

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

139 759

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN
DEĞİŞİK SINIR ŞARTLARINA VE GEOMETRİĞE
SAHİP PLAKLARIN TEORİK VE NÜMERİK
METODLARLA ÇÖZÜMÜ**

İnşaat Mühendisi Emad SHAEIR

**FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik
Programında Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Sinan ÇAĞDAŞ

139 759

Prof. Dr. Faruk Yüksekeler
A21

Prof. Dr. ÖZKAN İŞLER
Özkan İşler -

İSTANBUL, 2003

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	i
ŞEKİL LİSTESİ.....	ii
ÇİZELGE LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ VE YAPILAN KABÜLLER	1
2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DİKDÖRTGEN PLAKLARIN ÇÖZÜM METODLARI	3
2.1 Giriş	3
2.2 Elastik zemine oturan dikdörtgen plakların teorik çözümü.....	4
2.2.1 Kalın plaklar	4
2.2.1.1 Reissnes'in kesin teorisiyle elastik zemine oturan plakların çözümü	5
2.2.1.1.1 Plağın denge denklemleri ve gerilme dağılımları.....	5
2.2.1.1.2 Plağın şekil değiştirme bağıntıları	7
2.2.1.1.3 Kesit büyüklüklerinin w yer değiştirmesi cinsinden ifade edilmesi.....	10
2.2.1.1.4 Sınır şartları	13
2.2.1.2 Elastik zemine oturan dikdörtgen plaklarda Navier çözümü.....	14
2.2.1.2.1 Plak üzerine kısmi üniform yayılı yük etkimesi	17
2.2.1.2.2 Plak boydan boya üniform yayılı g_0 yüküne maruz ise	21
2.2.1.2.3 Tekil yükün etkimesi hali	22
2.2.2 İnce plaklar	24
2.2.2.1 Yer değiştirme ve şekil değiştirme	25
2.2.2.2 Gerilmeler ve iç kuvvetler	25
2.2.2.3 Plak diferansiyel denkleminin çıkarılması	27
2.2.2.4 Elastik zemindeki plakların eğilmesi.....	28
2.3 Elastik zemine oturan dikdörtgen plakların nümerik metodlarla çözümü.....	35
2.3.1 İki değişkenli fonksiyonlarda sonlu fark ifadelerinin çıkartılması	35
2.3.2 Dikdörtgen plaklarda klasik diferansiyel denklemin sonlu farklı çözümü....	41
2.3.2.1 Dikdörtgen plaklarda sınır şartlarının sonlu farklarla ifadesi	43
2.3.2.1.1 Plak sabit mesnede oturuyorsa	43
2.3.2.1.2 Plak ankastre mesnede oturuyorsa.....	44
2.3.2.1.3 Plakta serbest uç bulunuyorsa	45
2.3.2.1.4 Plak elastik olarak dönebilen ankastre mesnede oturuyorsa	46
2.3.2.1.5 Plak elastik olarak çökebilen mesnede oturuyorsa	47
2.3.2.2 Elastik zemine oturan ve muhtelif şartlarına haiz olan dikdörtgen plakların sonlu fark denklemlerinin teşkili.....	50
2.3.2.2.1 Elastik zemin üzerindeki dikdörtgen plağın dört kenarından sabit mesnetlere oturması hali	56
2.3.2.2.2 Elastik zemine oturan plağın dört kenarından ankastre mesnede oturması hali	58
2.3.2.2.3 Elastik zemine oturan plağın üç kenarından ankastre mesnede, bir kenarından sabit bir kenarından sabit mesnede oturması hali.....	60
2.3.2.2.4 Elastik zemine oturan plağın komşu iki kenarının ankastre mesnede,	

	diğer kenarında sabit mesnede oturması hali.....	61
2.3.2.2.5	Elastik zemine oturan plağın karşılıklı iki kenarının ankastre mesnede, diğer kenarının da sabit mesnede oturması	63
2.3.2.2.6	Elastik zemine oturan plağın bir kenarının ankastre mesnede, diğer üç kenarının sabit mesnede oturması hali	64
2.3.3	Bilgisayar programları	66
3.	ELASTİK ZEMİNE OTURAN ÜÇGEN ve TRAPEZ PLAKLARIN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ	74
3.1	Giriş	74
3.2	Sonlu fark ifadelerinin eğik koordinat takımına göre ifadesi	74
3.3	Kesit tesirlerinin eğik koordinat takımında ifadesi	85
3.4	Eğik koordinat takımına göre çıkartılan sonlu fark ifadelerinin muhtelif biçimdeki plaklara uygulanması	92
3.4.1	Üçgen plaklar.....	92
3.4.1.1	Bilgisayar programları	102
3.4.2	Trapez plaklar	106
3.4.2.1	Bilgisayar programı	116
4.	ELASTİK ZEMİNE OTURAN PARALEL KENAR PLAKLARIN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ	119
4.1	Giriş	119
4.2	Verev koordinatlarda Laplacian operatörü	119
4.3	Kesit tesirlerinin verev koordinat takımına ifadesi	128
4.4	Elastik zemine oturan paralel kenar plakların sonlu fark denklemlerinin teşkili.....	136
5.	ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL PLAKLARIN ÇÖZÜM METODLARI	144
5.1	Elastik zemine oturan dairesel plakların teorik çözümü.....	144
5.1.1	Temel denklemler	144
5.1.2	Elastik zemine oturan dairesel plak diferansiyel denklemin genel çözümü.....	145
5.2	Elastik zemine oturan dairesel plakların sonlu farklar metodu ile çözümü.....	152
5.2.1	Giriş	152
5.2.2	Polar koordinatlarda laplacian operatörü.....	153
5.2.3	Plak diferansiyel denklemin sonlu farklar yöntemiyle çözümü	155
5.2.4	Sınır şartlarının sonlu farklar ifadesi	159
5.2.4.1	Sabit mesnet.....	159
5.2.4.2	Ankastre mesnet	160
5.2.5	Dönel simetrik olmayan yükleme hali.....	160
5.2.6	Bilgisayar Programı	163
6.	SONUÇLAR.....	167
	KAYNAKLAR.....	168
	ÖZGEÇMİŞ.....	169

SİMGE LİSTESİ

a, b	: X ve Y doğrultusunda plak boyutları
p	: zeminde yayılı tepki kuvveti
c	: zemin katsayısı
c_o	: zemin modülü
I	: atalet momenti
k_w	: zemin reaksiyonu
q	: plağa dik olarak etkiyen yayılı yük.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: normal gerilmesi bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	: kayma gerilmesi bileşenleri
u, v, w	: yer değiştirmelerin bileşenleri
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	: x, y ve z doğrultularındaki birim deformasyon bileşenleri
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	: kayma açısı bileşenleri
E	: elastisite modülü
D	: Plâğın eğilme rijitliği
G	: kayma modülü
ν	: poisson oranı
t	: plâğın kalınlığı
M_x, M_y	: birim boya gelen eğilme momentleri
M_{xy}	: birim boya gelen burulma momenti
Q_x, Q_y	: birim boya gelen kesme kuvveti
V_x, V_y	: kenar kuvvetleri (fiktif kesme kuvvetleri)
Δ	: Laplace operatörü
M_r, M_t	: polar koordinatlarda birim boya gelen eğilme momenti

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1	Elastik zemine oturan bir kiriş 1
Şekil 2.1	Plak koordinat eksenleri ve deplasmanlar 3
Şekil 2.2	Kalın plak şekil değiştirmesi 4
Şekil 2.3	Kalın plak denge denklemleri..... 5
Şekil 2.4	Elastik zemine oturan dikdörtgen plaklarda Navier çözümü..... 15
Şekil 2.5	Plak üzerine kısmi üniform yayılı yük etkimesi..... 17
Şekil 2.6	Tekil yükün etkimesi hali 22
Şekil 2.7	İnce plak gerilmeleri..... 26
Şekil 2.8	İnce plak iç kuvvetleri 26
Şekil 2.9	İnce plak iç kuvvetleri 27
Şekil 2.10	Elastik zemindeki plakların eğilmesi..... 28
Şekil 2.11	Elastik zemine oturan geniş bir plak..... 32
Şekil 2.12	İki değişkenli fonksiyonlarda sonlu fark yöntemi ile 35
Şekil 2.13	$\nabla^2 w$ gösteren şema 37
Şekil 2.14	$\nabla^4 w$ gösteren şema 40
Şekil 2.15	x ve y doğrultularındaki aralıkların birbirine eşit olması hali 40
Şekil 2.16	Dikdörtgen plakların ağ noktaları..... 42
Şekil 2.17	Plağın fiktif noktaları..... 43
Şekil 2.18	Sabit mesnet..... 43
Şekil 2.19	Ankastre mesnet 44
Şekil 2.20	Serbest uç..... 45
Şekil 2.21	Dönebilen ankastre mesnet..... 46
Şekil 2.22	Çökebilen mesnet 48
Şekil 2.23	Elastik zemine oturan ve muhtelif sınır şartlarına haiz olan plaklar 50
Şekil 2.24	Elastik zemin üzerindeki oturan plağın dört kenarından sabit mesnetlere oturması hali 56
Şekil 2.25	Elastik zemine oturan plağın dört kenarından ankastre mesnede oturması hali 58
Şekil 2.26	Plağın üç kenarından ankastre mesnede, bir kenarından sabit mesnede oturması hali 60
Şekil 2.27	Plağın komşu iki kenarının ankastre mesnede, diğer kenarında, sabit mesnede oturması hali 61
Şekil 2.28	Plağın karşılıklı iki kenarının ankastre mesnede, diğer kenarının da sabit mesnede oturması hali 63
Şekil 2.29	Plağın bir kenarının ankastre mesnede, diğer uç kenarının sabit mesnede oturması hali 64
Şekil 2.30	Örnek Elastik zemine oturan plağın sonlu farklarla çözümü 71
Şekil 2.31	Örnekteki moment diyagramları..... 73
Şekil 3.1	Eğik, Koordinat takımı 74
Şekil 3.2	U eksenindeki noktalar 77
Şekil 3.3	U,v,t eksenleri üzerindeki noktalar..... 78
Şekil 3.4	$\nabla^2 w$ gösteren şema 79
Şekil 3.5	Eğik koordinat 79
Şekil 3.6	$\nabla^4 w$ gösteren şema 83
Şekil 3.7	Özel hal..... 85
Şekil 3.8	M_x moment diyagramı 87
Şekil 3.9	M_y moment diyagramı 88
Şekil 3.10	M_{xy} moment diyagramı 89
Şekil 3.11	Kesme kuvveti diyagramı..... 91

Şekil 3.12	Eğik koordinat takımına göre muhtelif biçimdeki plaklar.....	92
Şekil 3.13	Elastik zemine oturan üçgen plak.....	93
Şekil 3.14	Üçgen plağın dışında fiktif noktalar	93
Şekil 3.15	AB kenarında fiktif noktalar.....	93
Şekil 3.16	AC ve BC kenarlarında fiktif noktalar	95
Şekil 3.17	Elastik zemine oturan Trapez plak	106
Şekil 3.18	Trapez kenarlarında fiktif noktalar	107
Şekil 3.19	Örnek (Elastik zemine oturan plağın sonlu farklarla çözümü).....	118
Şekil 4.1	Verev koordinat.....	119
Şekil 4.2	Koordinat sisteminde U ve V eksenleri.....	121
Şekil 4.3	$\nabla^2 w$ gösteren şema	122
Şekil 4.4	$\nabla^2 w$ gösteren şema	123
Şekil 4.5	$\nabla^4 w$ gösteren şema	127
Şekil 4.6	$\nabla^4 w$ gösteren şema	127
Şekil 4.7	Özel hal.....	128
Şekil 4.8	M_x moment diyagramı	131
Şekil 4.9	M_y moment diyagramı	132
Şekil 4.10	M_{xy} moment diyagramı	133
Şekil 4.11	Kesme kuvvetleri diyagramı.....	135
Şekil 4.12	Elastik zemine oturan paralel kenar plak.....	136
Şekil 4.13	AB kenarında fiktif noktalar.....	137
Şekil 4.14	BC kenarında fiktif noktalar	138
Şekil 5.1	Elastik zemine oturan dairesel plak.....	144
Şekil 5.2	Polar koordinat	153
Şekil 5.3	Elastik zemine oturan plağın sonlu farklarla çözümü	156
Şekil 5.4	Sabit mesnet.....	159
Şekil 5.5	Ankastre mesnet	160
Şekil 5.6	Elastik zemine oturan dairesel plakların denklemin şeması.....	161
Şekil 5.7	$\nabla^2 w$ gösteren şema	162
Şekil 5.8	Dönel simetrik olmayan yükleme hali.....	162

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 1 Ortalama C_o Değerleri2



ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında değerli bilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen danışman hocam Prof. Sinan ÇAĞDAŞ'a teşekkürlerimi sunarım. Babam'a da bu çalışma süresince bana vermiş olduğu destek, gösterdiği anlayış ve sabırdan dolayı teşekkür ederim.



ÖZET

Bu tezde, elastik zemine oturan çeşitli geometri ve değişik sınır şartlarına sahip plakların teorik ve nümerik metodlarla çözümü yapılmış ve bilgisayar programları geliştirilmiştir.

Birinci bölümde elastik zemine oturan dikdörtgen plaklar ele alınmıştır.

I.Bölümün 1.kısımında Reissner plağı ve Kirchoff plağı teorilerindeki denklemler, elastik zemine oturan dikdörtgen plaklar için elde edilmiş, bunun içinde lineer elastisite teorisinin denklemlerinden ve geometrik şartlarından faydalanılmıştır. I.Bölümün 2.kısımında sonlu farklar metodu açıklanmış, iki değişkenli fonksiyonlarda sonlu fark ifadeleri çıkartılmış ve çeşitli mesnet şartlarına göre çözümler yapılmıştır. Hazırlanan bilgisayar programı, elastik zemine oturan plağın 4 kenarının her tip mesnetlenme durumunda çözüm yapılabilir.

İkinci bölümde eğik koordinat takımına göre bulunan sonlu fark ifadeleriyle de elastik zemine oturan üçgen ve trapez şeklindeki plakların çözümü yapılmıştır.

Üçüncü bölümde elastik zemine oturan paralel kenar plakların yapılmış, paralel kenar plakta çeşitli mesnet şartları dikkate alınmıştır.

Dördüncü bölümde elastik zemine oturan dairesel plaklar ele alınmıştır.

IV.Bölümün 1.kısımında elastik zemine oturan dairesel plakta , Kirchhoff'un kesin teorisinden faydalanılarak çözülmüştür. IV.Bölümün 2.kısımında dairesel plakların “Sonlu Farklar Yöntemi” ile çözümü yapılmıştır. Dairesel plak çeşitli mesnet şartları ve elastik zemine oturması hali de dikkate alınmıştır. Hazırlanan bilgisayar programı ile elastik zemine oturan her tip mesnetlenme durumunda çözüm yapılabilir.

Anahtar kelimeler: Elastik zemin, plak, sonlu farklar, teorik çözüm.

ABSTRACT

In this thesis, the solution of plates that reside on elastic foundation with several geometries and different boundry conditions through theoretic and numerical metods has been carried out and computer programs have been developed.

In chapter I , rectangular plates that reside on elastic foundation have been discussed.

In section 1 of chapter I equations of Reissner plate and Kirchhoff plate theories have been maintained and hence the equations of linear elastic theory and geometric conditions are used. In section 2 of chapter I , finite difference metod has been explained, finite differential expressions in two variable equations have been extracted and solutions depending on several support conditions have been made. Computer program prepared can produce solutions in every type of supporting of 4 sides of plate that reside on elastic foundation.

In chapter II , the solutions of triangle and trapeze plates that reside on elastic foundation have been solved by finite differences in triangular coordinates.

In chapter III , that of parallelogram plates are made and several support conditions in parallelogram plates have been noted.

In chapter IV the circular plates that reside on elastic foundations have been discussed.

In section 1 of Chapter IV the circular plates that reside on elastic foundations have been explained by making use of Kirchhoff's definite theory.

In section 2 of chapter IV, the circular plates will be solved by finite difference metod. The solution of the differential equation for circular plates had been considered with all boundary conditions and inculding on elastic support.

Keywords: Elastic foundation, plate, finite difference, theoretic metods.

1. GİRİŞ VE YAPILAN KABULLER

Elastik zemine oturan sistemlerin teorik hesabı oldukça komplike bir konudur. Bu tip sistemlerin diferansiyel denklemlerinin kesin çözümü ancak bazı kabullerin yapılması ile gerçekleşmektedir. Bu kabullerin hemen hemen hepsi, sisteme mesnet teşkil eden zeminle ilgilidir. Zeminin elastik özelliklerinin tam belirli olmaması ve plastik deformasyon yapma ihtimalinin bulunması, diferansiyel denklemin çözümünü daima bir ölçüde sınırlar. Bu sebeple bu problemde, zeminin elastikliğinin gözönüne alınmasında bazı kabullerin yapılması zorunludur.

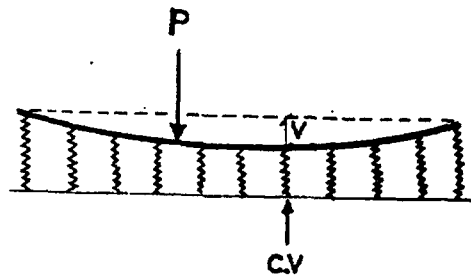
Elastik zemine oturan sistemlerin hesabında kullanılacak ana hipotez, Şekil 1'de görüldüğü gibi birbiriyle irtibatı olmayan ve birbirine sonsuz yakın yaylardan meydana gelen bir sistem gibi çalışmasıdır. Bu kabullere göre, kirişin herhangi bir noktasındaki düşey deplasman v ise bu noktada zemindeki tepki kuvveti :

$$p = c \cdot v$$

olacaktır. Burada c zemin katsayısı,

$$c = c_0 \cdot b$$

şeklindedir (b = kiriş genişliği). c_0 katsayısına zemin modülü veya yatak katsayısı denir. Tarif olarak, birim çökme elde etmek için birim alana yüklenmesi gereken kuvvettir.



Şekil 1.1.Elastik zemine oturan bir kiriş

$$p=[\text{kg/cm}] \quad , \quad c=[\text{kg/cm}^2] \quad , \quad c_0=[\text{kg/cm}^3] \quad , \quad v=[\text{cm}] \text{ boyutundadır.}$$

c_0 değerinin deneysel yolla bulunması gerekir. Fikir vermek için, zemin cinslerine bağlı olarak ortalama c_0 değerleri Çizelge 1.'de verilmiştir.

Zeminin birbirine sonsuz yakın yaylardan meydana geldiği kabulü ile, zeminin Hooke Kanunu'na uyan elastik bir cisim gibi davrandığı öngörülmüştür. Ayrıca herhangi bir

noktadaki zemin tepkisinin bu noktadaki çökme ile orantılı olduğu, komşu noktaların bahis konusu noktaya tesirinin olmadığı kabul edilmiştir.

Bu kabuller zeminin tam olarak davranışını aksettirmemektedir. Zemin çok komplike bir yapıya haiz olması sebebiyle kesin olarak formüle edilememektedir. Buna rağmen, bu kabullerin matematiksel olarak işi kolaylaştırmasının yanında, zemin mekaniğinde yapılan deneylerle gerçeğe oldukça yakın neticeler verdiği görülmüştür.

Bu konuda ilk çalışmalar Winkler, daha sonra Zimmerman tarafından yapılmıştır. Zimmerman, Winkler tarafından ortaya atılan hipotezi demiryolu traverslerinin hesabına uygulamıştır. Daha sonra Westergard aynı teori ile tekil yüke maruz beton yolları incelemiştir. Engesser, kiriş genişliği arttıkça yatak katsayısının değerinin azaldığını göstermiştir. Terzaghi temellerin yatak katsayılarını belirleyen bir çalışma yapmıştır.

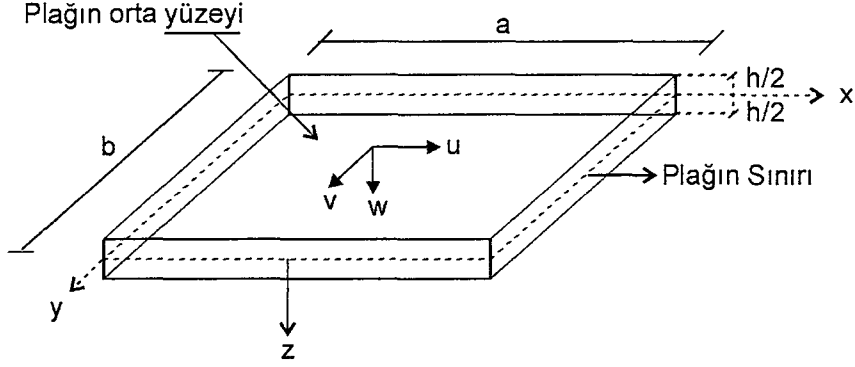
Çizelge 1. Ortalama c_0 değerleri

Zemin türü	c_0 (t/m^3)
Kil , plastik	500~1000
Kil, yarı sert	1000~1500
Kil, sert	1500~3000
Kum, gevşek	1000~2000
Kum, orta sıkı	2000~5000
Kum, sıkı	5000~10000
Kum-çakıl, sıkı.	10000~15000
Sağlam şist	> 50000
Kaya	> 200000

2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DİKDÖRTGEN PLAKLARIN ÇÖZÜM METODLARI

2.1. Giriş

Planda kalınlığı (h) diğer boyutlarına nazaran bir mertebe küçük olan prizmatik cisme denir.



Şekil 2.1. Plak, koordinat eksenleri ve deplasmanlar

Plağı kalınlığı boyu yarıya bölen yüzeye onun orta yüzeyi, plağın yan yüzeylerinin orta yüzeyi ile çakışma hattına onun sınırı denir. Orta yüzeyin x, y, z eksenleri yönünde yer değişmelerini u, v, w ; plak rijitliğini D ; $b \leq a$ kabul edilerek plaklar şematik olarak şöyle sınıflandırılabilir:

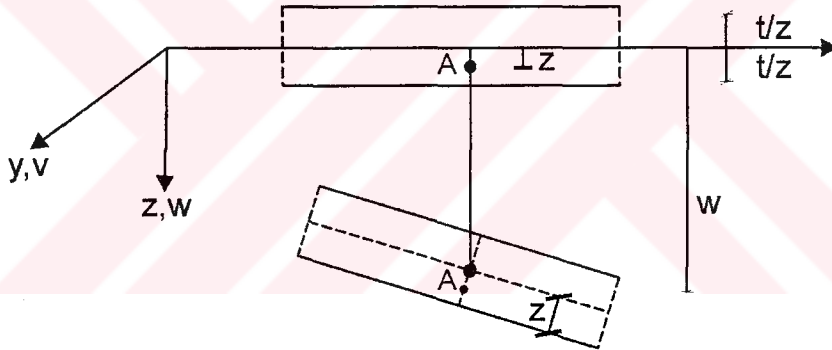
Plaklar	
Kalın plaklar	İnce Plaklar
$b/h \leq 5$	$5 < b/h < 50$
incelenmesi için üç boyutlu elastisite teorisi uygulanır.	(G.Kirchhoff 1850)
(Barre de Saint-Venant, Langrange, B.Galarkin, vb)	$D \neq 0$
(1883, 1811, 1918-33)	$W < h/4$
	Esnek plaklar
	(T. Karman, 1910)
	$D \neq 0$
	$W \approx h$

2.2. Elastik zemine oturan dikdörtgen plakların teorik çözümü

2.2.1. Kalın plaklar

Bu bölümde elastik zemine oturan dikdörtgen plakların REISSNER Teorisinden faydalanılarak kesin çözümü yapılacaktır. Kesin Teori ile bulunacak neticeler Klasik Teori ile mukayese edilecektir.

Plakların Klasik Teorisinde, plağın orta düzlemine dik bir doğru üzerindeki noktaların şekil değiştirmeden sonrada bu düzleme dik bir doğru üzerinde kaldığı kabul edilir. Ayrıca, orta düzlemden z mesafesinde bulunan herhangi bir A noktasındaki w_z düşey yer değiştirmesinin, orta düzleme ait w deplasmanına eşit olduğu kabul edilmektedir. Klasik Teoride bundan başka xz ve yz düzlemlerindeki τ_{xz} , τ_{yz} kayma gerilmelerinin sebep olduğu açısallık şekil değiştirmeler ihmal edilmektedir. Çözümü kolaylaştırmak için yapılan bu kabuller plağın sınır şartlarının sağlanmasında bazı aksaklıklar doğuracaktır.



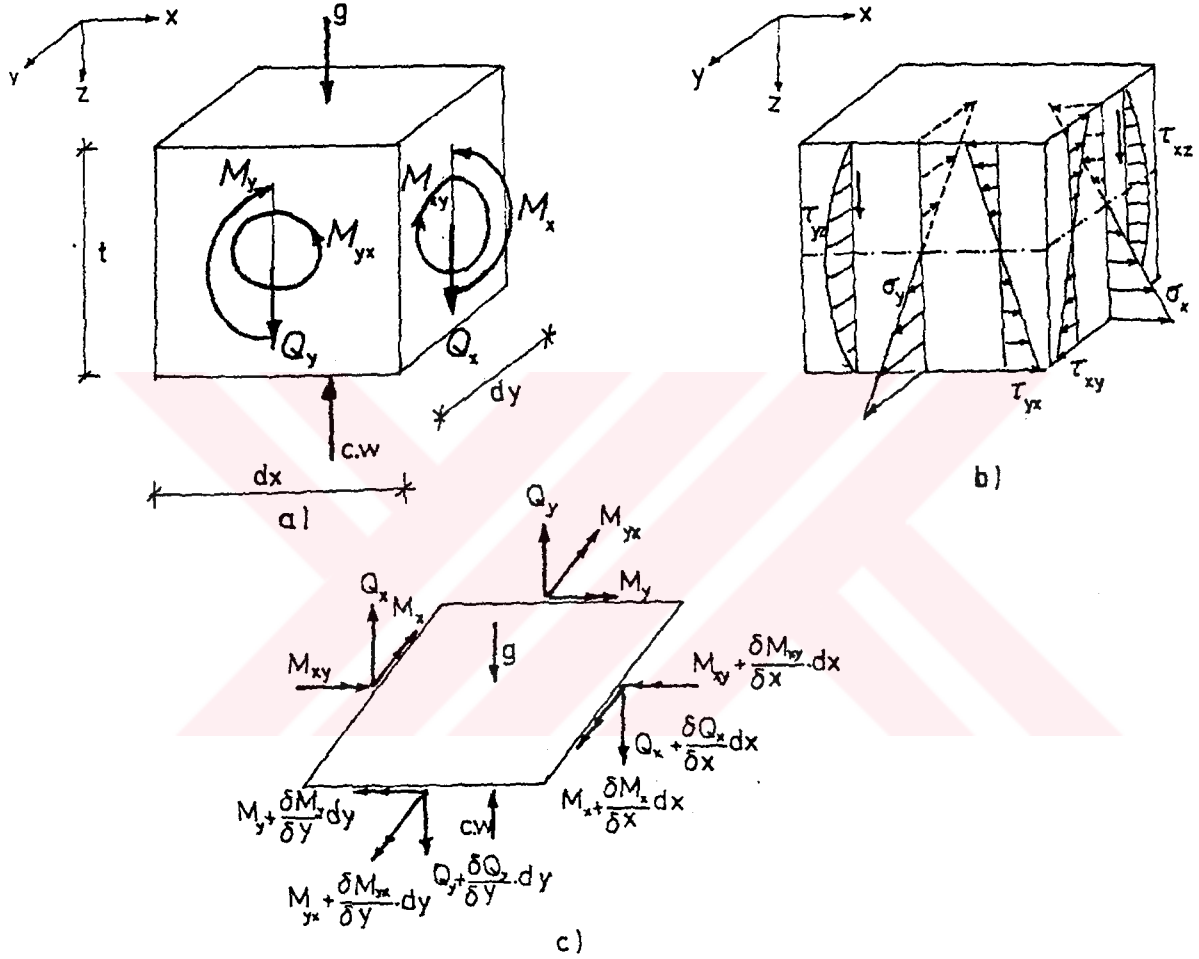
Şekil 2.2.Kalın plak şekil değiştirmesi

Reissnerin kesin teorisinde ise, düzlem kesitin deformasyondan sonra da düzlem kaldığı kabulü yine geçerlidir. Buna karşılık, w düşey yer değiştirmelerinin plak kalınlığı boyunca z koordinatına bağlılığı dikkate alınmıştır. Ayrıca, xz ve yz düzlemlerindeki γ_{xz} , γ_{yz} açısallık şekil değiştirmeleride hesaba dahil edilmektedir. Kesin Teorinin kullanılmasının diğer bir avantajı da sınır şartlarının tam olarak sağlanması mümkün olmaktadır. Plağın t kalınlığının diğer boyutlarına kıyasen küçük olduğu hallerde Klasik Teori ile bulunacak neticeler oldukça yeterlidir. fakat, plak kalınlığı arttıkça Klasik Teori ile Kesin Teori arasındaki fark büyümektedir.

2.2.1.1. Reissner'in Kesin Teorisiyle elastik zemine oturan plakların çözümü

2.2.1.1.1. Plagın denge denklemleri ve gerilme dağılımları

Şekil 2.3.a da plak elemanındaki kesit tesirleri gösterilmiştir. Bu kesit tesirleri, şekil 2.3.b de görülen gerilmeleri meydana getirmektedir. Bu, $d_x \cdot d_y \cdot t$ plak elemanına etkiyen kuvvetlere denge denklemleri tatbik edilerek (2.1.a-c) diferansiyel denge denklemleri elde edilir.



Şekil 2.3.Kalın plak denge denklemleri

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + g - cw = 0$$

(2.1.a - c)

Şekil 2.3.b de görüldüğü gibi σ_x , σ_y , τ_{xy} gerilmelerinin lineer, τ_{xz} ve τ_{yz} gerilmelerinin ise parabolik dağılım gösterdiği kabul edilirse, orta düzlemden herhangi bir z mesafesindeki gerilmeler:

$$\sigma_x = \frac{6}{t^2} \cdot M_x \cdot \frac{2z}{t}$$

$$\sigma_y = \frac{6}{t^2} \cdot M_y \cdot \frac{2z}{t}$$

$$\tau_{xy} = \frac{6}{t^2} \cdot M_{xy} \cdot \frac{2z}{t} \quad (2.2.a-e)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3}{2t} \cdot Q_y \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right]$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2t} \cdot Q_x \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right]$$

Kalın plaklarda z doğrultusundaki σ_z gerilmesinin hesaba dahil edilmesi icap eder. Bunun için, elastisite teorisinde uzay gerilme hâline ait denge denklemlerinden z yönüne ait olanını ele alalım.

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

Buradan

$$\sigma_z = - \int \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot dz - \int \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot dz + \psi_{(x,y)}$$

bulunur. Burada $\psi(x, y)$ integral sabitidir. (2.2.d ve e) ifadelerinin kısmi türevleri alınıp yerine koyulursa:

$$\sigma_z = - \int \frac{3}{2t} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz - \int \frac{3}{2t} \frac{\partial Q_y}{\partial y} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz + \psi_{(x,y)}$$

$$= -\frac{3}{2t} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \int \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz + \psi_{(x,y)}$$

(2 . 1 . c) denklemine göre $\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -g + c \cdot w$ olduğundan:

$$\sigma_z = -\frac{3}{2t} (g + c \cdot w) \int \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz + \psi_{(x,y)}$$

$$\sigma_z = \frac{3}{2t} (g - c \cdot w) \left[z - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2z}{t} \right)^3 \right] + \psi_{(x,y)} \quad (2.3)$$

olarak bulunmuş olur. $\psi_{(x,y)}$ integral sabiti sınır şartlarından elde edilecektir.

$z = -t/2$ için $\sigma_z = -g(x, y)$ ve,

$z = t/2$ için $\sigma_z = -c \cdot w$ olduğu dikkate alınır:

$$\psi_{(x,y)} = -\frac{1}{2} (g + c \cdot w)$$

olarak bulunur. Bu değer 2.3 te yerine koyularak:

$$\sigma_z = \frac{3}{2t} (g - c \cdot w) \left[z - \frac{1}{4} \left(\frac{2z}{t} \right)^3 \right] - \frac{1}{2} (g + c \cdot w) \quad (2.4)$$

elde edilir.

Böylece Klasik Teoride ihmal edilen σ_z normal gerilmesi Kesin Teoride (2 . 4) ifadesiyle alınmaktadır. Ayrıca, (2.2.d ve e) ifadeleriyle de τ_{yz} ve τ_{xz} kayma gerilmeleri ve bunların şekil değiştirmelere olan tesiride gözönünde bulundurulacaktır.

2.2.1.1.2. Plağın şekil değiştirme bağıntıları

x, y, z eksenleri doğrultusundaki yerdeğiştirmeleri sırasıyla U, V, W ile gösterirsek, şekil değiştirme bileşenleri :

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \quad (2.5 . a - e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

şeklinde yazılabilir. Burada plak izotrop kabul edilmiştir. U . V yer değiştirmelerinin t plak kalınlığı boyunca toplanmasıyla α_x , α_y açısal şekil değiştirme büyüklükleri meydana gelir. W yer değiştirmelerinin toplanmasıyla da bileşke w yer değiştirmesi meydana gelecektir. Bunlar kendilerine tekabül eden kesit büyüklükleri ile beraber şekil değiştirme enerjisi hasıl ederler. İşlerin eşitliğini yazarsak ve (2 . 2) ifadeleri dikkate alınırsa:

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xz} \cdot W \cdot dz = Q_x \cdot w \rightarrow W = \frac{3}{2t} \int_{-t/2}^{+t/2} W \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz$$

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x \cdot U \cdot dz = M_x \cdot \alpha_x \rightarrow \alpha_x = \frac{6}{t^2} \int_{-t/2}^{+t/2} U \frac{2z}{t} dz \quad (2.6 . a - c)$$

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y \cdot V \cdot dz = M_y \alpha_y \rightarrow \alpha_y = \frac{6}{t^2} \int_{-t/2}^{+t/2} V \frac{2z}{t} \cdot dz$$

(2. 2), (2 . 4), (2 . 5), (2 . 6) bağıntılarından faydalanarak :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} &= \frac{6}{t^2} \int_{-t/2}^{+t/2} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{2z}{t} \cdot dz = \frac{6}{t^2 E} \int_{-t/2}^{+t/2} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \frac{2z}{t} \cdot dz \\ &= \frac{6}{t^2 E} \cdot \frac{6}{t^2} \int_{-t/2}^{+t/2} \left\{ M_x \cdot \frac{2z}{t} - \nu M_y \frac{2z}{t} - \nu \frac{3}{2t} (g - cw) \left[z - \frac{1}{4} \left(\frac{2z}{t} \right)^3 \right] - \frac{1}{2} (g + cw) \right\} \frac{2z}{t} \cdot dz \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} = \frac{12}{t^3 E} \left[M_x - \nu M_y + \nu \frac{t^2}{10} (g - cw) \right] \quad (2.7 . a)$$

Benzer şekilde :

$$\frac{\partial \alpha_y}{\partial y} = \frac{12}{t^3 E} \left[M_y - \nu M_x + \nu \frac{t^2}{10} (g - cw) \right] \quad (2.7.b)$$

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} = \frac{12}{t^3 G} \cdot M_{xy} \quad (2.7.c)$$

olarak bulunur.

Şimdi de Q_x , Q_y kesme kuvvetleriyle şekil değiştirme büyüklükleri arasındaki bağıntıyı çıkartalım. Bunun için aşağıdaki bağıntıyı teşkil edelim.

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{+t/2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \cdot \frac{3}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz &= \frac{3}{2t} \left\{ \int_{-t/2}^{+t/2} \frac{\partial U}{\partial z} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-t/2}^{+t/2} W \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz \right\} \\ &= \frac{6}{t^2} \int_{-t/2}^{+t/2} U \frac{2z}{t} dz + \frac{\partial W}{\partial x} = \alpha_x + \frac{\partial W}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Diğer taraftan, (2.5.e) ve (2.2.e) bağıntıları kullanılarak:

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{+t/2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \cdot \frac{3}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz &= \int_{-t/2}^{+t/2} \frac{1}{G} \cdot \tau_{zx} \cdot \frac{3}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz \\ &= \frac{1}{G} \int_{-t/2}^{+t/2} \frac{3}{2t} Q_x \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \cdot \frac{3}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] dz = \frac{6}{5tG} \cdot Q_x \end{aligned} \quad (2.9)$$

olarak bulunur. (2.8) ve (2.9) ifadelerinden:

$$\alpha_x + \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{6}{5tG} \cdot Q_x \quad \text{veya}$$

$$\alpha_x = -\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{6}{5tG} Q_x \quad (2.10.a)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde:

$$\alpha_y = -\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{6}{5tG} Q_y \quad (2.10.b)$$

bulunur. Böylece (2 . 1 . a – c), (2 . 7 . a – c) ve (2 . 10 . a – b) bağıntıları 8 denklem vermektedir. Bu denklem takımıyla bilinmeyen M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y kesit büyüklükleri ve α_x , α_y , w şekil değiştirme büyüklükleri bulunabilir.

2.2.1.1.3. Kesit büyüklüklerinin w yerdeğiştirmesi cinsinden ifade edilmesi

(2.7.b) ifadesini v ile çarpıp, (2.7.a) ile toplarsak:

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} = \frac{12}{t^3 E} \left[M_x (1-v^2) + \frac{t^2}{10} (g-cw)(v+v^2) \right]$$

buradan:

$$M_x = \frac{Et^3}{12(1-v^2)} \left[\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{6}{5Et} (g-cw)(v+v^2) \right]$$

$$\frac{Et^3}{12(1-v^2)} = D \text{ ile gösterilirse (D = eğilme rijitliği (KN . m}^2\text{))}$$

$$M_x = D \cdot \left[\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{6(v+v^2)}{5Et} \cdot (g-c.w) \right] \quad (2 . 11 . a)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde:

$$M_y = D \cdot \left[\frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + v \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{6(v+v^2)}{5Et} (g-cw) \right] \quad (2 . 11 . b)$$

ve (2 . 7 . c) den:

$$M_{xy} = \frac{t^3 G}{12} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right) \quad (2 . 11 . c)$$

elde edilir. (2.11) ifadelerinde α_x ve α_y yerine (2.10) değerleri koyularak aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{t^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{t^2 v}{10(1-v)} (g-c.w)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{t^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{t^2 \nu}{10(1-\nu)} (g - c \cdot w)$$

$$M_{xy} = \frac{t^3 G}{6} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{t^2}{10} \left(\frac{\partial Q_y}{\partial x} + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \right) \quad (2.12.a-c)$$

Bu ifadelerin ilk terimleri Klasik Teoriye tekabül etmektedir. Aynı şekilde Q_x ve Q_y kesme kuvvetleri de w cinsinden ifade edilebilir. (2.1.a) denkleminde:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \text{ yazılabilir. (1.12) ifadelerinin türevleri alınmak suretiyle:}$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) + \frac{t^2}{5} \cdot \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} - \frac{t^2 \nu}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - c \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{t^3 G}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \\ + \frac{t^2}{10} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} \right]$$

Diğer taraftan (2.1.c) denklemine göre $\frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\frac{\partial Q_x}{\partial x} - (g - cw)$ olduğu dikkate alınırsa:

$$Q_x = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - D \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + \frac{t^2}{5} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} - \frac{t^2 \nu}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - c \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{t^3 G}{6} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ + \frac{t^2}{10} \left[-\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} - \frac{\partial g}{\partial x} + c \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} \right]$$

bulunur. Ayrıca :

$$D \cdot \nu + \frac{t^3 G}{6} = D \cdot \nu + \frac{t^3}{6} \cdot \frac{E}{2(1+\nu)} = D \text{ olduğuna dikkat edersek:}$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) + \frac{t^2}{10} \left(\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} \right) - \frac{t^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - c \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ = -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \cdot w + \frac{t^2}{10} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Q_x - \frac{t^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - c \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$Q_x = -D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \frac{t^2}{10} \nabla^2 Q_x - \frac{t^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - c \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.12.d)$$

olarak bulunur. Burada $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ Laplace operatörüdür.

Benzer şekilde:

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \frac{t^2}{10} \nabla^2 Q_y - \frac{t^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial g}{\partial y} - c \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.12.e)$$

olarak elde edilir. Böylece (2.12.a-e) ifadeleriyle kesit tesirlerinin tümü w yer değiştirmesine bağlanmış olur.

(2.12) ifadelerinin kısmi türevleri alınarak (2.1.c) denkleminde yerine koyulursa:

$$\begin{aligned} & -D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 w + \frac{t^2}{10} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 Q_x - \frac{t^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 w + \frac{t^2}{10} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 Q_y \\ & \frac{t^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - c \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + g - c \cdot w = 0 \end{aligned}$$

Buradan :

$$\begin{aligned} & -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 w + \frac{t^2}{10} \nabla^2 \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) - \frac{t^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g + \\ & \frac{t^2 \cdot c}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w + g - cw = 0 \end{aligned}$$

(2.1.c) den $\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -(g - cw)$ olduğu dikkate alınırsa bu denklem şu şekilde yazılabilir.

$$-D \cdot \nabla^2 (\nabla^2 w) - \frac{t^2}{10} \nabla^2 (g - cw) - \frac{t^2}{10(1-\nu)} \nabla^2 g + \frac{t^2 \cdot c}{10(1-\nu)} \nabla^2 w + g - cw = 0$$

veya buradan :

$$D\nabla^4 w = g - c.w - \frac{t^2}{10} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu} \cdot \nabla^2 (g - cw) \quad (2.13)$$

elde edilir.

Klasik Teoride (2. 13) diferansiyel denklemi :

$$D \cdot \nabla^4 w = g - c \cdot w \text{ şeklindedir.}$$

Böylece, Klasik Teoride dördüncü mertebeden tek bir diferansiyel denklemin bulunmasına karşılık, Kesin Teoride ise (2. 12 . d – e) ve (2. 13) denklemleriyle verilen Q_x , Q_y ve w ye göre simültane üç diferansiyel denklem takımı vardır.

Kesin Teorinin Klasik Teoriye kıyasen en önemli üstünlüğü, bu üç diferansiyel denklem takımının integrasyon sabitlerinin, plağın sınır şartlarını tam olarak sağlayacak şekilde elde edilebilmesidir.

2.2.1.1.4. Sınır Şartları

a) Sabit mesnetli plak

Plağın kenarı sabit mesnede oturuyor ise, bu kenarda çökme, eğilme momenti ve burulma momenti sıfır olmalıdır. Yani :

$$w = 0$$

$$M_x = 0 \quad (2.14)$$

$$M_{xy} = 0$$

b) Ankastre mesnetli plak

Ankastre kenardaki sınır şartları :

$$w = 0$$

$$\alpha_x = 0 \quad (2.15)$$

$$\alpha_y = 0$$

c) Boşte kenar

Bu durumda kesme kuvveti, eğilme ve burulma momenti sıfır olmalıdır. Yani :

$$Q_x = 0$$

$$M_x = 0 \quad (2. 16)$$

$$M_{xy} = 0$$

Klasik Teoride, yukarıdaki sınır şartı ifadelerinden sadece iki tanesi sağlanıyordu. Kesin Teoride ise, her mesnetlenme durumu için üç sınır şartını da sağlamak mümkündür.

2.2.1.2. Elastik zemine oturan dikdörtgen plaklarda Navier çözümü

Şekil 2.4'te görüldüğü gibi dört kenarından sabit mesnetlere oturan kenarları a, b ve yüksekliği t olan, elastik zemin üzerindeki plağı ele alalım.

Plak üzerindeki $g(x, y)$ yükünü, $L = 2a$ ve $L = 2b$ periyodlarına haiz çift Fourier serisi yardımıyla şu şekilde ifade edebiliriz:

$$g(x, y) = \sum_m \sum_n g_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2. 17)$$

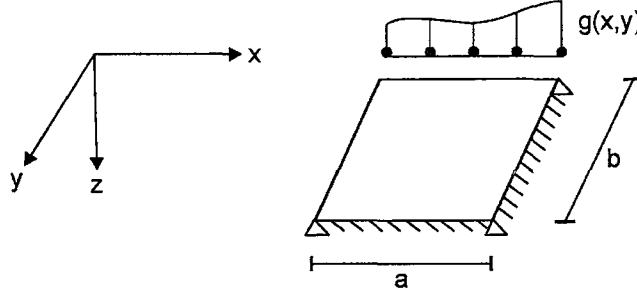
Burada : g_{mn} yükün dağılımına ve cinsine göre tayin edilecek değerdir. $m = 1, 2, 3, \dots$ ve $n = 1, 2, 3 \dots$ dir.

Benzer şekilde w çökme fonksiyonu ve Q_x, Q_y kesme kuvvetleri fonksiyonlarında Fourier serileri yardımıyla:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$Q_x(x, y) = \sum_m \sum_n d_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2. 18 .a-c)$$

$$Q_y(x, y) = \sum_m \sum_n e_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}$$



Şekil 2. 4 Elastik zemine oturan dikdörtgen plaklarda Navier çözümü

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki w_{mn} , d_{mn} , e_{mn} değerleri (2.12.d-e) ve (2. 13) denklemlerinden elde edilecektir. (2. 18 . a) daki $w(x, y)$ fonksiyonu, (2. 14)'de verilen sınır şartlarını sağlar.

(2. 17) ifadesinden :

$$\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = - \sum_m \sum_n g_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2. 19)$$

bulunur. (2. 18.a) ifadesinden :

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \sum_m \sum_n w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2. 20)$$

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_m \sum_n w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.21)$$

olarak elde edilir. (2. 19), (2. 21), (2. 17), (2. 18.a) değerleri (2. 13) denkleminde yerine koyulursa :

$$D \sum_m \sum_n w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_m \sum_n g_{mn}$$

$$\cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} - c \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} - \frac{t^2}{10} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu}$$

$$\cdot \left\{ - \sum_m \sum_n g_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + c \sum_m \sum_n w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \right\} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Veya :

$$D \sum_m \sum_n w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 = \sum_m \sum_n g_{mn} - c \sum_m \sum_n w_{mn} \frac{t^2}{10} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu}$$

$$\left\{ -\sum_m \sum_n g_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + c \sum_m \sum_n w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.22)$$

olarak elde edilir. (2. 21) ifadesinden :

$$w_{mn} = \frac{\left[1 + \frac{t^2}{10} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \right] g_{mn}}{D \cdot \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)^2 + c \left[1 + \frac{t^2}{10} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \right]} \quad (2.23)$$

Olarak elde edilir. (2. 18. b) ifadesinden :

$$\nabla^2 Q_x = \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} = -\sum_m \sum_n d_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.24)$$

bulunur. (2. 20) ifadesinden :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) = -\sum_m \sum_n w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.25)$$

elde edilir. (2. 18. b), (2. 20), (2. 24) ve (2. 25) değerleri (2. 12. d) denkleminde yerine koyulursa:

$$\sum_m \sum_n d_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = D \sum_m \sum_n w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$- \frac{t^2}{10} \sum_m \sum_n d_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \frac{t^2}{10(1-\nu)} \left[\sum_m \sum_n g_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \right.$$

$$\left. - c \sum_m \sum_n w_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \quad (2.26)$$

veya

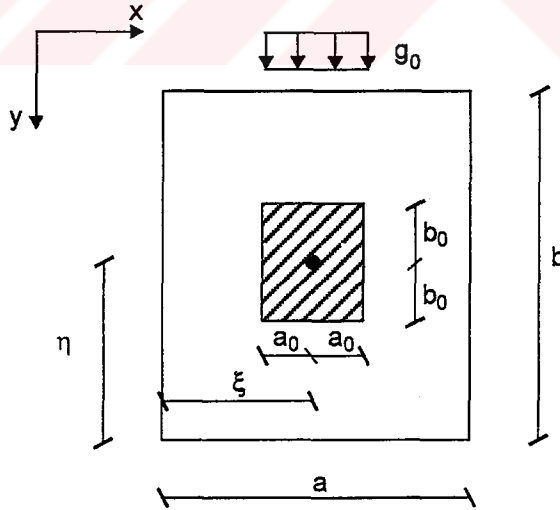
$$d_{mn} = \frac{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{t^2 \cdot c}{10D(1-\nu)} \right] \frac{m\pi}{a} \cdot w_{mn} - \frac{t^2 \pi m}{10a(1-\nu)} \cdot g_{mn}}{1 + \frac{t^2}{10} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]} \quad (2.27)$$

olarak elde edilir. Benzer tarzda (I. 18. c) ve (I. 12. e) ifadelerinden :

$$e_{mn} = \frac{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{t^2 \cdot c}{10D(1-\nu)} \right] \frac{n\pi}{b} w_{mn} - \frac{t^2 n\pi}{10b(1-\nu)} g_{mn}}{1 + \frac{t^2}{10} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]} \quad (2.28)$$

bulunur. Böylece (2.27), (2.28) ifadeleriyle d_{mn} ve e_{mn} katsayıları, w_{mn} ve g_{mn} cinsinden elde edilebilir. Bu değerler (2.18. b-c) ifadelerinde yerine koyularak, Q_x ve Q_y fonksiyonları bulunur. M_x , M_y ve M_{xy} moment fonksiyonlarını bulmak içinde (2.12. a-c) ifadelerinden faydalanılır.

2.2.1.2.1. Plak üzerine kısmi üniform yayılı yük etkimesi



Şekil 2.5. Plak üzerine kısmi üniform yayılı yük etkimesi

Şekil 2.5'te görüldüğü gibi, $2a_0 \cdot 2b_0$ alanında kısmi üniform yayılı g_0 yüküne maruz, elastik zemine oturan plâğı ele alalım. Önce bu yükü, b genişliğince $2b$ periyoduna haiz y 'nin tek fonksiyonu olarak düşünelim.

$$g(y) = \frac{4g_o}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi b_o}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

sonra bu $g(y)$ çizgisel yükünü, $2a$ periyoduna haiz x 'in tek fonksiyonu olarak geliştirirsek :

$$g(x, y) = \frac{4g(y)}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi a_o}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

veya :

$$g(x, y) = \frac{16g_o}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{m.n} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi a_o}{a} \sin \frac{n\pi b_o}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.29)$$

(2. 17) ve (2. 29) ifadeleri mukayese edilirse:

$$g_{mn} = \frac{16g_o}{\pi^2 . m . n} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi a_o}{a} \sin \frac{n\pi b_o}{b} \quad (2. 30)$$

olarak bulunmuş olur.

(2. 30) değeri (2. 23) de yerine koyulursa

$$w_{mn} = \frac{1 + \frac{t^2}{10} \cdot \frac{2-v}{1-v} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)}{D \cdot \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)^2 + c \left[1 + \frac{t^2}{10} \cdot \frac{2-v}{1-v} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \right]} \cdot \frac{16g_o}{\pi^2 . m . n} \cdot \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi a_o}{a} \sin \frac{n\pi b_o}{b} \quad (2. 31)$$

bu formülde :

$$\frac{b}{a} = \alpha \quad \frac{t}{a} = \gamma$$

$$\frac{a}{2} \sqrt[4]{\frac{c}{4D}} = \beta \quad (2. 32)$$

$$\frac{2-v}{10(1-v)} = \rho$$

ile gösterilirse, (2. 31) ifadesi şu şekilde yazılabilir :

$$w_{mn} = \frac{16 g_o a^4}{D \pi^2 mn} \cdot \frac{1 + \gamma^2 \cdot \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2}{\pi^4 (m^2 + n^2 / \alpha^2)^2 + 64 \beta^4 [1 + \gamma^2 \cdot \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2]}$$

$$\cdot \sin \frac{m\pi\xi}{a} \cdot \sin \frac{n\pi\eta}{b} \cdot \sin \frac{m\pi a_o}{a} \cdot \sin \frac{n\pi b_o}{b} \quad (2. 33)$$

Buna göre, (2. 18. a) daki çökme fonksiyonu :

$$w = \frac{16 g_o a^4}{D \cdot \pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \cdot \frac{1 + \gamma^2 \cdot \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2}{\pi^4 (m^2 + n^2 / \alpha^2)^2 + 64 \beta^4 [1 + \gamma^2 \cdot \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2]}$$

$$\cdot \sin \frac{m\pi\xi}{a} \cdot \sin \frac{n\pi\eta}{b} \cdot \sin \frac{m\pi a_o}{a} \cdot \sin \frac{n\pi b_o}{b} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2. 34)$$

şeklinde olacaktır.

(2. 32) kısaltmaları dikkate alınarak, (2. 27) ve (2. 28) katsayıları şu şekilde yazılabilir.

$$d_{mn} = \frac{D \left[m^2 + n^2 / \alpha^2 + \frac{\gamma^2 \cdot 64 \beta^4}{10(1-\nu)\pi^2} \right] \cdot \frac{m\pi^3}{a^3} \cdot w_{mn} - \frac{\gamma^2 \cdot \pi \cdot a \cdot m}{10(1-\nu)} \cdot g_{mn}}{1 + \frac{\gamma^2 \pi^2}{10} \cdot (m^2 + n^2 / \alpha^2)} \quad (2.35.a-b)$$

$$e_{mn} = \frac{D \left[m^2 + n^2 / \alpha^2 + \frac{\gamma^2 \cdot 64 \cdot \beta^4}{10(1-\nu)\pi^2} \right] \cdot \frac{n\pi^3}{a^2 b} \cdot w_{mn} - \frac{\gamma^2 \cdot \pi \cdot a^2 n}{10(1-\nu)b} \cdot g_{mn}}{1 + \frac{\gamma^2 \pi^2}{10} (m^2 + n^2 / \alpha^2)}$$

buna göre, (2. 18.b-c) ifadeleri :

$$Q_x = \sum_m \sum_n \frac{D \left[m^2 + n^2 / \alpha^2 + \frac{\gamma^2 \cdot 64 \beta^4}{10(1-\nu)\pi^2} \right] \cdot \frac{m\pi^3}{a^3} \cdot w_{mn} - \frac{\gamma^2 \pi a m}{10(1-\nu)} g_{mn}}{1 + \frac{\gamma^2 \pi^2}{10} \cdot (m^2 + n^2 / \alpha^2)}$$

$$\cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2. 36.a)$$

$$Q_y = \frac{\sum_m \sum_n D \left[m^2 + n^2 / \alpha^2 + \frac{\gamma^2 . 64 \beta^4}{10(1-\nu)\pi^2} \right] \frac{m\pi^3}{a^2 b} . w_{mn} - \frac{\gamma^2 \pi a^2 n}{10(1-\nu)b} g_{mn}}{1 + \frac{\gamma^2 \pi^2}{10} (m^2 + n^2 / \alpha^2)} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (2.36.b)$$

şeklinde olacaktır. (2. 18.a-c), (2. 17) ve (2. 12.a-c) ifadelerinden faydalanarak:

$$M_x = D \cdot \sum_m \sum_n \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \nu \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cdot w_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} - \frac{t^2}{5} \sum_m \sum_n d_{mn} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} - \frac{t^2 \nu}{10(1-\nu)} \left\{ \sum_m \sum_n g_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} - c \sum_m \sum_n w_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}$$

veya

$$M_x = \sum_m \sum_n \left\{ \frac{D\pi^2}{a^2} \left[m^2 + \nu \frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2 . 64 \beta^4}{10\pi^2 (1-\nu)} \right] w_{mn} - \frac{t^2}{5} \cdot \frac{\pi m}{a} d_{mn} - \frac{t^2 \nu}{10(1-\nu)} g_{mn} \right\} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Benzer şekilde :

$$M_y = \sum_m \sum_n \left\{ \frac{D\pi^2}{b^2} \left[\nu m^2 + \frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2 64 \beta^4}{10\pi^2 (1-\nu)} \right] w_{mn} - \frac{t^2}{5} \frac{\pi n}{b} d_{mn} - \frac{t^2 \nu}{10(1-\nu)} g_{mn} \right\} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_{xy} = \sum_m \sum_n \left[- \frac{t^3 G \pi^2 . mn}{6.a.b} . w_{mn} + \frac{t^2}{10} \left(\frac{m\pi}{a} + \frac{n\pi}{b} \right) . e_{mn} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (2.37.a-c)$$

olarak bulunur. Klasik Teoride, plak kalınlığı diğer boyutlara kıyasen küçük kabul edildiğinden, $\gamma = t / a$ değeri sıfır alınmış almaktadır. Buna göre Klasik Teorideki ifadeler :

$$W = \frac{16 g_o a^4}{D \pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{\pi^4 (m^2 + n^2 / \alpha^2)^2 + 64 \beta^4} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$Q_x = \sum_m \sum_n D \cdot \frac{m\pi^3}{a^3} (m^2 + n^2 / \alpha^2) w_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$Q_y = \sum_m \sum_n D \cdot \frac{n\pi^3}{a^2 b} (m^2 + n^2 / \alpha^2) w_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (2.38.a-e)$$

$$M_x = \sum_m \sum_n D \cdot \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 + v \cdot n^2 / \alpha^2) w_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_y = \sum_m \sum_n D \cdot \frac{\pi^2}{b^2} (v m^2 + n^2 / \alpha^2) w_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Şeklinde olacaktır.

2.2.1.2.2. Plak boydan boya üniform yayılı g_o yüküne maruz ise

Bu durumda $a_o = \xi = \frac{1}{2} a$ ve $b_o = \eta = \frac{1}{2} b$ olacağından (2. 30), (2. 33) ifadelerinden :

$$g_{mn} = \frac{16 g_o}{\pi^2 mn} \quad (2.39)$$

$$w_{mn} = \frac{16 g_o a^4}{D \pi^2 mn} \cdot \frac{1 + \gamma^2 \cdot \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2}{\pi^4 (m^2 + n^2 / \alpha^2)^2 + 64 \beta^4 [1 + \gamma^2 - \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2]} \quad (2.40)$$

Olarak bulunur. (2. 18.a) çökme fonksiyonu :

$$w_{mn} = \frac{16 g_o a^4}{D \pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \cdot \frac{1 + \gamma^2 \cdot \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2}{\pi^4 (m^2 + n^2 / \alpha^2)^2 + 64 \beta^4 [1 + \gamma^2 - \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2]} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.41)$$

olacaktır. burada, elastik yüzey simetrik olacağından $m = 1, 3, 5, \dots$ ve $n = 1, 3, 5, \dots$ gibi tek değerler alınmalıdır.

Plagın max. çökmesini bulmak için $x = \frac{a}{2}$ ve $y = \frac{b}{2}$ koyulmalıdır.

$$w_{\max} = \frac{16 g_o a^4}{D \pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \cdot \frac{1 + \gamma^2 \cdot \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2}{\pi^4 (m^2 + n^2 / \alpha^2)^2 + 64 \beta^4 [1 + \gamma^2 \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2]} \quad (2.42)$$

$$\gamma_r = \frac{16}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \cdot \frac{1 + \gamma^2 \cdot \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2}{\pi^4 (m^2 + n^2 / \alpha^2)^2 + 64 \beta^4 [1 + \gamma^2 \cdot \rho (m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2]} \cdot (-1)^{\frac{m+n}{2}-1} \quad (2.43)$$

ile gösterilirse, (2. 42) ifadesi şu şekilde yazılabilir:

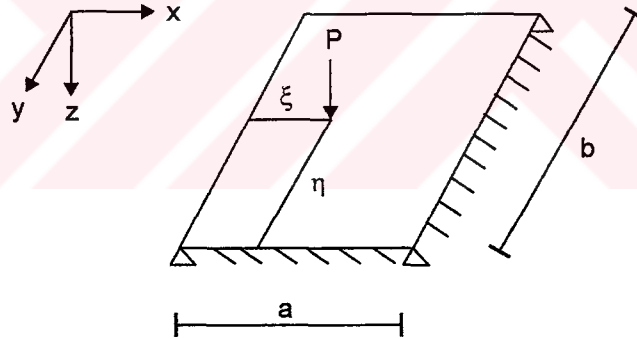
$$w_{\max} = \frac{g_o a^4}{D} \gamma_r \quad (2.44)$$

Klasik Teoride ise :

$$\gamma_r = \frac{16}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{\pi^4 (m^2 + n^2 / \alpha^2)^2 + 64 \beta^4} \quad (2.45)$$

şeklinde olacaktır.

2.2.1.2.3. Tekil yükün etkimesi hâli :



Şekil 2.6. Tekil yükün etkimesi hâli

Bu durumda g_{mn} katsayısı (2.30) ifadesinden limite gidilerek bulunur. Bu ifadeyi şu formda yazabiliriz:

$$g_{mn} = \frac{4}{ab} \cdot 4a_o b_o p_o \sin \frac{m\pi\xi}{a} \cdot \sin \frac{n\pi\eta}{b} \cdot \frac{\frac{m\pi a_o}{a} \sin \frac{n\pi b_o}{b}}{\frac{m\pi a_o}{a} \cdot \frac{n\pi b_o}{b}}$$

$4a_0 b_0 p_0 = p$ sabit kalmak şartıyla, a_0 ve b_0 sıfıra giderse :

$$g_{mn} = \frac{4p}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \quad (2.46)$$

olarak bulunur. (2. 23) te yerine koyulursa :

$$w_{mn} = \frac{1 + \frac{t^2}{10} \cdot \frac{2-v}{1-v} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)}{D \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2 + c \left[1 + \frac{t^2}{10} \cdot \frac{2-v}{1-v} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right) \right]} \cdot \frac{4p}{a.b} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

Veya :

$$w_{mn} = \frac{4pa^3}{D.b} \cdot \frac{1 + \gamma^2 \cdot \rho(m^2 + n^2/\alpha^2)\pi^2}{\pi^4(m^2 + n^2/\alpha^2)^2 + 64\beta^4[1 + \gamma^2 \rho(m^2 + n^2/\alpha^2)\pi^2]} \cdot \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \quad (2.47)$$

Bulunur. Buna göre, çökme fonksiyonu:

$$w = \frac{4pa^3}{D.b} \sum_m \sum_n \frac{1 + \gamma^2 \cdot \rho(m^2 + n^2/\alpha^2)\pi^2}{\pi^4(m^2 + n^2/\alpha^2)^2 + 64\beta^4[1 + \gamma^2 \rho(m^2 + n^2/\alpha^2)\pi^2]} \cdot \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.48)$$

şeklinde olacaktır.

(2. 43), (2. 44) değerleri (2. 36) ve (2.37) ifadelerinde yerine koyularak Q_x , Q_y , M_x , M_y kesit tesirleri elde edilir.

P kuvveti plağın tam ortasında tesir ediyorsa, bu durumda

$x = \xi = \frac{a}{2}$ ve $y = \eta = \frac{b}{2}$ alınarak (I.45) de yerine koyulursa

$$w_{\max} = \frac{4pa^3}{D.b} \sum_m \sum_n \frac{1 + \gamma^2 \cdot \rho(m^2 + n^2/\alpha^2)\pi^2}{\pi^4(m^2 + n^2/\alpha^2)^2 + 64\beta^4[1 + \gamma^2 \rho(m^2 + n^2/\alpha^2)\pi^2]} \quad (2.49)$$

bulunur.

$$\gamma_p = 4 \sum_m \sum_n \frac{1 + \gamma^2 \cdot \rho(m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2}{\pi^4 (m^2 + n^2 / \alpha^2)^2 + 64 \beta^4 [1 + \gamma^2 \rho(m^2 + n^2 / \alpha^2) \pi^2]} \quad (2.50)$$

ile gösterilirse :

$$w_{\max} = \frac{4 p a^3}{D \cdot b} \gamma_p$$

şeklinde yazılabilir.

2.2.2. İnce Plaklar

İnce plaklar aşağıdaki (G. Kirchhoff) farziyelerine dayanan teknik teori ile hesaplanır.

1. plağın orta yüzeyine normal eğilmede orta yüzeye dik (a), düz hatlı (b) ve boyutunu değişmeden (c) kalır ("düz normaller farziyesi"). Bu farziyanın (a), (b) kısmından alınır ki plağın xz, yz yüzeylerinde koyma deformasyonu olmuyor, yani:

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

(c) kısmına esasen ise plağın z eksenı yönünde lineer deformasyonu olmuyor, yani:

$$\epsilon_z = 0$$

2. plağın orta yüzeyinde çekme, basınç, kayma deformasyonları olmuyor. Dolayısı ile orta yüzey tarafsız yüzeydir ve onun x, y eksenleri yönünde yer değişimleri (u_0 , v_0) sıfıra eşittir.

$z = 0$ olduğunda :

$$u(x, y, 0) = u_0 = 0$$

$$v(x, y, 0) = v_0 = 0$$

3. x, y eksenleri yönündeki σ_x , σ_y gerilmelerine nazaran z eksenı yönündeki σ_z gerilmesini ihmal etmek olur.

$$\sigma_z = 0$$

2.2.2.1. Yerdeğiştirme ve şekil değiştirme

Yer değiştirmeler :

Çökme (z yönünde yerdeğiştirme)

$$w = w(x, y)$$

x yönünde yerdeğiştirme

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.51)$$

y yönünde yerdeğiştirme

$$v = z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Dönmeler :

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.52)$$

Şekil değiştirmeler : Plak kalınlığı (h) doğrultusundaki şekil değiştirmelerin çok küçük olması nedeniyle

$\epsilon_z, \tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$ alınmıştır.

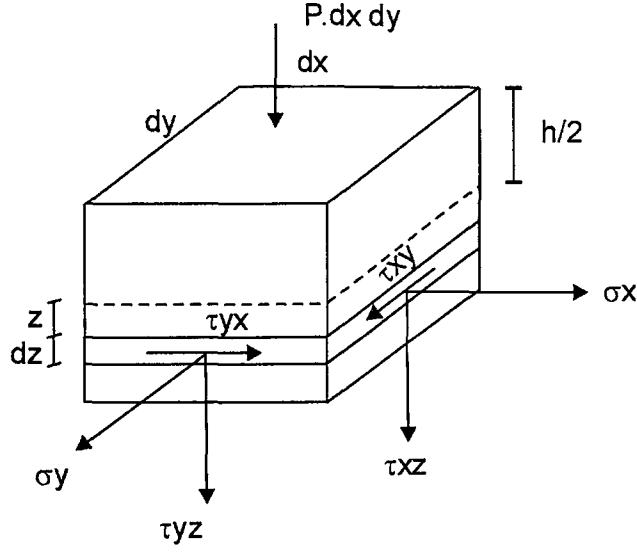
$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.53)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

2.2.2.2 Gerilmeler ve İç Kuvvetler

Plaktan kesilip çıkarılmış $d_x \cdot d_y$ boyutlu bir plak elemanın yüzeyindeki gerilmeler şekil (2.7)'de gösterilmiştir. Plakın ince olması sebebiyle σ_z normal gerilmeleri σ_x ve σ_y gerilmeleri yanında çok küçüktür.



Şekil 2.7 İnce Plak Gerilmeleri

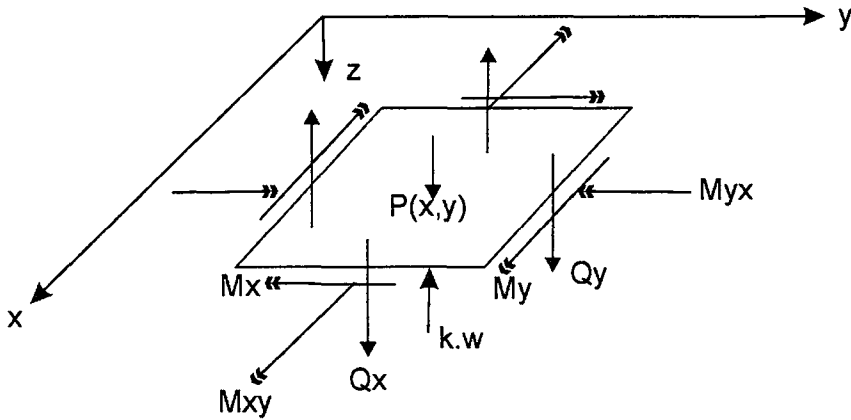
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.54)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = -\frac{Ez(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

İç kuvvetler :

d_x , d_y 'nin birim boyutlu plak olması halinde kesitlerdeki gerilme bileşenlerine plak iç kuvvetleri denir. İç kuvvetler şekil (2.8)'de gösterilmiştir.



Şekil 2.8 İnce Plak İç Kuvvetleri

Eğilme Mometleri ve Kesme Kuvvetleri

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

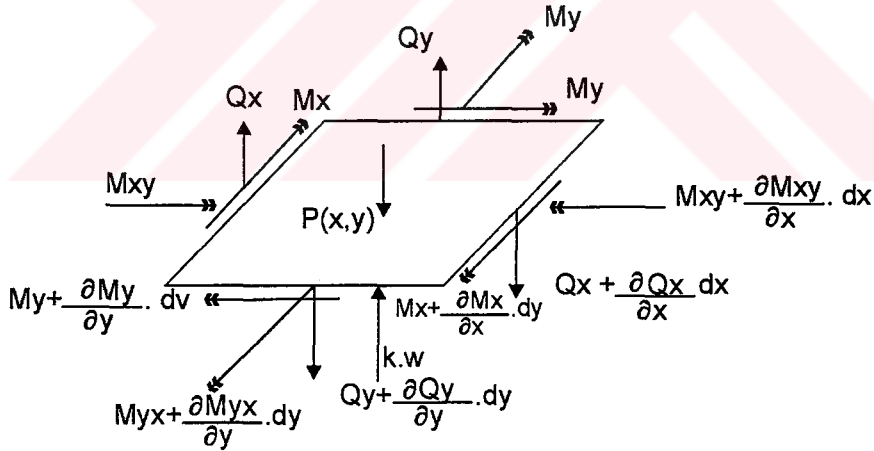
$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.55)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

2.2.2.3. Plak Diferansiyel Denkleminin Çıkarılması



Şekil 2.9. İnce Plak İç Kuvvetleri

Düşey doğrultuda denge denklemi (Kuvvet İzdüşümü);

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + P dx dy - k \cdot w dx dy = 0 \quad (2.56)$$

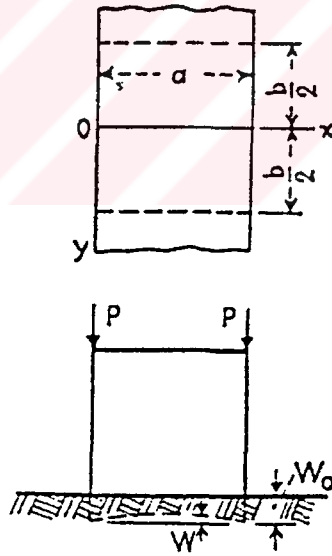
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -P + k \cdot w \quad (2.57)$$

(2.55) bağıntıları (2.57)'de yerine konulursa homojen izotrop malzemede, ince plağa ait diferansiyel denklem (2.58) bulunur.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} - \frac{k \cdot w}{D} \quad (2.58)$$

2.2.2.4. Elastik zemindeki plakların eğilmesi

Yanal yüklü bir plak, beton yol veya radye plağında olduğu gibi elastik bir zemine oturmuş olabilir. Elastik zemine oturmuş bir plak, çevresi boyunca mesnetlenmiş de olabilir. Şekil 2.10'da bunun örneği gösterilmiştir. Burada dikdörtgen küp kesitli bir kiriş P yükleri ile zemine basılmıştır. Kirişin zeminin elastik reaksiyonları ile yüklenmiş olan taban levhası bütün düşey kenarları ve şekilde kesik çizgilerle gösterilen düşey enine perdeler tarafından mesnetlenmiştir. Ekseriyetle bu tip plakların eğilmesinin incelenmesinde herhangi bir noktadaki elastik zemin reaksiyonunun şiddetinin bu noktadaki w sehimine ile orantılı olduğu kabul edilir. Bu basitleştirici hipotezle elastik zemindeki bir plağın sehimine ait diferansiyel denklem şu şekilde yazılabilir :



Şekil 2.10. Elastik zemindeki plakların eğilmesi

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} - \frac{k w}{D} \quad (2.58)$$

Burada q , daha önce olduğu gibi yanal yükün şiddeti ve $k w$ zemin reaksiyonudur, k bir cm sehim başına kg/cm^2 olarak ifade edilir. Bazen buna zemin modülü denir.

Şekil 2.10'da gösterilen durumu ele alırsak; w_0 taban levhasının kenarlarının sehimini ve w bu plağın çevre düzleminden itibaren ölçülen sehimini gösterdiğine göre herhangi bir noktadaki zemin reaksiyonunun şiddeti $k(w_0 - w)$ olur ve (2.58) denklemi Şu şekli alır:

$$\Delta \Delta w = \frac{k}{D} (w_0 - w) \quad (2.59)$$

Koordinat eksenlerini şekilde gösterildiği gibi alarak ve plağın y eksenine paralel olan kenarlarının basit mesnetli, diğer iki kenarın ankastre olduğunu farzederek çevre şartları

$$(w)_{x=0, x=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0, x=a} = 0 \quad (2.60)$$

$$(w)_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (2.61)$$

olur. w sehimini şu seri şeklinde alınabilir

$$w = \frac{4kw_0}{D\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4 + \frac{k}{D}} \right)} + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.62)$$

Sağ taraftaki ilk seri elastik zemine oturtulmuş basit mesnetli bir şeridin sehimini gösteren (2.59) denkleminin özel bir çözümüdür.

$$\Delta \Delta w = \frac{k}{D} w = 0 \quad (2.63)$$

Şu halde Y_m fonksiyonlarının

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{II} + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right) Y_m = 0 \quad (2.64)$$

adi diferansiyel denklemini sağlamaları gerekir.

$$\frac{m\pi}{a} = \mu_m \quad \frac{k}{D} = \lambda^4 \quad (2.65)$$

$$2\beta_m^2 = \sqrt{\mu_m^4 + \lambda^4} + \mu_m^2 \quad 2\gamma_m^2 = \sqrt{\mu_m^4 + \lambda^4} - \mu_m^2 \quad (2.66)$$

notasyonlarını kullanarak ve (2.64) denkleminin çözümünü $e^{\gamma y}$ şeklinde alarak r için şu dört kökü elde ederiz.

$$r = \beta + i\gamma, \quad -\beta + i\gamma, \quad \beta - i\gamma, \quad -\beta - i\gamma$$

(2.64) denkleminin bunlara tekabül eden dört özel çözümü şunlardır.

$$e^{\beta my} \cos \gamma_m y, \quad e^{-\beta my} \cos \gamma_m y, \quad e^{\beta my} \sin \gamma_m y, \quad e^{-\beta my} \sin \gamma_m y \quad (2.67)$$

Bunlar şu şekilde de alınabilir :

$$\begin{aligned} \cosh \beta_m y \cos \gamma_m y & \quad \sinh \beta_m y \cos \gamma_m y \\ \cosh \beta_m y \sin \gamma_m y & \quad \sinh \beta_m y \sin \gamma_m y \end{aligned} \quad (2.68)$$

Simetriden dolayı incelemekte olduğumuz halde Y_m 'nin, y 'nin tek bir fonksiyonu olduğu anlaşılır. Şu halde (2.68) entegrallerini kullanarak,

$Y_m = A_m \cosh \beta_m y \cos \gamma_m y + B_m \sinh \beta_m y \sin \gamma_m y$
elde ederiz ve plak sehimini şu şekilde buluruz.

$$w = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[\frac{4kw_0}{D\pi m \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right)} + A_m \cosh \beta_m y \cos \gamma_m y + B_m \sinh \beta_m y \sin \gamma_m y \right] \quad (2.69)$$

Bu ifade (2.60) Çevre şartlarını sağlar. (2.61) şartlarını sağlamak için A_m ve B_m sabitlerini

$$\frac{4kw_0}{D\pi m \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right)} + A_m \cosh \frac{\beta_m b}{2} \cos \frac{\gamma_m b}{2} + B_m \sinh \frac{\beta_m b}{2} \sin \frac{\gamma_m b}{2} = 0$$

$$(A_m \beta_m + B_m \gamma_m) \sinh \frac{\beta_m b}{2} \sin \frac{\gamma_m b}{2} - (A_m \gamma_m - B_m \beta_m) \cosh \frac{\beta_m b}{2} \sin \frac{\gamma_m b}{2} = 0 \quad (2.70)$$

denklemlerini sağlayacak şekilde seçmemiz gerekir. A_m ve B_m 'nin bu değerlerini (2.69) ifadesine koyarak plağın aranan sehimini elde ederiz.

Dört kenarından basit mesnetli bir plak problemi aynı şekilde çözülebilir. Navier çözümü bu halde de kullanılabilir. Plağın sehimini:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.71)$$

Örnek olarak bir plağın (ξ, η) noktasına tatbik edilen münferit bir P kuvveti tesiri ile meydana gelen sehimini gözönüne alalım. Enerji metodunu kullanarak plağın eğilme-şekil değiştirme enerjisini

$$V = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.72)$$

olarak buluruz. Elastik zeminin şekil değiştirme enerjisi şudur:

$$V_1 = \int_0^a \int_0^b \frac{k w^2}{2} dx dy = \frac{kab}{8} A_{mn}^2 \quad (2.73)$$

A_{mn} katsayılarını tayin etmek için virtüel yer değiştirme prensibini kullanırız ve buradan

$$P \delta A_{mn} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} = \frac{\delta}{\delta A_{mn}} (V + V_1) \delta A_{mn} = \left[\frac{\pi^4 ab D}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{kab}{4} \right] A_{mn} \delta A_{mn}$$

buluruz. Şu halde

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{ab \left[\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k \right]}$$

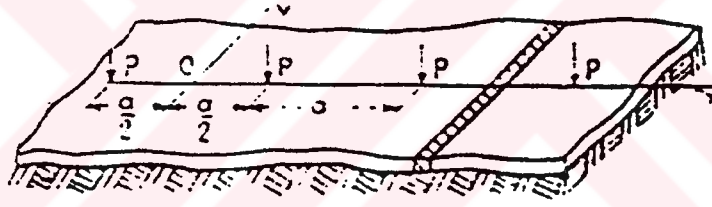
olur. Katsayıların bu değerlerini (2.71) serisine koyarak sehimini elde ederiz:

$$w = \frac{4P}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\pi^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.74)$$

Plakın münferit bir kuvvet tesiri ile meydana gelen sehimini belli olunca, herhangi bir yanal yüklemenin sebep olduğu sehim süperpozisyon metodu ile elde edilir. Örneğin q şiddetinde üniform yayılı yük halini ele alalım. (2.74) ifadesinde P yerine $q d\xi d\eta$ koyup O ve a sınırları ile 0 ve b sınırları arasında entegre edersek

$$w = \frac{16q}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k \right]} \quad (2.75)$$

elde ederiz, k , sıfıra eşit olduğu zaman bu sehim üniform yüklü bir plak için verilen Navier çözümünün aynısı olur.



Şekil 2.11.Elastik zemine oturan geniş bir plak

Şimdi Şekil 2.11 de gösterilen hali ele alalım. Elastik bir zemine oturan geniş bir plak x eksenini boyunca eşit aralıklı P kuvvetleri ile yüklenmiştir. Koordinat eksenlerini şekilde gösterildiği gibi alacağız ve yayılı yük bulunmadığı için (2.63) denklemini kullanacağız. Bu denklemin çözümünü

$$w = w_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} Y_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (2.76)$$

serisi şeklinde alalım. Burada

$$w_0 = \frac{P\lambda}{2\sqrt{2}ak} e^{\frac{-\lambda y}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.77)$$

ilk terimi, $y=0$ da P/a yükü ile yüklenmiş, y eksenine paralel birim genişlikteki sonsuz uzun bir şeridin sehimini gösterir. Diğer terimler yüklerin tatbik noktası ile yükler arasındaki uzaklığın orta yerlerinde elastik yüzeye çizilen teğetin eğiminin 0'a eşit olmasından ibaret olan simetri şartını sağlarlar. Y_m fonksiyonları için y 'nin sonsuz değerleri için sıfır eden özel (2.67) integralini ele alalım. Şu halde :

$$Y_m = A_m e^{-\beta_m y} \cos \gamma_m y + B_m e^{-\beta_m y} \sin \gamma_m y$$

olur. $(\partial w / \partial y)_{y=0}$ simetri şartını sağlamak için bu ifadede

$$B_m = \frac{\beta_m A_m}{\gamma_m}$$

almamız gerekir. Şu halde yeni $A'_m = A_m / \gamma_m$ sabitlerini işin içine sokarak (2.76) sehimlerini şu şekilde gösterebiliriz

$$w = w_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} A'_m \cos \frac{m\pi x}{a} e^{-\beta_m y} (\gamma_m \cos \gamma_m y + \beta_m \sin \gamma_m y) \quad (2.78)$$

A_m katsayılarını P yükleri cinsinden ifade etmek için plağın x ekseninden geçen normal kesiti boyunca tesir eden Q_y kesme kuvvetini gözönüne alalım. Simetriden dolayı p yüklerinin tatbik noktalarından başka bütün diğer noktalarda bu kuvvet sıfırdır. Yüklerin tatbik noktalarında kesme kuvvetinin $-P/2$ 'ye eşit bileşkeler vermesi gerekir, önceki paragrafta kesme kuvvetlerinin buna benzer bir yayılışına ait incelemede kesme kuvvetlerinin şu seri ile ifade edilebileceği gösterilmişti:

$$Q_y = -\frac{P}{2a} - \frac{P}{a} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

(2.78) ifadesinden hesaplandığı üzere kesme kuvveti şuna eşittir :

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{P}{2a} - 2D \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} A'_m \beta_m \gamma_m (\beta_m^2 + \gamma_m^2) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

Kesme kuvvetinin bu iki ifadesinden,

$$A'_m = \frac{P(-1)^{\frac{m}{2}}}{2aD\beta_m\gamma_m(\beta_m^2 + \gamma_m^2)}$$

buluruz veya (2.66) notasyonlarını kullanarak,

$$A_m^i = \frac{P(-1)^{\frac{m}{2}}}{aD\lambda\sqrt{\lambda_m^4 + \mu_m^4}}$$

elde ederiz. Bunu (2.78) ifadesine koyarak neticede

$$w = w_0 + \frac{P\lambda^2}{ak} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\lambda^4 + \mu_m^4}} \cos \frac{m\pi x}{a} e^{-\beta_m y} (\gamma_m \cos \gamma_m y + \beta_m \sin \gamma_m y) \quad (2.79)$$

elde ederiz. Maksimum sehim P yüklerinin altındadır. Bu (2.79) ifadesinde $x=a/2$, $y=0$ koyarak elde edilir.

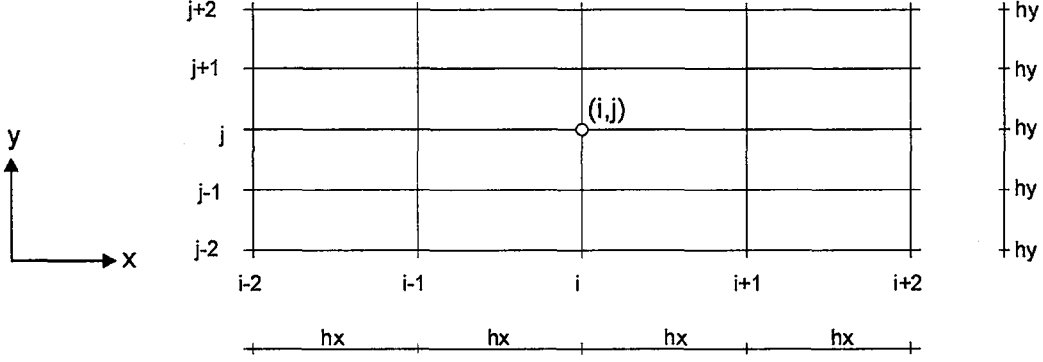
$$w_{\max} = \frac{P\lambda^2}{2\sqrt{2}ak} + \frac{p\lambda^2}{ak} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\gamma_m}{\sqrt{\lambda^4 + \mu_m^4}} \quad (2.80)$$

Sonsuz büyük bir plağa münferit bir P yükünün tesir ettiği özel hal de (2.80) formülünde $a=\infty$ koyularak elde edilir.

2.3. Elastik zemine oturan dikdörtgen plakların nümerik metodlarla çözümü

2.3.1 İki Değişkenli Fonksiyonlarda Sonlu Fark İfadelerinin Çıkarılması

Bu bölümde hem x'e hem de y'ye bağlı bir $w(x, y)$ fonksiyonunun türev sonlu farklarla ifade edilecektir.



Şekil 2.12. İki değişkenli fonksiyonlarda sonlu fark yöntemi ile

$W(x,y)$ fonksiyonunun herhangi bir (i,j) noktasındaki türevlerini sonlu farklarla ifade edebilmek için, şekil I.12'de görüldüğü gibi, X ve Y eksenlerine paralel doğrular çizerek bir ağ teşkil edelim. x eksenine paralel doğruların eşit aralıkları h_x ve y eksenine paralel doğruların eşit aralıkları h_y olsun. önce y'yi sabit kabul edip, $w(x,y)$ fonksiyonunun x'e göre kısmi türevleri bulunacaktır. Sonra da x'i sabit kabul edip, aynı fonksiyonun y'ye göre kısmi türevleri bulunacaktır. Buna göre, herhangi bir (i,j) noktasındaki kısmi türevler şu şekilde bulunabilir.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i,j} \cong \left[\frac{\Delta w}{\Delta x}\right]_{i,j} = \frac{w_{i-1,j} - w_{i+1,j}}{2h_x}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i,j} \cong \left[\frac{\Delta w}{\Delta y}\right]_{i,j} = \frac{w_{i,j-1} - w_{i,j+1}}{2h_y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right]_{i,j} = \frac{\frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{h_x} - \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{h_x}}{h_x} = \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h_x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2}\right]_{i,j} = \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_y^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{i,j} \cong \frac{\Delta}{\Delta x} \left[\frac{\Delta w}{\Delta y} \right]_{i,j} = \frac{\left(\frac{\Delta w}{\Delta y} \right)_{i-1,j} - \left(\frac{\Delta w}{\Delta y} \right)_{i+1,j}}{2h_x} \\ &= \frac{w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}}{4h_x h_y} \end{aligned} \quad (2.81)$$

(2.81) ifadelerinden faydalanılarak, herhangi bir (i,j) noktasındaki:

$$\nabla^2 w_{i,j} = \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_{i,j} + \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right)_{i,j} \text{ değeri kolayca bulunabilir. Buradaki :}$$

$$\nabla^2 = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2}{\Delta y^2} \text{ değerine laplace operatörü denir.}$$

$$\nabla^2 w_{i,j} = \frac{1}{h_x^2} \cdot w_{i-1,j} - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right) w_{i,j} + \frac{1}{h_x^2} w_{i+1,j} + \frac{1}{h_y^2} w_{i,j-1} + \frac{1}{h_y^2} w_{i,j+1} \quad (2.82)$$

(2. 82) ifadesinde :

$$(F1)_{i-1,j} = \frac{1}{h_x^2}$$

$$(FO)_{i,j} = -\frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2}$$

$$(F2)_{i+1,j} = \frac{1}{h_x^2} \quad (2.83)$$

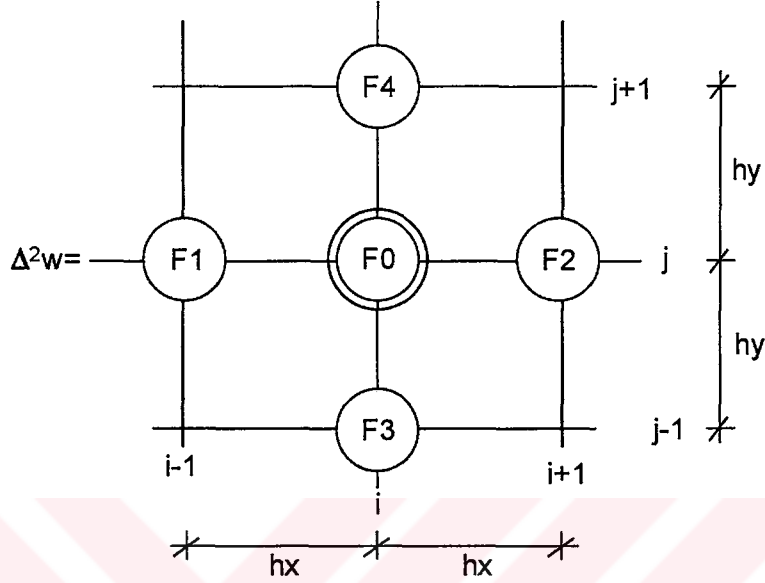
$$(F3)_{i,j-1} = \frac{1}{h_y^2}$$

$$(F4)_{i,j+1} = \frac{1}{h_y^2}$$

ile gösterilirse, (2.82) denklemi şu şekilde yazılabilir.

$$\nabla^2 w_{i,j} = (F1)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (FO)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F2)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (F3)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (F4)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1} \quad (2.84)$$

(2. 84) denklemini şekil 2.13'te görüldüğü gibi şematik olarak ifade edebiliriz. Bu şemaya göre, FO molekülü (i,j) noktası ile çakıştırıldığında, F1 ile (i-1,j) ait noktasına ait w değeri, F2 ile (i+1,j) noktasına ait w değeri, F3 ile (i,j-1) noktasına ait w değeri ve F4 ile de (i,j+1) noktasına ait w değeri çarpılıp toplamı alınacaktır.



Şekil 2.13. $\nabla^2 w$ gösteren şema

Şimdi de :

$\nabla^4 w_{ij} = \nabla^2 (\nabla^2 w)_{ij}$ değerini bulalım. Şekil 2.13'teki şemayı tatbik edersek :

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_{ij} = & (F1)_{i-1,j} \cdot (\nabla^2 w)_{i-1,j} + (F0)_{i,j} \cdot (\nabla^2 w)_{i,j} + (F2)_{i+1,j} \cdot (\nabla^2 w)_{i+1,j} + (F3)_{i,j-1} \cdot (\nabla^2 w)_{i,j-1} \\ & + (F4)_{i,j+1} \cdot (\nabla^2 w)_{i,j+1} \end{aligned} \quad (2. 85)$$

(2.85) denklemindeki $\nabla^2 w$ değerlerini de, aynı şemaya göre yazarsak:

$$(\nabla^2 w)_{i-1,j} = (F1)_{i-2,j} \cdot w_{i-2,j} + (F0)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (F2)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F3)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + (F4)_{i-1,j+1} \cdot w_{i-1,j+1}$$

$$(\nabla^2 w)_{i,j} = (F1)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (F0)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F2)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (F3)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (F4)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1}$$

$$(\nabla^2 w)_{i+1,j} = (F1)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F0)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (F2)_{i+2,j} \cdot w_{i+2,j} + (F3)_{i+1,j-1} \cdot w_{i+1,j-1} + (F4)_{i+1,j+1} \cdot w_{i+1,j+1}$$

$$(\nabla^2 w)_{i,j-1} = (F1)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + (F0)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (F2)_{i+1,j-1} \cdot w_{i+1,j-1} + (F3)_{i,j-2} \cdot w_{i,j-2} + (F4)_{i,j} \cdot w_{i,j}$$

Bu değerler (2.85) te yerine koyulursa:

$$(\nabla^4 w)_{ij} = [(F1)_{i-2,j} \cdot (F1)_{i-1,j}] w_{i-2,j} + (F1)_{i-1,j} \cdot [(F0)_{i,j} + (F0)_{i-1,j}] w_{i-1,j} + [(F0)_{i,j}^2 + (F1)_{i,j} (F2)_{i+1,j}]$$

$$\begin{aligned}
& + (F2)_{ij} (F1)_{i-1,j} + (F4)_{ij} (F3)_{i,j-1} + (F3)_{ij} (F4)_{i,j+1}] w_{ij} + (F2)_{i+1,j} [(FO)_{ij} + (FO)_{i+1,j}] w_{i+1,j} \\
& + [(F2)_{i+2,j} \cdot (F2)_{i+1,j}] w_{i+2,j} + [(F3)_{i,j-2} (F3)_{i,j-1}] w_{i,j-2} + (F3)_{i,j-1} [(FO)_{ij} + (FO)_{i,j-1}] w_{i,j-1} + (F4)_{i,j+1} \\
& [(FO)_{ij} + (FO)_{i,j+1}] w_{i,j+1} + [(F4)_{i,j+2} (F4)_{i,j+1}] w_{i,j+2} + [(F3)_{i+1,j-1} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i+1,j-1} + (F3)_{i,j-1}] w_{i+1,j-1} \\
& + [(F4)_{i+1,j+1} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i+1,j+1} \cdot (F4)_{i,j+1}] w_{i+1,j+1} + [(F3)_{i-1,j-1} \cdot (F1)_{i-1,j-1} + (F1)_{i-1,j-1} \cdot (F3)_{i,j-1}] w_{i-1,j-1} \\
& + [(F4)_{i-1,j+1} \cdot (F1)_{i-1,j} + (F1)_{i-1,j+1} (F4)_{i,j+1}] w_{i-1,j+1} \quad (2.86)
\end{aligned}$$

(2.86 denkleminde) :

$$(S1)_{i-2,j} = (F1)_{i-2,j} (F1)_{i-1,j}$$

$$(S2)_{i-1,j} = (F1)_{i-1,j} ((FO)_{ij} + (FO)_{i-1,j})$$

$$(SO)_{ij} = (FO)_{ij}^2 + (F1)_{ij} (F2)_{i+1,j} + (F2)_{ij} (F1)_{i-1,j} + (F4)_{ij} (F3)_{i,j-1} + (F3)_{ij} (F4)_{i,j+1}$$

$$(S3)_{i+1,j} = (F2)_{i+1,j} \cdot [(FO)_{ij} + (FO)_{i+1,j}]$$

$$(S4)_{i+2,j} = (F2)_{i+2,j} (F2)_{i+1,j}$$

$$(S5)_{i,j-2} = (F3)_{i,j-2} \cdot (F3)_{i,j-1}$$

$$(S6)_{i,j-1} = (F3)_{i,j-1} [(FO)_{ij} + (FO)_{i,j-1}]$$

$$(S7)_{i,j+1} = (F4)_{i,j+1} + [(FO)_{ij} + (FO)_{i,j+1}]$$

$$(S8)_{i,j+2} = (F4)_{i,j+2} (F4)_{i,j+1}$$

$$(S9)_{i+1,j-1} = (F3)_{i+1,j-1} (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i+1,j-1} \cdot (F3)_{i,j-1}$$

$$(S10)_{i+1,j+1} = (F4)_{i+1,j+1} (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i+1,j+1} (F4)_{i,j+1}$$

$$(S11)_{i-1,j-1} = (F3)_{i-1,j-1} \cdot (F1)_{i-1,j} + (F1)_{i-1,j-1} (F3)_{i,j-1}$$

$$(S12)_{i-1,j+1} = (F4)_{i-1,j+1} (F1)_{i-1,j} + (F1)_{i-1,j+1} (F4)_{i,j+1} \quad (2.87)$$

ile gösterilirse, (2.86) denklemini şöyle yazılabilir :

$$\begin{aligned}
(\nabla^4 w)_{ij} &= (S1)_{i-2,j} \cdot w_{i-2,j} + (S2)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (SO)_{ij} \cdot w_{ij} + (S3)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (S4)_{i+2,j} \cdot w_{i+2,j} \\
&+ (S5)_{i,j-2} \cdot w_{i,j-2} + (S6)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (S7)_{i,j+1} w_{i,j+1} + (S8)_{i,j+2} \cdot w_{i,j+2} + (S9)_{i+1,j-1} \cdot w_{i+1,j-1} \\
&+ (S10)_{i+1,j+1} + (S11)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + (S12)_{i-1,j+1} \cdot w_{i-1,j+1} \quad (I. 88)
\end{aligned}$$

$\frac{h_x}{h_y} = \gamma$ ile gösterirsek ve (2. 83), (2. 87) ifadelerini dikkate alırsak :

$$F1 = F2 = \frac{1}{h_x^2} = \frac{1}{\gamma^2 h_y^2}$$

$$F3 = F4 = \frac{1}{h_y^2}$$

$$FO = - \frac{2(1+\gamma^2)}{\gamma^2 h_y^2}$$

$$S1 = S4 = \frac{1}{\gamma^4 h_y^4}$$

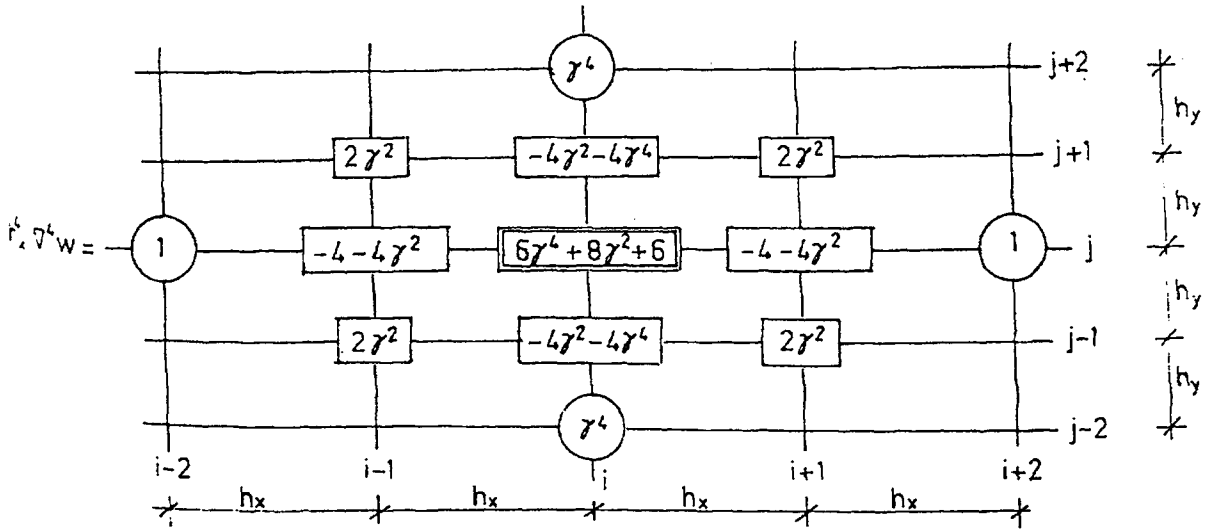
$$S2 = S3 = - \frac{4(1+\gamma^2)}{\gamma^4 h_y^4}$$

$$S5 = S8 = \frac{1}{h_y^4}$$

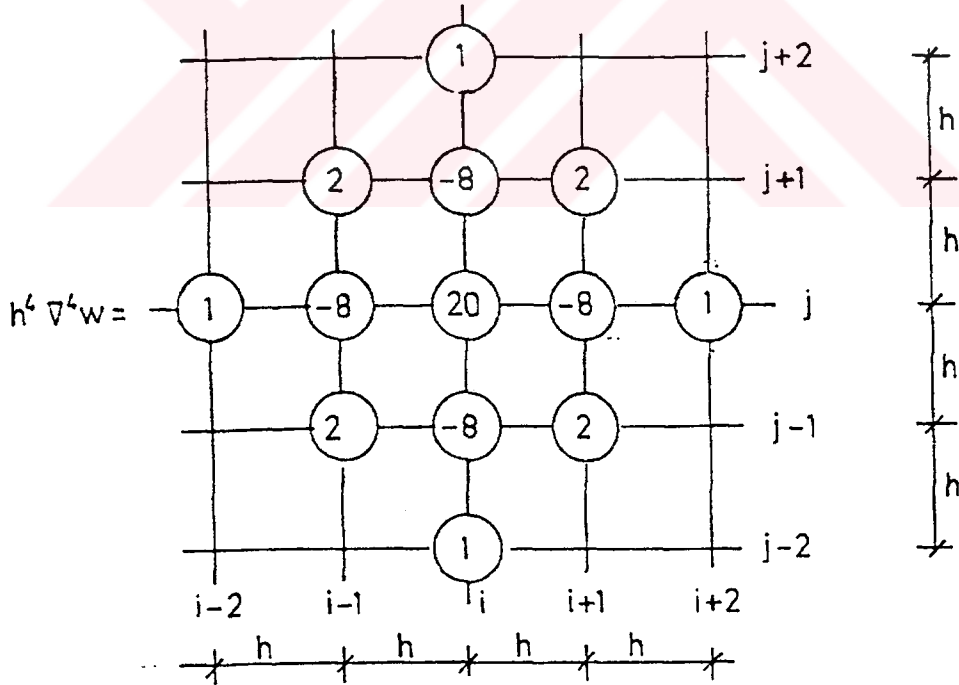
$$S9 = S10 = S11 = S12 = \frac{2}{\gamma^2 h_y^4}$$

$$S0 = \frac{6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6}{\gamma^4 h_y^4} \quad (2.89)$$

(2. 89) daki değerler $\gamma^4 h_y^4 = h_x^4$ ile çarpılarak yerine koyulursa, şekil 2.14'te görülen şema elde edilir.

Şekil 2.14. $\nabla^4 w$ gösteren şema

Özel hal: x e y doğrultularındaki aralıkların birbirine eşit olması halini ele alalım. Bu durumda $h_x = h_y = h$ olacağından $\gamma=1$ olur. Şekil I.14'te $\gamma = 1$ alınırsa, şekil 2.15 te görülen şema elde edilir.

Şekil 2.15. x e y doğrultularındaki aralıkların birbirine eşit olması hali.

2.3.2. Dikdörtgen plaklarda klasik diferansiyel denklemin sonlu farklı çözümü

Klasik Teoride elastik zemine oturan plakların diferansiyel denklemi :

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} (g - c \cdot w)$$

şeklindedir. Bu diferansiyel denklemde :

$w = w(x, y)$ çökme fonksiyonu

$g = g(x, y)$ yayılı yük fonksiyonu

$c = c(x, y)$ zemin fonksiyonu

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{plağın eğilme rijitliğidir.}$$

Bu diferansiyel denklemi, şekil 2.16'da görülen plağın herhangi bir (i,j) noktası için yazarsak :

$$\nabla^4_{w_{ij}} = \frac{g_{i,j}}{D} - k_{ij} \cdot w_{ij} \quad (2.90)$$

Burada :

$$\frac{c_{i,j}}{D} = K_{i,j} \text{ ile gösterilmiştir.}$$

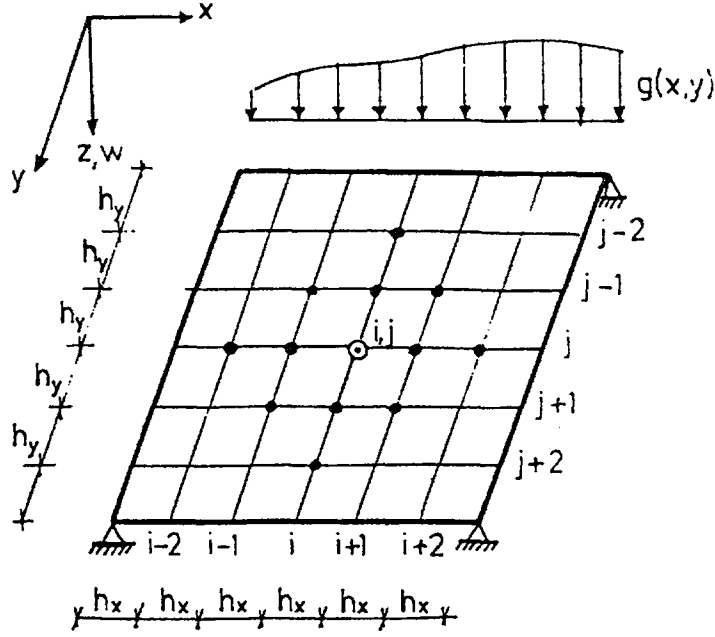
(2.90) denklemindeki $\nabla^4_{w_{ij}}$ değerini şekil 2.14'teki şemadan faydalanıp yazarsak ve $k_{ij} \cdot w_{ij}$ değerini eşitliğin sol tarafına alırsak :

$$(S1)_{i-2,j} \cdot w_{i-2,j} + (S2)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + [(SO)_{i,j} + k_{ij}] \cdot w_{i,j} + (S3)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j}$$

$$+ (S4)_{i+2,j} \cdot w_{i+2,j} + (S5)_{i,j-2} \cdot w_{i,j-2} + (S6)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1}$$

$$+ (S7)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1} + (S8)_{i,j+2} \cdot w_{i,j+2} + (S9)_{i+1,j-1} \cdot w_{i+1,j-1}$$

$$+ (S10)_{i+1,j+1} \cdot w_{i+1,j+1} + (S11)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + (S12)_{i-1,j+1} \cdot w_{i-1,j+1} = \frac{g_{i,j}}{D} \quad (2.91)$$



Şekil 2.16.Dikdörtgen plakların ağ noktaları

Şekil 2. 16'da görüldüğü gibi, x ve y eksenlerine paralel doğrular ağı çizilir. x eksenine dik doğruların aralıkları h_x ve y eksenine dik doğruların aralıklarını h_y olarak alalım. Bu doğrular ağının her noktası için (2. 91) denklemi yazılır. Bu şekilde elde edilecek denklem takımı çözülmüşse, doğrular ağının her noktasındaki w çökme değerleri bulunmuş olur. Bu çökme değerleri bulunduktan sonra bunlar, sonlu farklarla ifade edilen (2.92) kesit tesirleri denklemlerinde yerine koyularak, bahis konusu noktalardaki kesit tesirleri elde edilmiş olur.

$$(M_x)_{i,j} = -D \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \nu \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right]_{i,j} = -D \left[\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h_x^2} + \nu \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_y^2} \right]$$

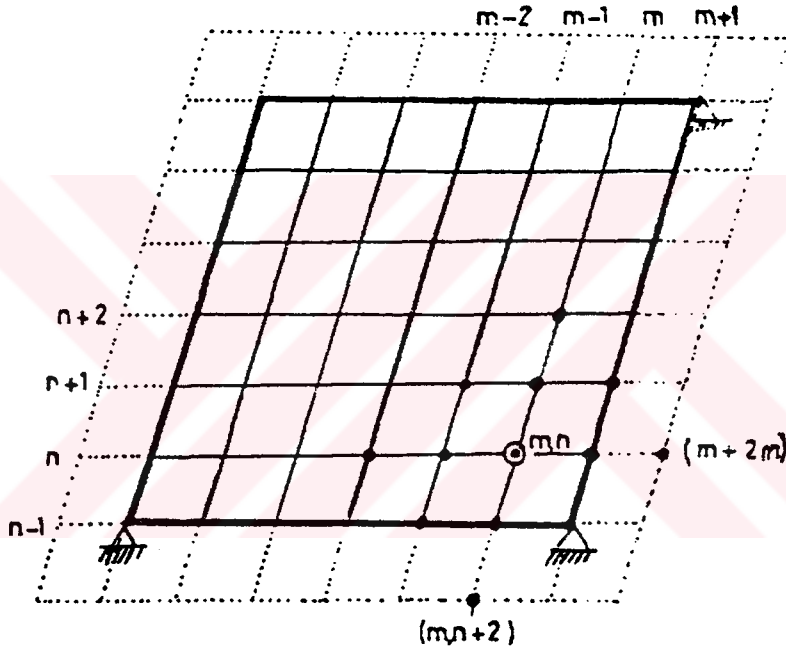
$$(M_y)_{i,j} = -D \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} + \nu \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right]_{i,j} = -D \left[\frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_y^2} + \nu \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h_x^2} \right]$$

$$(M_{xy})_{i,j} = -D (1 - \nu) \left[\frac{\Delta}{\Delta x} \left[\frac{\Delta w}{\Delta y} \right] \right]_{i,j} = \frac{-D(1 - \nu)}{4.h_x.h_y} [w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}]$$

$$(Q_x)_{i,j} = -D \frac{\Delta}{\Delta x} \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right]_{i,j} = \frac{-D}{2h_x} \left[\frac{w_{i-2,j} - 2w_{i-1,j} + 2w_{i+1,j} - w_{i+2,j}}{h_x^2} \right. \\ \left. + \frac{w_{i-1,j-1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - 1 + 2w_{i,j+1} - w_{i+1,j+1}}{h_y^2} \right]$$

$$(Q_y)_{ij} = -D \frac{\Delta}{\Delta y} \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right] = -\frac{D}{2h_y} \left[\frac{w_{i-1/j-1} - 2w_{i,j} + w_{i+1/j-1} - w_{i-1,j+1} + 2w_{i,j+1} - w_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{w_{i,j-2} - 2w_{i,j-1} + 2w_{i,j+1} - w_{i,j+2}}{h_y^2} \right] \quad (2.92. a-e)$$

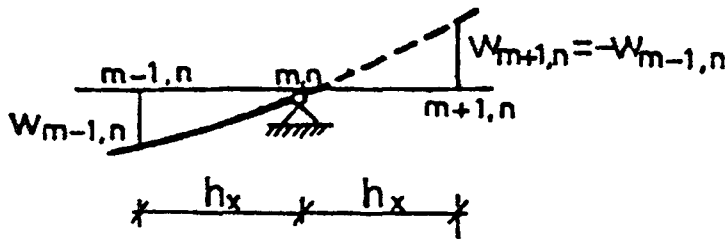
Şekil 2.17'da görüldüğü gibi, plağın mesnedine yakın (m, n) noktası için (2. 90) denklemi uygulanırken, fiktif bazı noktalar almak gerekecektir. Şekil 2. 17'da (m+2,n) ve (m, n+2) noktaları gibi. Bunun için, bu fiktif noktalardaki w fonksiyonların tarif edilmesi gerekir. Fiktif noktalardaki w fonksiyonlarının belirlenmesi için, plağın sınır şartlarından faydalanılır.



Şekil 2. 17.Plağın fiktif noktaları

2.3.2.1. Dikdörtgen plaklarda sınır şartlarının sonlu farklarla ifadesi

2.3.2.1.1. Plak sabit mesnede oturuyor ise;



Şekil 2.18.Sabit mesnet

Bu durumda mesnet üzerindeki her noktada çökme ve moment değerleri sınır olacaktır.

Yani :

$$w_{m,n} = 0$$

$$(M_x)_{m,n} = 0 \quad \text{olmalıdır.} \quad (2. 93. a-b)$$

$$(2. 93) \text{ ifadesinden, } \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right]_{m,n} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

Buna göre (2. 93. b) ifadesini (2. 93. a) ya göre yazarsak:

$$(M_x)_{m,n} = -D \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_{m,n} = 0 \text{ veya } -\frac{D}{h_x^2} (w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}) = 0$$

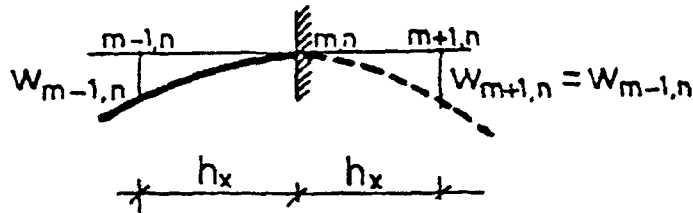
burada $w_{m,n} = 0$ koyulursa :

$$w_{m-1,n} + w_{m+1,n} = 0 \text{ veya}$$

$$w_{m-1,n} = -w_{m+1,n} \quad (2. 94)$$

olarak elde edilir. Böylece, $(m+1,n)$ fiktif noktasındaki çökme değerinin, plağın $(m-1,n)$ noktasındaki çökme değerine işaretle ters eşit olduğu sonucu çıkmış olur.

2.3.2.1.2. Plak ankastre mesnede oturuyor ise;



Şekil 2. 19. Ankastre mesnet

Bu durumda ankastre mesnet üzerindeki her noktada çökme ve dönme değerleri sıfır olacaktır.
yani :

$$w_{m,n} = 0$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{m,n} = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

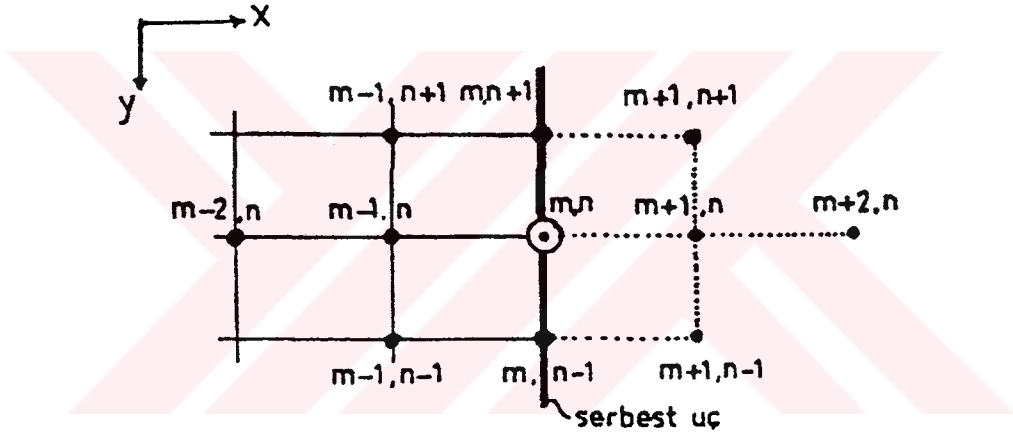
İkinci sınır şartını sonlu farklarla ifade edersek :

$$\frac{w_{m+1,n} - w_{m-1,n}}{2h_x} = 0 \text{ yazabiliriz. Buradan:}$$

$$w_{m+1,n} = w_{m-1,n} \quad (2.95)$$

bulunur ki, buna göre $(m+1,n)$ fiktif noktasındaki çökme değerinin, plağın $(m-1, n)$ noktasındaki çökme değerine eşit olduğu sonucu çıkar.

2.3.2.1.3. Plakta serbest uç bulunuyorsa;



Şekil 2. 20.Serbest uç

Bu durumda, boş uçta her noktada moment ve kesme kuvveti sıfır olacaktır. Yani :

$$(M_x)_{m,n} = 0$$

$$(Q_x)_{m,n} = 0$$

$$(M_x)_{m,n+1} = 0 \quad (2.96)$$

$$(M_x)_{m,n-1} = 0$$

(2. 96) ifadelerini, (2. 92) ye göre yazarsak :

$$\frac{1}{h_x^2} (w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}) + \frac{v}{h_y^2} (w_{m,n-1} - 2w_{m,n} + w_{m,n+1}) = 0$$

$$\frac{1}{h_x^2} (w_{m-2,n} - 2w_{m-1,n} + 2w_{m+1,n} - w_{m+2,n}) + \frac{1}{h_y^2} (w_{m-1,n-1} - 2w_{m-1,n} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1}$$

$$+ 2w_{m+1,n} - w_{m+1,n+1}) = 0$$

$$\frac{1}{h_x^2} (w_{m-1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m+1,n+1}) + \frac{v}{h_y^2} (w_{m,n} - 2w_{m,n+1} + w_{m,n+2}) = 0$$

$$\frac{1}{h_x^2} (w_{m-1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m+1,n-1}) + \frac{v}{h_y^2} (w_{m,n-2} - 2w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) = 0 \quad (2.97)$$

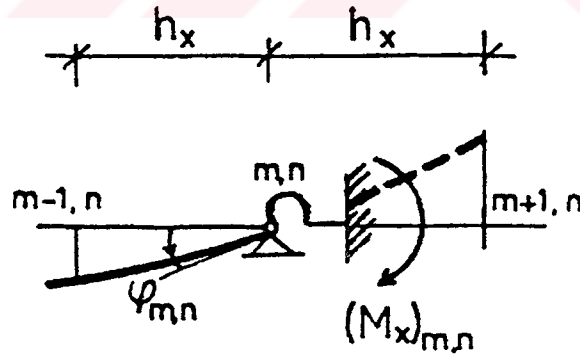
Bu dört denklemden $(m+1,n)$, $(m+2,n)$, $(m+1, n-1)$, $(m+1, n+1)$ fiktif noktalarına ait çökme değerleri, plağın iç noktalarındaki çökme değerleri cinsinden bulunmuş olur.

2.3.2.1.4. Plak elastik olarak dönebilen ankastre mesnede oturuyor ise;

Elastik olarak dönebilen ankastre mesnette $w_{m,n} = 0$ ve ayrıca mesnette meydana gelecek $(M_x)_{m,n}$ momenti $\varphi_{m,n}$ dönmesiyle orantılı olacaktır.

$$(M_x)_{m,n} = -\rho \cdot \varphi_{m,n}$$

Burada, ρ mesnedin dönme rijitliğidir.



Şekil 2.21. Dönebilen ankastre mesnet

Buradan :

$$\varphi_{m,n} = \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{m,n} = -\frac{1}{\rho} (M_x)_{m,n} \text{ bulunur. } \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} = 0 \text{ olduğu dikkat alınarak,}$$

(2. 62. a) denklemine göre :

$\left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)_{m,n} = \frac{1}{\rho} D \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right]_{m,n}$ olarak elde edilir. Bu denklemi sonlu farklarla ifade edersek :

$$\frac{w_{m+1,n} - w_{m-1,n}}{2h_x} = \frac{D}{\rho} \cdot \frac{w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}}{h_x^2}$$

Buradan :

$$w_{m+1,n} = \frac{1 + \frac{2.D}{\rho.h_x}}{1 - \frac{2.D}{\rho.h_x}} \cdot w_{m-1,n} \quad (2. 98)$$

(m+1, n) fiktif noktasındaki çökme değeri, plağın (m-1,n) noktasındaki çökme değeri cinsinden bulunmuş olur.

(2. 98) denkleminde :

$$\eta = \frac{1 + \frac{2.D}{\rho.h_x}}{1 - \frac{2.D}{\rho.h_x}} \text{ ile gösterilirse, bu denklemi :}$$

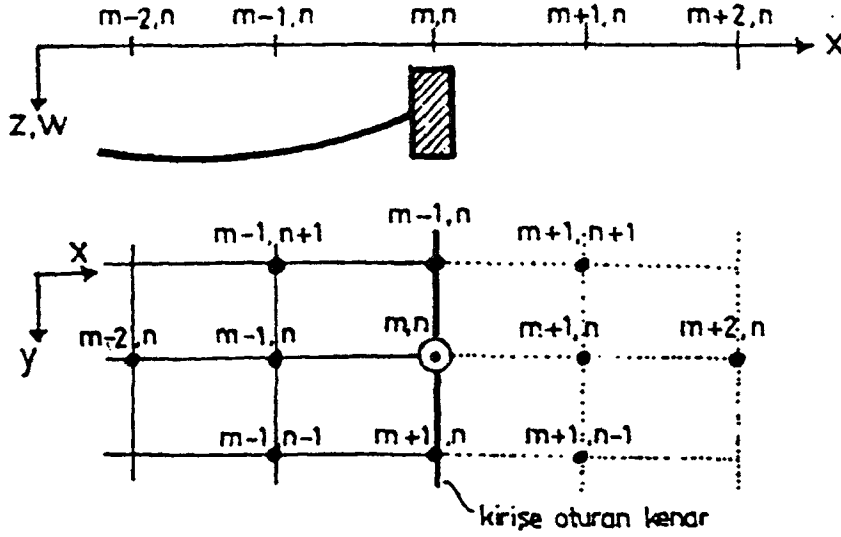
$$w_{m+1,n} = \eta \cdot w_{m-1,n} \quad (2. 99)$$

şeklinde yazabiliriz. η değeri, -1 ve 1 extrem durumları arasında değişebilecektir. Mesnedin tam ankastre olması halinde $\eta = 1$, sabit mesnet olması halinde ise $\eta = -1$ olacaktır.

2.3.2.1.5. Plak elastik olarak çökebilen mesnede oturuyor ise;

Plak şekil 2.22'de görüldüğü gibi, eğilme rijitliği E.I ve burulma rijitliği G.J olan bir mesnet kirişine oturuyor ise, plağın bu kenar boyunca çökme değerleri sıfır olmayıp kirişin elastik eğrisinin değerlerine eşit olacaktır. ayrıca, plağın kenarının dönmesi de, kirişin burulmasına eşit olacaktır. z doğrultusunda, plaktan mesnet kirişine iletilen reaksiyon kuvveti :

$$(V_x)_{m,n} = \left[Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right]_{m,n} = D \cdot \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{m,n}$$



Şekil 2. 22.Çökebilen mesnet

Bu yayılı reaksiyon kuvveti, mesnet kirişine etkiyen yük olarak düşünülürse, kirişin elastik eğrisinin diferansiyel denklemi :

$$EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{m,n} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{m,n} \quad (2.100)$$

şeklinde olacaktır.

diğer taraftan mesnet kirişindeki burulma momenti

$G \cdot J \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ olup, bu değer plağın $(M_x)_{m,n}$ eğilme momentine eşit olacaktır.

$G \cdot J \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{m,n} = (M_x)_{m,n}$ veya (2. 62. a) denkleminde faydalananak :

$$G \cdot J \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{m,n} = - D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{m,n} \quad (2.101)$$

Yazabiliriz. (2. 100) ve (2. 101) denklemlerini sonlu fark ifadelerine göre yazarsak :

$$EI \frac{w_{m-2,n} - 4w_{m-1,n} + 6w_{m+1,n} + w_{m+2,n}}{h_x^4} = D \left[\frac{-w_{m+2,n-1} + 2w_{m-1,n} - 2w_{m+1,n} + w_{m+2,n}}{2h_x^3} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + (2 - \nu) \cdot \frac{1}{2h_x h_y} \cdot (-w_{m-1,n-1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n+1}) \Big] \\
& G.J. \left(\frac{w_{m-1,n-1} - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1}}{4h_x h_y} \right) = -D \left[\frac{w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}}{h_x^2} \right. \\
& \quad \left. + \nu \cdot \frac{w_{m,n-1} - 2w_{m,n} + w_{m,n+1}}{h_y^2} \right] \quad (2.102)
\end{aligned}$$

$$\frac{EI}{h_x^3} - \frac{D}{2h_x^2} = B1$$

$$4B1 + \frac{D}{h_x^2} + \frac{D(2-\nu)}{h_y^2} = B2$$

$$B2 + 2B1 = B3$$

$$\frac{D(2-\nu)}{h_y^2} = B4$$

$$\frac{G.J}{yh_x h_y} = B5$$

$$\frac{D}{h_x^2} = B6$$

$$\frac{\nu \cdot D}{h_y^2} = B7$$

ile gösterilirse, (2.102) denklemleri şu şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned}
& B1 \cdot W_{m-2,n} - B2 \cdot W_{m-1,n} + B3 \cdot W_{m+1,n} + B1 \cdot W_{m+2,n} + B4 \cdot W_{m-1,n-1} \\
& + B4 \cdot W_{m+1,n+1} - B4 \cdot W_{m+1,n-1} - B4 \cdot W_{m+1,n+1} = 0 \\
& B5 \cdot W_{m-1,n-1} - B5 \cdot W_{m-1,n+1} - B5 \cdot W_{m+1,n+1} + B6 \cdot W_{m-1,n} - 2(B6 + B7) \cdot W_{m,n} \\
& + B6 \cdot W_{m+1,n} + B7 \cdot W_{m,n-1} + B7 \cdot W_{m,n+1} + B5 \cdot W_{m+1,n-1} = 0 \quad (2.103)
\end{aligned}$$

$$1 \text{ noktası : } S1 \cdot \eta_1 \cdot w_1 + S2 \cdot 0 + (S0 + k_1) \cdot w_1 + S3 \cdot w_2 + S4 \cdot w_3 + S5 \cdot w_{2m+1} + S6 \cdot w_{m+1} \\ + S7 \cdot 0 + S8 \cdot \eta_2 \cdot w_1 + S9 \cdot w_{m+2} + S10 \cdot 0 + S11 \cdot 0 + S12 \cdot 0 = g_1 / D$$

$$2. \text{ noktası : } S1 \cdot 0 + S2 \cdot w_1 + (S0 + k_2) \cdot w_2 + S3 \cdot w_3 + S4 \cdot w_4 + S5 \cdot w_{2m+2} + S6 \cdot w_{m+2} \\ + S7 \cdot 0 + S8 \cdot \eta_2 \cdot w_2 + S9 \cdot w_{m+3} + S10 \cdot 0 + S11 \cdot w_{m+1} + S12 \cdot 0 = g_2 / D$$

$$3. \text{ noktası : } S1 \cdot w_1 + S2 \cdot w_2 + (S0 + k_3) \cdot w_3 + S3 \cdot w_4 + S4 \cdot w_5 + S5 \cdot w_{2m+3} + S6 \cdot w_{m+3} \\ + S7 \cdot 0 + S8 \cdot \eta_2 \cdot w_3 + S9 \cdot w_{m+4} + S10 \cdot 0 + S11 \cdot w_{m+2} + S12 \cdot 0 = g_3 / D$$

$$m \text{ noktası : } S1 \cdot w_{m-2} + S2 \cdot w_{m-1} + (S0 + k_m) \cdot w_m + S3 \cdot 0 + S4 \cdot \eta_3 \cdot w_m + S5 \cdot w_{3m} \\ + S6 \cdot w_{2m} + S7 \cdot 0 + S8 \cdot \eta_2 \cdot w_m + S9 \cdot 0 + S10 \cdot 0 + S11 \cdot w_{2m-1} + S12 \cdot 0 = g_m / D$$

$$(m+1) \text{ noktası : } S1 \cdot w_{m+1} \cdot \eta_1 + S2 \cdot 0 + (S0 + k_{m+1}) \cdot w_{m+1} + S3 \cdot w_{m+2} + S4 \cdot w_{m+3} + S5 \cdot w_{3m+1} \\ + S6 \cdot w_{2m+1} + S7 \cdot w_1 + S8 \cdot 0 + S9 \cdot w_{2m+2} + S10 \cdot w_2 + S11 \cdot 0 + S12 \cdot 0 = g_{m+1} / D$$

$$(m+2) \text{ noktası : } S1 \cdot 0 + S2 \cdot w_{m+1} + (S0 + k_{m+2}) \cdot w_{m+2} + S3 \cdot w_{m+3} + S4 \cdot w_{m+4} + S5 \cdot w_{3m+2} \\ + S6 \cdot w_{2m+2} + S7 \cdot w_2 + S8 \cdot 0 + S9 \cdot w_{2m+3} + S10 \cdot w_3 + S11 \cdot w_{2m+1} + S12 \cdot w_1 \\ = g_{m+2} / D$$

$$(2m+1) \text{ noktası : } S1 \cdot \eta_1 \cdot w_{2m+1} + S2 \cdot 0 + (S0 + k_{2m+1}) \cdot w_{2m+1} + S3 \cdot w_{2m+2} + S4 \cdot w_{2m+3} \\ + S5 \cdot w_{4m+1} + S6 \cdot w_{3m+1} + S7 \cdot w_{m+1} + S8 \cdot w_1 + S9 \cdot w_{3m+2} + S10 \cdot w_{m+2} + S11 \cdot 0 \\ + S12 \cdot 0 = g_{2m+1} / D$$

$$3 m \text{ noktası : } S1 \cdot w_{3m-2} + S2 \cdot w_{3m-1} + (S0 + k_{3m}) \cdot w_{3m} + S3 \cdot 0 + S4 \cdot \eta_3 \cdot w_{3m} + S5 \cdot w_{5m} \\ + S6 \cdot w_{4m} + S7 \cdot w_{2m} + S8 \cdot w_m + S9 \cdot 0 + S10 \cdot 0 + S11 \cdot w_{5m-1} + S12 \cdot w_{3m-1} \\ = g_{3m} / D$$

$$nm \text{ noktası : } S1 \cdot w_{nm-2} + S2 \cdot w_{nm-1} + (S0 + k_{nm}) \cdot w_{nm} + S3 \cdot 0 + S4 \cdot \eta_3 \cdot w_{nm} + S5 \cdot \eta_4 \cdot w_{nm} \\ + S6 \cdot 0 + S7 \cdot w_{(n-1)m} + S8 \cdot w_{(n-2)m} + S9 \cdot 0 + S10 \cdot 0 + S11 \cdot 0 + S12 \cdot w_{(n-1)(m-1)} \\ = g_{nm} / D$$

Bu denklemleri düzenleyip yazarsak :

$$(S1 \cdot \eta_1 + S0 + S8 \cdot \eta_2 + k_1) \cdot w_1 + S3 \cdot w_2 + S4 \cdot w_3 + S6 \cdot w_{m+1} + S9 \cdot w_{m+2}$$

$$+ S5 \cdot w_{2m+1} = g_1 / D$$

$$S2 \cdot w_1 + (S0 + S8 \cdot \eta_2 + k_2) \cdot w_2 + S3 \cdot w_3 + S4 \cdot w_4 + S11 \cdot w_{m+1} + S6 \cdot w_{m+2}$$

$$+ S9 \cdot w_{m+3} + S5 \cdot w_{2m+2} = g_2 / D$$

$$(S1 \cdot w_1 + S2 \cdot w_2 + (S0 + S8 \cdot \eta_2 + k_3) \cdot w_3 + S3 \cdot w_4 + S4 \cdot w_5 + S11 \cdot w_{m+2}$$

$$+ S6 \cdot w_{m+3} + S9 \cdot w_{m+4} + S5 \cdot w_{2m+3} = g_3 / D$$

$$S1 \cdot w_{m-2} + S2 \cdot w_{m-1} + (S0 + S4 \cdot \eta_3 + S8 \cdot \eta_2 + k_m) w_m + S11 \cdot w_{2m-1} + S6 \cdot w_{2m}$$

$$+ S5 \cdot w_{3m} = g_m / D$$

$$S7 \cdot w_1 + S10 \cdot w_2 + (S0 + S1\eta_1 + k_{m+1}) \cdot w_{m+1} + S3 \cdot w_{m+2} + S4 \cdot w_{m+3} + S6 \cdot w_{2m+1}$$

$$+ S9 \cdot w_{2m+2} + S5 \cdot w_{3m+1} = g_{m+1} / D$$

$$S12 \cdot w_1 + S7 \cdot w_2 + S10 \cdot w_3 + S2 \cdot w_{m+1} + (S0 + k_{m+2}) \cdot w_{m+2} + S3 \cdot w_{m+3}$$

$$+ S4 \cdot w_{m+4} + S11 \cdot w_{2m+1} + S6 \cdot w_{2m+2} + S9 \cdot w_{2m+3} + S5 \cdot w_{3m+2} = g_{m+2} / D$$

$$S12 \cdot w_{m-1} + S7 \cdot w_m + S1 \cdot w_{2m-2} + S2 \cdot w_{2m-1} + (S0 + S4 \cdot \eta_3 + k_{2m}) \cdot w_{2m}$$

$$+ S11 \cdot w_{3m-1} + S6 \cdot w_{3m} + S5 \cdot w_{4m} = g_{2m} / D$$

$$S8 \cdot w_1 + S7 \cdot w_{m+1} + S10 \cdot w_{m+2} + (S0 + S1 \cdot \eta_1 + k_{2m+1}) \cdot w_{2m+1} + S3 \cdot w_{2m+2}$$

$$+ S4 \cdot w_{2m+3} + S6 \cdot w_{3m+1} + S9 \cdot w_{3m+2} + S5 \cdot w_{4m+1} = g_{2m+1} / D$$

$$S8 \cdot w_m + S12 \cdot w_{2m-1} + S7 \cdot w_{2m} + S1 \cdot w_{3m-2} + S2 \cdot w_{3m-1} + (S0 + S4 \cdot \eta_3 + k_{3m}) w_{3m}$$

$$+ S6 \cdot w_{4m} + S11 \cdot w_{5m-1} + S5 \cdot w_{5m} = g_{3m} / D$$

$$S8 \cdot w_{(n-2)m} + S12 \cdot w_{(n-1)m-1} + S7 \cdot w_{(n-1)m} + S1 \cdot w_{nm-2} + S2_{nm-1} + (S0 + S4 \cdot \eta_3$$

$$+ S5 \cdot \eta_4 + k_{nm}) \cdot w_{nm} = g_{nm} / D$$

(2. 104)

(2. 104) denklemleri, n.m bilinmeyenli bir denklem takımı teşkil ederler. Bu denklem takımından bilinmeyen $w_1, w_2, w_3, \dots, w_m, \dots, w_{nm}$ çökme değerleri bulunabilir. (2. 104) denklemlerini matris formunda yazalım.

$[A] \cdot [w] = [P]$ veya, her iki tarafı $[A]^{-1}$ ile çarparsak :

$[w] = [A]^{-1} \cdot [P]$ Burada :

$[W]$ Bilinmeyen çökme değerlerini gösteren vektör

$[A]$ Katsayılar matrisi

$[P]$ Yük vektörü

$$[W] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_m \\ w_{m+1} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{bmatrix} \quad [P] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_m \\ g_{m+1} \\ \vdots \\ g_{nm} \end{bmatrix}$$

A katsayılar matrisi (2.105) de verilmiştir.

A katsayılar matrisini, alt matrislerle ifade edebiliriz. Bu şekilde alt matrislerle çalışmak bilgisayar programlaması bakımından kolaylık sağlar.

$$[A] = \begin{bmatrix} [A1] & [A3] & [A4] & [0] & [O] & [O] \\ [A5] & [A2] & [A3] & [A4] & [O] & [O] \\ [A6] & [A5] & [A2] & [A3] & [A4] & [O] \\ [O] & [A6] & [A5] & [A2] & [A3] & [A4] \\ [O] & [O] & [A6] & [A5] & [A2] & [A3] \\ [O] & [O] & [O] & [A6] & [A5] & [A7] \end{bmatrix}$$

(2.106)

Burada :

$[A1], [A2], \dots, [A7]$ alt matrislerdir. $[O]$ ise sıfır matrisidir.

(2.105) ve (2.106) nin mukayesesinden alt matrisler şu şekilde bulunur:

	1	2	3	...	m	
[A1]=	$S0+\eta_1 S1+\eta_2 S8+k_1$	$S3$	$S4$			1
	$S2$	$S0+\eta_2 S8+k_2$	$S3$			2
	$S1$	$S2$			$S4$	$\vdots$
				$S0+\eta_1 S8+k_{m-1}$	$S3$	$\vdots$
			$S1$	$S2$	$S0+\eta_2 S8+\eta_3 S4+k_m$	m

	m+1	m+2	m+3	...	2m	
[A2]=	$S0+\eta_1 S1+k_{m+1}$	$S3$	$S4$			m+1
	$S2$	$S0+k_{m+2}$	$S3$			m+2
	$S1$	$S2$			$S4$	$\vdots$
				$S0+k_{2m-1}$	$S3$	$\vdots$
			$S1$	$S2$	$S0+\eta_3 S4+k_{2m}$	2m

	m+1	m+2	m+3	...	2m	
[A3]=	$S6$	$S9$				m+1
	$S11$	$S6$	$S9$			m+2
			$S11$	$S6$	$S9$	$\vdots$
				$S11$	$S6$	2m

	2m+1	2m+2	...	3m	
[A4]=	$S5$				2m+1
		$S5$			2m+2
				$S5$	$\vdots$
					3m

	1	2	...	m		
[A5]=	S7	S10			1	
	S12	S7	S10		2	
					⋮	
			S12	S7	S10	
				S12	S7	m

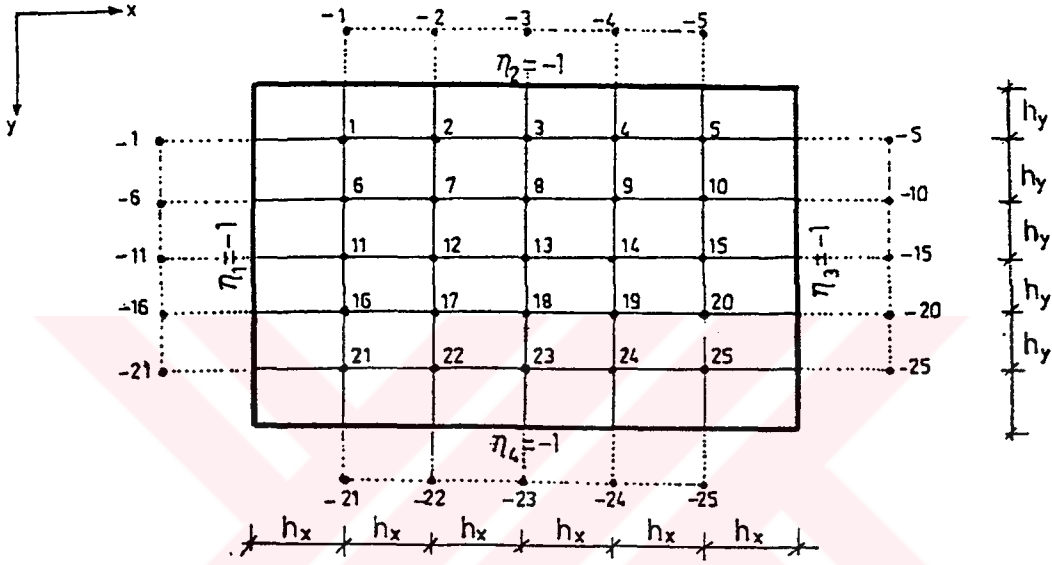
	1	2	...	m	
[A6]=	$S8$				1
		$S8$			2
				$S8$	$\vdots$
					m

	(n-1)m+1	(n-1)m+2	...	nm		
[A7]=	$S0+\eta_1 S1+\eta_4 S5+k_{(n-1)m+1}$	$S3$	$S4$		(n-1)m+1	
	$S2$	$S0+\eta_4 S5+k_{(n-1)m+2}$	$S3$		(n-1)m+2	
	$S1$			$S4$	$\vdots$	
			$S2$	$S0+\eta_1 S5+k_{nm-1}$	$S3$	
			$S1$	$S2$	$S0+\eta_4 S4+\eta_4 S5+k_{nm}$	nm

(2.107)

(2. 107) de görülen alt matrisleri incelediğimizde, sınır şartlarının sadece [A1], [A2] ve [A7] matrislerine tesiri olduğunu görürüz. Bunların haricinde kalan alt matrisler ise sınır şartlarına bağımsızdır.

2.3.2.2.1. Elastik zemin üzerindeki dökdörtgen plağın dört kenarından sabit mesnetlere oturması hâli



Şekil 2.24 Elastik zemin oturan plağın dört kenarından sabit mesnetlere oturması hâli

şekil 2.24'te görüldüğü gibi, plağı x ve y doğrultularında altı eşit parçaya bölelim. Bu durumda $m=n=5$ olacaktır. plak dört tarafından sabit mesnetlere oturduğu için, plak dışında alınacak fiktif noktadaki çökme değerleri (2.94) ifadesine göre, plağın iç noktalarına ait çökme değerlerinin ters işaretlisi olacaktır. Buna göre :

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = -1 \text{ 'dir.}$$

Ayrıca y eksenine paralel doğruların aralıkları h_x ve x eksenine paralel doğruların aralıkları h_y olarak seçildiğinden, şekil 2.14 teki şemaya göre :

$$S_0 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$S_1 = S_4 = 1$$

$$S_2 = S_3 = -4 - 4\gamma^2$$

$$S5 = S8 = \gamma^4 \quad (2.108)$$

$$S6 = S7 = -4\gamma^2 - 4\gamma^4$$

$$S9 = S10 = S11 = S12 = 2\gamma^2$$

olacaktır. Bu değerleri kullanarak :

$$SO + S1 \cdot \eta_1 + S8 \cdot \eta_2 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

$$SO + S8 \cdot \eta_2 = SO + S5 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$SO + S8 \cdot \eta_2 + S4 \cdot \eta_3 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \quad (2.109)$$

$$SO + S1 \cdot \eta_1 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

$$SO + S4 \cdot \eta_3 + S5 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

olarak bulunur.

(2.108) ve (2.109) değerleri, (2.107) de verilen alt matrislerde yerine koyulursa :

$$[A1] = [A7] =$$

$5\gamma^4+8\gamma^2+5+k_1$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^2+8\gamma^2+6+k_2$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_3$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_4$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+5+k_5$
1	2	3	4	5

$$[A2] =$$

$6\gamma^4+8\gamma^2+5+k_6$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^2+8\gamma^2+6+k_7$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_8$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_9$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+5+k_{10}$
6	7	8	9	10

Bu durumda, plak dışında alınacak fiktif noktalardaki çökme değerleri iç noktalardaki çökme değerleri eşit olacağından, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 1$ 'dir.

Buna göre (2. 108) değerlerinden faydalananarak :

$$SO + S1 \cdot \eta_1 + S8\eta_2 = SO + S4 \cdot \eta_3 + S8\eta_2 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$SO + S5 \cdot \eta_4 = SO + S8 \cdot \eta_2 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$SO + S1 \cdot \eta_1 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$SO + S4 \cdot \eta_3 + S5 \cdot \eta_4 = SO + S1 \cdot \eta_1 + S5 \cdot \eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \quad (2.111)$$

olarak bulunur. Bu değerler (2.107) alt matrislerinde yerine koyularsa :

$$[A1] = [A7] =$$

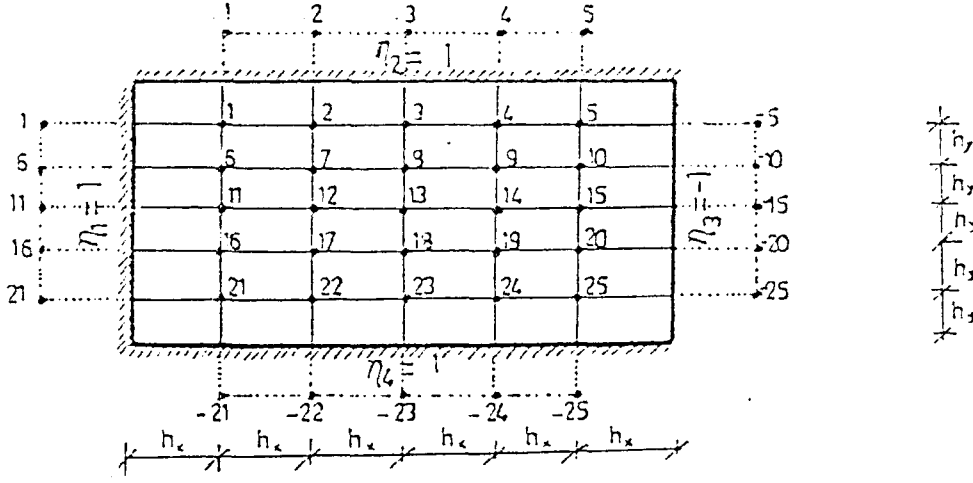
$7\gamma^4+8\gamma^2+7+k_1$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_2$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_3$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_4$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+7+k_5$
1	2	3	4	5

$$[A2] =$$

$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_6$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_7$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_8$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_9$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_{10}$
6	7	8	9	10

[A3], [A4], [A5], [A6], alt matrisleri, (2.110) daki alt matrisleri aynıdır.

2.3.2.2.3. Elastik zemine oturan plağın üç kenarından ankastre mesnede, bir kenarından sabit mesnede oturması hâli



Şekil 2. 26. Plağın üç kenarından ankastre mesnede, bir kenarından sabit mesnede oturması

Bu durumda $\eta_1 = \eta_2 = \eta_4 = +1$ ve $\eta_3 = -1$ alınmalıdır. Buna göre :

$$SO + S1 \cdot \eta_1 + S8 \cdot \eta_2 = SO + S1 \cdot \eta_1 + S5 \cdot \eta_1 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$SO + S4 \cdot \eta_3 + S5 \cdot \eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$SO + S8 \cdot \eta_2 - SO + S5 \cdot \eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$SO + S8 \cdot \eta_2 + S4 \cdot \eta_3 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

$$SO + S1 \cdot \eta_1 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \quad (2.112)$$

(2.112) değerleri, (2.107) alt matrislerinde yerine koyulursa :

$$[A1] = [A7] =$$

$7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_1$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_2$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_3$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_4$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_5$
1	2	3	4	5

$$SO + S5\eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$SO + S5 \cdot \eta_4 + S4 \cdot \eta_3 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

$$SO + S4 \eta_3 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \quad (2.113)$$

(2.113) değerleri, (2.107) alt matrislerinde yerine koyulursa :

[A1] =

$5\gamma^4+8\gamma^2+5+k_1$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_2$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_3$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_4$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+5+k_5$
1	2	3	4	5

[A2] =

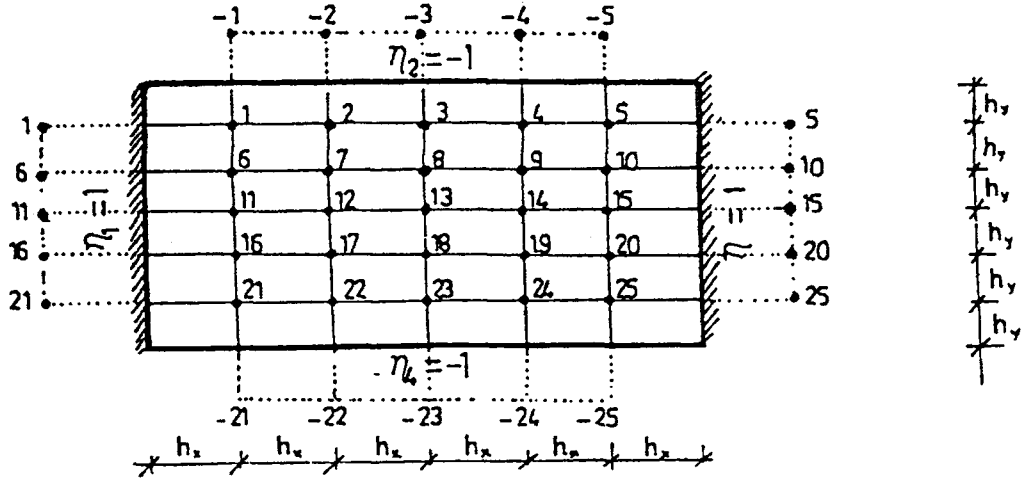
$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_6$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_7$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_8$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_9$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+5+k_{10}$
6	7	8	9	10

[A7] =

$7\gamma^4+8\gamma^2+7+k_{21}$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_{22}$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_{23}$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_{24}$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+5+k_{25}$
21	22	23	24	25

Diğer alt matrisler, (2.110) de verilen matrislerle aynıdır.

2.3.2.2.5. Elastik zemine oturan plağın karşılıklı iki kenarının ankastre mesnede, diğer kenarının da sabit mesnede oturması hâli



Şekil 2.28 Plağın karşılıklı iki kenarının ankastre mesnede, diğer. kenarının da sabit mesnede oturması hâli

Bu durumda $\eta_1 = \eta_3 = +1$ ve $\eta_2 = \eta_4 = -1$ alınmalıdır.

Bu değerlere göre :

$$SO + S1 \cdot \eta_1 + S8 \cdot \eta_2 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$SO + S8\eta_2 = SO + S5\eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$SO + S8 \cdot \eta_2 + S4 \cdot \eta_3 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$SO + S1 \cdot \eta_1 = SO + S4 \cdot \eta_3 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$SO + S1\eta_1 + S5 \cdot \eta_4 = SO + S5 \cdot \eta_4 + S4 \cdot \eta_3 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \quad (2.114)$$

olarak elde edilir.

(2.114) değerleri, (2.107) alt matrislerinde yerine koyulursa :

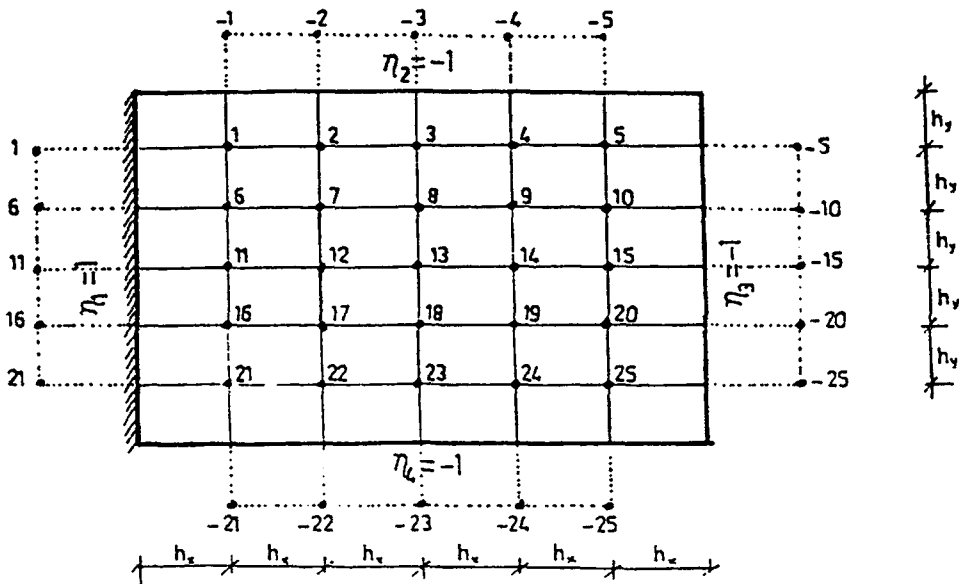
$$[A1] = [A7] =$$

$5\gamma^4+8\gamma^2+5+k_1$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_2$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_3$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_4$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+7+k_5$
1	2	3	4	5

$$[A2] =$$

$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_6$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_7$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_8$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_9$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_{10}$
6	7	8	9	10

2.3.2.2.6. Elastik zemine oturan plağın bir kenarının ankastre mesnede, diğer üç kenarının sabit mesnede oturması hali



Şekil 2.29 plağın bir kenarının ankastre mesnede, diğer üç kenarının sabit mesnede oturması hali

Bu durumda $\eta_1 = +1$ ve $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = -1$ alınmalıdır. :

$$SO + S8 \cdot \eta_2 = SO + S5 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8 \cdot \gamma^2 + 6$$

$$SO + S4 \cdot \eta_3 + S8 \cdot \eta_2 = SO + S4 \cdot \eta_3 + S8 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

$$SO + S1 \cdot \eta_1 + S5 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8 \cdot \gamma^2 + 7$$

$$SO + S1 \cdot \eta_1 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$SO + S1 \cdot \eta_1 + S8 \cdot \eta_2 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \quad (2.115)$$

$$[A1] = [A7] =$$

$5\gamma^4+8\gamma^2+7+k_1$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_2$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_3$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_4$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+5+k_5$
1	2	3	4	5

$$[A2] =$$

$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_6$	$-4 - 4\gamma^2$	1		
$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_7$	$-4 - 4\gamma^2$	1	
1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_8$	$-4 - 4\gamma^2$	1
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_9$	$-4 - 4\gamma^2$
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_{10}$
6	7	8	9	10

Diğer alt matrisler (2.110) da verilen matrislerle aynıdır. Böylece her tip mesnet durumunda, [A] matrisinin teşkili için gerekli olan alt matrisler belirlenmiş oldu . Şayet mesnetler elastik ankastre şeklinde ise (I.98) ifadesine göre ,

$$:\eta = \frac{1 + \frac{2D}{ph}}{1 - \frac{2D}{ph}} \text{ olarak hesaplanıp, yerine koyulmalıdır.}$$

2.3.3 Bilgisayar programları

Elastik zemine oturan ve her tip mesnetlenme şartını kapsayan plakların çözümü için bilgisayar programı verilmiştir. Program hazırlanırken en genel şekilde ele alınmıştır. (2.3.2.2.1), (2.3.2.2.2), ... ((2.3.2.2.6) bölümlerinde incelenen mesnet tiplerine ilaveten, elastik ankastre tipinde olan mesnet durumları da programa dahil edilmiştir. Ayrıca program, plak üzerinde alınacak doğrular ağındaki aralık sayısı istenildiği kadar alınabilecek tarzda tertip edilmiştir. Plâğı her iki yönde kaç aralığa bölmek istiyorsak, bunu baştan tespit edip programa bilgi olarak vermek gerekir.

Program elastik zemine oturan plakların çözümünü yapabildiği gibi, elastik zemine oturmayan plaklar içinde, C zemin katsayısını sıfır almak suretiyle çözüm yapabilmektedir. Programda kullanılan rotasyonlar:

M : x ve y eksenine paralel doğrular ağının, bir doğrusu üzerinde bulunan nokta sayısı

H_x : x eksenini doğrultusundaki aralık mesafesi

H_y : y eksenini doğrultusundaki aralık mesafesi

D : Plâğın eksenini doğrultusundaki aralık mesafesi

MI : Plak üzerindeki doğrular ağının meydana getirdiği toplam Nokta sayısı ($MI=M.M$)

ALFA : H_x / H_y oranı

IS : Plâğın mesnetlenme durumunu karakterize eden bir sayı

4 kenarından sabit mesnetlere oturan plakta $IS=1$

4 kenarından ankastre mesnetlere oturan plakta $IS=2$

3 kenarı ankastre, 1 kenarı sabit mesnede oturan plakta $IS=3$

2 komşu kenarı ankastre, 2 kenarı sabit mesnede oturan plakta $IS=4$

Karşılıklı 2 kenarı ankastre, diğer kenarları sabit mesnede oturan plakta $IS=5$

1 kenarı ankastre, 3 kenarı sabit mesnede oturan plakta $IS=6$

4 kenarı elastik ankastre mesnede oturan plakta IS=7

3 kenarı elastik ankastre mesnede, 1 kenarı sabit mesnede oturan plakta IS=8

2 komşu kenarı elastik ankastre, diğer kenarları sabit mesnede oturan plakta IS=9

Karşılıklı 2 kenarı elastik ankastre, diğer kenarları sabit mesnede oturan Plakta IS=10

1 kenarı elastik ankastre, diğer kenarları sabit mesnede oturan plakta IS=11

olarak programa verilecektir.

XX : X eksenine paralel Elastik Ankastre Mesnedin Dönme Rijitliği

YK : Y eksenine paralel Elastik Ankastre Mesnedin Dönme Rijitliği

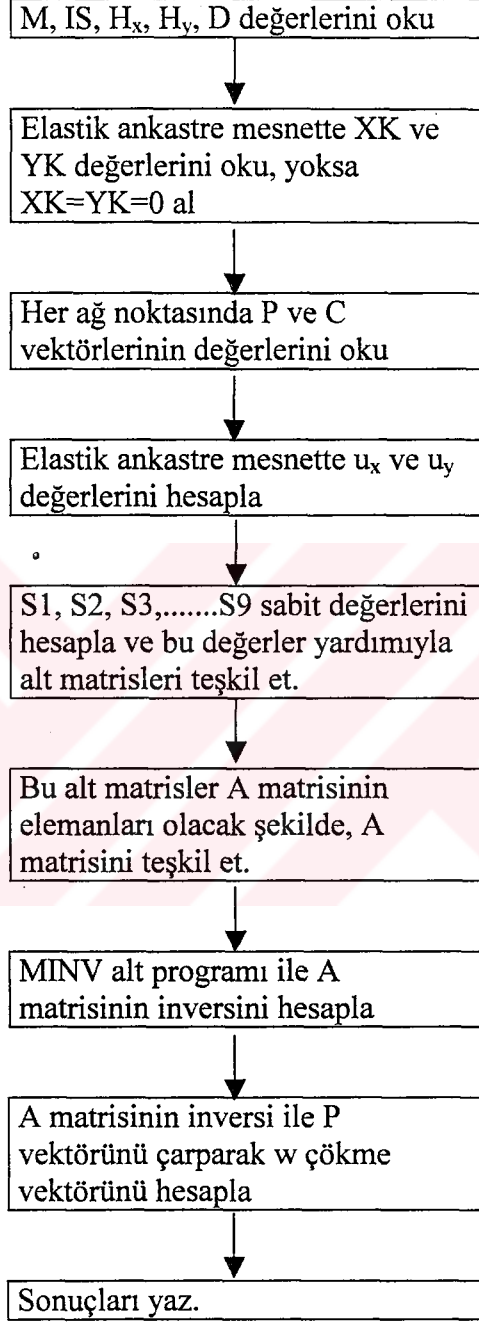
P : Plak üzerindeki her ağ noktasında yayılı yükün değerlerini gösteren vektör

C : Plak üzerindeki her ağ noktasındaki Zemin Katsayısı / D değerlerini ($k_{ij} = c_{ij} / D$) gösteren bir vektör

A : Katsayılar Matrisi

W : Her ağ noktasındaki Çökme Değerlerini Gösteren bir Vektör

PROGRAM



Gerek bu programda, gerekse daha önceki programlarda kullanılan MINV alt programı diske kaydedilmiş olup, herhangi bir matrisin inversini almaktadır. Bu program ile, plak üzerindeki doğruların meydana getirdiği ağın her noktasındaki çökme değerleri bulunmaktadır. Bu çökme değerlerinden faydalanarak, bahis konusu noktalardaki kesit tesirlerini hesaplamak için ayrı bir program hazırlanmıştır.

Bu iki programın tek bir program olarak tanzim edilmesi mümkündür. Ayrı olarak hazırlanmasının şu avantajı vardır:

Plak üzerindeki doğrular ağı sık olarak alınır, çok ağ noktası meydana gelecektir. Bu ağ noktalarındaki çökme değerleri program ile hesaplanırken, bilgisayar hafızasında oldukça geniş bir saha kaplayacaktır. Kesit tesirlerinin hesaplanması aynı programın içinde yapıldığı takdirde, bilgisayar hafıza kapasitesi yetmeyebilecektir. Bu sebeple bu iki program ayrı ayrı teşkil edilmiştir. Fakat, plak üzerindeki ağ noktalarının sayısı az ise, bu iki programı peşpeşe ekleyip tek bir programla neticeler elde edilebilir.

İkinci bilgisayar programında kullanılan notasyonlar, birinci programda kullanılan notasyonlarla aynıdır. İlaveten kullanılan notasyonlar şunlardır:

PU : Poisson oranı

NS : x veya y doğrultusundaki aralık sayısı ($NS=M+1$)

EMX : Plak üzerindeki ağ noktalarındaki x doğrultusundaki eğilme momenti

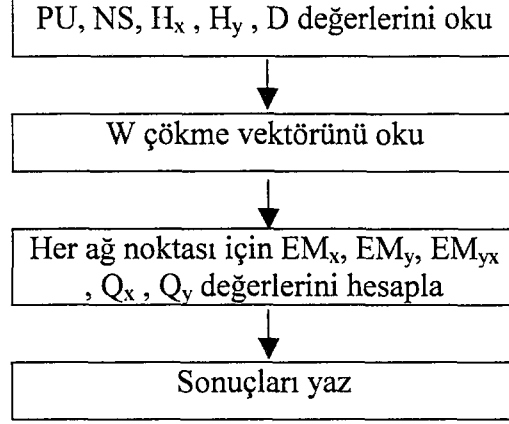
EMY : Plak üzerindeki ağ noktalarındaki y doğrultusundaki eğilme momenti

EMXY: Plak üzerindeki ağ noktalarındaki burulma momenti

QX : Plak üzerindeki ağ noktalarındaki x doğrultusundaki kesme kuvvetleri

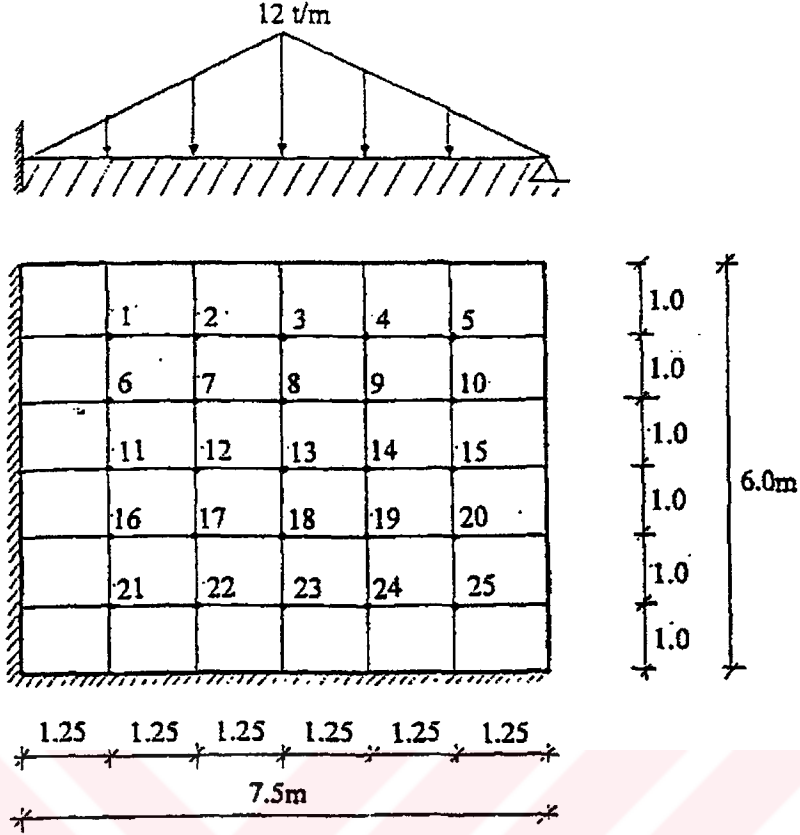
QY : Plak üzerindeki ağ noktalarındaki y doğrultusundaki kesme kuvvetleri

PROGRAM



ÖRNEK: Bu bölümün sonunda örnek olarak elastik zemine oturan iki komşu kenarı ankastre, diğer iki kenarı da sabit mesnet olan üçgen yayılı yüke maruz dikdörtgen plak çözülecektir.

Bir sırada bulunan nokta sayısı	M=5
Sınır şartlarını gösteren katsayı	IS=4
X doğrultusundaki aralık mesafesi	$h_x = 1.25\text{m}$
Y doğrultusundaki aralık mesafesi	$h_y = 1.00\text{m}$
Plakın Eğilme Rijitliği	$D = 6.000 \text{ tm}$
Zemin Katsayısı / D	$c = 2.0 \text{ (t/m}^2\text{) / (tm)}$



Şekil 2.30. Örnek (Elastik Zemine Oturan Plâgın Sonlu Farklarla Çözümü)

ÇÖZÜM

$$M = 5$$

$$IS = 4$$

$$hx = 1.250$$

$$hy = 1.000$$

$$D = 600.000$$

$$C = 2.000$$

YÜK MATRİSİ

4.00000	8.00000	12.00000	8.00000	4.00000
4.00000	8.00000	12.00000	8.00000	4.00000
4.00000	8.00000	12.00000	8.00000	4.00000
4.00000	8.00000	12.00000	8.00000	4.00000
4.00000	8.00000	12.00000	8.00000	4.00000

SEHİM VEKTÖRÜ

0.003977540	0.008802760	0.001123837	0.008805470	0.003980890
0.005994880	0.013415200	0.017115300	0.013425610	0.006009330
0.006260360	0.014102980	0.018028300	0.014131760	0.006306870
0.005057160	0.011419710	0.014676620	0.011477500	0.005173730
0.002534080	0.005754730	0.007494910	0.005824460	0.002735120

MX MOMENTİ DEĞERLERİ

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
- 3.05475	- 0.12909	1.33747	2.40672	1.33777	-0.02760
- 4.60406	-0.37183	1.82182	3.33506	1.82319	- 0.00001
- 4.80795	- 0.40604	1.84193	3.43094	1.84519	0.00000
- 3.88389	-0.36901	1.49134	2.86288	1.49266	0.00000
-1.94617	- 0.26254	0.57749	1.34106	0.56203	0.00000
0.00000	- 0.50782	-1.15324	-1.50198	-1.16722	0.00000

MY MOMENTİ DEĞERLERİ

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.51014	1.21176	2.46743	3.52907	1.11736	-0.00461
-0.76887	0.95970	2.59342	3.45225	0.94831	0.00000
-0.80292	0.77974	2.27371	3.06041	0.76106	0.00000
-0.64861	0.70821	1.98823	2.71203	0.71081	0.00000
-0.32501	-0.08742	0.14878	0.40663	0.15519	0.00000
0.00000	-3.04089	- 6.90567	- 8.99389	-3.28214	0.00000

MX Y MOMENTİ DEĞERLERİ

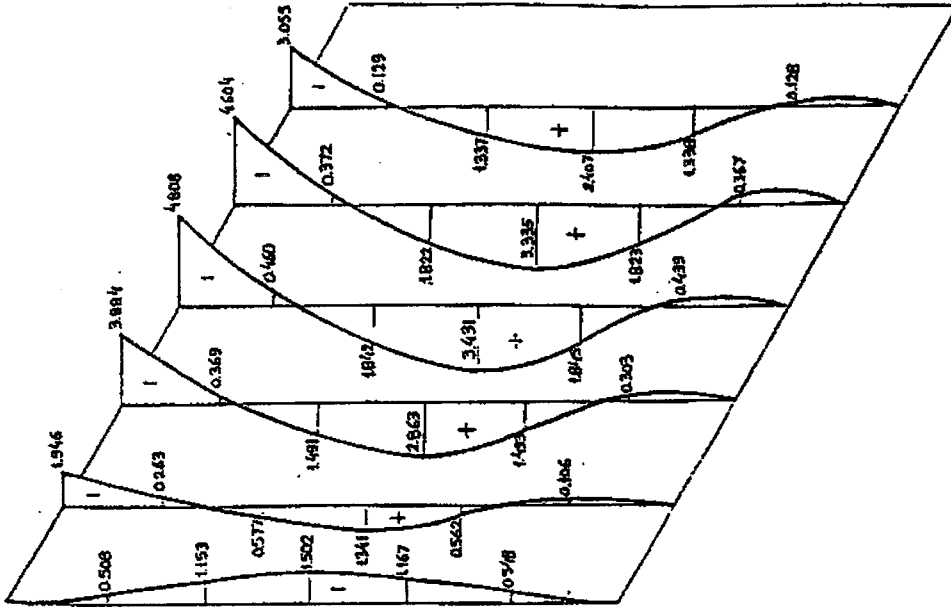
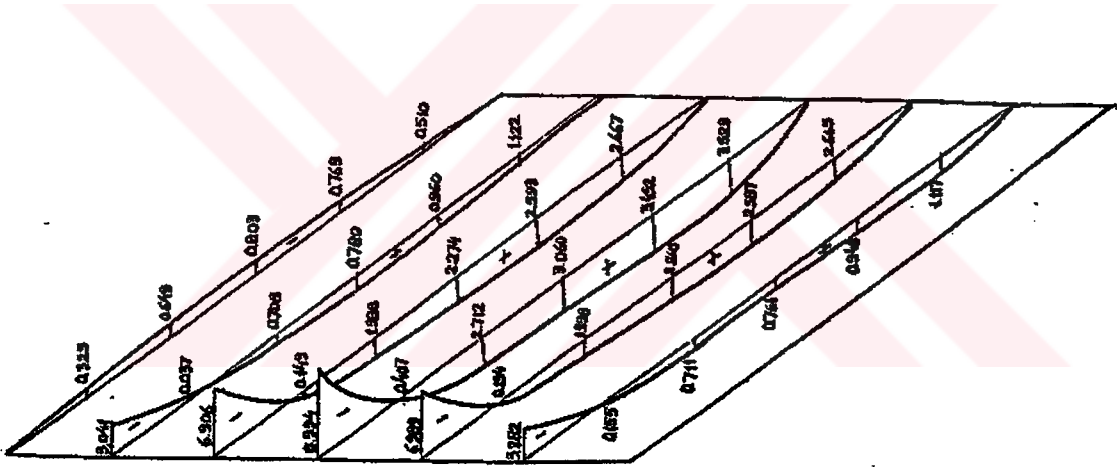
- 3.97590	-1.75984	-1.45158	- 0.00054	1.45091	1.76038	1.18660
0.00000	-1.34098	-1.11159	-0.00104	1.11015	1.34202	1.20138
0.00000	-0.52980	- 0.45053	- 0.00261	0.44621	0.53241	0.47219
0.00000	0.19946	0.15003	- 0.00473	-0.16024	-0.19473	-1.16705
0.00000	0.83448	0.68043	- 0.00408	-0.69588	-0.83039	-0.71406
0.00000	1.14151	0.96156	0.00577	-0.94990	-1.14729	-0.03433
-0.25330	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	- 0.27340

QX KESME KUVVETİ DEĞERLERİ

0.95460	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.93815
0.00000	2.59562	1.69430	-0.00087	-1.69555	-1.3888	-0.62141
0.00000	3.35499	2.12491	-0.00160	-2.12710	-1.51176	-0.41584
0.00001	3.33386	2.11551	-0.00078	-2.11477	-1.40989	-0.22039
0.00000	2.74621	1.79459	0.00392	-1.77111	-1.19658	-0.27947
0.00000	1.02740	0.70185	0.01014	-0.58228	- 0.25908	- 0.03350
-0.60817	-2.76227	-2.38119	-0.03347	2.28469	2.79574	1.96926

QX KESME KUVVETİ DEĞERLERİ

2.29106	-0.85061	-3.43180	-5.08637	-3.42960	-0.84750	0.77813
2.30203	-0.25187	-1.89170	-2.90801	-1.88970	0.24913	0.00000
0.87660	0.28847	- 0.04744	-0.23803	-0.04756	0.28600	-0.01380
-0.36008	0.10654	0.40088	0.51945	0.39397	0.07446	0.00000
-1.43089	0.26534	1.45217	2.03241	1.43851	0.11680	0.00000
-1.94194	1.66577	4.94366	6.88551	4.99040	1.81574	0.00000
0.48654	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.52514

b) M_x Moment diyagramıb) M_y Moment diyagramı

Şekil- 2.31 örnekteki moment diyagramları

3. ELASTİK ZEMİNE OTURAN ÜÇGEN VE TRAPEZ PLAKLARIN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ

3.1. Giriş

Bölüm 2.3'te, dikdörtgen plakların çözümü yapılırken kartezyen koordinat takımı kullanılmıştı. Bu tip plaklarda kartezyen koordinat takımının kullanılması, bilhassa sınır şartlarının ifadesi bakımından kolaylık sağlar. Buna karşılık üçgen, paralel kenar, trapez gibi şekillere haiz plaklarda kartezyen koordinat takımının kullanılması uygun olmaz. Bu tip plaklarda, kenarlara paralel olarak seçilecek eğik koordinat takımı ile çalışmak daha uygun olacaktır. Bu bölümde, önce eğik koordinat takımına göre sonlu fark ifadeleri çıkarılacak, sonrada elastik zemine oturan üçgen ve trapez plakların çözümü ele alınacaktır.

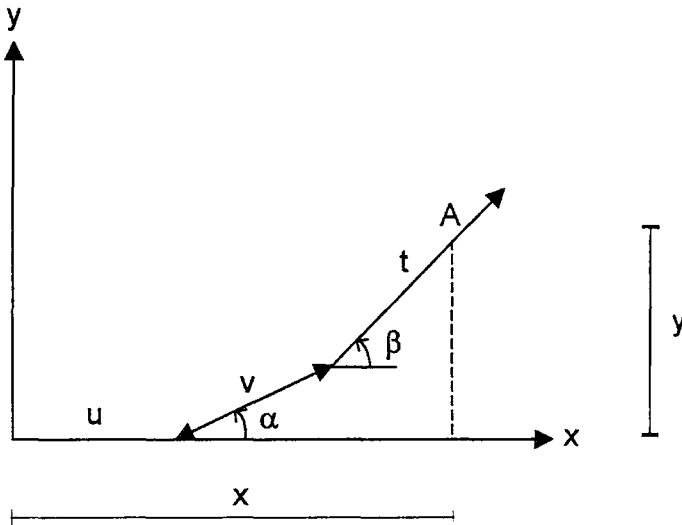
3.2. Sonlu Fark ifadelerinin eğik koordinat takımına göre ifadesi

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi, üç eksenle belirtilen eğik koordinat takımını ele alalım. u eksenini, kartezyen koordinat takımının x eksenine ile çakışsın. v ve t eksenleri ise bu eksenle sırasıyla α ve β açıları yapsın.

Herhangi bir A noktasının x ve y koordinatlarını u , v , t değerlerine bağlı olarak şu şekilde ifade edebiliriz:

$$x = u + v \cdot \cos \alpha + t \cdot \cos \beta \quad (3.1)$$

$$y = v \cdot \sin \alpha + t \cdot \sin \beta$$



Şekil 3.1. Eğik koordinat takımı

(3.1) ifadelerinin u, v, t'ye göre kısmi

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= 1 & \frac{\partial x}{\partial v} &= \cos \alpha & \frac{\partial x}{\partial t} &= \cos \beta \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= 0 & \frac{\partial y}{\partial v} &= \sin \alpha & \frac{\partial y}{\partial t} &= \sin \beta\end{aligned}\quad (3.2)$$

olarak bulunur. Şimdi bu ifadelerden faydalanarak herhangi bir $w(x, y)$ fonksiyonunun u, v, t değerlerine göre kısmi türevlerini bulalım.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot 0 = \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \sin \alpha \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \cos \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \sin \beta\end{aligned}\quad (3.3)$$

(3.3) ifadelerinin tekrara kısmi türevlerini alırsak :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) = \cos \alpha \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \sin \alpha \right] \\ &+ \sin \alpha \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \alpha \right] = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \beta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \beta \cdot \sin \beta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \beta\end{aligned}\quad (3.4)$$

olarak elde edilir. (3.4) ifadelerinden $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ değerlerini bulursak :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = - \left[\frac{\sin(\beta + \alpha)}{2 \sin \alpha \sin \beta} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left[\frac{\sin \beta}{2 \sin \alpha \sin(\beta - \alpha)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \left[\frac{\sin \alpha}{2 \sin \beta \sin(\beta - \alpha)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (\cot \alpha \cot \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \left[\frac{\cos \beta}{\sin \alpha \sin(\beta - \alpha)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left[\frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin(\beta - \alpha)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

(3.5) denklemlerinde :

$$F1 = \cot \alpha \cdot \cot \beta \quad F4 = - \frac{\sin(\beta + \alpha)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$$

$$F2 = \frac{-\cos \beta}{\sin \alpha \sin(\beta - \alpha)} \quad F5 = \frac{\sin \beta}{2 \sin \alpha \sin(\beta - \alpha)}$$

$$F3 = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin(\beta - \alpha)} \quad F6 = - \frac{\sin \alpha}{2 \sin \beta \sin(\beta - \alpha)} \quad (3.6)$$

ile gösterilirse (3.5) denklemleri şu şekilde yazılabilir :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + F2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + F3 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F4 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + F5 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + F6 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

Buna göre ;

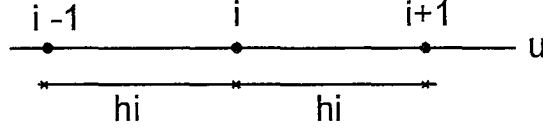
$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{ifadesinin eğik koordinat takımındaki karşılığı, (3.7) denklemlerinin}$$

birincisi ve ikincisi toplanarak bulunur.

$$\nabla^2 w = (1 + F1) \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + F2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + F3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

Şimdi, u eksenini boyunca w fonksiyonunun ikinci türevini bulalım. Şekil 3.2'de görüldüğü gibi, u eksenini üzerinde alınan $i-1$, i , $i+1$ noktalarında w fonksiyonunun aldığı değerler sırasıyla w_{i-1} , w_i , w_{i+1} ise (2.81) ifadesine göre :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{(w_{i+1} - w_i) / h_i - (w_i - w_{i-1}) h_i}{h_i}$$



Şekil 3.2.U eksenindeki noktalar

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{w_{i-1}}{h_i^2} - \frac{2 \cdot w_i}{h_i^2} + \frac{w_{i+1}}{h_i^2}$$

olacaktır. benzer şekilde, v ve t eksenleri boyunca alınan j-1, j, j+1 ve k-1, k, k+1 noktalarında w fonksiyonunun aldığı değerler w_{j-1} , w_j , w_{j+1} ve w_{k-1} , w_k , w_{k+1} ise :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{w_{j-1}}{h_j^2} - \frac{2w_j}{h_j^2} + \frac{w_{j+1}}{h_j^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{w_{k-1}}{h_k^2} - \frac{2w_k}{h_k^2} + \frac{w_{k+1}}{h_k^2} \quad (3.9)$$

(3.9) ifadelerini, (3.8) de yerine koyarsak :

$$\begin{aligned} \nabla^2 w = & \frac{(1+F1)}{h_i^2} \cdot w_{i-1} - \frac{2(1+F1)}{h_i^2} \cdot w_i + \frac{(1+F1)}{h_i^2} \cdot w_{i+1} + \frac{F2}{h_j^2} w_{j-1} \\ & + \frac{2F2}{h_j^2} \cdot w_j + \frac{F2}{h_j^2} \cdot w_{j+1} + \frac{F3}{h_k^2} w_{k-1} - \frac{2F3}{h_k^2} w_k + \frac{F3}{h_k^2} w_{k+1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

olarak bulunur.

U, v, t eksenlerinin kesim noktasında (Şekil 3.3'te i, j, k noktası) tek bir w fonksiyonu bulunacaktır. Bu değeri $w_i = w_j = w_k = w_{ijk}$ ile gösterirsek ve ayrıca :

$$(KO)_{ijk} = \frac{2(1+F1)}{h_i^2} - \frac{2F2}{h_j^2} - \frac{2F3}{h_k^2}$$

$$(K1)_{i-1} = \frac{(1+F1)}{h_i^2}$$

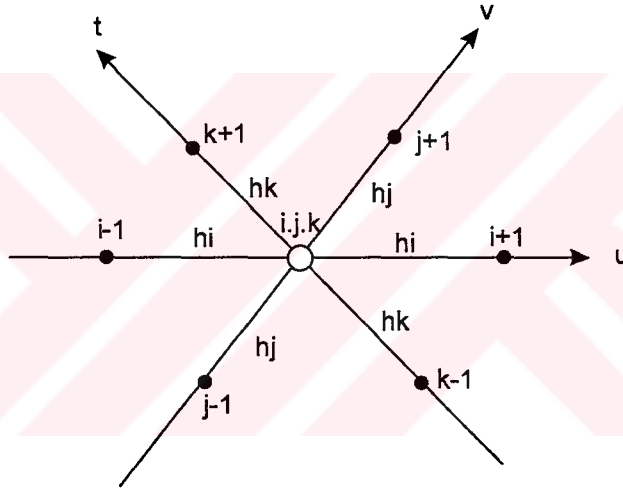
$$(K2)_{i+1} = \frac{(1+F1)}{h_i^2}$$

$$(K3)_{j-1} = \frac{F2}{h_j^2}$$

$$(K4)_{j+1} = \frac{F2}{h_j^2}$$

$$(K5)_{t-1} = \frac{F3}{h_k^2}$$

$$(K6)_{t+1} = \frac{F3}{h_k^2} \quad (3.11)$$



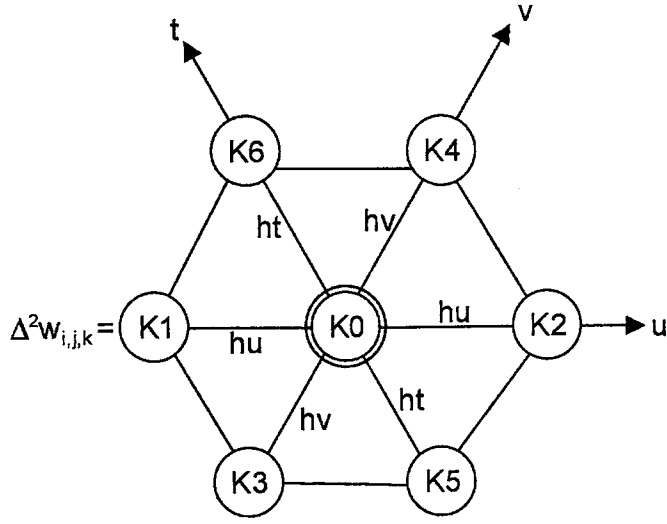
Şekil 3.3.U,v,t eksenleri üzerindeki noktalar

ile gösterilirse, (3.10) denklemini şu şekilde yazabiliriz :

$$\begin{aligned} (\nabla^2 w)_{i,j,k} = & (K0)_{i,j,k} \cdot w_{i,j,k} + (K1)_{i,-1} \cdot w_{i,-1} + (K2)_{i+1} \cdot w_{i+1} + (K3)_{j-1} \cdot w_{j-1} + (K4)_{j+1} \cdot w_{j+1} \\ & + (K5)_{k-1} \cdot w_{k-1} + (K6)_{k+1} \cdot w_{k+1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

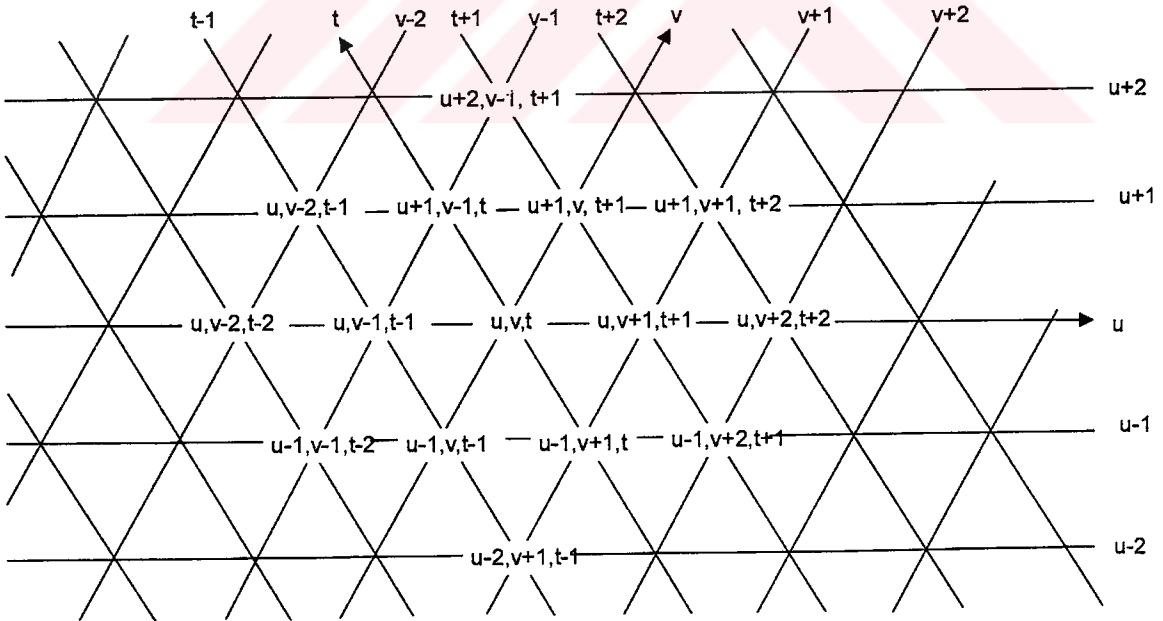
(3.12) denklemi şematik olarak,, şekil 3.4'te görüldüğü gibi gösterilebilir.

Şekil 3.5'te görüldüğü gibi u, v, t eksenlerine paralel doğrulardan meydana gelen doğrular ağını çizelim Bu doğrular ağının her kesişme yeri bir nokta belirleyecektir.Örneğin u,v + 1,t+1 doğrularının kesiştiği yer (u, v + 1, t + 1) noktasını verecektir.

Şekil 3.4. $\Delta^2 w$ gösteren şema

Şekil 3.3'teki i, j, k noktasını u, v, t eksenlerinin kesim noktası olarak alırsak $(i-1), (i+1), (j-1), (j+1), (k-1), (k+1)$ noktaları bu gösteriliş şekline göre sırasıyla $(u, v-1, t-1), (u, v+1, t+1), (u-1, v, t-1), (u+1, v, t+1), (u-1, v+1, t), (u+1, v-1, t)$ olacaktır. Bu gösteriş şekline göre, (3.12) denklemi şu şekilde yazılabilir.

$$(\nabla^2 w)_{u,v,t} = (K0)_{u,v,t} \cdot w_{u,v,t} + (K1)_{u,v-1,t-1} \cdot w_{u,v-1,t-1} + (K2)_{u,v+1,t+1} \cdot w_{u,v+1,t+1} + (K3)_{u-1,v,t-1} \cdot w_{u-1,v,t-1} + (K4)_{u+1,v,t+1} \cdot w_{u+1,v,t+1} + (K5)_{u-1,v+1,t} \cdot w_{u-1,v+1,t} + (K6)_{u+1,v-1,t} \cdot w_{u+1,v-1,t} \quad (3.13)$$



Şekil 3.5. Eğik koordinat

Eksenler üzerinde alınacak aralıklar kendi arasında birbirine eşit,

$h_i = h_u, h_j = h_v$ ve $h_k = h_t$ ise bu hal için :

$$K0 = -\frac{2(1+F1)}{h_u^2} - \frac{2F2}{h_v^2} - \frac{2F3}{h_t^2}$$

$$K1 = K2 = \frac{1+F1}{h_u^2} \quad (3.14)$$

$$K3-K4 = \frac{F2}{h_v^2}$$

$$K5 = K6 = \frac{F3}{h_t^2}$$

(3.13) denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$(\nabla^2 w)_{u,v,t} = K0 \cdot w_{u,v,t} + K1 \cdot w_{u,v-1,t-1} + K2 \cdot w_{u,v+1,t+1} + K3 \cdot w_{u-1,v,t-1} + K4 \cdot w_{u+1,v,t+1} \\ + K5 \cdot w_{u-1,v+1,t} + K6 \cdot w_{u+1,v-1,t}$$

Şekil 3.4'teki şemadan faydalanarak $(\nabla^4 w)_{u,v,t}$ değerini bulalım.

$$(\nabla^4 w)_{u,v,t} = \nabla^2 (\nabla^2 w)_{u,v,t} = K0 \cdot (\nabla^2 w)_{u,v,t} + K1 \cdot (\nabla^2 w)_{u,v-1,t-1} + K2 \cdot (\nabla^2 w)_{u,v+1,t+1} \\ + K3 \cdot (\nabla^2 w)_{u-1,v,t-1} + K4 \cdot (\nabla^2 w)_{u+1,v,t+1} + K5 \cdot (\nabla^2 w)_{u-1,v+1,t} + K6 \cdot (\nabla^2 w)_{u+1,v-1,t} \quad (3.15)$$

Bu ifadedeki $\nabla^2 w$ değerlerininide, şekil 3.4'teki şemaya göre yazıp yerine koyarsak :

$$(\nabla^4 w)_{u,v,t} = K0 \cdot [K0 \cdot w_{u,v,t} + K1 \cdot w_{u,v-1,t-1} + K2 \cdot w_{u,v+1,t+1} + K3 \cdot w_{u-1,v,t-1} + K4 \cdot w_{u+1,v,t+1} \\ + K5 \cdot w_{u-1,v+1,t} + K6 \cdot w_{u+1,v-1,t}] + K1 \cdot [K0 \cdot w_{u,v-1,t-1} + K1 \cdot w_{u,v-2,t-2} + K2 \cdot w_{u,v,t} \\ + K3 \cdot w_{u-1,v-1,t-2} + K4 \cdot w_{u+1,v-1,t} + K5 \cdot w_{u-1,v,t-1} + K6 \cdot w_{u+1,v-2,t-1}] + K2 \cdot [K0 \cdot w_{u,v+1,t+1} \\ + K1 \cdot w_{u,v,t} + K2 \cdot w_{u,v+2,t+2} + K3 \cdot w_{u-1,v+1,t} + K4 \cdot w_{u+1,v+1,t+1} + K5 \cdot w_{u-1,v+2,t+1} \\ + K6 \cdot w_{u+1,v,t+1}] + K3 \cdot [K0 \cdot w_{u-1,v,t-1} + K1 \cdot w_{u-1,v-1,t-2} + K2 \cdot w_{u-1,v+1,t} + K3 \cdot w_{u-2,v,t-2} \\ + K4 \cdot w_{u,v,t} + K5 \cdot w_{u-2,v+1,t-1} + K6 \cdot w_{u,v-1,t-1}] + K4 \cdot [K0 \cdot w_{u+1,v,t+1} + K1 \cdot w_{u+1,v-1,t} \\ + K2 \cdot w_{u+1,v+1,t+2} + K3 \cdot w_{u,v,t} + K4 \cdot w_{u+2,v,t+2} + K5 \cdot w_{u,v+1,t+1} + K6 \cdot w_{u+2,v-1,t+1}]$$

$$\begin{aligned}
& + K5 \cdot [KO \cdot w_{u-1,v+1,t} + K1 \cdot w_{u-1,v,t-1} + K2 \cdot w_{u-1,v+2,t+1} + K3 \cdot w_{u-2,v+1,t-1} + K4 \cdot w_{u,v+1,t+1} \\
& + K5 \cdot w_{u-2,v+2,t} + K6 \cdot w_{u,v,t}] + K6 \cdot [K0 \cdot w_{u+1,v-1,t} + K1 \cdot w_{u+1,v-2,t-1} + K2 \cdot w_{u+1,v,t+1} \\
& + K3 \cdot w_{u,v-1,t-1} + K4 \cdot w_{u+2,v-1,t+1} + K5 \cdot w_{u,v,t} + K6 \cdot w_{u+2,v-2,t}]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek :

$$\begin{aligned}
(\nabla^4 w)_{u,v,t} = & [(KO)^2 + K2 \cdot K1 + (K1)^2 + 2 \cdot (K3 \cdot K4) + 2(K5 \cdot K6)] \cdot w_{u,v,t} + [2(KO \cdot K1) + 2 \cdot \\
& (K3 \cdot K6)] \cdot w_{u,v-1,t-1} + [2(KO \cdot K2) + 2(K4 \cdot K5)] \cdot w_{u,v+1,t+1} + [2 \cdot (KO \cdot K3) + 2(K1 \cdot K5)] \cdot w_{u-1,v,t-1} \\
& + [2(KO \cdot K4) + 2(K2 \cdot K6)] w_{u+1,v,t+1} + [2(KO \cdot K5) + 2(K2 \cdot K3)] w_{u-1,v+1,t} \\
& + [2(KOK6) + 2(K1K4)] \cdot w_{u+1,v-1,t} + [(K1)^2] \cdot w_{u,v-2,t-2} + [2(K1K3)] \cdot w_{u-1,v-1,t-2} \\
& + [(K2)^2] \cdot w_{u,v+2,t+2} + [2(K2 \cdot K4)] \cdot w_{u+1,v+1,t+2} + [2(K2 \cdot K5)] \cdot w_{u-1,v+2,t+1} \\
& + [(K3)^2] \cdot w_{u-2,v,t-2} + [2(K3 \cdot K5)] \cdot w_{u-2,v+1,t-1} + [(K4)^2] \cdot w_{u+2,v,t+2} \\
& + [2 \cdot (K4 \cdot K6)] \cdot w_{u+2,v-1,t+1} + [(K5)^2] \cdot w_{u-2,v+2,t} + [2 \cdot (K1 \cdot K6)] \cdot w_{u+1,v-2,t-1} \\
& + [(K6)^2] \cdot w_{u+2,v-2,t}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Bu denklemde :

$$SO = (KO)^2 + 2(K1 \cdot K2 + K3 \cdot K4 + K5 \cdot K6) =$$

$$4 \cdot \left(\frac{1+F1}{h_u^2} + \frac{F2}{h_u^2} + \frac{F3}{h_u^2} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{(1+F)^2}{h_u^4} + \frac{(F2)^2}{h_u^2} + \frac{(F3)^2}{h_u^4} \right)$$

$$S1 = K1 \cdot K1 = \frac{(1+F1)^2}{h_u^4}$$

$$S2 = 2(KO \cdot K1 + K3 \cdot K6) = -4 \cdot \frac{(1+F1)}{h_u^2} \cdot \left(\frac{1+F1}{h_u^2} + \frac{F2}{h_v^2} + \frac{F3}{h_t^2} \right) + 2 \cdot \frac{F2}{h_v^2} \cdot \frac{F3}{h_t^2}$$

$$S3 = 2(KO \cdot K2 + K4 \cdot K5) = -4 \cdot \frac{(1+F1)}{h_u^2} \cdot \left(\frac{1+F1}{h_u^2} + \frac{F2}{h_v^2} + \frac{F3}{h_t^2} \right) + 2 \cdot \frac{F2}{h_v^2} \cdot \frac{F3}{h_t^2}$$

$$S4 = K2 \cdot K2 = \frac{(1+F1)^2}{h_u^4}$$

$$S5 = K3 \cdot K3 = \frac{(F2)^2}{h_v^4}$$

$$S6 = 2(KO.K3+K1.K5) = -4 \frac{F2}{h_v^2} \cdot \left(\frac{1+F1}{h_u^2} + \frac{F2}{h_v^2} + \frac{F3}{h_t^2} \right) + 2 \cdot \frac{1+F1}{h_u^2} \cdot \frac{F3}{h_t^2}$$

$$S7 = 2(KO.K4+K2.K6) = -4 \frac{F2}{h_v^2} \cdot \left(\frac{1+F1}{h_u^2} + \frac{F2}{h_v^2} + \frac{F3}{h_t^2} \right) + 2 \cdot \frac{1+F1}{h_u^2} \cdot \frac{F3}{h_t^2}$$

$$S8 = K4 \cdot K4 = \frac{(F2)^2}{h_v^4}$$

$$S9 = K5 \cdot K5 = \frac{(F3)^2}{h_t^4}$$

$$S10 = 2(KO.K5+K2.K3) = -4 \cdot \frac{F3}{h_t^2} \cdot \left(\frac{1+F1}{h_u^2} + \frac{F2}{h_v^2} + \frac{F3}{h_t^2} \right) + 2 \cdot \frac{1+F1}{h_u^2} \cdot \frac{F2}{h_v^2}$$

$$S11 = 2(KO.K6+K1.K4) = -4 \frac{F3}{h_t^2} \cdot \left(\frac{1+F1}{h_u^2} + \frac{F2}{h_v^2} + \frac{F3}{h_t^2} \right) + 2 \cdot \frac{1+F1}{h_u^2} \cdot \frac{F2}{h_v^2}$$

$$S12 = K6 \cdot K6 = \frac{(F3)^2}{h_t^4}$$

$$S13 = 2(K1.K6) = 2 \cdot \frac{1+F1}{h_v^2} \cdot \frac{F3}{h_t^2}$$

$$S14 = 2((K4 \cdot K6) = 2 \cdot \frac{F2}{h_v^2} \cdot \frac{F3}{h_t^2}$$

$$S15 = 2(K2 \cdot K4) = 2 \cdot \frac{1+F1}{h_u^2} \cdot \frac{F2}{h_v^2}$$

$$S16 = 2(K1 \cdot K3) = 2 \cdot \frac{1+F1}{h_u^2} \cdot \frac{F2}{h_v^2}$$

$$S17 = 2 (K3 \cdot K5) = 2 \cdot \frac{F2}{h_v^2} \cdot \frac{F3}{h_t^2}$$

$$S18 = 2 (K2 \cdot K5) = 2 \cdot \frac{1+F1}{h_u^2} \cdot \frac{F3}{h_t^2}$$

olarak elde edilir.

(3.17)

(3.17) ifadelerinde eşit olan s değerlerini c sabitleri ile gösterirsek :

$$C1 = S2 = S3$$

$$C2 = S6 = S7$$

$$C3 = S10 = S11$$

$$C4 = S15 = S16$$

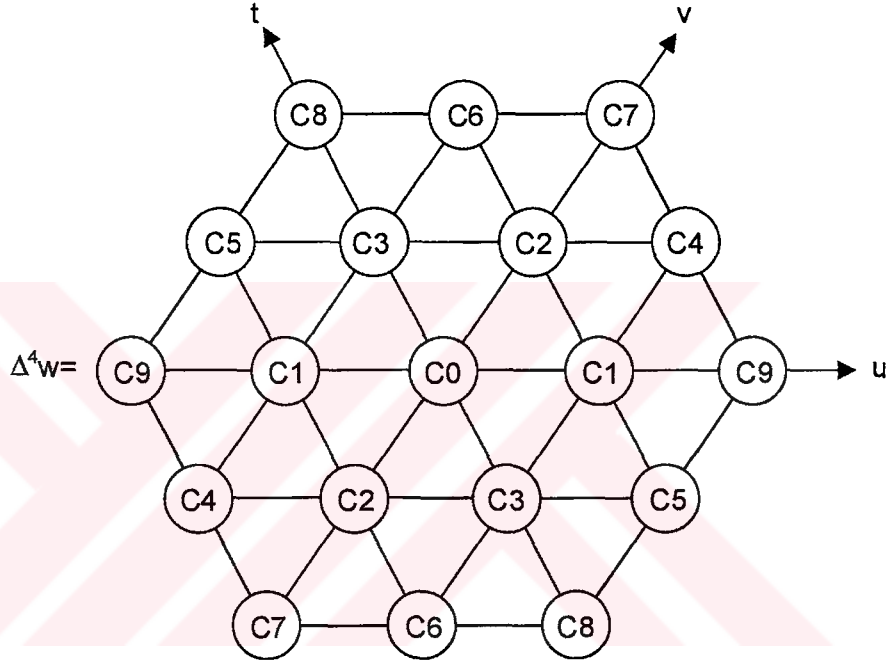
$$C5 = S13 = S18$$

$$C6 = S14 = S17$$

$$C7 = S5 = S8$$

$$C8 = S9 = S12$$

$$C9 = S1 = S4$$



Şekil 3.6. $\Delta^4 w$ gösteren şema

$$CO = SO$$

(3.18)

İle gösterirsek, $h_u = \text{sabit}$, $h_v = \text{sabit}$, $h_t = \text{sabit}$ olması halinde şekil 3.6'daki şema elde edilir.

Özel hâl :

u eksenini yatay, v eksenini yatayla 60° , t eksenini ise 120° lik açı yapsın. Bu durumda $\alpha = 60^\circ$ ve $\beta = 120^\circ$ olacağından (3.6) ifadelerinden :

$$F1 = -\frac{1}{3}, \quad F2 = \frac{2}{3}, \quad F3 = \frac{2}{3} \text{ olarak bulunur. Bu değerler (3.19) ifadelerinde yerine}$$

koyulursa ve ayrıca $h_u = h_v = h_t = h$ ile gösterilirse :

$$C0 = \frac{4}{h^4} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right]^2 + \frac{2}{h^4} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{168}{9h^4}$$

$$C1 = -\frac{4}{h^4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right] + \frac{2}{h^4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{40}{9h^4}$$

$$C2 = -\frac{4}{h^4} \cdot \frac{2}{3} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right] + \frac{2}{h^4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{40}{9h^4}$$

$$C3 = -\frac{4}{h^4} \cdot \frac{2}{3} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right] + \frac{2}{h^4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \frac{2}{3} = -\frac{40}{9h^4}$$

$$C4 = \frac{2}{h^4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9h^4} \quad (3.19)$$

$$C5 = \frac{2}{h^4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9h^4}$$

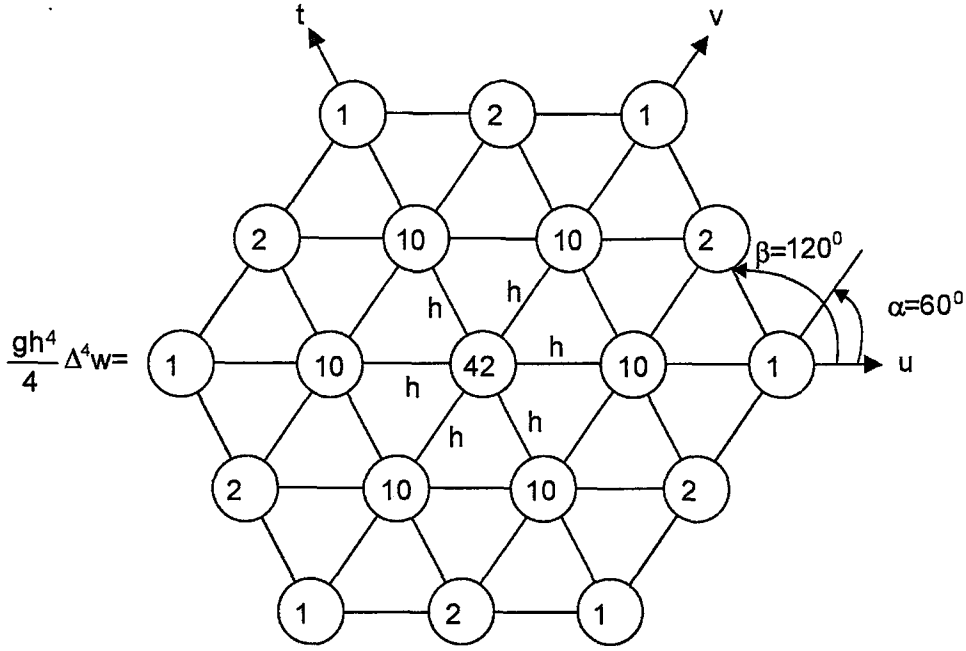
$$C6 = \frac{2}{h^4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9h^4}$$

$$C7 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9h^4}$$

$$C8 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9h^4}$$

$$C9 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9h^4}$$

(3.19) değerleri $\frac{9}{4}h^4$ ile çarpılırsa, şekil (3.6) da verilen şema şekil 3.7'da görüldüğü gibi olur.



Şekil 3.7. Özel hâl

3.3. Kesit tesirlerinin eğik koordinat takımında ifadesi

Kesit tesirlerinin kartezyen koordinat takımına ait (2.92) ifadelerindeki kısmi türevler yerine, (3.7) daki değerler koyulursa kesit tesirleri eğik koordinat takımına göre ifade edilmiş olur.

$$M_x = D \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D \cdot \left[(1 + \nu F1) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \nu F2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \nu F3 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]$$

$$M_y = -D \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = -D \cdot \left[(F1 + \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + F2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + F3 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]$$

$$M_{xy} = D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1 - \nu) \cdot \left[F4 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + F5 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + F6 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \quad (3.20)$$

$$Q_x = -D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D \cdot \left[(1 + F1) \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial u^3} + F2 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial u \partial v^2} + F3 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial v \partial t^2} \right]$$

$$Q_y = -D \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \left[(1 + F1) \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial v \partial u^2} + F2 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial v^3} + F3 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial v \partial t^2} \right]$$

u,v,t eksenleri üzerindeki aralıkların kendi eksenleri boyunca değişmediği, yani h_u, h_v, h_t sabit olarak alınırsa, bu durumda (3.9) ifadelerine göre :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h_u^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= \frac{w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}}{h_v^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}}{h_t^2}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Bu değerler (3.20) denklemlerinin birincisinde yerine koyulursa :

$$M_x = D \cdot \left[(1 + v.F1) \cdot \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h_u^2} + v.F2 \cdot \frac{w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}}{h_v^2} + v.F3 \cdot \frac{w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}}{h_t^2} \right] \quad (3.22)$$

bulunur. Burada :

$$\begin{aligned}- \frac{D(1 + v.F1)}{h_u^2} &= x_u \\ - \frac{D.v.F2}{h_v^2} &= x_v \\ - \frac{D.v.F3}{h_t^2} &= x_t\end{aligned}\quad (3.23)$$

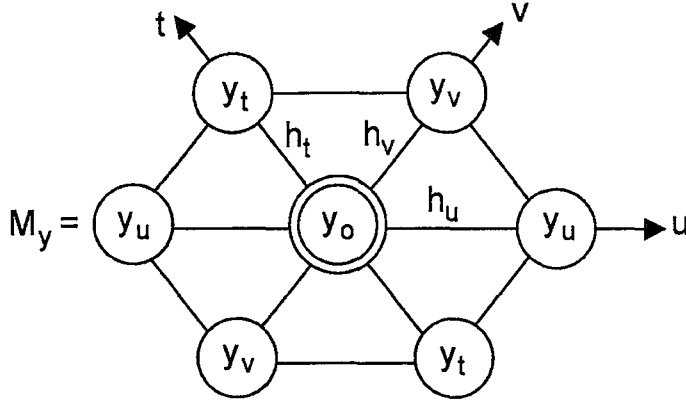
$$2 D \cdot \left[\frac{1 + v.F1}{h_u^2} + \frac{v.F2}{h_v^2} + \frac{v.F3}{h_t^2} \right] = x_0$$

ile gösterirsek ve ayrıca u,v,t eksenlerinin kesim noktası i,j,k noktalarının başlangıcı olarak alınırsa, (3.22) denklemi :

$$M_x = x_0 \cdot w_{i,j,k} + x_u \cdot (w_{i-1} + w_{i+1}) + x_v \cdot (w_{j-1} + w_{j+1}) + x_t \cdot (w_{k-1} + w_{k+1}) \quad (3.24)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.24) denklemi şematik olarak, şekil (3.8) daki gibi gösterilebilir.



Şekil 3.8. M_x moment diyagramı

Benzer şekilde, (3.21) değerleri (3.20) denklemlerinin ikincisinde yerine koyulursa :

$$M_y = D \cdot \left[(F1 + v) \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h_u^2} + F2 \cdot \frac{w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}}{h_v^2} + F3 \cdot \frac{w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}}{h_t^2} \right] \quad (3.25)$$

bulunur.

$$-\frac{D(F1 + v)}{h_u^2} = Y_u$$

$$-\frac{D.F2}{h_v^2} = Y_v \quad (3.26)$$

$$-\frac{D.F3}{h_t^2} = Y_t$$

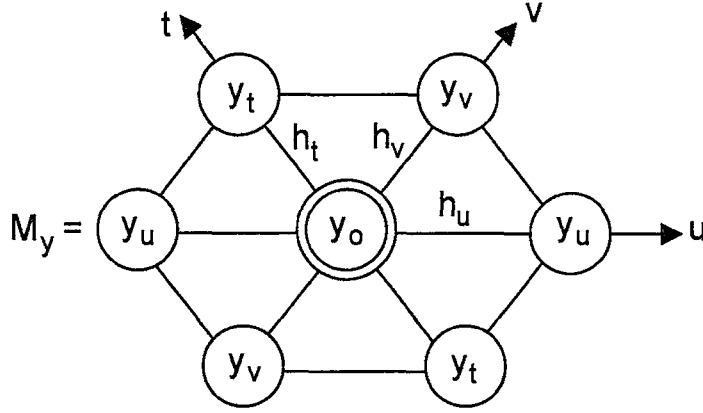
$$2D \cdot \left[\frac{F1 + v}{h_u^2} + \frac{F2}{h_v^2} + \frac{F3}{h_t^2} \right] = Y_o$$

ile gösterilirse, (3.25) denklemi :

$$M_y = Y_o \cdot w_{i,j,k} + Y_u(w_{i-1} + w_{i+1}) + Y_v(w_{j-1} + w_{j+1}) + Y_t \cdot (w_{k-1} + w_{k+1}) \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.27) denklemi şematik olarak, şekil (3.9) deki gibi gösterilebilir.



Şekil 3.9. M_y moment diyagramı

Benzer şekilde :

$$M_{xy} = -D.(1-\nu) \left[F4 \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h_u^2} + F5 \cdot \frac{w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}}{h_v^2} + F6 \frac{w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}}{h_t^2} \right] \quad (3.28)$$

olarak bulunur.

$$-\frac{D(1-\nu).F4}{h_u^2} = Z_u$$

$$-\frac{D(1-\nu).F5}{h_v^2} = Z_v \quad (3.29)$$

$$-\frac{D(1-\nu).F6}{h_t^2} = Z_t$$

$$2 D (1-\nu) \left[\frac{F4}{h_u^2} + \frac{F5}{h_v^2} + \frac{F6}{h_t^2} \right] = Z_o$$

ile gösterilirse, (3.28) denklemi :

$$M_{xy} = Z_o \cdot w_{i,j,k} + Z_u(w_{i-1} + w_{i+1}) + Z_v(w_{j-1} + w_{j+1}) + Z_t(w_{k-1} + w_{k+1}) \quad (3.30)$$

şeklinde yazılır. Bu denkleminde şematik olarak, şekil 3.10'daki gibi gösterebiliriz.

$$+ F3 \cdot \left[\frac{w_{u-2,v+1,t-1} - 2w_{u-1,v,t-1} + w_{u,v-1,t-1} - w_{u,v+1,t+1} + 2w_{u+1,v,t+1} - w_{u+2,v-1,t+1}}{2.h_v.h_t^2} \right] \quad (3.32)$$

(3.32) denklemlerinde :

$$+ \frac{D(1+F1)}{2h_u^3} = H1$$

$$- \frac{D(1+F1)}{h_u^3} + \frac{D.F2}{h_u.h_v^2} + \frac{D.F3}{h_u.h_t^2} = H2$$

$$\frac{D.F2}{2h_u.h_v^2} = H3$$

$$\frac{D.F3}{2h_u.h_t^2} = H4$$

$$- \frac{D(1+F1)}{2 \sin \alpha . h_v . h_u^2} = G1$$

$$\frac{D(1+F1)}{\sin \alpha . h_v . h_u^2} - \frac{D.F3}{\sin \alpha . h_v^3} + \frac{D.F3}{\sin \alpha . h_v . h_t^2} = G2 \quad (3.33)$$

$$\frac{D.F2}{2 \sin \alpha . h_v^3} = G3$$

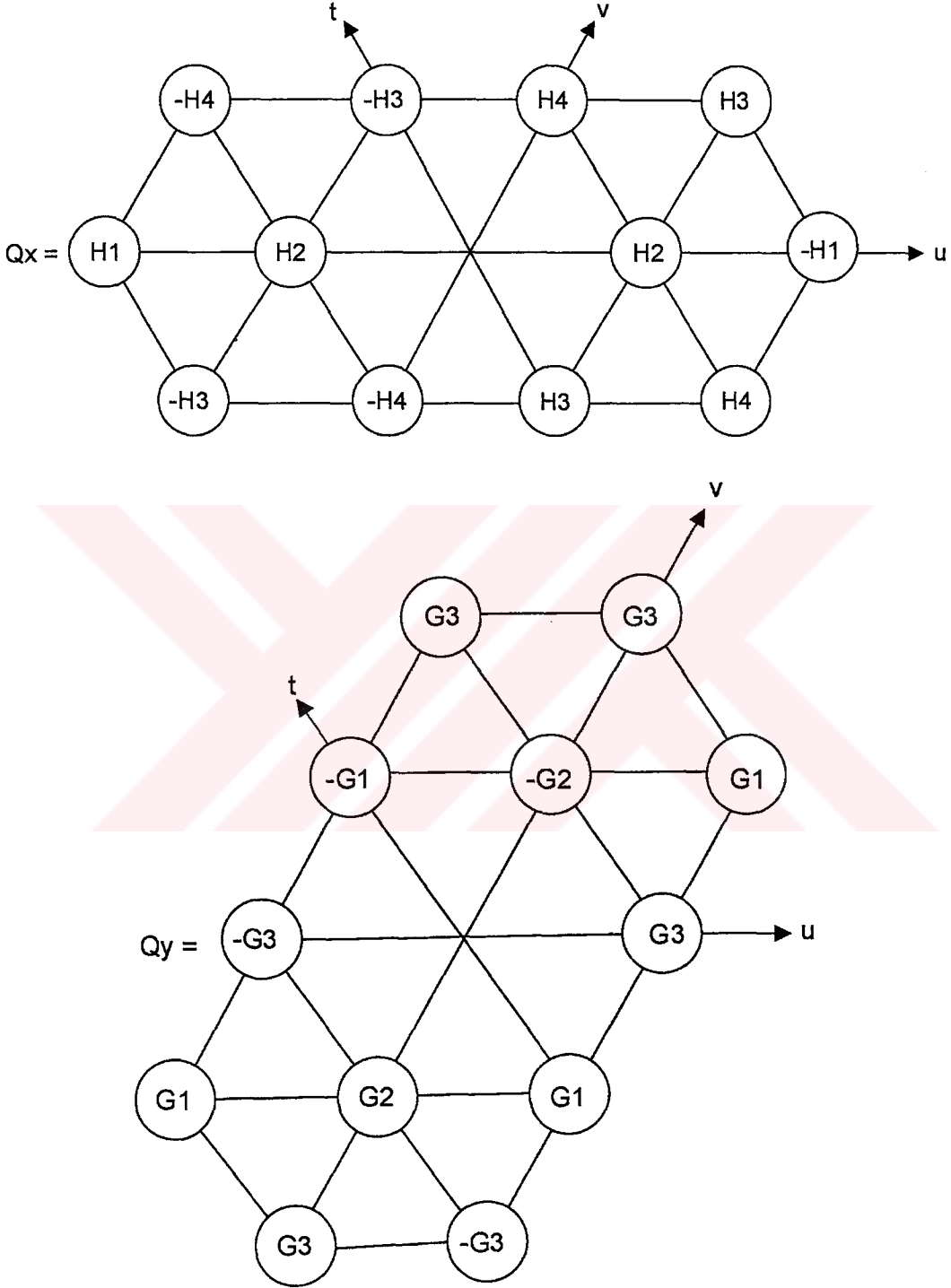
$$\frac{D.F3}{2 \sin \alpha . h_v . h_t^2} = G4$$

ile gösterilirse, (3.32) denklemleri şöyle yazılabilir :

$$Q_x = H1 \cdot w_{u,v-2,t-2} + H2 \cdot w_{u,v-1,t-1} - H2 \cdot w_{u,v+1,t+1} - H1 \cdot w_{u,v+2,t+2} - H3 \cdot w_{u+1,v-1,t} + H3 \cdot w_{u-1,v+1,t} \\ + H3 \cdot w_{u+1,v+1,t+2} - H4 \cdot w_{u-1,v,t-1} - H4 \cdot w_{u+1,v-2,t-1} + H4 \cdot w_{u-1,v+2,t+1} + H4 \cdot w_{u+1,v,t+1}$$

$$Q_y = G1 \cdot w_{u-1,v-1,t-2} + G2 \cdot w_{u-1,v,t-1} + G1 \cdot w_{u-1,v+1,t} - G1 \cdot w_{u+1,v-1,t} - G2 \cdot w_{u+1,v,t+1} - G1 \cdot w_{u+1,v+1,t+2} \\ + G3 \cdot w_{u-2,v,t-2} - G3 \cdot w_{u+2,v,t+2} - G3 \cdot w_{u-2,v+1,t-1} - G3 \cdot w_{u,v-1,t-1} + G3 \cdot w_{u,v+1,t+1} + G3 \cdot w_{u+2,v-1,t+1} \quad (3.34)$$

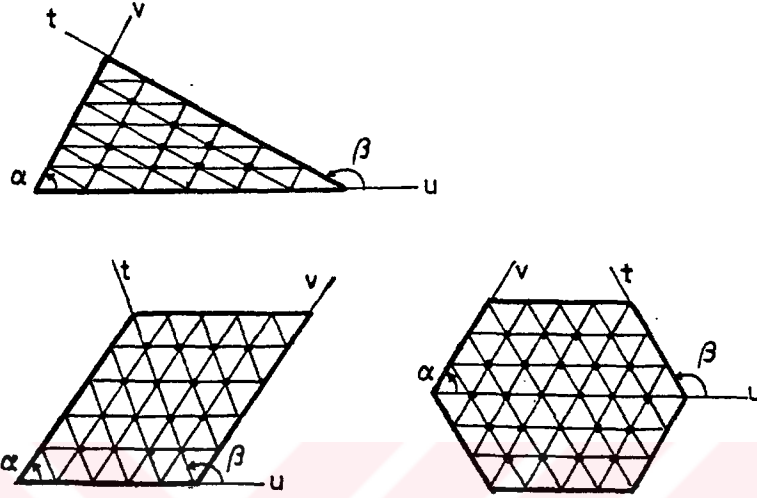
Bu denklemler şematik olarak, şekil (3.11)deki gibi gösterilebilir. Böylece, (3.31) ve (3.34) denklemleriyle veya şekil 3.8, 3.9, 3.10 ve 3.11.a, b daki şemalardan faydalanarak, her ağ noktasındaki kesit tesirleri elde edilir.



Şekil 3.11. Kesme kuvveti diyagramı

3.4. Eğik koordinat takımına göre çıkartılan sonlu fark ifadelerinin muhtelif biçimdeki plaklara uygulanması

Sonlu fark ifadeleri eğik koordinat takımı olarak seçilen herhangi üç doğrultudaki u, v, t eksenlerine göre çıkarıldığından, şekil 3.12 'te görülen muhtelif biçimdeki plaklara kolayca uygulanabilir.



Şekil 3.12. Eğik koordinat takımına göre muhtelif biçimdeki plaklar

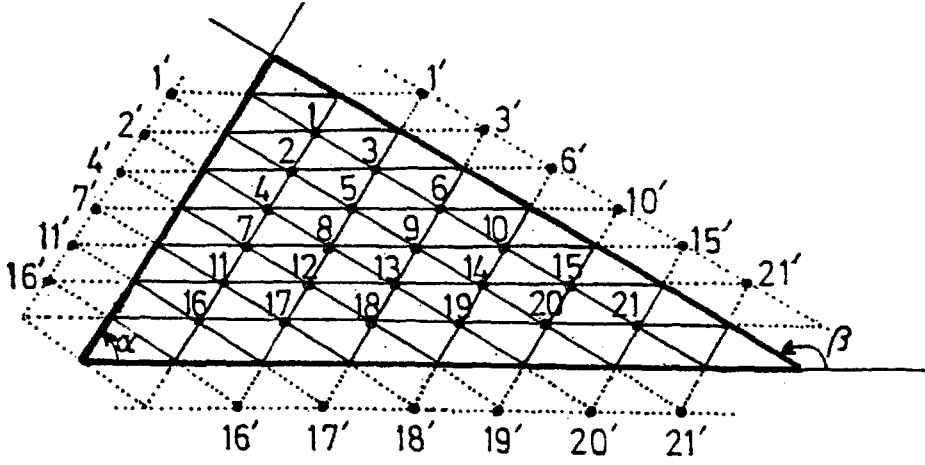
Bu tip plaklarda u, v, t eksenleri sınırlara paralel olarak seçileceğinden, sınır şartlarının ifadesi oldukça kolay olacaktır. Bu bölümde, üçgen ve trapez şeklindeki plakların çözümü yapılacaktır.

3.4.1. Üçgen plaklar

Şekil 3.13'te görülen, kenarları yatayla α ve β açısı yapan bir üçgen plağı ele alalım. Plağın kenarlarına paralel olarak çizilen doğruların teşkil ettiği ağız noktalarının 1, 2, 21 ile gösterelim.

Elastik zemine oturan plağın her ağız noktası için : $\nabla^4 w = \frac{g}{D} - k.w$ diferansiyel denklemini,

şekil 3.6'daki şemadan faydalananarak yazarsak, 21 bilinmeyenli bir denklem takımı elde edilecektir. Bu denklem takımının çözümüyle 1, 2,, 21 noktalarındaki çökme



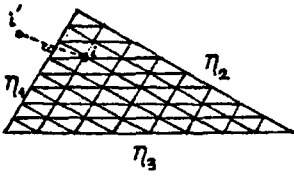
Şekil 3.13.Elastik zemine oturan üçgen plak

değerleri bulunmuş olur. Bu çökme değerleri (3.31) ve (3.34) denklemlerinde yerine koyularak, bahis konusu noktalardaki kesit tesirleri elde edilmiş olur.

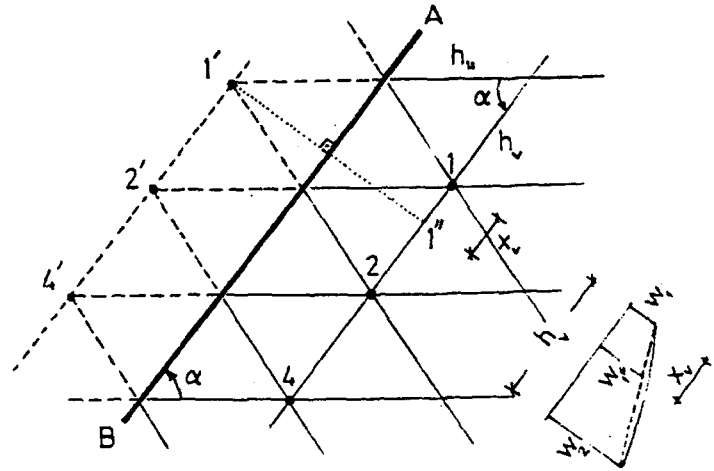
Şekil 3.6'daki şemayı sınıra yakın noktalara uygularken, plak dışında alınacak bazı noktalara ihtiyaç vardır. Plak dışında alınacak her hangi bir i fiktif noktasındaki w_i' çökme değeri, bu noktanın mesnede göre simetriğinde bulunan plak iç noktasındaki w_i çökme değerinin η katsayısı ile çarpımına eşittir. (Şekil 3.14) Yani :

$$W_i' = \eta \cdot w_i \quad (3.35)$$

Buradaki η katsayısı sabit mesnette -1 , ankastre mesnette $+1$, olacaktır. üçgen plağın üç kenarındaki istinat durumunu belirten katsayılar η_1 , η_2 , η_3 olsun. (Şekil 3.14) şekil 3.13'teki üçgen plağın dışında alınacak fiktif noktaları ifade edelim.



Şekil 3.14.Fiktif noktalar



Şekil 3.15.AB kenarında fiktif noktalar

Şekil 3.15'te görüldüğü gibi u,v,t doğrular ağını sınır dışındada çizerek 1', 2', 4',..... fiktif noktalarını işaretleyelim. Örneğin 1' fiktif noktasını ele alırsak, bu noktayı 1 noktasına birleştiren $\overline{11'}$ doğrusu sınıra dik değildir. Ancak α açısı 60° ise $\overline{11'}$ doğrusu sınıra dik olacaktır. bu sebeple 1' fiktif noktası gerçekte 1 ve 2 noktaları arasında bulunan 1'' noktasının 1 noktasına olan uzaklığına x_v diyelim. Şekil 3.15 ten :

$$X_v = 2h_u \cdot \cos \alpha - h_v$$

bulunur. Diğer taraftan 1 ve 2 noktaları birbirine yakın iki ağ noktası olduğundan, ikisi arasındaki 1'' noktasındaki çökme değeri, bu noktalardaki çökme değerleri cinsinden ifade edilebilir. Şekil 3.15' tan:

$$w_{1''} = w_1 + (w_2 - w_1) \cdot \frac{X_v}{h_v} = \left(1 - \frac{X_v}{h_v}\right) \cdot w_1 + \frac{X_v}{h_v} \cdot w_2 = \gamma_v \cdot w_1 + \rho_v \cdot w_2 \quad (3.36)$$

olarak yazılabilir.

Burada :

$$\rho_v = \frac{X_v}{h_v} = \left(\frac{2h_u}{h_v} \cdot \cos \alpha - 1 \right)$$

$$\gamma_v = 1 - \rho_v$$

ile gösterilmiştir.

Böylece 1' fiktif noktasındaki çökme değeri (3.35) ve (3.36) ifadelerinden faydalanarak :

$$w'_1 = \eta_1 \cdot W_{1''} = \eta_1 \cdot \gamma_v \cdot w_1 + \eta_1 \cdot \rho_v \cdot w_2$$

olarak bulunmuş olur.

Benzer şekilde 2', 4' ..., 16' fiktif noktalarındaki çökmeler :

$$w'_2 = \eta_1 \gamma_v w_2 + \eta_1 \cdot \rho_v \cdot w_4$$

$$w'_4 = \eta_1 \gamma_v \cdot w_4 + \eta_1 \cdot \rho_v \cdot w_7$$

.....

(3.37)

$$W_{16'} = \eta_1 \cdot \gamma_v \cdot W_{16} + \eta_1 \cdot \rho_v \cdot 0$$

olarak kolayca yazılabilir.

Özel olarak $\alpha = 60^\circ$ ise, $X_v = 0$. $\rho_v = 0$, $\gamma_v = 1$ olacağından :

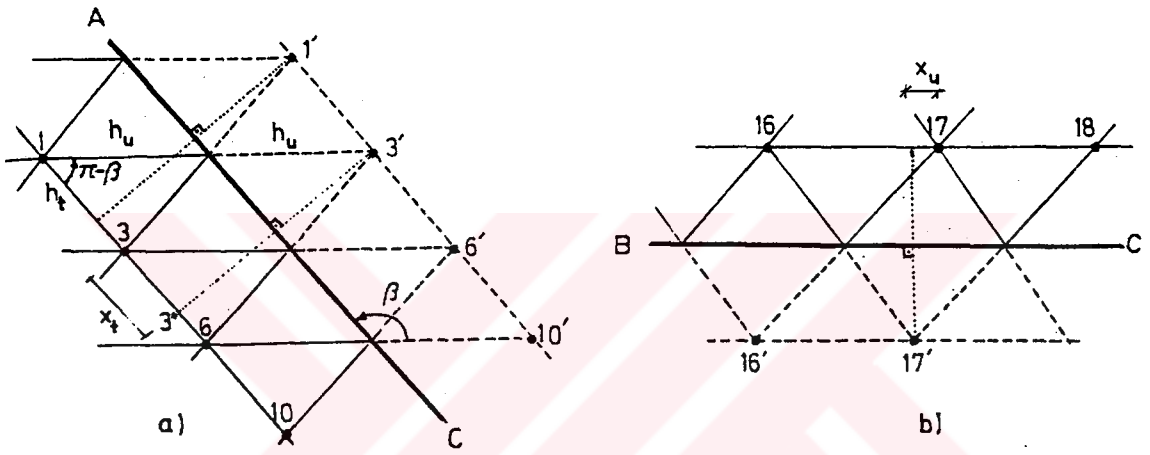
$$w_1' = \eta_1 \gamma_v \cdot w_1$$

$$w_2' = \eta_1 \cdot \gamma_v \cdot w_2$$

$$w_4' = \eta_1 \cdot \gamma_v \cdot w_4$$

.....
şekline olacaktır.

diğer sınırların dışında alınacak fiktif noktalar, şekil 3.16'da gösterilmiştir.



Şekil 3.16.AC ve BC kenarlarında fiktif noktalar

şekil 3.17.a'dan :

$$X_t = 2h_u \cdot \cos\beta - h_t$$

$$\rho_t = \frac{X_t}{h_t} = 2 \frac{h_u}{h_t} \cdot \cos\beta - 1$$

$$\gamma_t = 1 - \rho_t$$

bulunur.

Buna göre 1', 3', 6', ... fiktif noktalarındaki çökme değerleri :

$$w_1' = \eta_2 \gamma_t \cdot w_1 + \eta_2 \cdot \rho_t \cdot w_3$$

$$w_3' = \eta_2 \gamma_t \cdot w_3 + \eta_2 \cdot \rho_t \cdot w_6$$

$$w_6' = \eta_2 \gamma_t \cdot w_6 + \eta_2 \cdot \rho_t \cdot w_{10}$$

$$w_{21}' = \eta_2 \cdot \gamma_t \cdot w_{21} + \eta_2 \cdot \rho_t \cdot 0$$

(3.38)

Şekil 3.17.b'den :

$$X_u = 2 h_v \cdot \cos\alpha - h_u$$

$$\rho_u = \frac{x_u}{h_u} = 2 \cdot \frac{h_v}{h_u} \cdot \cos\alpha - 1$$

$$\gamma_u = 1 - \rho_u$$

bulunur.

Buna göre 16', 17',, 21' fiktif noktalarındaki çökme değerleri :

$$w_{16}' = \eta_3 \cdot \gamma_u \cdot w_{16} + \eta_3 \cdot \rho_u \cdot w_{17} \quad (3.39)$$

$$w_{17}' = \eta_3 \cdot \gamma_u \cdot w_{17} + \eta_3 \cdot \rho_u \cdot w_{18}$$

$$w_{21}' = \eta_3 \cdot \gamma_u \cdot w_{21} + \eta_3 \cdot \rho_u \cdot 0$$

Böylece (3.37), (3.38) ve (3.39) ifadelerine göre 1', 2', 3', 21' fiktif noktalarına ait çökme değerleri, plağın iç noktalarındaki sökme değerlerine bağlanmış olur.

Şimdi, şekil 3.13'teki üçgen plağın ağ noktalarına, şekil 3.6'daki şemayı uygulayabiliriz:

$$1 \text{ noktası : } c_0 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2 + c_3 \cdot w_3 + c_4 \cdot w_1' + c_5 \cdot w_1 + c_6 \cdot w_5 + c_7 \cdot w_4 + c_8 \cdot w_6 + c_9 \cdot (w_3' + w_2') = g_1/D - k_1 \cdot w_1$$

$$2 \text{ noktası : } c_0 \cdot w_2 + c_1 \cdot w_3 + c_3 \cdot w_5 + c_2 \cdot (w_1 + w_4) + c_5 \cdot (w_6 + w_2') + c_6 \cdot w_8 + c_7 \cdot w_7 + c_9 \cdot w_4' + c_8 \cdot (w_1' + w_9) \\ = g_2/D - k_2 \cdot w_2$$

$$3 \text{ noktası : } c_0 \cdot w_3 + c_1 \cdot w_2 + c_2 \cdot w_5 + c_3 \cdot (w_1 + w_6) + c_4 \cdot (w_3' + w_4) + c_6 \cdot w_9 + c_7 \cdot (w_1' + c_8) + c_8 \cdot w_{10} \\ + c_9 \cdot w_6' = g_3/D - k_3 \cdot w_3$$

$$4 \text{ noktası : } c_0 \cdot w_4 + c_1 \cdot w_5 + c_2 \cdot (w_2 + w_7) + c_3 \cdot w_8 + c_4 \cdot w_3 + c_5 \cdot (w_4' + w_9) + c_6 \cdot w_{12} + c_7 \cdot (w_1 + w_{11}) \\ + c_8 \cdot (w_2' + w_{13}) + c_9 \cdot (w_7 + w_6) = g_4/D - k_4 \cdot w_4$$

$$5 \text{ noktası : } c_0 \cdot w_5 + c_1 \cdot (w_4 + w_6) + c_2 \cdot (w_3 + w_8) + c_3 \cdot (w_2 + w_9) + c_4 \cdot w_7 + c_5 \cdot w_{10} + c_6 \cdot (w_1 + w_{13}) + \\ c_7 \cdot w_{12} + c_8 \cdot w_{14} = g_5/D - k_5 \cdot w_5$$

$$6 \text{ noktası : } c_0 \cdot w_6 + c_1 \cdot w_5 + c_2 \cdot w_9 + c_3 \cdot (w_{10} + w_3) + c_4 \cdot (w_6' + w_8) + c_5 \cdot w_2 + c_6 \cdot w_{14} + c_7 \cdot (w_3' + w_{13})$$

$$+c8.(w_1'+w_{15})+c9.(w_{10}'+w_4)=g_6/D-k_6.w_6$$

$$7 \text{ noktası : } c0.w_7+c1.w_8+c2.(w_4+w_{11})+c3.w_{12}+c4.w_5+c5.(w_{13}+w_7')+c6.w_{17}+c7.(w_2+w_{16})$$

$$+c8.(w_4'+w_{18})+c9.(w_9+w_{11}')=g_7/D-k_7.w_7$$

$$8 \text{ noktası : } c0.w_8+c1.(w_9+w_7)+c2.(w_5+w_{12})+c3.(w_4+w_{13})+c4.(w_6+w_{11})+c5.w_{14}+c6.(w_2+w_{18})$$

$$+c7.(w_3+w_{17})+c8.w_{19}+c9.w_{10}=g_8/D-k_8.w_8$$

$$9 \text{ noktası : } c0.w_9+c1.(w_8+w_{10})+c2.(w_6+w_{13})+c3.(w_5+w_{14})+c4.w_{12}+c5.(w_4+w_{15})$$

$$+c7.w_{18}+c6.(w_3+w_{19})+c8.(w_2+w_{20})+c9.w_7=g_9/D-k_9.w_9$$

$$10 \text{ noktası : } c0.w_{10}+c1.w_9+c2.w_{14}+c3.(w_6+w_{15})+c4.(w_{10}'+w_{13})+c5.w_5+c6.w_{20}$$

$$+c7.(w_6'+w_{19})+c8.(w_3+w_{21})+c9.(w_8+w_{15}')=g_{10}/D-k_{10}.w_{10}$$

$$11 \text{ noktası : } c0.w_{11}+c1.w_{12}+c2.(w_7+w_{16})+c3.w_{17}+c4.w_8+c5.(w_{18}+w_{11}') +c7.w_4+c8.w_7'$$

$$+c9.(w_{16}'+w_{13})=g_{11}/D-k_{11}.w_{11}$$

$$12 \text{ noktası : } c0.w_{12}+c1.(w_{11}+w_{13})+c2.(w_8+w_{17})+c3.(w_7+w_{18})+c4.(w_9+w_{16})+c5.w_{19}$$

$$+c6.w_4+c7.w_5+c9.w_{14}=g_{12}/D-k_{12}.w_{12}$$

$$13 \text{ noktası : } c0.w_{13}+c1.(w_{12}+w_{14})+c2.(w_9+w_{18})+c3.(w_8+w_{19})+c4.(w_{10}+w_{17})+c5.(w_7+w_{20})$$

$$+c6.w_5+c7.w_6+c8.w_4+c9.(w_{11}+w_{15})=g_{13}/D-k_{13}.w_{13}$$

$$14 \text{ noktası : } c0.w_{14}+c1.(w_{15}+w_{13})+c2.(w_{10}+w_{19})+c3.(w_9+w_{20})+c4.w_{19}+c5.(w_8+w_{21})+c6.w_6$$

$$+c8.w_5+c9.w_{12}=g_{14}/D-k_{14}.w_{14}$$

$$15 \text{ noktası : } c0.w_{15}+c1.w_{14}+c2.w_{20}+c3.(w_{10}+w_{21})+c4.(w_{15}'+w_{19})+c5.w_9+c7.w_{10}'$$

$$+c8.w_6+c9.(w_{21}'+w_{13})=g_{15}/D-k_{15}.w_{15}$$

$$16 \text{ noktası : } c0.w_{16}+c1.w_{17}+c2.w_{11}+c4.w_{12}+c5.w_{16}'+c6.w_{16}'+c7.w_7+c8.(w_{11}'+w_{17}')$$

$$+c9.w_{18}=g_{16}/D-k_{16}.w_{16}$$

$$17 \text{ noktası : } c_0.w_{17}+c_1.(w_{16}+w_{18})+c_2.w_{12}+c_3.w_{11}+c_4.w_{13}+c_6.(w_7+w_{17})+c_7.(w_9+w_{16}) \\ +c_8.w_{18}+c_9.w_{19}=g_{17}/D-k_{17}.w_{17}$$

$$18 \text{ noktası : } c_0.w_{18}+c_1.(w_{17}+w_{19})+c_2.w_{13}+c_3.w_{12}+c_4.w_{14}+c_5.w_{11}+c_6.(w_8+w_{18}) \\ +c_7.(w_9+w_{17})+c_8.(w_7+w_{19})+c_9.(w_{16}+w_{20})=g_{18}/D-k_{18}.w_{18}$$

$$19 \text{ noktası : } c_0.w_{19}+c_1.(w_{18}+w_{20})+c_2.w_{14}+c_3.w_{13}+c_4.w_{15}+c_5.w_{12}+c_6.(w_9+w_{19}) \\ +c_7.(w_{10}+w_{18})+c_8.(w_8+w_{20})+c_9.(w_{17}+w_{21})=g_{19}/D-k_{19}.w_{19}$$

$$20 \text{ noktası : } c_0.w_{20}+c_1.(w_{19}+w_{21})+c_2.w_{15}+c_3.w_{14}+c_5.w_{13}+c_6.(w_{10}+w_{20})+c_7.w_{19} \\ +c_8.(w_9+w_{21})+c_9.w_{18}=g_{20}/D-k_{20}.w_{20}$$

$$21 \text{ noktası : } c_0.w_{21}+c_1.w_{20}+c_3.w_{15}+c_4.w_{21}+c_5.w_{14}+c_6.w_{21} \\ +c_7.(w_{15}+w_{20})+c_8.w_{10}+c_9.w_{19}=g_{21}/D-k_{21}.w_{21} \quad (3.40)$$

(3.37), (3.38), (3.39) değerleri, (3.40) denklemlerinde yerine koyulup düzenlenirse;

$$[A] \cdot [W] = [P]$$

şeklinde matris denklemi elde edilir. Buradan :

$$[w]=[A]^{-1} \cdot [P] \quad (3.41)$$

matris denkleminde çökme değerleri bulunmuş olur.

Burada:

$$[w] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{21} \end{bmatrix}, \quad [P] = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{21} \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} [A1] & [A5] & [A8] & [O] \\ [A10] & [A2] & [A6] & [A9] \\ [A13] & [A11] & [A3] & [A7] \\ [O] & [A14] & [A12] & [A4] \end{bmatrix}$$

Çökme vektörü

Yük vektörü

Katsayılar matrisi

[A1], [A2], [A3], [A4],....., [A14] matrisleri sonraki sayfalarda verilmiştir.

[A1]=

1	2	3	4	5	
$c_0+c_1\eta_2\gamma_t+c_5\eta_1\gamma+k_1$	$c_2+c_5\eta_1\rho_v+c_9\eta_1\gamma_v$	$c_3+c_4\eta_2\rho_t+c_9\eta_2\gamma_t$	$c_7+c_9\eta_1\rho_v$	c_6	1
$c_2+c_8\cdot\eta_1\cdot\gamma_v$	$c_0+c_5\cdot\eta_1\cdot\gamma_v+c_8\eta_1\rho_v+k_2$	c_1	$c_2+c_5\cdot\eta_1\cdot\rho_v+c_9\eta_1\gamma_v$	c_3	2
$c_3+c_7\cdot\eta_2\cdot\gamma_t$	c_1	$c_0+c_4\cdot\eta_2\cdot\gamma_t+c_7\eta_2\rho_t+k_3$	c_4	c_2	3
c_7	$c_2+c_8\cdot\eta_1\cdot\gamma_v$	c_5	$C_0+c_5\cdot\eta_1\cdot\gamma_v+c_8\eta_1\rho_v+k_4$		4
C_6	c_3	c_2	c_1	c_0+k_5	5

[A2]=

6	7	8	9	10	
$c_0+c_4\eta_2\gamma_t+c_7\eta_2\rho_t+k_6$		c_4	c_2	$c_3+c_4\eta_2\rho_t+c_9\eta_2\gamma_t$	6
	$c_0+c_5\cdot\eta_1\cdot\gamma_v+c_8\eta_1\rho_v+k_7$	c_1	c_9		7
c_4	c_1	c_0+k_8	c_1	c_9	8
c_2	c_9	c_1	c_0+k_9	c_1	9
$c_3+c_7\cdot\eta_2\cdot\gamma_t$		c_9	c_1	$c_0+c_4\eta_2\gamma_t+c_7\eta_2\rho_t+k_{10}$	10

[A3]=

11	12	13	14	15	
$c_0+c_2\eta_1\gamma_v+c_8\eta_1\rho_v+k_{11}$	c_1	c_9			11
c_1	c_0+k_{12}	c_1	c_9		12
c_9	c_1	c_0+k_{13}	c_1	c_9	13
	c_9	c_1	c_0+k_{14}	c_1	14
		c_9	c_1	$c_0+c_4\eta_2\gamma_t+c_8\eta_2\rho_t+k_{15}$	15

[A4]=

16u	17	18	19	20	21	
$c_0+c_5\eta_3\gamma_u+c_6\eta_3\gamma_u$ $+c_8\eta_1\rho_v+k_{16}$	$c_1+c_6\eta_3\rho_u+c_8\eta_3\gamma_u$	$c_9+c_8\cdot\eta_3\rho_u$				16
$c_1+c_7\cdot\eta_3\gamma_u$	$c_0+c_6\eta_3\gamma_u+c_7\eta_3\rho_u+k_{17}$	$c_1+c_6\eta_3\rho_u+c_8\eta_3\gamma_u$	$c_9+c_8\cdot\eta_3\rho_u$			17
c_9	$c_1+c_7\cdot\eta_3\gamma_u$	$c_0+c_6\eta_3\gamma_u+c_7\eta_3\rho_u+k_{18}$	$c_1+c_6\eta_3\rho_u+c_8\eta_3\gamma_u$	$c_9+c_8\cdot\eta_3\rho_u$		18
	c_9	$c_1+c_7\cdot\eta_3\gamma_u$	$c_0+c_6\eta_3\gamma_u+c_7\eta_3\rho_u+k_{19}$	$c_1+c_6\eta_3\rho_u+c_8\eta_3\gamma_u$	$c_9+c_8\cdot\eta_3\rho_u$	19
		c_9	$c_1+c_7\cdot\eta_3\gamma_u$	$c_0+c_6\eta_3\gamma_u+c_7\eta_3\rho_u+k_{20}$	$c_1+c_6\eta_3\rho_u+c_8\eta_3\gamma_u$	20
			c_9	$c_1+c_7\cdot\eta_3\gamma_u$	$c_0+c_4\eta_2\gamma_t+c_6\eta_3\gamma_u$ $c_7\rho_v+c_7\eta_3\rho_u+k_{21}$	21

[A5]=

6	7	8	9	10	
$c_8+c_9\eta_2\rho_t$					1
c_5	$c_7+c_9\eta_1\rho_v$	c_6	c_8		2
$c_3+c_9\eta_2\gamma_t$ $+c_4\eta_2\rho_t$		c_7	c_6	$c_8+c_9\eta_2\rho_t$	3
c_9	$c_2+c_5\eta_1\rho_v$ $+c_9\eta_1\gamma_v$	c_3	c_5		4
c_1	c_4	c_2	c_3	c_5	5

[A6]=

11	12	13	14	15	
		c_7	c_6	$c_8+c_9\eta_2\rho_t$	6
$c_2+c_5\eta_1\rho_v$	c_3	c_5			7
C_4	c_2	c_3	c_5		8
	c_4	c_2	c_3	c_5	9
		c_4	c_2	$c_3+c_4\eta_2\rho_t$ $+c_9\eta_2\gamma_t$	10

[A7]=

16	17	18	19	20	21	
$c_2+c_5\eta_1\rho_v+c_9\eta_1\gamma_v$	c_3	c_5				10
c_4	c_2	c_3	c_5			11
	c_4	c_2	c_3	c_5		12
		c_4	c_2	c_3	c_5	13
			c_4	c_2	$c_3+c_4\eta_2\rho_t+c_9\eta_2\gamma_t$	14

[A8]=

11	12	13	14	15	
					1
					2
					3
$c_7+c_9\eta_2\rho_t$	c_6	c_8			4
	c_7	c_6	c_8		5

[A9]=

16	17	18	19	20	21	
						6
$c_7+c_9\eta_1\rho_v$	c_6	c_8				7
	c_7	c_6	c_8			8
		c_7	c_6	c_8		9
			c_7	c_6	$c_8+c_9\eta_2\rho_t$	10

[A10]=

1	2	3	4	5	
c_8	c_5	$c_3+c_7\eta_1\gamma_t$	c_9	c_1	6
	c_7		$c_2+c_8\eta_1\gamma_v$	c_4	7
	c_6	c_7	c_3	c_2	8
	c_8	c_6	c_5	c_3	9
		c_8		c_5	10

[A11]=

6	7	8	9	10	
	$c_2+c_8\eta_1\gamma_v$	c_4			11
	c_3	c_2	c_4		12
c_7	c_5	c_3	c_2	c_4	13
c_6		c_5	c_3	c_2	14
c_8			c_5	$c_3+c_7\eta_3\gamma_t$	15

[A12]=

11	12	13	14	15	
$c_2+c_8\eta_1\gamma_v$	c_4				6
c_3	c_2	c_4			7
c_5	c_3	c_2	c_4		8
	c_5	c_3	c_2	c_4	9
		c_5	c_3	c_2	10
			c_5	$c_3+c_7\eta_2\gamma_t$	

[A13]=

1	2	3	4	5	
			c_7		11
			c_6	c_7	12
			c_8	c_6	13
				c_8	14
					15

[A14]=

6	7	8	9	10	
	c_7				16
	c_6	c_7			17
	c_8	c_6	c_7		18
		c_8	c_6	c_7	19
			c_8	c_6	20
				c_8	21

3.4.1.1 Bilgisayar programları

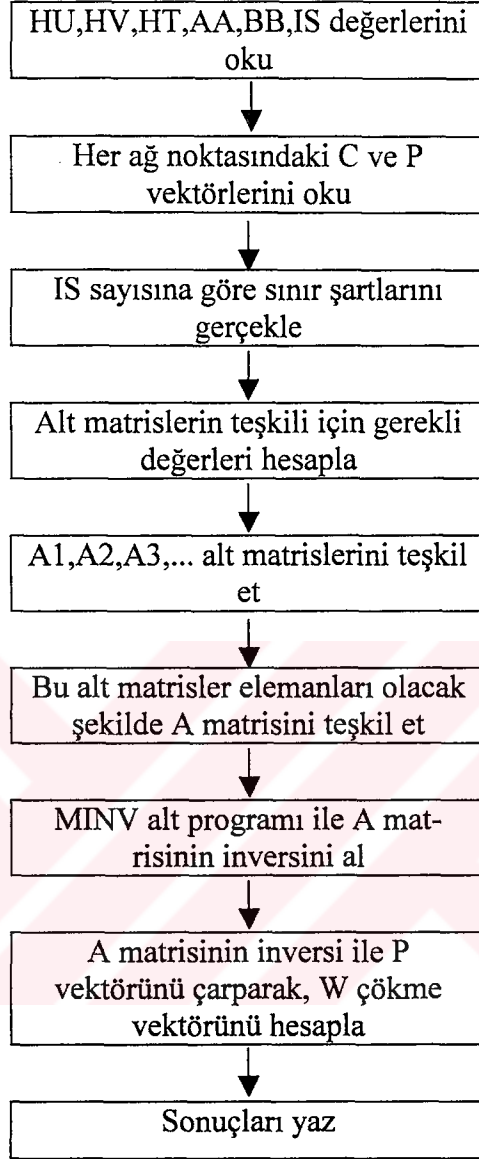
Bir üçgen plağın iç noktalarındaki çökme değerlerini hesaplayan bilgisayar programı hazırlanarak Program A ile verilmiştir. Bilgisayar programı üçgen plağın her tip mesnetlenme durumunda çözümünü yapabilmektedir. Elastik zemine oturmayan üçgen plaklar için de, $C=0$ alınmak suretiyle çözüm elde edilebilir.

Programda kullanılan notasyonlar şunlardır :

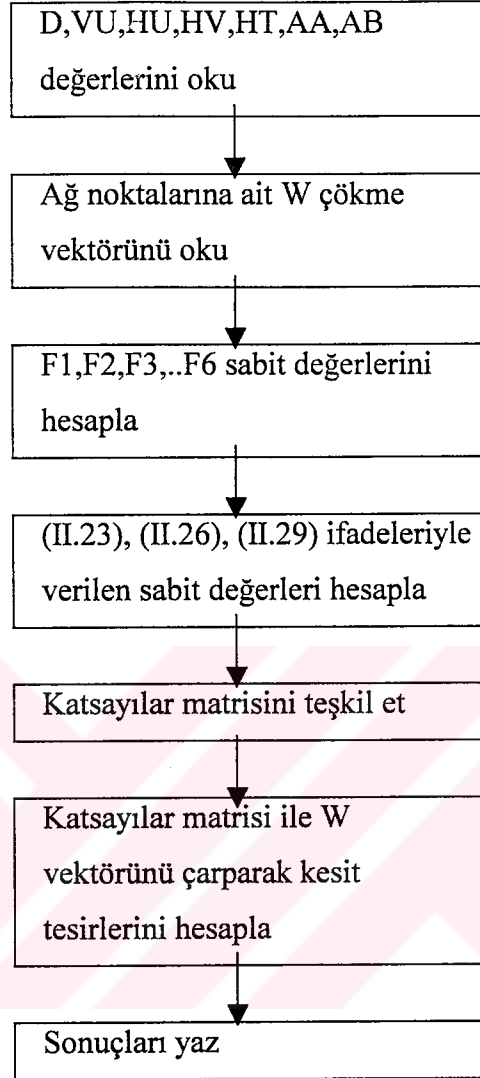
- HU.HV.HT : Sırasıyla u,v,t eksenleri boyunca alınacak aralık uzunlukları
- AA, BB : Plağın her iki kenarının, üçüncü kenarla yaptığı açılarının derece cinsinden değerleri .
- IS : Plağın mesnetlenme durumunu karakterize eden bir sayıdır.
 IS = 1 ise üç kenarından-sabit mesnetlere oturan plak
 IS = 2 ise üç kenarından ankastre mesnede oturan plak
 IS = 3 ise iki kenarı ankastre, bir kenarı sabit mesnede oturan plak
 IS = 4 ise bir kenarı ankastre, iki kenarı sabit mesnede oturan plak
- P : Plağın ağ noktalarındaki yayılı yükün değerlerini gösteren vektör
- C : Plağın ağ noktalarındaki zemin katsayıları / D ($k_{ij} = c_{ij} / D$) gösteren bir vektör
- W : Plağın ağ noktalarındaki çökme değerlerini gösteren vektör
- A : Katsayılar matrisi
- A1,A2,A3... : Alt matrisler

Program A ile bulunacak çökme değerlerimden faydalanarak, plağın ağ noktalarındaki kesit—tesirlerini hesaplayan program, Program B ile verilmiştir. Bu programda kullanılan notasyonlar Program A da kullanılan notasyonlarla aynıdır. Ayrıca kullanılan notasyonlar şunlardır :

- VU : Poisson oranı
- F1,F2,F3,..F6 : Katsayılar matrisinin teşkilinde kullanılacak sabit değerler.

PROGRAM – A

PROGRAM B



Örnek

Üzerinde üniform yük bulunan, üç kenarından sabit mesnetlere oturan elastik zemin üzerindeki üçgen plak, Program A ile çözülecektir .Programa verilecek doneler şunlardır :

Plakın mesnetlenme tipini belirten sayı IS = 1

(Üç kenarından basit istinatlı plak)

Plak rijitliği $D=500 \text{ t. m}^2$

Zemin katsayısı/D değeri $C=1,0 \frac{\text{t/m}^2}{\text{t.m}^2}$

u eksenleri boyunca alınacak aralık uzunluğu $HU=1,0 \text{ m}$

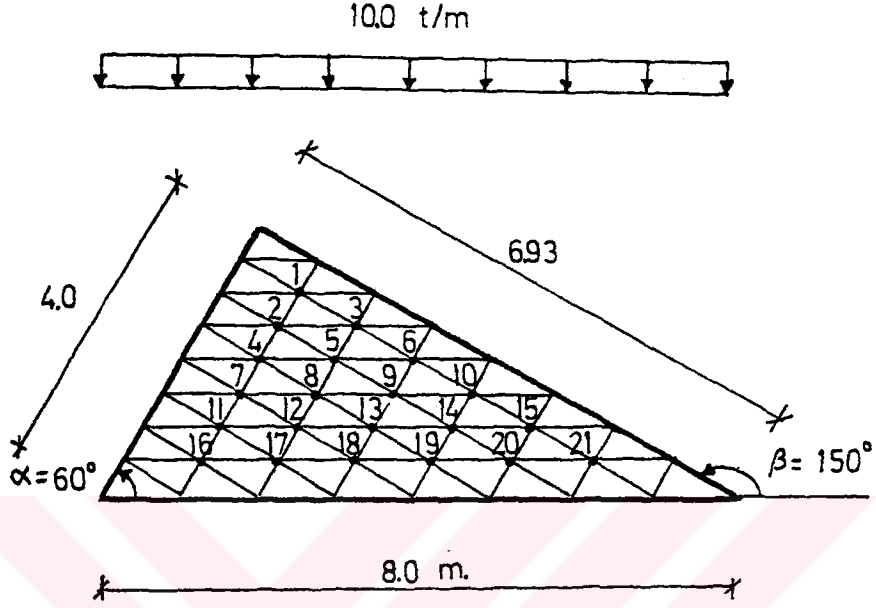
v eksenleri boyunca alınacak aralık uzunluğu $HV=0,5 \text{ m}$

t eksenleri boyunca alınacak aralık uzunluğu $HT=0,866$ m

v ekseninin yatayla yaptığı α açısı $AA=60^\circ$

t ekseninin yatayla yaptığı β açısı $AB=150^\circ$

Yük vektörü $P=10$ t/m



Sonuçlar :

IS=1

C=I

D=500.

HU=1.

HV=0.50

HT=0.866

AA=60.

AB=150.

W SEHİM VEKTÖRÜ

1	0.00032
2	0.00039
3	0.00037
4	0.00040
5	0.00045
6	0.00037
7	0.00040
8	0.00046
9	0.00045
10	0.00037
11	0.00038
12	0.00043
13	0.00044
14	0.00042
15	0.00034
16	0.00028
17	0.00033
18	0.00034
19	0.00034
20	0.00032
21	0.00025

MX MOMENT DEĞERLERİ

0.380079	0.277796	0.248194	0.186917	0.084196	0.217644	0.189428
0.051409	0.062550	0.231000	0.211974	0.053352	0.051449	0.076192
0.235200	0.218178	0.124611	0.112121	0.121854	0.145485	0.259759

MY MOMENT DEĞERLERİ

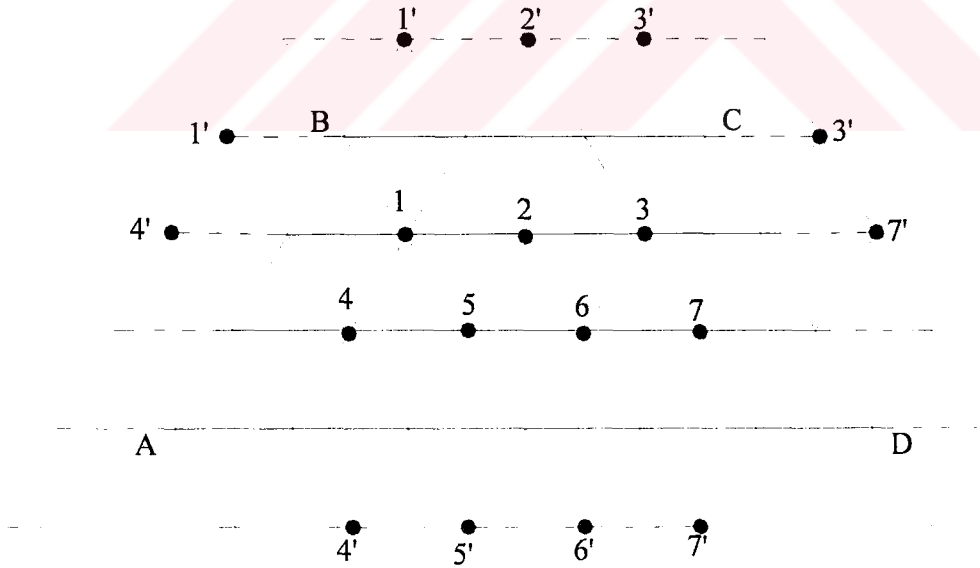
0.413201	0.168943	0.467513	0.100591	0.125801	0.459214	0.144729
0.104107	0.170818	0.539168	0.308341	0.203233	5.220767	0.281614
0.651656	0.617043	0.629759	0.642280	0.671457	0.725647	1.031555

MX Y MOMENT DEĞERLERİ

-0.144451	0.031050	-0.199618	0.074327	-0.036108	-0.209205	0.086332
0.002153	-0.045707	-0.200224	0.038696	0.014351	-0.012074	-0.043328
-0.206339	0.127090	0.014249	0.002245	-0.014581	-0.050638	-0.206903

3.4.2. Trapez plaklar

Eğik koordinat takımının kullanılmasını gerektiren diğer tip plak olarak, trapez şeklindeki plaklar ele alınacaktır. Şekil 3.17 da görülen trapez plağı gözönüne alalım.

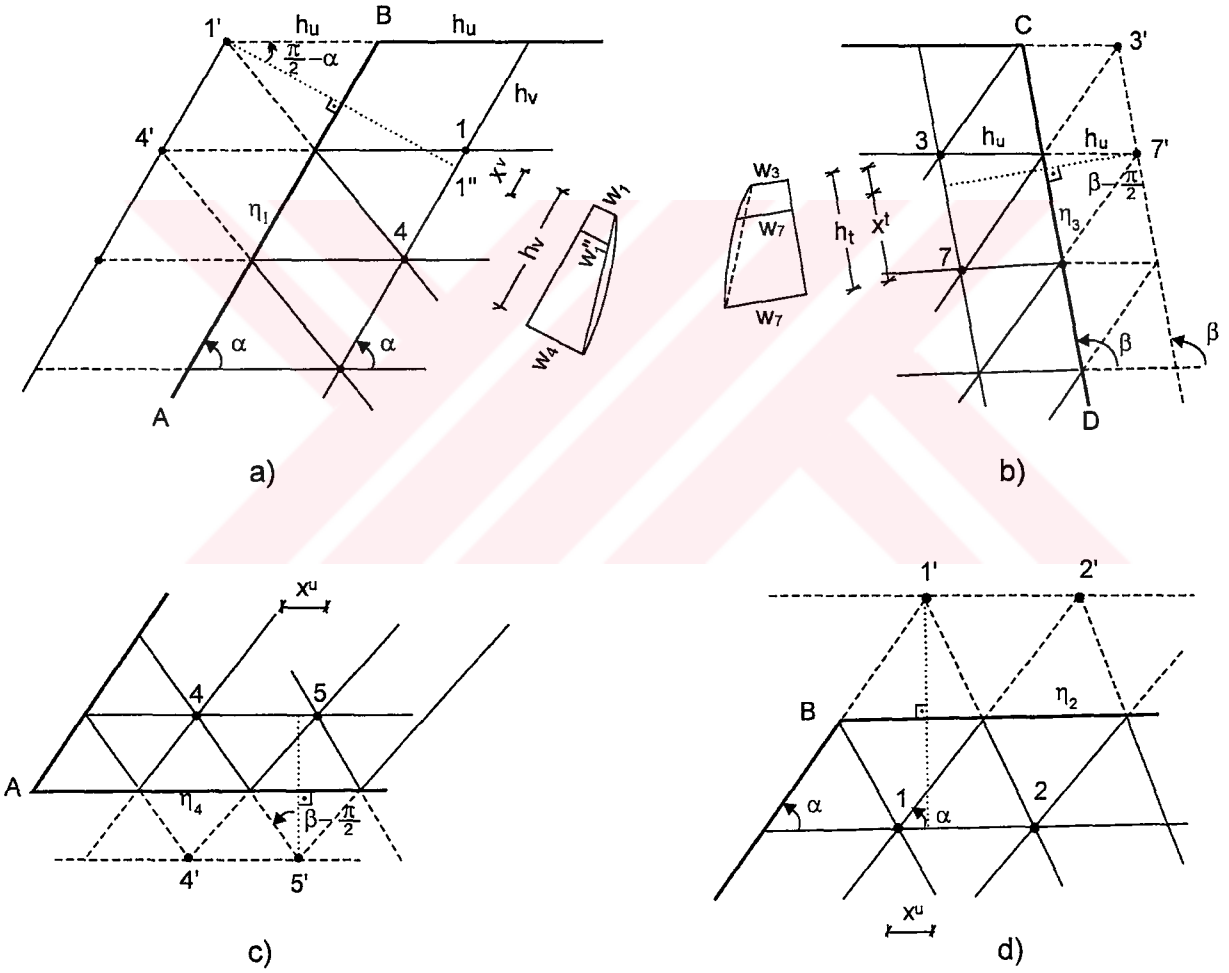


Şekil 3.17Elastik zemine oturan trapez plak

Plak üzerinde eğik doğrulardan meydana gelen bir doğrular şebekesi çizelim. Bu u,v,t doğrular şebekesi en genel tarzda çizilmiştir. Her eksenin üzerinde alınacak aralıklar kendi

birbirine eşit aralarında doğrular şebekesinin kesim noktaları 1,2,3,.....,7 olsun. u,v,t eksenleri boyunca eşit aralıklar kullanıldığından CO, C1,, C9 değerleri her ağ noktası için ayrı ayrı hesaplanmalıdır. Bu değerler (3.17), (3.18) ifadelerinden faydalanılarak, her ağ noktasında hesaplanır. Bundan sonra, her ağ noktasına şekil 3.6'daki şema uygulanarak bir denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımı çözülerek, bahis konusu noktalardaki çökme değerleri bulunur. Çökme değerleri (3.24), (3.27), (3.30) ve (3.34) denklemlerinde yerine koyularak her ağ noktası için M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y kesit tesirleri elde edilmiş olur.

Önce plak dışında alınacak 1', 2',, 7' fiktif noktalarındaki çökme fonksiyonlarını iç noktalardaki cinsinden ifade edelim.



Şekil 3.18. Trapez kenarlarında fiktif noktalar

Önce AB kenarına ait 1' fiktif noktasını ele alalım. Şekil (3.18.a) 1' noktası yaklaşık olarak, plağın 1 noktasının fiktif karşılığı gibi alınabilir.

Fakat, $\overline{11'}$ doğrusu AB sınırına dik olmadığı için $1'$ noktası gerçekten bu noktadan AB'ye indirilen dik doğrunun v eksenini kesitiği $1''$ noktasının fiktif karşılığı olacaktır. $1''$ noktasının 1 noktasına olan uzaklığı X_1^v ile gösterirsek, şekil (3.18.a) dan:

$$X_1^v = 2 h_u \cdot \cos \alpha - h_v$$

Diğer taraftan $1''$ noktasındaki çökmeyi, 1 ve 4 noktalarındaki çökmeler cinsinden ifade edersek :

$$w_{1''} = w_1 + (w_4 - w_1) \cdot \frac{X_1^v}{h_v} = \gamma_1^v \cdot w_1 + \rho_1^v \cdot w_4$$

Olarak yazabiliriz. Burada :

$$\rho_1^v = \frac{X_1^v}{h_v} \quad \text{ve} \quad \gamma_1^v = 1 - \rho_1^v \quad \text{ile gösterilmiştir.}$$

Plağın AB kenarının mesnetlenme şeklini karakterize eden faktör η_1 ise (2.99) denklemine göre :

$$w_{1'} = \eta_1 w_1 = \eta_1 \cdot \gamma_1^v \cdot w_1 + \eta_1 \cdot \rho_1^v \cdot w_4$$

Benzer şekile $4'$ fiktif noktası için:

$$w_{4'} = \eta_1 \gamma_4^v \cdot w_4 + \eta_1 \rho_4^v \cdot 0$$

Aynı şekilde, CD kenarına göre alınacak fiktif noktalar için şekil (3.18.b) den faydalanarak :

$$X_3^t = X_7^t = X^t = h_t - 2 h_u \cdot \cos \beta$$

$$\rho^t = \frac{X^t}{h_t} \quad \gamma^t = 1 - \rho^t$$

yazılabilir. Buna göre, CD sınırındaki mesnetlenmeyi karakterize eden faktör η_3 ise:

$$w_{3'} = \eta_3 \cdot \gamma_3^t \cdot w_3 + \eta_3 \cdot \rho_3^t \cdot 0$$

$$w_{7'} = \eta_3 \cdot \gamma_7^t \cdot w_7 + \eta_3 \cdot \rho_7^t \cdot w_3$$

Olarak fiktif noktadaki çökme fonksiyonları, plağın iç noktalarındaki çökme fonksiyonları cinsinden bulunmuş olur. Benzer şekilde AD ve BC kenarlarına göre alınacak fiktif noktalar için, şekil (3.18.c ve d) den faydalanarak :

$$X_{4,5,6,7}^U = X_n^U = h_u - 2h_t \cdot \cos\beta$$

$$X_{1,2,3}^U = X_n^U = h_u - 2h_v \cdot \cos\alpha$$

$$\rho_n^U = \frac{X_n^U}{h_u} \quad \gamma_n^U = 1 - \rho_n^U$$

yazılabilir. Buna göre, BC ve AD sınırlarındaki mesnetlenme durumu karakterize eden faktörler η_2 ve η_4 ise :

BC kenarına ait :

$$w'_1 = \eta_2 \cdot \gamma_1^U \cdot w_1 + \eta_2 \cdot \rho_1^U \cdot W_2$$

$$w'_2 = \eta_2 \cdot \gamma_1^U \cdot w_2 + \eta_2 \cdot \rho_2^U \cdot W_3$$

$$w'_3 = \eta_2 \cdot \gamma_1^U \cdot w_3 + \eta_2 \cdot \rho_3^U \cdot 0$$

AD kenarına ait :

$$w'_4 = \eta_4 \cdot \gamma_1^U \cdot w_4 + \eta_4 \cdot \rho_4^U \cdot 0$$

$$w'_5 = \eta_4 \cdot \gamma_1^U \cdot w_5 + \eta_4 \cdot \rho_5^U \cdot w_4$$

$$w'_6 = \eta_4 \cdot \gamma_1^U \cdot w_6 + \eta_4 \cdot \rho_6^U \cdot w_5$$

$$w'_7 = \eta_4 \cdot \gamma_1^U \cdot w_7 + \eta_4 \cdot \rho_7^U \cdot w_6$$

Şimdi plağın 1, 2,, 7 ağ noktalarına şekil (3.6)daki şemayı uygulayalım.

$$1 \text{ noktası : } cO.w_1 + c1.w_2 + c2.w_4 + c3.w_5 + c5.w_6 + c5.w_1 + c6.w_6 + c7.w'_2 + c9.w'_4 + c9.w_3$$

$$= g_1 / D - k_1 \cdot w_1$$

$$2 \text{ noktası : } cO.w_2 + c1.w_1 + c1.w_3 + c2.w_5 + c3.w_6 + c4.w_4 + c5.w_7 + c6.w'_2 + c7.w'_3 + c8.w'_1$$

$$= g_2 / D - k_2 \cdot w_2$$

$$3 \text{ noktası : } cO.w_3+c1.w_2+c2.w_6+c3.w_7+c4.w_3+c4.w_5+c6.w_3+c8.w_2+c9.w_1+c9.w_7$$

$$= g_3 / D - k_3 . w_3$$

$$4 \text{ noktası : } cO.w_4+c1.w_5+c2.w_1+c4.w_2+c5.w_4+c6.w_4+c8.w_1+c8.w_5+c9.w_6$$

$$= g_4 / D - k_4 . w_4$$

$$5 \text{ noktası : } cO.w_5+c1.w_4+c1.w_6+c2.w_2+c3.w_1+c6.w_5+c7.w_4+c8.w_6+c9.w_7$$

$$= g_5 / D - k_5 . w_5$$

$$6 \text{ noktası : } cO.w_6+c1.w_5+c1.w_7+c2.w_3+c3.w_2+c5.w_1+c6.w_6+c7.w_5+c8.w_7+c9.w_4$$

$$= g_6 / D - k_6 . w_6$$

$$7 \text{ noktası : } cO.w_7+c1.w_6+c3.w_3+c4.w_7+c5.w_2+c6.w_7+c7.w_3+c7.w_6+c9.w_5$$

$$= g_7 / D - k_7 . w_7 \quad (3.42)$$

Fiftif noktalarının değerleri, (3.42) denklemlerinde yerine koyulup düzenlenirse :

$$[A] . [W] = [P]$$

şeklinde matris denklemi elde edilir. Buradan

$$[W] = [A]^{-1} . [P] \quad (3.43)$$

matris denkleminde çökme değerleri bulunmuş olur.

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{bmatrix} ; \quad [P] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{bmatrix}$$

Çökme vektörü

Yük vektörü

A katsayılar matrisi (3.44)de verilmiştir.

1	2	3	4	5	6	7
$c_0+c_3.\eta_1.\gamma_1^v+c_6.\eta_2.\gamma_1^u+k_1$	$c_1+c_7.\eta_2.\gamma_2^u+c_6.\eta_2.\rho_1^u$	$c_7.\eta_2.\rho_2^u+c_9$	$c_2+c_9.\eta_1.\gamma_4^v+c_5.\eta_1.\rho_1^v$	c_3	c_5	
$c_1+c_8.\eta_2.\gamma_1^u$	$c_0+c_6.\eta_2.\gamma_2^u+c_8.\eta_2.\rho_1^u+c_2$	$c_1+c_6.\eta_2.\rho_2^u+c_7.\eta_2.\gamma_3^u$	c_4	c_2	c_3	c_5
c_9	$c_1+c_8.\eta_2.\gamma_2^u$	$c_0+c_4.\eta_3.\gamma_3^u+c_6.\eta_2.\gamma_3^u+c_8.\eta_2.\rho_2^u+c_9.\eta_3.\rho_7^u+k_3$		c_4	c_2	$c_3+c_9.\eta_3.\gamma_7^u$
$c_2+c_8.\eta_1.\gamma_1^v$	c_4		$c_0+c_5.\eta_1.\gamma_4^v+c_6.\eta_4.\gamma_4^u+c_8.\eta_1.\rho_1^v+c_8.\eta_4.\rho_5^u+k_4$	$c_1+c_8.\eta_4.\gamma_5^u$	c_9	
c_3	c_2		$c_1+c_6.\eta_4.\rho_5^u+c_7.\eta_4.\gamma_4^u$	$c_0+c_6.\eta_4.\gamma_5^u+c_8.\eta_4.\rho_6^u+k_5$	$c_1+c_8.\eta_4.\gamma_6^u$	c_9
c_5	c_3		$c_7.\eta_4.\rho_5^u+c_9$	$c_1+c_6.\eta_4.\rho_6^u+c_7.\eta_4.\gamma_5^u$	$c_0+c_6.\eta_4.\gamma_6^u+c_8.\eta_4.\rho_7^u+k_6$	$c_1+c_8.\eta_4.\gamma_7^u$
	c_5	c_2		$c_7.\eta_4.\rho_6^u+c_9$	$c_1+c_6.\eta_4.\rho_7^u+c_7.\eta_4.\gamma_6^u$	$c_0+c_6.\eta_4.\gamma_7^u+c_6.\eta_4.\gamma_7^u+k_7$

$[A]=$

(3.44)

(Katsayılar matrisi)

Özel hâller :

$$\alpha = 60^\circ \quad \beta = 120^\circ \text{ ve } h_u = h_v = h_t = h$$

U eksenini yatay, v eksenini yatayla 60° , t eksenini ise 120° lik açı yapsın. Yani $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ ve $h_u = h_v = h_t = h$ (3.19) ifadelerinde eşit olan c sabitleri ile gösterirsek :

$$C_0 = \frac{168}{9h^4}$$

$$C_6 = \frac{8}{9h^4}$$

$$C_1 = \frac{40}{9h^4}$$

$$C_7 = \frac{4}{9h^4}$$

$$C_2 = -\frac{40}{9h^4}$$

$$C_8 = \frac{4}{9h^4}$$

$$C_3 = -\frac{40}{9h^4}$$

$$C_9 = \frac{4}{9h^4}$$

$$C_4 = \frac{8}{9h^4}$$

$$C_5 = \frac{8}{9h^4}$$

Fiktif noktalarındaki çökme fonksiyonlarını iç noktalarda cinsinden ifade edelim.

AB kenarına ait :

$$w_1' = \eta_1 \cdot w_1$$

$$w_4' = \eta_1 \cdot w_4$$

BC kenarına ait :

$$w_1' = \eta_2 \cdot w_1$$

$$w_2' = \eta_2 \cdot w_2$$

$$w_3' = \eta_2 \cdot w_3$$

CD kenarına ait :

$$w_3' = \eta_3 \cdot w_3$$

$$w_7' = \eta_3 \cdot w_7$$

AD kenarına ait :

$$w' = \eta_4 \cdot w_5$$

$$w' = \eta_4 \cdot w_6$$

$$w' = \eta_4 \cdot w_7$$

Şimdi plağın 1,, 7 ağ noktalarına şekil (3.7) şemayı uygulayalım.

$$\begin{aligned} 1 \text{ noktası : } \frac{4}{9} h^4 [42.w_1 + (-10) \cdot w_2 + (-10) \cdot w_4 + (-10) \cdot w_5 + 2 \cdot w_6 + 2 \cdot w'_{1(AB)} + 2 \cdot w'_{1(BC)} \\ + (1) \cdot w'_{2(BC)} + (1) \cdot w'_{4(AB)} + 1 \cdot w_3] = g_1 / D - k_1 w_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ noktası : } \frac{4}{9} h^4 [42.w_2 + (-10) \cdot w_1 + (-10) \cdot w_3 + (-10) \cdot w_5 + (-10) \cdot w_6 + (2) \cdot w_4 + (2) \cdot w_7 \\ + (2) \cdot w'_{2(BC)} + (1) \cdot w'_{3(BC)} + (1) \cdot w'_{8(BC)}] = g_2 / D - k_2 w_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ noktası : } \frac{4}{9} h^4 [42.w_3 + (-10) \cdot w_2 + (-10) \cdot w_6 + (-10) \cdot w_7 + (2) \cdot w'_{3(CD)} + (2) \cdot w_5 + 2 \cdot w'_{3(BC)} \\ + (1) \cdot w'_{2(BC)} + (1) \cdot w_1 + (1) \cdot w'_{7(CD)}] = g_3 / D - k_3 w_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \text{ noktası : } \frac{4}{9} h^4 [42.w_4 + (-10) \cdot w_5 + (-10) \cdot w_1 + (2) \cdot w_2 + (2) \cdot w'_{4(AB)} + (2) \cdot w'_{4(AD)} \\ + (1) \cdot w'_{1(AB)} + (1) \cdot w'_{5(AD)} + 1 \cdot w_6] = g_4 / D - k_4 w_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \text{ noktası : } \frac{4}{9} h^4 [42.w_5 + (-10) \cdot w_4 + (-10) \cdot w_6 + (-10) \cdot w_2 + (-10) \cdot w_1 + 2 \cdot w'_{5(AD)} \\ + (1) \cdot w'_{4(AD)} + (1) \cdot w'_{6(AD)} + 1 \cdot w_7] = g_5 / D - k_5 w_5 \end{aligned}$$

$$6 \text{ noktası : } \frac{4}{9} h^4 [42.w_6+(-10) . w_5+(-10) . w_7+ (-10) . w_3+(-10) . w_2 + (2) w_1$$

$$+ (2).w'_{6(AD)} + (1) . w'_{5(AD)} + (1) w'_{7(AD)}+(1).w_4] = g_6 / D - k_6 w_6$$

$$7 \text{ noktası : } \frac{4}{9} h^4 [42.w_7+(-10) . w_6+(-10) . w_3+ (2) w'_{7(CD)}+(2) . w_2 + 2 . w'_{7(AD)}$$

$$+ (1).w'_{3(CD)} + (1) . w'_{6(AD)} + (1) . w_5] = g_7 / D - k_7 w_7$$

Fiktif noktaların değerleri (3.45) denklemlerinde yerine koyulup düzenlenirse

$$[A]. [W]=[P]$$

şeklinde matris denklemi elde edilir. Buradan

$$[W]=[A]^{-1}.[P]$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_7 \end{bmatrix} ; \quad P = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_7 \end{bmatrix}$$

Çökme vektörü

Yük vektörü

A katsayılar matrisi (3.46) da verilmiştir.

1	2	3	4	5	6	7
$42+2\eta_1+2\eta_2+k_1$	$-10+\eta_2$	1	$-10+\eta_1$	-10	2	
$-10+\eta_2$	$42+2.\eta_2+k_2$	$-10+\eta_2$	2	-10	-10	2
1	$-10+\eta_2$	$42+2.\eta_3+2.\eta_2+k_3$		2	-10	$-10+\eta_3$
$-10+\eta_1$	2		$42+2.\eta_1+2.\eta_4+k_4$	$-10+\eta_4$	1	
-10	-10		$-10+\eta_4$	$42+2.\eta_4+k_5$	$-10+\eta_4$	1
2	-10	-10	1	$-10+\eta_4$	$42+2.\eta_4+k_6$	$-10+\eta_4$
	2	$-10+\eta_3$		1	$-10+\eta_4$	$42+2.\eta_3+2.\eta_4+k_7$

$[A]=4/9h^4$

Katsayılar matrisi [A]

(3.46)

3.4.2.1. Bilgisayar Programı

Herhangi biçimdeki trapez plakların, her ağ noktasındaki $SO, S1, \dots, S18$ değerlerini (3.17) ifadelerinden faydalananarak hesaplayan bilgisayar programı verilmiştir. Bu değerleri kullanarak ağ noktalarındaki çökme değerlerini hesaplayan bilgisayar programı verilmiştir.

Kullanılan notasyonlar :

$HU : U$ eksenleri boyunca alınacak aralıkları gösteren vektör

$HV : V$ eksenleri boyunca alınacak aralıkları gösteren vektör

$HT : t$ eksenleri boyunca alınacak aralıkları gösteren vektör

$AA : v$ eksenlerinin, u eksenleriyle yaptığı açıları gösteren vektör.

$AB : t$ eksenlerinin, u eksenleriyle yaptığı açıları gösteren vektör.

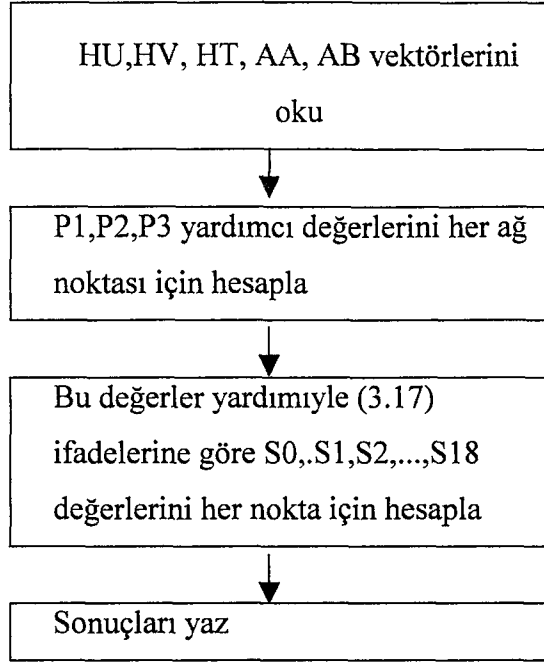
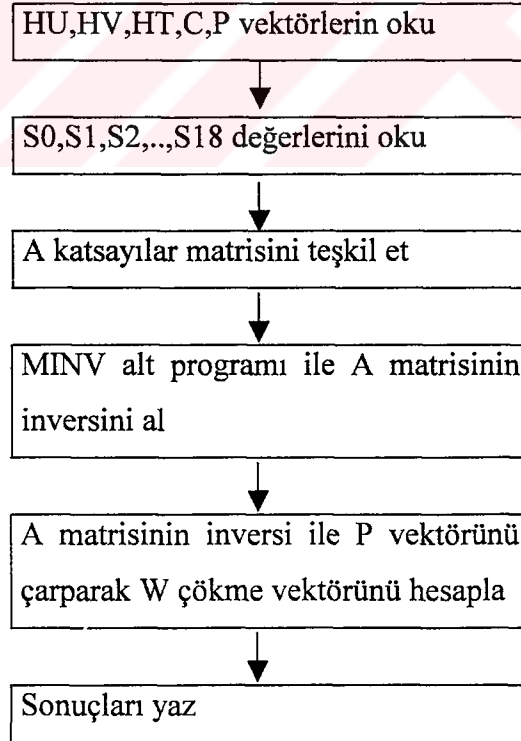
$SO, S1, \dots, S18 : (II.17)$ ifadelerine göre her ağ noktası için hesaplanacak sabit değerler.

P : Yük vektörü

A : Katsayılar matrisi

W : Çökme vektörü

C : Zemin katsayılarını gösteren vektör.

PROGRAM C**PROGRAM D**

Örnek

Trapez plaklara örnek olarak, Şekil 3.19’da görülen plak Program C ve Program D’den faydalanılarak çözülmüştür. Plâğın ağ noktalarına ait S0,S1,S2,...,S18 sabitleri Program C ile hesaplanmış ve bu sabitlerden faydalanılarak Program D ile bu noktalara w çökmeleri elde edilmiştir.

Programa verilecek doneler şunlardır :

u eksenleri boyunca alınacak aralık uzunlukları $HU = 1,0$ m.

v eksenleri boyunca alınacak aralık uzunlukları $HV = 1,0$ m.

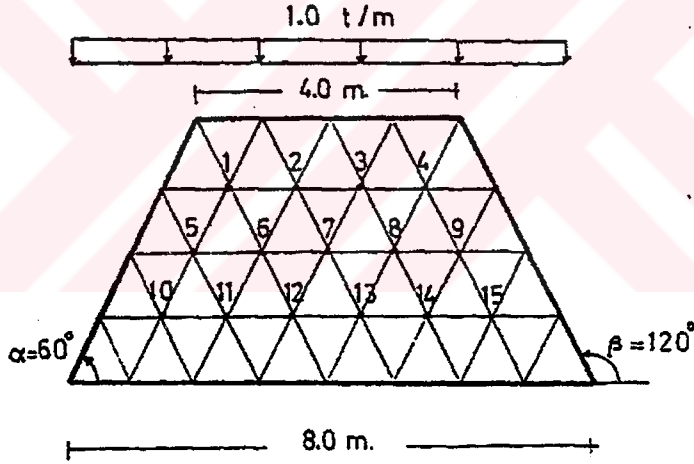
t eksenleri boyunca alınacak aralık uzunlukları $HT = 1,0$ m.

v eksenlerinin u eksenleriyle yaptığı açı $AA = 60^\circ$

t eksenlerinin u eksenleriyle yaptığı açı $AB = 120^\circ$

Zemin katsayısı / D değeri $= 0.80 \frac{t/m^2}{t.m^2}$

Yük vektörü $P = 1$ t/m $D = 1$ $t.m^2$



Şekil 3.19.Örnek(Elastik zemine oturan plâğın sonlu farklarla çözümü)

Sonuçlar :

SS0	SS1	SS2	SS3	SS4	SS5	SS6	SS7	SS8
18.6666	0.4444	-4.4444	-4.4444	0.4444	0.4444	-4.4444	-4.4444	0.4444

SS9	SS10	SS11	SS12	SS13	SS14	SS15	SS16	SS17	SS18
0.4444	-4.4444	-4.4444	0.4444	0.8888	0.8888	0.8888	0.8888	0.8888	0.8888

W VEKTÖRÜ

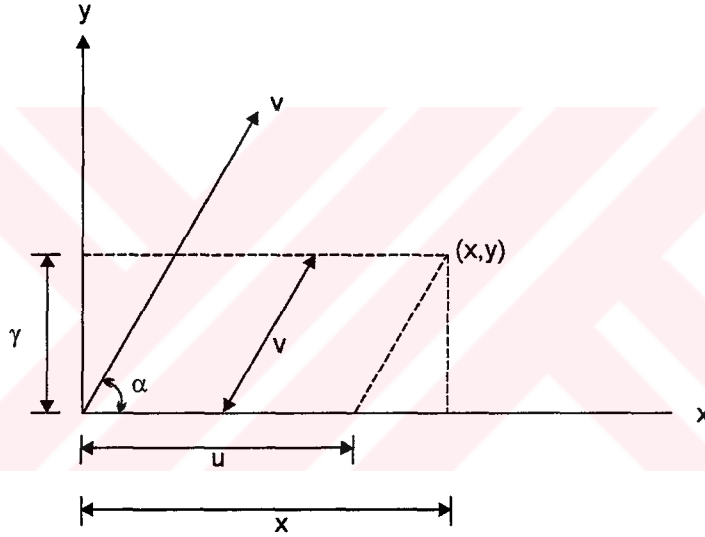
0.39815	0.52961	0.52961	0.39815	0.42507
0.68154	0.75425	0.66154	0.42507	0.25073
0.44578	0.53944	0.53944	0.44578	0.25072

4. ELASTİK ZEMİNE OTURAN PARALEL KENAR PLAKLARIN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ

4.1. Giriş

Bölüm 3'de, üçgen ve trapez plakların çözümü yapılırken eğik koordinat takımı kullanılmıştır. Bu bölümde, paralel kenar plaklarda kenarlara paralel olarak seçilecek verev koordinat takımı ile çalışmak uygun olacaktır. Önce verev koordinat takımına göre sonlu fark ifadeleri çıkarılacak, sonra da elastik zemine oturan paralel kenar plakların çözümü ele alınacaktır. Sonlu fark ifadelerinin çıkarılmasında literatürde mevcut eşit açılı koordinat takımı alınmıştır.

4.2. Verev koordinatlarda laplacian operatörü



Şekil 4.1.Verev koordinat

Paralel kenar plakların incelenmesinde verev koordinatları takımı kullanılmıştır. Bunun için karteziyen koordinatlardan verev'e geçiş gereklidir. Şekil (4.1)'de görülen (x, y) noktasının verev koordinatları :

$$x = u + v \cos \alpha; y = v \cdot \sin \alpha$$

veya

$$u = x - \frac{y}{\tan \alpha} ; v = \frac{y}{\sin \alpha} \quad (4.1)$$

(4.1) ifadelerinin u, v ye göre kısmi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\tan \alpha}, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (4.2)$$

olarak bulunur. Şimdi bu ifadelerden faydalananarak herhangi bir $w(x,y)$ fonksiyonunun u,v değerlerine göre kısmi türevlerini bulalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{\tan \alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \end{aligned} \quad (4.3)$$

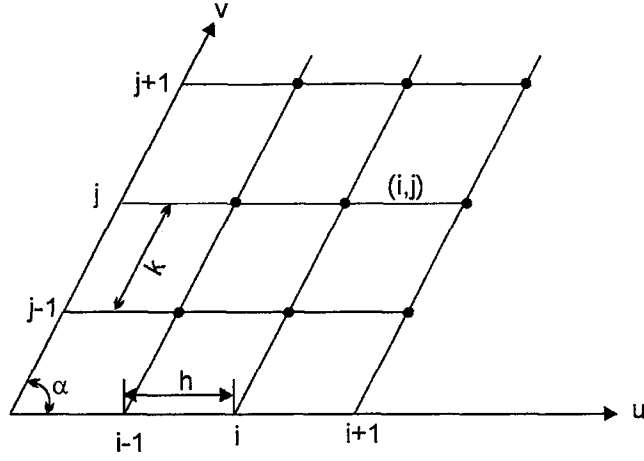
(4.3) ifadelerinin tekrar kısmi türevlerini alırsak :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{1}{\tan \alpha} \left(-\frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \right) + \frac{1}{\sin \alpha} \left(-\frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Buna göre,

$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ifadesinin verev koordinat takımındaki karşılığı, (4.4) denklemlerinin toplanarak bulunur.

$$\nabla^2 w = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) \quad (4.5)$$



Şekil4.2.Koordinat sisteminde u ve v eksenleri

Şekil4.2'de görüldüğü gibi, u ve v eksenlerine paralel doğrular çizerek bir ağ teşkil edelim. Koordinat sisteminde u yönündeki ve v yönündeki adım uzunlukları h ve k ile gösterilip, k ile h arasındaki ilişki, $r = k/h$. Önce v'yi sabit kabul edip, w fonksiyonunun u'a göre kısmi türevleri bulunacaktır. Sonra da u'yu sabit kabul edip aynı fonksiyonun v'ye göre kısmi türevleri bulunacaktır. Buna göre, herhangi bir (i,j) noktasındaki kısmi türevler şu şekilde bulunabilir:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{h^2} (w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{1}{k^2} (w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4hk} (w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} - w_{i+1,j+1}) \quad (4.6)$$

(4.6) ifadelerini, (4.5) te yerine koyarsak :

$$\begin{aligned} (\nabla^2 w)_{i,j} = & \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{1}{h^2} (w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}) - \frac{\cos \alpha}{2hk} (w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{k^2} (w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}) \right] \end{aligned}$$

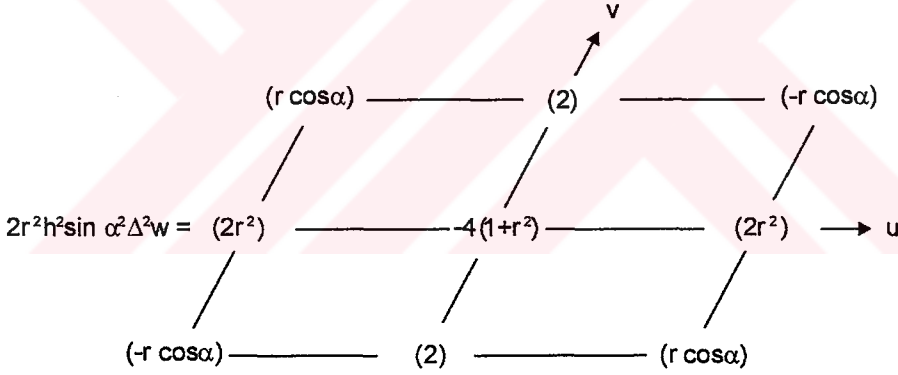
olarak bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek :

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 w)_{ij} = & \left(-\frac{2}{h^2 \sin^2 \alpha} - \frac{2}{r^2 h^2 \sin^2 \alpha} \right) w_{ij} + \left(\frac{1}{h^2 \sin^2 \alpha} \right) w_{i-1,j} + \left(\frac{1}{h^2 \sin^2 \alpha} \right) w_{i+1,j} \\
& + \left(\frac{1}{r^2 h^2 \sin^2 \alpha} \right) w_{i,j-1} + \left(\frac{1}{r^2 h^2 \sin^2 \alpha} \right) w_{i,j+1} + \left(-\frac{\cos \alpha}{2rh^2 \sin^2 \alpha} \right) w_{i-1,j-1} \\
& + \left(\frac{\cos \alpha}{2rh^2 \sin^2 \alpha} \right) w_{i-1,j+1} + \left(\frac{\cos \alpha}{2rh^2 \sin^2 \alpha} \right) w_{i+1,j-1} + \left(-\frac{\cos \alpha}{2rh^2 \sin^2 \alpha} \right) w_{i+1,j+1}
\end{aligned} \quad (4.7)$$

(4.7) denklemini şu şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
2r^2 h^2 \sin^2 \alpha (\nabla^2 w)_{ij} = & -4(1+r^2) w_{ij} + (2r^2) w_{i-1,j} + (2r^2) w_{i+1,j} + (2) w_{i,j-1} \\
& + (2) w_{i,j+1} + (-r \cos \alpha) w_{i-1,j-1} + (r \cos \alpha) w_{i-1,j+1} \\
& + (r \cos \alpha) w_{i+1,j-1} + (-r \cos \alpha) w_{i+1,j+1}
\end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.8) denklemi şematik olarak, şekil4.3'te görüldüğü gibi gösterilebilir.



Şekil4.3. $\nabla^2 w$ gösteren şema

(4.7) ifadesinde :

$$(FO)_{ij} = \left(\frac{2}{h^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2}{r^2 h^2 \sin^2 \alpha} \right) = \frac{-2(r^2 + 1)}{r^2 h^2 \sin^2 \alpha}$$

$$(F1)_{i-1,j} = (F2)_{i+1,j} = \frac{1}{h^2 \sin^2 \alpha}$$

$$(F3)_{i,j-1} = (F4)_{i,j+1} = \frac{1}{r^2 h^2 \sin^2 \alpha}$$

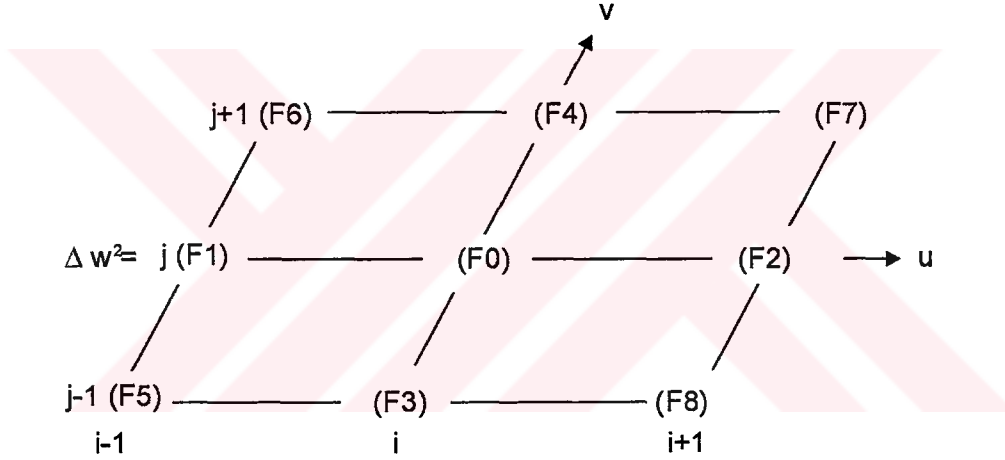
$$(F5)_{i-1,j-1} = (F7)_{i+1,j+1} = \frac{-\cos \alpha}{2rh^2 \sin^2 \alpha}$$

$$(F6)_{i-1,j+1} = (F8)_{i+1,j-1} = \frac{\cos \alpha}{2rh^2 \sin^2 \alpha} \quad (4.9)$$

ile gösterilirse, (4.7) denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \nabla^2 W_{ij} = & (F0) W_{ij} + F1 W_{i-1,j} + F2 \cdot W_{i+1,j} + F3 W_{i,j-1} \\ & + F4 \cdot W_{i,j+1} + F5 W_{i-1,j-1} + F6 W_{i-1,j+1} + F7 \cdot W_{i+1,j+1} \\ & + F8 \cdot W_{i+1,j-1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4.10) denklemi şematik olarak şekil4.4'te görüldüğü gibi gösterilebilir.



Şekil4.4. $\nabla^2 w$ gösteren şema

Şekil4.4'teki şemadan faydalanarak $(\nabla^4 W)_{ij}$ değerini bulalım.

$$\begin{aligned} (\nabla^4 w)_{ij} = & F0 \cdot [F0 \cdot w_{ij} + F1 \cdot w_{i-1,j} + F2 \cdot w_{i+1,j} + F3 \cdot w_{i,j-1} + F4 \cdot w_{i,j+1} + F5 \cdot w_{i-1,j-1} + F6 \cdot w_{i-1,j+1} \\ & + F7 \cdot w_{i+1,j+1} + F8 \cdot w_{i+1,j-1}] + F1 \cdot [F0 \cdot w_{i-1,j} + F1 \cdot w_{i-2,j} + F2 \cdot w_{i,j} + F3 \cdot w_{i-1,j-1} + F4 \cdot w_{i-1,j+1} \\ & + F5 \cdot w_{i-2,j-1} + F6 \cdot w_{i-2,j+1} + F7 \cdot w_{i,j+1} + F8 \cdot w_{i,j-1}] + F2 \cdot [F0 \cdot w_{i+1,j} \\ & + F1 \cdot w_{i,j} + F2 \cdot w_{i+2,j} + F3 \cdot w_{i+1,j-1} + F4 \cdot w_{i+1,j+1} + F5 \cdot w_{i,j-1} + F6 \cdot w_{i,j+1} \\ & + F7 \cdot w_{i+2,j+1} + F8 \cdot w_{i+2,j-1}] + F3 \cdot [F0 \cdot w_{i,j-1} + F1 \cdot w_{i-1,j-1} + F2 \cdot w_{i+1,j-1} \\ & + F3 \cdot w_{i,j-2} + F4 \cdot w_{i,j} + F5 \cdot w_{i-1,j-2} + F6 \cdot w_{i-1,j} + F7 \cdot w_{i+1,j} + F8 \cdot w_{i+1,j-2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F4 \cdot [FO.w_{i,j+1} + F1 \cdot w_{i-1,j+1} + F2 \cdot w_{i+1,j+1} + F3 \cdot w_{i,j} + F4.w_{i,j+2} + F5.w_{i-1,j} \\
& + F6.w_{i-1,j+2} + F7.w_{i+1,j+2} + F8.w_{i+1,j}] + F5.[FO.w_{i-1,j-1} + F1.w_{i-2,j-1} + F2.w_{i,j-1} \\
& + F3.w_{i-1,j-2} + F4.w_{i-1,j} + F5.w_{i-2,j-2} + F6.w_{i-2,j} + F7.w_{i,j} + F8.w_{i,j-2}] + \\
& + F6 \cdot [FO.w_{i-1,j+1} + F1.w_{i-2,j+1} + F2.w_{i,j+1} + F3.w_{i-1,j} + F4.w_{i-1,j+2} + F5.w_{i-2,j} \\
& + F6.w_{i-2,j+2} + F7.w_{i,j+2} + F8.w_{i,j}] + F7.[FO.w_{i+1,j+1} + F1.w_{i,j+1} + F2.w_{i+2,j+1} \\
& + F3.w_{i+1,j} + F4.w_{i+1,j+2} + F5.w_{i,j} + F6.w_{i,j+2} + F7.w_{i+2,j+2} + F8.w_{i+2,j}] + \\
& + F8.[FO.w_{i+1,j-1} + F1.w_{i,j-1} + F2.w_{i+2,j-1} + F3.w_{i+1,j-2} + F4.w_{i+1,j} + F5.w_{i,j-2} \\
& + F6.w_{i,j} + F7.w_{i+2,j} + F8.w_{i+2,j-2}]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek:

$$\begin{aligned}
(\nabla^4 w)_{i,j} = & [(FO)^2 + F1.F2 + F2.F1 + F3.F4 + F4.F3 + F5.F7 + F6.F8 + F7.F5 + \\
& + F8.F6].w_{i,j} + [(F1)^2 + F5.F6 + F6.F5].w_{i-2,j} + [FO.F1 + F1.FO + \\
& + F3.F6 + F4.F5 + F5.F4 + F6.F3].w_{i-1,j} + [FO.F2 + F2.FO + F3.F7 + \\
& + F4.F8 + F7.F3 + F8.F4].w_{i+1,j} + [(F2)^2 + F7.F8 + F8.F7].w_{i+2,j} + \\
& + [(F3)^2 + F5.F8 + F8.F5].w_{i,j-2} + [FO.F3 + F1.F8 + F2.F5 + F3.FO + F5.F2 \\
& + F8.F1].w_{i,j-1} + [FO.F4 + F1.F7 + F2.F6 + F4.FO + F6.F2 + F7.F1].w_{i,j+1} + \\
& + [(F4)^2 + F6.F7 + F7.F6].w_{i,j+2} + [FO.F8 + F2.F3 + F3.F2 + F8.FO]. \\
& \cdot w_{i+1,j-1} + [FO.F7 + F2.F4 + F4.F2 + F7.FO].w_{i+1,j+1} + [FO.F5 + F1.F3 + \\
& + F3.F1 + F5.FO].w_{i-1,j-1} + [FO.F6 + F1.F4 + F4.F1 + F6.FO].w_{i-1,j+1} + \\
& + [F2.F8 + F8.F2].w_{i+2,j-1} + [F2.F7 + F7.F2].w_{i+2,j+1} + F1.F5 + \\
& + F5.F1].w_{i-2,j-1} + [F1.F6 + F6.F1].w_{i-2,j+1} + [F3.F8 + F8.F3].w_{i+1,j-2} \\
& + [F4.F7 + F7.F4].w_{i+1,j+2} + [F3.F5 + F5.F3].w_{i-1,j-2} + [F4.F6 + F6.F4].w_{i-1,j+2} \\
& + [(F8)^2].w_{i+2,j-2} + [(F7)^2].w_{i+2,j+2} + [(F5)^2].w_{i-2,j-2} + [(F6)^2].w_{i-2,j+2} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

(4.12) denkleminde :

$$SO=(FO)^2+2(F1.F2+F3F4 + F5.F7 + F6.F8)=\frac{4(1+r^2)^2}{r^4h^4\sin^4\alpha}+\frac{2}{h^4\sin^4\alpha}+\frac{2}{r^4h^4\sin^4\alpha}$$

$$+\frac{2\cos^2\alpha}{4r^2h^4\sin^4\alpha}+\frac{2\cos^2\alpha}{4r^2h^4\sin^4\alpha}=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(16(1+r^2)^2+8r^4+8+4r^2\cos^2\alpha)$$

$$S1=(F1)^2+2(F5.F6)=\frac{1}{h^4.\sin^4\alpha}-\frac{2\cos^2\alpha}{4r^2h^4\sin^4\alpha}=\frac{1}{4r^2h^4\sin^4\alpha}(4r^2-2\cos^2\alpha)$$

$$S2=2(FO.F1+F3F6+F4.F5)=\frac{-4(1+r^2)}{r^2\sin^4\alpha}+\frac{2\cos\alpha}{2r^3h^4\sin^4\alpha}+\frac{-2\cos\alpha}{2r^3h^4\sin^4\alpha}$$

$$=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}.(-16r^2(1+r^2))$$

$$S3=2(FO.F2+F3F7+F4.F8)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}.(-16r^2(1+r^2))$$

$$S4=(F2)^2+2(F7.F8)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(4r^4-2\cos^2\alpha)$$

$$S5=(F3)^2+2(F5.F8)=\frac{1}{r^4h^4\sin^4\alpha}+\frac{-2\cos^2\alpha}{4r^2h^4\sin^4\alpha}=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(4-2r^2\cos^2\alpha)$$

$$S6=2(FOF3+F1.F8+F2F5)=\frac{-4(r^2+1)}{r^4h^4\sin^4\alpha}+\frac{2\cos\alpha}{2rh^4\sin^4\alpha}-\frac{2\cos\alpha}{2rh^4\sin^4\alpha}$$

$$=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}.(-16(r^2+1))$$

$$S7=2(FOF4+F1F7+F2F6)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(-16(r^2+1))$$

$$S8=(F4)^2+2(F6.F7)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(4-2r^2\cos^2\alpha)$$

$$S9=2(FOF8+F2.F3)=\frac{-4\cos\alpha(r^2+1)}{2r^3h^4\sin^4\alpha}+\frac{2}{r^2h^4\sin^4\alpha}=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(-8r\cos\alpha(r^2+1)+8r^2)$$

$$S10=2(FOF7+F2.F4)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(8r\cos\alpha(r^2+1)+8r^2)$$

$$S11=2(FOF5+F1.F3)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(8r\cos\alpha(r^2+1)+8r^2)$$

$$S12=2(FOF6+F1.F4)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(-8r\cos\alpha(r^2+1)+8r^2)$$

$$S13=2(F2.F8)=\frac{2\cos\alpha}{2r^3h^4\sin^4\alpha}=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(4r^3\cos\alpha)$$

$$S14=2(F2.F7)=\frac{-2\cos\alpha}{2r^3h^4\sin^4\alpha}=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(-4r^3\cos\alpha)$$

$$S15=2(F1.F5)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(-4r^3\cos\alpha)$$

$$S16=2(F1.F6)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(4r^3\cos\alpha)$$

$$S17=2(F3.F8)=\frac{2\cos\alpha}{2r^3h^4\sin^4\alpha}=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(-4r^3\cos\alpha)$$

$$S18=2(F4.F7)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(-4r\cos\alpha)$$

$$S19=2(F3.F5)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(-4r\cos\alpha)$$

$$S20=2(F4.F6)=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(4r\cos\alpha)$$

$$S21=(F8)^2=\frac{\cos^2\alpha}{4r^4h^4\sin^4\alpha}=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(r^2\cos^2\alpha)$$

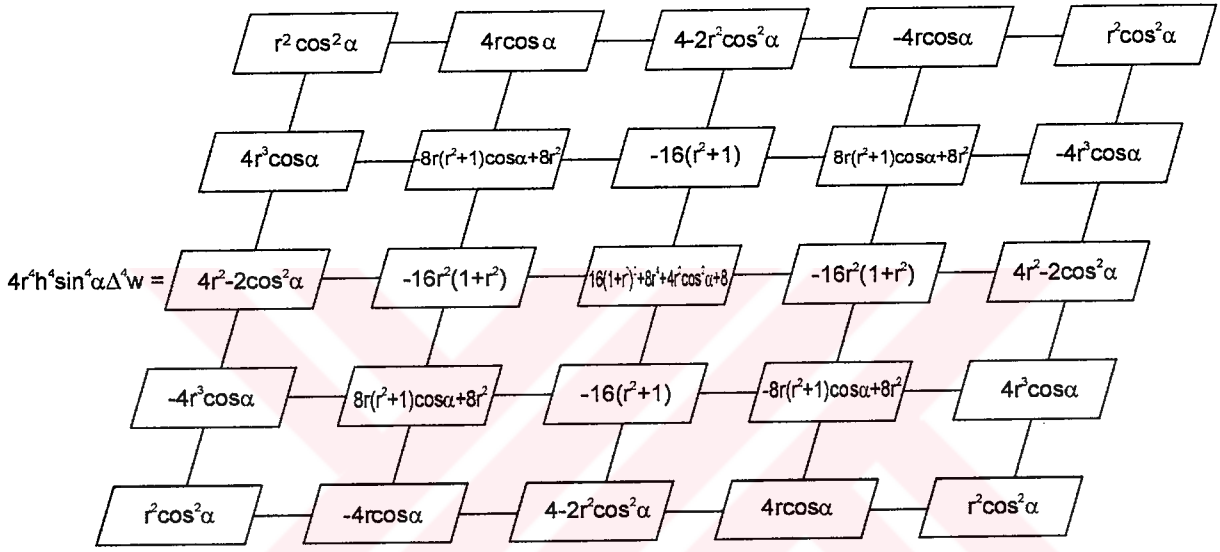
$$S22=(F7)^2=\frac{1}{4r^4h^4\sin^4\alpha}(r^2\cos^2\alpha)$$

$$S_{23} = (F_5)^2 = \frac{1}{4r^4 h^4 \sin^4 \alpha} (r^2 \cos^2 \alpha)$$

$$S_{24} = (F_6)^2 = \frac{1}{4r^4 h^4 \sin^4 \alpha} (r^2 \cos^2 \alpha) \quad (4.13)$$

olarak elde edilir.

(4.13)'teki değerler $(4r^4 h^4 \sin^4 \alpha)$ ile çarpılarak yerine koyulursa, şekil4.5'te görülen şema elde edilir.



Şekil4.5. $\nabla^4 w$ gösteren şema

(4.13) ifadelerinde eşit olan S değerlerini C sabitleri ile gösterirsek :

$$C_1 = S_1 = S_4$$

$$C_2 = S_2 = S_3$$

$$C_3 = S_5 = S_8$$

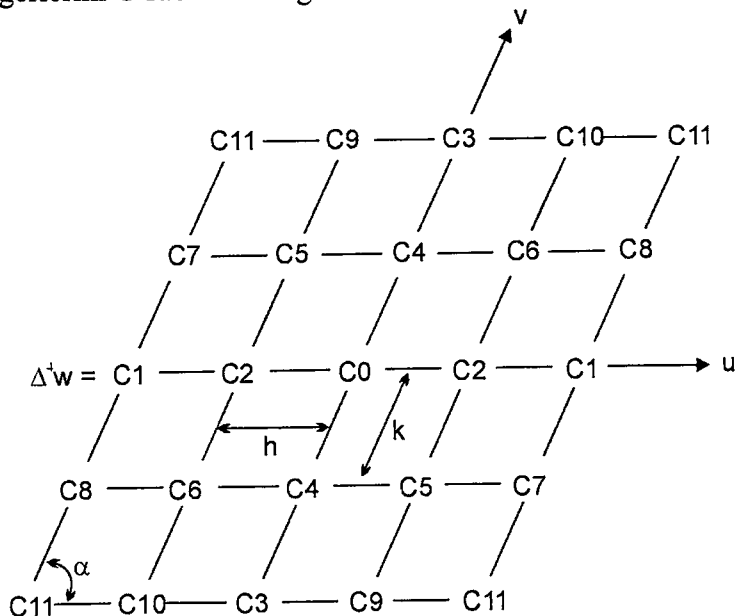
$$C_4 = S_6 = S_7$$

$$C_5 = S_9 = S_{12}$$

$$C_6 = S_{10} = S_{11}$$

$$C_7 = S_{13} = S_{16}$$

$$C_8 = S_{14} = S_{15}$$



Şekil 4.6

$$C9 = S17 = S20$$

$$C10 = S18 = S19$$

$$C11 = S21 = S22 = S23 = S24$$

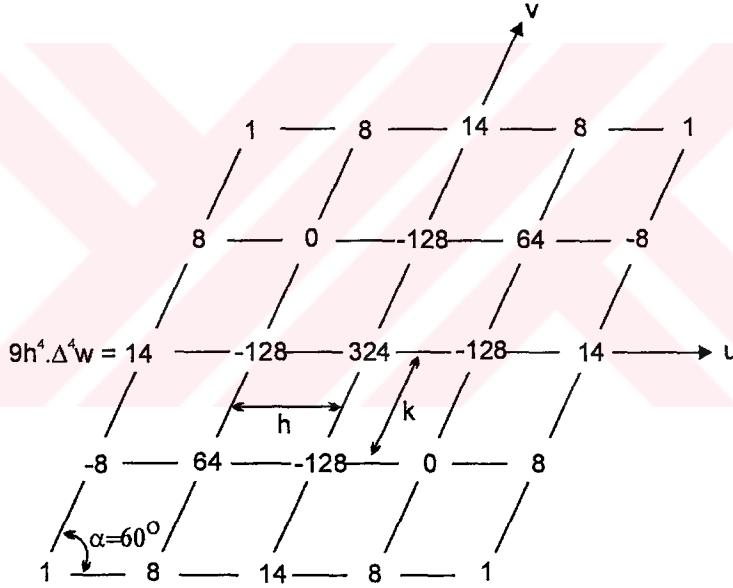
$$C0 = S0$$

ile gösterirsek, $h = \text{sabit}$, $k = \text{sabit}$ olması halinde şekil 4.6'daki şema elde edilir.

Özel Hâl

U eksenini yatay, v eksenini yatayla 60° 'lik açı yapsın. Bu durumda $h = k$ olacağından $r=1$ olur.

Şekil 4.5'te $r=1$; $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ve $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alınırsa, şekil.4.7'de görülen şema elde edilir.



Şekil 4.7.Özel hal

4.3. Kesit tesirlerinin Verv Koordinat Takımına İfadesi

Kesit tesirlerinin kartezyen koordinat takımına ait (2 .9.2) ifadelerindeki kısmi türevler yerine, (4.4)'teki değerler koyulursa kesit tesirleri verv koordinat takımına göre ifade edilmiş olur.

$$M_x = -D. \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D. \left[\left(1 + \nu. \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{2\nu \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\nu}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = -D \cdot \left[\left(\nu + \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right] \\
M_{xy} &= -D \cdot (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D \cdot (1-\nu) \cdot \left[\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \right] \\
Q_x &= -D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial u^3} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^3 w}{\partial u^2 \partial v} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial u \partial v^2} \right] \\
Q_y &= -D \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial u \partial u^2} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^3 w}{\partial u \partial v^2} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^3 w}{\partial v^3} \right]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.14) denkleminde:

$$\begin{aligned}
K1 &= \frac{1}{\tan^2 \alpha} & K2 &= -\frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\
K3 &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} & K4 &= \frac{1}{\sin \alpha}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

ile gösterilirse, (4.14) denklemleri şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
M_x &= -D \left[(1 + \nu \cdot K1) \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \nu \cdot K2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \nu \cdot K3 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right] \\
M_y &= -D \left[(\nu + K1) \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + K2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + K3 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right] \\
M_{xy} &= -D \cdot (1 - \nu) \cdot \left[K4 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \right] \\
Q_x &= -D \cdot \left[(1 + K1) \frac{\partial^3 w}{\partial u^3} + K2 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial u^2 \partial v} + K3 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial u \partial v^2} \right] \\
Q_y &= -D \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \left[(1 + K1) \frac{\partial^3 w}{\partial u^2 \partial v} + K2 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial u \partial v^2} + K3 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial v^3} \right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

(4.6) değerleri (4.16) denklemlerinin birincisinde yerine koyulursa:

$$M_x = -D \cdot \left[(1 + v.K1) \cdot \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2} + v.K2 \cdot \frac{w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}}{4hk} + v.K3 \cdot \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{k^2} \right] \quad (4.17)$$

bulunur. Burada :

$$-\frac{D.(1 + v.K1)}{h^2} = X_1$$

$$-\frac{D.v.K3}{k^2} = X_2$$

$$-\frac{D.v.K2}{4hk} = X_3$$

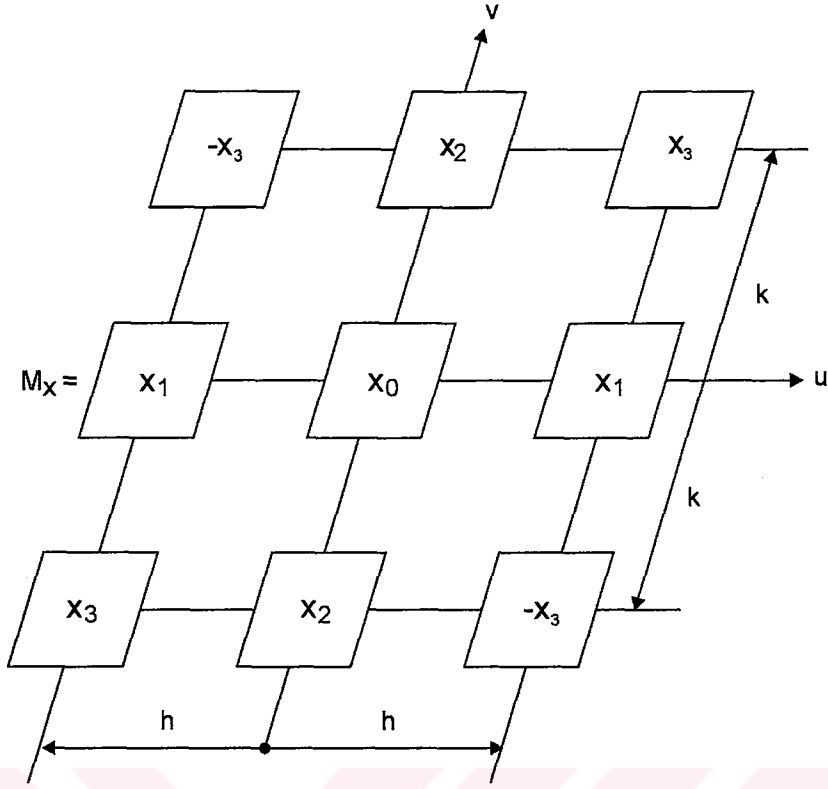
$$2D \cdot \left[\frac{1 + v.K1}{h^2} + \frac{v.K3}{k^2} \right] = X_0 \quad (4.18)$$

ile gösterirsek ve ayrıca u,v eksenlerinin kesim noktası i,j noktalarının başlangıcı olarak alınırsa, (4.17) denklemi :

$$M_x = X_0 \cdot w_{i,j} + X_1 \cdot (w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) + X_2 \cdot (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + X_3 \cdot (w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j+1}) - X_3 (w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1}) \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.19) denklemi şematik olarak, şekil (4.8)'deki gibi gösterilebilir.

Şekil 4.8. M_x moment diyagramı

Benzer şekilde (4.6) değerleri (4.16) denklemlerinin ikincisinde yerine koyulursak:

$$M_y = -D \cdot \left[(v + K1) \cdot \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2} + (K2) \cdot \frac{w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}}{4hk} \right. \\ \left. + (K3) \cdot \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{k^2} \right] \quad (4.20)$$

bulunur. Burada :

$$-\frac{D \cdot (v + K1)}{h^2} = Y_1$$

$$-\frac{D \cdot (K3)}{k^2} = Y_2$$

$$-\frac{D \cdot K2}{4hk} = Y_3$$

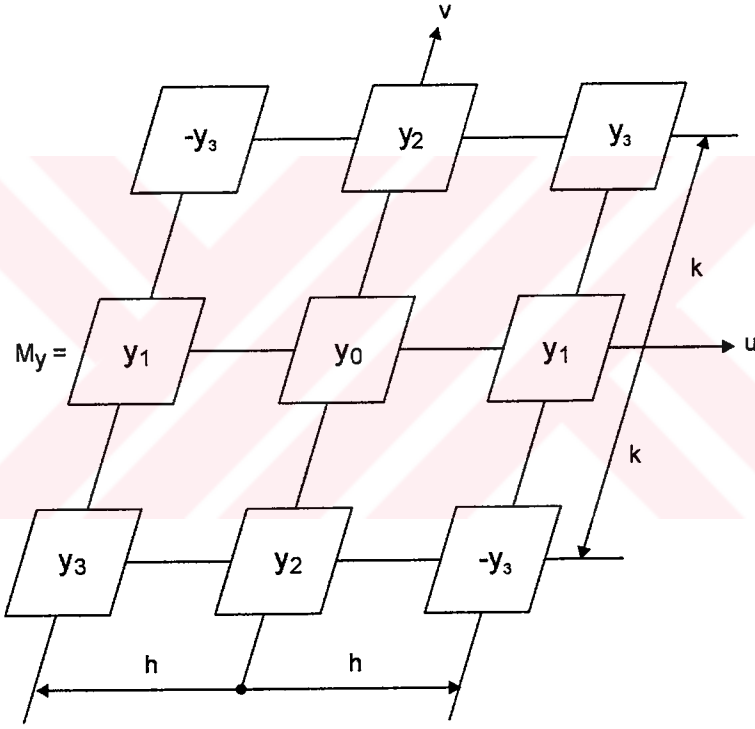
$$2D \cdot \left[\frac{(v + K1)}{h^2} + \frac{K3}{k^2} \right] = Y_0 \quad (4.21)$$

ile gösterilirse, (4.20) denklemi

$$M_y = Y_0 \cdot w_{i,j} + Y_1 \cdot [w_{i-1,j} + w_{i+1,j}] + Y_2 \cdot [w_{i,j-1} + w_{i,j+1}] + Y_3 \cdot [w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j+1}] - Y_3 \cdot [w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1}] \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.22) denklemi şematik olarak, şekil (4.9)'daki gibi gösterilebilir.



Şekil 4.9 M_y moment diyagramı.

Benzer şekilde :

$$M_{xy} - D \cdot (1-v) \left[K4 \cdot \frac{W_{i-1,j-1} - W_{i-1,j+1} - W_{i+1,j-1} + W_{i+1,j+1}}{4hk} \right] \quad (4.23)$$

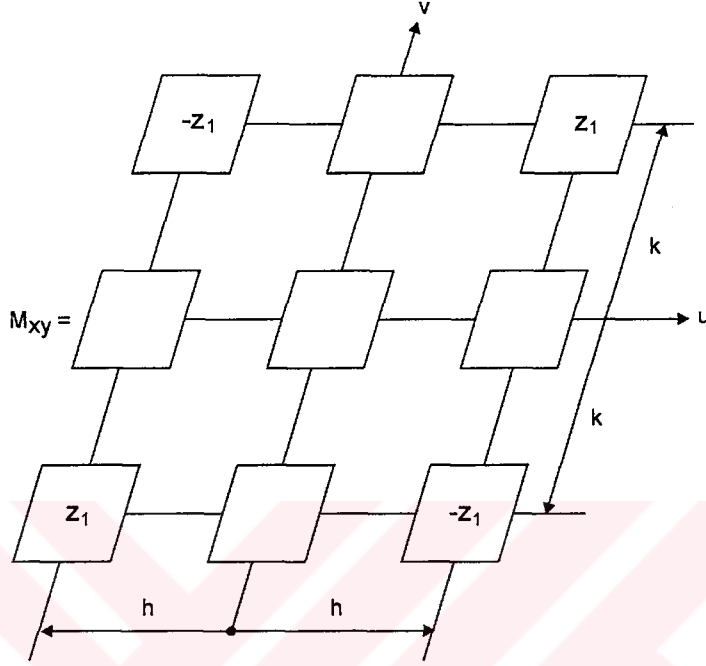
olarak bulunur.

$$- \frac{D(1-v)K4}{4hk} = Z_1 \quad (4.24)$$

ile gösterilirse, (4.23) denklemi :

$$M_{xy} = Z_1 \cdot [w_{i-l,j-l} + w_{i+l,j+l}] - Z_1 \cdot [w_{i-l,j+l} + w_{i+l,j-l}] \quad (4.25)$$

şeklinde yazılır. Bu denkleminde şematik olarak, şekil (4.10)'daki gibi gösterebiliriz.



Şekil 4.10. M_{xy} moment diyagramı

Şimdi de, (4.16) denklemlerinin son ikisini ele alarak Q_x veya Q_y kesme kuvvetlerini bulalım.

Bu ifadelerdeki kısmi türevleri sonlu farklarla ifade edip yerine koyarsak

$$\begin{aligned} Q_x = & -D \cdot \left[(1 + K1) \cdot \frac{w_{i-2,j} - 2w_{i-1,j} + 2w_{i+1,j} - w_{i+2,j}}{2h^3} \right. \\ & + K2 \cdot \frac{w_{i-1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + 2w_{i,j+1} - w_{i+1,j+1}}{2h^2k} \\ & + K3 \cdot \frac{w_{i-1,j-1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + 2w_{i+1,j} - w_{i+1,j+1}}{2hk^2} \\ Q_y = & -\frac{D}{\sin \alpha} \left[(1 + K1) \cdot \frac{W_{i-l,j-l} - 2W_{i,j-l} + W_{i+l,j-l} - W_{i-l,j+l} + 2W_{i,j+l} - W_{i+l,j+l}}{2h^2k} \right. \\ & + K2 \cdot \frac{W_{i-1,j-1} - 2W_{i-1,j} + W_{i-1,j+1} - W_{i+1,j-1} + 2W_{i+1,j} - W_{i+1,j+1}}{2hk^2} \end{aligned}$$

$$+ K3. \frac{W_{i,j-2} - 2W_{i,j-1} + 2W_{i,j+1} - W_{i,j+2}}{2k^3} \Bigg] \quad (4.26)$$

(4.26) denkleminde :

$$-\frac{D(1+K1)}{2h^3} = H1$$

$$\frac{D(1+K1)}{2\sin\alpha h^2k} - \frac{DK2}{2\sin\alpha hk^2} = G4$$

$$\frac{D(1+K1)}{h^3} = \frac{DK3}{hk^2} = H2$$

$$\frac{D(K2)}{h^2k} = H3$$

$$-\frac{DK^2}{2h^2k} - \frac{DK3}{2hk^2} = H4$$

$$\frac{DK2}{2h^2k} - \frac{DK3}{2hk^2} = H5$$

$$\frac{DK2}{hk^2 \sin\alpha} = G1$$

$$\frac{D(1+K1)}{\sin\alpha h^2k} + \frac{DK3}{\sin\alpha K^3} = G2$$

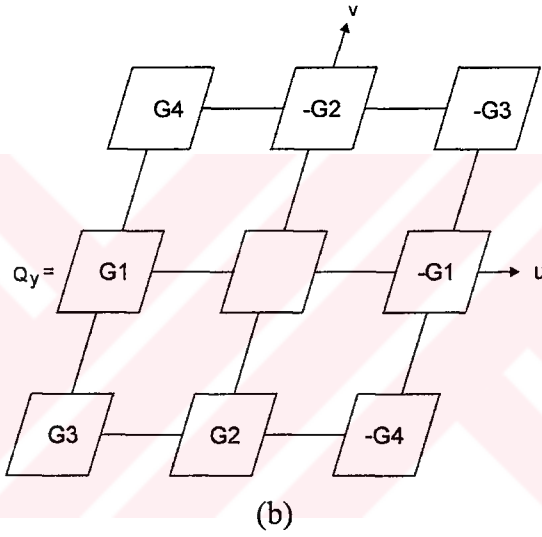
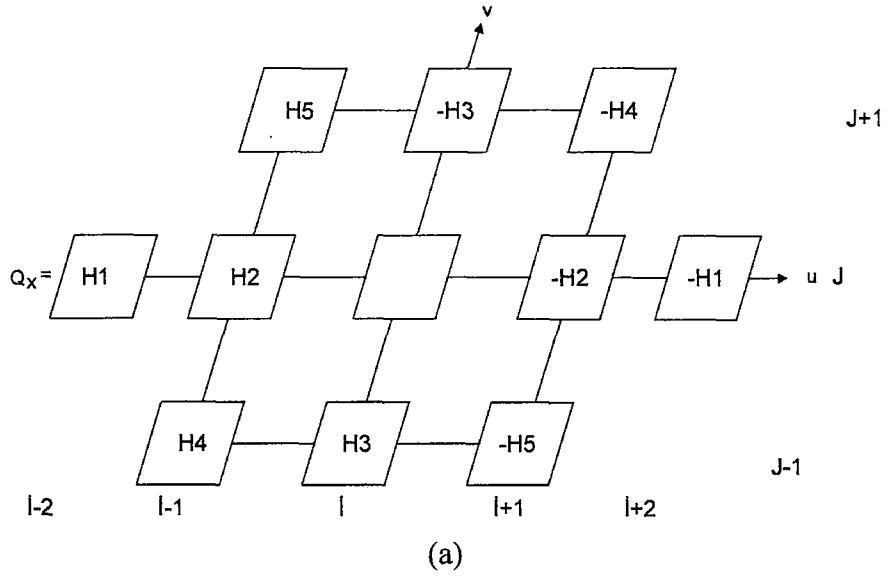
$$-\frac{D(1+K1)}{2\sin\alpha h^2k} - \frac{DK2}{2\sin\alpha hk^2} = G3 \quad (4.27)$$

ile gösterilirse (4.26) denklemleri şöyle yazılabilir.

$$Q_x = H1 \cdot w_{i-2,j} + H2 \cdot w_{i-1,j} - H2 \cdot w_{i+1,j} - H1 \cdot w_{i+2,j} + H4 \cdot w_{i-1,j-1} \\ + H3 \cdot w_{i,j-1} - H5 \cdot w_{i+1,j-1} + H5 \cdot w_{i-1,j+1} - H3 \cdot w_{i,j+1} - H4 \cdot w_{i+1,j+1}$$

$$Q_y = G1 \cdot w_{i-1,j} - G1 \cdot w_{i+1,j} + G2 \cdot w_{i,j-1} - G2 \cdot w_{i,j+1} + G3 \cdot w_{i-1,j-1} \\ - G3 \cdot w_{i-1,j+1} + G4 \cdot w_{i-1,j+1} - G4 \cdot w_{i+1,j-1} \quad (4.28)$$

Bu denklemler şematik olarak şekil (4.11)'deki gibi gösterilebilir.

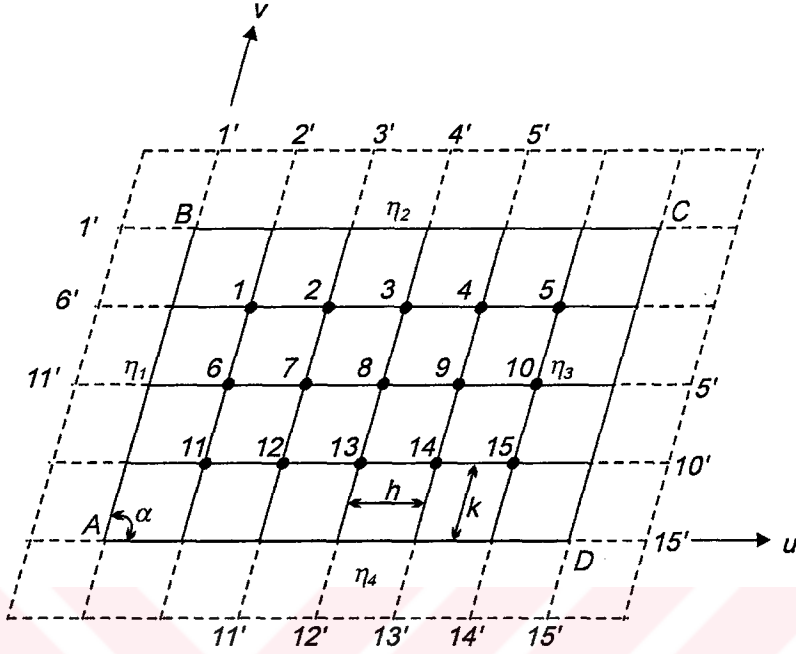


Şekil (4.11).Kesme kuvvetleri diyagramı

Şekil 4.8, 4.9, 4.10 ve 4.11'deki şemalardan faydalanarak, her ağ noktasındaki kesit tesirleri elde edilir.

4.4. Elastik Zemine Oturan Paralel Kenar Plakların Sonlu Fark Denklemlerinin Teşkili

Şekil 4.12'de görülen, kenarları yatayla α açısı yapan bir paralel kenar plağı ele alalım.



Şekil 4.12.Elastik zemine oturan paralel kenar plak

Plağın kenarlarına paralel olarak çizilen doğruların teşkil ettiği ağıın noktaların 1,2,3,....., 15 ile gösterelim. Her ağ noktası şekil 4.6'daki şema uygulanarak bir denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımı çözülerek, söz konusu noktalardaki çökme değerleri bulunur. Çökme değerleri (4.19), (4.22), (4.25) ve (4.28) denklemlerinde yerine koyularak her ağ noktası için kesit tesirleri elde edilmiş olur.

Önce plak dışında alınacak bazı noktalara ihtiyaç vardır. Plak dışında alınacak herhangi bir i fiktif noktasındaki w_i çökme değeri, bu noktanın mesnede göre simetriğinde plak iç noktasındaki w_i çökme değerinin η katsayısı ile çarpımına eşittir. Paralel kenar plağın dört kenarındaki istinat durumunu belirten katsayılar $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ olsun. Şekil 4.12'deki plak dışında alınacak fiktif noktaları ifade delim. Şekil 4.13'te görüldüğü gibi u,v doğrular

Böylece 1' fiktif noktasındaki çökme değeri (2.99) ve (4.29) ifadelerinden faydalanarak:

$$w_{1'} = \eta_1 \cdot w_{1''} = \eta_1 \cdot \gamma_v \cdot w_1 + \eta_1 \cdot \rho_v \cdot w_6$$

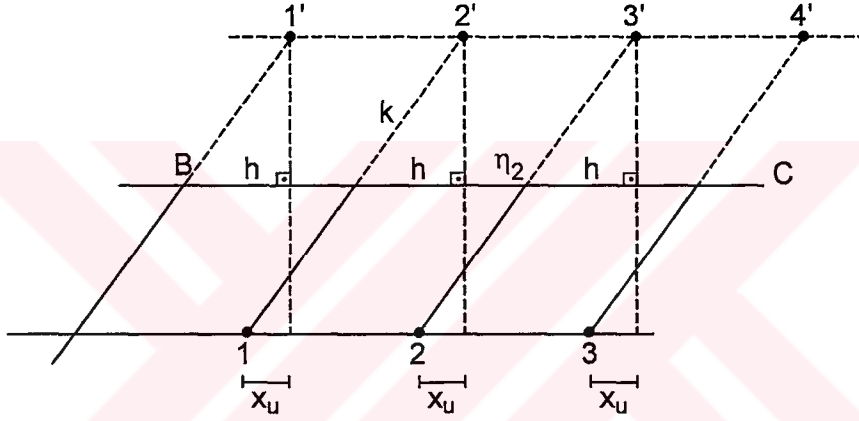
olarak bulunmuş olur.

Benzer şekilde 6' ve 11' fiktif noktalarındaki çökmeler :

$$w_{6'} = \eta_1 \cdot \gamma_v \cdot w_6 + \eta_1 \cdot \rho_v \cdot w_{11}$$

$$w_{11'} = \eta_1 \cdot \gamma_v \cdot w_{11} + \eta_1 \cdot \rho_v \cdot 0 \quad (4.30)$$

olarak yazılabilir.



Şekil 4.14. BC kenarında fiktif noktalar

Aynı şekilde, BC kenarına göre alınacak fiktif noktalar için şekil 4.14'ten faydalanarak:

$$X_u = 2k \cos \alpha - h$$

$$\rho_u = \frac{X_u}{h} = \frac{2k}{h} \cos \alpha - 1$$

$$\gamma_u = 1 - \rho_u$$

yazılabilir. Buna göre, BC sınırındaki mesnetlenmeyi karakterize eden faktör η_2 ise :

$$w_{1'} = \eta_2 \cdot \gamma_u \cdot w_1 + \eta_2 \cdot \rho_u \cdot w_2$$

$$w_{2'} = \eta_2 \cdot \gamma_u \cdot w_2 + \eta_2 \cdot \rho_u \cdot w_3$$

$$w_{3'} = \eta_2 \cdot \gamma_u \cdot w_3 + \eta_2 \cdot \rho_u \cdot w_4$$

$$w_{4'} = \eta_2 \cdot \gamma_u \cdot w_4 + \eta_2 \cdot \rho_u \cdot w_5$$

$$w_{5'} = \eta_2 \cdot \gamma_u \cdot w_5 + \eta_2 \cdot \rho_u \cdot 0$$

Benzer şekilde CD ve AD sınırlarındaki mesnetlenme durumunu karakterize edene faktörler η_3 ve η_4 ise :

CD kenarına ait :

$$w_{5'} = \eta_3 \cdot \gamma_v \cdot w_5 + \eta_3 \cdot \rho_v \cdot 0$$

$$w_{10'} = \eta_3 \cdot \gamma_v \cdot w_{10} + \eta_3 \cdot \rho_v \cdot w_5$$

$$w_{15'} = \eta_3 \cdot \gamma_v \cdot w_{15} + \eta_3 \cdot \rho_v \cdot w_{10} \quad (4.32)$$

AD kenarına ait :

$$w_{11'} = \eta_4 \cdot \gamma_u \cdot w_{11} + \eta_4 \cdot \rho_u \cdot 0$$

$$w_{12'} = \eta_4 \cdot \gamma_u \cdot w_{12} + \eta_4 \cdot \rho_u \cdot w_{11}$$

$$w_{13'} = \eta_4 \cdot \gamma_u \cdot w_{13} + \eta_4 \cdot \rho_u \cdot w_{12}$$

$$w_{14'} = \eta_4 \cdot \gamma_u \cdot w_{14} + \eta_4 \cdot \rho_u \cdot w_{13}$$

$$w_{15'} = \eta_4 \cdot \gamma_u \cdot w_{15} + \eta_4 \cdot \rho_u \cdot w_{14} \quad (4.33)$$

Şimdi, şekil 4.12'deki paralel kenar plağın 1,2,3,.....,15 ağ noktalarına şekil 4.6'daki şemayı uygulayabiliriz:

$$1 \text{ noktası : } c_0 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2 + c_1 \cdot w_3 + c_4 \cdot w_6 + c_5 \cdot w_7 + c_7 \cdot w_{1'} + c_7 \cdot w_8$$

$$+ c_1 \cdot w_{6'} + c_8 \cdot w_{11'} + c_9 \cdot w_{1'} + c_3 \cdot w_{2'} + c_{10} \cdot w_{3'} + c_{11} \cdot w_{4'} + c_3 w_{11}$$

$$+ c_9 \cdot w_{12} + c_{11} \cdot w_{13} = g_1 / D - k_1 w_1$$

$$2 \text{ noktası : } c_0 \cdot w_2 + c_2 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_3 + c_1 \cdot w_4 + c_6 \cdot w_6 + c_4 \cdot w_7 + c_5 \cdot w_8$$

$$+ c_7 \cdot w_9 + c_{10} \cdot w_{11} + c_3 \cdot w_{12} + c_9 \cdot w_{13} + c_{11} \cdot w_{14} + c_{11} \cdot w_{1'} + c_9 w_{2'}$$

$$+ c_3 \cdot w_{3'} + c_{10} \cdot w_{4'} + c_{11} \cdot w_{5'} = g_2 / D - k_2 w_2$$

$$3 \text{ noktası : } c_0 \cdot w_3 + c_1 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2 + c_2 \cdot w_4 + c_1 \cdot w_5 + c_8 \cdot w_6 + c_6 \cdot w_7$$

$$+c4 . w_8 + c5 . w_9 + c7 . w_{10} + c11 . w_{11} + c10 . w_{12} + c3 . w_{13} + c9 . w_{14}$$

$$+ c11 . w_{15} + c11 . w_2' + c9 . w_3' + c3 . w_4' + c10 . w_5' = g_3 / D - k_3 w_3$$

$$4 \text{ noktası : } cO . w_4 + c1 . w_2 + c2 . w_3 + c2 . w_5 + c8 . w_7 + c6 . w_8$$

$$+ c4 . w_9 + c5 . w_{10} + c11 . w_{12} + c10 . w_{13} + c3 . w_{14} + c9 . w_{15}$$

$$+ c11 . w_3 + c9 . w_4' + c3 . w_5' = g_4 / D - k_4 w_4$$

$$5 \text{ noktası : } cO . w_5 + c1 . w_3 + c2 . w_4 + c8 . w_8 + c6 . w_9 + c4 . w_{10} + c11 . w_{13}$$

$$+ c10 . w_{14} + c3 . w_{15} + c11 . w_4' + c9 . w_5' + c7 . w_5 + c11 . w_{10}' = g_5 / D - k_5 w_5$$

$$6 \text{ noktası : } cO . w_6 + c4 . w_1 + c6 . w_2 + c8 . w_3 + c2 . w_7 + c1 . w_8 + c4 . w_{11}$$

$$+ c5 . w_{12} + c7 . w_{13} + c11 . w_1' + c7 . w_6' + c1 . w_{11}' = g_6 / D - k_6 w_6$$

$$7 \text{ noktası : } cO . w_7 + c5 . w_1 + c4 . w_2 + c6 . w_3 + c8 . w_4 + c2 . w_6 + c2 . w_8$$

$$+ c1 . w_9 + c6 . w_{11} + c4 . w_{12} + c5 . w_{13} + c7 . w_{14} = g_7 / D - k_7 w_7$$

$$8 \text{ noktası : } cO . w_8 + c7 . w_1 + c5 . w_2 + c4 . w_3 + c6 . w_4 + c8 . w_5 + c1 . w_6 + c2 . w_7$$

$$+ c2 . w_9 + c1 . w_{10} + c8 . w_{11} + c6 . w_{12} + c4 . w_{13} + c5 . w_{14} + c7 . w_{15} = g_8 / D - k_8 w_8$$

$$9 \text{ noktası : } cO . w_9 + c7 . w_2 + c5 . w_3 + c4 . w_4 + c6 . w_5 + c1 . w_7 + c2 . w_8 + c2 . w_{10}$$

$$+ c8 . w_{12} + c6 . w_{13} + c4 . w_{14} + c5 . w_{15} = g_9 / D - k_9 w_9$$

$$10 \text{ noktası : } cO . w_{10} + c7 . w_3 + c5 . w_4 + c4 . w_5 + c1 . w_8 + c2 . w_9 + c8 . w_{13} + c6 . w_{14}$$

$$+ c4 . w_{15} + c1 . w_5' + c7 . w_{10}' + c11 . w_{15}' = g_{10} / D - k_{10} w_{10}$$

$$11 \text{ noktası : } cO . w_{11} + c3 . w_1 + c10 . w_2 + c11 . w_3 + c4 . w_6 + c6 . w_7 + c8 . w_8 + c2 . w_{12}$$

$$+ c1 . w_{13} + c11 . w_6' + c7 . w_{11}' + c9 . w_{11}' + c11 . w_{12}' = g_{11} / D - k_{11} w_{11}$$

$$12 \text{ noktası : } cO . w_{12} + c9 . w_1 + c3 . w_2 + c10 . w_3 + c11 . w_4 + c5 . w_6 + c4 . w_7 + c6 . w_8$$

$$+ c8 . w_9 + c2 . w_{11} + c2 . w_{13} + c1 . w_{14} + c3 . w_{11}' + c9 . w_{12}' + c11 . w_{13}' = g_{12} / D - k_{12} w_{12}$$

$$13 \text{ noktası : } cO . w_{13} + c11 . w_1 + c9 . w_2 + c3 . w_3 + c10 . w_4 + c11 . w_5 + c7 . w_6 + c5 . w_7$$

$$+ c4 \cdot w_8 + c6 \cdot w_9 + c8 \cdot w_{10} + c1 \cdot w_{11} + c2 \cdot w_{12} + c2 \cdot w_{14} + c1 \cdot w_{15} + c10 \cdot w_{11}' + c3 \cdot w_{12}' + c9 \cdot w_{13}' + c11 \cdot w_{14}' = g_{13} / D - k_{13}w_{13}$$

$$14 \text{ noktası : } cO \cdot w_{14} + c11 \cdot w_2 + c9 \cdot w_3 + c3 \cdot w_4 + c10 \cdot w_5 + c7 \cdot w_7 + c5 \cdot w_8 + c4 \cdot w_9$$

$$+ c6 \cdot w_{10} + c1 \cdot w_{12} + c2 \cdot w_{13} + c2 \cdot w_{15} + c11 \cdot w_{11}' + c10 \cdot w_{12}' + c3 \cdot w_{13}'$$

$$+ c9 \cdot w_{14}' + c11 \cdot w_{15}' = g_{14} / D - k_{14}w_{14}$$

$$15 \text{ noktası : } cO \cdot w_{15} + c11 \cdot w_3 + c9 \cdot w_4 + c3 \cdot w_5 + c7 \cdot w_8 + c5 \cdot w_9 + c4 \cdot w_{10} + c1 \cdot w_{13}$$

$$+ c2 \cdot w_{14} + c2 \cdot w_{10}' + c8 \cdot w_5' + c11 \cdot w_{12}' + c10 \cdot w_{13}' + c3 \cdot w_{14}' + c7 \cdot w_{15}' + c9 \cdot w_{15}'$$

$$= g_{15} / D - k_{15}w_{15} \quad (4.34)$$

(4.30), (4.31), (4.32), (4.33) değerleri, (4.34) denklemlerinde yerine koyulup düzenlenirse:

$$[A] \cdot [W] = [P]$$

şeklinde matris denklemi elde edilir. Buradan

$$[W] = [A]^{-1} \cdot [P] \quad (4.35)$$

matris denkleminde çökmeye değerleri bulunmuş olur.

Burada :

$$[W] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ . \\ w_{15} \end{bmatrix} \quad [P] = \frac{1}{D} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ . \\ g_{15} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} [A1] & [A4] & [A8] \\ [A6] & [A2] & [A5] \\ [A9] & [A7] & [A3] \end{bmatrix}$$

Çökmeye vektörü

Yük vektörü

Katsayılar matrisi

[A1], [A2],.....[A7] matrisleri sonraki sayfalarda verilmiştir.

$$[A1] = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline c_0+c_7\eta_1\gamma_v+c_9\eta_2\gamma_u+k_1 & c_2+c_9\eta_2\rho_u+c_3\eta_3\gamma_u & c_1+c_3\eta_2\rho_u+c_{10}\eta_2\gamma_u & c_{10}\eta_2\rho_u+c_{11}\eta_2\gamma_u & c_{11}\eta_2\rho_u \\ \hline c_2+c_{11}\eta_2\gamma_u & c_0+c_{11}\eta_2\rho_u+c_9\eta_2\gamma_u+k_2 & c_2+c_9\eta_2\rho_u+c_3\eta_2\gamma_u & c_1+c_3\eta_2\rho_u+c_{10}\eta_2\gamma_u & c_{10}\eta_2\rho_u+c_{11}\eta_2\gamma_u \\ \hline c_1 & c_2+c_{11}\eta_2\gamma_u & c_0+c_{11}\eta_2\rho_u+c_9\eta_2\gamma_u+k_3 & c_2+c_9\eta_2\rho_u+c_3\eta_2\gamma_u & c_1+c_3\eta_2\rho_u+c_{10}\eta_2\gamma_u \\ \hline 0 & c_1 & c_2+c_{11}\eta_2\gamma_u & c_0+c_{11}\eta_2\rho_u+c_9\eta_2\gamma_u+k_4 & c_2+c_9\eta_2\rho_u+c_3\eta_2\gamma_u \\ \hline 0 & 0 & c_1 & c_2+c_{11}\eta_2\gamma_u & c_0+c_{11}\eta_2\rho_u+c_9\eta_2\gamma_u+c_{11}\eta_3\rho_v+c_7\eta_3\gamma_v+k_5 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

$$[A2] = \begin{array}{ccccc} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline c_0+c_{11}\eta_1\rho_v+c_7\eta_1\gamma_v+k_6 & c_2 & c_1 & 0 & 0 \\ \hline c_2 & c_0+k_7 & c_2 & c_1 & 0 \\ \hline c_1 & c_2 & c_0+k_8 & c_2 & c_1 \\ \hline 0 & c_1 & c_2 & c_0+k_9 & c_2 \\ \hline 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_0+c_7\eta_3\gamma_v+c_{11}\eta_3\rho_v+k_{10} \end{array} \begin{array}{l} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}$$

$$[A3] = \begin{array}{ccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \hline c_0+c_{11}\eta_1\rho_v+c_7\eta_1\gamma_v+c_9\eta_4\gamma_u+c_{11}\eta_4\rho_u+k_{11} & c_2+c_{11}\eta_4\gamma_u & c_1 & 0 & 0 \\ \hline c_2+c_3\eta_4\gamma_u+c_9\eta_4\rho_u & c_0+c_9\eta_4\gamma_u+c_{11}\eta_4\rho_u+k_{12} & c_2+c_{11}\eta_4\gamma_u & c_1 & 0 \\ \hline c_1+c_{10}\eta_4\gamma_u+c_3\eta_4\rho_u & c_2+c_3\eta_4\gamma_u+c_9\eta_4\rho_u & c_0+c_9\eta_4\gamma_u+c_{11}\eta_4\rho_u+k_{13} & c_2+c_{11}\eta_4\gamma_u & c_1 \\ \hline c_{11}\eta_4\gamma_u+c_{10}\eta_4\rho_v & c_1+c_{10}\eta_4\gamma_u+c_3\eta_4\rho_u & c_2+c_3\eta_4\gamma_u+c_9\eta_4\rho_u & c_0+c_9\eta_4\gamma_u+c_{11}\eta_4\rho_u+k_{14} & c_2+c_{11}\eta_4\gamma_u \\ \hline c_{11}\eta_4\rho_u & c_{11}\eta_4\gamma_u+c_{10}\eta_4\rho_u & c_1+c_{10}\eta_4\gamma_u+c_3\eta_4\rho_u & c_2+c_3\eta_4\gamma_u+c_9\eta_4\rho_u & c_0+c_7\eta_3\gamma_v+c_9\eta_u\gamma_u+k_{15} \end{array} \begin{array}{l} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array}$$

[A4]= [A5] =

$c_4+c_7\eta_1\rho_u+c_1n_1\gamma_v$	c_5	c_7	0	0
c_6	c_4	c_5	c_7	0
c_8	c_6	c_4	c_5	c_7
0	c_8	c_6	c_4	c_5
0	0	c_8	c_6	$c_4+c_1\eta_3\gamma_v$

[A6]= [A7] =

$c_4+c_1\eta_1\gamma_v$	c_6	c_8	0	0
c_5	c_4	c_6	c_8	0
c_7	c_5	c_4	c_6	c_8
0	c_7	c_5	c_4	c_6
0	0	c_7	c_5	$c_4+c_1\eta_3\gamma_v+c_7\eta_3\rho_v$

[A8]= [A9] =

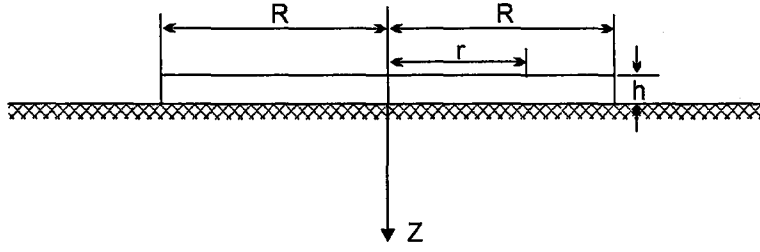
c_3	c_{10}	c_{11}	0	0
c_9	c_3	c_{10}	c_{11}	0
c_{11}	c_9	c_3	c_{10}	c_{11}
0	c_{11}	c_9	c_3	c_{10}
0	0	c_{11}	c_9	$c_3+c_1\eta_3\rho_v+c_8\eta_3\gamma_v$

5. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL PLAKLARIN ÇÖZÜM METODLARI

5.1. Elastik Zemine Oturan Dairesel Plakların Teorik Çözümü

5.1.1. Temel denklemler

Bu bölümde, daireSEL plak problemi gözönüne alınacaktır. Dış yükler şekil 5.1'deki gibi plak merkezine göre simetrik alındığından, plakta eksenel simetrik deformasyonlar meydana gelir.



Şekil 5.1. Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak

Elastik zemine oturan daireSEL plak diferansiyel denklemi :

$$\nabla_r^2 \nabla_r^2 W = \frac{P - kw}{D} \quad (5.1)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada :

w : Plagın ve elastik zeminin düşey deplasmanı

P : Düşey doğrultuda plağa etkiyen eksenel simetrik dış yük

$\nabla_r^2 = r$ değişkenine göre laplace operatörü

D : Plagın eğilme rijitliği

k : Zemin katsayısı

(θ, r) Plak düzleminde polar koordinatlardır.

Sistem eksenel simetrik olduğundan, deplasmanlar θ açısından bağımsızdır. Buna göre laplace operatörü de θ bağımsız olup sadece r değişkenine bağlıdır.

Bu durumda laplace operatörü :

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \quad (5.2)$$

(5.2) denklem (5.1) denkleminde yerine konulduğunda :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{P - kw}{D} \quad (5.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Eksenel simetrik durumda dairesel plakta meydana gelen M_r , M_θ , Q_r kesit tesirleri r değişkenine bağlı olarak aşağıdaki bağıntılara elde edilebilirler.

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left[\nabla_r^2 w - \frac{1-v}{r} \frac{dw}{dr} \right] \\ M_\theta &= -D \left(v \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left[v \cdot \nabla_r^2 w + \frac{1-v}{r} \frac{dw}{dr} \right] \\ Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \cdot \frac{d}{dr} \cdot \nabla_r^2 w \end{aligned} \quad (5.4)$$

şeklinde olacaktır.

5.1.2. Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak Diferansiyel Denkleminin Genel Çözümü

r koordinatına bağlı olarak

$$x = \frac{r}{\ell} \quad (5.5)$$

şeklinde boyutsuz koordinat tanımlayalım. Burada; ℓ boyutsuz uzunluk olup.

$$\frac{K}{D} = \frac{1}{\ell^4} \quad ; \quad \frac{w}{\ell} = z \quad (5.6)$$

bağıntısı elde edilir.

(5.3) denklemin homojen ve özel çözümleri aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$P = 0$ (yüksüz) durumu için (5.3) denklemi.

$$\ell^4 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + w = 0 \quad (5.7)$$

(5.5) ve (5.6) denklemleri (5.7) denkleminde yerine koyulursa:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} \right) + z = 0 \quad (5.8)$$

veya

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \text{ yerine } \nabla$$

sembolünü kullanarak

$$\nabla \nabla z + z = 0 \quad (5.9)$$

yazabiliriz. Bu da dördüncü mertebeden lineer diferansiyel bir denklem olup genel çözümü şu şekilde gösterilebilir:

$$z = AX_1(x) + BX_2(x) + CX_3(x) + DX_4(x) \quad (5.10)$$

Burada $A, \dots, D$ integrasyon sabitleri ve $X_1, \dots, X_4$, (IV.9) denkleminin dört müstakil çözümüdürler.

Şimdi (5.9) denkleminin bir polinom seri şeklindeki bir çözümünü bulmağa çalışacağız. $a_n X^n$, bu serinin bir terimi olsun. Buna göre diferansiyelini alarak

$$\nabla(a_n X^n) = n(n-1)a_n X^{n-2} + n a_n X^{n-2} = n^2 a_n X^{n-2}$$

ve

$$\nabla \nabla (a_n X^n) = n^2(n-2)^2 a_n X^{n-4} = 0$$

elde ederiz. (5.9) denkleminin sağlanması için serideki her bir $a_n X^n$ terimine

$$n^2(n-2)^2 a_n X^{n-4} + a_{n-4} X^{n-4} = 0 \quad (5.11)$$

olacak şekilde bir $a_{n-4}x^{n-4}$ teriminin tekabül etmesi lazımdır. Bu şarta uyarak seri, (5.9) denkleminde konulduğu zaman bütün terimler ortadan kalkar. Şu halde seri yakınsak ise denklemin özel bir çözümünü gösterir.

(5.11) denkleminde

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n^2(n-2)^2} \quad (5.12)$$

olduğu anlaşılır.

$$\nabla\nabla(a_0) = 0 \text{ ve } \nabla\nabla(a_2x^2) = 0 \quad (5.13)$$

olduğuna dikkat edilirse (5.9) denklemini sağlayan iki serinin mevcut olduğu anlaşılır. Meselâ

$$X_1(x) = 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{x^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \quad (5.14)$$

ve

$$X_2(x) = x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \frac{x^{14}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2} + \dots$$

(5.5) ve (5.6) denklemlerinden anlaşıldığına göre r uzaklığının küçük değerleri için yeni P yükünün tatbik noktasına yakın olan noktalar için x değeri küçük olup (5.14) serisi sür'atle yakınsak olur. Diğer taraftan yükün tatbik noktasında ($x=0$), (5.14) serisinin müteakip türevlerinin de mahdud kaldığı görülebilir. Bu da yükün tatbik noktasındaki gerilme durumunu temsil etmek için bu serilerin kâfi gelmediklerini gösterir; Bu noktada, önceki incelemeden bilindiği üzere, eğilme momentleri sonsuz büyük olur. Bu sebepten (5.9) denkleminin X_3 özel çözümü şu şekilde alınacaktır:

$$X_3 = X_1 \log x + F_3(x) \quad (5.15)$$

Burada $F_3(x)$, x 'in bir fonksiyonu olup yine bir üssü seri şeklinde gösterilebilir. Diferansiyelini alarak

$$\nabla\nabla X_3 = \frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} + \log x \nabla\nabla X_1 + \nabla\nabla F_3(x)$$

buluruz ve (5.9) denkleminde z yerine X_3 koyarak

$$\frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} + \log x (\nabla \nabla X_1 + X_1) + \nabla \nabla F_3(x) + F_3(x) = 0$$

elde ederiz. X_1 (5.9) denklemini sağlayıp (5.14) serilerinin birincisi ile gösterildiğinden $F_3(x)$ i tayin etmek için şu denklemi elde ederiz :

$$\nabla \nabla F_3(x) + F_3(x) = -\frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} = -4 \left(-\frac{2.3.4}{2^2.4^2} + \frac{6.7.8.x^4}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \frac{10.11.12.x^8}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2.12^2} + \dots \right) \quad (5.16)$$

$F_3(x)$ i

$$F_3(x) = b_4 x^4 + b_8 x^8 + b_{12} x^{12} + \dots \quad (5.17)$$

serisi şeklinde alarak ve bu seriyi (5.16) denkleminde koyarak nihai denklem sağlanacak şekilde $b_4, b_8, b_{12}, \dots$ katsayılarını tayin ederiz:

$$\nabla \nabla (b_4 x^4) = 4^2.2^2.b_4$$

olduğuna dikkat edersek, x^i ihtiva etmeyen terimlerin toplamını sıfıra eşit kılarak

$$4^2.2^2.b_4 = \frac{2.3.4}{2^2.4^2}$$

veya

$$b_4 = \frac{2.3.4^2}{2^4.4^4} = \frac{3}{128}$$

buluruz. x^4 lü terimlerin toplamını sıfıra eşit kılarak

$$b_8 = -\frac{25}{1,769,472}$$

buluruz ve genel olarak

$$b_n = (-1)^{\frac{n}{4}-1} \cdot \frac{1}{n^2(n-2)^2} \left[b_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2^2.4^2.6^2 \dots n^2} \right]$$

elde ederiz. Buna göre (5.9) denkleminin üçüncü özel çözümü şudur:

$$X_3 = X_1 \log x + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1,769,472} x^8 + \dots \quad (5.18)$$

(5.9) denkleminin dördüncü X_4 özel integrali

$$X_4 = X_2 \log x + F_4(x) = X_2 \log x + 4 \cdot \frac{4.5.6}{4^4 \cdot 6^4} \cdot x^8 - \frac{1}{10^2 \cdot 8^2} \cdot \left(4 \cdot \frac{4.5.6}{4^4 \cdot 6^4} + \frac{10.9.8}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 10^2} \right) x^{10} + \dots \quad (5.19)$$

olarak benzer şekilde elde edilir.

(5.14), (5.18) ve (5.19) özel çözümlerini (5.10) ifadesine koyarak (5.9) denkleminin genel çözümünü :

$$\begin{aligned} z = & A \left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) + B \left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) \\ & + C \left[\left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) \log x + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1,769,472} x^8 + \dots \right] \\ & + D \left[\left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) \log x + \frac{5}{3456} x^6 - \frac{1054 \cdot 10^{-4}}{442,368} \cdot x^{10} + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi her özel halde A,....., D integrasyon sabitlerini, sınır şartlarını sağlayacak şekilde tayin etmek kalıyor. a yarıçaplı dairesel plakın sınır şartları şunlar olur:

Ankastre bir kenar halinde;

$$(w)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (5.21)$$

Basit mesnetli bir kenar halinde,

$$(w)_{r=a} = 0, \quad (M_r)_{r=a} = 0 \quad (5.22)$$

ve serbest bir kenar halinde,

$$(M_r)_{r=a} = 0 \quad V = \left(Q_r - \frac{\partial M_\pi}{r \partial \theta} \right)_{r=a} = 0 \quad (5.23)$$

a yarıçaplı dairesel plakın kenarının tamamen boşta olduğu hali gözüne alalım. Bu hâle ait sınır şartları (5.23) denklemleri ile verilmiştir. M_r momentleri ve Q_r kesme kuvvetleri için (5.4) denklemlerinden kullanarak sınır şartlarını

$$\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \cdot \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0 \quad (5.24)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0$$

olarak yazarız. Bu iki şarta ilâve olarak plakın merkezi için cari olan iki şart daha vardır; Meselâ plakın merkezinde sehimin sınırlı olması ve plaktan sonsuz küçük bir silindirik yüzeyle ayrılmış lateral yüzeye yayılmış olan kesme kuvvetlerinin merkezdeki münferit P kuvvetini dengelemesi lâzımdır. Bu iki şartın birincisinden (5.20) genel çözümündeki C sabitinin sıfır ettiği anlaşılır. İkinci şarttan

$$\left(\int_0^{2\pi} Q_r \cdot r d\theta \right)_{r=a} + P = 0 \quad (5.25)$$

bulunur veya (5.6) denklemini kullanarak

$$-k\ell^4 \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} 2\pi a + P = 0$$

elde edilir. Burada a , sonsuz küçük silindirin yarıçapıdır. Bu denklemde ω yerine ℓz koyarak ve z için (5.20) ifadesini kullanarak x 'in sonsuz küçük bir a/ℓ değeri için denklemin

$$-k\ell^4 \frac{4D}{\ell a} \cdot 2\pi a + P = 0$$

olduğunu buluruz. Buradan

$$D = \frac{P}{8\pi k \ell^3} \quad (5.26)$$

bulunur. C ve D sabitlerinin değerleri belli olunca geriye kalan A ve B sabitleri (5.24) denklemlerinden bulunabilir. Plak boyutlarının ve plakla zemin modüllerinin verilmesi halinde bu denklemler A ve B cinsinden iki lineer denklem verir.

Örnek olarak yarıçapı $a = 12,7$ cm olan bir plak alalım ve bunun rijitliği

$$\ell = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} = 12,7 \text{ cm.}$$

olacak kadar olsun. Plakın merkezine

$$D = \frac{P}{8\pi k \ell^3} = 102.10^{-5}$$

Olacak şekilde bir P yükü tatbik ediyoruz. D'nin bu değerini kullanarak ve yerine w yerine ℓz koyarak (5.20) ifadesini kullanmak ve $x = a / \ell = 1$ almak sureti ile (5.24) denklemlerinden

$$0.500A + 0.250B = 4.062D = 4.062.102.10^{-5}$$

$$0.687A - 8.483B = 11.09 D = 11.09.102.10^{-5}$$

bulunur. Buradan

$$A = 86.10^{-4} \quad , \quad B = -64.10^{-5}$$

elde edilir. Bu değerleri (5.20) ifadesine koyarak ve x 'in yalnız beşten küçük kuvvetlerini muhafaza ederek sehimi için şu ifadeyi elde ederiz:

$$w = \ell z = 12.7 \left[86.10^{-4} \left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \right) - 64.10^{-5} \cdot x^2 + 102.10^{-5} \cdot x^2 \cdot \log x \right]$$

Buna göre merkezdeki ($x=0$) sehimi şudur:

$$(w)_{\max} = 109.10^{-3} \text{ cm.}$$

ve çevredeki ($x=1$) sehimi şudur:

$$(w)_{\min} = 97.3 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

Bu sehimlerin farkı oldukça küçük olup zemindeki basınç dağılışı üniform yayılıştan pek az farkeder.

Plakın yarıçapını iki katlı ($a=25.4$ cm) alıp plakın rijitliği için önceki değeri muhafaza edersek çevrede $x=2$ olur ve (5.24) denklemleri şu şekli alır :

$$0.826A + 1.980B = 1.208 D$$

$$2.665A - 5.745B = 16.37 D$$

Bu denklemlerden

$$A = 3.93D = 400.10^{-5} \quad ; \quad B = -1.03D = 105.10^{-5}$$

Bulunur. Sehim (5.20) ifadesinden

$$w = \ell.z = 25.4 \left\{ 400.10^{-5} \left(1 - \frac{x^4}{2^2.4^2} \right) - 105.10^{-5} \left(x^2 - \frac{x^6}{576} \right) + 102.10^{-5} [\log x. \right. \\ \left. \left(x^2 - \frac{x^6}{4^2.6^2} \right) + \frac{5}{3.456} x^6 \right] \right\}$$

olarak bulunur. Plakın merkezindeki ve çevresindeki sehimler sırayla

$$w_{\max} = 5.08 \cdot 10^{-2} \text{ cm ve } w_{\min} = 2.24 \cdot 10^{-2}$$

olarak bulunur. Buradan görülüyor ki plakın yarıçapı ℓ 'nin iki katlı ise zemin üzerindeki basınç yayılımı zaten lineer olmaktan çok uzaktır.

5.2. Elastik Zemine Oturan Dairesel Plakların Sonlu Farklar Metodu İle Çözümü

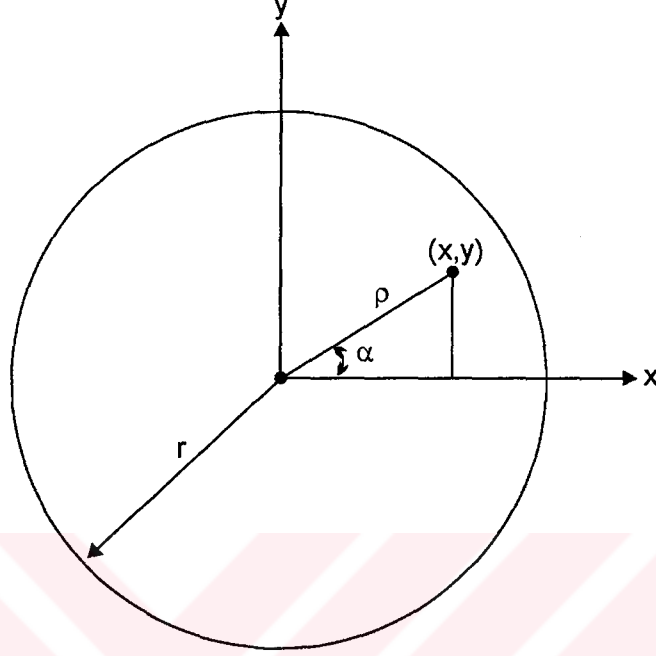
5.2.1. Giriş

Dairesel plakların çözümü, çeşitli yükleme ve mesnet şartları için teorik olarak yapılabilmektedir. Ancak her yükleme ve mesnet şartı için plak diferansiyel denklemini sağlayan çözüm fonksiyonunu aramak ve bu diferansiyel denklemin çözümünü yapmak gerekir. Başka bir yükleme veya mesnet şartı ortaya çıktığında, diferansiyel denklemi yeniden çözmek icap edecektir. Buna karşılık Nümerik Metotlardan olan Sonlu Farklar Yöntemi'nde plak diferansiyel denkleminin çözümü nokta nokta sağlandığından, mesnet şartlarının değişmesi ve elastik zemine oturması durumu da denklemlere kolayca dahil edilebilecektir.

Dairesel plaklarda diferansiyel denklemin çözümü için polar koordinat takımının kullanılması uygun olacaktır. Bu sebeple önce kısmi türevlerin polar koordinatlardaki ifadesi ele alınacak,

sonrada plak diferansiyel denkleminin bu koordinat takımı kullanılarak çözümü "Sonlu Fark Yönetimi" ile yapılacaktır.

5.2.2. Polar koordinatlarda laplacian operatörü



Şekil 5.2.Polar koordinat

Dairesel plakların incelenmesinde polar koordinatların kullanılması büyük kolaylık sağlar. Bunun için karteziyen koordinatlardan polar'a geçiş gereklidir. Şekil (5.2)'de görülen (x,y) noktasının polar koordinatları :

$$x = \rho \cdot \cos\alpha \qquad y = \rho \cdot \sin\alpha \qquad (5.27)$$

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \arctg \left(\frac{y}{x} \right)$$

Böylece

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho} = \cos\alpha$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho} = \sin\alpha$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{y/x^2}{1+(y/x)^2} = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{\sin \alpha}{\rho}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \alpha}{\rho} \quad (5.28)$$

yazılabilir. Şimdi de $w(\rho, \alpha)$ fonksiyonu ele alalım ve bu fonksiyonun x ve y 'ye göre kısmi türevlerini ifade edelim.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \rho} \cdot \cos \alpha - \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\rho} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \rho} \cdot \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\rho} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Polar koordinatlarda eğriliğin ifadesini elde etmek için ikinci türeve ihtiyaç vardır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\partial w}{\partial \rho} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\rho} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\rho^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\rho} + 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\rho^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \cdot \sin^2 \alpha + \frac{\partial w}{\partial \rho} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\rho^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\rho} - 2 \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\rho^2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

(5.30) yardımıyla $\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ aranırsa :

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \quad (5.31)$$

bulunur. Şu halde polar koordinatlarda Laplace operatörü

$$\nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \cdot w \quad (5.31.a)$$

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \cdot (\nabla^2 w) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \cdot w \quad (5.32)$$

olacaktır.

5.2.3. Plak diferansiyel denkleminin sonlu farklar yöntemiyle çözümü

Elastik zemine oturan plakları da kapsamak üzere plak diferansiyel denklemi:

$$\nabla^4 w = \frac{P - c \cdot w}{D} \quad (5.33)$$

şeklindedir.

Burada :

w : Çökme deformasyonlarını gösteren fonksiyon,

C : Zemini karakterize eden katsayı

D : Plak rijitliği

Dairesel plaklar çoğu kere orijine göre simetrik yüklere maruzdur. Bu hal için (5.32) diferansiyel denkleminde w fonksiyonu α 'dan bağımsız olacaktır. Diğer bir deyişle :

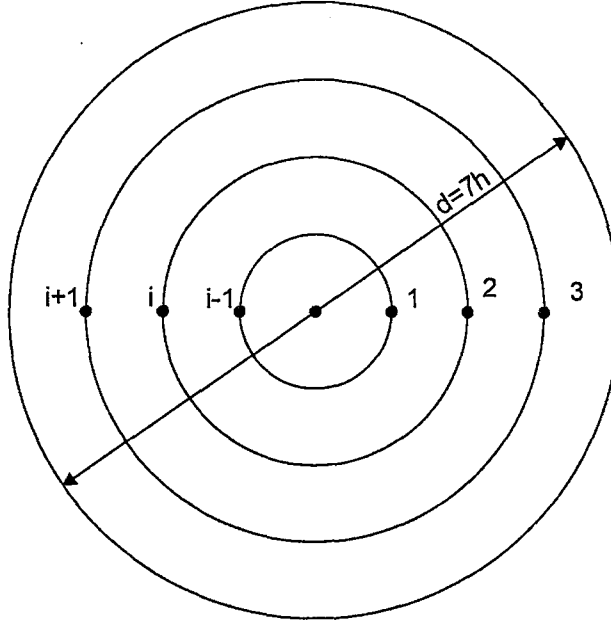
$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \cdot w$$

veya (5.33) ifadesi de dikkate alınarak

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{2\partial^3 w}{\rho \partial \rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) = P_i - c \cdot w_i \quad (5.34)$$

olarak yazılabilir.

Dairesel plak şekil (5.3)'te görüldüğü gibi, h eşit aralıklı kısımlara bölündüğünde her hangi bir i noktasının (5.34) diferansiyel denkleminin sol tarafının sonlu farklarla ifadesi şu şekilde olacaktır: (Burada $\rho / h = n$ ile gösterilmiştir.)



Şekil 5.3.Elastik zemine oturan plağın sonlu farklarla çözümü

	w_{i-2}	w_{i-1}	w_i	w_{i+1}	w_{i+2}
$D \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} =$	D	-4D	6D	4D	$D \times \frac{1}{h^4}$
$\frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} =$	$-\frac{1}{n} D$	$\frac{2}{n} D$		$-\frac{2}{n} D$	$\frac{1}{n} D \times \frac{1}{h^4}$
$-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} =$		$-\frac{1}{n^2} D$	$+\frac{2}{n^2} D$	$-\frac{1}{n^2} D$	$\times \frac{1}{h^4}$
$\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial w}{\partial \rho} =$		$-\frac{1}{2n^3} D$		$-\frac{1}{2n^3} D$	$\times \frac{1}{h^4}$

Bu terimlerle (5.34) denkleminin Sonlu Fark Yöntemiyle karşılığı :

$$D \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right) w_{i+2} - \left(4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^3} \right) w_{i+1} + \left[\left(6 + \frac{2}{n^2} \right) + c \cdot h^4 \right] \cdot w_i \right.$$

$$\left. - \left(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^3} \right) \cdot w_{i-1} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) w_{i-2} \right\} = P_i \cdot h^4 \quad (5.36)$$

şeklinde olacaktır.

(5.36) denklemi plağın h eşit aralıklı $i-1, i, i+1, \dots, N$ gibi bütün ağ noktalarına tatbik edilerek N bilinmeyenli bir denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımından bilinmeyen $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ çökme değerleri bulunabilir. (5.36) denklemini matris formunda yazalım.

$[A] \cdot [w] = [P]$ veya her iki tarafı $[A]^{-1}$ ile çarparsak :

$$[w] = [A]^{-1} \cdot [P] \quad (5.37)$$

şeklindedir. Burada :

$[w]$: Bilinmeyen çökme değerlerini gösteren vektör

$[P]$: Yük vektörü

$[A]$: Katsayılar matrisi

$$[w] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ : \\ : \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix} \quad [P] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ : \\ : \\ \cdot \\ P_n \end{bmatrix}$$

Çökme vektörü

Yük Vektörü

	1	2	3	4	----	N-1	N
1	$6+\frac{2}{n^2}+c.h^4$ $-\left(4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$	$-\left(4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)$ + (1-1/n)	1+1/n				
2	$-\left(4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)$ + (1-1/n)	$6+\frac{2}{n^2}+c.h^4$	$-\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)$	1+1/n			
3	1-1/n	$-\left(4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)$	$6+\frac{2}{n^2}+c.h^4$	$-\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)$		1+1/n	
4		1-1/n	$-\left(4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)$	$6+\frac{2}{n^2}+c.h^4$		$-\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)$	1+1/n
⋮							
N-1			1-1/n	$-\left(4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)$		$6+\frac{2}{n^2}+c.h^4$	$-\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)$
N				1-1/n		$-\left(4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)$	$6+\frac{2}{n^2}+c.h^4+(1+1/n)$

[A] =

Bu denklem takımının çözümünden ağ noktalarındaki çökme deformasyonları bulunmuş olur. Çökme deformasyonları bulunduktan sonra, bu noktalardaki kesit tesirleri de kolayca bulunabilir. Şimdi de, plağın radyal ve teğetsel momentlerini Sonlu Farklarla ifade edelim.

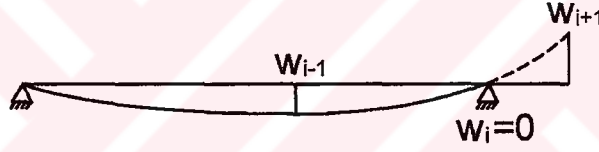
$$M_r = D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) = D \cdot \left[W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1} + \frac{\nu}{2m} \cdot (W_{i+1} - W_{i-1}) \right] / h^2 \quad (5.38)$$

$$M_t = D \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right) = D \cdot \left[\frac{1}{2m} (W_{i+1} - W_{i-1}) + \nu \cdot (W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}) \right] / h^2 \quad (5.39)$$

Burada m noktanın konumunu belirleyen bir katsayıdır. Ağ noktaları 0.5h, h, 2h, 3h, şeklinde alındığında m = 0.5, 1, 2, 3, olacaktır.

5.2.4. Sınır şartlarının sonlu farklarla ifadesi

5.2.4.1. Sabit Mesnet



Şekil 5.4.Sabit mesnet

Dairesel plak, çevre boyunca sabit mesnet tipinde mesnetlenmiş ise, sınır şartları $w_i=0$ ve $M_r=0$ şeklindedir.

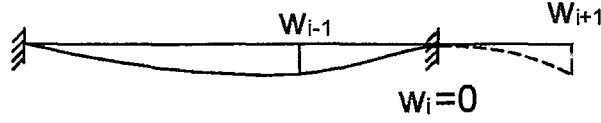
Bu özellik (5.38) denkleminde dikkate alınırsa :

$$D \left[w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1} + \frac{\nu}{2m} (w_{i+1} - w_{i-1}) \right] = 0$$

$$\left(1 + \frac{\nu}{2m} \right) \cdot w_{i+1} + \left(1 - \frac{\nu}{2m} \right) \cdot w_{i-1} = 0 \quad (5.40)$$

bulunur ki, buna göre i+1 fiktif noktasının çökmesi i-1 noktası cinsinden ifade edilmiş olur.

5.2.4.2. Ankastre Mesnet



Şekil 5.5. Ankastre mesnet

Dairesel plak, ankastre mesnet tipinde mesnetlenmiş ise, sınır şartları $w_i=0$ ve $\phi_i=0$ şeklindedir. $\phi_i=0$ denklemini Sonlu Farklarla ifade edersek :

$$\phi_i = \frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2h} = 0 \quad W_{i+1} = W_{i-1} \quad (5.41)$$

bulunur. $i+1$ noktasındaki çökme, $i-1$ noktasındaki eşit olacaktır.

5.2.5. Dönel simetrik olmayan yükleme halı

Dairesel plakta etkiyen yükleme dönel simetrik değilse, (5.30.31.a) Laplacian operatöründeki α 'ya bağlı kısmi türevleri de dikkate almak gerekir. Bu ifadenin terimleri Sonlu Farklar ile ifade edilirse :

$$\begin{aligned} \nabla^2 w = & \left(\frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \cdot w = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j}w_{i,j-1}}{h^2} + \frac{1}{\rho_j} \left(\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2h} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho_j^2} \left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\gamma^2} \right) \end{aligned}$$

veya

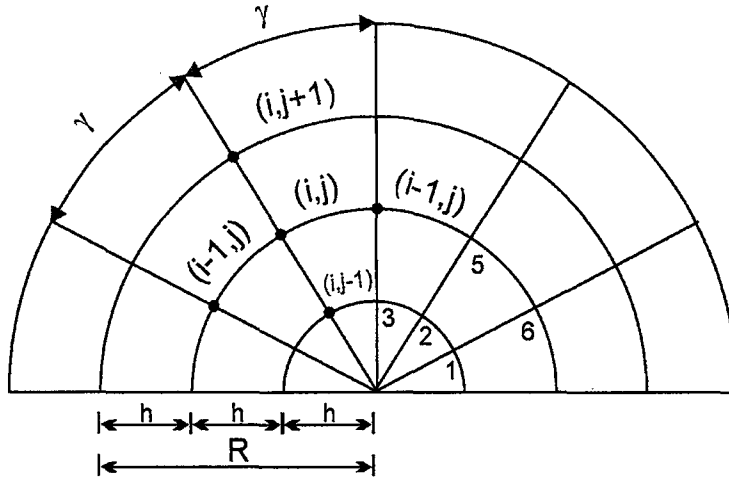
$$= \left(1 + \frac{h}{2\rho_j} \right) \cdot w_{i,j+1} + \left(1 - \frac{h}{2\rho_j} \right) w_{i,j-1} - 2 \left[1 + \left(\frac{h}{\rho_j \cdot \gamma} \right)^2 \right] \cdot w_{i,j} + \left(\frac{h}{\rho_j \cdot \gamma} \right)^2 \cdot (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) \quad (5.42)$$

Elastik zemine oturan dairesel plakların diferansiyel denklemi :

$$D \cdot \nabla^4 W = P - c \cdot w \quad \text{veya}$$

$$D \cdot \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{2\partial^3 w}{\rho \cdot \partial \rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) = P - c \cdot w$$

olarak elde edilir. Bu denklem şematik olarak şekil (5.6)'daki gibi ifade edilebilir.



Şekil 5.6.Elastik zemine oturan dairesel plakların denklemin şeması

Şimdi de $\nabla^4 w = \nabla^2(\nabla^2 w)$ laplacian operatörün Sonlu Farklarla ifade etmeye çalışalım. Şekil 5.7'deki şemayı $(i-1,j)$, (i,j) , $(i+1,j)$, $(i,j+1)$, $(i,j-1)$ noktalarına tatbik edersek ve

$$A = -2 \left[1 + \left(\frac{h}{2\rho_j \gamma} \right)^2 \right] \quad B = \left(\frac{h}{\rho_j \gamma} \right)^2$$

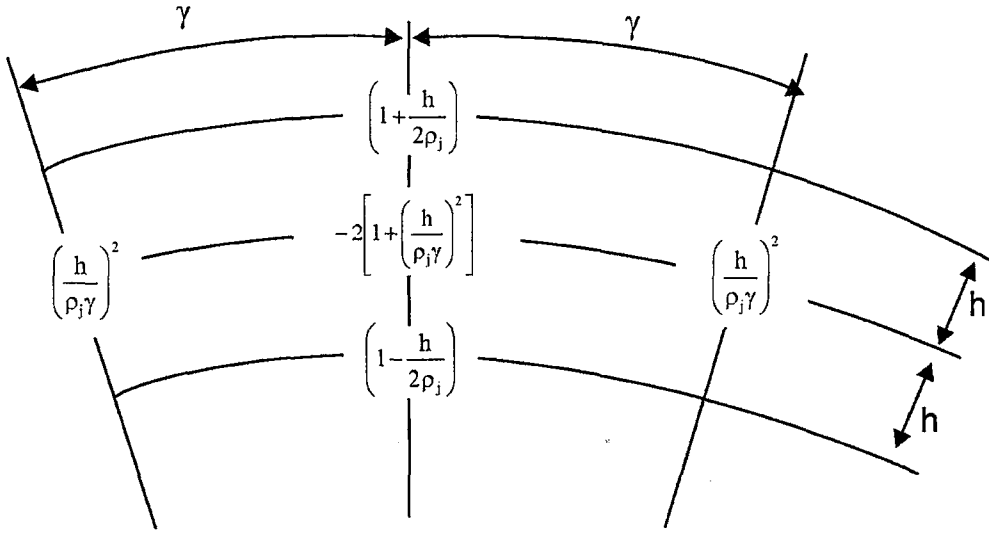
$$c = 1 + \frac{h}{2\rho_j} \quad D = 1 - \frac{h}{2\rho_j} \quad (5.43)$$

ile kısaltırsak :

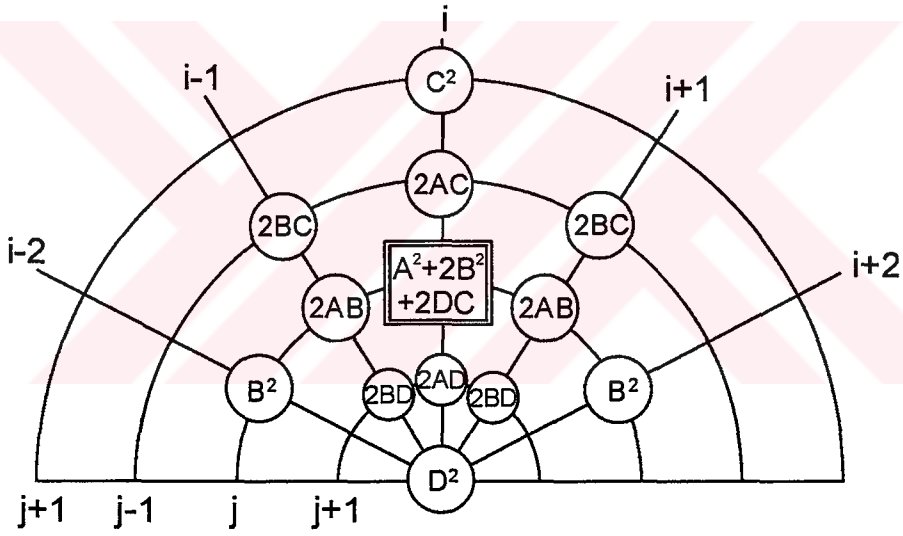
$$\nabla^4 w_{i,j} = B^2 \cdot w_{i-2,j} + 2AB \cdot w_{i-1,j} + (A^2 + 2B^2 + 2DC) \cdot w_{i,j} + 2AB \cdot w_{i+1,j} + 2BC \cdot w_{i+2,j} + 2AC \cdot w_{i,j-1} \\ + 2BC \cdot w_{i,j-1} + 2BD \cdot w_{i-1,j+1} + 2BD \cdot w_{i+1,j+1} + C^2 \cdot w_{i,j-2} + D^2 \cdot w_{i,j+2} + B^2 \cdot w_{i+2,j} \quad (5.44)$$

olarak elde edilir.

Bu denklem şematik olarak şekil 5.8'deki gibi gösterilebilir. Böylece dairesel plakta h , $2h$, $3h$, $4h$,.... yarıçapı dairelerle, α eşit açılarının teşkil ettiği doğruların kesişimleri ile oluşan ağ noktalarının herbirinde, şekil (5.8)'deki şemadan faydalanılarak $D \cdot \nabla^4 w = P - c \cdot w$ diferansiyel denkleminin Sonlu Farklarla karşılığı yazılabilir. Elde edilen denklem takımının çözümünden, bu ağ noktalarındaki çökme deformasyonları ve bunlar yardımıyla da kesit tesirleri bulunur.



Şekil 5.7. Dairesel plaklarında ($\nabla^2 w$) gösteren şema



Şekil 5.8. Dönel simetrik olmayan yükleme hali

5.2.6. Bilgisayar Programı

Bu dairesel plağın iç noktalarındaki çökme ve kesit tesirleri değerlerini hesaplayan bilgisayar programı verilmiştir.

Programda kullanılan notasyonlar şunlardır :

R : Plağın yarı çapı

M : Plağın kaç aralığa bölüneceğini gösteren bir sayı

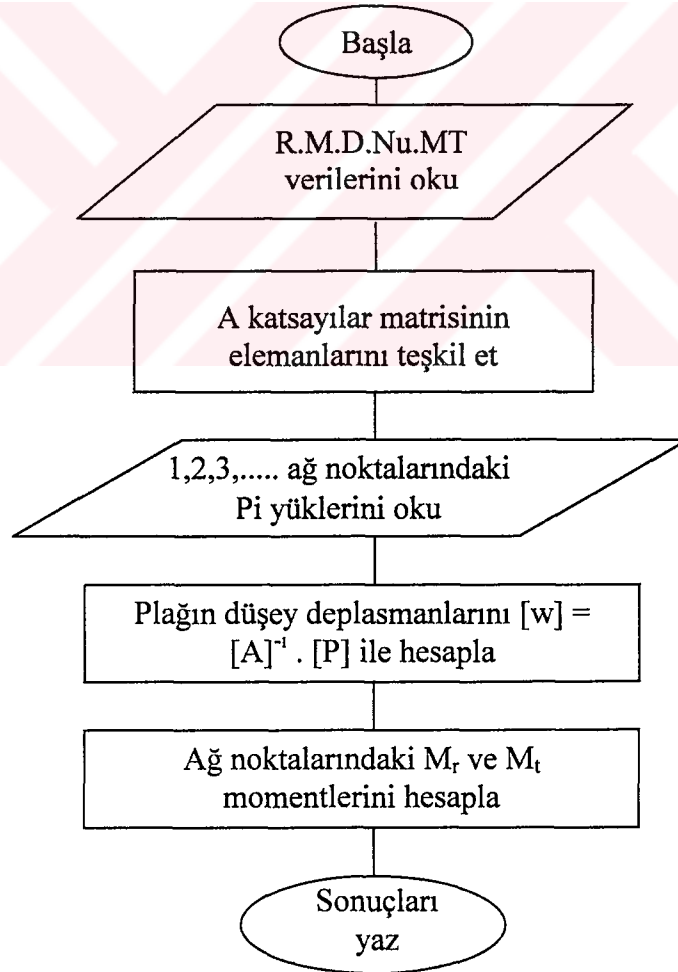
D : Plağın eğilme rijitliği

NU : Poisson sayısı

K : Zemin katsayısı

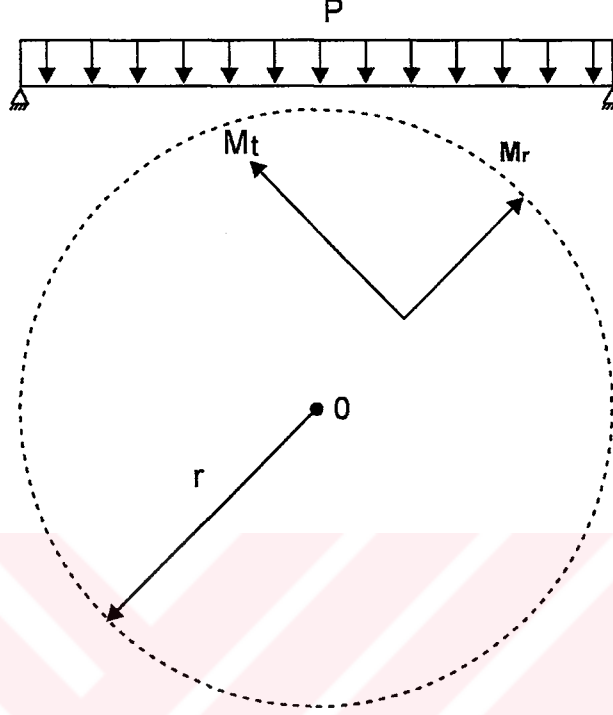
MT : Plağın mesnetlenme tipini gösteren 1 katsayı

PROGRAM



Örnek :

Bu programla $R = 4.0$ m yarıçaplı, $p = 2$ t/m² üniform yüke maruz $D = 1373$ t.m, $\nu=0.17$ olan dairesel plağın çözümü yapılmış ve sonuçlar aşağıda verilmiştir.



Teorik çözümde :

$$\max z = 0.00257 \text{ m.}$$

$$(M_r)_o = (M_t)_o = 6.34 \text{ t.m}$$

Sonlu Fark Yöntemi ile Teorik çözüm arasındaki fark görebilmek için plak, sırasıyla 7.15.21 parçaya bölünerek sonuçlar alınmıştır. Plak 21 parçaya bölündüğünde, alınan sonuçlar teorik çözümle hemen hemen aynı olmaktadır.

a) Plağın 7 eşit kısma bölünmesinde (3 nokta için)

PLAĞIN DÜŞEY DEPLASMANLARI

$$w_1 = 2.48495E - 02$$

$$w_2 = 1.99931E - 02$$

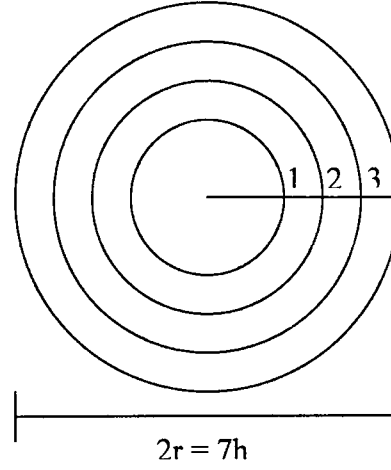
$$w_3 = 1.11086E - 02$$

M_r VE M_t MOMENTLERİ

$$1 \quad -5.97 \quad -5.97$$

$$2 \quad -2.23 \quad -5.53$$

$$3 \quad -1.18 \quad -4.60$$



b) Plağın 15 eşit kısma bölünmesinde (7 nokta için)

PLAĞIN DÜŞEY DEPLASMANLARI

$$W_1 = 2.55005E-02$$

$$W_2 = 2.43974E-02$$

$$W_3 = 2.22305E-02$$

$$W_4 = 1.90854E-02$$

$$W_5 = 1.50925E-02$$

$$W_6 = 1.04265E-02$$

$$W_7 = 5.30807E-03$$

M_r VE M_t MOMENTLERİ

$$1 \quad -6.23 \quad -6.23$$

$$2 \quad -2.61 \quad -6.13$$

$$3 \quad -1.82 \quad -5.93$$

$$4 \quad -1.42 \quad -5.62$$

$$5 \quad -1.15 \quad -5.20$$

$$6 \quad -0.93 \quad -4.67$$

$$7 \quad -0.73 \quad -4.03$$

c) Plağın 21 eşit kısma bölünmesi (10 nokta için):

PLAĞIN DÜŞEY DEPLASMANLARI

$W_1 = 2.56094E-02$
 $W_2 = 0.025042417$
 $W_3 = 2.39187E-02$
 $W_4 = 2.22605E-02$
 $W_5 = 2.01018E-02$
 $W_6 = 0.017488152$
 $W_7 = 0.01447672$
 $W_8 = 0.011136178$
 $W_9 = 7.54677E-03$
 $W_{10} = 3.80028E-03$

Mr VE Mt MOMENTLERİ

1	—6.28	—6.28
2	—2.66	—6.23
3	—1.91	—6.12
4	—1.55	—5.96
5	—1.33	—5.75
6	—1.16	—5.48
7	—1.03	—5.15
8	—0.90	—4.77
9	—0.78	—4.34
10	—0.67	—3.84

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, nümerik metodlardan Sonlu Farklar Metodu elastik zemine oturan çeşitli geometriğe sahip plakların çözümünde kullanılmıştır.

Sonlu Farklar metodunda, diferansiyel denklemin çözümü için belirli aralıklar seçilerek, fonksiyonun türevlerinin bu aralık noktalarında aldığı değerler sonlu farklarla ifade edilmiştir. Her aralık noktası için diferansiyel denklemi, sonlu farklarla ifade eden bir denklem yazılmıştır. Bu denklemlerle birlikte, sınır şartlarını gösteren denklemler, bir denklem takımını oluşturur. Bu denklem takımının çözümüyle her noktadaki düşey deplasmanlar ve bunlardan faydalanılarak kesit tesirleri edilmiştir.

Teorik metodlarla çalışırken problemin diferansiyel denklemi, belirli yük durumu için sınır şartlarını sağlayacak şekilde çözülür. Yük durumu ve sınır şartları değiştiğinde diferansiyel denklemi yeniden çözmek gerekir. Böylece her yükleme ve mesnet durumu için problemi tekrar ele almak icab edecektir. Buna karşılık sonlu farklar metodu ile elastik zemine oturan plak sistemlerinin çözümünde, teşkil edilen denklem takımının katsayılar matrisinin bazı terimlerini değiştirmek suretiyle her tip mesnet durumunu kapsayacak çözüm yapmak mümkündür. Nümerik metodlar (Sonlu Farklar) esasıyla hazırlanan bu bilgisayar programları ile değişik yükleme durumları ve çeşitli mesnet şartları için çözüm kolayca elde edilebilmektedir.

Bilgisayar programlarında plağın bölündüğü parça sayısının yeteri kadar arttırılması ile, teorik çözüme hemen hemen tamamen uyan sonuçlar alınmıştır.

Örnek olarak IV.Bölüm'de verilen dairesel plakta da bu husus görülmektedir. Örnekteki (sy.164) plağın orta noktasında teorik çözümle elde edilen düşey deplasman ve moment değerleri verilmiştir. Buna karşılık Bilgisayar programı yardımıyla plağın 7,15 ve 21 eşit parçaya bölünmesiyle değerler elde edilmiştir.

Görüldüğü gibi plak 21 eşit parçaya bölünerek bulunan sonuçlar, teorik olarak bulunan sonuçlara çok yakındır.

KAYNAKLAR

Arıman, T., Elastik Zemine Oturan Kalın Plaklar

Berktaş, I., (1992), Plak Teorisi ve Uygulamaları Küçük Sehimli İnce Plaklar, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları

Collatz, L., The Numerical Treatment of Differential Equation, Springer Verlag

Çağdaş, S., Elastik Zemine Oturan Taşıyıcı Sistemler

Salvadori, M.G., Numerical Methods in Engineering, Prentice Hall.

Szilar, R., (1974), Theory and Analysis of plates, Prentice Hall, INC.

Timoshenko and Woinowsky-krieger, Theory of Plates and Sheells.

Wang, P.C., Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi : 23.06.1974
Doğum Yeri : Gaza-Filistin
Lise : Taha Hussein Lisesi
Lisans : 1995-2000 Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi İnşaat
Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans : 2000-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bil. Enst. İnşaat Müh.
Anabilim Dalı, Mekanik Programı

