde kuvvet ve momentlerinin pozitif yönleri

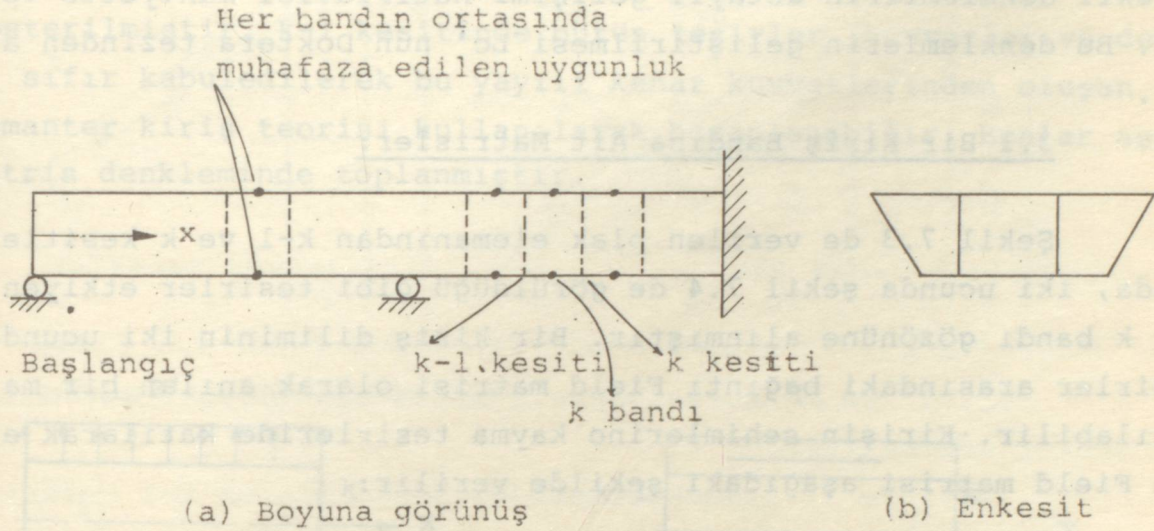
i ve j boyuna kenarlar boyunca, band uzunluğunda üniform yayılı plak kenar kuvvetlerinin var olduğu varsayılır. Kenarların birim uzunluğundaki bu kuvvetler: T mamb-
ran kayma kuvveti, kenara dik P enine mamb-
ran kuvveti, plak düzlemine dik V kayma kuvveti ve boyuna kenara göre M enine eğilme momenti (sağ el kaidesi kullanılarak bir vektör olarak gösterilir). Bunlarla ilgili u, v, w ve θ deplasmanları bandın uçlarının ortasında alınır. Böylece; Çözümde, boyuna ayrıtlardaki bu deplasmanların gösterilmesiyle uygunluk şartları yalnız her bandın orta ayrıtında yeterlidir.



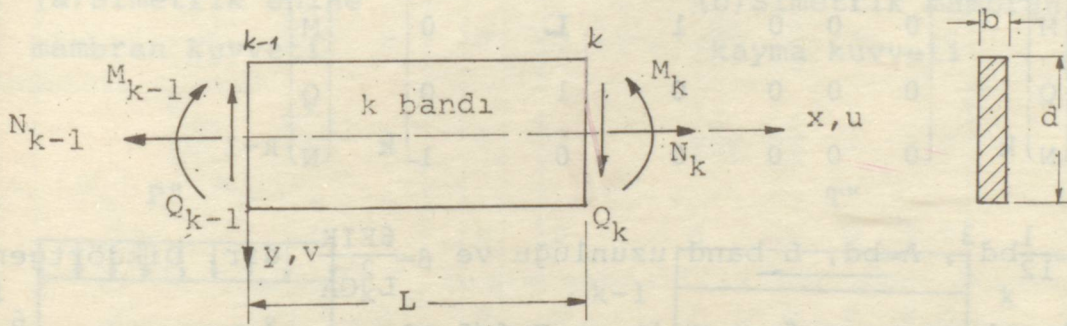
Şekil 7.2b sonlu bandın çubuk koordinat sisteminde deplasmanların pozitif yönleri

7.2a ve 7.2b şekillerinin incelenmesinde her sonlu bantta 14 deplasman serbestlik derecesi ve bunlar ile ilgili 14 kuvvet vardır. Dönüşüm matrisine dayanan band çözümü analizde mevcuttur. Bu, daha sonraki bir bölümde incelenecek olan bu tip problem için direkt rijitlik çözümü üzerinde kat'ı bir avantaja haizdir.

Sol ucunda basit, sağ ucunda ankastre mesnetli ve bir iç mesnetli olan bir katlanmış plak sistem şekil 7.3 de gösterilmiştir. Band çözümü gelişimini açıklamak için bir plaktan serbest bir cisim gibi çıkarılıp alınan k-1 ve k kesitleri arasındaki bir k bandı gözönüne alınır. Bu serbest cisme şekil 7.2a ve 7.2b de gösterilen kuvvet ve deplasmanlar etmektedir. k kesitinde etkiyenler k-1 kesitinde etkiyenlere bağlıdır ve bandın i ve j iki boyuna kenarındaki çizgisel yükler uniform olarak yayılmıştır. Kenar çizgisel yüklerin şiddetleri, yeterince uygunluk ve bütün enine kesitin denge şartları ile hesaplanabilir. Bunlar k-1 kesitindeki bütün plak elemanları tesiri ve band üzerine dıştan tatbik edilen ayrıt yükleri ile ifade edilebilir. Bu anlamdaki kenar çizgisel yükler bulunduktan sonra k kesitindeki tesirler ve bu bandın tatbik edilen dış ayrıt yükleri ile ifade edilebilir. Bu işlem sistemin başlan-



Şekil 7.3 Bir katlanmış plak sistemin sonlu bantları



Şekil 7.4 Bir kiriş bandının iki ucuna etkiyen tesirlerin pozitif yönleri

gıçtaki birinci bandından en uçtaki son bandına kadar tekrarlanarak sistemin iki ucundaki tesirler arasındaki bağıntı elde edilir. Bir bandan diğerine geçişte bir iç mesnet gibi özel bir kesit varsa bu kesitte bu iç mesnede ait sınır şartları gözönüne alınır. İki uçtaki sınır şartları sağlanarak bu uçtaki tesirleri hesaplamak için yeteri kadar denklemler çıkarılır ve sonra son iç kuvvetler gelişimi, sistem boyunca bir kere daha tekrarlanarak bulunur.

3. TEK AÇIKLIKLI SİSTEMİN SONLU BAND METODU İLE ÇÖZÜMÜNE AİT DENKLEMLERİN ÇIKARILIŞI

Bu kısımda tek açıklıklı ve sonra sürekli sistemin çözümü için gerekli denklemlerin detaylı gelişimi hatırlatıcı mahiyette verilecektir. Bu denklemlerin geliştirilmesi L_c' nun Doktora tezinden alınmıştır.

3.1 Bir Kiriş Bandına Ait Matrisler:

Şekil 7.3 de verilen plak elemanından $k-1$ ve k kesitleri arasında, iki ucunda şekil 7.4 de görüldüğü gibi tesirler etkiyen tipik bir k bandı gözönüne alınmıştır. Bir kiriş diliminin iki ucunda etkiyen tesirler arasındaki bağıntı Field matrisi olarak anılan bir matris ile yazılabilir. Kirişin sehimlerine kayma tesirleride katılarak elde edilen Field matrisi aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \psi \\ M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{AE} \\ 0 & 1 & -L & \frac{-L^2}{2EI} & \frac{-L^3}{6EI}(1-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \psi \\ M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_{k-1} \quad (7.1)$$

Burada $I = \frac{1}{12}bd^3$, $A=bd$, L band uzunluğu ve $\beta = \frac{6EIK}{L^2GA}$ dır. Dikdörtgen kesitlerde poisson oranı sıfıra eşit ve $K=6/5$ alınırsa β katsayısı $\frac{6}{5} \times \frac{d^2}{L^2} = \beta$ şeklinde basitleştirilebilir. Tesirlerin pozitif yönleri şekil 7.2 de gösterilmiştir. ψ dönmesi kiriş teorisindeki gibi saat akrebi tersi yönünde pozitifdir.

(7.1) denklemi sembolik olarak

$$Z_k = F_k \cdot Z_{k-1} \quad (7.1a)$$

biçiminde yazılabilir.

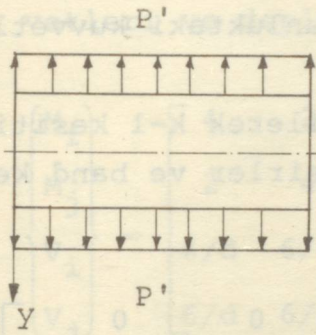
Eğer kirişüniform kenar yükleri etkiyorsa k kesitindeki Z_k tesirleri düzeltilmelidir. Üç kuvvet bileşeni gözönüne alınır. Bunlar:

1. Plâğın boyuna genişlemesini meydana getirecek olan simetrik boyuna membran kesme kuvveti

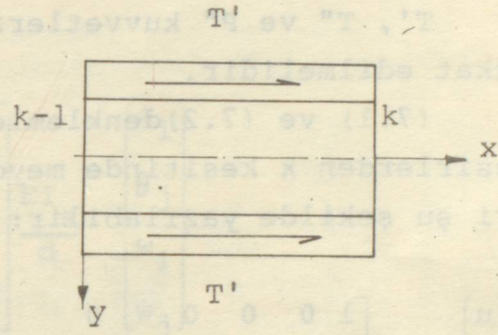
2.Eğilme ve kayma deformasyonlarını meydana getirecek olan antimetrik enine mambran kenar kuvvetleri.

3.Basit eğilme ve deformasyonunu meydana getirecek olan antimetrik boyuna mambran kenar kayma kuvvetleri.

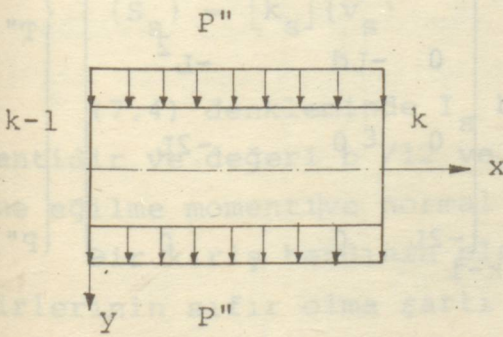
Bu üç yük bileşeni ve bunların pozitif yönleri şekil 7.5b,c ve d de gösterilmiştir. $k-l$ kesitinde bütün tesirler (kuvvetler ve deplasmanlar) sıfır kabul edilerek bu yayılı kenar kuvvetlerinden oluşan tesirler elemanter kiriş teorisi kullanılarak hesaplanabilir. Bunlar aşağıdaki matris denkleminde toplanmıştır.



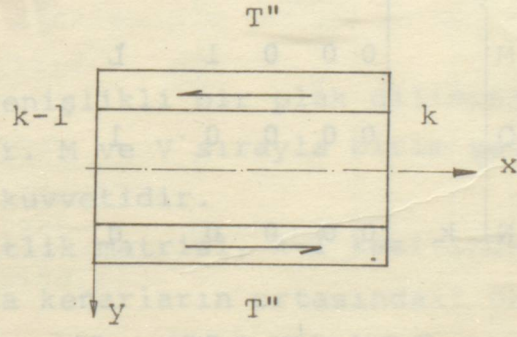
(a) Simetrik enine mambran kuvveti



(b) Simetrik mambran kenar kayma kuvveti



(c) Antisimetrik enine mambran kenar kuvveti



(d) Antisimetrik mambran kenar kayma kuvveti

Şekil 7.5 Bir kiriş bandına ait kenar kuvvet bileşenleri

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \psi \\ M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \frac{-L^2}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3 d}{6EI} & \frac{L^4}{12EI} (1-2\beta) \\ 0 & \frac{-L^2 d}{2EI} & \frac{-L^3}{3EI} \\ 0 & -Ld & -L^2 \\ 0 & 0 & -2L \\ -2L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

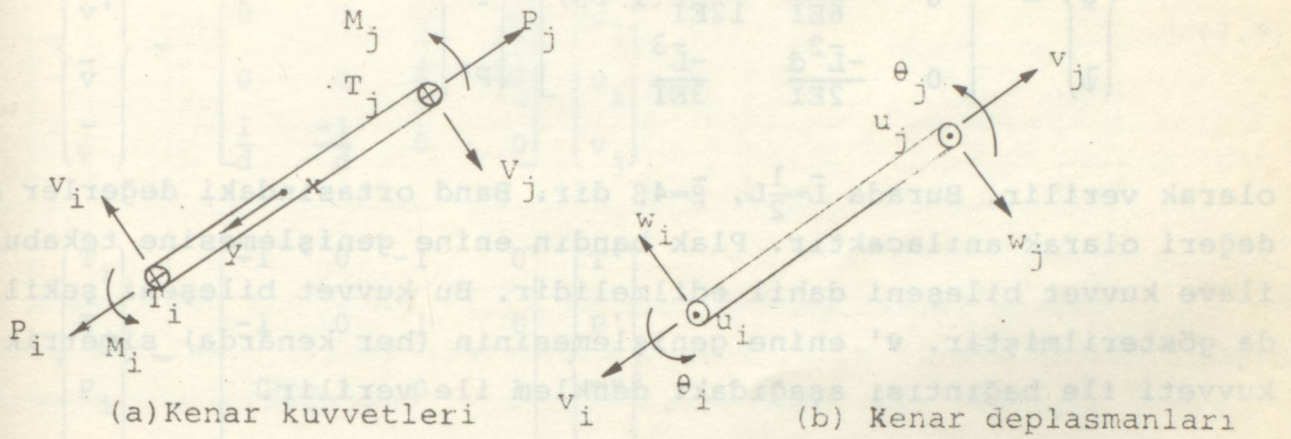
T' , T'' ve P'' kuvvetlerinin birim uzunluktaki kuvvetler olduğuna dikkat edilmelidir.

(7.1) ve (7.2) denklemleri birleştirilerek $k-1$ kesitinde etkiyen tesirlerden k kesitinde meydana gelen tesirler ve band kenar kuvvetleri şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \psi \\ M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{AE} \\ 0 & 1 & -L & \frac{-L^2}{2EI} & \frac{-L^3}{6EI} (1-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \psi \\ M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{-L^2}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3 d}{6EI} & \frac{L^4}{12EI} (1-2\beta) \\ 0 & \frac{-L^2 d}{2EI} & \frac{-L^3}{3EI} \\ 0 & -Ld & -L^2 \\ 0 & 0 & -2L \\ -2L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

3.2 Çubuk Koordinat Sisteminde Bir Kiriş Bandın Rijitlik Matrisi

Gözönüne alınan sonlu bandın enine tesiri, plak rijitliği ve levha rijitliği birbirinden bağımsızdır. Plak rijitlik matrisi sehim denklemlerinden hesaplanabilir (şekil 7.6a).



Şekil 7.6 Çubuk koordinat sisteminde pozitif band kenar kuvvetleri ve deplasmanları

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ V_i \\ V_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6/d & 6/d \\ 2 & 4 & 6/d & 6/d \\ 6/d & 6/d & 12/d^2 & 12/d^2 \\ 6/d & 6/d & 12/d^2 & 12/d^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{d} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ w_i \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

veya sembolik olarak

$$\{S_S\} = [k_S] \{v_S\} \quad (7.4a)$$

(7.4) denkleminde I_S birim genişlikli bir plak diliminin atalet momentidir ve değeri $b^3/12$ ye eşittir. M ve V sırayla birim genişlikteki enine eğilme momenti ve normal kesme kuvvetidir.

Bir kiriş bandının plak rijitlik matrisi, k-1 kesitindeki Z_{k-1} tesirlerinin sıfır olma şartı altında kenarların ortasındaki üniform kenar kuvvetleri ile kenar deplasmanları arasındaki bağıntıdan belirlenir. Rijitlik matrisi ilk olarak simetrik ve antimetrik kuvvet bileşenleri referans gösterilerek bulunabilir. Bandın ortasında, kenar kuvvetlerden meydana gelen deplasmanlar (7.2) denkleminde

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{L}^2}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{L}^3 d}{6EI} & \frac{\bar{L}^4}{12EI} (1-2\bar{\beta}) \\ 0 & \frac{-\bar{L}^2 d}{2EI} & \frac{-\bar{L}^3}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

olarak verilir. Burada $\bar{L} = \frac{1}{2}L$, $\bar{\beta} = 4\beta$ dır. Band ortasındaki değerler çubuk değeri olarak anılacaktır. Plak bandın enine genişlemesine tekabül eden ilave kuvvet bileşeni dahil edilmelidir. Bu kuvvet bileşeni şekil 7.5a da gösterilmiştir. v' enine genişlemesinin (her kenarda) simetrik P' kuvveti ile bağıntısı aşağıdaki denklem ile verilir.

$$v' = \frac{d}{2Eb} P' \quad (7.6)$$

şimdi, (7.5) ve (7.6) denklemleri

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ v' \\ \bar{v} \\ \bar{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{L}^2}{AE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{2Eb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{L}^3 d}{6EI} & \frac{\bar{L}^4}{12EI} (1-2\bar{\beta}) \\ 0 & 0 & \frac{-\bar{L}^2 d}{2EI} & \frac{-\bar{L}^3}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T' \\ P' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

olarak verilir. Matris inversiyonundan

$$\begin{Bmatrix} T' \\ P' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-AE}{\bar{L}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2Eb}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & \frac{6(1-2\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^2} \\ 0 & 0 & \frac{-36EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^4} & \frac{-12EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ v' \\ \bar{v} \\ \bar{\psi} \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

verilir.

(7.8) denklemi şekil 7.2 ve 7.6 da belirlendiği gibi band uç kuvvetleri ve deplasmanları ile ilgili rijitlik matrisini vermek için dönüştürülebilir. İşaret edilmelidir ki işaret kabulü, boyuna membran kuvveti ve buna tekabül eden u boyuna kenar deplasmanları için karşıt yönde pozitif seçilir. Bu kabul simetrik plak rijitlik matrisini elde etmek için yapılır. İki dönüşüm matrisi denklemi

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v}' \\ \bar{v} \\ \bar{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{d} & -\frac{1}{d} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T' \\ P' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

olacaktır. (7.9) denklemi (7.8) denkleminde yerine konularak

$$\begin{Bmatrix} T' \\ P' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-AE}{2\bar{L}^2} & \frac{-AE}{2\bar{L}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AE}{d^2} & \frac{AE}{d^2} \\ \frac{6(1-2\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})d^2\bar{L}^2} & \frac{-6(1-2\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})d^2\bar{L}^2} & \frac{12EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & \frac{-12EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} \\ \frac{-12EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & \frac{12EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & \frac{-18EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4} & \frac{18EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

elde edilir. (7.11) denklemi (7.10) denkleminde yerine konularak *Levha* rijitlik matrisi şu şekilde elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{4\bar{\beta}}{1+6\bar{\beta}} + \frac{AE}{\bar{L}^2}\right) & \left(\frac{4\bar{\beta}}{1+6\bar{\beta}} + \frac{AE}{\bar{L}^2}\right) & \left(\frac{AE}{d^2} - \frac{18EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4}\right) & \left(\frac{AE}{d^2} - \frac{18EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4}\right) \\ \left(\frac{4\bar{\beta}}{1+6\bar{\beta}} + \frac{AE}{\bar{L}^2}\right) & \left(\frac{4\bar{\beta}}{1+6\bar{\beta}} + \frac{AE}{\bar{L}^2}\right) & \left(\frac{AE}{d^2} - \frac{18EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4}\right) & \left(\frac{AE}{d^2} - \frac{18EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4}\right) \\ \left(\frac{-AEd}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3}\right) & \left(\frac{AEd}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3}\right) & \left(\frac{AE}{d^2} - \frac{18EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4}\right) & \left(\frac{AE}{d^2} - \frac{18EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4}\right) \\ \left(\frac{AEd}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3}\right) & \left(\frac{-AEd}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3}\right) & \left(\frac{AE}{d^2} - \frac{18EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4}\right) & \left(\frac{AE}{d^2} - \frac{18EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (7.12)$$

Simetriği

veya sembolik olarak

$$\{S_p\} = [k_p]\{v_p\} \quad (7.12a)$$

(7.4) ve (7.12) denklemleri toplam band rijitlik matrisini vermek için birleştirilebilir.

$$\begin{Bmatrix} S_s \\ S_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s \\ v_p \end{Bmatrix} \quad (7.13)$$

Tekrar işaret edilmelidir ki (7.13) denklemi her boyuna kenardaki üniform yayılı M , V , P ve T kuvvetleri (şekil 7.2a) ile bunlara tekabül eden $k-1$ kesitinde sıfır olan z_{k-1} tesir^{ler}inin (kuvvet ve deplasmanların) özel şart altında her boyuna kenar altındaki θ , w , v ve u deplasman değerleri ile bağıntılıdır.

3.3 k-1 Kesitinde Etkiyen Tesirlerden Meydana Gelen Ankastre Düğüm (Ayrıt) Kuvvetleri:

Ankastre düğüm kuvvetleri, herhangi bir orta nokta deplasmanına karşı bandın boyuna kenarlarının ankastreliğini gerektiren üniform düğüm kuvvetlerini temsil eder. $k-1$ kesitindeki etkilerden meydana gelen kiriş bandı ankastre düğüm kuvvetleri aşağıdaki gibi elde edilir. Band ortasında deplasman (7.3) denkleminde

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\bar{L} & \frac{-\bar{L}^2}{2EI} & \frac{-\bar{L}^3}{6EI}(1-\bar{\beta}) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\bar{L}}{EI} & \frac{\bar{L}^2}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\bar{L}}{AE} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} (z_{k-1}) + \begin{bmatrix} \frac{-\bar{L}^2}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{L}^3 d}{6EI} & \frac{\bar{L}^4}{12EI}(1-2\bar{\beta}) \\ 0 & \frac{-\bar{L}^2 d}{2EI} & \frac{-\bar{L}^3}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

olarak verilir.

Deplasmanlar sıfır olarak yer alır ve düğüm kuvvetleri z_{k-1} tesiri ile ve sonra

$$\begin{Bmatrix} T' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix}_F = \begin{bmatrix} \frac{-AE}{\bar{L}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\bar{L}} \\ 0 & \frac{24EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & \frac{-(3+2\bar{\beta})6EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^2} & \frac{-6(1+2\bar{\beta})}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}} & 0 \\ 0 & \frac{-36EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4} & \frac{24EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3} & \frac{6}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^2} & 0 \end{bmatrix} (z_{k-1}) \quad (7.15)$$

verilir. Burada F indisi ankastre düğüm kuvvetlerini gösterir. Yukarıda

$P=0$ 11 denklem (7.10) denkleminde yerine konularak

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L^2} & \frac{-24EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & \frac{6(3+2\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}} & \frac{6(1+2\bar{\beta})}{(1+6\bar{\beta})d} & \frac{1+2\bar{\beta}}{(1+6\bar{\beta})d} & 1 \\ \frac{AE}{L^2} & \frac{24EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & -\frac{6(3+2\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^2} & -\frac{6(1+2\bar{\beta})}{(1+6\bar{\beta})d} & -\frac{(1+2\bar{\beta})}{(1+6\bar{\beta})d} & 1 \\ 0 & \frac{-36EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4} & \frac{24EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4} & \frac{6}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^2} & \frac{-6}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}} & 0 \\ 0 & \frac{36EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4} & \frac{-24EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3} & \frac{-6}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^2} & \frac{6}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_{k-1} \\ Z_k \\ Z_{k-1} \\ Z_k \end{Bmatrix} \quad (7.16)$$

veya sembolik olarak

$$\{S_p\}_F = [C]\{Z_{k-1}\} \quad (7.16a)$$

bulunur.

3.4 Z_{k-1} Tesirlerindeki Terimler ile ilgili Z_k Tesirlerine ait

Ankastre Düğüm Çözümü:

(7.15) denklemini $\bar{L}=L/2, \bar{\beta}=4\bar{\beta}$ ile (7.3) denkleminde yerine konularak, Z_k tesirlerine ait ankastre düğüm çözümü aşağıdaki denklem ile verilir.

$$\{Z_k\}_F = [H]\{Z_{k-1}\} \quad (7.17)$$

Burada

$$[H] = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{AE} \\ 0 & \frac{17-18\bar{\beta}}{(1+6\bar{\beta})} & \frac{(-5+10\bar{\beta})L}{(1+6\bar{\beta})} & \frac{(-1+4\bar{\beta})L^2}{2(1+6\bar{\beta})EI} & \frac{\bar{\beta}(3-2\bar{\beta})L^3}{8(1+6\bar{\beta})EI} & 0 \\ 0 & \frac{-96}{(1+6\bar{\beta})L} & \frac{29-18\bar{\beta}}{(1+6\bar{\beta})} & \frac{(3-6\bar{\beta})L}{(1+6\bar{\beta})EI} & \frac{-2\bar{\beta}L^2}{(1+6\bar{\beta})EI} & 0 \\ 0 & \frac{-384EI}{(1+6\bar{\beta})L^2} & \frac{24(5-2\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})L} & \frac{(13-18\bar{\beta})}{(1+6\bar{\beta})} & \frac{-8\bar{\beta}L}{(1+6\bar{\beta})} & 0 \\ 0 & \frac{-1152EI}{(1+6\bar{\beta})L^3} & \frac{384EI}{(1+6\bar{\beta})L^2} & \frac{48}{(1+6\bar{\beta})L} & \frac{(1-18\bar{\beta})}{(1+6\bar{\beta})} & 0 \\ -8AE & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ -L & & & & & \end{bmatrix} \quad (7.17a)$$

3.5 Band Ortasındaki Nihai Düğüm Deplasmanlarından Meydana Gelen Z_k Tesirleri:

Band ortasındaki nihai düğüm deplasmanları v_p alınarak (7.11) denklemi bu deplasmanlar ile ilgili kenar kuvvetlerini verir. $P' = 0$ lı (7.11) denklemi (7.2) denkleminde yerine konulup sadeleştirilerek aşağıdaki denklem bulunur:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \psi \\ M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{-4(1+\bar{\beta})L}{(1+6\bar{\beta})d} & \frac{4(1+\bar{\beta})L}{(1+6\bar{\beta})d} & \frac{-8+12\bar{\beta}}{(1+6\bar{\beta})} & \frac{8-12\bar{\beta}}{(1+6\bar{\beta})} \\ \frac{(20+25\bar{\beta})}{(1+6\bar{\beta})d} & \frac{-(20+24\bar{\beta})}{(1+6\bar{\beta})d} & \frac{48}{(1+6\bar{\beta})L} & \frac{-48}{(1+6\bar{\beta})L} \\ \frac{(72+48\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})dL} & \frac{-(72+48\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})dL} & \frac{192EI}{(1+6\bar{\beta})L^2} & \frac{-192EI}{(1+6\bar{\beta})L^2} \\ \frac{192EI}{(1+6\bar{\beta})dL^2} & \frac{-192EI}{(1+6\bar{\beta})dL^2} & \frac{576EI}{(1+6\bar{\beta})L^3} & \frac{-576EI}{(1+6\bar{\beta})L^3} \\ \frac{4AE}{L} & \frac{4AE}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (7.18)$$

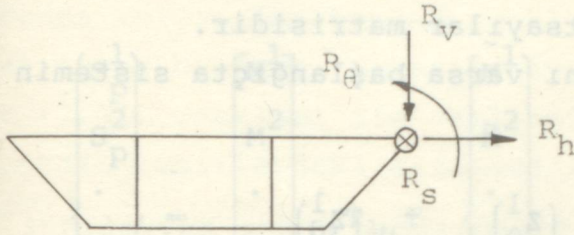
veya sembolik olarak

$$\{Z_k\} = [J] \{v_p\} \quad (7-18a)$$

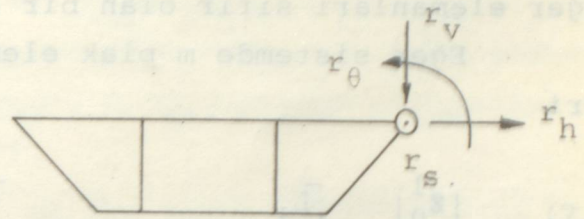
3.6 Bir Band Sistemine Ait Müşterek Koordinat Sistemi Ve Direkt Rijitlik Çözümü:

Ayrıt ve band kenar kuvvetleri ve deplasmanlarına ait bir müşterek koordinat sistemi belirlenir ve bu sistem şekil 7.6 ve 7.7 de gösterilmiştir.

Çubuk koordinat sistemindeki band kenar deplasmanları ile müşterek koordinetlar sistemindekiler arasındaki bağıntıyı sağlayan bir A dönüşüm matrisi enkesit geometrisinden kolaylıkla yazılabilir. Ayrıt yüklerinden meydana gelen deplasmanların çözümüne ait matris denklemleri katlanmış plak metodunda kullanılanlar ile esasta aynıdır. Ve bu yüzden bunlar burada tekrarlanmayacaktır. Mamafih, işaret edilmelidir ki mevcut sonlu band metodunda düğüm deplasmanlarının bulunmasında k-1 kesitindeki tesirler sıfır olarak kabul edilmelidir.

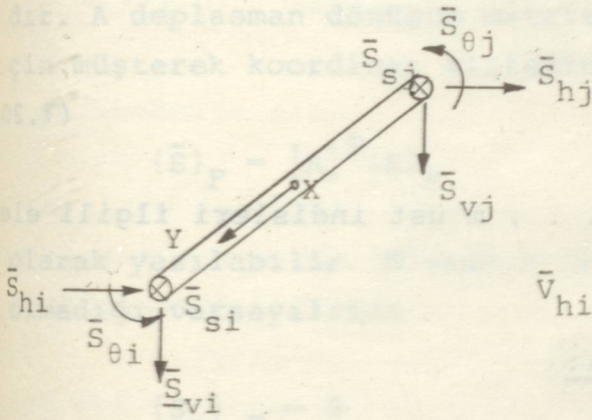


(a) Pozitif ayrit kuvvetleri

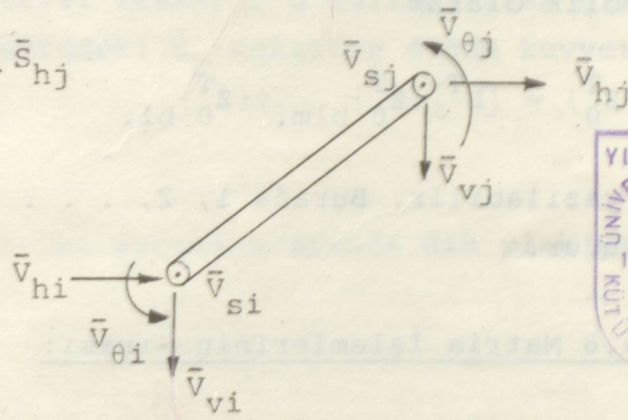


(b) Pozitif ayrit (düğüm) deplasmanlari

Şekil 7.7 Müşterek koordinat sisteminde pozitif düğüm kuvvetleri ve deplasmanlari



(a) kenar kuvvetleri



(b) kenar deplasmanlari

Şekil 7.8 Müşterek koordinat sisteminde pozitif band kenar kuvvetleri ve deplasmanlari

3.7 Sistemin İki Ucundaki Sınır Şartları ve Başlangıçtaki Tesir Vektörlerinin Çıkarılması:

Bir plak elemanının her iki ucunda ^{da} 6 tesir vardır. Bunlar (7.1) denkleminde görüldüğü gibi 3 deplasman ve 3 kuvvettir ve her plak ucu için 3 tesir bilinmezken diğer 3 tesir bilinir. Her ne zaman bir kuvvet bilinirse bu kuvvet ile ilgili deplasman bilinmez (veya tersi). Bu matris biçiminde

$$\{Z\} = [L] \{Z\}_{blm} + \{Z\}_{bl} \quad (7.19)$$

$$6 \times 1 \quad 6 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 6 \times 1$$

olarak yazılır. Burada $\{Z\}_{blm}$ 3 bilinmeyen tesire ve $\{Z\}_{bl}$ 3 bilinen

tesire (bunlar sıfırda olabilir) haizdir. $[L]$ her kolonu bir tek 1 ve diğer elemanları sıfır olan bir katsayılar matrisidir.

Eğer sistemde m plak elemanı varsa başlangıçta sistemin tesirleri

$$\begin{Bmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & & \\ & L_2 & \\ & & \ddots \\ & & & L_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^m \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

blm bl.

veya sembolik olarak

$$\{z_0^T\} = [L^T] \{z_0^T\}_{blm.} + \{z_0^T\}_{bl.} \quad (7.20a)$$

şeklinde yazılabilir. Burada 1, 2, . . . , m üst indisleri ilgili eleman no, sudur.

3.8 Matris İşlemlerinin Sırası:

1. Başlangıçta sistemin tesirleri (7.20a) denkleminde verildiği gibi biçimlendirilir.
2. Bandın birine ait ankastre düğüm kuvvetleri kurulur. (7.16) denklemini bir elemana ait ankastre ayrıt kuvvetlerini verir ve bütün sisteme ait denklem

$$\begin{Bmatrix} s_p^1 \\ s_p^2 \\ \vdots \\ s_p^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^1 & & \\ & C^2 & \\ & & \ddots \\ & & & C^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^m \end{Bmatrix} \quad (7.21)$$

F C^m

ile geliştirilebilir. 1, 2, . . . , m üst indisleri sistemde ilgili eleman no.larıdır. (7.20) denklemini yukarıdaki denklemde yerine konular ve matris çarpım işlemi tamamlanırsa aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

lir:

$$\begin{Bmatrix} S_p^1 \\ S_p^2 \\ \vdots \\ S_p^m \end{Bmatrix}_F = \begin{bmatrix} M^1 \\ M^2 \\ \vdots \\ M^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_0^T \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}_{blm.}^+ \begin{Bmatrix} \tilde{M}^1 \\ \tilde{M}^2 \\ \vdots \\ \tilde{M}^m \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

4mx1 4mx3m 4mx1

Her elemana ait düğüm kuvvetleri müşterek koordinat sistemine dönüştürülmeli ve aynı düğüme tekabül eden düğüm kuvvetleri toplanmalıdır. A deplasman dönüşüm matrisi transpoz'u kullanılarak bir eleman için müşterek koordinat sistemindeki $\bar{S}_F$ ankastre düğüm kuvvetleri

$$\{\bar{S}\}_F = [A]^T \{S\}_F \quad (7.23)$$

olarak yazılabilir. Elemanın iki ayırıtı arasında dik plak yüklerinin olmadığı varsayılırsa

$$\{S_s\}_F = 0 \quad (7.24)$$

olur ve (7.23) denklemi

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_i \\ \bar{S}_j \end{Bmatrix}_F = [A]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ S_p \end{Bmatrix}_F \quad (7.25)$$

şeklini alır. Burada i ve j elemanın iki ayırıt no.sudur. (7.22) denklemi m alt matris denklemi biçiminde ayrılabilir.

$$\{S_p^1\}_F = [M^1] \{Z_0^T\}_{blm.} + \{\tilde{M}^1\}, \text{ v.s} \quad (7.26)$$

4x1 4x3m 3mx1 4x1

(7.26) denklemi (7.25) denkleminde yerine konularak

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_i^1 \\ \bar{S}_j^1 \end{Bmatrix}_F = [N^1] \{Z_O^T\}_{blm.} + \{N^1\} \quad , \quad v.s \quad (7.27)$$

8x1 8x3m 3mx1 8x1

elde edilir. Bütün enine bandın R_F ankastre düğüm kuvvetleri her elemenda bütün düğüm kuvvetlerinin toplanmasıyla elde edilir.

$$\{R\}_F = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}_F = \begin{Bmatrix} \bar{S}_1^Z \\ \bar{S}_2^Z \\ \vdots \\ \bar{S}_n^Z \end{Bmatrix} \quad (7.28)$$

4nx1 4nx1 4nx1

Burada n toplam ayrit sayısını ve Σ aynı ayritta (düğümde) birleşen elemanlar üzerinde toplam alınacağını gösterir. Ankastre ayrit kuvvetleri başlanğıçtaki bilinmeyen tesirler anlamında olduğundan, sonuç olarak (7.28) denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\{R\}_F = [E] \{Z_O^T\}_{blm.} + \{E\} \quad (7.29)$$

4nx1 4nx3m 3mx1 4nx1

3. R_A dıştan tatbik edilen ayrit kuvvetleri olarak alınırsa R nihai ayrit kuvvetleri

$$\{R\} = \{R\}_A - \{R\}_F \quad (7.30)$$

veya (7.29) eşitliği kullanılarak

$$\{R\} = -[E] \{Z_O^T\}_{blm.} + \{\tilde{R}\}_A \quad (7.31)$$

olarak verilir. Burada

$$\{\tilde{R}\}_A = \{R\}_A - \{E\}$$

dır.

4. Enine bandın ortasındaki ayrit deplasmanları, katlanmış plak metodunda kullanılan benzer denklemleri çözmek için hatırlatıcı işlem kullanılarak bulunur. Mamafih, ayrit kuvvetleri tam bir vektör değildir fakat (7.31) denklemi ile verilebilir ve sonuç ayrit deplasmanlar başlangıçtaki kesitlerdeki anlamdadır ve

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_0^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}_{\text{blm.}} + \begin{Bmatrix} \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \\ \vdots \\ \tilde{G}_n \end{Bmatrix} \quad (7.32)$$

4nx1 4nx3m 3mx1 4nx1

veya sembolik olarak

$$\{r\} = [G] \{z_0^T\}_{\text{blm.}} + \{\tilde{G}\} \quad (7.32a)$$

şeklinde verilir.

5. Ayrit deplasmanları çözüldükten sonra, diğer kesitteki tesirler iki iştirak ile çözülebilir: (a) ankastre ayrit çözümü ve (b) sonuç ayrit deplasmanları ile çözüm.

(7.17)denklemine bakılarak, ankastre ayrit çözümü

$$\begin{Bmatrix} z_1^1 \\ z_1^2 \\ \vdots \\ z_1^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H^1 & & \\ & H^2 & \\ & & \ddots \\ & & & H^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^m \end{Bmatrix} \quad (7.33)$$

olarak yazılabilir.

(7.18) denklemi çubuk koordinat sistemindeki nihai ayrit deplasmanlarından meydana gelen tesirleri verir. Diğer kesitlerdeki tesirleri hesaplamak için (7.32) denklemine verilen ayrit deplasmanları çubuk koordinat sistemine dönüştürülmelidir. (7.32) denkleminden, bir elemanın iki ayrit deplasmanına ait bir alt matris denklemi

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_i \\ G_j \end{bmatrix} \{z_0^T\}_{\text{blm.}} + \begin{Bmatrix} \tilde{G}_i \\ \tilde{G}_j \end{Bmatrix} \quad (7.34)$$

olarak verilir. Bu ayrit deplasmanları A dönüşüm matrisi ile çubuk koordinat sistemine dönüştürülebilir.

$$\begin{Bmatrix} v_s \\ v_p \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (7.35)$$

(7.34) denklemi (7.35) denkleminde yerine konularak v_p ayrit deplasmanları

$$\{v_p\} = [B] \{z_0^T\}_{\text{blm.}} + \{\tilde{B}\} \quad (7.36)$$

$$4 \times 1 \quad 4 \times 3m \quad 3m \times 1 \quad 3m \times 1$$

ile gösterilebilir. Bütün elemanlar için (7.36) denklemi

$$\begin{Bmatrix} v_p^1 \\ v_p^2 \\ \vdots \\ v_p^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^m \end{bmatrix} \{z_0^T\}_{\text{blm.}} + \begin{Bmatrix} \tilde{B}^1 \\ \tilde{B}^2 \\ \vdots \\ \tilde{B}^m \end{Bmatrix} \quad (7.37)$$

şeklini alır. (7.18) denkleminde ayrit gelen tesirler

deplasmanlarından meydana

$$\begin{Bmatrix} z_1^1 \\ z_1^2 \\ \vdots \\ z_1^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J^1 & & \\ & J^2 & \\ & & \ddots \\ & & & J^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_p^1 \\ v_p^2 \\ \vdots \\ v_p^m \end{Bmatrix} \quad (7.38)$$

olarak elde edilir. 1 kesitinde nihai tesirler (7.33) ve (7.38) denklemleri birleştirilerek elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} z_1^1 \\ z_1^2 \\ z_1^3 \\ \vdots \\ z_1^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_1^1 \\ z_1^2 \\ z_1^3 \\ \vdots \\ z_1^m \end{Bmatrix}_F + \begin{Bmatrix} z_1^1 \\ z_1^2 \\ z_1^3 \\ \vdots \\ z_1^m \end{Bmatrix}_v$$

$$= \begin{bmatrix} H^1 & & \\ & H^2 & \\ & & \ddots \\ & & & H^m \end{bmatrix} \{z_0^T\} + \begin{bmatrix} J^1 & & \\ & J^2 & \\ & & \ddots \\ & & & J^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_p^1 \\ v_p^2 \\ v_p^3 \\ \vdots \\ v_p^m \end{Bmatrix} \quad (7.39)$$

(7.20) ve (7.37) denklemleri yukarıdaki denklemde yerine konularak sadeleştirilirse

$$\begin{Bmatrix} z_1^1 \\ z_1^2 \\ z_1^3 \\ \vdots \\ z_1^m \end{Bmatrix} = [D_1] \{z_0^T\}_{blm.} + \{\tilde{D}_1\} \quad (7.40)$$

elde edilir.

6. İkinci ve sonra son banda kadar bütün bandlar için 2 ~ 5 adımları tekrarlanır. k nolu band için aşağıdaki değişiklikler yapılmalıdır:

a) z_0^T ve z_1^T sırayla z_{k-1}^T ve z_k^T şeklinde değiştirilir.

b) daha önceki bandlardan (7.40) denklemi

$$\{z_{k-1}^T\} = [D_{k-1}] \{z_0^T\}_{blm.} + \{\tilde{D}_{k-1}\} \quad (7.40 \text{ a})$$

olarak yazılmalıdır.

Bu (7.40 a) denklemi, (7.21) ve (7.39) denklemlerinde (7.20) denklemi yerine yer almak için kullanılır.

7. Son e bandı için (7.40) denklemi

$$\{z_e^T\} = [D_e] \{z_0^T\}_{\text{blm.}} + \{\tilde{D}_e\} \quad (7.41)$$

6mx1 6mx3m 3mx1 6mx1

şeklini alır. Sistemin ucundaki z_e^T tesirleri 3m bilinen ve 3m bilinmeyen tesire haizdir. z_e nin bilinen tesirleri gözönüne alınarak, (7.41) denklemi

$$\{z_e\}_{\text{blm.}} = [D] \{z_0^T\}_{\text{blm.}} + \{\tilde{D}\} \quad (7.42)$$

3mx1 3mx3m 3mx1 3mx1

şeklinde yazılabilir. Başlangıçtaki bilinmeyen tesirler için (7.42) denklemi çözülerek

$$\{z_0^T\}_{\text{blm.}} = [D]^{-1} (\{z_e\}_{\text{blm.}} - \{\tilde{D}\}) \quad (7.43)$$

elde edilir.

8. Her bandın ortasındaki nihai iç kuvvetler ve deplasmanlar, başlangıçta z_0^T gibi tesirler bilindikten sonra işlem sistem üzerinde geliştirilerek hesaplanır.

3.9 Her Bandın Ortasındaki İç Kuvvetler Ve Deplasmanlara Ait Denklemler:

Başlangıçtaki bilinen tesirler (7.43) denkleminde bulunduğundan sonra, k-1 kesitindeki tesirler (7.40 a) denklemi ile hesaplanır,

$$\{z_{k-1}^T\} = [D_{k-1}] \{z_0^T\} + \{\tilde{D}_{k-1}\} \quad (7.44)$$

ve k bandının ortasındaki nihai ayrıt deplasmanları (7.32 a) denklemi kullanılarak elde edilebilir.

$$\{r\}_k = [C]_k \{z_0^T\} + \{\tilde{G}\}_k \quad (7.45)$$

i ve j ayrıtları arasında herhangi özel eleman için $\bar{v}_i$ ve $\bar{v}_j$ ayrıt deplasmanları r deplasman vektöründen çıkarılabilir. Ve bu çubuk koordinat sisteminde kenar deplasmanları (7.35) denklemi ile verilir.

(7.39) denkleminde bandın orta noktasındaki iç kiriş deplasmanları

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{d} & -\frac{1}{d} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (7.46)$$

dir.

Nihai kenar deplasmanları ve k-1 kesitindeki tesirlerden çıkarılan kenar deplasmanları arasındaki fark olarak belirlenen bir $\bar{v}_d$ deplasman vektörü

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_d \\ v_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\psi} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\bar{L} & \frac{-\bar{L}^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\bar{L}}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_d \\ v_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\bar{L}}{AE} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{z_{k-1}\} \quad (7.47)$$

ile hesaplanabilir. (7.8) denkleminde nihai kenar kuvvetleri

$$\begin{Bmatrix} T' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-AE}{\bar{L}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & \frac{6(1-2\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^2} \\ 0 & \frac{-36EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4} & \frac{-12EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_d \\ v_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} \quad (7.48)$$

dir.

Bandın ortasındaki iç kiriş kuvvetleri iki aşamada hesaplanır:

(1). k-1 kesitindeki tesirler ve (2). nihai kenar kuvvetleri (7.48)

denklemleri ile elde edilir. Binaenaleyh (7.3) denklemine bakılarak

$$\begin{Bmatrix} M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_{\text{band ortası}} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & -\bar{L}d & -\bar{L}^2 \\ 0 & 0 & -2\bar{L} \\ -2\bar{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} \quad (7.49)$$

(7.48) denklemi (7.49) denkleminde yerine konularak

$$\begin{Bmatrix} M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_{\text{band ortası}} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{12EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^2} & \frac{(6+12\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}} \\ 0 & \frac{72EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3} & \frac{24EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^2} \\ \frac{2AE}{\bar{L}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_d \\ v_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} \quad (7.50)$$

elde edilir.

Tek doğrultuda çalışan (hurdi) döşeme eğilmesine tekabül eden kenar kuvvetler (7.4 a) denklemi ile verilir.

(7.48) denklemi plağın enine eğilmesini dahil etmek için genişletilebilir.

$$\begin{Bmatrix} T' \\ P' \\ T'' \\ P'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-AE}{\bar{L}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2Eb}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & \frac{6(1-2\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^2} \\ 0 & 0 & \frac{-36EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4} & \frac{-12EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_d \\ v' \\ v_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} \quad (7.51)$$

Burada

$$v' = \frac{1}{2}(v_i + v_j)$$

Düzlem gerilme (levha teorisi) problemire tekabül eden kenar kuvvetler (7.51) denkleminin (7.10) denkleminde yerine konulması ile elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L^2} & 0 & \frac{-24EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & \frac{-6(1-2\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^2} \\ \frac{AE}{L^2} & 0 & \frac{24EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^3} & \frac{6(1-2\bar{\beta})EI}{(1+6\bar{\beta})d\bar{L}^2} \\ 0 & \frac{2Eb}{d} & \frac{-36EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4} & \frac{-12EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3} \\ 0 & \frac{2Eb}{d} & \frac{36EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^4} & \frac{12EI}{(1+6\bar{\beta})\bar{L}^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_d \\ v' \\ v_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} \quad (7.52)$$

4. Sürekli Çok Gözlü Katlanmış Plak Sistemlere Ait Çözüm

Eğer katlanmış plak sistem yalnız düğümler (ayrıntlar) da bağlanan rijit kolonlar üzerinde sürekli ise, daha önceki paragrafta verilen matris denklemleri aşağıdaki varsayımlar ile doğrudan doğruya kullanılabilir. Bu varsayımın birincisi, kolon reaksiyonları boyuna doğrultuda kolon genişliği üzerinde üniform yayılı olarak idealize edilir ve bağ deplasmanlar yalnız orta noktada gözönüne alınır. Boyuna doğrultuda bir bandın uzunluğu kolon mesnedi uzunluğuna eşit seçilir. Eğer ankastrelik sıfır deplasmanları daha önce paragraf 3.8 de 4. adımda açıklanan band bilinmeyen düğüm (ayrıt) deplasmanları çözülerek tayin edilirse problem çözülür.

Rijit iç diyaframlı sistemler için aşağıdaki varsayımlar gözönüne alınır:

1. Her plak elemanı boyuna bir kiriş gibi düşünüldüğünde her plak elemanına ait ankastrelik (sabitlik) şartları şu üç deplasman terimi ile belirlenir: (a) boyuna eksenel deplasman, (b) enine kiriş deplasmanı ve (c) boyuna kiriş dönmesi.

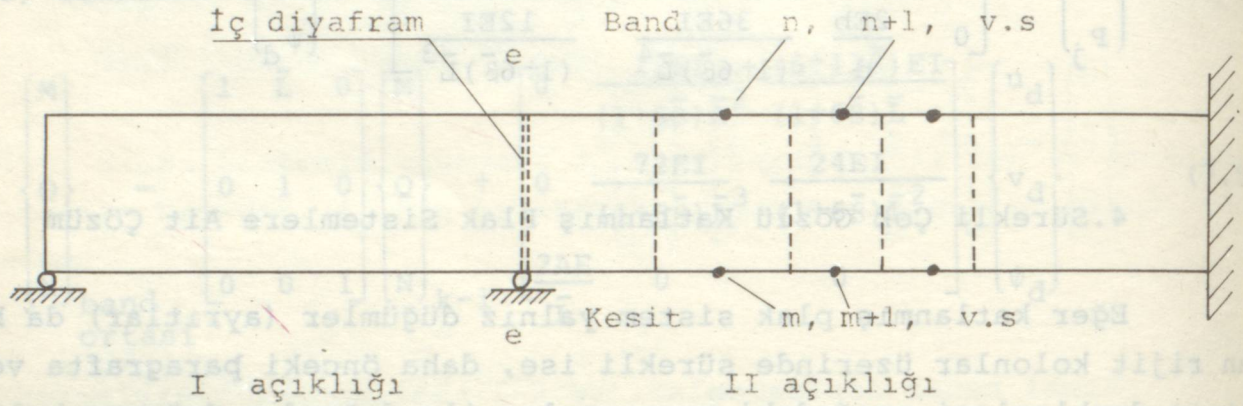
2. Ankastrelik kuvvetler diyafram enkesitinde toplanan çizgisel kuvvetler olup bunlar üç kiriş deplasmanı ile ilgili üç kuvvettir: (a) boyuna eksenel kuvvet, (b) enine kiriş kayma kuvveti ve (c) boyuna kiriş eğilme momenti.

3. Bu durum için katlanmış plak sistemi boyuna ayrıtlarında ankastreliğin olmadığı kabul edilir.

Rijit iç diyaframlar için, bazı plak elemanları deplasmana karşı sabitleştirilir (ankre edilir). Eğer diyaframlarda deplasman tesiri sıfır ise burada bu deplasman tesiri ile ilgili bir reaksiyon bulunur ve bununla ilgili kuvvet tesiri sürekliliği bozar. Sistemin başlangıçta ve bununla ilgili kuvvet tesiri sürekliliği bozar. Sistemin başlangıçta ve ki bilinmeyenler yerine iç diyaframdan sonra ortaya çıkan bilinmeyen terimler seçilir. Yeni ortaya çıkan bilinmeyenler, diyafram tarafından

sabitleştirilmeyen deplasman tesirleri diyafram tesirlerini ihtiva eder.

Bir rijit iç diyaframlı sistem şekil 7.8 de gösterildiği gibi kullanılır. Son bölümde geliştirilen denklemler kullanılarak I açıklığı e kesitindeki (iç diyaframdaki) tesirler (7.41) denklemi ile verilir.



Şekil 7.8 bir rijit iç diyaframlı katlanmış plak sistem

z_e^T komle tesirler vektörü d ve f deplasman ve kuvvet alt matrisleri olarak yeniden düzenlenebilir, böylece (7.41) denklemi

$$\begin{Bmatrix} -d \\ f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix} \{z_0^T\}_{blm.} + \begin{Bmatrix} -a \\ b \end{Bmatrix} \quad (7.53)$$

veya

$$\{d\} = [a] \{z_0^T\}_{blm.} + \{\tilde{a}\} \quad (7.53a)$$

$$\{f\} = [b] \{z_0^T\}_{blm.} + \{B\} \quad (7.53b)$$

olarak yazılabilir. Burada, d ve f kesitinde sırayla bütün deplasman ve kuvvet tesirlerini gösterir.

İç diyaframda sıfır deplasmanlara tekabül eden kuvvet tesirleri önce hesaplanır. (7.53a) denklemi sıfıra eşitlenerek

$$\{z_0^T\}_{blm.} = -[a]^{-1} \{\tilde{a}\} \quad (7.54)$$

ve (7.53b) denkleminde yerine konularak

$$\{\tilde{f}\}_{d=0} = -[b][a]^{-1} \{\tilde{a}\} + \{B\} \quad (7.55)$$

bulunur. $f_{d=0}$ sistem e kesitinde ankastre kabul edildiğinde bu kesitte açıklığındaki yüklerden oluşan kuvvet tesirlerini gösterir.

Yüzeysel yük ihmal edilerek e kesitinde d_0 ve f_0 deplasman ve kuvvet tesirleri arasındaki bağıntı ve başlangıçtaki bilinmeyen tesirler (7.53) denklemi ile verilir.

$$\begin{Bmatrix} d_0 \\ -f_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} \{z_0^T\}_{\text{blm.}} \quad (7.56)$$

veya

$$\{d_0\} = [a] \{z_0^T\}_{\text{blm.}} \quad (7.56a)$$

$$\{f_0\} = [b] \{z_0^T\}_{\text{blm.}} \quad (7.56b)$$

(7.56) denklemindeki d_0 ve f_0 birbirinden bağımsız değildir ve bunlar aşağıdaki denklemler ile birbirine bağlanır:

$$\{f_0\} = [b][a]^{-1}\{d_0\} \quad (7.57)$$

veya

$$\{f_0\} = [c]\{d_0\} \quad (7.57a)$$

burada

$$[c] = [b][a]^{-1}$$

$\{d\}_{\text{blm.}}$ i e kesitindeki bilinmeyen deplasman tesirleri kabul edelim; öyleyse e kesitindeki komple tesirler aşağıdaki matris denklemi ile gösterilebilir:

$$\begin{Bmatrix} -d \\ f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ c \end{bmatrix} \{d\}_{\text{blm.}} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -f_{d=0} \end{Bmatrix} \quad (7.58)$$

Diyaframdaki ankastrelikten doğan şartlar ile (7.58) denklemi aşağıdaki yolda belirlenir. Eğer $\{d\}_{\text{blm.}}$ debir d_i deplasman tesiri sıfır ise buna tekabül eden R_i reaksiyonu bir bilinmeyendir ve $\{d\}_{\text{blm.}}$ vektöründeki d_i R_i ile tekrar yerine konulacaktır. Birim matristeki 1 (i. satır, i. kolon) e tekabül eden değer sıfır olacaktır ve c matrisinde buna

tekabül eden i. kolon vektörü, i. sırada 1 ve diğer elemanları da sıfır olan bir vektör ile yerine konulur. Bütün bu denklemlerden sonra şekil değiştirmeler yerine getirilmiş olur ve denklem her plak elemanına tekabül eden tesirler için yeniden düzenlenebilir. Bu

$$\{z_e^T\} = [L_e^T] \{z_e^T\}_{blm.} + \{L_e^T\} \quad (7.59)$$

olarak gösterilebilir. Bu (7.20 a) denklemine benzerdir ve denklemler son bölümde geliştirilen denklemler II açıklığındaki bandlar boyunca geliştirilen hesaplamalar için kullanılabilir. Dikkat edilmelidir ki $\{z_e^T\}_{blm.}$, plak elemanın bilinmeyen deplasmanlarını ve mesnet kesitindeki rijit diyafram da bilinmeyen reaksiyonlar ihtiva eder.

Katlanmış plak sistemin en uzak ucundaki sınır şartlarından önce, daha önceki bölümde verilen denklemler ile $\{z_e^T\}_{blm.}$ aşağıdaki gibi çözülür. $\{z_0^T\}_{blm.}$ e ait çözümü elde etmek için e kesitindeki d deplasman vektörü oluşturulur ve $\{z_0^T\}_{blm.}$ (7.53a) denkleminin çözümünden hesaplanır. Böylece

$$\{z_0^T\}_{blm.} = [a]^{-1} (\{d\} - \{a\}) \quad (7.60)$$

yazılabilir. Anılmalıdır ki büyük bir katlanmış plak sistem için sistemin iki ucundaki tesirleri bağlayan katsayılar oldukça hassaslaşır ve çözüm gerçeğe aykırı olur. Bu hassasiyeti önlemek için sistemin belirli kesitlerindeki deplasman tesirleri sistem boyunca gelişmede iç bilinmeyenler olarak kullanılır. Böyle bir kesit "stopever" olarak isimlendirilir. Her stopever da (7.58) denklemi kurulur ve sonra matris satırları her elemanın tesirleri için

$$\{z^T\} = [L^T] \{d\}_{blm.} + \{\tilde{L}^T\} \quad (7.61)$$

olarak yeniden düzenlenir. Böylece stopever daki deplasmanlar, başta stopever'a veya iç diyafram ve sistemin ulaşılan en uzak ucuna kadar diğer band gruplarının bilinmeyen tesirleri olarak kullanılır. Bir stopever'daki bütün bilinmeyen deplasmanlar, daha önemlisi herhangi iç diyaframdaki tesirleri ve son olarak başlangıçtaki bilinmeyen tesirleri çözmek için (7.60) denklemi gibi denklemlere geri dönmek gereklidir.

5. Direkt Rijitlik Metodu Kullanılarak Komple Band Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi

Bölüm 1 de anılan kabuller ve sadeleştirmelere dayanılarak her band katlanmış plak sistemin bir sonlu elemanı olarak düşünülebilir ve direkt rijitlik metodu kullanılabilir. Sistemin analizi için direkt rijitlik metodundan katlanmış plak metodunda anlatıldığı gibi kullanılabilir. Burada sadece işlemlerin basit bir açıklaması verilmiştir.

1. Sistem boyuna doğrultuda sonlu sayıda bandlara bölünür.

2. Band rijitlik matrisi çubuk koordinat matrisinden müsterek koordinat sistemine dönüştürülür.

3. Band rijitlik matrisi çubuk veya band koordinat sistemine dayanılarak hesaplanır.

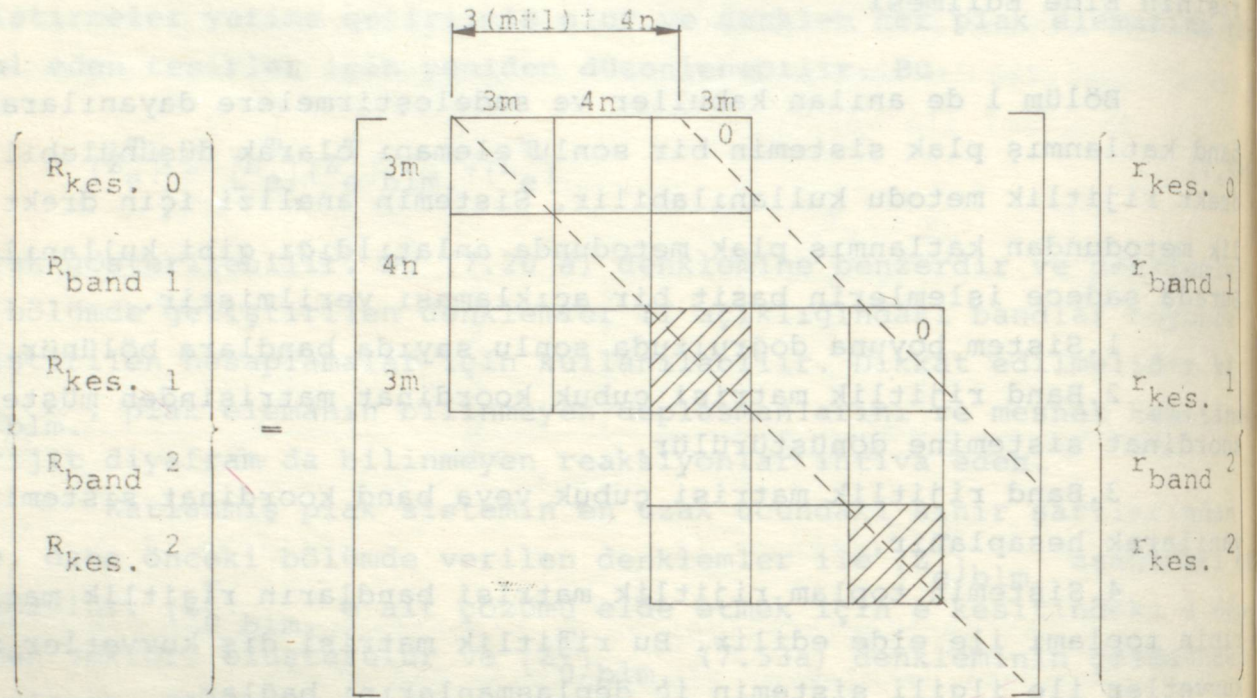
4. Sistemin toplam rijitlik matrisi bandların rijitlik matrislerinin toplamı ile elde edilir. Bu rijitlik matrisi dış kuvvetler ve bu kuvvetler ile ilgili sistemin iç deplasmanlarını bağlar.

5. Sistemin bilinmeyen deplasmanları çözülür.

6. Band iç kuvvetleri ve deplasmanları hesaplanır.

En önemli adım band rijitlik matrislerinin hesabıdır. Her bir band için 14 serbestlik derecesi vardır. Bunlar, boyuna kenarın her birinde 4 er ve bandın her ucunda 3 er tanedir. 14 serbestlik derecesinden 10 u düzlem rijitliğine ve diğer 4 ü bir yönlü (hurd) döşeme etkilerine tekabül eder. 14x14 lük komple band rijitlik matrisi Lo tarafından geliştirilmiş olup burada yeniden verilmeyecektir.

Sistemin toplam rijitlik matrisi simetriktir ve band matris biçiminde düzenlenebilir. m elemanlı ve n ayrıtlı bir sistem için maksimum band genişliği şekil 7.9 da gösterildiği gibi $6m + 4n$ olacaktır. k-1 ve k kesitlerindeki tesirleri bağlayan alt matris üst sağ üçgeninde rijitlik katsayıları sıfır olduğunda band genişliği $3(m+1) + 4n$ olur (şekil 7.9). Sistemin bilinmeyen deplasmanları bu band rijitlik matrisinin çözümüyle hesaplanır.



Şekil 7.9 Komple band rijitlik matrisi kullanılarak sistemin rijitlik matrisinin kurulması

6. Band Gelişim Çözümünün Band Matris Çözümüne Kıyasla Avantajları ve Dezavantajları

Band Gelişim çözümünün avantajları:

1. Bilgisayarda daha az depolamayı gerektirir. Bilgisayar programı, m elemanlı ve n ayrıtlı sistem için $6m(3m+1)$ ve $4n(3m+1)$ sayıda büyük katsayılar matrisini gerektirir. Bu iki matrisin kapasitesi $18m^2 + 6m + 12mn + 4n$ veya $m=n$ ise yaklaşık olarak $30m^2 + 10m$ olacaktır. (5) bölümünde açıklanan direkt rijitlik metodu kullanıldığında, $3(m+1) + 4n$ band genişlikli ve $(3m+4n)$ satırlı bir band matrisi kapasitesi $9m^2 + 16n^2 + 24mn + 9m + 12n$ veya $m=n$ olduğunda yaklaşık olarak $49m^2 + 21m$ olacaktır.

2. Bir kesitten diğer kesite geçişte eleman tesirlerinin hesabı bilgisayar programında yaklaşık olarak $(288m^2 + 150m)$ çarpma işlemini gerektirir. Burada $n=m$ kabul edilir ve matris denkleminde sadece sıfır olmayan terimler programlanır. Bu denklem (7.21) ve (7.40) denklemlerinde yollara tekabül eder.

Drekt rijitlik metodunun band matris çözümünde (şekil 7.9) bir kesit ve bir bandın $(3m+4n)$ bilinmeyenlerini yok etmek için çarpma ve bölmelerin sayısı yaklaşık olarak $7m(7m+3)^2 \times \frac{1}{2} \approx 172m^3$ 150 m olacaktır. Burada $n=m$ kabul edilmiştir.

İnanılır ki yukarıdaki adımlar iki ayrı metodun her biri için hesaplama zamanını içine alır ve bandların incelenmesinden ardışık band çözümü band matris çözümünden daha az hesaplama zamanı gerektirir. Maafih, bu kıyaslama sadece kaba bir fikir verir. Çünkü tekrar yerine koyma işlemleri ve band kuvvetleri ve deplasmanları dahil değildir. Çözüm için sadece ardışık band çözümü programı mevcuttur. Bu yüzden doğru bir kıyaslama yapılamaz.

Ardışık band çözümünün avantajları:

1. Bölüm 4'ün son paragrafı incelendiğinde, problemin hassasiyeti yüzünden büyük sistem için sopever'lar gereklidir. Her stopever $3m \times 3m$ lik matris inversiyonu ve bir o kadar da toplama işlemi gerektirir. Bu yüzden stopever sayısı arttığında hesaplama zamanı da o oranda artacaktır.

2. Bilgisayar programı yazılmasında çift kat'iyetli uygunluk bulunmuştur. Bu yüzden hesaplama zamanı ve gerekli kapasite artacaktır.

7. Bilgisayar Programı - SIMPLA

Bu bilgisayar programı genel olarak ardışık band çözümüne dayanır. SIMPLA olarak isimlendirilen bu program IBM 7094 sayısal bilgisayar için FORTRAN IV dilinde Scordelis tarafından yazılmıştır. Bu program iki ucunda keyfi şartlara (herbir eleman için bir giriş sınır şartına tekabül eden) ve rijit iç kolon ve mesnetlere haiz bir katlanmış plak sisteme ait çözümü sağlar. Yalnız, sisteme ayrıt yükleri tatbik edilebilmektedir. Sistemde meydana gelen deplasmanlar, kenar kuvvetleri ve deplasmanlar ve banda ait iç kuvvetler ve deplasmanlar ile beraber hesaplanır. Programın kısa bir açıklaması aşağıda verilmiştir.

7.1 Giriş Dataları:

1. Sistemin geometrisi ve boyutları, plak, ayrıt, band v.s sayısı.
2. Herbir plak (giriş) elemana ait boyutlar ve malzeme özellikleri.
3. Sistemin iki ucundaki sınır şartları. Sınır şartları boyuna

bir giriş olarak düşünölen plak elemanı ile ilgili bilinen kuvvetler ve deplasmanların herhangi bir kombinasyonunu ihtiva eder.

4. Sistemin herbir bandının ayrıtlarındaki üniform olarak tatbik edilen ayrıt yükleri ve (veya) verilen sıfır deplasmanlar.

5. Eğer sistemde rijit diyafram varsa herbir plak elemanındaki sabitlik şartına ait bilgiler.

7.2 Çıkış Dataları:

1. Bütün giriş dataları kontrol için özellikle yazılır.

2. Sistemin her iki ucunda olduğu kadar stopover'larda, rijit iç diyaframlarda da her plak elemanına ait tesirleri (kuvvet ve deplasman) yazılır.

3. Her band için band ortasındaki nihai düğüm (ayrıt) ve plak kuvvetleri ve deplasmanları yazılır.

7.3 Sınırlamalar ve Genellemeler:

1. Sırayla bir enkesitin plak elemanı ve ayrıtlarının maksimum sayısı 15 ve 16 dır.

2. Boyuna açıklık herhangi sayıda band uzunluğuna bölünebilir.

3. Ayrıt yükleri herbir band uzunluğunca üniform olarak yayılmıştır. Mamafih, sistemin her bandı ayrı yükleme şartlarına haiz olabilir.

4. Herbir rijit iç diyafram sistemde kendi sabitlik şartlarına haiz olabilir.

5. Stopoverlerin sayı ve yerleri keyfidir. Gerekli minimum sayı sistemin uzunluğuna bağılı olarak doğru bir netice vermek ve uygun çözümün ve tecrübe için gereklidir.

8. NOTASYONLAR

- [a] $[D_0]$ in bölünmesiyle elde edilen alt-vektörler
 (a) $\{\bar{D}_0\}$ in bölünmesiyle elde edilen alt-vektörler
 [A] Deplasman dönüşüm matrisi
 b Plak kalınlığı
 [b] $[D_0]$ in bölünmesiyle elde edilen alt-matris
 (b) $\{\bar{D}_0\}$ in bölünmesiyle elde edilen alt-vektörler
 [B] Başlangıçtaki bilinmeyen tesir terimlerindeki v_p plak kenar deplasmanlarını temsil eden matris
 (B) Başlangıçta ve önceki bilinen tesirlerin sebep olduğu v_p plak kenar deplasmanlarını temsil eden kolon vektörü
 [c] $[b] [d]^{-1}$ den meydana gelen matris
 [C] $\{z_{k-1}\}$ giriş tesirleri ile $\{S_p\}_F$ ankastre düğüm kuvvetlerini bağlayan matris
 d Plak genişliği
 (d) e kesitinde yalnız başlangıçtaki bilinmeyen tesirlerden meydana gelen deplasman tesirleri
 [D] Başlangıçtaki bilinmeyen tesir terimleri ile i kesitindeki plak tesirlerini temsil eden matris
 (D) Başlangıçtaki ve önceki bantlardaki bilinen tesirlerin i kesitinde meydana gelen plak tesirlerini temsil eden matris
 E Elastisite modülü
 (e) e kesitindeki tesirleri gösteren indis
 [E] Başlangıçtaki bilinmeyen tesir terimlerinde ankastre ayırıt kuvvetlerini temsil eden matris
 (E) Başlangıçtaki ve önceki bantlardaki bilinen tesirlerin sebep olduğu ankastre ayırıt (düğüm) kuvvetlerini temsil eden kolon vektörü
 f z_0^T in bölünmesinden elde edilen alt-vektör
 (f) e kesitinde başlangıçtaki bilinmeyen tesirlerin sebep olduğu kuvvet tesirleri
 (f) $d=0$ e kesitinde, e de ankastre olduğu kabul edilen sistemin I açıklığındaki yüklerin sebep olduğu kuvvet tesirleri
 F F indisi ankastre ayırıt tesirlerini gösterir
 F k elemanının Field matrisi
 G Kayma modülü
 [G] Başlangıçtaki bilinmeyen tesirlerin terimlerinde nihai düğüm deplasmanlarını temsil eden matris

- [G] Başlangıçtaki ve önceki bandlardaki bilinen tesirlerin sebep olduğu nihâi ayrit deplasmanlarını temsil eden kolon vektörü
- [H] $\{z_{k-1}\}$ düğüm tesirleri ile $\{z_k\}_F$ ankastre düğüm kuvvetlerinin bağlayan matris
- I Atalet momenti = $(1/12)bd^3$
- I_s Birim genişlikteki plak diliminin atalet momenti = $b^3/12$
- [J] v_p nihâi düğüm deplasmanları ile $\{z_k\}_v$ tesirlerini bağlayan matris
- K Kayma sabiti
- $[K_p]$ Plak rijitlik matrisi
- $[K_s]$ Levha rijitlik matrisi
- $\{ \}_{b1}$ b1 alt indisi bilinen vektörü gösterir
- L Band uzunluğu
- $\bar{L}$ Yarım band uzunluğu = $(1/2)L$
- [L] Her kolonu bir tek 1 ihtiva eden ve diğer elemanları sıfır olan katsayılar matrisi
- $[L_e^T]$ e kesitindeki rijit diyaframdan sonraki plak tesirlerini temsil eder
- $\{L_e^T\}$ Önceki açıklıklardaki ve diyafram sabitliğindeki yüklerden meydana gelen iç rijit diyaframdan sonraki plak tesirlerini gösteren kolon vektörü
- M Düzlem eğilme momenti veya bandın boyuna kenarına göre enine levha momenti
- M_i } i kenarı, j kenarındaki birim genişlikteki enine levha moment
 M_j }
 t_i
- $[M^m]$ $[C^T]$ $[L^T]$ den meydana gelen matris
- $[M^m]$ $[C^T]$ $[z_0^m]_{b1}$ den meydana gelen matris
- N Eksenel kuvvet
- N^1 } l plak elemanına ait $[A]^T [M^1]$ veya $[A]^T [M^1]$ den meydana
 N^1 } gelen matris
- P Band kenarına dik enine levha kuvveti
- P' Birim uzunlukta simetrik enine levha kenar kuvveti
- P'' Birim uzunlukta anti-simetrik enine levha kenar kuvveti
- Q Kayma kuvveti veya band kenarında plağa dik kayma kuvveti
- $\{r_n\}$ n düğümündeki nihâi düğüm noktası deplasman vektörü
- {R} Nihâi düğüm kuvvet vektörü
- $\{R\}_A$ Dıştan tatbik edilen düğüm kuvvet vektörü

$\{R\}_A$	$\{R\}_A - \{E\}$ vektör farkı
$\{R\}_F$	Bütün enine kesitin ankastre ayırıt kuvvetleri
$\{\bar{S}\}_n$	Müşterek koordinat sisteminde n düğümündeki ankastre düğüm kuvvet vektörü. $\bar{S}$ n düğümüne bağlanan bütün elemanlar üzerindeki toplamı gösterir.
$\{S\}_p$	Plak kuvvet vektörü
$\{S\}_s$	Levha kuvvet vektörü
$\{\bar{S}\}_F$	Müşterek koordinat sisteminde ankastre düğüm kuvvet vektörü
T	Bandın kenarı boyunca levha kayma kuvveti
T'	Birim uzunlukta simetrik levha kenar ^{kayma} kuvveti
T''	Birim uzunlukta anti-simetrik levha kenar kayma kuvveti
[T]	Parantez içindeki T indisi enkesitteki toplam plak elemanlarını gösterir
[] ^T	Parantez dışındaki indis matris transpozisini gösterir.
u	N ye tekabül eden eksenel deplasman, veya bandın kenarları boyunca T ye tekabül eden düzlem deplasman
$\bar{u}$	T' ye tekabül eden band ortasındaki deplasman, veya band ortasında u_i ve u_j nin sebep olduğu iç giriş deplasmanı
$\{ \}$ _{blm}	blm indisi bilinmeyen vektörleri gösterir
v	Q ya tekabül eden kayma deplasmanı, veya band kenarına dik P ye tekabül eden enine deplasman
$\bar{v}$	Band ortasında T'' nün sebep olduğu deplasman, veya band ortasında u_i ve u_j sebep olduğu iç giriş deplasmanı
v'	P' nün sebep olduğu band kenarındaki enine genişleme, veya $(v_i - v_j)$ olarak belirlenen deplasman
$\{v\}_p$	Plak deplasman vektörü, veya band ortasındaki nihâi düğüm deplasmanı, veya çubuk koordinat sisteminde plak rijitliğine tekabül eden deplasman vektörü
$\{v\}_s$	Levha tesiri deplasman vektörü, veya çubuk koordinat sisteminde levha rijitliğine tekabül eden deplasman vektörü
$\{\bar{v}\}_d$	Nihâi kenar deplasmanları arasındaki fark alarak belirlenen deplasman vektörü ve önceki (k-1) kesitinden taşınan kenar deplasmanları
$\left. \begin{matrix} v_i \\ v_j \end{matrix} \right\}$	Birim uzunlukta i kenarı, j kenarında plağa dik kesme kuvveti
w	Plağa dik band kenarındaki kayma deplasmanı

w_i	V_i, V_j kesme kuvvetlerinin sebep olduğu sehimler
w_j	
z_k	$k, k-1$ ucundaki kiriş band tesirleri, kuvvetler ve deplasmanlar
z_{k-1}	
z_0^m	m plağının başlangıçtaki tesiri
β	Katsayı = $6EI_k/L^2GA$
$\bar{\beta}$	Katsayı = 4β
θ	Band boyuna kenarına göre M ye tekabül eden enine plak dönmesi
θ_i	
θ_j	M_i, M_j plak momentlerinin sebep olduğu dönme
ψ	M ye tekabül eden düzlem dönme
$\bar{\psi}$	Band ortasında P'' nün sebep olduğu deplasman, veya u_i ve u_j nin band ortasında meydana getirdiği iç kiriş dönüşü

VIII. SANDIK KİRİŞLERİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ANALİZİ

1. GİRİŞ

Sonlu eleman metodu, sonlu sayıda düğüm ayrıtlarında içten bağlanmış sonlu elemanların birleşiminden oluşan, bir sistemin analizi ile sürekli ortam mekaniğindeki yaklaşık olabilen bir problemin çözüm fikri ile sayısal işlem olarak düşünülebilir; burada gerekli şartları yerine getirmek için sistemdeki iç gerilmeler ve deplasmanların seçildiği kabul edilir. Son 15 yıl boyunca bu metot, düzleminde ve düzlemine dik yüklere maruz plaklar, eksenel rijit cisimler ve eksenel simetrik kabuklardaki değişik problemlere başarı ile uygulanmaktadır. Metot son yıllarda genel ince kabuk problemlerine ve genel üç boyutlu rijit cisim analizlerine tatbik edilerek ortaya çıkmıştır. Burada bu konudaki geniş literatürün yeniden gözden geçirilmesi düşünülmeyecektir. Son yıllarda bu konuda en iyi kitap Zienkiewicz tarafından yayınlanmıştır. Bu kitap teorisinin mukayeseli incelemesini ve yukarıda anılan problemlere sonlu elemanlar metodunun uygulamasını verir. Keza iyi bir referans listesi ihtiva eder. Bu incelemede ilgi çekici özellik sonlu elemanlar metodunun sandık kesitli köprüler gibi çok gözlü katlanmış plak sistemlerin analizine uygulanışdır. Bu metotta kullanılan esas sistem elemanı, her dikdörtgen plağın enine ve özellikle boyuna doğrultuda (şekil 8.1) sonlu elemanlara bölünerek elde edilir. Bu sonlu dikdörtgen elemanların boyutları, kalınlığı ve malzeme özellikleri sistem boyunca değişik olabilir. Böylece münferit yüklere yakın bölgelerde (şekil 8.1), bölge civarındaki ani değişen gerilmeleri ve momentleri daha doğru hesaplamak için daha sık aralıklı bir ağ sistemi kullanılabilir. Herbir düğüm noktasında keyfi yükleme ve sınır şartları seçilebilir. Sistemin her düğüm noktasında 6 serbestlik derecesi olduğu kabul edilir. Bunların herbiri için bir bilinen dış kuvvet veya bir bilinen deplasman mevcut olabilir. Belirli bir kuvvet bilinirse buna tekabül eden deplasman bilinmez veya bunun tersi. Direkt rijitlik çözümü bilinmeyen düğüm noktası deplasmanı ve kuvvetlerini bulmak için kullanılır. Bunlar bilindiğinde her sonlu elemandaki iç kuvvetler ve gerilmeler hesaplanabilir. Bu yaklaşımda anahtar adım, direkt rijitlik çözümündeki gereksinimler sistemin rijitlik matrisinden temin edildiğinde, sürekli ortam davranışına doğru olarak yaklaşabilen tek sonlu elemanlar için eleman rijitlik matrislerinin geliştirilmesidir. Bu adım bu bölümün daha sonraki paragraflarında

detaylı olarak incelenecektir.

Kullanılan esas kabuller şunlardır:

1. Her sonlu eleman üniform kalınlıklı, elastik, izotrop ve homojen malzemeden yapılan bir dikdörtgendir.

2. Kuvvetler ve deformasyonlar arasında lineer bir bağıntı vardır ve bu sebepten süperpozisyon geçerlidir.

3. Her dikdörtgen sonlu elemandaki düzlem deplasmanlar (mambran tesiri) 12 deplasman bileşeninin süperpozisyonu ile elde edilir. Bu bileşenler, ikisi düzlem hareketi ve biri eleman düzlemine dik dönme olarak alınan elemanın her köşesindeki üç düğüm noktası deplasman bileşenleri ile tek olarak belirlenebilir.

4. Her sonlu elemandaki düzlem gerilmeler, düzlem gerilme problemi belirleyen elastik denklemler düşüncesiyle düzlem deplasmanlardan hesaplanır.

5. Her dikdörtgen sonlu elemandaki dik deplasmanlar (plak tesiri) 12 deplasman bileşeni süperpozisyonu ile elde edilir. Bu bileşenler, ikisi düzlem eksenine göre dönme ve biri plak düzlemine dik deplasman olarak alınan elemanın her köşesindeki üç düğüm noktası deplasmanı ile tek olarak belirlenir.

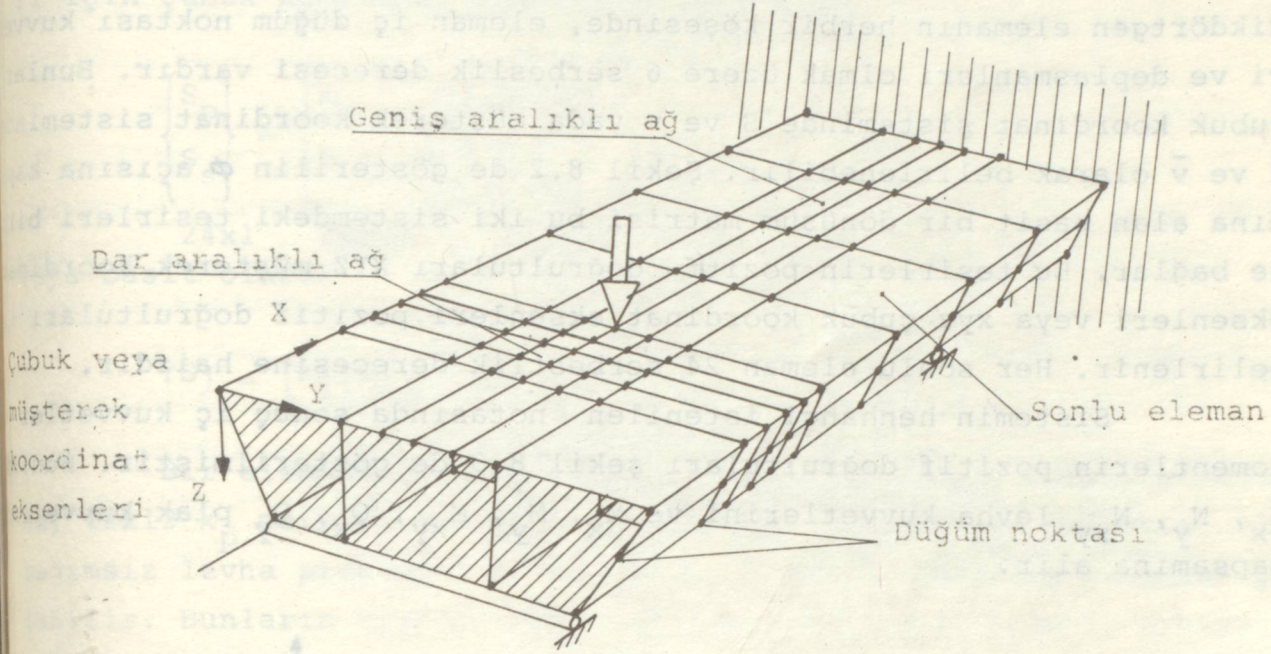
6. Her sonlu elemandaki plak eğilme ve torsiyon momentleri klasik ince plak teorisi düşüncesiyle dik deplasmanlardan hesaplanır.

Yukarıda her eleman için 4 ve 6 kabulleri katlanmış plaklara ait elastik teoridekilerin aynıdır. Mamafih, denge ve uygunluğun bitişik elemanların iç geçiş yüzeyleri boyunca değil yalnız düğüm noktalarında komple sistemin sonlu elemanlardan teşekkül ettiği unutulmamalıdır. Genel durumda münferit elemanlar için seçilen bağımsız deplasman bileşenleri, bu geçiş yüzeyleri ortasında mümkün olan tatminkâr uygunluğa çok yakın olarak seçilir. İlaveten, çözümdeki doğruluğu sağlamak için deplasman bileşenleri, mümkün olan bütün rijit cisim modlarını ve elemana ait deplasmanların üniform şekil değiştirme modlarını ihtiva etmelidir.

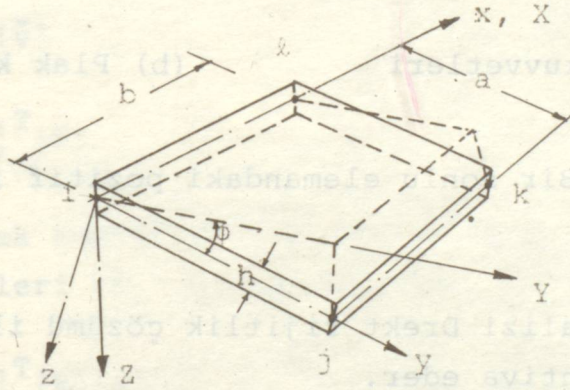
2. METODUN GENEL AÇIKLAMASI

Şekil 8.1 de gözönüne alınan sistem, sisteme etkiyen yüklemeyi ve sınır şartlarını gösterir. Bu düğüm noktası deplasmanlarını ve her sonlu elemandaki iç kuvvetler ve momentlerin bulunmasını gerektirir. Şekil 8.1 ve 8.2 de görüldüğü gibi müşterek XYZ sistemi ve xyz çubuk sistemi olmak üzere iki doğru koordinat sistemi düşünülür. Müşterek koordinat sistemi yatay XY düzlemli ve aşağı doğru düşey Z eksenli bütün

elemanlar için aynıdır. Çubuk koordinat sistemi elemandan elemana değişir ve yatay düzlem ile elemanın eğimini belirleyen ϕ açısına bağlıdır.



Şekil 8.1 Analitik sonlu eleman modeli

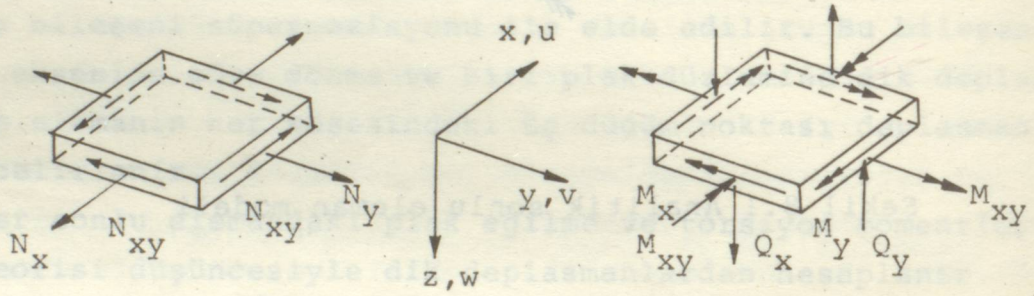


Şekil 8.2 XYZ müşterek koordinat sistemi, xyz çubuk koordinat sistemi ve sonlu eleman boyutları

Bütün dış yükler ve düğüm noktası deplasmanları müşterek koordinat sisteminde gözönüne alınır. Her düğüm noktası 3 ü hareket ve 3 ü serbestlik olmak üzere 6 serbestlik derecesine sahiptir. B dış kuvvet veya momentlerinin ve bunlara tekabül eden düğüm noktası deplasmanlarının pozitif doğrultuları müşterek koordinat sisteminin XYZ eksenleri pozis-

tif doğrultuları ile belirlenir. Momentler ve dönmeler için sağ el ve tör kaidesi kullanılmalıdır. Benzer şekilde, şekil 8.2 de gösterilen dikdörtgen elemanın her bir köşesinde, eleman iç düğüm noktası kuvvetleri ve deplasmanları olmak üzere 6 serbestlik derecesi vardır. Bunlar ya çubuk koordinat sisteminde S ve v yada müşterek koordinat sisteminde $\bar{S}$ ve $\bar{v}$ olarak belirlenebilir. Şekil 8.2 de gösterilen ϕ açısına kapsama alan basit bir dönüşüm matrisi bu iki sistemdeki tesirleri birbirine bağlar. Bu tesirlerin pozitif doğrultuları XYZ müşterek koordinat eksenleri veya xyz çubuk koordinat eksenleri pozitif doğrultuları ile belirlenir. Her sonlu eleman 24 serbestlik derecesine haizdir.

Sistemin herhangi istenilen notasında sonuç iç kuvvetler ve momentlerin pozitif doğrultuları şekil 8.3 de gösterilmiştir. Bunlar N_x , N_y , N_{xy} levha kuvvetlerini ve M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y plak kuvvetlerini kapsamına alır.



(a) levha kuvvetleri

(b) Plak kuvvetleri

Şekil 8.3 Bir sonlu elemandaki pozitif iç kuvvetler ve deplasmanlar

Sistemin analizi Direkt rijitlik çözümü ile ortaya konulur ve aşağıdaki adımları ihtiva eder.

1. Sistemdeki dış yayılı yüzeyseyyükler basit bir yardımcı alan fikri ile eşdeğer düğüm noktalarına çevrilir ve bunlar diğer mevcut düğüm noktası yüklerine sistemde bilinen yükler şeklinde ilave edilir. Sözü edilen bilinen deplasmanlar keza bazı düğümlerde mevcuttur. Eğer bilinen kuvvetler mevcut ise serbestlik derecesi için, bu kuvvetlere tekabül eden deplasmanlar da mevcuttur, (veya tersi). Bir R dış yükler vektörü ve r deplasman vektörü bu bilinen veya bilinmeyen değerlerin biraraya toplanmasıyla biçimlenir.

2. Dikkatlice seçilmiş deplasman gruplarına dayanan rijitlik matrisleri tipik bir sonlu elemandaki k_p levha tesiri ve k_s plak tesiri için çubuk koordinat sisteminde çıkarılır.

$$\begin{Bmatrix} S_p \\ S_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_p \\ v_s \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

24x1 24x24 24x1

veya basit olarak

$$\{S\} = [k] \{v\} \quad (8.1 a)$$

Bir elemandaki levha ve plak tesirliri çift teşkil etmediğinden, 12×12 k_p matrisi ve 12×12 k_s matrisi birbirinden bağımsız olarak, bağımsız levha problemi ve ince plak problemi gözönüne alınarak çıkarılabilir. Bunların herbiri aşağıdaki paragraflarda detaylı olarak gözönüne alınacaktır.

3. Çubuk koordinat sistemindeki eleman düğüm noktası S kuvvetleri ve v deplasmanları, a deplasman dönüşüm matrisi ve bunun transpoz'u olan a^T ile müşterek koordinat sistemindeki $\bar{S}$ ve $\bar{v}$ ye dönüştürülebilir.

$$\{v\} = [a] \{\bar{v}\} \quad (8.2)$$

$$\{\bar{S}\} = [a]^T \{S\} \quad (8.3)$$

4. Müşterek koordinat sistemindeki eleman rijitlik matrisi (8.2) ve (8.3) denklemleri (8.1 a) denkleminde yerine konularak belirlenir.

$$\{\bar{S}\} = [a]^T [k] [a] \{\bar{v}\} \quad (8.4 a)$$

$$\{\bar{S}\} = [\bar{k}] \{\bar{v}\} \quad (8.4 b)$$

Burada

$$[\bar{k}] = [a]^T [k] [a] \quad (8.5)$$

$\bar{k}$ matrisi 24×24 boyutunda bir eleman rijitlik matrisidir ve böyle bir matris sistemdeki her sonlu eleman için çıkarılır.

5. (8.4 b) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_i \\ \bar{S}_j \\ \bar{S}_k \\ \bar{S}_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{ii} & \bar{k}_{ij} & \bar{k}_{ik} & \bar{k}_{il} \\ \bar{k}_{ji} & \bar{k}_{jj} & \bar{k}_{jk} & \bar{k}_{jl} \\ \bar{k}_{ki} & \bar{k}_{kj} & \bar{k}_{kk} & \bar{k}_{kl} \\ \bar{k}_{li} & \bar{k}_{lj} & \bar{k}_{lk} & \bar{k}_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{v}_k \\ \bar{v}_l \end{Bmatrix} \quad (8.6)$$

Burada, i, j, k, l şekil 8.2 de gösterilen dikdörtgen sonlu elemanın 4 dört düğüm noktasını göstermektedir. Sonuçlanan 6×6 lık $\bar{k}_{mn}$ alt matrislerinden herbiri bir n köşesinde birim düğüm noktası deplasman takımıyla m köşesinde meydana gelen 6 düğüm noktası kuvvetini bağlar.

6. Herhangi düğüm noktasındaki statik denge bir noktadaki dış düğüm noktası kuvvetlerinin aynı noktada etkiyen eleman kuvvetlerinin toplamına eşit olmasını gerektirir. Örneğin i noktasında dört elemanın birleştiğini kabul edelim.

$$\{R_i\} = \{\bar{S}_i^1\} + \{\bar{S}_i^2\} + \{\bar{S}_i^3\} + \{\bar{S}_i^4\} \quad (8.7)$$

Burada indisler eleman no.larını göstermektedir.

7. Herhangi düğüm noktasındaki geometrik uygunluk, dış düğüm deplasmanlarının müşterek koordinat sistemindeki eleman düğüm noktası deplasmanlara eşit olmasını gerektirir.

$$\{r_i\} = \{\bar{v}_i^1\} = \{\bar{v}_i^2\} = \{\bar{v}_i^3\} = \{\bar{v}_i^4\} \quad (8.8)$$

8. Tüm sisteme ait K sistem rijitlik matrisi, şimdi (8.6) denkleminin alt matrisleri uygun şekilde biraraya getirilerek oluşturulabilir.

$$\{R\} = [K] \{r\} \quad (8.9)$$

$6n \times 1 \quad 6n \times 6n \quad 6n \times 1$

Bu tip problemler için K sistem rijitlik matrisi oldukça geniş olacaktır ve düğüm noktası sayısı n olmak üzere $6n \times 6n$ lik bir boyuta haiz olacaktır. Düğüm noktalarının numaralandırılması özel benzerlikler adapte edilerek herhangi sonlu elemanın düğüm noktaları no.larındaki maksimum fark minimuma indirilebilir, sistemin topolojisi K matrisi için mümkün olan minimum band genişliği kabul etmek avantajını sağlar. Daha sonra açıklanacak olan bilgisayar programında, sadece $x=0$

enkesitindeki düğüm noktalarının numaralanması gereğiyle tabii prizmatik sistem avantaj olarak alınır. Bilgisayar, açıklık boyunca düğüm noktaları yerlerini belirleyen diğer sözü edilen kesitlerdeki düğüm noktalarını otomatik olarak işaretler.

9.Üç-diyoagonalizasyon metodu, (8.9) ile gösterilen büyük denklem sistemlerini çözmek için kullanılır.

10.Bilinen r düğüm noktası deplasmanları ile müşterek koordinat sistemindeki v sonlu eleman düğüm noktası deplasmanları (8.8) ve (8.2) denklemlerinin kullanılmasıyla tamamen bulunabilir.

11.Her sonlu elemanda seçilmiş noktalardaki dış kuvvetler ve deplasmanlar (şekil 8.3) bu değerler ile düğüm noktası deplasmanlarını bağlayan ifadeler ile hesaplanır.

3.SONLU ELEMAN RİJİTLİĞİNİN VİRTÜEL İŞ İLE GELİŞİMİ

Levha ve plak tesirine ait eleman rijitlik matrisinin gelişimi geometrik yaklaşım veya virtüel iş prensipleri kullanılarak tamamlanabilir. İyi bilinen bu yaklaşımların her ikisinin genel açıklaması Zinkiewicz in kitabında bulunabilir. Burada virtüel iş prensipleri adapte edilmiş ve taslağı verilmiştir. Bu aşağıda dikdörtgen sonlu elemandaki düzlem gerilme (levha) ve plak tesirleri için kullanılmıştır.

1. v iç deplasmanları F deplasman fonksyonu terimi ile ifade edilir.

$$\{v(x,y)\} = [F(x,y)]\{\alpha\} \quad (8.10)$$

a. u ve v düzlem deplasmanları levha problemleri için ve w dik deplasmanı ince plak problemi için kullanılır.

b. 12 si levha ve 12 si ince plak için olmak üzere toplam 24 lineer bağımsız katsayı (α) sisteme ait genelleştirilmiş koordinatlar gibi kullanılır. Elemana ait serbestlik derecesi sayısı keza 24 e eşit alınır.

c. $\{V(x,y)\}$ de kapsama alınan fonksyonlar (8.10) elemanın belirlenen serbestlik derecesine eşit bağımsız deplasman bileşenleri sayısının süperpozisyonu gibi düşünülebilir.

2.Aşağıdaki özelliklere haiz V_1 genelleştirilmiş deplasman grupları belirlenir.

a. Farklı elemanlar arasında bağlayıcı tek olarak ifade edilmeye muktedirdir.

b. Sınır deplasman sahası bu genelleştirilmiş deplasman fikri ile tek olarak belirlenmelidir.

c. Gelişimde dikdörtgen elemanın dört köşesindeki düğüm noktası deplasmanları (öteleme ve dönme) genelleştirilmiş deplasmanlar olarak seçilmiştir.

3. Genelleştirilmiş koordinat terimleri ile düğüm noktası deplasmanları çıkarılır.

$$\{V_i\} = [A]\{\alpha\} \quad (8.11)$$

A matrisi, V_i nin uygun olarak belirlenmesi ve düğüm noktası deplasmanlarının yerine konulmasıyla (8.10) denklemi kullanılarak bulunabilir.

4. a. Bir levha problemi için ϵ eleman şekildeğiştirmeleri (8.1) denkleminin deplasman fonksiyonlarının uygun diferansiyeli ile çıkarılır

b. Bir plak problemi için κ eleman eğrilikleri (8.10) denkleminin deplasman fonksiyonlarının uygun diferansiyeli ile çıkarılır.

$$\{\epsilon(x,y)\} = [B_p(x,y)]\{\alpha_p\} \quad (8.12)$$

$$\{\kappa(x,y)\} = [B_s(x,y)]\{\alpha_s\}$$

5. a. Levha problemi için σ eleman gerilmesi kabul edilen gerilme-şekildeğiştirme bağıntısından çıkarılır.

b. Plak problemi için M eleman momentleri kabul edilen moment eğrilik bağıntılarından çıkarılır.

$$\{\sigma(x,y)\} = [D_p]\{\epsilon(x,y)\} \quad (8.13)$$

$$\{M(x,y)\} = [D_s]\{\kappa(x,y)\}$$

Burada D matrisi her durumda uygun elastik sabitleri ihtiva eder.

6. (8.12) denklemleri (8.13) denklemlerinde yerine konularak

$$\{\sigma(x,y)\} = [D_p][B_p(x,y)]\{\alpha_p\} \quad (8.14)$$

$$\{M(x,y)\} = [D_s][B_s(x,y)]\{\alpha_s\}$$

elde edilir.

7. a. Levha problemi için $\bar{\epsilon}$ virtüel şekildeğiştirme sahaları takımları takdim edilir; Öyleki bunlara tekabül eden genelleştirilmiş koordinatlar birim değere haizdir. Yani (8.12) denklemindeki $\bar{\alpha}_p = 1$ dir (ayniyet matrisi)

b. Plak problemi için $\bar{\kappa}$ virtüel eğrilik saha takımları takdim edilir; Öyleki genelleştirilmiş koordinatlar birim değerlere haizdir, yani (8.12) denklemindeki $\bar{\alpha}_s = 1$ dir (ayniyet matrisi)

c. Elemanın diferansiyel hacminde yapılan iç virtüel iş

$$dW_I = \bar{\epsilon}^T \sigma dv \quad (8.15)$$

$$dW_I = \bar{\kappa}^T M dv$$

d. (8.12) denkleminin her iki tarafının transpozesi alınarak

$$\{\bar{\epsilon}(x,y)\}^T = \{\bar{\alpha}_p\}^T [B_p(x,y)]^T \quad (8.16)$$

$$\{\bar{\kappa}(x,y)\}^T = \{\bar{\alpha}_s\}^T [B_s(x,y)]^T$$

elde edilir.

e. (8.16) ve (8.13) denklemleri (8.15) denkleminde yerine konularak ve notasyon basitliği için matris parantezleri ve (x,y) kaldırılarak

$$dW_I = \bar{\alpha}^T B^T D B \alpha dv \quad (8.17)$$

$$W_I = \int_V \bar{\alpha}^T B^T D B \alpha dv \quad (8.18)$$

elde edilir. $\bar{\alpha}$ ve α integrasyon değişkenlerinden bağımsız olduklarında

$$W_I = \bar{\alpha}^T \left[\int_V B^T D B dv \right] \alpha \quad (8.19)$$

$$W_I = \bar{\alpha}^T \tilde{\kappa}$$

Burada

$$\tilde{\kappa} = \int_V B^T D B dv \quad (8.20)$$

dir.

8. β genelleştirilmiş α koordinatlarına tekabül eden genelleştirilmiş kuvvetler olarak belirlenerek $\bar{\alpha}=\mathbf{I}$ virtüel deplasmanları boyunca yapılan dış virtüel iş

$$W_E = \bar{\alpha}^T \beta \quad (8.21)$$

dır.

9. Dış virtüel işin $\bar{W}_I$ virtüel işe eşit olaması gerektiğinden

$$W_E = W_I \quad (8.22)$$

olur. (8.21) ve (8.19) denklemleri kullanılarak

$$\bar{\alpha}^T \beta = \bar{\alpha}^T \tilde{k} \alpha \quad (8.23)$$

verilir fakat $\bar{\alpha}=\mathbf{I}$ iken bu

$$\beta = \tilde{k} \alpha \quad (8.24)$$

olarak basitleştirilebilir. Burada $\tilde{k}$ genelleştirilmiş β kuvvetleri ile genelleştirilmiş α koordinatlarını birbirine bağlayan bir eleman rijitlik matrisidir.

10. Lineer bağımsız α katsayılarının sayısı elemanın serbestlik derecesine eşit olduğunda, S_i düğüm noktası kuvvetleri ile V_i düğüm noktası deplasmanlarını bağlayan k eleman rijitlik matrisi şu şekilde elde edilebilir:

a. (8.11) denkleminde yalnız açıklığa gerek olan yerlerde parantezler kullanılarak

$$\alpha = [A^{-1}] V_i \quad (8.25)$$

elde edilir. A matrisi, tekil olmayan bir kare matris iken bu durum için tersi alınabilir.

b. A^{-1} matrisi α genelleştirilmiş koordinatları ile V_i genelleştirilmiş düğüm noktası deplasmanlarını bağlayan deplasman dönüşüm matrisini temsil eder ve β genelleştirilmiş kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S_i = [A^{-1}]^T \beta \quad (8.26)$$

c. (8.24), (8.25) ve (8.26) denklemleri birleştirilerek

$$S_i = [A^{-1}]^T \beta = [A^{-1}]^T k \alpha = [A^{-1}]^T k [A^{-1}] v_i \quad (8.27)$$

veya basit olarak

$$S_i = k v_i \quad (8.28)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$[k] = [A^{-1}]^T k [A^{-1}] \quad (8.29)$$

dir.

Bütün elemanlara ait k bilindiğinde yukarıdaki paragrafta anlatılanları verilen direkt rijitlik çözümü toplam sistemi analiz etmek için kullanılabilir. Dikdörtgen elemanlar için (8.20) denkleminin bulunuşunda ilgili olan gerekli integrasyon genellikle matematik formüller ile çıkarılabilir.

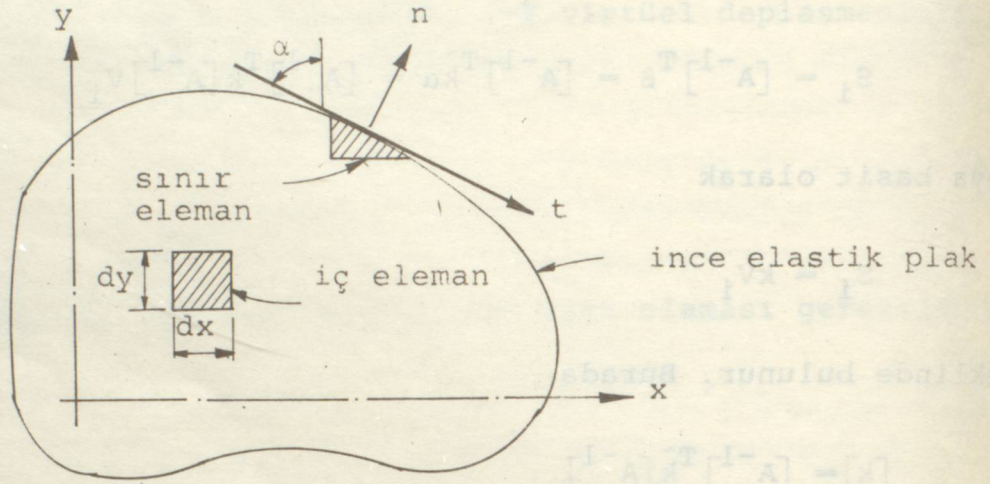
Abu Ghazaleh dikdörtgen elemanlara ait eleman rijitlikleri için geniş bir çalışma yapmıştır. O 5 farklı levha sonlu elemanı ve 2 farklı plak elemanının değerlerini kıyaslamıştır. Bunlar levha ve plak problemlerine uygulanmasıyla elde edilen neticelerin bilinen çözümler ile kıyaslanmasına dayanmaktadır. O kıyaslama için prizmatik katlanmış plak problemlerinin çözümü için birleştirmede çok doğru ve çok uygun olan bir levha sonlu elemanı ve bir plak sonlu elemanı seçmiştir. Bu sonuncu iki elemana ait rijitlik matrisleri diğer iki bölümde* Abu Ghazaleh'in açıklamasına dayanılarak detaylı olarak geliştirilecektir.

4, LEVHA TESİRLERİNE AİT ELEMAN RİJİTLİĞİ-DÜZLEM GERİLME ANALİZİ

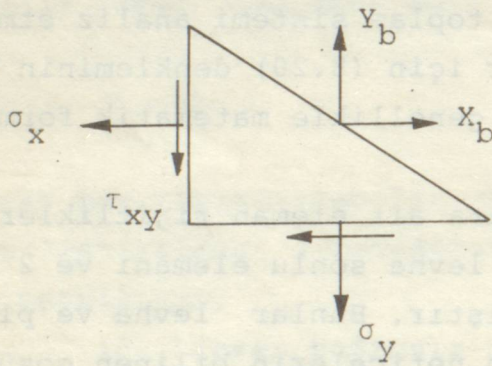
4.1. Düzlem gerilme problemlerine ait elastik denklemler:

Düzlem gerilme problemi için tam bir elastik çözüm aşağıda verilen şartlar altında tatminkâr olacaktır. Timoshenko ve Goodier' e dayanan standart notasyon, işaret kabulü ve koordinat eksenleri doğrultusu şekil 8.4 de gösterilmiştir.

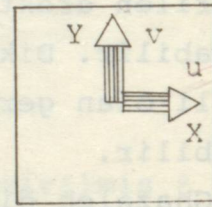
1. Denge denklemleri:



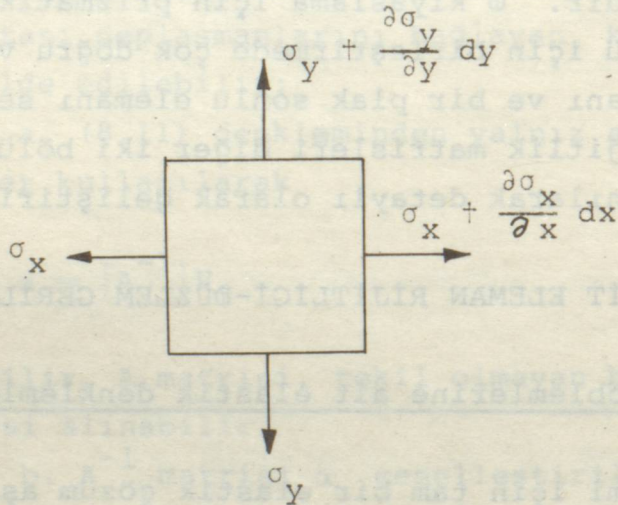
(a) Elastik cisim ve referans eksenleri



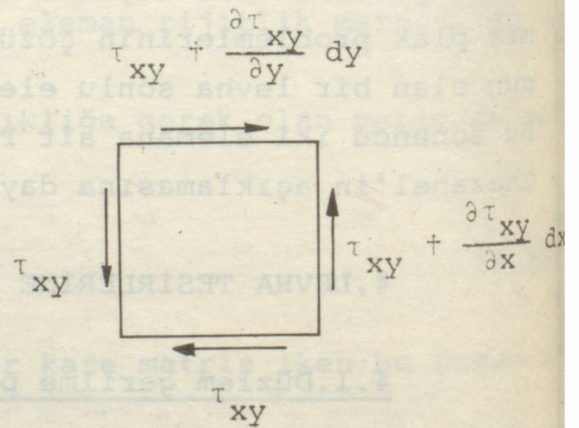
(b) sınır eleman



(c) dış kuvvetler ve deplasmanlar



(d) normal gerilmeler



(e) kayma gerilmeleri

Şekil 8.4 Koordinat eksenlerine ait pozitif doğrultular, dış yükler, Deplasmanlar ve iç kuvvetler

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (8.30 \text{ a})$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + Y = 0 \quad (8.30 \text{ b})$$

2. Gerilme-şekildeğiştirme bağıntısı:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \quad (8.31 \text{ a})$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \quad (8.31 \text{ b})$$

$$\gamma_{xy} = 2(1+\nu) \frac{1}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (8.31 \text{ c})$$

3. Uygunluk şartları:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.32 \text{ a})$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8.32 \text{ b})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8.32 \text{ c})$$

Bu denklemlerdeki u ve v yok edilerek

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (8.32 \text{ d})$$

verilir.

4. Sınır şartları:

a. Deplasmanlar

$$u \text{ (iç)} = \bar{u} \text{ (dış)} \quad (8.33 \text{ a})$$

$$v \text{ (iç)} = \bar{v} \text{ (dış)} \quad (8.33 \text{ b})$$

b. Kuvvetler

$$X_b = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \quad (8.34 \text{ a})$$

$$Y_b = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \quad (8.34 \text{ b})$$

(8.30)-(8.34) denklemlerini problemin bütün sahası üzerinde sağlayan çözüme, düzlem gerilme probleminde tam bir çözüm denilebilir. Ekseriya bu tam çözümü, düzensiz sınır şartlarının karmaşıklığı yüzünden birçok pratik problemler için elde etmek zordur.

4.2. Sonlu eleman model tipleri:

Sonlu eleman metodunda seçilen elemanların kat'i bir iç davranışı (8.30) ilâ (8.34) denklemleri ile belirlenen şartların bazılarını tatmin eder; Fakat hepsini değil. 3 tip sonlu elemanın ve şartlarının bu tatminkârlığı şu şekilde açıklanabilir:

1. Uygun eleman modeli tatminkârlıkları:

- a. İç uygunluk, denk. (8.32)
- b. Sınır (çevre) deplasmanların sürekliliği, denk. (8.33), eleman ve dış çevrelerin her ikisinde.
- c. Gerilme-şekildeğiştirme kanunu, denk. (8.31).

2. Dengeli eleman modeli tatminkârlığı:

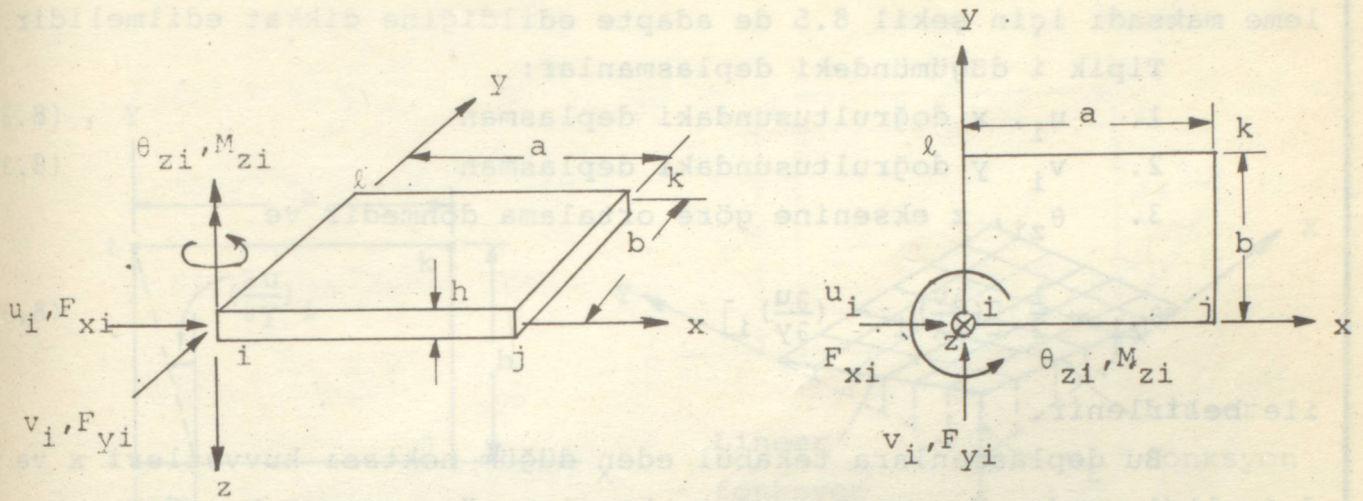
- a. İç dengeler, denk. (8.30)
- b. Kuvvetlerin sınır sürekliliği, denk. (8.34), eleman ve dış çevrelerin her ikisinde de.
- c. Gerilme-şekildeğiştirme kanunu, denk. (8.31).

3. (1) ve (2) nin dışında bazı özel şartları tatmin eden karışık model.

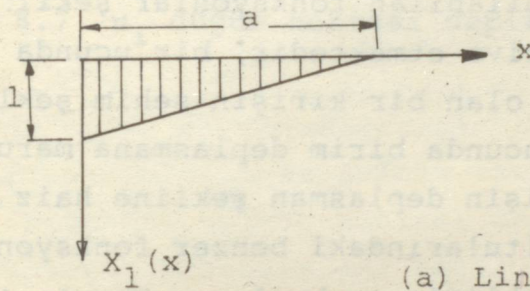
Genel olarak, incelemeciler uygunluk elemanlarının kullanılışına dayanan formülleri seçmişlerdir. Çünkü bunlar doğru neticeler vermişlerdir ve bunların karakteristikleri dengeli elemanlarınkinden daha kolay çıkarılır. Bazı zamanlar tam uygun elemanların gelişiminde keza bazı zorluklar ile karşılaşılır. Sekonder tesirlere haiz kat'i deplasman değerlerinin sona erdiği böyle durumlarda, eleman bitişik yüzlerinde mücade edilir ve iyi neticeler de meydana çıkarılır.

4.3. Düğüm noktası deplasmanları ve neticelenen deplasman bileşenleri:

Mevcut incelemede düzlem gerilme için bir sonlu eleman seçilmiştir. Burada fiziksel açıklama düğüm noktası deplasmanları ve eleman üzerinde neticelenen deplasmanları gözönüne getirmek için kullanılır. Düğüm noktaları dikdörtgen elemanın 4 köşesinde alınır ve her düğümün 3 serbestlik derecesi ihtiva ettiği kabul edilir (şekil 8.5).

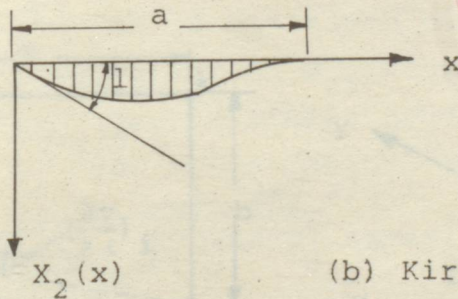


Şekil 8.5 Tipik bir düğüm noktasındaki deplasmanlar ve kuvvetlere ait notasyon ve pozitif doğrultular



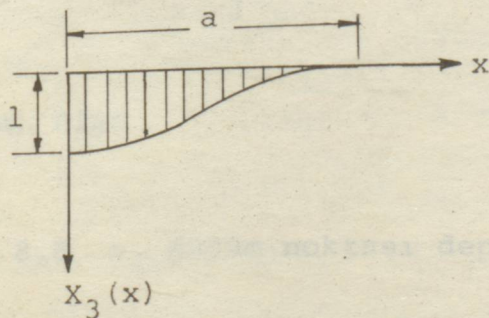
$$X_1(x) = \left(\frac{a-x}{a}\right)$$

(a) Lineer fonksiyon



$$X_2(x) = a \left[\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right) \right]$$

(b) Kiriş dönme fonksiyonu



$$X_3(x) = \left[2\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1 \right]$$

(c) Kiriş deplasman fonksiyonu

Şekil 8.6 Deplasman ve sönümlü fonksiyonlar

Şekil 8.2 de gösterilen farklı işaret kabulünün buradaki inceleme maksadı için şekil 8.5 de adapte edildiğine dikkat edilmelidir.

Tipik i düğümündeki deplasmanlar:

$$1. \quad u_i, \quad x \text{ doğrultusundaki deplasman} \quad (8.35 a)$$

$$2. \quad v_i \quad y \text{ doğrultusundaki deplasman} \quad (8.35 b)$$

$$3. \quad \theta_{zi}, \quad z \text{ eksenine göre ortalama dönmedir ve}$$

$$\theta_{zi} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i \right] \quad (8.35 c)$$

ile belirlenir.

Bu deplasmanlara tekabül eden düğüm noktası kuvvetleri x ve y doğrultularında, F_{xi} ve F_{yi} ve z eksenine göre moment M_{zi} dir.

Her düğüm noktası deplasmanından meydana gelen eleman yüzeyindeki deplasman bileşenleri, bir dikdörtgen elemanın bir kenarı boyunca bir ucunda maksimum ve diğer ucunda sıfır olan bir sönümlü fonksiyon ile belirlenebilir. Bu gaye için kullanılan fonksiyonlar şekil.8.6 da gösterilmiş olup lineer fonksiyon ihtiva etmektedir; bir ucunda birim dönmeye maruz ve öteki ucunda ankastre olan bir kirişin sehim şekline haiz bir kiriş dönme fonksiyonu; ve bir ucunda birim deplasmana maruz, ikinci ucu dönmeye karşı ankastre bir kirişin deplasman şekline haiz bir kiriş deplasman fonksiyonu. x ve y doğrultularındaki benzer fonksiyon takımları bütün 4 düğüm noktası için gereklidir ve bunların komple listesi aşağıda verilmiştir.

1. Lineer fonksiyonlar

$$X_1(x) = \left(\frac{a-x}{a} \right) \quad (8.36 a)$$

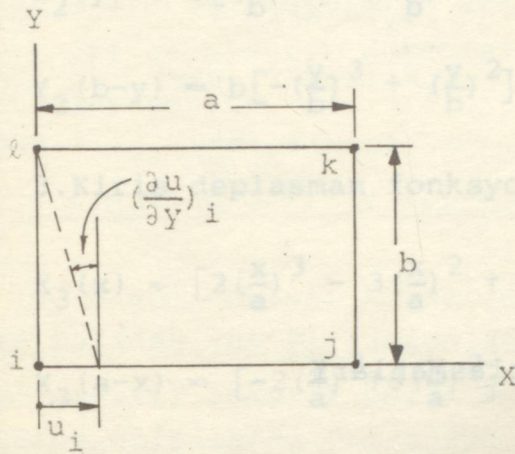
$$X_1(a-x) = \left(\frac{x}{a} \right) \quad (8.36 b)$$

$$Y_1(y) = \left(\frac{b-y}{b} \right) \quad (8.36 c)$$

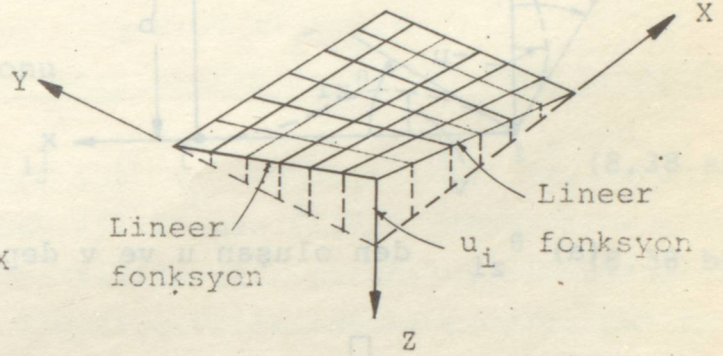
$$Y_1(b-y) = \left(\frac{y}{b} \right) \quad (8.36 d)$$

2.Kiriş dönme fonksiyonu

$$X_2(x) = a \left[\left(\frac{x}{a} \right)^3 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{x}{a} \right) \right] \quad (8.37)$$

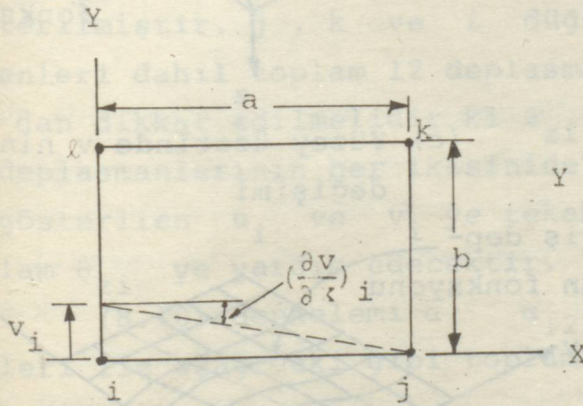


(a) Plan

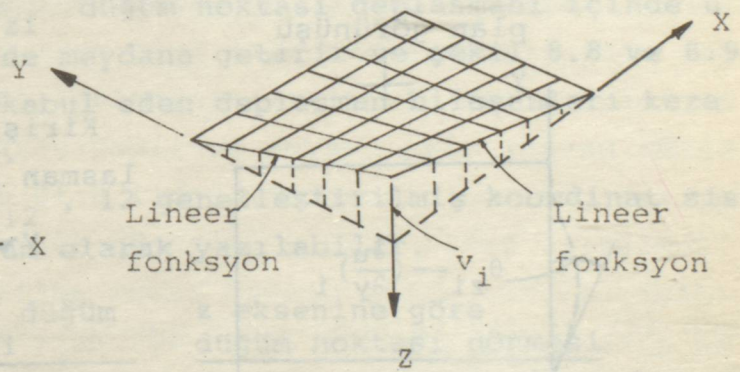


(b) Yüzey üzerinde u nun değişimi

Şekil 8.7 u_i düğüm noktası deplasmanına ait deplasman bileşeni

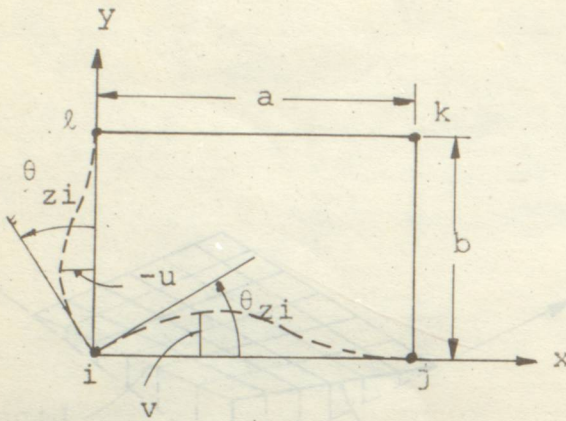


(a) Plan

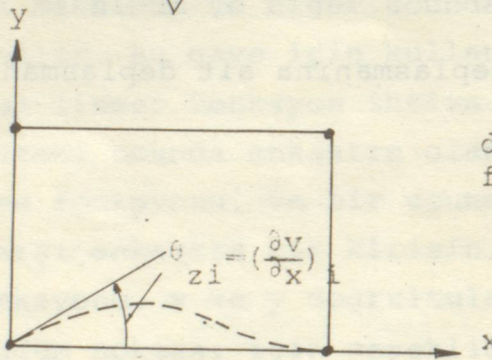
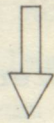


(b) Yüzey üzerinde v nin değişimi

Şekil 8.8 v_i düğüm noktası deplasmanına ait deplasman bileşeni

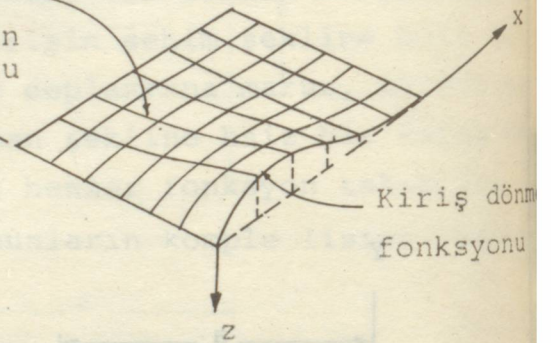


(a) θ_{zi} den oluşan u ve v deplasmanları

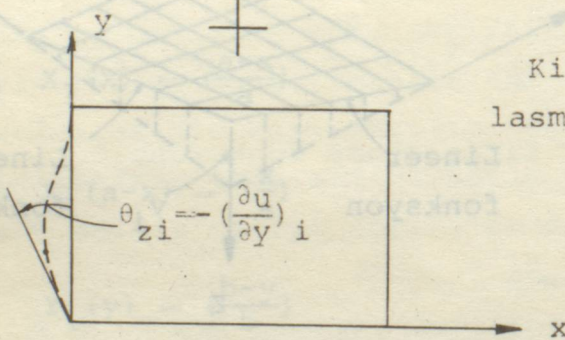


(b) v deplasmanlarının plan görünüşü

Kiriş
deplasman
fonksyonu

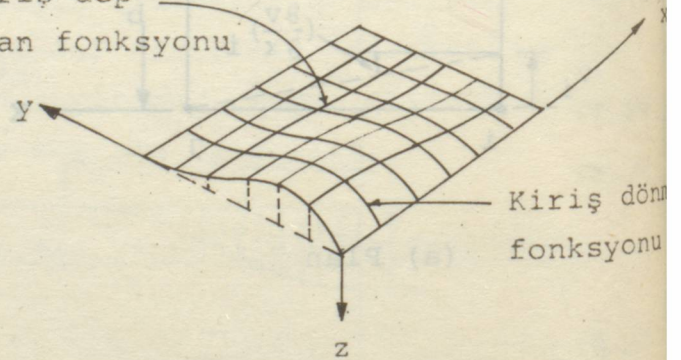


(c) Yüzey üzerinde v'nin değişimi



(d) u deplasmanının plan görünüşü

Kiriş dep-
lasman fonksyonu



(e) Yüzey üzerinde u'nun değişimi

Şekil 8.9 Düğüm noktası deplasmanlarına ait deplasman örnekleri

$$X_2(a-x) = a[-(\frac{x}{a})^3 + (\frac{x}{a})^2] \quad (8.37 \text{ b})$$

$$Y_2(y) = b[(\frac{y}{b})^3 - 2(\frac{y}{b})^2 + (\frac{y}{b})] \quad (8.37 \text{ c})$$

$$Y_2(b-y) = b[-(\frac{y}{b})^3 + (\frac{y}{b})^2] \quad (8.37 \text{ d})$$

3. Kiriş deplasman fonksyonu

$$X_3(x) = [2(\frac{x}{a})^3 - 3(\frac{x}{a})^2 + 1] \quad (8.38 \text{ a})$$

$$X_3(a-x) = [-2(\frac{x}{a})^3 + 3(\frac{x}{a})^2] \quad (8.38 \text{ b})$$

$$Y_3(y) = [2(\frac{y}{b})^3 - 3(\frac{y}{b})^2 + 1] \quad (8.38 \text{ c})$$

$$Y_3(b-y) = [-2(\frac{y}{b})^3 + 3(\frac{y}{b})^2] \quad (8.38 \text{ d})$$

Şimdi sonlu eleman rijitliğinin geliştirilmesinde ilk adım yukarıdaki fonksyonların deplasman terimlerindeki u ve v deplasmanlarını açıkça izah etmektir. Düğüm noktası deplasmanları için kabul edilen u_i , v_i ve θ_{zi} deplasman bileşenleri şekil 8.7 , 8.8 , 8.9 da grafik olarak gösterilmiştir. j , k ve l düğüm noktalarındaki benzer deplasman bileşenleri dahil toplam 12 deplasman bileşeni süperpoze edilir. Şekil 8.9 dan dikkat edilmelidir ki θ_{zi} düğüm noktası deplasmanı içinde u ve v deplasmanlarının her ikisinin de meydana getirir ve şekil 8.8 ve 8.9 da gösterilen u_i ve v_i ye tekabül eden deplasman bileşenleri keza toplam θ_{zi} ye yardım edecektir.

(8.10) denkelemi α_1 α_{12} , 12 genelleştirilmiş koordinat sistemleri ile aşağıdaki gibi toplam olarak yazılabilir.

<u>x doğrultusunda düğüm noktası hareketi</u>	<u>z eksenine göre düğüm noktası dönmesi</u>
$u(x,y) = \alpha_1 X_1(x) Y_1(y)$	$-\alpha_3 X_3(x) Y_2(y)$ i düğüm nok.
$+\alpha_4 X_1(a-x) Y_1(y)$	$-\alpha_6 X_3(a-x) Y_2(y)$ j düğüm nok.
$+\alpha_7 X_1(a-x) Y_1(b-y)$	$-\alpha_9 X_3(a-x) Y_2(b-y)$ k düğüm nok.
$+\alpha_{10} X_1(x) Y_1(b-y)$	$+\alpha_{12} X_3(x) Y_2(b-y)$ l düğüm nok.

(8.39)

y doğrultusunda dü-
ğüm noktası hareketi

z eksenine görü dü-
ğüm noktası dönmesi

$$v(x,y) = \alpha_2 X_1(x) Y_1(y)$$

$$+ \alpha_5 X_1(a-x) Y_1(y)$$

$$+ \alpha_8 X_1(a-x) Y_1(b-y)$$

$$+ \alpha_{11} X_1(x) Y_1(b-y)$$

$$+ \alpha_3 X_2(x) Y_3(y)$$

$$- \alpha_6 X_2(a-x) Y_3(y)$$

$$- \alpha_9 X_2(a-x) Y_3(b-y)$$

$$+ \alpha_{12} X_2(x) Y_3(b-y)$$

i düğüm nok.

j düğüm nok.

k düğüm nok.

l düğüm nok.

(8.40)

(8.36), (8.37) ve (8.38) denklemleri (8.40) denklemlerinde yerine konulduğu zaman, x, y terimlerindeki u ve v ve $\alpha_1 \sim \alpha_{12}$ genelleştirilmiş koordinatlar için bir polinomal ifade elde edilir. Mülâhaza, düğüm noktası deplasmanlarının uygun özelliklerine itibar edilerek yapılmalıdır ve sonlu eleman için uygun deplasman fonksyonu seçilir 4 bitişik elemanın birleştiği tipik bir düğüm noktası gözönüne alınır (şekil 8.10). γ_i kayma şekildeğiştirmesinin ve θ_{zi} düğüm noktası deplasmanının belirlenmeleri daha önce verilmişti.

$$\gamma_i = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i$$

(8.32 c)

$$\theta_{zi} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i \right]$$

(8.35 c)

Aşikârdır ki, θ_{zi} ortalama dönmesi, i düğüm noktasında birleşen dört elemanın her biri için aynı değere haiz olsa bile bitişik elemanların ortak kenarları arasında i düğüm noktasında birleşen elemanlarda mevcut olan kayma şekildeğiştirmesindeki fark ile orantılı bir açısal bozulma olacaktır. Şekil 8.10 da mümkün olabilecek 4 durum açıklanmıştır. Şekil 8.10 a da bütün dört elemandaki kayma bozulmasının (distorsiyon) sıfır olduğu kabul edilir. Bu durumda tam uygunluk meydana çıkarılır. Şekil 8.10 b de, dört elemanın hepsinde kayma bozulmasının aynı olduğu kabul edilir. Bu durumda tam uygunluk tekrar meydana çıkarılır. Şekil 8.10 c de bitişik elemanlarda ters işaretli eşit basit kayma distorsiyonları hasıl olduğu kabul edilir. Bu durum da 4 elemanın tümü için $\theta_{zi} = 0$ dır fakat bitişik elemanlar arasında açısal bozulmalar mevcut olacaktır. Son olarak şekil 8.10 d de, dört elemanda mevcut farklı kayma distorsiyonu artı dönmenin bulunduğu genel durumda θ_{zi} dört elemanın hepsinde aynı olsa bile açısal süreksizlikler hasıl olur.

Sayısal çalışmaların neticesinden bulunmuştur ki, bu açısal süreksizliklerin tesiri çok küçüktür ve mevcut açıklama için yukarıda seçilen elemanlar için küçük boyutlar için, diğer incelemeciler tarafından kullanılan, şekil 8.8 ve 8.9 da gösterilen her düğüm noktasında u_i ve v_i olmak üzere yalnız iki serbestlik derecesi ihtiva eden tam uygun eleman çok daha iyi neticeler verir.

4.4. Düzlem Gerilme (Levha) için Eleman Rijitliklerini Çıkarılma-

sl:

S_p düğüm noktası kuvvetleri ile v_p düğüm noktası deplasmanlarını bağlayan düzlem gerilmeye ait k_p eleman rijitlik matrisini çıkarmak için gerekli adımlar bölüm 3 te verilmişti (şekil 8.5). Levha problemleri için öngörölmüş (8.28), (8.29), (8.20) denklemlerini yeniden yazalım.

$$\{S_p\} = [k_p] \{v_p\} \quad (8.41)$$

$$12 \times 1 \quad 12 \times 12 \quad 12 \times 1$$

burada

$$k_p = [A_p^{-1}]^T \tilde{k}_p [A_p^{-1}] \quad (8.42)$$

ve

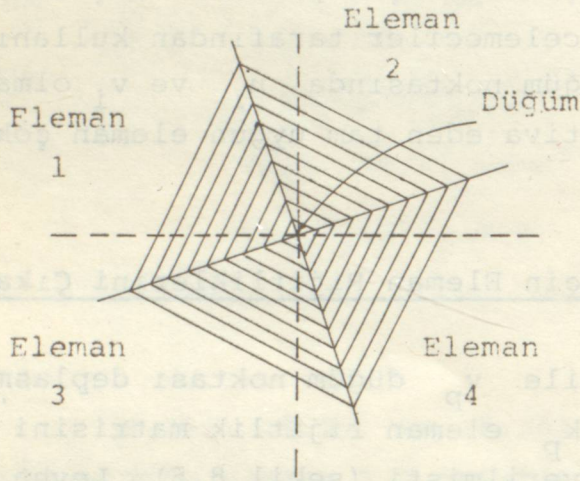
$$\tilde{k}_p = \int_V B_p^T D_p B_p dv \quad (8.43)$$

A_p matrisi V_p düğüm noktası deplasmanları ile α_p genelleştirilmiş koordinat eksenlerini bağlar.

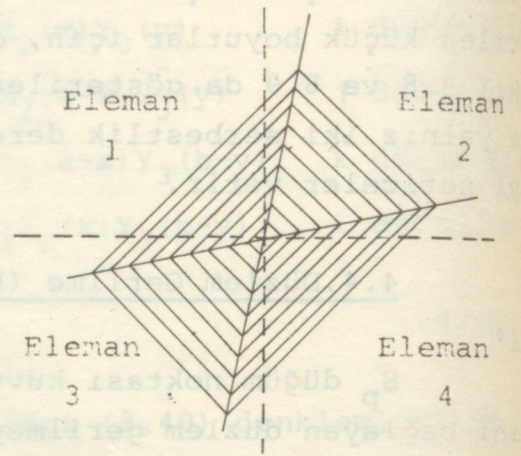
$$\{v_p\} = [A_p] \{\alpha_p\} \quad (8.44)$$

$$12 \times 1 \quad 12 \times 12 \quad 12 \times 1$$

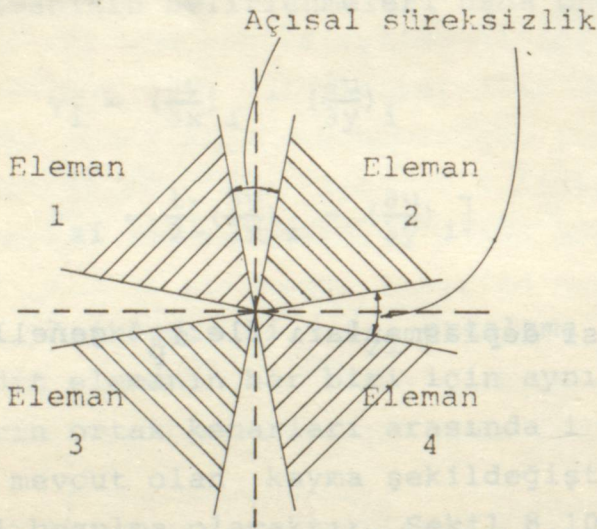
A_p matris elemanları düğüm noktası deplasmanlarının (8.35) denklemleri ve (8.39) ve (8.40) deplasman fonksiyonlarının belirlenmesinden bulunabilir. Düğüm noktası koordinatlarının uygun yerine konmaları ve diferansiyellerinin alınmasında aşağıdaki netice elde edilir.



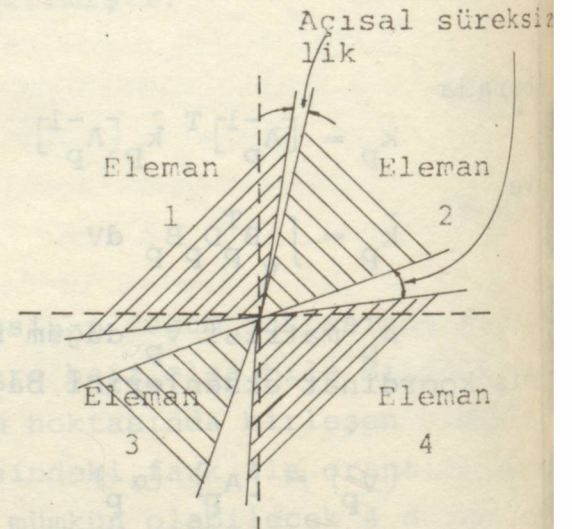
(a) Dört elemanda da kayma bozulması olmaksızın düğüm noktasındaki dönme



(b) Dört elemanın hepsinde de aynı açısız bozulma olan bir düğümde dönme



(c) Dört elemandaki ortalama dönmesi sıfır olan basit ve eşit ters işaretli kayma bozulmaları



(d) Dört elemanın hepsinde de farklı kayma bozulması olan düğümdeki dönme

Şekil 8.10 Tipik bir düğüm noktasında birleşen dört elemandaki dönmeler ve kayma bozulmaları

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ e_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ e_{zj} \\ u_k \\ v_k \\ e_{zk} \\ u_l \\ v_l \\ e_{zl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & \frac{-1}{2a} & 1 & 0 & \frac{1}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2a} & 0 & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2a} & 1 & \frac{-1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & \frac{-1}{2b} & \frac{1}{2a} & 1 & 0 & \frac{-1}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2a} & 0 & \frac{-1}{2b} & \frac{-1}{2a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}$$

(8.44 a)

(8.43) denklemindeki B_p matrisi e iç şekildeğiştirmeler ile genişletirilmiş koordinatları bağlar.

$$\begin{matrix} \{e(x,y)\} & = & [B_p(x,y)] \{a_p\} \\ 3 \times 1 & & 3 \times 12 \quad 12 \times 1 \end{matrix} \quad (8.45)$$

B_p matrisinin elemanları (8.40) ve (8.39) denklemlerinin uygun feransiyeli ve (8.32) denkleminde dikkat edilerek elde edilebilir.

$$\{e(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (8.45 a)$$

Bu diferansiyeller yerine getirilerek 3x12 elemanlı B_p matrisi için aşağıdaki neticeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
 B_p(1,1) &= X_1'(x)Y_1(y) & B_p(2,7) &= 0 \\
 B_p(1,2) &= 0 & B_p(2,8) &= X_1(a-x)Y_1'(b-y) \\
 B_p(1,3) &= -X_1'(x)Y_2(y) & B_p(2,9) &= -X_2(a-x)Y_3'(b-y) \\
 B_p(1,4) &= X_1'(a-x)Y_1(y) & B_p(2,10) &= 0 \\
 B_p(1,5) &= 0 & B_p(2,11) &= X_1(x)Y_1'(b-y) \\
 B_p(1,6) &= -X_1'(a-x)Y_2(y) & B_p(2,12) &= X_2(x)Y_3'(b-y) \\
 B_p(1,7) &= X_1'(a-x)Y_1(b-y) & B_p(3,1) &= X_1(x)Y_1'(y) \\
 B_p(1,8) &= 0 & B_p(3,2) &= X_1'(x)Y_1(y) \\
 B_p(1,9) &= X_3'(a-x)Y_2(b-y) & B_p(3,3) &= -X_3(x)Y_2'(y) + X_2'(x)Y_3(y) \\
 B_p(1,10) &= X_1'(x)Y_1(b-y) & B_p(3,4) &= X_1(a-x)Y_1'(y) \\
 B_p(1,11) &= 0 & B_p(3,5) &= X_1'(a-x)Y_1(y) \\
 B_p(1,12) &= X_3'(x)Y_2(b-y) & B_p(3,6) &= -X_3(a-x)Y_2'(y) - X_2'(a-x)Y_3(y) \\
 B_p(2,1) &= 0 & B_p(3,7) &= X_1(a-x)Y_1'(b-y) \\
 B_p(2,2) &= X_1(x)Y_1'(y) & B_p(3,8) &= X_1'(a-x)Y_1(b-y) \\
 B_p(2,3) &= X_2(x)Y_3'(y) & B_p(3,9) &= X_3(a-x)Y_2'(b-y) - X_2'(a-x)Y_3(b-y) \\
 B_p(2,4) &= 0 & B_p(3,10) &= X_1(x)Y_1'(b-y) \\
 B_p(2,5) &= X_1(a-x)Y_1'(y) & B_p(3,11) &= X_1'(x)Y_1(b-x) \\
 B_p(2,6) &= -X_2(a-x)Y_3'(y) & B_p(3,12) &= X_3(x)Y_2'(b-y) + X_2'(x)Y_3(b-y)
 \end{aligned}$$

İç gerilmeler, iç şekil değiştirme terimleriyle D_p matrisi şeklinde ifade edilebilir.

$$\left\{ \sigma_x(x,y) \right\}_{3 \times 1} = [D_p]_{3 \times 3} \left\{ \epsilon(x,y) \right\}_{3 \times 1} \quad (8.46)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^h \\ \sigma_y^h \\ \tau_{xy}^h \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.46 a)$$

Burada h plak kalınlığıdır.

(8.44), (8.45) ve (8.46) denklemlerinde belirlenen A_p , B_p ve D_p matrisleri elemanları ile şimdi (8.41) denklemindeki k_p eleman rijitlik matrisi belirlenebilir.

$$k_p = [A_p^{-1}]^T \left[\int_0^b \int_0^a B_p^T D_p B_p dx dy \right] [A_p^{-1}] \quad (8.47)$$

ve

$$\{S_p\} = [k_p] \{V_p\} - \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \right) [KP] \{V_p\} \quad (8.48)$$

Burada KP 12x12 boyutlu katsayılar matrisidir ve (8.47) de gösterilen matris çarpımları ve integrasyonları ile elde edilir. (8.48) denklemindeki düğüm noktası kuvvetleri ve onlara tekabül eden deplasmanlar aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \\ M_{zk} \\ F_{xl} \\ F_{yl} \\ M_{zl} \end{Bmatrix} = \left(\frac{Eh}{1-\nu} \right) \begin{bmatrix} \text{12 x 12 KP matrisi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \\ u_k \\ v_k \\ \theta_{zk} \\ u_l \\ v_l \\ \theta_{zl} \end{Bmatrix} \quad (8.48 a)$$

Simetrik KP matrisinin elemanlarına ait ifadeler şekil 8.5 de verilen notasyon ve işaret kabulü kullanılarak (8.47) denklemi ile çıkarılmış ve aşağıda verilmiştir:

$$KP(1,1) = \frac{123}{350} \times \frac{b}{a} + \frac{41}{175} \times \frac{a}{b} (1-\nu)$$

$$KP(1,2) = \frac{9}{80} + \frac{11}{80} \nu$$

$$KP(1,3) = -\frac{9}{175} \frac{b^2}{a} - \frac{393}{8400} a + \frac{743}{8400} va$$

$$KP(1,4) = -\frac{123}{350} \frac{b}{a} + \frac{57}{1400} \frac{a}{b} (1-v)$$

$$KP(1,5) = -\frac{9}{80} + \frac{29}{80} v$$

$$KP(1,6) = \frac{9}{175} \frac{b^2}{a} + \frac{183}{8400} a - \frac{533}{8400} va$$

$$KP(1,7) = -\frac{26}{175} \frac{b}{a} - \frac{57}{1400} \frac{a}{b} (1-v)$$

$$KP(1,8) = -KP(1,2)$$

$$KP(1,9) = -\frac{67}{2100} \frac{b^2}{a} + \frac{183}{8400} a + \frac{167}{8400} va$$

$$KP(1,10) = \frac{26}{175} \frac{b}{a} - \frac{41}{175} \frac{a}{b} (1-v)$$

$$KP(1,11) = -KP(1,5)$$

$$KP(1,12) = \frac{67}{2100} \frac{b^2}{a} - \frac{393}{8400} a + \frac{43}{8400} va$$

$$KP(2,2) = \frac{123}{350} \frac{a}{b} + \frac{41}{175} \frac{b}{a} (1-v)$$

$$KP(2,3) = \frac{9}{175} \frac{a^2}{b} + \frac{393}{8400} b - \frac{743}{8400} vb$$

$$KP(2,4) = -KP(1,5)$$

$$KP(2,5) = \frac{26}{175} \frac{a}{b} - \frac{41}{175} \frac{b}{a} (1-v)$$

$$KP(2,6) = -\frac{67}{2100} \frac{a^2}{b} + \frac{393}{8400} b - \frac{43}{8400} vb$$

$$KP(2,7) = KP(1,8)$$

$$KP(2,8) = -\frac{26}{175} \frac{a}{b} - \frac{57}{1400} \frac{b}{a} (1-v)$$

$$KP(2,9) = \frac{67}{2100} \frac{a^2}{b} - \frac{183}{8400} b - \frac{167}{8400} vb$$

$$KP(2,10) = KP(1,5)$$

$$KP(2,11) = -\frac{123}{350} \frac{a}{b} + \frac{57}{1400} \frac{b}{a} (1-v)$$

$$KP(2,12) = -\frac{9}{175} \frac{a^2}{b} - \frac{183}{8400} b + \frac{533}{8400} vb$$

$$KP(3,3) = -\frac{2}{175} \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \right) + \frac{83}{2100} ab - \frac{5}{84} vab$$

$$KP(3,4) = KP(6,1)$$

$$KP(3,5) = -KP(2,6)$$

$$KP(3,6) = -\frac{2}{175} \frac{b^3}{a} - \frac{3}{350} \frac{a^3}{b} + \frac{13}{1050} ab + \frac{8}{1050} vab$$

$$KP(3,7) = -KP(1,9)$$

$$KP(3,8) = -KP(2,9)$$

$$KP(3,9) = \frac{3}{350} \left(\frac{b^3}{a} + \frac{a^3}{b} \right) - \frac{1}{70} ab - \frac{6}{1050} vab$$

$$KP(3,10) = -KP(1,12)$$

$$KP(3,11) = KP(2,12)$$

$$KP(3,12) = -\frac{3}{350} \frac{b^3}{a} - \frac{2}{175} \frac{a^3}{b} + \frac{13}{1050} ab + \frac{8}{1050} vab$$

$$KP(4,4) = KP(1,1) \quad KP(5,11) = KP(2,8) \quad KP(8,8) = KP(2,2)$$

$$KP(4,5) = -KP(1,2) \quad KP(5,12) = KP(3,8) \quad KP(8,9) = KP(5,6)$$

$$KP(4,6) = KP(1,3) \quad KP(6,6) = KP(3,3) \quad KP(8,10) = KP(2,4)$$

$$KP(4,7) = KP(1,10) \quad KP(6,7) = KP(3,10) \quad KP(8,11) = KP(2,5)$$

$$KP(4,8) = KP(1,5) \quad KP(6,8) = -KP(2,12) \quad KP(8,12) = KP(3,5)$$

$$KP(4,9) = KP(1,12) \quad KP(6,9) = KP(3,12) \quad KP(9,9) = KP(3,3)$$

$$KP(4,10) = KP(1,7) \quad KP(6,10) = KP(3,7) \quad KP(9,10) = -KP(3,4)$$

$$KP(4,11) = KP(1,2) \quad KP(6,11) = KP(2,9) \quad KP(9,11) = KP(2,6)$$

$$KP(4,12) = KP(1,9) \quad KP(6,12) = KP(3,9) \quad KP(9,12) = KP(3,6)$$

$$KP(5,5) = KP(2,2) \quad KP(7,7) = KP(1,1) \quad KP(10,10) = KP(1,1)$$

$$KP(5,6) = -KP(2,3) \quad KP(7,8) = KP(1,2) \quad KP(10,11) = -KP(1,2)$$

$$KP(5,7) = KP(2,4) \quad KP(7,9) = -KP(1,3) \quad KP(10,12) = -KP(1,3)$$

$$KP(5,8) = KP(2,11) \quad KP(7,10) = KP(1,4) \quad KP(11,11) = KP(2,2)$$

$$KP(5,9) = -KP(2,12) \quad KP(7,11) = KP(1,5) \quad KP(11,12) = KP(2,3)$$

$$KP(5,10) = KP(1,2) \quad KP(7,12) = -KP(1,6) \quad KP(12,12) = KP(3,3)$$

KP için yukarıda çıkarılan ifadelerde bir kontrol yapıldığında
er düğüm noktası deplasmanının birim değeri ile meydana gelen ΣM_x ,

ΣM_y ve ΣF_z düğüm noktası kuvvetleri alınarak eleman üzerinde denge kontrolleri yapmak için bunlar (8.48 a) denklemi ile beraber kullanılır.

5. PLAK TESİRLERİNE AİT ELEMAN RİJİTLİK MATRİSİ - PLAK EĞİLME ANALİZİ

5.1 Plak Eğilme Problemine Ait Elastik Denklemler:

Plak eğilme problemi için tam bir çözüm ince plak teorisine dayanan aşağıdaki tatminkâr denklemler ile verilir. Timoshenko ve Woinowsky-Krieger'e dayanan standart notasyon, işaret kabulü ve eksen doğrultuları şekil 8.11 de gösterilmiştir.

1. Denge gereği:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (8.49 a)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \quad (8.49 b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + Z = 0 \quad (8.49 c)$$

2. Deplasman -eğrilik şartları:

$$\kappa_x = \frac{1}{\rho_x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8.50 a)$$

$$\kappa_y = \frac{1}{\rho_y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (8.50 b)$$

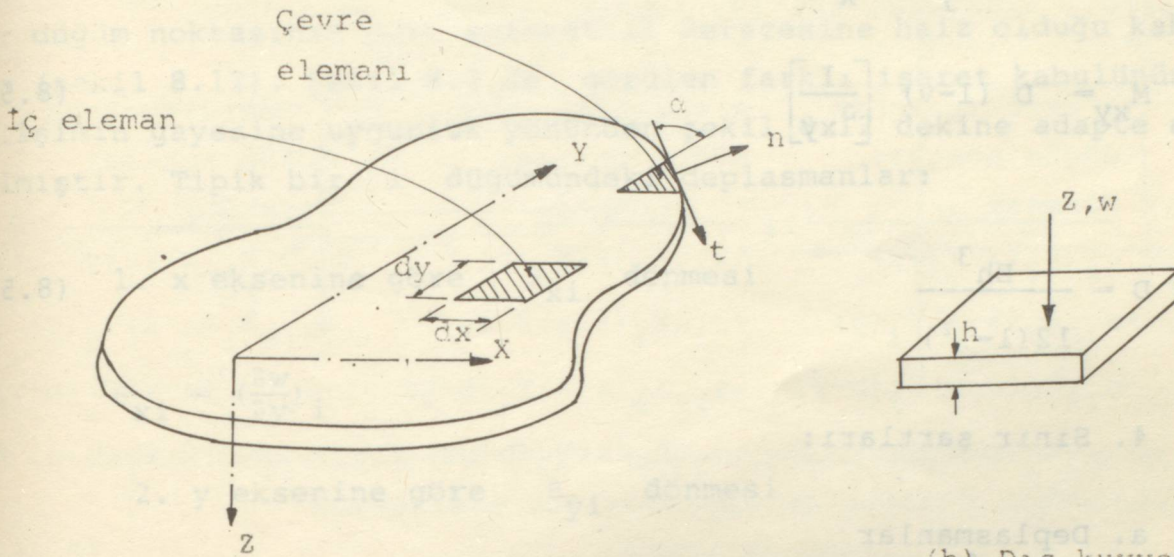
$$\kappa_{xy} = \frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.50 c)$$

ve ayrıca

$$\frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial y^2} - \frac{2 \partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial x^2} = 0 \quad (8.50 d)$$

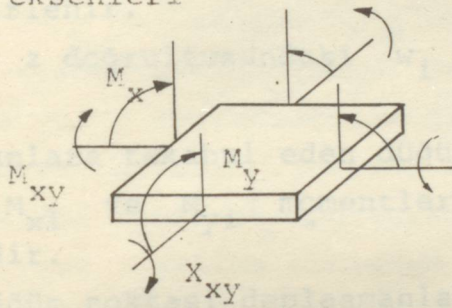
3. Moment -eğrilik bağıntıları:

$$M_x = D \left[\frac{1}{\rho_x} + \frac{\nu}{\rho_y} \right] \quad (8.51 a)$$

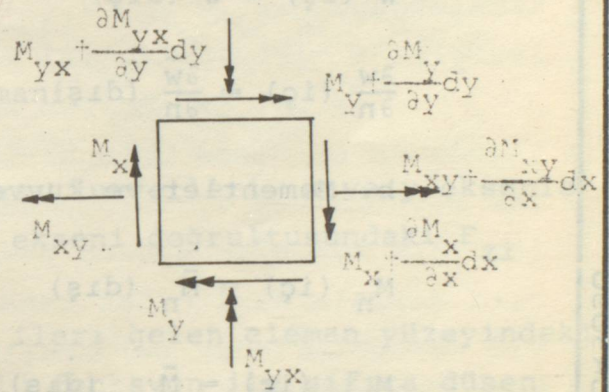


(a) Elastik plak ve referans eksenleri

(b) Dış kuvvet ve plaka dik deplasman



(c) Torsiyon ve eğilme momentleri



(d) Enine kesme kuvvetleri

Şekil 8.11 Koordinat eksenleri, dış kuvvetler, deplasmanlar ve iç moment ve kuvvetlere ait pozitif doğrultular

$$M_y = D \left[\frac{1}{\rho_y} + \frac{\nu}{\rho_x} \right] \quad (8.51 b)$$

$$M_{xy} = D (1-\nu) \left[\frac{1}{\rho_{xy}} \right] \quad (8.51 c)$$

Burada

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8.51 d)$$

4. Sınır şartları:

a. Deplasmanlar

$$w \text{ (iç)} = \bar{w} \text{ (dış)} \quad (8.52 a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} \text{ (iç)} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \text{ (dış)} \quad (8.52 b)$$

b. Momentler ve kuvvetler

$$M_n \text{ (iç)} = \bar{M}_n \text{ (dış)} \quad (8.53 a)$$

$$M_{nt} \text{ (iç)} = \bar{M}_{nt} \text{ (dış)} \quad (8.53 b)$$

$$Q_n \text{ (iç)} = \bar{Q}_n \text{ (dış)} \quad (8.53 c)$$

(8.53) denklemleri ile ifade edilen üç şart Kirchhoff bağıntısı kullanılarak iki yeterli şarta düşürülür.

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \quad (8.53 d)$$

Problemin bütün sahası üzerinde (8.49) ilâ (8.53) denklemlerini sağlayan bir çözüm klasik ince plak teorisinin kabulündeki bir tam çözümde ifade edilebilir.

5.2 Düğüm Noktası Deplasmanları ve Neticelenen Deplasman Bileşenleri:

Plak eğilmesi için, uygun eleman modeli özelliklerini haiz kapalı bir eleman seçilmiştir (bak. bölüm 4.2).

Düğüm noktaları dikdörtgen elemanın dört köşesinde alınır ve her düğüm noktasının dört serbestlik derecesine haiz olduğu kabul edilir (şekil 8.12). Şekil 8.2 de görülen farklı işaret kabulünün, mevcut gelişimin gayesine uygunluk yönünden şekil 8.12 dekine adapte edilmiştir. Tipik bir i düğümündeki deplasmanlar:

1. x eksenine göre θ_{xi} dönmesi

$$\theta_{xi} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \quad (8.54 \text{ a})$$

2. y eksenine göre θ_{yi} dönmesi

$$\theta_{yi} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad (8.54 \text{ b})$$

olarak belirlenir.

3. z doğrultusundaki w_i deplasmanı

Bunlara tekabül eden düğüm noktası kuvvetleri x ve y eksenlerine göre M_{xi} ve M_{yi} momentleri ve z eksenine doğrultusundaki F_{zi} kuvvetleridir.

Düğüm noktası deplasmanlarından ileri gelen eleman yüzeyindeki deplasman bileşeni, uzak kenarında sönümlü fonksiyon ile sifıra düşen bir dikdörtgen elemanın bir kenarı boyunca bir fonksiyon ile belirlenen bir değişim kabulünden meydana gelebilir. Kullanılan fonksiyonlar levha tesirine ait rijitlik matrislerinin gelişiminde kullanılanlar ile aynıdır. Bunlar (8.36), (8.37) ve (8.38) denklemlerinde verilmiş ve şekil 8.6 da gösterilmiştir.

Sonlu elemanın rijitlik matrisinin geliştirilmesinde ilk adım yukarıda sözü edilen deplasman fonksiyon terimlerinde w_i deplasmanları ifade edilerek atılır. Düğüm noktası deplasmanları için kabul edilen θ_{xi} , θ_{yi} ve w_i deplasman bileşenleri şekil 8.13, 8.14 ve 8.15 de grafik olarak gösterilmiştir. j , k ve l düğüm noktaları için benzer deplasman bileşenleri söz konusudur ve bunların süperpozisyonundan toplam 12 deplasman bileşeni verilir. Şekil 8.15 de görülen w_i ye tekabül eden deplasman bileşeninin basit burulma bileşeni olduğuna ve θ_{xi} ve θ_{yi} deplasmanları toplamına yardım edeceğine dikkat edilmelidir.

Şimdi (8.10) denklemi α_{13} ilâ α_{24} genelleştirilmiş koordinat terimleriyle aşağıdaki şekilde toplam olarak yazılabilir.

y eksenine göre düğüm noktası dönmesi	x eksenine göre düğüm noktası dönmesi	z doğrultusunda düğüm noktası hareketi
$w(x,y) = \alpha_{13} X_2(x) Y_3(y)$	$+ \alpha_{14} X_3(x) Y_2(y)$	$+ \alpha_{15} X_1(x) Y_1(y)$ i D.N
$- \alpha_{16} X_2(a-x) Y_3(y)$	$+ \alpha_{17} X_3(a-x) Y_2(y)$	$+ \alpha_{18} X_1(a-x) Y_1(y)$ j D.N
$- \alpha_{19} X_2(a-x) Y_3(b-y)$	$- \alpha_{20} X_3(a-x) Y_2(b-y)$	$+ \alpha_{21} X_1(a-x) Y_1(b-y)$ k D.N
$+ \alpha_{22} X_2(x) Y_3(b-y)$	$- \alpha_{23} X_3(x) Y_2(b-y)$	$+ \alpha_{24} X_1(x) Y_1(b-y)$ l D.N

(8.55)

(8.36) , (8.37) ve (2.38) denklemleri (8.55) denkleminde yerine konulduğunda x , y ve α_{13} ilâ α_{24} genelleştirilmiş koordinat terimleriyle w için polinomal bir ifade elde edilir.

(8.55) de seçilen deplasman fonksiyonunun, kenara paralel deplasman ve eğimlere uyan bitişik elemanlar arasında bütün ortak kenarlar boyunca tam uygunluğu sağladığı görülür. Mamafih, kenara dik eğimler için uygunluk sadece düğüm noktalarında ve düğüm noktaları arasında orta noktalardaki ortak kenarlarda muhafaza edilir. Sayısal çalışmaların neticelerinden bulunmuştur ki bu süreksizliğin tesiri küçüktür ve doğru neticeler plak problemlerinde makûl ağ gözü kullanılarak elde edilir.

5.3 Plak Eğilmesine Ait Eleman Rijitliğinin Çıkarılışı:

b Düğüm noktası kuvvetleri ile düğüm noktası deplasmanlarını bağlayan, eğilme rijitliğine ait k_s eleman rijitlik matrisini çıkarmak için gerekli adımlar 3 bölümünde verilmişti. (8.28), (8.29) ve (8.20) denklemleri gözönüne alınarak ve plak eğilme problemi için yeniden yazılarak

$$\{S_s\} = [k_s] \{v_s\} \quad (8.56)$$

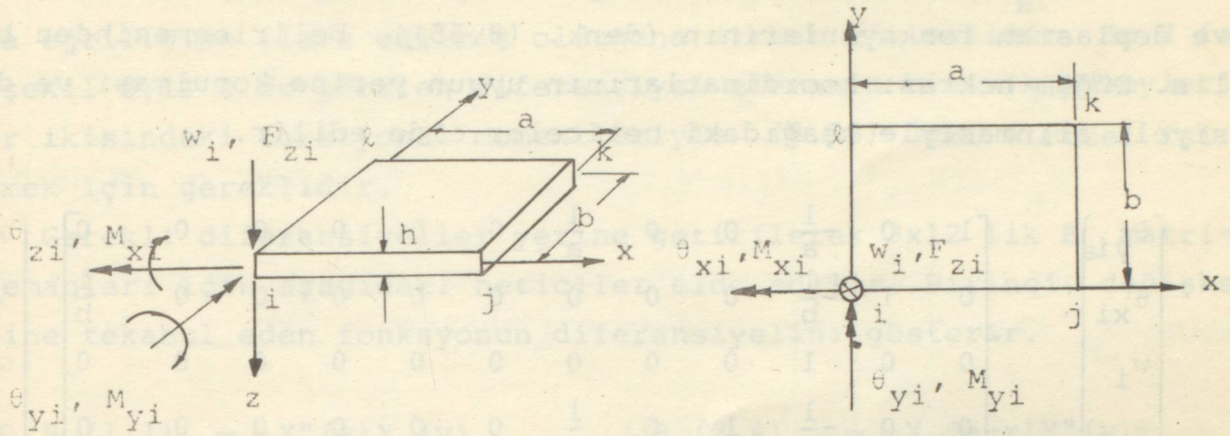
$$12 \times 1 \quad 12 \times 12 \quad 12 \times 1$$

burada

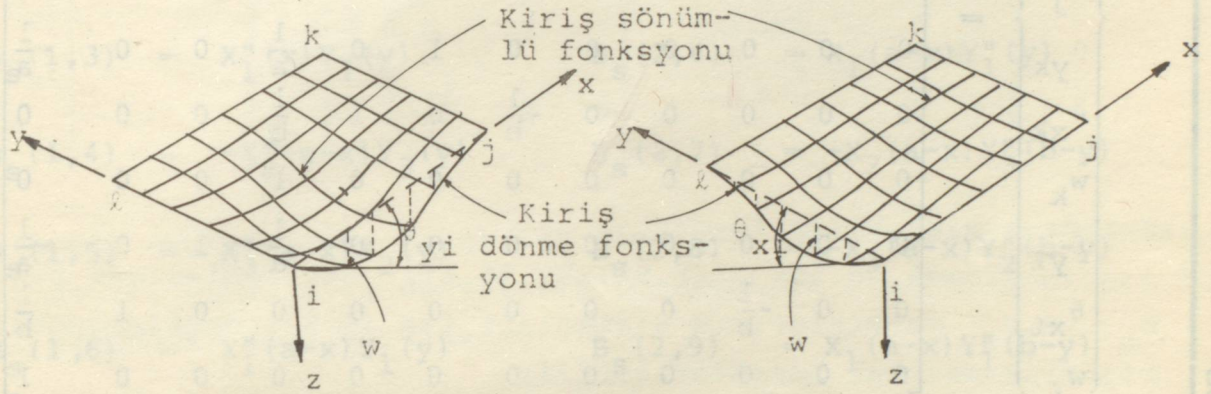
$$k_s = [A_s^{-1}]^T \tilde{k}_s [A_s^{-1}] \quad (8.57)$$

ve

$$\tilde{k}_s = \int_v B_s^T D_s B_s dv \quad (8.58)$$

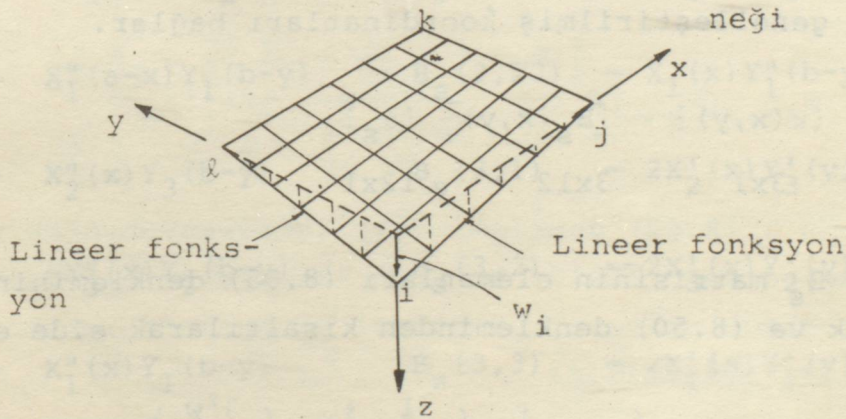


Şekil 8.12 Tipik bir düğüm noktasındaki deplasmanlar ve kuvvetlere ait notasyon ve pozitif doğrultular



Şekil 8.13 θ_{yi} düğüm noktası deplasmanına ait deplasman örneği

Şekil 8.14 θ_{xi} düğüm noktası deplasmanına ait deplasman örneği



Şekil 8.15 w_i düğüm noktası deplasmanına ait deplasman örneği

A_s matris elemanları düğüm noktası deplasmanlarının (denk. (8.5) ve deplasman fonksiyonlarının (denk. (8.55)) belirlenmesinden bulunabilir. Düğüm noktası koordinatlarının uygun yerine konulması ve diferansiyeli alınmasıyla aşağıdaki neticeler elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \theta_{yi} \\ \theta_{xi} \\ w_i \\ \theta_{yj} \\ \theta_{xj} \\ w_j \\ \theta_{yk} \\ \theta_{xk} \\ w_k \\ \theta_{yl} \\ \theta_{xl} \\ w_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 1 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 1 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{14} \\ \alpha_{15} \\ \alpha_{16} \\ \alpha_{17} \\ \alpha_{18} \\ \alpha_{19} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{24} \end{Bmatrix}$$

(8.59a)

(8.58) denklemindeki B_s matrisi, elemanlardaki κ iç eğrilikler ile α_s genelleştirilmiş koordinatları bağlar.

$$\begin{matrix} \{ \kappa(x,y) \} & = & [B_s(x,y)] & \{ \alpha_s \} \\ 3 \times 1 & & 3 \times 12 & 12 \times 1 \end{matrix} \quad (8.60)$$

B_s matrisinin elemanları (8.55) denkleminin uygun diferansiyeli alınarak ve (8.50) denkleminin kısaltılarak elde edilebilir.

$$\{ \kappa(x,y) \} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{c_x} \\ \frac{1}{c_y} \\ \frac{2}{c_{xy}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.60a)$$

Yukarıda sözü edilen genelleştirilmiş eğriliklerde 2 fatörün urulma eğriliğine ilave edilmiş olduğuna dikkat edilmelidir. Bu 2 fak- örü, şekil 8.11 c de görülen diferansiyel elemanın bitisik yüzeyleri- in her ikisindeki torsiyonel momentleriyle (8.58) deki virtüel işi i- ah etmek için gereklidir.

Gerekli diferansiyeller yerine getirilerek 3×12 lik B_s matrisi- in elemanları için aşağıdaki neticiler elde edilir. Birinci, değişkenin endisine tekabül eden fonksiyonun diferansiyelini gösterir.

$$\begin{array}{ll}
 B_s(1,1) = X_2''(x)Y_3(y) & B_s(2,4) = -X_2(a-x)Y_3''(y) \\
 B_s(1,2) = X_3''(x)Y_2(y) & B_s(2,5) = X_3(a-x)Y_2''(y) \\
 B_s(1,3) = X_1''(x)Y_1(y) & B_s(2,6) = X_1(a-x)Y_1''(y) \\
 B_s(1,4) = -X_2''(a-x)Y_3(y) & B_s(2,7) = -X_2(a-x)Y_3''(b-y) \\
 B_s(1,5) = X_3''(a-x)Y_2(y) & B_s(2,8) = -X_3(a-x)Y_2''(b-y) \\
 B_s(1,6) = X_1''(a-x)Y_1(y) & B_s(2,9) = X_1(a-x)Y_1''(b-y) \\
 B_s(1,7) = -X_2''(a-x)Y_3(b-y) & B_s(2,10) = X_2(x)Y_3''(b-y) \\
 B_s(1,8) = -X_3''(a-x)Y_2(b-y) & B_s(2,11) = -X_3(x)Y_2''(b-y) \\
 B_s(1,9) = X_1''(a-x)Y_1(b-y) & B_s(2,12) = X_1(x)Y_1''(b-y) \\
 B_s(1,10) = X_2''(x)Y_3(b-y) & B_s(3,1) = 2X_2'(x)Y_3'(y) \\
 B_s(1,11) = -X_3''(x)Y_2(b-y) & B_s(3,2) = -2X_3'(x)Y_2'(y) \\
 B_s(1,12) = X_1''(x)Y_1(b-y) & B_s(3,3) = 2X_1'(x)Y_1'(y) \\
 B_s(2,1) = X_2(x)Y_3''(y) & B_s(3,4) = -2X_2'(a-x)Y_3'(y) \\
 B_s(2,2) = X_3(x)Y_2''(y) & B_s(3,5) = 2X_3'(a-x)Y_2'(y) \\
 B_s(2,3) = X_1(x)Y_1''(y) & B_s(3,6) = 2X_1'(a-x)Y_1'(y)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
B_s(3,7) &= -2X_2'(a-x)Y_3'(b-y) & B_s(3,10) &= 2X_2'(x)Y_3'(b-y) \\
B_s(3,8) &= -2X_3'(a-x)Y_2'(b-y) & B_s(3,11) &= -2X_3'(x)Y_2'(b-y) \\
B_s(3,9) &= 2X_1'(a-x)Y_1'(b-y) & B_s(3,12) &= 2X_1'(x)Y_1'(b-y)
\end{aligned}$$

İç gerilme ve torsiyon momentleri eğrilik ve burulma terimleri ile D_s matrisi şeklinde ifade edilebilir.

$$\{M(x,y)\} = [D_s] \{\kappa(x,y)\} \quad (8.61)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.61a)$$

Burada h plak kalınlığıdır.

Şimdi (8.59) , (8.60) ve (8.61) denklemlerinde belirlenen A_s , B_s ve D_s matrislerinin elemanları ile (8.57) denklemindeki k_s eleman rijitlik matrisi hesaplanılabilir.

$$k_s = [A_s^{-1}]^T \left[\int_0^a \int_0^b B_s^T D_s B_s \, dx dy \right] [A_s^{-1}] \quad (8.62)$$

ve

$$\{S_s\} = [k_s] \{V_s\} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [KS] \{V_s\} \quad (8.63)$$

burada KS , (8.62) denklemindeki integrasyonun ve çarpımının yapılması ile elde edilen 12×12 boyutlu katsayılar matrisidir. (8.63) denklemindeki düğüm noktası kuvvetleri ve bunlara tekabül eden deplasmanlar şu şekilde gösterilir:

$$\begin{Bmatrix} M_{yi} \\ M_{xi} \\ F_{zi} \\ M_{yj} \\ M_{xj} \\ F_{zj} \\ M_{yk} \\ M_{xk} \\ F_{zk} \\ M_{yl} \\ M_{xl} \\ F_{zl} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{yi} \\ \theta_{xi} \\ w_i \\ \theta_{yj} \\ \theta_{xj} \\ w_j \\ \theta_{yk} \\ \theta_{xk} \\ w_k \\ \theta_{yl} \\ \theta_{xl} \\ w_l \end{Bmatrix} \quad (8.63 \text{ a})$$

(8.62) denklemi ile çıkarılan simetrik KS matrisi elemanlarına ait ifadeler, şekil 8.12 de verilen notasyon ve işaret kabulleri kullanılarak aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
 KS(1,1) &= \frac{52}{35} \frac{b}{a} + \frac{8}{25} \frac{a}{b} + \frac{4}{35} \frac{a^3}{b^3} \\
 KS(1,2) &= \frac{11}{35} \frac{a^2}{b^2} + \frac{11}{35} \frac{b^2}{a^2} + 1.2\nu + 0.2 \\
 KS(1,3) &= \frac{23}{35} \frac{a^2}{b^3} + \frac{33}{14} \frac{b}{a^2} + \frac{7}{25} \frac{1}{b} + 1.3 \frac{\nu}{b} \\
 KS(1,4) &= \frac{26}{35} \frac{b}{a} - \frac{2}{25} \frac{a}{b} - \frac{3}{35} \frac{a^3}{b^3} \\
 KS(1,5) &= \frac{13}{70} \frac{a^2}{b^2} - \frac{11}{35} \frac{b^2}{a^2} - \frac{\nu}{10} - 0.02 \\
 KS(1,6) &= -\frac{33}{14} \frac{b}{a^2} + \frac{12}{35} \frac{a^2}{b^3} - \frac{7}{25} \frac{1}{b} - 0.01 \frac{\nu}{b} \\
 KS(1,7) &= \frac{9}{35} \frac{b}{a} + \frac{2}{25} \frac{a}{b} + \frac{3}{35} \frac{a^3}{b^3} \\
 KS(1,8) &= \frac{13}{70} \frac{b^2}{a^2} + \frac{13}{70} \frac{a^2}{b^2} - 0.02 \\
 KS(1,9) &= -\frac{9}{14} \frac{b}{a^2} - \frac{12}{35} \frac{a^2}{b^3} + \frac{7}{25} \frac{1}{b} + 0.1 \frac{\nu}{b}
 \end{aligned}$$

$$KS(1,10) = \frac{18}{35} \frac{b}{a} - \frac{8}{25} \frac{a}{b} - \frac{4}{35} \frac{a^3}{b^3}$$

$$KS(1,11) = \frac{11}{35} \frac{a^2}{b^2} - \frac{13}{70} \frac{b^2}{a^2} + \frac{v}{10} + 0.02$$

$$KS(1,12) = \frac{9}{14} \frac{b}{a^2} - \frac{23}{35} \frac{a^2}{b^3} - \frac{7}{25} \frac{1}{b} - 1.3 \frac{v}{b}$$

$$KS(2,2) = \frac{52}{35} \frac{a}{b} + \frac{8}{25} \frac{b}{a} + \frac{4}{35} \frac{b^3}{a^3}$$

$$KS(2,3) = \frac{23}{35} \frac{b^2}{a^3} + \frac{33}{14} \frac{a}{b^2} + \frac{7}{25} \frac{1}{a} + 1.3 \frac{v}{a}$$

$$KS(2,4) = -KS(1,5)$$

$$KS(2,5) = -\frac{8}{25} \frac{b}{a} + \frac{18}{35} \frac{a}{b} - \frac{4}{35} \frac{b^3}{a^3}$$

$$KS(2,6) = -\frac{23}{35} \frac{b^2}{a^3} + \frac{9}{14} \frac{a}{b^2} - \frac{7}{25} \frac{1}{a} - 1.3 \frac{v}{a}$$

$$KS(2,7) = KS(1,8)$$

$$KS(2,8) = \frac{3}{35} \frac{b^3}{a^3} + \frac{9}{35} \frac{a}{b} + \frac{2}{25} \frac{b}{a}$$

$$KS(2,9) = -\frac{12}{35} \frac{b^2}{a^3} - \frac{9}{14} \frac{a}{b^2} + \frac{7}{25} \frac{1}{a} + 0.1 \frac{v}{a}$$

$$KS(2,10) = -KS(1,11)$$

$$KS(2,11) = -\frac{3}{35} \frac{b^3}{a^3} + \frac{26}{35} \frac{a}{b} - \frac{2}{25} \frac{b}{a}$$

$$KS(2,12) = \frac{12}{35} \frac{b^2}{a^3} - \frac{33}{14} \frac{a}{b^2} - \frac{7}{25} \frac{1}{a} - 0.1 \frac{v}{a}$$

$$KS(3,3) = \frac{176}{35} \frac{a}{b^3} + \frac{176}{35} \frac{b}{a^3} + \frac{78}{25} \frac{1}{ab} + 0.8 \frac{v}{ab}$$

$$KS(3,4) = -KS(1,6)$$

$$KS(3,5) = KS(2,6)$$

$$KS(3,6) = -\frac{176}{35} \frac{b}{a^3} + \frac{34}{35} \frac{a}{b^3} - \frac{78}{25} \frac{1}{ab} - 0.8 \frac{v}{ab}$$

$$KS(3,7) = -KS(1,9)$$

$$KS(3,8) = -KS(2,9)$$

$$KS(3,9) = -\frac{34}{35} \frac{a}{b^3} - \frac{34}{35} \frac{b}{a^3} + \frac{78}{25} \frac{1}{ab} + 0.8 \frac{v}{ab}$$

$$KS(3,10) = KS(1,12)$$

$$KS(3,11) = -KS(2,12)$$

$$KS(3,12) = \frac{34}{35} \frac{b}{a^3} - \frac{176}{35} \frac{a}{b^3} - \frac{78}{25} \frac{1}{ab} - 0.8 \frac{v}{ab}$$

$$KS(4,4) = KS(1,1)$$

$$KS(6,11) = -KS(2,9)$$

$$KS(4,5) = -KS(1,2)$$

$$KS(6,12) = KS(3,9)$$

$$KS(4,6) = -KS(1,3)$$

$$KS(7,7) = KS(1,1)$$

$$KS(4,7) = KS(1,10)$$

$$KS(7,8) = KS(1,2)$$

$$KS(4,8) = -KS(1,11)$$

$$KS(7,9) = -KS(1,3)$$

$$KS(4,9) = -KS(1,12)$$

$$KS(7,10) = KS(1,4)$$

$$KS(4,10) = KS(1,7)$$

$$KS(7,11) = KS(1,5)$$

$$KS(4,11) = -KS(1,8)$$

$$KS(7,12) = -KS(1,6)$$

$$KS(4,12) = -KS(1,9)$$

$$KS(8,8) = KS(2,2)$$

$$KS(5,5) = KS(2,2)$$

$$KS(8,9) = -KS(2,3)$$

$$KS(5,6) = KS(2,3)$$

$$KS(8,10) = KS(2,4)$$

$$KS(5,7) = KS(1,11)$$

$$KS(8,11) = KS(2,5)$$

$$KS(5,8) = KS(2,11)$$

$$KS(8,12) = -KS(2,6)$$

$$KS(5,9) = KS(2,12)$$

$$KS(9,9) = KS(3,3)$$

$$KS(5,10) = -KS(1,8)$$

$$KS(9,10) = KS(1,6)$$

$$KS(5,11) = KS(2,8)$$

$$KS(9,11) = -KS(2,6)$$

$$KS(5,12) = KS(2,9)$$

$$KS(9,12) = KS(3,6)$$

$$KS(6,6) = KS(3,3)$$

$$KS(10,10) = KS(1,1)$$

$$KS(6,7) = -KS(1,12)$$

$$KS(10,11) = -KS(1,2)$$

$$KS(6,8) = -KS(2,12)$$

$$KS(10,12) = KS(1,3)$$

$$KS(6,9) = KS(4,12)$$

$$KS(11,11) = KS(2,2)$$

$$KS(6,10) = KS(1,9)$$

$$KS(11,12) = -KS(2,3)$$

$$KS(12,12) = KS(3,3)$$

KS için yukarıda çıkarılan ifadelerde bir kontrol yapıldığında her düğüm noktası deplasmanının birim değeri ile meydana gelen ΣM_x , ΣM_y ve ΣF_z düğüm noktası kuvvetleri alınarak eleman üzerinde denge kontrolleri yapmak için bunlar (8,63 a) denklemi ile beraber kullanılır.

6. BİLGİSAYAR PROGRAMI

Bu bölümde anlatılan sonlu eleman metodu için genel bir bilgisayar metodu yazılmıştır. Bu programın adı FINPLA olup IBM 7094 için FORTRAN IV dilinde Scordelis tarafından yazılmıştır. Bu programın kısa açıklaması aşağıda verilmiştir.

6.1 Giriş Bilgileri:

1. Sistemin ve idealize edilen sonlu eleman ağının geometrisi ve boyutları.
2. Her eleman tipine ait boyutlar ve malzeme özellikleri.
3. Elemandaki üniform yüzeysel yüklerin yeri ve şiddeti.
4. Ayırtlar boyunca veya düğüm noktalarındaki konsantrik veya çizgisel yüklerin yeri ve şiddeti.
5. Sistemin sınır şartları.
6. Diyaframaların yeri, geometrisi ve özellikleri.
7. Nihâi neticelerin çıkış yerleri.

6.2 Çıkış Bilgileri:

1. Giriş bilgilerinin doğru olarak verilip verilmediğini kontrol için özellikle bütün giriş bilgileri.
2. Sistemin her düğüm noktasına ait 6 nihâi deplasman bileşeni.
3. Düğüm noktalarında ve istenilen diğer noktalardaki N_x , N_y ve N_{xy} düzlem kuvvetlerini ve M_x , M_y ve M_{xy} eğilme ve burulma momentlerini ihtiva eden iç kuvvetler.
4. Programın farklı link hatlarına ait işlem yapma zamanı.

6.3 Sınırlamalar, Hatırlatmalar:

1. Bir enkesitteki maksimum düğüm noktası sayısı 20 dir. Bir elemanın maksimum mutlak düğüm noktası no.su farkı 5 dir.
2. Bir enkesitteki eleman sayısı en çok 28 ve bütün sistemin açıklığı boyunca eleman sayısı en çok 40 dir.
3. Her sonlu eleman, geometrisi, malzeme özelliği yüklemeler ile 1 den 90 a kadar farklı eleman tipi karakterine sahip olur.
4. Boyuna ayırtlarda 150 ye yakın konsantrik veya yayılı çizgisel yükler veya deplasmanlar gözönüne alınabilir.

5. Enkesitte herhangi sayıda düğüm noktasına tatbik edilen çevre deplasman bileşeni 25 kadar olabilir.
6. Maksimum enine diyafram sayısı 5 dir.
7. Arzu edilirse bitişik elemanların iç kuvvetlerinin ortalamaları alınabilir.

6.4 LOjikal adımlar:

1. Giriş ve çıkış bilgileri okunur.
2. Komple veya nihâi giriş düğüm noktası veya deplasmanları ihtiva eden sistem için toplam kuvvet ve deplasman takımları düzenlenir.
3. Her eleman tipi için çubuk koordinat sisteminde eleman rijitlik matrisi hesaplanır.
4. Bir boyuna band için toplam sistem rijitliği aynı anda teşkil edilir ve bu rijitliğin tersi alınır.
5. Nihâi ayırıt deplasmanları çıkarılıp yazılır.
6. Bütün istenilen iç kuvvetler ve istenirse bitişik elemanların ortalama neticeleri hesaplanır.
7. İç kuvvetler çıkarılıp yazılır.
8. Diyaframlardaki iç kuvvetler hesaplanır ve yazılır.
9. İşlem yapma zamanları yazılır.

7. NOTASYONLAR

a	Elemanın x doğrultusundaki boyutu
[a]	Deplasman dönüşüm matrisi
[A]	Genelleştirilmiş koordinat dönüşüm matrisi
[B _p]	Genelleştirilmiş α_p koordinatları ile ϵ şekildeğiştirmesi- ni bağlayan matris
[B _s]	Genelleştirilmiş α_s koordinatları ile κ eğriliğini bağla- yan matris
D	Plak rijitliği = $Eh^3/12(1-\nu^2)$
E	Elestisite modülü
F _{xi}	i deki u_i ye tekabül eden düğüm noktası kuvveti
F _{yi}	i deki v_i ye tekabül eden düğüm noktası kuvveti
F _{zi}	i deki w_i ye tekabül eden düğüm kuvveti
F(x,y)	Deplasman fonksyonu
h	Eleman kalınlığı
[k]	Çubuk koordinat sisteminde eleman rijitlik matrisi
[$\bar{k}$]	Müşterek koordinat sisteminde eleman rijitlik matrisi
[$\bar{K}$]	genelleştirilmiş kuvvetleri ile genelleştirilmiş kuvvetleri- ni bağlayan eleman rijitlik matrisi
[k _p]	Eleman levha rijitlik matrisi
[k _s]	Eleman plak rijitlik matrisi
[K]	Sistemen rijitlik matrisi
$\left. \begin{matrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{matrix} \right\}$	Plak eğilme momentleri
M _{xi}	x_i ye tekabül eden i düğümündeki moment
M _{yi}	y_i ye tekabül eden i düğümündeki moment
M _{zi}	z_i ye tekabül eden i düğümündeki moment
$\left. \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{matrix} \right\}$	Levha kuvvetleri (mambran kuvvetleri)
$\left. \begin{matrix} Q_x \\ Q_y \end{matrix} \right\}$	Plak enine kesme kuvvetleri
r	R ye tekabül eden düğüm noktası deplasmanı (müşterek koordi- nat sisteminde)

R	Dış kuvvetler ve momentler (müşterek koordinat sisteminde)
S	İç kuvvetler (çubuk koordinat sisteminde)
$\bar{S}$	İç kuvvetler (müşterek koordinat sisteminde)
S_p	İç düzlem kuvvetler (levha kuvvetleri)
S_s	İç plak kuvvetleri
u_i	i düğümünün x- doğrultusundaki deplasmanı
v	İç deplasmanlar (çubuk koordinat sistemende)
$\bar{v}$	İç deplasmanlar (müşterek koordinat sisteminde)
v_i	i düğümünün y-doğrultusundaki deplasmanı
v_p	İç düzlem deplasmanlar (levha deplasmanları)
v_s	İç plak deplasmanları
w_i	i düğümünün z-doğrultusundaki deplasmanı
W_E	Dış virtüel iş
W_I	İç virtüel iş
X_n	sırayla x ve y doğrultusundaki deplasman fonksiyonları (n bölünemal olduğunu gösterir)
Y_n	
α	Genelleştirilmiş koordinatlar
β	α genelleştirilmiş koordinatlarına tekabül eden genelleştirilmiş kuvvetler
ϵ	Şekildeğiştirme
ϵ_x	Şekildeğiştirme bileşenleri
ϵ_y	
ϵ_{xy}	
θ_{xi}	x eksenine göre i düğümündeki dönme
θ_{yi}	y eksenine göre i düğümündeki dönme
θ_{zi}	z eksenine göre i düğümündeki dönme
κ	Eğrilik
ν	poisson oranı
x	Eğrilik yarı çapı
y	
xy	
x	Gerilme bileşenleri
y	
xy	

LİTERATÜR LİSTESİ

- {1} ALLEN D.C. and WEDGWOOD R.J.L. , Need for diaphragms in concrete box girders, Journal of the Structural Division Proc. A.S.C.E, March, 1971.
- {2} BENSCOTER S.U. , A theory of Torsion bending for multicell beams Journal of Applied Mechanics, March, 1954.
- {3} BILLINGTON C.J. , GHAVAMI K. and DOWLING P.J. , Steel box girders parametric study of cross-sectional distortion due to eccentric loading, Imperial College, London , September 1972.
- {4} BURAGOHAİN D.N. and AGRAVAL B.L. , Analysis of the curved box girder bridges, Journal of the Structural Division, Proc. A.S.C.E., May 1973.
- {5} CELASUN H., Çelik köprüler, Çağlayan kitabevi, 1974.
- {6} CELASUN H., Beton köprüler ve hesap metotları, Çağlayan kitabevi 1974.
- {7} CHU K.H. and DUDNİK E., Concrete box girder bridges analyzed as folded plates, First international symposium concrete bridges, A.C.I, publication paper Sp 23-13 Detroit Michigan.
- {8} CHU K.H. and PINJARKAR S.G. , Analysis of horizontally curved box girder bridges, Journal of the Structural Division, Proc. A.S.C.E., October 1971.
- {9} ÇAKIROĞLU A., ÖZDEN E. ve ÖZMEN G., Yapı sistemlerinin hesabı için matris metotları, cilt I, Dizerkonca matbaası , 1970.
- {10} DABROWSKI R., Näherungsberechnung der gekrümmten Kastenträger mit verformbarem Querschnitt.
- {11} DAS P.C. , Analysis of box-type structures, Proc. Instn. Civ. Engrs., pp No. 7457, 19-40.
- {12} DODGE A. , Influence functions for beams on elastic foundation, Journal of the Structural Division, Proc. A.S.C.E. Aug. 1964
- {13} İNAN M. , Cisimlerin mukavemeti, Arı kitabevi 1970.
- {14} KOLLBRUNNER C.F. and BASLER K. , Torsion in structures on engineering approach, New York 1969.
- {15} KNITTEL G. , Zur Berechnung des dünnwandigen Kastenträgers mit gleichbleibenden symmetrischen Querschnitt (ingilizce tercümesi), Beton und Stahlbetonbau , No.9 pp 205-211, Sept. 1965.
- {16} KUZMANOVIĆ B.O. , Some design problems of large box girder bridges, Journal of the Structural Division, Proc. A.S.C.E.

September 1972.

- {17} NYFFELER H. , Faltwerke im Hallen und brückenbau ,Werner-verlog, Düsseldorf ,1967.
- {18} O'CONNAR C. , Design of bridges superstructures, Wiley-Interscience, New york 1971.
- {19} RICHMOND B. an DALTON D.C. , Twisting of thin walled box girders of trapezoidal cross-section, Proc. Instn. Civ. Engrs., Jan. 1968 61-73.
- {20} RICHMOND B, Twisting of thin walled box girders, Proc. Instn. Civ. Engrs. vol. 33, April 1966.
- {21} RICHMOND B., Trapezoidal boxes with continuous diaphragms, Proc. Inst. Civ. Engrs. pp 641-650 , Aug. 1969.
- {22} RICHMOND B. , Matrix difference analysis of box girders, Proc. Inst. Civ, Engrs., pp 651-655 , Aug. 1969.
- {23} ROCKEY K.C. , BANNISTER J.L. and EVANS H.R. , Developments in bridge design and construction, Crosby Lockwood and son Ltd. London 1971.
- {24} SAMAD S.R.A. ., WRIGHT R.N. and ROBINSON A.R. ,Analysis of box girders with diaphragms, Journal of the Structural Division Proc. A.S.C.E. , October 1968.
- {25} SAYEED H. , Twisting of thin walled continuous box girders, M.Sc. thesis, University of Surrey, 1970.
- {26} SCORDELIS A.C. , Analysis of simply supported box girder bridges, College of Eng., University of Cal., Berkley., Rept., October 1966.
- {27} SCORDELIS A.C. , Analysis of continuous box girder bridges, College of Eng., University of cali., Berkley, Rept. SESM. 67-25, November 1967.
- {28} SCORDELIS A.C. and DAVIS R.E. , Stresses in continuous concrete box girder bridges, second international symposium, "Concrete bridge design", paper sp 26-13 April 1969.
- {29} SCORDELIS A.C. and SKENE A.D.F. , Direct stiffness solution for folded plates, Journal of the Structural Division, Proc. A.S.C.E. , Aug. 1964.
- {30} SCORDELIS A.C. , DAVIS R.E. and LO K.S. , Load distribution in concrete box girder bridges, first international concrete bridge design, A.C.I. publication paper sp 23-8, Detroit Michigan.

- {31} SMITH F.A. , THOMAS F.M. and SMITH J.O. , Torsion analysis of heavy box beams in structures, Journal of the Structural Division, Proc. A.S.C.E. , March , 1970.
- {32} TEZCAN S. , Çubuk sistemlerin elektronik hesap makineleri ile çözümü (Stiffness matrisleri metodu), Arı kitabevi, 1970.
- {33} TIMOSHENKO S. , Theory of plates and shells, McGraw-Hill book company, 1940.
- {34} TRIKHA D.N. and EDWARDS A.D. , Analysis of concrete box girders before and after cracking, Proc. Instn. Civ. Engrs. pp No. 7571, 515-528.
- {35} TUNG D.H.H. , Torsional analysis of single thin-walled trapezoidal concrete box girders, first international symposium concrete bridge design, A.C.I. , publication SP-23 , Detroit Michigan.
- {36} WRIGHT R.N. , SAMAT S.R.A. and ROBINSON A.R. , B.E.F. analogy for box girders, Journal of the Structural Division, Proc. A.S.C.E. , July 1968.
- {37} WRIGHT R.N. , Design of box girders of deformable cross-section, Highway Research Report No. 295, 1969.
- {38} ZIENKIEWICZ O.C. and TOO J.J.M. , The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes, Proc. Instn. Civ. Engrs September 1972.
- {39} CHEUNG Y.K. , Analysis of box girder bridges by the finite strip method, second international concrete bridge design symposium, paper 26-15, April 1969.

EK-1

BASİT MESNETLİ ÇOK GÖZLÜ KATLANMIŞ PLAK SİSTEMLERİN HESABI İÇİN BİLGİSAYAR PROGRAMI -MULTBL-

KAPSAMI

MULTBL-Çok gözlü katlanmış plak sistemlerin elastik metot ile hesabı.

GAYE

Program tek açıklıklı, çok gözlü veya açık katlanmış plak sistemler için hızlı bir çözüm sağlar. Sistemde herhangi bir yerde üniform veya kısmi yüzeysel yükler ve keza çizgisel ve münferit yükler tatbik edilebilir. Sistemin ayırıt deplasmanları ve herbir elemanın istenilen noktalarındaki iç kuvvetleri, momentleri ve deplasmanları hesaplanır.

KOŞULLAR

Öngörülen enbüyük plak, ayırıt . yük v.s sayıları daha sonraki giriş datalarında verilmiştir.

AÇIKLAMA

Bilgisayar çözümünde direkt rijitlik metodu kullanılır. Plak ankastre kenar kuvvetlerini, rijitlikleri ve nihai iç kuvvetleri, momentleri ve deplasmanları ortaya koymak için Goldberg-Leve formülleri kullanılmıştır. Yükler için 100 sıfır olmayan terimli yaklaşık Fourier serileri harmonik analizi kullanılmıştır. Program FORTRAN IV dilinde yazılmıştır.

GİRİŞ DATASININ BİÇİMİ

A. Girişler data kartları üzerine delinmiştir. Program kapasitesi aşağıda data kapasitesi ile gösterilmiştir. Normal FORTRAN MONITOR SYSTEM kontrol kartları akış programında kullanılacaktır.

B. Sabit nokta sayısı integer veya desimal noktasız integer serileridir. Örneğin 3,4,23. v.s. Bunlar, kendileri için ayrılan sahanın sağ ucuna yazılmalıdır.

C. Reel sayılar desimal nokta ihtiva ederler.

12357.845 0.000346 .123 3000000. v.s.

Bunlar kendileri için ayrılan sahanın herhangi bir yerine yazılabilir.

D. Program yükü aşağıda data kartları ve işaretler ile gösterilmiştir.

1. BİRİNCİ KART

2-72. kolon Çıkışta yazılacak problem başlığı

2. İKİNCİ KART (F10.0, 6I4)

1-10. kol. SPAN : Açıklık boyu

11-14. kol. NPL : plak tipi sayısı, maks. 15

15-18. kol. NEL : eleman sayısı, maks. 150

19-22. kol. NJT : ayrit sayısı, maks. 100

23-26. kol. NXP : x eksen boyuncu netice istenilen kesit sayısı, maks. 10

27-30. kol. MHARM : maks. Fourier limiti sayısı, NCHEC = 0 için maks. 100, NCHEC = 1 veya -1 için maks.200

31-34. kol. NCHEC:Tek ve çift harmoniklerin kontrolü

Yalnız tek seriler ile çalışılırsa (sim.) 1

Bütün seriler dahil edilirse 0

Yalnız çift seriler ile çalışılırsa (anti.) -1

3. ÜÇÜNCÜ KART- Neticesi istenilen kesitlerin x koordinatları

XP : (10F7:2)

4. DİĞER KARTLAR- her plak tipi için bir kart (110,4F10.0,F10.3)

1-10 kol. I : plak tip no.su

11-20 kol. H(I) : plağın yatay izdüşümü

21-30 kol. V(I) : plağın dikey izdüşümü

31-40 kol. TH(I): plak kalınlığı

41-50 kol. E(I) : elastisite modülü

51-60 kol. FNU(I):poisson oranı

5.DİĞER KART- her eleman için bir kart (5I4, 3F10.0)

Bütün plak üzerinde mevcut aşağıda verilen ünifom yükler

1-4. kol. I : eleman nosu

5-8. kol. NPI(I) : Elemanın i ayrit no.su maks. mutlak fark 4

9-12. kol. NPJ(I) : Elemanın J ayrit no.su

13-16. kol. KPL(I) : Elemanın bulunduğu plak tip no.su

17-20. kol. NSEC(I): Eleman enine yönünde neticesi istenen kesit sayısı maks. 16, NSEC = 0 ise iç kuvvetler ve deplasmanlara ait neticeler verilmez.

21-30. kol. DL(I) : sabit yük (P/Pl. alanı, birim alandaki değeri)

31-40. kol. HL(I) : Ünifom yatay yük(P/V-alan, birim dikey izdüşüm alandaki kuvvet)

41-50. kol. VL(I) : üniform düşey yük (P/H-alan, birim yatay izdüşümde kuvvet)

6. DİĞER KART

1-4. kol. NSURL: kısmi yüzeysel yüklerin sayısı (I4), maks. 50

7. DİĞER KARTLAR-her kısmi yüzeysel yük için bir kart (I10, 4F10.0)

NSURL = 0 ise gerekli kart yoktur. Aşağıda verilen yükler plak genişliğide üniformdur ve verilen SURDE uzunluğuna eşittir.

1-10. kol. LEL : eleman no.su

11-20. kol. SURHL:yatay yüzeysel yük, P/V-alan (eğer çizgisel yük tatbik edilirse P/V-uzunluk)

21-30. kol. SURVL:düşey yüzeysel yük, P/H-alan (eğer çizgisel yük tatbik edilirse P/V-uzunluk)

31-40. kol. SURXI:yükün yayıldığı uzunluğun ortasının sol mesnede uzaklığı

41-50. kol. SURDE:yükün x yönünde yayıldığı uzunluk (çizgisel yük için 0), eğer SURDE = 0 ise girişte SURHL ve SURVL kuvvet/birim alandır, SURDE = 0 ise kuvvet/birim genişliktir.

8. DİĞER KARTLAR-her ayrit için bir kart (I10,4F10.0,4I2), bütün ayritlar birer kart gerektirir.

1-10. kol. I : ayrit no.su

11-20. kol. AJFOR(1,I):tatbik edilen yatay ayrit kuvveti veya deplasmanı

21-30. kol. AJFOR(2,I):tatbik edilen düşey ayrit kuvvet veya deplasmanı

31-40. kol. AJFOR(3,I):tatbik edilen ayrit moment veya dönmesi

41-50. kol. AJFOR(4,I):tatbik edilen boyuna ayrit kuvvet veya deplasmanı

52. kol. LCASE(1,I):yatay kuvvet veya deplasman için indeks (0, 1, 2, veya 3 olabilir)

54. kol. LCASE(2,I):düşey kuvvet veya deplasman için indeks (0, 1, 2 veya 3 olabilir)

56. kol. LCASE(3,I):moment veya dönme için indeks (0, 1, 2 veya 3 olabilir)

0 verilen sıfır kuvvet için

1 üniform yayılı kuvvet için (AJFOR için giriş üniform kuvvet/uzunluk)

2 açıklık ortasındaki münferit yük için (AJFOR için girişte toplam kuvvet)

3 verilen sıfır deplasman için

58. kol. LCASE(4,I):boyuna kuvvet veya deplasman için indeks
(0, 2 veya 3 olabilir)

0 verilen sıfır kuvvet için

2 her uçta P öngerilme kuvveti için (girişte AJFOR için
toplam kuvvet, açıklık ortasından yöne)

3 verilen sıfır deplasman için

9. DİĞER KART

1-4. kol. NCONL : münferit ayrit yükü sayısı, maks. 50

10. DİĞER KARTLAR-her münferit ayrit yükü için bir kart (I10,6F10.0).
NCONL = 0 ise kart gerekli değildir. Ayrit boyunca
birden fazla yük olabilir fakat her yük için bir
kart gereklidir.

1-10. kol. LJT : ayrit no.su

11-20. kol. CONHL:toplam yatay kuvvet

21-30. kol. CONVL:toplam düşey kuvvet

31-40. kol. CONM :toplam moment

41-50. kol. CONS :toplam boyuna P kuvveti (Dikkat: bu aynı ayrit
boyunca bir -P ile dengelenmelidir.)

51-60. kol. CONXI:yükün ortasının sol mesnetten uzaklığı

61-70. kol. CONDE:yükün x yönünde yayılma uzunluğu (münferit yük
için CONDE = 0)

11. Yukarıdaki data kartlarının hepsi çözülecek diğer problemler için
aynen tekrarlanır.

12. Data hacminin sonuna iki boş kart ilave edilir.

MÜLAHAZALAR

1. Mümkünse elemanların çoğu benzer plak tipinde seçilmelidir.
Bu iç kuvvetler ve deplasmanlarının hesaplanmasında bilgisayar zamanın
dan tasarruf sağlar.

2. Ayrit numaralaması her plak elemanını ayrit no.ları arasında
ki fark minimum olacak şekilde yapılmalıdır.

ÇIKIŞ BİLGİLERİ

Çıkışlar iki kısımdan meydana gelir.

a. Kontrol için giriş bilgileri.

b. Netice bilgileri.

a. Kontrol için giriş bilgileri: Bütün giriş bilgileri, delme
anında hata olup olmadığını ve kartların düzenini kontrol edebilmek
için özellikle yazılır.

b. Netice bilgileri: Nihâi neticeler aşağıdaki değerleri kapsar:

1. Ayrıtlarda meydana gelen deplasmanlar:

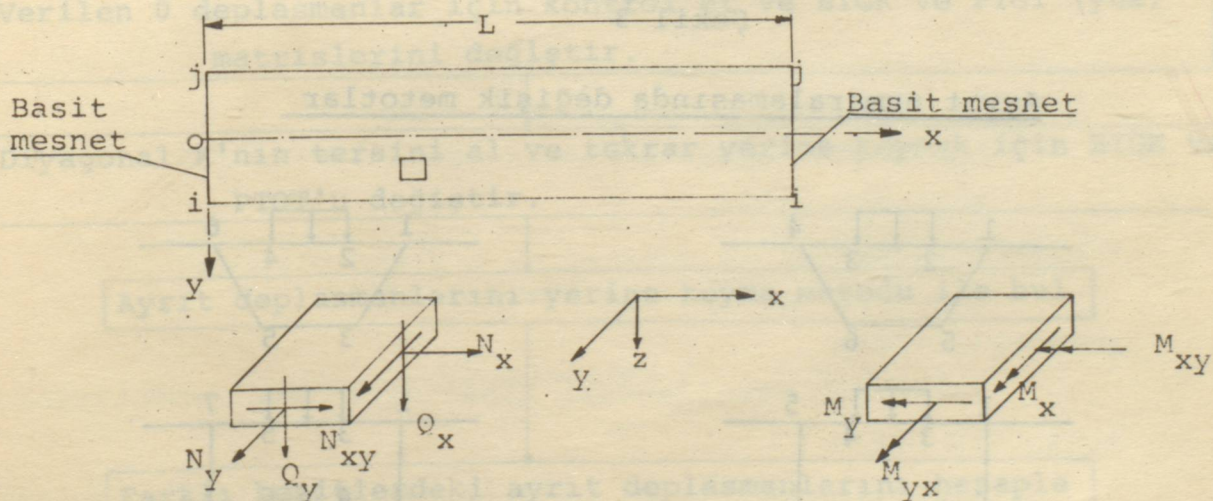
Bunlar girişte öngörülen x ordinatlarındaki yatay, düşey, dönme-
sel ve boyuna deplasmanlardır. Her ayrıt için ayrı ayrı verilir.

2. İç eleman kuvvetleri ve deplasmanları:

Her x ordinatı ve her elemanın giriste istenilen her kesiti için
aşağıdaki değerler verilir:

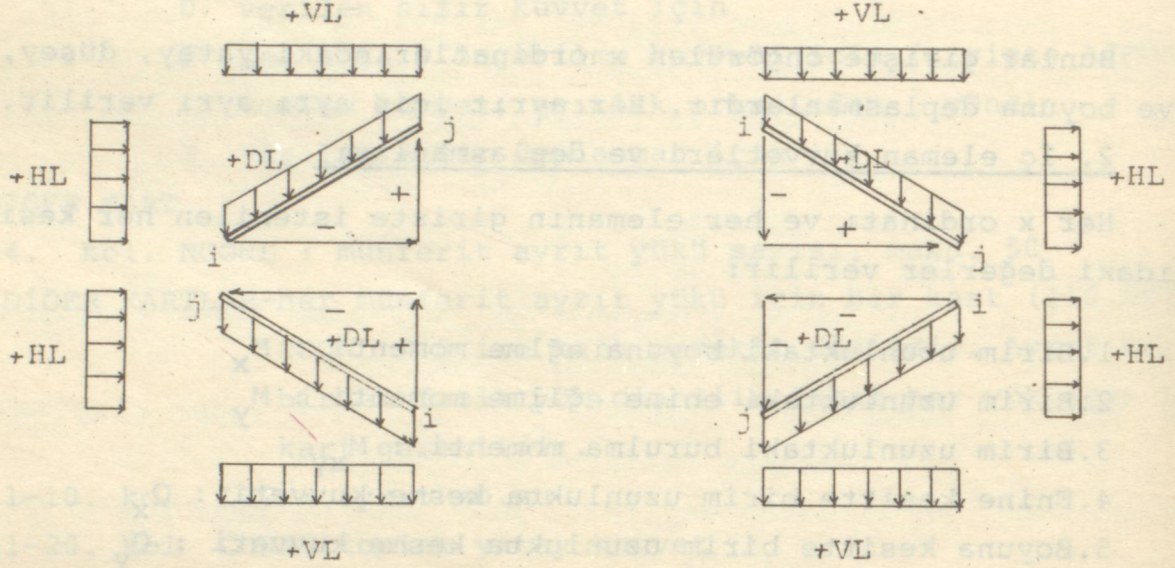
1. Birim uzunluktaki boyuna eğilme momenti : M_x
2. Birim uzunluktaki enine eğilme momenti : M_y
3. Birim uzunluktaki burulma momenti : M_{xy}
4. Enine kesitte birim uzunlukta kesme kuvveti : Q_x
5. Boyuna kesitte birim uzunlukta kesme kuvveti : Q_y
6. Birim uzunlukta boyuna eksenel kuvvet : N_x
7. Birim uzunlukta enine eksenel kuvvet : N_y
8. Birim uzunlukta kayma kuvveti : N_{xy}
9. Boyuna deplasman : u
10. Enine deplasman : v
11. Plak düzlemine dik deplasman : w
12. Boyuna doğrultuda normal gerilme : σ_x

Plak elemanlarının iç kuvvetlerine ait işaret kabûlleri



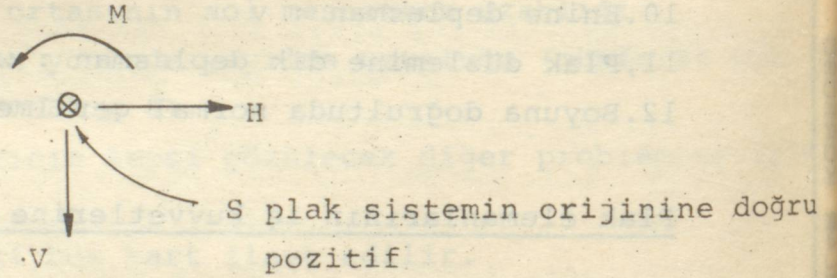
Şekil 1

Eleman yükleri ve izdüşümlerine ait işaret kabulleri



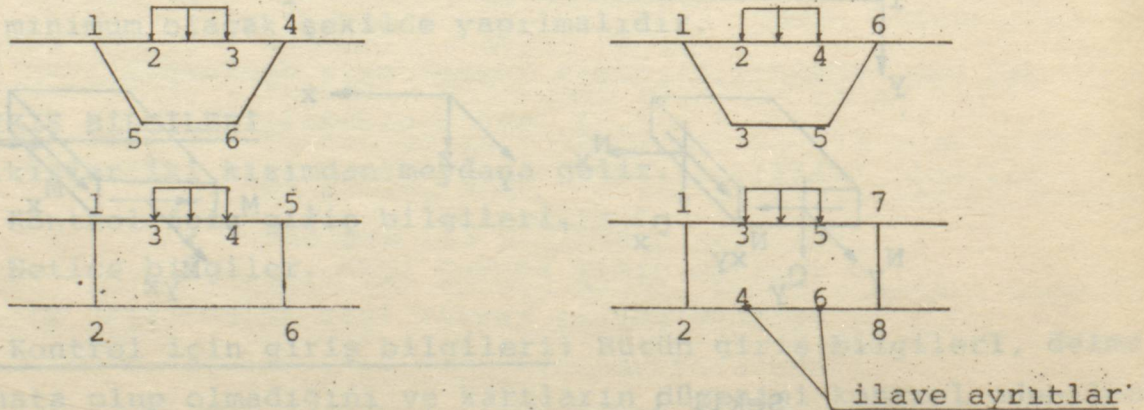
Şekil 2

Ayrıt kuvvetleri ve deplasmanlarına ait işaret kabülü



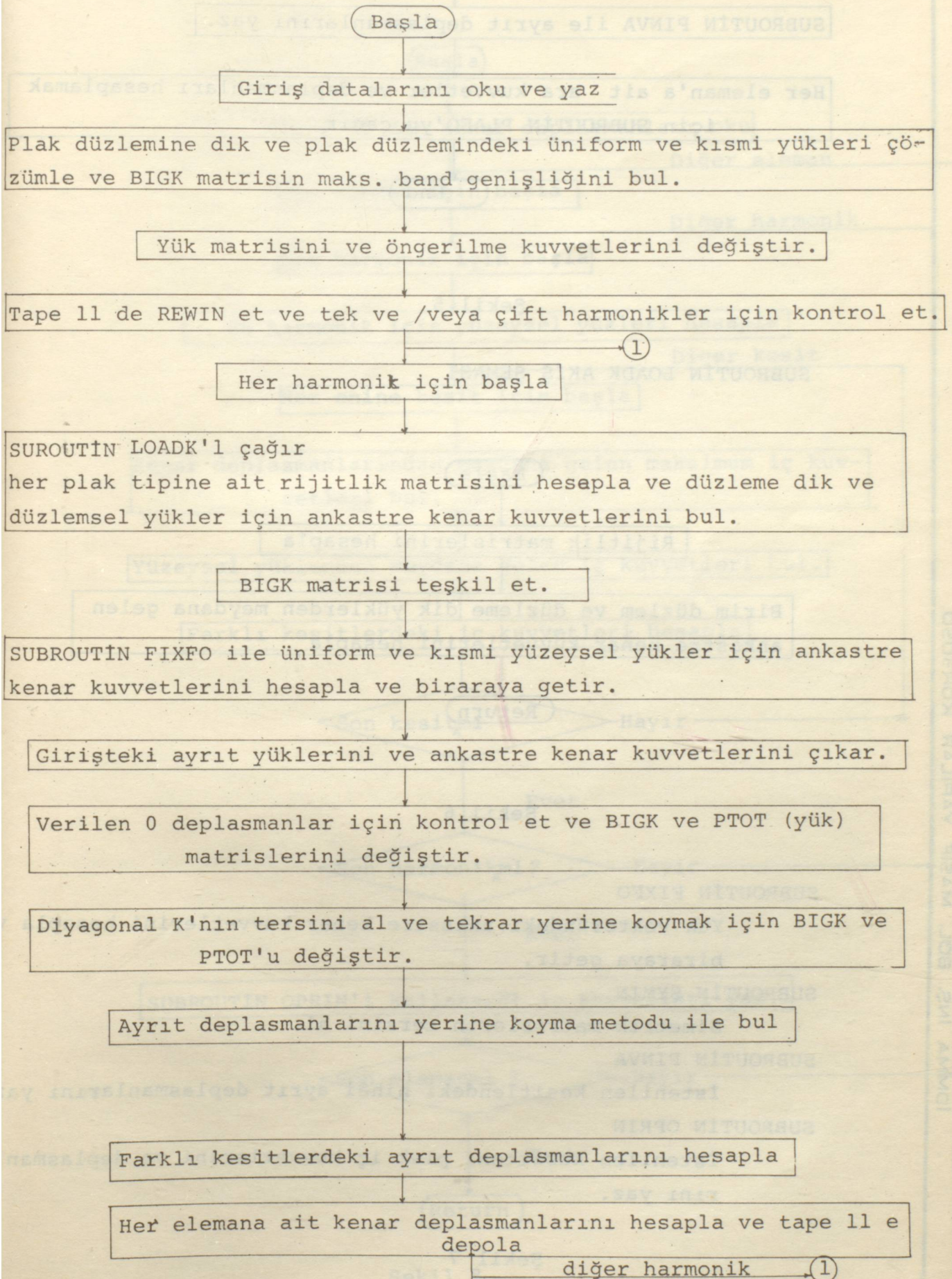
Şekil 3

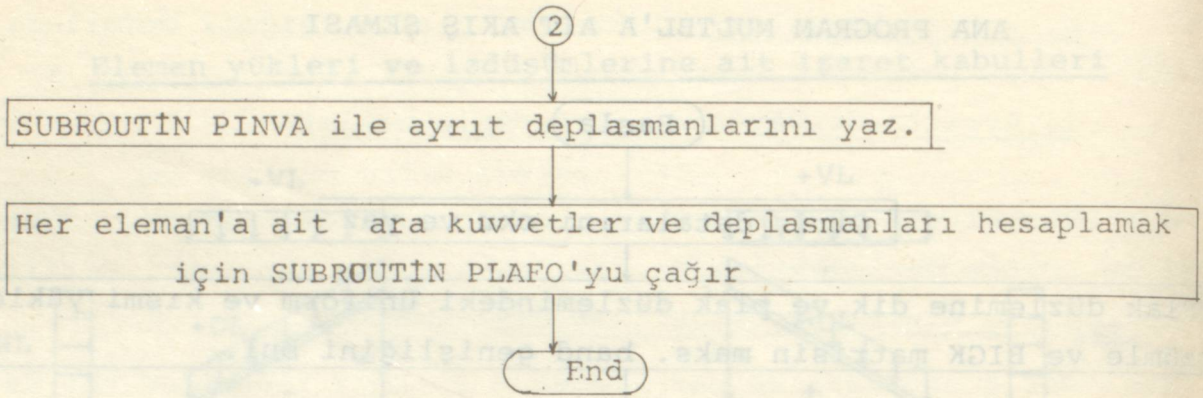
Ayrıt numaralamasında değişik metotlar



Şekil 4

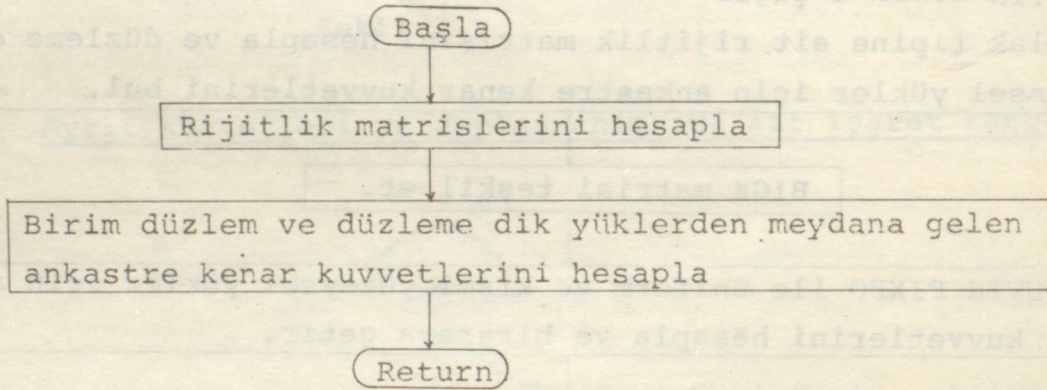
ANA PROGRAM MULTBL'A AİT AKIŞ ŞEMASI





Şekil 5

SUBROUTİN LOADK AKIŞ ŞEMASI



Şekil 6

SUBROUTİN FIXFO

Yük vektöründeki ankastre kenar kuvvetlerini hesapla ve biraraya getir.

SUBROUTİN SYMIN

Simetrik matrislerin tersini al.

SUBROUTİN PINVA

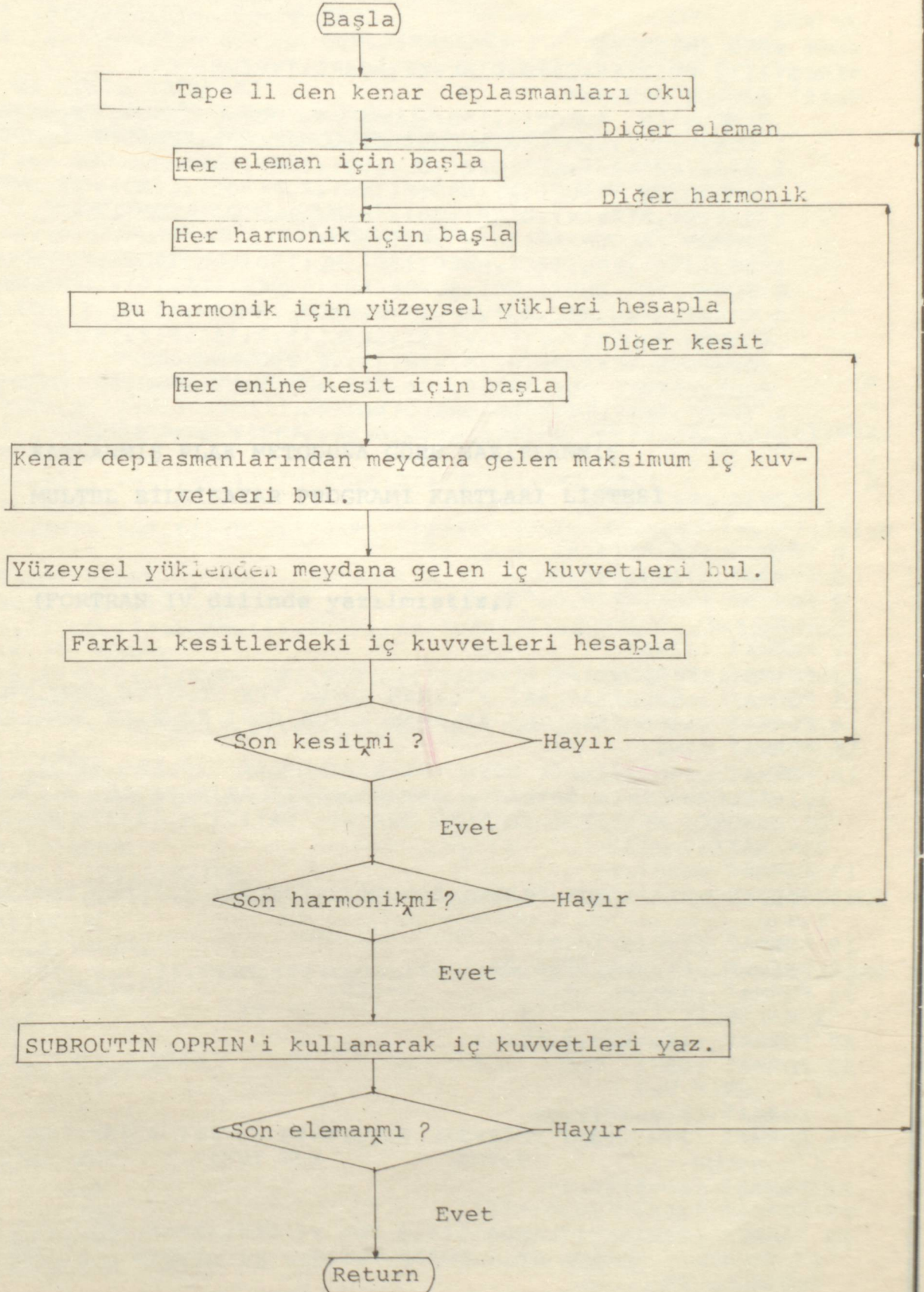
İstenilen kesitlerdeki nihâi ayrıt deplasmanlarını yaz.

SUBROUTİN OPRIN

İstenilen kesitteki plak iç kuvvetlerini ve deplasmanlarını yaz.

Şekil 7

SUBROUTİN PLAFO'ya ait akış şeması



Şekil 8

SUBROUTIN PLATO'ya ait akis semasi

1. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

(Basis)

2. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

3. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

4. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

5. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

6. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

7. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

8. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

9. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

10. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

11. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

12. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

13. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

14. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

15. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

16. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

17. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

18. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

19. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

20. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

21. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

22. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

23. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

24. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

25. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

26. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

27. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

28. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

29. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

30. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

31. say eniralinmasiyla biraya ait AVNID NITURBUS

KATLANMIŞ PLAK METODUNA GÖRE HAZIRLANMIŞ

MULTBL BİLGİSAYAR PROGRAMI KARTLARI LİSTESİ

(FORTRAN IV dilinde yazılmıştır,)

// JOB

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE
0000 4444 4444 0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*IOCS(1132 PRINTER,CARD,DISK,KEYBOARD,TYPEWRITER)

*LIST SOURCE PROGRAM

DIMENSION AJFOR(4,100),LCASE(4,100),LJT(50),CONHL(50),
1 CONVL(50),CONM(50),CONS(50),CONDE(50),RJDIS(400,10),
2 BIGK(400,20),SERIE(2),DL(150),CONXI(50)
DIMENSION TITLE(12),NPDIF(150),AJP(400),LIND(400),PTOT(400),
1 A(4,4),BTAV(4),DISP(400),RBAR(4),D(20),EDP(1200)
COMMON /BLOCK/XP(10), NPI(150),
1 NPJ(150),KPL(150),NSEC(150),HL(150),VL(150),LEL(50),SURHL(50),
2 SURVL(50),SURXI(50),SURDE(50),SINKX(100,10),COSKX(100,10),
3 MM,PI,SPAN,NEL,NJT,NPL,NXP,NSURL,MHARM,N1,N2,II,IJ,IL
COMMON/BLOCK1/H(15),V(15),SMALL(8,8,15),P(8,15)
COMMON/BLOCK2/PWTH(15),TH(15),E(15),FNU(15)
EQUIVALENCE (DL,NPDIF),(AJFOR,AJP),(LCASE,LIND),(EDP,BIGK),
1 (PTOT,SMALL),(DISP,SMALL(401)),
2 (P,A),(P(17),BTAV,RBAR),(P(21),TITLE),(P(33),D)

C
C
C
C
C

FORMAT DEĞİMLERİ

6 FORMAT (16,4E16.6)

8 FORMAT (110,4F10.0)

9 FORMAT (10X,4F10.0,F10.3)

11 FORMAT (12A6)

12 FORMAT (F10.0,6I4)

13 FORMAT (45H0HESAPLARI ATLANAN BUTUN TEK FOURIER SERILERI)

14 FORMAT (46H0HESAPLARI ATLANAN BUTUN CIFT FOURIER SERILERI)

15 FORMAT (1H1)

16 FORMAT (15H0ACIKLIK BOYU =F8.3/22H0PLAK TIPLERI SAYISI = 12/

121H0ELEMENLARIN SAYISI = 13/20H0AYRITLARIN SAYISI = 13/51H0X-EKSEN

2I 30YUNCA NETICESI ISTENEN ENKESIT SAYISI = 12/27H0MAKSIMUM HARMON

3IK SAYISI =13)

17 FORMAT (10F7.2)

18 FORMAT (///45H0X-EKSENI BOYUNCA NETICESI ISTENEN ENKESITLER/10F12
1.3)

19 FORMAT (110,6F10.0)

20 FORMAT (4X,4I4,3F10.2)

21 FORMAT (93H1PL TIP

H-IZD.

V--IZDU.

1 KALINLIK

E

V)

22 FORMAT (15,4E20.8,F10.3)

23 FORMAT (66H1 ELE

I

J

PL

NSEC

DL

UNIF HL

1 UNIF VL)

24 FORMAT (5I6,3F12.3)

25 FORMAT (35H1KISMI YUZEYSEL YUKLERRIN SAYISI = 13//70H ELE

1 H-YUH

V-YUK

YUK YERI

YUK GENIS.)

26 FORMAT (16,6E16.6)

27 FORMAT (10X,4F10.0,4I2)

28 FORMAT (38H1AYRITLARDI GIRIS YUK VE DEPLASMANLARI//88H AYRIT

1 YATAY

IH

DUSEY

IV

DONME

IM

BOYUNA

2DOGRUL. IS)

29 FORMAT (16,4(E17.6,I3))

30 FORMAT (//45H0VERILEN SIFIR DEPLASMAN ICIN IH,IV,IM,IS = 0/45H0UNI

1FORM YAYILI YUK ICIN

= 1/38H0ACIKLIK ORTASINDAKI

2MUNFRIT YUK ICIN/45H0IH,IV,IM VE ONGERILME KUVVET ICIN IS

= 2


```

3/45HOVERILEN SIFIR DEPLASMANLAR ICIN = 3)
31 FORMAT (29H1MUNFERIT AYRIT YUKU SAYISI = I3//113H AYRIT H=YUK
1U V=YUKU MOMENT BOYU, KUVVET YUK YERI
2 YUK GENISLIGI )
40 FORMAT(40X,16H1NIIHAI NETICELER////26H0NIIHAI DUGUM-DEPLASMANLARI///
1/10X,19H YATAY DEPLASMANLAR)
41 FORMAT (////10X,19H DUSEY DEPLASMANLAR)
42 FORMAT (////10X,10H DONMELER)
43 FORMAT (////10X,20H BOYUNA DEPLASMANLAR)

GIRIS VE CIKIS DATALARI
101 READ(5,11,END=999)(TITLE(I),I=1,12)
READ(5,12) SPAN,NPL,NEL,NJT,NXP,MHARM,NCHEC
IF (SPAN) 999,999,102
102 WRITE(6,15)
WRITE(6,11)(TITLE(I),I=1,12)
WRITE(6,16)SPAN,NPL,NEL,NJT,NXP,MHARM
IF (NCHEC) 103,105,104
103 WRITE(6,13)
GO TO 105
104 WRITE(6,14)
105 READ(5,17) (XP(I),I=1,NXP)
WRITE(6,18) (XP(I),I=1,NXP)
READ(5,9)(H(I),V(I),TH(I),E(I),FNU(I),I=1,NPL)
READ(5,20)(NPI(I),NPJ(I),KPL(I),NSEC(I),DL(I),HL(I),VL(I),I=1,NEL)
WRITE(6,21)
WRITE(6,22)(I,H(I),V(I),TH(I),E(I),FNU(I),I=1,NPL)
WRITE(6,23)
WRITE(6,24)(I,NPI(I),NPJ(I),KPL(I),NSEC(I),DL(I),HL(I),VL(I),I=1,N
1EL)
READ(5,20) NSURL
IF (NSURL) 107,107,106
106 READ(5,8)(LEL(I),SURHL(I),SURVL(I),SURXI(I),SURDE(I),I=1,NSURL)
WRITE(6,25) NSURL
WRITE(6,6)(LEL(I),SURHL(I),SURVL(I),SURXI(I),SURDE(I),I=1,NSURL)
107 DO 110 I=1,NJT
110 READ(5,27)(AJFOR(J,I),J=1,4),(LCASE(K,I),K=1,4)
WRITE(6,28)
DO 111 I=1,NJT
111 WRITE(6,29)I,(AJFOR(J,I),LCASE(J,I),J=1,4)
WRITE(6,30)
READ(5,20)NCONL
IF (NCONL) 109,109,108
108 READ(5,19)(LJT(I),CONHL(I),CONVL(I),CONM(I),CONS(I),CONXI(I),CONDE
1(I),I=1,NCONL)
WRITE(6,31)NCONL
WRITE(6,26)(LJT(I),CONHL(I),CONVL(I),CONM(I),CONS(I),CONXI(I),COND
1E(I),I=1,NCONL)
109 CONTINUE

OUTPUT IS CLEARED

PI=3.1416
MX=4*NJT
DO 121 I=1,MX
DO 121 J=1,NXP
121 RJDIS(I,J)=0.0
PLAK GENISLIGI (PWITH) VE H=H/PWITH, V=V/PWITH HESABI

DO 125 I=1,NPL
PWITH(I)=SQRT(H(I)**2+V(I)**2)
H(I)=H(I)/PWITH(I)
V(I)=V(I)/PWITH(I)

```


C ELEMAN YUZEYSEL YUKLERI (VL=ZL, HL=YL) DEGISIMI VE MAX. BAND
C GENISLIGI KONTROLU

C
NXBAN=0
DO 130 I=1,NEL
J=KPL(I)
VL(I)=VL(I)*ABS(H(J))+DL(I)
HL(I)=HL(I)*ABS(V(J))
ZL=VL(I)*H(J)+HL(I)*V(J)
YL=VL(I)*V(J)-HL(I)*HL(J)
VL(I)=ZL
HL(I)=YL
NPDIF(I)=NPJ(I)-NPI(I)
K=IABS(NPDIF(I))
IF (NXBAN-K) 126,127,127
126 NXBAN=K
127 NPI(I)=NPI(I)*4-4
130 NPJ(I)=NPJ(I)*4-4
MAXJT=NXBAN
NXBAN=NXBAN*4+4

C
C KISMI YUZEYSEL YUKLERIN DEGISIMI (VL=ZL, HL=YL)

C
IF (NSURL) 135,135,132
132 DO 133 I=1,NSURL
K=LEL(I)
J=KPL(K)
SURVL(I)=SURVL(I)*ABS(H(J))
SURHL(I)=SURHL(I)*ABS(V(J))
ZL=SURVL(I)*H(J)+SURHL(I)*V(J)
YL=SURVL(I)*V(J)-SURHL(I)*H(J)
SURVL(I)=ZL
133 SURHL(I)=YL

C
C LCASE (LIND) MATRIST VE ON GERILME KUVVETLERI DEGISIMI

C
135 DO 136 I=1,MX
136 LIND(I)=LIND(I)+1
DO 138 I=1,NJT
IF (LCASE(4,I)-3) 138,137,138
137 LCASE(4,I)=LCASE(4,I)+2
AJFOR(4,I)=AJFOR(4,I)*4./SPAN
138 CONTINUE

C
C BASLANILAN HER HARMONIK ICIN DEVIR YAP
REWIND 11

C
IF (NCHEC) 140,141,142

140 N1=2
GO TO 143
141 N1=1
N2=1
GO TO 144
142 N1=1
143 N2=2
144 MM=0

C
DO 700 NN=N1,MHARM,N2
MM=MM+1
DO 145 I=1,MX
DO 145 J=1,NXBAN
145 BIGK(I,J)=0.

C
C ACIKLIK (SPAN) VE K NIN GENELLESTIRILISI

FN=NN
FK=FN*PI/SPAN

HARMONİK VE FOURIER CARPANLARINI HESAPLANMASI

```
DO 150 I=1,NXP
XX=FK*XP(I)
SINKX(MM,I)=SIN(XX)
150 COSKX(MM,I)=COS(XX)
N3=(-1)**NN
IF (N3) 152,155,155
152 SERIE(1)=4./(FN*PI)
SERIE(2)=2./SPAN*(-1.)**((NN+3)/2)
```

SUBROUTINE LOADS İLE HER PLAGIN RIJITLIK MATRISININ HESAPLANMASI

```
155 CALL LOADK (FK,SPAN,15,NPL,N3)
```

BIGK MATRISININ TESKILI

```
DO 210 L=1,NEL
K=KPL(L)
M=NPI(L)
N=NPJ(L)
DO 201 I=1,4
II=M+I
IJ=N+I
IK=I+4
DO 201 J=1,4
BIGK(II,J)=BIGK(II,J)+SMALL(I,J,K)
201 BIGK(IJ,J)=BIGK(IJ,J)+SMALL(IK,J+4,K)
IF (NPDIF(L)) 205,202,202
202 IK=N-M-4
DO 203 I=1,4
II=M+I
DO 203 J=5,8
IJ=IK+J
203 BIGK(II,IJ)=BIGK(II,IJ)+SMALL(I,J,K)
GO TO 210
205 IK=M-N
N=N-4
DO 206 I=5,8
II=N+I
DO 206 J=1,4
IJ=IK+J
206 BIGK(II,IJ)=BIGK(II,IJ)+SMALL(I,J,K)
210 CONTINUE
```

SUROUTIN FIXFO İLE ELEMAN ANKASTRE UC KUVVETLERININ HESAPLANMASI VE BIRLESTIRILMESI

```
DO 215 I=1,MX
215 PTOT(I)=0.0
IF (N3) 211,221,221
211 DO 220 L=1,NEL
K=KPL(L)
220 CALL FIXFO (H(K),V(K),HL(L),VL(L),NPI(L),NPJ(L),P,15,PTOT,400,K)
```

KISMI YUZEYSEL YUKLER ICIN ANKASTRE UC KUVVETLERININ HESAPLANMASI VE BIRLESTIRILMESI

```
221 IF (NSURL) 231,231,222
222 DO 230 I=1,NSURL
L=LEL(I)
```



```

C      BU HARMONIKLER ICIN ESDEGER UNIF. YUKUN BULUNMASI
      IF (SURDE(I)) 223,224,223
223    C=SIN(FK*SURXI(I))*SIN(FK*SURDE(I)/2.)
      GO TO 225
224    C=SIN(FK*SURXI(I))*FK/2.
225    EQH=SURHL(I)*C
      EQV=SURVL(I)*C
230    CALL FIXFO (H(K),V(K),EQH,EQV,NPI(L),NPJ(L),P,15,PTOT,400,K)

```

```

C
231    IF (N3) 232,239,239
232    DO 238 I=1,MX
      K=LIND(I)
      GO TO (233,234,235,238,236),K
233    PTOT(I)=-PTOT(I)
      GO TO 238
234    PTOT(I)=AJP(I)*SERIE(1)-PTOT(I)
      GO TO 238
235    PTOT(I)=AJP(I)*SERIE(2)-PTOT(I)
      GO TO 238
236    PTOT(I)=AJP(I)-PTOT(I)
238    CONTINUE
      GO TO 241
239    DO 240 I=1,MX
240    PTOT(I)=-PTOT(I)

```

```

C
C      MUNFERIT AYRIT YUKLERI TOPLAMI
C

```

```

241    IF (NCONL) 251,251,242
242    DO 250 I=1,NCONL
      J=LJT(I)*4-4
      C=FK*CONXI(I)
      IF (CONDE(I)) 244,244,243
243    XX=FK*CONDE(I)/2
      EQH=2./(XX*SPAN)*SIN(XX)
      EQS=EQH*COS(C)
      EQH=EQH*SIN(C)
      GO TO 245
244    XX=2./SPAN
      EQH=XX*SIN(C)
      EQS=XX*COS(C)
245    PTOT(J+1)=PTOT(J+1)+EQH*CONHL(I)
      PTOT(J+2)=PTOT(J+2)+EQH*CONVL(I)
      PTOT(J+3)=PTOT(J+3)+EQH*CONM(I)
250    PTOT(J+4)=PTOT(J+4)+EQS*CONS(I)

```

```

C
C      VERILEN ODEPLASMANLAR ICIN KONTROL VE BIGK,PTOT MATRISLERI DEGISTI
C      RILMESI
C

```

```

251    DO 260 J=1,NJT
      DO 260 I=1,4
      IF (LCASE(I,J)-4) 260,252,260
252    IL=(J-1)*4+I
      DO 253 L=1,NXBAN
253    BIGK(IL,L)=0.0
      PTOT(IL)=0.0
      K=J-MAXJT
      L=MAXO(K,1)
      DO 255 M=L,J
      N=(J-M)*4+I
      II=(M-1)*4
      DO 255 IJ=1,4
      IK=II+IJ
255    BIGK(IK,N)=0.0
      BIGK(IL,I)=1.0

```


INVERT DIAGONAL K AND MODIFY BIGK AND FOR BACKSUBSTITUTION

```

N=0
300 N=N+1
    IL=N*4
    L=IL-4
    DO 301 I=1,4
        K=I+L
        DO 301 J=1,4
301 A(I,J)=BIGK(K,J)
    CALL SYMIN(A,4,4)
    K=NJT-N
    IF (K) 400,400,302
302 M=MINO(K,MAXJT)
    IK=M*4
    DO 305 I=1,4
        II=I+L
        DO 305 J=1,4
305 BIGK(II,J)=A(I,J)
    J=0
    DO 340 IM=1,M
    DO 340 IN=1,4
    J=J+1
    IJ=J+4
    DO 320 I=1,4
        C=0.0
        DO 315 K=1,4
            II=K+L
315 C=C+BIGK(II,IJ)*A(K,I)
320 BTAV(I)=C

```

```

    K=J+IL
    C=0.0
    DO 330 I=1,4
        II=L+I
330 C=C+BTAV(I)*PTOT(II)
    PTOT(K)=PTOT(K)-C
    IS=0
    IU=IM*4-3
    DO 340 I=IU,IK
        IT=I+4
        IS=IS+1
        C=0.0
        DO 335 II=1,4
            IQ=II+L
335 C=C+BTAV(II)*BIGK(IQ,IT)
        BIGK(K,IS)=BIGK(K,IS)-C
340 CONTINUE
    GO TO 300

```

YERINE KOYMA ISLEME BASLA VE BILINMEYEN AYRIT DEPLASMANLARI IC
IN COZUM YAP

```

L=IL-4      SEE AFTET STATEMENT 300
400 DO 401 I=1,4
    J=I+L
401 RBAR(I)=PTOT(J)
    DO 403 I=1,4
        J=I+L

```



```

DO 402 K=1,4
402 C=C+A(I,K)*RBAR(K)
403 DISP(J)=C
C N=NJT FROM STATEMENT 300
410 N=N-1
IF (N) 500,500,411
411 M=MINO((NJT-N),MAXJT)*4+4
IN=N*4
IL=IN-4
IM=IL+1
DO 415 I=5,M
J=I+IL
415 D(I)=DISP(J)
DO 420 I=1,4
II=IL+I
C=0.0
DO 418 J=5,M
418 C=C+BIGK(II,J)*D(J)
420 RBAR(I)=PTOT(II)-C
DO 425 I=IM,IN
C=0.0
DO 424 J=1,4
424 C=C+BIGK(I,J)*RBAR(J)
425 DISP(I)=C
GO TO 410

C
C FARKLI NOKTALARDAKI AYRIT DEPLASMANLARINI HESAPLA VE TOPLA
C
500 DO 510 II=1,NXP
C=COSKX(MM,II)
S=SINKX(MM,II)
DO 510 L=4,MX,4
I=L-3
J=L-1
DO 505 K=I,J
505 RJDIS(K,II)=RJDIS(K,II)+DISP(K)*S
510 RJDIS(L,II)=RJDIS(L,II)+DISP(L)*C

C
C HER ELEMANA AIT KENAR DEPLASMANINI HESAPLA VE TAPE 1 DE DEPOLA
C
N=0
DO 600 L=1,NEL
K=KPL(L)
I=NPI(L)
J=NPJ(L)
C=H(K)
S=V(K)
EDP(N+1)=DISP(I+3)
EDP(N+2)=DISP(J+3)
EDP(N+3)=+S*DISP(I+1)+C*DISP(I+2)
EDP(N+4)=+S*DISP(J+1)+C*DISP(J+2)
EDP(N+5)=-DISP(I+4)
EDP(N+6)=-DISP(J+4)
EDP(N+7)=-C*DISP(I+1)+S*DISP(I+2)
EDP(N+8)=-C*DISP(J+1)+S*DISP(J+2)
C EDP(3,5,6,8) IN ISARETLERİ GOLDBERG IN ISARET KABULUNE GORE
C DEGISTIRILMISTIR
600 N=N+8
WRITE(11)(EDP(I),I=1,N)

C
700 CONTINUE
END FILE 11

C
C AYRIT DEPLASMANLARINA AIT NETICELERIN YAZILMASI

```



```
DO 710 I=1,NJT
J=4*I
LIND(J)=I
LIND(J-1)=I
LIND(J-2)=I
710 LIND(J-3)=I
IF (NXP-7) 720,720,721
720 II=NXP
IL=1
GO TO 730
721 II=7
IJ=NXP
IL=2
730 WRITE(6,40)
CALL PINVA (LIND,RJDIS,400,10,XP,MX,II,IJ,IL,1)
WRITE(6,41)
CALL PINVA (LIND,RJDIS,400,10,XP,MX,II,IJ,IL,2)
WRITE(6,42)
CALL PINVA (LIND,RJDIS,400,10,XP,MX,II,IJ,IL,3)
WRITE(6,43)
CALL PINVA (LIND,RJDIS,400,10,XP,MX,II,IJ,IL,4)
CALL PLAFO
GO TO 101
999 STOP
END
```


// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	4444	4444	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*IOCS(1132 PRINTER,CARD,DISK,KEYBOARD,TYPEWRITER)

*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE PLAFO

C

```

      DIMENSION DI(1200),DIS(8,150),CON(13),CKX(10),SKX(10)
      DIMENSION XM(10,17),YM(10,17),XYM(10,17),XQ(10,17),YQ(10,17),
1  XN(10,17),YN(10,17),XYN(10,17),WD(10,17),UD(10,17),VD(10,17),
2  GX(10,17),A(8,1500),CONT(13,100)

```

C

```

      COMMON /BLOCK/XP(10),NPI(150),
1  NPJ(150),KPL(150),NSEC(150),HL(150),VL(150),LEL(50),SURHL(50),
2  SURVL(50),SURXI(50),SURDE(50),SINKX(100,10),COSKX(100,10),
3  MM,PI,SPAN,NEL,NJT,NPL,NXP,NSURL,MHARM,N1,N2,I1,IJ,IL
      COMMON/BLOCK2/PWTH(15),TH(15),E(15),FNU(15)
      EQUIVALENCE (DI(1),DIS(1)),
1  (FKT,CON(1)),(FKC,CON(2)),(SC1,CON(3)),(SC2,CON(4)),(SC3,CON(5)),
2  (FL1,CON(6)),(FL2,CON(7)),(FL3,CON(8)),(FL4,CON(9)),(FL5,CON(10)),
3  (FL6,CON(11)),(FL7,CON(12)),(FL8,CON(13))

```

C

C

C

```

      NELIN=12000/(MM*8)-1
      NOFPL=0
      NEL2=0

```

C

C

C

TAPE 1 DEN KENAR DEPLASMANLARINI OKU

```

30  NEL1=NEL2+1
      IF (NEL1-NEL) 31,31,100
31  NEL2=AMINO((NEL1+NELIN),NEL)
      NDI=NEL2*8
      REWIND 11
      L=0
      DO 35 I=1,MM
      READ (11) (DI(J),J=1,NDI)
      DO 35 J=NEL1,NEL2
      L=L+1
      DO 35 K=1,8
35  A(K,L)=DIS(K,J)

```

C

C

C

HERBIR ELEMAN ICIN

```

      NDI=NEL2-NEL1+1
      DO 99 IE=NEL1,NEL2
      FN=NSEC(IE)
      IF (FN) 99,99,38
38  NUMY=NSEC(IE)+1
      IEPL=KPL(IE)

```

C

```

      DO 40 J=1,NUMY
      DO 40 K=1,NXP
      WD(K,J)=0.0
      UD(K,J)=0.0
      VD(K,J)=0.0
      YM(K,J)=0.0

```



```

XYM(K,J)=0.0
XQ(K,J)=0.0
YQ(K,J)=0.0
XN(K,J)=0.0
YN(K,J)=0.0
GEX(K,J)=0.0
40 XYN(K,J)=0.0
   IF (IEPL-NOFPL) 41,45,41
41 U=FNU(IEPL)
   B=PWTH(IEPL)
   T=FNU(IEPL)/TH(IEPL)
   EM=E(IEPL)
   D=E(IEPL)*TH(IEPL)**3/(12.*(1.-U**2))
   D1=D*(1.-U)/2.
   D2=E(IEPL)*TH(IEPL)/(2.*(1.+U))
   U1=2./(1.-U)
   U2=U1*U
   U3=(1.+U)/(1.-U)
   U5=2./(1.+U)
   U4=U5*U
   U6=(1.-U)/(1.+U)
   U7=(3.+U)/(1.+U)
   UV=(3.-U)/(1.+U)
45 DIFY=B/FN

```

HER BIR HARMONIK ICIN

```

N=0
DO 80 NN=N1,MHARM,N2
N=N+1
N3=(-1)**NN
   IF (IEPL-NOFPL) 49,47,49
47 DO 48 I=1,13
48 CON(I)=CONT(I,N)
   GO TO 51
49 FM=NN
   SC1=FM*PI/SPAN
   SC2=SC1**2
   SC3=SC1**3
   G=SC1*B
   EG=EXP(-G)
   EG2=EG*EG
   T1=1.+EG
   T2=1.-EG
   S=G/2.
   FKT=T2/T1
   FKC=S/FKT
   FKT=S*FKT
   S=2.*G*EG
   C=1.-EG2
   T3=S+C
   T4=S-C
   FL1=T1/T3
   FL2=T2/T4
   FL3=T2/T3
   FL4=T1/T4
   C=C*UV
   T3=S+C
   T4=S-C
   FL5=T1/T4
   FL6=T2/T3
   FL7=T2/T4
   FL8=T1/T3
   DO 50 I=1,13
   CONT(I,N)=CON(I,N)

```



```
51 I=NDI*(N-1)+(IE-NEL1+1)
```

```
DISP1=A(1,I)
```

```
DISP2=A(2,I)
```

```
DISP3=A(3,I)
```

```
DISP4=A(4,I)
```

```
DISP5=A(5,I)
```

```
DISP6=A(6,I)
```

```
DISP7=A(7,I)
```

```
DISP8=A(8,I)
```

```
DO 52 J=1,NXP
```

```
CKX(J)=COSKX(N,J)
```

```
52 SKX(J)=SINKX(N,J)
```

C

C

C

```
BU HARMONIGE AIT ZL, YL I BUL
```

```
IF (N3) 53,54,54
```

```
53 ZLOAD=VL(IE)
```

```
YLOAD=HL(IE)
```

```
GO TO 55
```

```
54 ZLOAD=0.0
```

```
YLOAD=0.0
```

```
55 IF (NSURL) 65,65,56
```

```
56 DO 62 I=1,NSURL
```

```
IF (LEL(I)-IE) 62,57,62
```

```
57 IF (SURDE(I)) 58,59,58
```

```
58 T1=SIN(SC1*SURXI(I))*SIN(SC1*SURDE(I)/2.)
```

```
GO TO 60
```

```
59 T1=SIN(SC1*SURXI(I))*SC1/2.
```

```
60 ZLOAD=ZLOAD+SURVL(I)*T1
```

```
YLOAD=YLOAD+SURHL(I)*T1
```

```
62 CONTINUE
```

```
65 TOTLD=ABS(ZLOAD)+ABS(YLOAD)
```

C

C

C

```
HER BIR ENINE KESIT ICIN
```

```
D1SC1=D1*SC1
```

```
DSC2=D*SC2
```

```
D1SC2=D1*SC2
```

```
DSC3=D*SC3
```

```
D2SC1=D2*SC1
```

```
DO 80 IY=1,NUMY
```

```
IJK=(IY-1)*(IY-NUMY)
```

```
FI=IY-1
```

```
FI=FI*DIFY
```

```
Y=B/2.-FI
```

```
T1=SC1*FI
```

```
T2=(B-FI)*SC1
```

```
T1=EXP(-T1)
```

```
T2=EXP(-T2)
```

```
SY=T1-T2
```

```
CY=T1+T2
```

```
GY=SC1*Y
```

```
SY1=GY*SY
```

```
CY1=GY*CY
```

C

C

C

```
KENAR DEPLASMANLARIN SEBEP OLDUGU MAX. IC KUVVETLER
```

```
T1=FL1*(SY1-FKT*CY)
```

```
T2=FL2*(CY1-FKC*SY)
```

```
FWD=(DISP1*(T1-T2)-DISP2*(T1+T2))/SC1
```

```
T1=FL1*(SY1+(U1-FKT)*CY)
```

```
T2=FL2*(CY1+(U1-FKC)*SY)
```

```
FM/=D1SC1*(DISP1*(-T1+T2)+DISP2*(T1+T2))
```


FMX=D1SC1*(DISP1*(T1-T2)-DISP2*(T1+T2))

T1=FL1*SY

T2=FL2*CY

QY=DSC2*(DISP1*(-T1+T2)+DISP2*(T1+T2))

T1=FL1*CY

T2=FL2*SY

QX=DSC2*(DISP1*(-T1+T2)+DISP2*(T1+T2))

T1=FL1*(CY1+(1.-FKT)*SY)

T2=FL2*(SY1+(1.-FKC)*CY)

FMXY=D1SC1*(DISP1*(-T1+T2)+DISP2*(T1+T2))

T1=FL3*(SY1-(1.+FKC)*CY)

T2=FL4*(CY1-(1.+FKT)*SY)

FWD=0.5*((DISP3*(T2-T1)-DISP4*(T1+T2))+FWD)

T1=FL3*(SY1+(U3-FKC)*CY)

T2=FL4*(CY1+(U3-FKT)*SY)

FMY=D1SC2*(DISP3*(T1-T2)+DISP4*(T1+T2))+FMY

T1=FL3*(SY1-(U3+FKC)*CY)

T2=FL4*(CY1-(U3+FKT)*SY)

FMX=D1SC2*(DISP3*(-T1+T2)-DISP4*(T1+T2))+FMX

T1=FL3*SY

T2=FL4*CY

QY=DSC3*(DISP3*(T1-T2)+DISP4*(T1+T2))+QY

T1=FL3*CY

T2=FL4*SY

QX=DSC3*(DISP3*(T1-T2)+DISP4*(T1+T2))+QX

T1=FL3*(CY1-FKC*SY)

T2=FL4*(SY1-FKT*CY)

FMXY=D1SC2*(DISP3*(T1-T2)+DISP4*(T1+T2))+FMXY

T1=FL5*(SY1-FKT*CY)

T2=FL6*(CY1-FKC*SY)

FUD=DISP7*(T1-T2)-DISP8*(T1+T2)

T1=FL5*(CY1-(UV+FKT)*SY)

T2=FL6*(SY1-(UV+FKC)*CY)

FVD=DISP7*(T1-T2)-DISP8*(T1+T2)

T1=FL5*(SY1+(U4-FKT)*CY)

T2=FL6*(CY1+(U4-FKC)*SY)

FNX=DISP7*(-T1+T2)+DISP8*(T1+T2)

T1=FL5*(SY1-(U5+FKT)*CY)

T2=FL6*(CY1-(U5+FKC)*SY)

FNY=DISP7*(T1-T2)-DISP8*(T1+T2)

T1=FL5*(CY1-(U6+FKT)*SY)

T2=FL6*(SY1-(U6+FKC)*CY)

FNXY=DISP7*(T1-T2)-DISP8*(T1+T2)

T1=FL7*(SY1+(UV-FKC)*CY)

T2=FL8*(CY1+(UV-FKT)*SY)

FUD=0.5*((DISP5*(T2-T1)-DISP6*(T1+T2))+FUD)

T1=FL7*(CY1-FKC*SY)

T2=FL8*(SY1-FKT*CY)

FVD=0.5*((DISP5*(T2-T1)-DISP6*(T1+T2))+FVD)

T1=FL7*(SY1+(U7-FKC)*CY)

T2=FL8*(CY1+(U7-FKT)*SY)

FNX=D2SC1*((DISP5*(T1-T2)+DISP6*(T1+T2))+FNX)

T1=FL7*(SY1+(U6-FKC)*CY)

T2=FL8*(CY1+(U6-FKT)*SY)

FNY=D2SC1*((DISP5*(-T1+T2)-DISP6*(T1+T2))+FNY)

T1=FL7*(CY1+(U5-FKC)*SY)

T2=FL8*(SY1+(U5-FKT)*CY)

FNXY=D2SC1*((DISP5*(T2-T1)-DISP6*(T1+T2))+FNXY)

FGEX=SC1*FUD*EM+T*FNY

YUZEYSEL YUKLERDEN MEYDANA GELEN IC KUVVETLER

IF (TOTLD) 68,70,68

68 T1=4.*ZLOAD*(1.-U)/(SC3*SPAN)

T2=FKC


```

FMY=-T1*(FL3*(SY1+(U3-T2)*CY)-U2*0.5)+FMY
FMX= T1*(FL3*(SY1-(U3+T2)*CY)+U1*0.5)+FMX
FMXY=-T1*FL3*(CY1-T2*SY)+FMXY
T1=-8.*ZLOAD/(SC2*SPAN)
QY=T1*SY*FL3+QY
QX=0.5*T1*(2.*CY*FL3-1.)+QX
T1=8.*YLOAD/(SC2*SPAN)
FNY = T1*FL6*(CY1-(T2+U5)*SY)+FNY
FGEX=FGEX+T1*T*FL6*(CY1-(T2+U5)*SY)
FNX =-T1*FL6*(CY1-(T2-U4)*SY)+FNX
FNXY= 0.5*T1*(2.*FL6*(SY1-(T2+U6)*CY)+1.)+FNXY
IF (IJK) 69,70,69.
69 T1=T1/(2.*D2SC1)
FUD=T1*FL6*(CY1-T2*SY)+FUD
FGEX=FGEX+EM*SC1*T1*FL6*(CY1-T2*SY)
FVD=T1*(FL6*(SY1-(UV+T2)*CY)+1.)+FVD
T1=4.*ZLOAD/(DSC3*SC2*SPAN)
FWD=T1*(FL3*(SY1-(1.+T2)*CY)+1.)+FWD

```

IC KUVVETLERI TOPLA

```

70 DO 75 I=1,NXP
T1=SKX(I)
T2=CKX(I)
WD(I,IY)=WD(I,IY)+FWD*T1
UD(I,IY)=UD(I,IY)+FUD*T2
VD(I,IY)=VD(I,IY)+FVD*T1
XM(I,IY)=XM(I,IY)+FMX*T1
YM(I,IY)=YM(I,IY)+FMY*T1
XYM(I,IY)=XYM(I,IY)+FMXY*T2
XQ(I,IY)=XQ(I,IY)+QX*T2
YQ(I,IY)=YQ(I,IY)+QY*T1
XN(I,IY)=XN(I,IY)+FNX*T1
YN(I,IY)=YN(I,IY)+FNY*T1
GEX(I,IY)=GEX(I,IY)+FGEX*T1
75 XYN(I,IY)=XYN(I,IY)+FNXY*T2
80 CONTINUE

```

HER ELEMANA AIT IC KUVVETLERI YAZ

```

10 FORMAT (73H1HER ELEMEN NO.SU ICIN BIR BIRIM UZUNLUKTAKI IC KUVVETL
1ER VE DEPLASMANLAR/,I4,3H VE,I3,21H DUGUMLERI ARASINDAKI,I3,13H NO
2LU ELEMEN )
11 FORMAT (////10X,5H M(X))
12 FORMAT (////10X,5H M(Y))
13 FORMAT (////10X,6H M(XY))
14 FORMAT (////10X,5H Q(X))
15 FORMAT (////10X,5H Q(Y))
16 FORMAT (////10X,5H N(X))
17 FORMAT (////10X,5H N(Y))
18 FORMAT (////10X,6H N(XY))
19 FORMAT (////10X,2H U)
20 FORMAT (////10X,2H V)
21 FORMAT (////10X,2H W)
22 FORMAT(////10X,15H BOYUNA GERILME)

```

```

I=NPI(IE)/4+1
J=NPJ(IE)/4+1
WRITE(6,10)I,J,IE
WRITE(6,11)
CALL OPRIN (XM,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
WRITE(6,12)
CALL OPRIN (YM,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
WRITE(6,13)

```


PAGE 6

```

WRITE(6,14)
CALL OPRIN (XQ,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
WRITE(6,15)
CALL OPRIN (YQ,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
WRITE(6,16)
CALL OPRIN (XN,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
WRITE(6,17)
CALL OPRIN (YN,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
WRITE(6,18)
CALL OPRIN (XYN,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
WRITE(6,19)
CALL OPRIN (UD,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
WRITE(6,20)
CALL OPRIN (VD,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
WRITE(6,21)
CALL OPRIN (WD,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
WRITE(6,22)
CALL OPRIN(GFX,10,17,XP,NUMY,II,IJ,IL)
NOFPL=IFPL
99 CONTINUE
GO TO 30
100 RETURN
END

```


// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	4444	4444	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*IOCS(1132 PRINTER,CARD,DISK,KEYBOARD,TYPEWRITER)

*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE LOADK (FK,PL,M,NPL,N3)

DIMENSION SK(8,8),SKA(8,8)

COMMON/BLOCK1/H(15),V(15),SMALL(8,8,15),P(8,15)

COMMON/BLOCK2/PWTH(15),TH(15),E(15),FNU(15)

C

WPI=FK

WPI2=WPI**2

WPI3=WPI**3

DO 100 L=1,NPL

U=FNU(L)

HD=H(L)

VD=V(L)

C

C HESAP SABITLERININ HESAPLANMASI

C

D1=E(L)*TH(L)**3/(12.*(1.-U**2))

D2=E(L)*TH(L)/((1.+U)**2)*WPI

G=WPI*PWTH(L)

EG=EXP(-G)

EG2=EG*EG

C=1.+EG2

CS=1.-EG2

EG=EG*2.

G=G*EG

CC=EG+C

SS=C-EG

G1=G+CS

G2=G-CS

G3=(3.-U)*CS/(1.+U)

G4=G-G3

G3=G+G3

C

C DEPLASMAN DONUSUM MATRISI

C

C DO 516 I=1,8

C DO 516 J=1,8

C 516 A(I,J)=0.

C A(1,3)=1.

C A(2,7)=1.

C A(3,1)=-VD

C A(3,2)=-HD

C A(4,5)=VD

C A(4,6)=HD

C A(5,4)=1.

C A(6,8)=1.

C A(7,1)=-HD

C A(7,2)=VD

C A(8,5)=HD

C A(8,6)=-VD

C

C YUKLU TEK PLAGA AIT RIJITLIK MATRISI

C

SK(1,1)=+D1*WPI*(CC/G1-SS/G2)


```

SK(1,3)=+D1*WPI2*(CS/G1-CS/G2-1.+U)
SK(1,4)=-D1*WPI2*(CS/G1+CS/G2)
SK(2,1)=SK(1,2)
SK(2,2)=SK(1,1)
SK(2,3)=SK(1,4)
SK(2,4)=SK(1,3)
SK(3,1)=SK(1,3)
SK(3,2)=SK(1,4)
SK(3,3)=+D1*WPI3*(SS/G1-CC/G2)
SK(3,4)=-D1*WPI3*(SS/G1+CC/G2)
SK(4,1)=SK(1,4)
SK(4,2)=SK(1,3)
SK(4,3)=SK(3,4)
SK(4,4)=SK(3,3)
SK(5,5)=+D2*(-SS/G4+CC/G3)
SK(5,6)=-D2*(SS/G4+CC/G3)
SK(5,7)=-D2*(CS/G4-CS/G3+1.+U)
SK(5,8)=-D2*(CS/G4+CS/G3)
SK(6,5)=SK(5,6)
SK(6,6)=SK(5,5)
SK(6,7)=SK(5,8)
SK(6,8)=SK(5,7)
SK(7,5)=SK(5,7)
SK(7,6)=SK(5,8)
SK(7,7)=+D2*(-CC/G4+SS/G3)
SK(7,8)=-D2*(CC/G4+SS/G3)
SK(8,5)=SK(5,8)
SK(8,6)=SK(5,7)
SK(8,7)=SK(7,8)
SK(8,8)=SK(7,7)

```

RIJITLIK MATRISI *DONUSUM MATRISI

```

DO 10 I=1,4
J=I+4
SKA(I,1)=-SK(I,3)*VD
SKA(I,2)=-SK(I,3)*HD
SKA(I,3)=SK(I,1)
SKA(I,4)=0.0
SKA(I,5)=SK(I,4)*VD
SKA(I,6)=SK(I,4)*HD
SKA(I,7)=SK(I,2)
SKA(I,8)=0.0
SKA(J,1)=-SK(J,7)*HD
SKA(J,2)=SK(J,7)*VD
SKA(J,3)=0.0
SKA(J,4)=SK(J,5)
SKA(J,5)=SK(J,8)*HD
SKA(J,6)=-SK(J,8)*VD
SKA(J,7)=0.0
10 SKA(J,8)=SK(J,6)

```

TRANSPEZE DONUSUM MATRISI*RIJITLIK*DONUSUM MATRISI

```

DO 20 I=1,8
SMALL(1,I,L)=-SKA(3,I)*VD-SKA(7,I)*HD
SMALL(2,I,L)=-SKA(3,I)*HD+SKA(7,I)*VD
SMALL(3,I,L)=SKA(1,I)
SMALL(4,I,L)=SKA(5,I)
SMALL(5,I,L)=SKA(4,I)*VD+SKA(8,I)*HD
SMALL(6,I,L)=SKA(4,I)*HD-SKA(8,I)*VD
SMALL(7,I,L)=SKA(2,I)
20 SMALL(8,I,L)=SKA(6,I)

```


PAGE 3

C

30 P(1,L)=4.*(2.*CS/G1-1.)/(WPI3*PL)

P(2,L)=-P(1,L)

P(3,L)=8.*SS/(G1*WPI2*PL)

P(4,L)=-P(3,L)

BB=4.0/((1.+U)*WPI2*PL)

P(6,L)=BB*(4.*CS/G3-1.-U)

P(5,L)=-P(6,L)

P(8,L)=4.*BB*SS/G3

P(7,L)=-P(8,L)

100 CONTINUE

RETURN

END

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	4444	4444	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*IOCS(1132 PRINTER,CARD,DISK,KEYBOARD,TYPEWRITER)

*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE FIXFO (HD,VD,YL,ZL,NPI,NPJ,P,M,PTOT,N,K)
 DIMENSION P(8,15),PTOT(400)

C

PTOT(NPI+1)=PTOT(NPI+1)-VD*ZL*P(3,K)-HD*YL*P(7,K)
 PTOT(NPI+2)=PTOT(NPI+2)-HD*ZL*P(3,K)+VD*YL*P(7,K)
 PTOT(NPI+3)=PTOT(NPI+3)+ZL*P(1,K)
 PTOT(NPI+4)=PTOT(NPI+4)+YL*P(5,K)
 PTOT(NPJ+1)=PTOT(NPJ+1)+VD*ZL*P(4,K)+HD*YL*P(8,K)
 PTOT(NPJ+2)=PTOT(NPJ+2)+HD*ZL*P(4,K)-VD*YL*P(8,K)
 PTOT(NPJ+3)=PTOT(NPJ+3)+ZL*P(2,K)
 PTOT(NPJ+4)=PTOT(NPJ+4)+YL*P(6,K)
 RETURN

END

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	4444	4444	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*IOCS(1132 PRINTER,CARD,DISK,KEYBOARD,TYPEWRITER)

*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE OPRIN (A,M,N,X,NY,K1,K2,NCYC)

DIMENSION A(10,17),X(10),N1(2),N2(2)

1 FORMAT (16,1P7E16.7)

2 FORMAT (6HOKESIT,7(6H-- X =,F10.3))

N1(1)=1

N1(2)=8

N2(1)=K1

N2(2)=K2

DO 10 K=1,NCYC

J1=N1(K)

J2=N2(K)

WRITE(6,2)(X(I),I=J1,J2)

DO 10 I=1,NY

10 WRITE(6,1) I,(A(J,I),J=J1,J2)

RETURN

END

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	4444	4444	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*IOCS(1132 PRINTER,CARD,DISK,KEYBOARD,TYPEWRITER)

*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE SYMIN (A,NMAX,NSIZE)

DIMENSION A(4,4)

DO 5 N=1,NMAX

5 A(N,1)=A(1,N)

C

20 DO 160 N=1,NMAX

30 PIVOT=A(N,N)

40 A(N,N)=-1.

50 DO 60 J=1,NMAX

60 A(N,J)=A(N,J)/PIVOT

80 DO 145 I=1,NMAX

90 IF(N-I) 95,145,95

95 IF(A(I,N)) 100,145,100

100 DO 140 J=1,NMAX

110 IF(N-J) 120,140,120

120 A(I,J)=A(I,J)-A(I,N)*A(N,J)

130 A(J,I)=A(I,J)

140 CONTINUE

145 CONTINUE

150 DO 160 I=1,NMAX

160 A(I,N)=A(N,I)

C

163 DO 165 I=1,NMAX

164 DO 165 J=1,NMAX

165 A(I,J)=-A(I,J)

250 RETURN

END

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	4444	4444	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*IOCS(1132 PRINTER,CARD,DISK,KEYBOARD,TYPEWRITER)

*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE PINVA (IND,D,M,N,X,MX,K1,K2,NCYC,L)

DIMENSION IND(400),D(400,10),X(10),N1(2),N2(2)

1 FORMAT (I6,(1P7E16.7))

2 FORMAT (6H0AYRIT,7(6H X =F10.3))

N1(1)=1

N1(2)=8

N2(1)=K1

N2(2)=K2

DO 10 K=1,NCYC

J1=N1(K)

J2=N2(K)

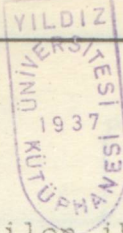
WRITE(6,2)(X(I),I=J1,J2)

DO 10 I=L,MX,4

10 WRITE(6,1)IND(I),(D(I,J),J=J1,J2)

RETURN

END



ÖRNEK

Şekil 9 da enkesiti verilen iki ucu basitmesnetli, açıklığı $L = 36,00$ m ve tek açıklıklı bir betonarme Karayolu köprüsü gözönüne alınmış ve bu köprü Katlanmış Plak Metoduna ait MULTBL bilgisayar programı ile çözülmüştür.

Çözümde: Malzemenin elastisite modülü $E = 210000 \text{ kg/cm}^2$, poisson oranı $\nu = 0,15$ ve hareketli yük tipi olarak $H_{20}-S_{16}$ alınmıştır. Sistemin enkesiti bazı kolaylıklar bakımından şekil 10 da görüldüğü gibi ideal kesit şekline çevrilmiştir. Sistemin zati ağırlığı üst tabliyede (trotuar dahil) $0,055 \text{ kg/cm}^2$, alt tabliyede ve iç gövdelerde $0,036 \text{ kg/cm}^2$ ve dış gövdelerde $0,048 \text{ kg/cm}^2$ hesaplanmıştır. 9 Fourier terimi ile hesap yapılmış ve 7 yükleme yapılmıştır.

1. yükleme: (şekil 11) zati ağırlıktan meydana gelen plak enine eğilme momenti (M_y), boyuna eğilme momenti (M_x), boyuna doğrultuda normal gerilme (σ_x) ve diğer kesit tesirlerini bulmak için yapılmış ve bu değerler şekil 11 de verilmiştir.

2. yükleme: Köprü enine doğrultuda 4 şerit yüklü olması halinde maksimum boyuna gerilmeleri bulmak için yapılmıştır. Bu yüklemeye yükler şartname gereği %25 azaltılmıştır. Netice değerler şekil 13 de gösterilmiştir. Yükün boyuna doğrultudaki konumu şekil 12 de görüldüğü gibidir.

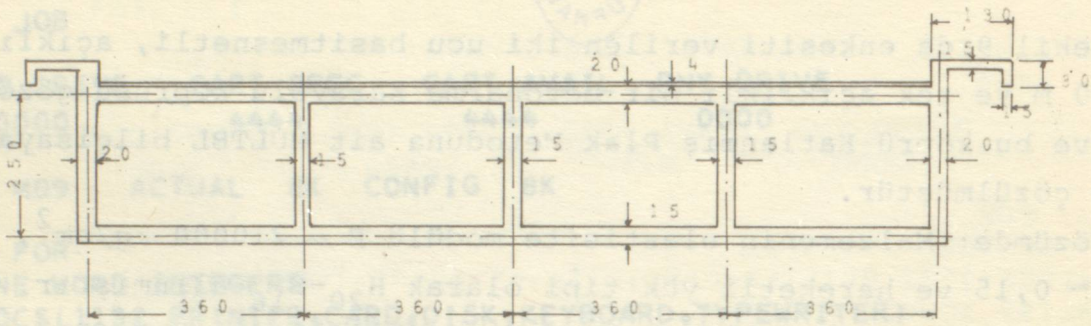
3. yükleme: Köprü enine doğrultuda 3 şerit yüklü olması halinde gene maksimum boyuna gerilmeleri bulmak için yapılmış ve neticeler şekil 14 de gösterildiği gibidir. Burada yükler %10 azaltılmıştır.

4. yükleme: Üst tabliye plağında maksimum enine eğilme momentini bulmak için yapılmıştır. Bu yüklemeye şekil 15 de görüldüğü gibi tekerlek plak ekseninde yüklenmiştir. Neticeler şekil 15 de gösterilmiştir.

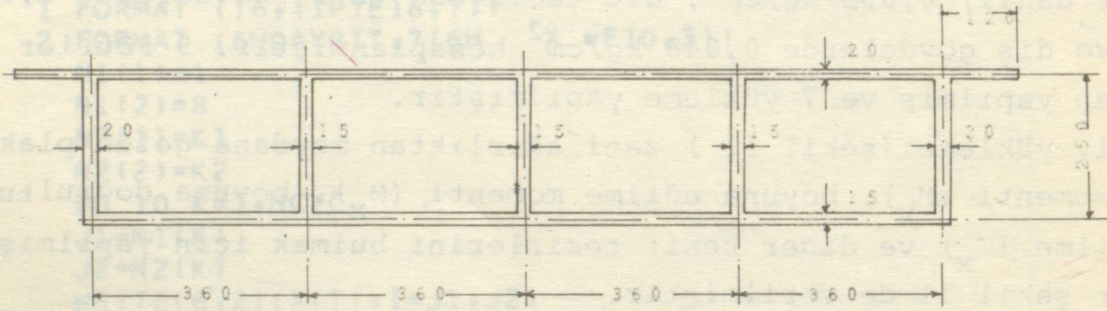
5. Yükleme: 4. yüklemedeki gaye için yapılmıştır. Ancak bu yüklemeye tekerlek yükleri plak eksenine göre simetrik yerleştirilmiştir. Neticeler şekil 16 da gösterilmiş olup yükleme 4 e kıyasla daha küçük değerler vermektedir.

6. ve 7. yüklemeler üst tabliye plağının değişik mesnetlerindeki maksimum eğilme momentini bulmak için yapılmış ve neticeler şekil 17 ve şekil 18 verilmiştir.

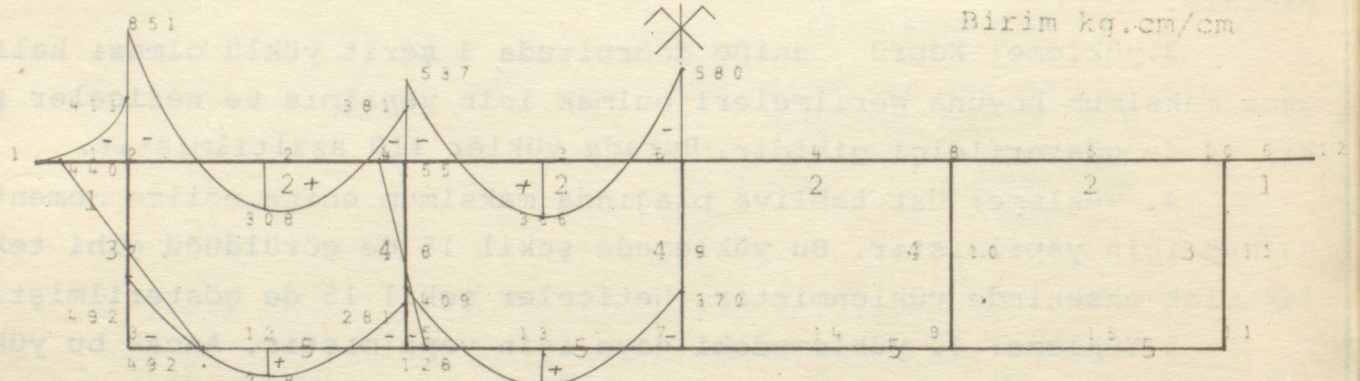
Bu örnekteki köprünün boyutları Kaung-Han Chu ve Elliot Dudnik tarafından çözülen örneğin boyutlarına yakın seçilmiştir. Bu bakımdan neticeleri o örnek ile kıyaslamak mümkündür. Kıyaslama yapıldığında neticelerde önemli bir fark olmadığı ortaya çıkmıştır.



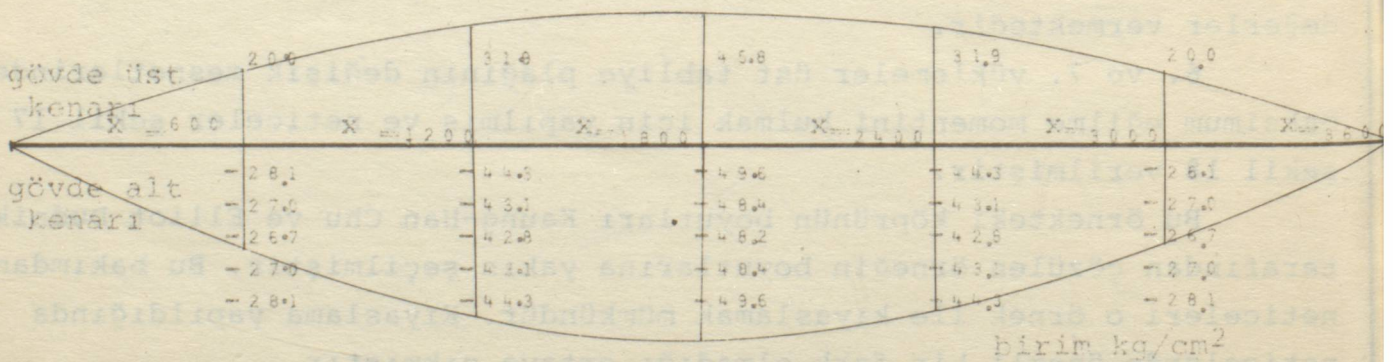
Şekil 9 gerçek köprü enkesiti



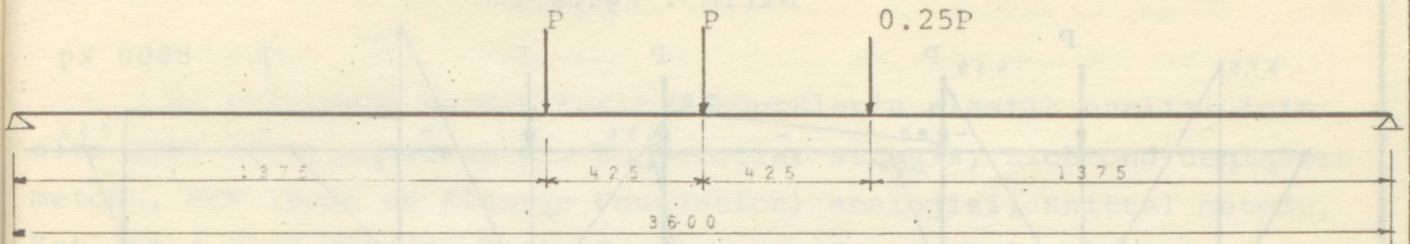
Şekil 10 ideal enkesit



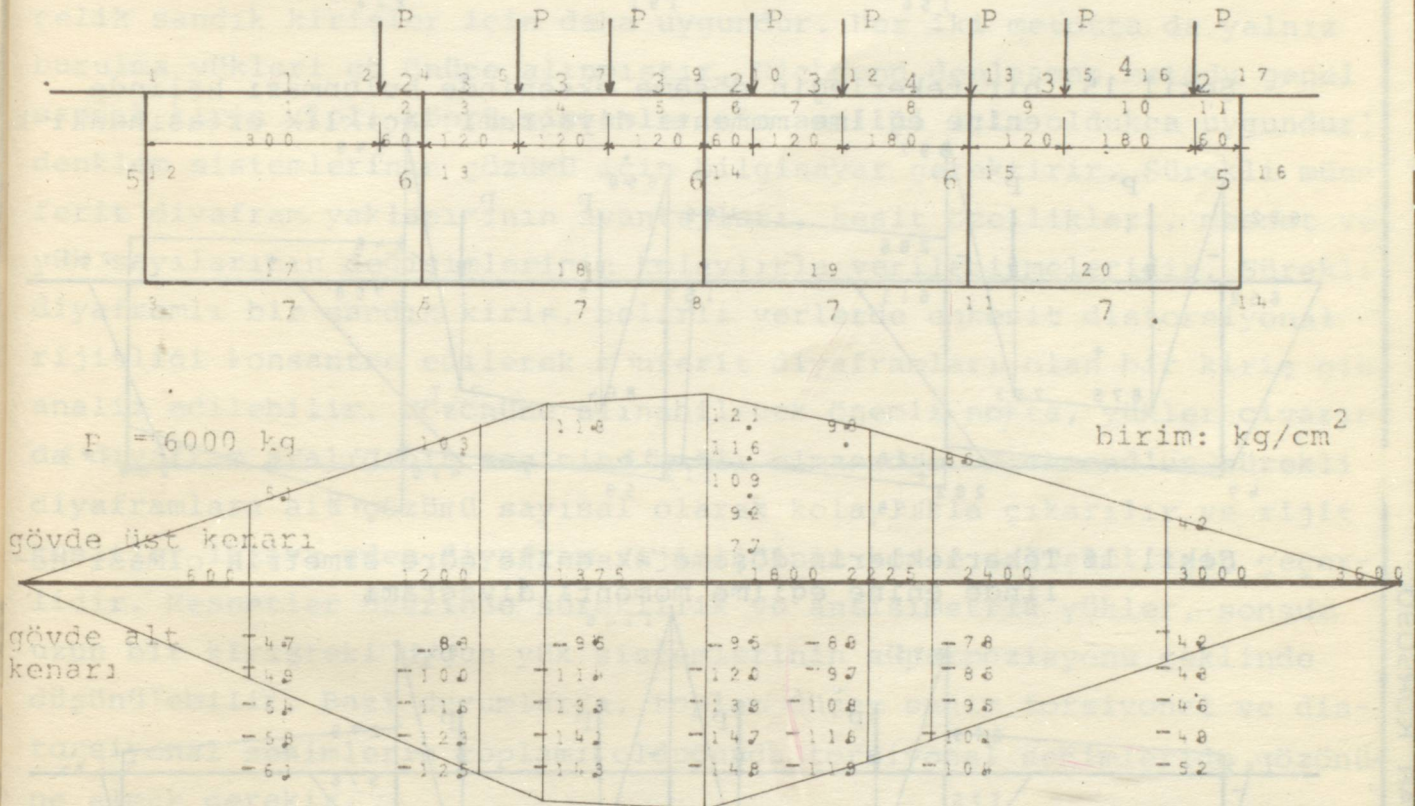
Şekil 11 a Zati ağırlıktan meydana gelen enine eğilme momenti diy.



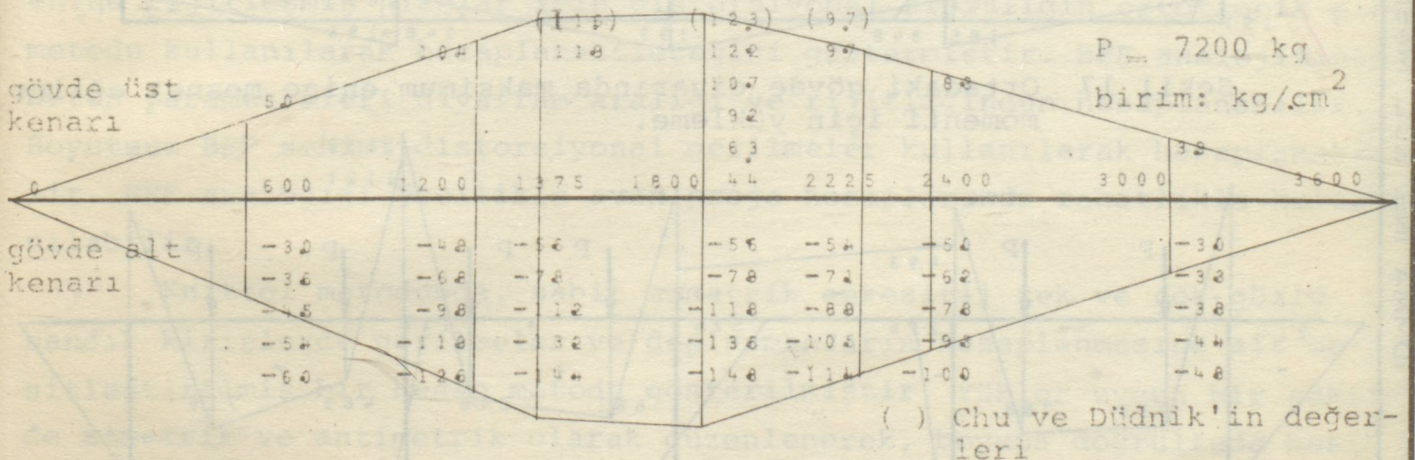
Şekil 11 b. Zati ağırlıktan gövdelerin üst ve alt kenarlarında meydana gelen boyuna gerilmeler.



Sekil 12 Yüklere boyuna doğrultuda yerleşme durumu



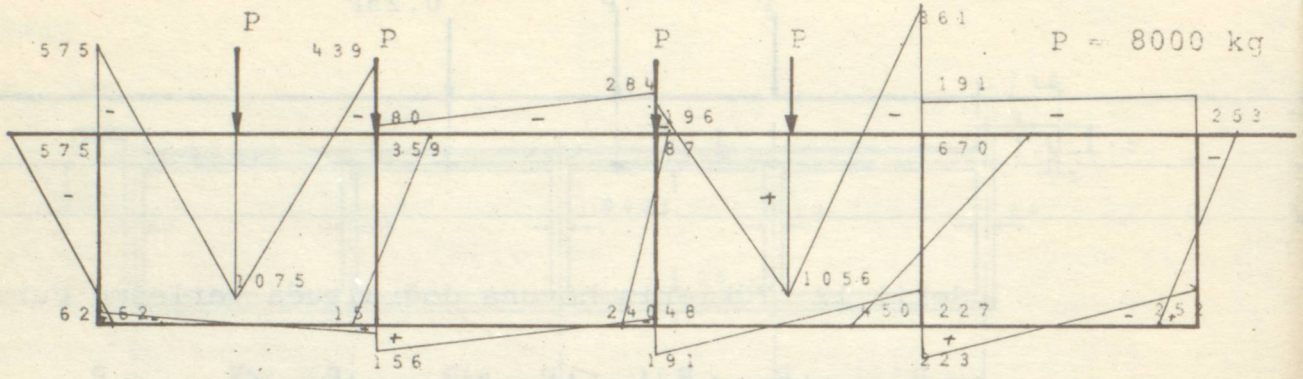
Sekil 13 %25 azaltılmış 4 şerit yüklemeinden, gövdelerin üst ve alt kenarlarında meydana gelen boyuna gerilmeler



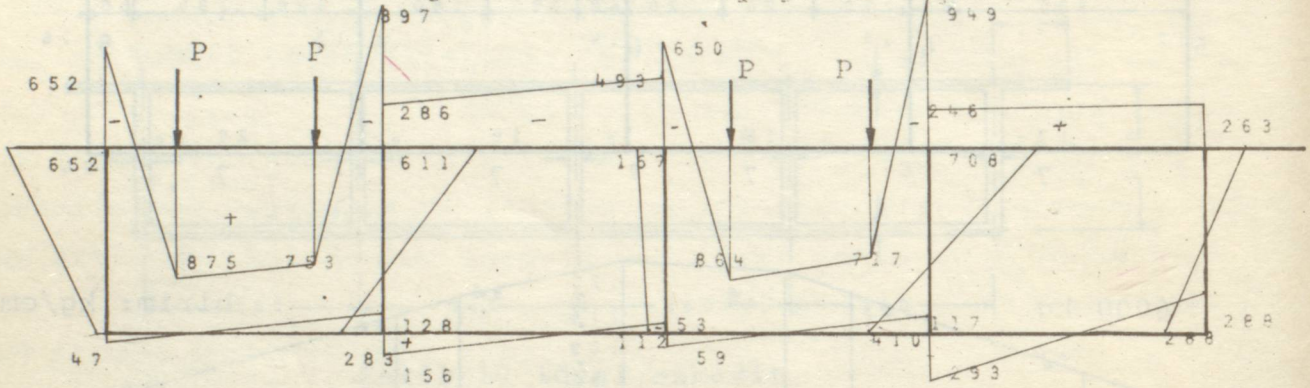
() Chu ve Dündnik'in değerleri

Sekil 14 %10 azaltılmış 3 şerit yüklemeinden, gövdelerin üst ve alt kenarlarında meydana gelen boyuna gerilmeler.

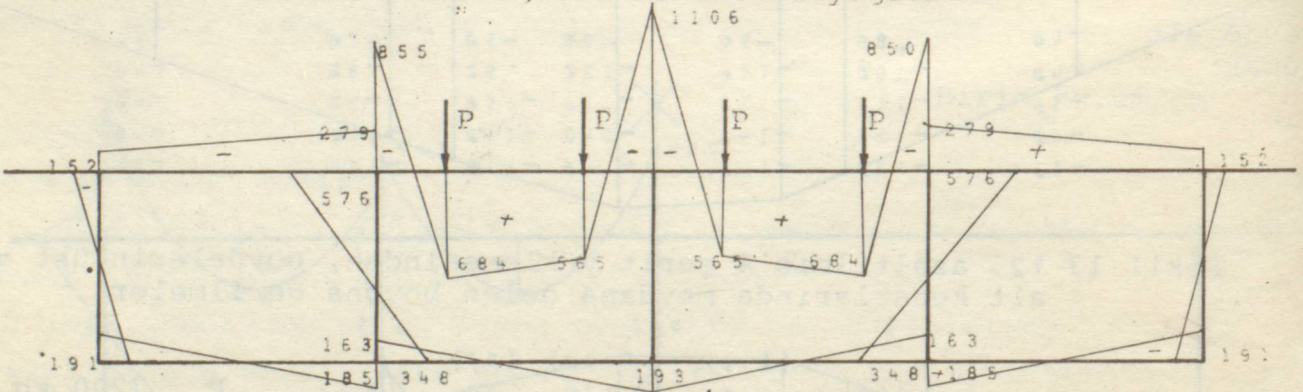
birim : kg.cm/cm



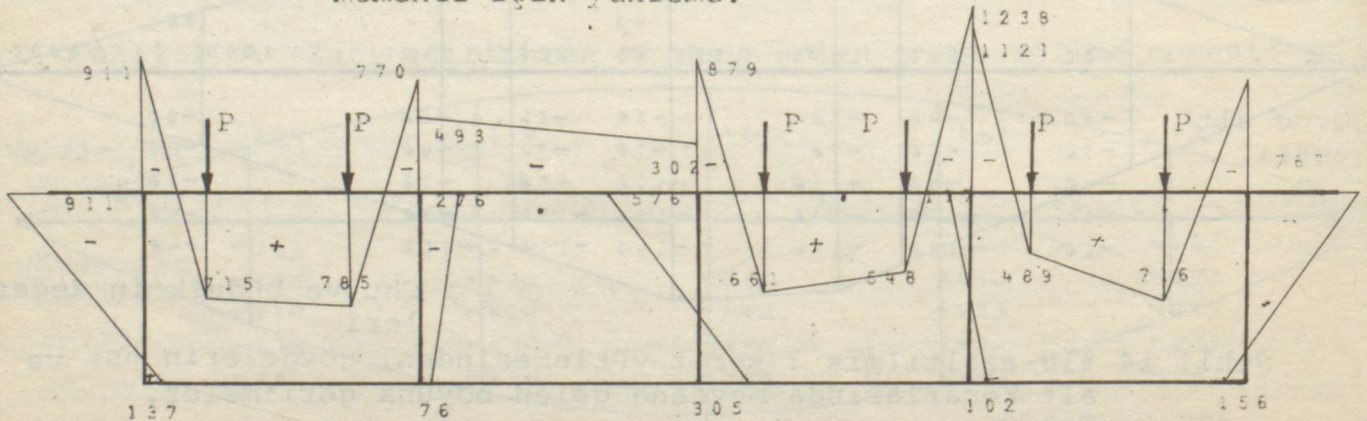
Şekil 15 bir tekerleğin döşeme ekseninde bulunması halinde enine eğilme momenti diyagramı (açıklık ortasındaki ke



Şekil 16 Tekerleklerin döşeme eksenine göre simetrik olması halinde enine eğilme momenti diyagramı



Şekil 17 Ortadaki gövde civarında maksimum enine mesnet eğilme momenti için yükleme.



Şekil 18 Dışın ikinci gövde civarında maksimum döşeme enine mesnet eğilme momentini bulmak için yükleme.

SONUÇ

Bu çalışmada sandık kesitli köprülerin elastik analizi için altı ayrı metot sunulmuştur. Bu metotlar sırayla, Richmond deplasman metodu, BEF (Beam on Elastic Foundation) analogisi, Knittel metodu, Katlanmış Plak metodu, Sonlu Bandlar metodu ve sonlu elemanlar metodu olarak anılmıştır.

Richmond deplasman metodu ve BEF analogisi ortotrop tabliyelı çelik sandık kirişler için daha uygundur. Her iki metotta da yalnız burulma yükleri göz önüne alınmıştır. Richmond deplasman metodu genel sandık kirişli köprü sistemlerinin analizi için oldukça uygundur; denklem sistemlerinin çözümü için bilgisayar gerektirir. Sürekli münferit diyafram yaklaşımının avantajları, kesit özellikleri, mesnet ve yük sayılarının değişimlerinin kolaylıkla verilebilmeleridir. Sürekli diyaframlı bir sandık kiriş, belirli yerlerde enkesit distorsiyonla rijitliği konsantre edilerek münferit diyaframları olan bir kiriş gibi analiz edilebilir. Çözümüne alınabilecek önemli nokta, yükler civarında diyafram aralığının seçimine bağlı olmasıdır. Richmond'un sürekli diyaframlara ait çözümü sayısal olarak kolaylıkla çıkarılır ve rijit kesitler ihtiva eden diyafram rijitliğinin komple değişimi için geçerlidir. Mesnetler üzerinde sürekli ve antisimetrik yükler, sonsuz uzun bir kirişteki uygun yük sistemlerinin süperpozisyonu şeklinde düşünülebilir. Bazı durumlarda, toplam düşey sehım torsiyonel ve distorsiyonel sehımlerin toplamı olduğunda torsiyonel sehımleride gözönüne almak gerekir.

Deforme olabilir enkesitli sandık kirişlerin hesabına ait BEF analogisi ekseriyetle tercih edilir ve hesap işlemi süratlidir. Wright enine rijitleşmiş plaklar için distorsiyonel rijitliğin ortotropik plak metodu kullanılarak hesaplanabileceğini göstermiştir. BEF analogisinin bütün parametreleri diyafram aralığı ve rijitliğinden hesaplanabilir. Boyutsuz BEF sehimi distorsiyonel gerilmeler kullanılarak hesaplanabilir. BEF analogisi özellikle avan proje hesaplarında rahatlıkla kullanılabilir.

Knittel metodunda, sabit simetrik enkesitli tek ve çok gözlü sandık kirişlerde gerilmeler ve deplasmanların hesaplanmasına ait basitleştirilmiş bir hesap metodu gösterilmiştir. Yükler uygun bir şekilde simetrik ve antisimetrik olarak düzenlenerek, boyuna doğrultuda basit eğilme, enine doğrultuda basit eğilme ve Saint-Venant saf kayma bağımsız durumlarını elde etmek mümkündür. Bu durumlar basit işlemler ile analiz edilebilir.

Diğer üç metot A.C. Scordeli'in çalışmalarına dayanmaktadır. Geliştirilen her metodun bir diğerine göre avantaj ve dezavantajları vardır. Katlanmış Plak metodu geliştirilen metotların en doğru netice verenidir. Komple çözüm için en az bilgisayar zamanını gerektirir. Bu metot iki ucunda basit mesnetli tek açıklıklı ve iki ucunda basit mesnetli sürekli kirişlere uygulanır. Enkesiti teşkil eden her plağın, boyuna ve enine doğrultuda, malzeme ve boyutları sabit olmalıdır.

Sonlu bandlar metodu, gene katlanmış metoduna dayanır ve keyfi uç ve ara mesnetleri olan sistemlere tatbik edilebilir. Uygun bir dili sayısı için, katlanmış plak metoduna kıyasla daha fazla bilgisayar zamanını gerektirir. Bu metot her boyuna giriş kesitlerindeki sehimler ve toplam momentlerin yayılışı için tam doğru neticeler verir. Bir gövde üzerinde etkiyen bir konsantrik yük için yükün tatbik edildiği yerde, boyuna gerilme ve enine eğilme momenti değerleri, katlanmış plak metoduna kıyasla daha hassas olarak bulunur. Bu, yükün bulunduğu kısımda band genişliği daha dar alınarak sağlanır. Hurdî döşeme tesiri kabul edilmesi yüzünden gövdeler arasında tatbik edilen konsantrik yükler için yerel döşeme momentleri ve sehimleri hesabında bu metot kullanılamaz.

Sonlu elemanlar metodu, elastik teoriye dayanır ve verilen metotların en genelidir. Bu metotta keyfi sınır şartları, yüklemeler, değişik boyutlar ve malzeme özellikleri ve plaklarda boşluklar gözönüne alınabilir. Bu metodun tek dezavantajı bilgisayar gerektirmesi ve bu bilgisayarda diğer metotlara kıyasla çok fazla bilgisayar zamanını gerektirmesidir. Sehimlere ait doğru neticeler geniş ağ sistemi kullanılarak bulunabilir. Boyuna gerilmeler, enine döşeme momentleri ve her boyuna giriş kesitlerindeki toplam moment yayılışı gibi diğer tersirlere ait (özellikle münferit yük civarında) tam doğru neticeler için daha ince ağ sistemi kullanılmalıdır.

