

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

139756

139756

SONLU ELEMANLAR METODU İLE
PLAKLARIN EĞİLMELİ DİNAMİK ANALİZİ

İnş. Müh. Cenk AKSOYLAR

FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Mekanik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Prof. Dr. Ercüment KÖKSAL
E. NÖLÜ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ercüment KÖKSAL

Doç. Dr. Neadet Tarumbale



Prof. Sinan Çağdas



İSTANBUL, 2003

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
KÜTÜPHANE

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ.....	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ.....	1
2. PLAK TEORİSİ.....	2
2.1 Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler	2
2.2 Plaklar	3
2.3 Elastisite Teorisi	4
2.3.1 Elastik Cisimlerde Gerilme Hali.....	4
2.3.2 Şekil Değiştirme Hali	7
2.3.3 Hooke Elastisite Kanunu	8
2.3.4 Şekil Değiştirme İşİ	9
2.3.5 Virtüel Yer Değiştirme Prensibi	10
2.4 Plak Diferansiyel Denkleminin Çıkartılması.....	11
2.4.1 Tanım ve Varsayımlar	11
2.4.2 Geometrik Bağıntılar	11
2.4.3 Gerilmelerle-Şekil Değiştirme ve Yer Değiştirme Bileşenleri Arasındaki Bağıntılar	14
2.4.4 Gerilmelerin Bileşkesi Olarak Momentlerin Bulunması	15
2.4.5 Plak Elamanının Dengesi ve Plak Diferansiyel Denklemi	16
2.4.6 Sınır Şartları.....	18
3. SONLU ELEMANLAR METODU	19
3.1 Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi ve Şekil Fonksiyonları.....	20
3.2 Dinamik Dış Etkiler Halinde Sonlu Elemanlar Metodu	22
3.3 Virtüel İş Prensibiyle Eleman Matrislerinin Bulunması.....	23
4. EĞİLMELİ PLAK ELEMANLARI	26
4.1 Şekil Fonksiyonları	26
4.1.1 Sabit Burulma Şekil Değiştirmesi	27
4.1.2 Elemanlar Arası Süreklilik	28
4.2 Literatürdeki 12 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemanlarının Karşılaştırılması.....	30

5.	PLAKLARIN EĞİLMELİ TİTREŞİM ANALİZİ	33
5.1	Eğilmeli İnce Plak Elemanının Enerji Denklemleri	33
5.2	Şekil Fonksiyonlarının Bulunması	38
5.3	Eleman Matrislerinin Bulunması	42
5.3.1	Kütle Matrisi Tipleri	42
5.3.2	Kütle Matrisinin Bulunması	43
5.3.3	Rijitlik Matrisinin Bulunması	44
5.3.4	Yük Matrisinin Bulunması	45
5.3.5	Plak İç Kuvvetlerinin Bulunması.....	46
5.4	Serbest Sönümsüz Titreşim Analizi	48
5.4.1	Özvektörlerin Ortogonallığı.....	49
5.4.2	Özdeğer Problemin standart hale dönüştürülmesi	50
5.4.3	Standart Özdeğer Probleminin Çözümü	51
5.4.3.1	Cholesky Ayrışımı	51
5.4.3.2	Jacobi Metodu.....	52
5.5	Sönüm Etkileri	54
5.5.1	Sönüm Matrisinin Özellikleri	54
5.5.2	Klasik Sönüm Matrisi	56
5.5.2.1	Rayleigh Sönümü ve Caugheg Sönümü	56
5.5.2.2	Modal Sönüm Matrislerinin Süperpozisyonu	59
5.6	Zorlanmış Titreşim	61
5.6.1	Newmark Metodu	62
5.6.1.1	Ortalama İvme Değişimi Yöntemi.....	63
5.6.1.2	Doğrusal İvme Değişimi Yöntemi.....	64
5.6.1.3	Lineer Sistemler için Newmark Bağıntıları	65
5.6.1.4	Newmark Metodu Algoritması	66
5.6.1.5	Newmark Metodunun Uygulanma Kriterleri.....	67
6.	Analizler	69
6.1	Serbest Titreşim Analizi	71
6.1.1	Sonlu Eleman Sayısının Etkisi	71
6.1.2	Mesnet Açıklığının ve Koşullarının Etkisi	73
6.2	Zorlanmış Titreşim Analizi	77
6.2.1	Sinüzoidal Yük Altında Zorlanmış Titreşim	77
6.2.1.1	Sinüzoidal Yük Frekansının Etkisi	77
6.2.1.2	Sönüm Oranı Etkisi	79
6.2.2	Deprem İvme Kayıtları Altında Zorlanmış Titreşim	81
6.2.2.1	İvme Kayıtları ve Mesnet Şartları Etkisi	84
6.2.2.2	Sönüm Etkisi.....	88
7.	SONUÇLAR.....	90
	KAYNAKLAR.....	92
	EKLER	95
	Ek 1 Bilgisayar programı.....	96
	ÖZGEÇMİŞ.....	114

SİMGE LİSTESİ

a, b	x, y doğrultularında plak boyutları
a_{ij}	Katsayılar
$a(t)$	Zamana bağlı ivme fonksiyonu
c	Sönüm oranı
c	Sabit katsayı
f	Frekans
g	Yerçekimi ivmesi
h	Plak kalınlığı
l_{ij}	Alt üçgen matrisin katsayıları
p, q, r	Sabit katsayılar
t	Zaman
t	Plak kalınlığı
u, v, w	x, y, z doğrultularında yer değiştirmeler
u	Deplasman parametresi
$\dot{u}$	Deplasman parametresinin zamana bağlı birinci türevi, hız
$\ddot{u}$	Deplasman parametresinin zamana bağlı ikinci türevi, ivme
u_i	"i" Zamanına ait deplasman parametresi
$\dot{u}_i$	"i" Zamanına ait deplasman parametresinin zamana bağlı birinci türevi, hız
$\ddot{u}_i$	"i" Zamanına ait deplasman parametresinin zamana bağlı ikinci türevi, ivme
x, y, z	Kartezyen koordinatlar
A	Alan
A_d	Dış Kuvvetlerin İşi
A_i	İç Kuvvetlerin İşi
C	Sistemin sönüm matrisi
D	Plak eğilme rijitliği
E	Elastisite Modülü
G	Kayma Modülü
I	Atalet Momenti
I	Birim matris
K	Sistemin rijitlik matrisi
L	Alt üçgen matris
M	Sistemin kütle matrisi
M_x, M_y	Eğilme Momentleri
M_{xy}	Burulma Momenti
P	Dış Yük
Q_x, Q_y	Kesme Kuvvetleri
T	Kinetik enerji
T	Period
U	Potansiyel enerji
V	Hacim
V_x, V_y	Kesme Kuvvetleri
Δ	Laplace operatörü
Δ	Sonlu fark
Δt	Zaman aralığı
α	Açı
β, γ	Newmark parametreleri
δA_d	Dış Kuvvetlerin virtüel işi
δA_i	İç Kuvvetlerin virtüel işi

δV_d	Dış Kuvvetlerin virtüel işi
δV_i	İç Kuvvetlerin virtüel işi
δW	Virtüel iş
ε	Şekil değiştirme
$\phi(x,y)$	Deplasman fonksiyonu
γ	Kayma şekil değiştirmesi
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Dönmeler
λ_r, λ_s	Özdeğerler
ν	Poisson oranı
π	Toplam potansiyel enerji
ρ	Malzeme yoğunluğu
ρ_z	Yayılı yük
σ	Normal gerilme
τ	Kayma gerilmesi
ω	Açısal frekans
ξ	Modal sönüm oranı
ξ, η	x ve y yönlerindeki parametreler
$\{a\}$	Polinom sabitleri
$[c_e]$	Eleman sönüm matrisi
$\{d\}$	Düğüm noktası deplasman parametreleri
$[f_e]$	Elemanın dış yük matrisi
$[k_e]$	Eleman rijitlik matrisi
$[m_e]$	Eleman kütle matrisi
$\{p_e(t)\}$	Elemanın zamana bağlı dış yükü
$\{u\}$	Deplasman vektörü
$[A]$	Bağ matrisi
$[B]$	Bağ matrisinin inversi
$[C]$	Sistemin sönüm matrisi
$\{D(t)\}$	Deplasman parametresi
$\{\dot{D}(t)\}$	Deplasman parametresinin zamana bağlı birinci türevi
$\{\ddot{D}(t)\}$	Deplasman parametresinin zamana bağlı ikinci türevi
$[K]$	Sistemin rijitlik matrisi
$[M]$	Sistemin kütle matrisi
$[N]$	Şekil fonksiyonları matrisi
$\{\phi\}$	Mod şeklinin vektörü
$\{\phi\}_r, \{\phi\}_s$	Özvektörler

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Üç boyutlu gerilme hali	5
Şekil 2.2 Asal yönler	6
Şekil 2.3 ABCD sonsuz küçük dikdörtgen elemanın şekil değiştirmesi	7
Şekil 2.4 Plak elemanı	12
Şekil 2.5 Plak elemanın şekil değiştirme hali	12
Şekil 2.6 Plak elemanında gerilmeler	15
Şekil 2.7 Sonsuz küçük plak elemanın dengesi	16
Şekil 4.1 Genel dikdörtgen eğilmeli plak elemanı	26
Şekil 4.2 Birinci düğüm noktasının hareketiyle oluşan burulma	27
Şekil 4.3 Sonlu elemanlar ağı içindeki komşu elemanlar	28
Şekil 4.4 12 Serbestlik dereceli elemanların karşılaştırması	31
Şekil 5.1 Eğilmeli plak elemanı	33
Şekil 5.2 Dikdörtgen elemanın geometrisi	38
Şekil 5.3 Basit mesnetli kare plağın titreşim frekansları	41
Şekil 5.4 İç kuvvetlerin pozitif yön kabulleri	47
Şekil 5.5 Kütle ve rijitlik oranlı sönüm	57
Şekil 5.6 Rayleigh sönümü	58
Şekil 5.7 Ortalama ivme değişim yönteminde ivme değişimi	63
Şekil 5.8 Lineer ivme değişimi yönteminde ivme değişimi	64
Şekil 6.1 Mesnetlenme tipleri ve kısaltmaları	70
Şekil 6.2 Birinci doğal titreşim frekansının sonlu eleman sayısı karşısındaki değişimi	72
Şekil 6.3 İkinci doğal titreşim frekansının sonlu eleman sayısı karşısındaki değişimi	72
Şekil 6.4 Mesnetlenme koşullarının ve açıklıklarının birinci doğal titreşim frekansı üzerindeki etkisi	75
Şekil 6.5 Dört kenarından ankastre kare plağın birinci mod şekli	76
Şekil 6.6 Dört kenarından ankastre kare plağın ikinci mod şekli	76
Şekil 6.7 Dört kenarından ankastre plağın değişik frekanslı sinüzoidal yükler altındaki zorlanmış titreşimi, sönüm = %5	78
Şekil 6.8 Değişik sönümlere sahip dört kenarından ankastre plağın sinüzoidal yük altındaki zorlanmış titreşimi, $\omega = 200$ hz	80
Şekil 6.9 Deprem düşey ivme kayıtları	82
Şekil 6.10 Deprem düşey ivme kayıtlarının %5 sönüme göre hazırlanmış spektrumları	83
Şekil 6.11 Dört kenarından ankastre kare plağın düşey deprem ivmesi altında zorlanmış titreşimi, $L = 6m$, sönüm = %5	85
Şekil 6.12 Dört kenarından basit mesnetli kare plağın düşey deprem ivmesi altında zorlanmış titreşimi, $L = 6m$, sönüm = %5	86
Şekil 6.13 Karşılıklı kenarları basit ve ankastre mesnetli kare plağın düşey deprem ivmesi altında zorlanmış titreşimi, $L = 6m$, sönüm = %5	87
Şekil 6.14 Dört kenarından basit mesnetli kare plağın düşey deprem ivmesi altında zorlanmış titreşimine sönümün etkisi, $L = 6m$,	89

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1	Virtüel yer - hakiki yer ve şekil değiştirmeler.....	24
Çizelge 5.1	Basit mesnetli plağın doğal titreşim frekanslarının, analitik sonuçlara göre hata oranı	42
Çizelge 5.2	Tavsiye edilen sönüm oranları	55
Çizelge 6.1	Sonlu eleman sayısının doğal titreşim frekansına etkisi	72
Çizelge 6.2	Mesnetlenme koşullarına ve mesnet açıklıklarına göre doğal titreşim frekansları	74



ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, plakların eğilmeli dinamik davranışları sonlu elemanlar metodu kullanılarak modellenmiş, serbest titreşim özellikleri belirlenerek, sinüzoidal yük ve düşey deprem kayıtları altındaki titreşimleri, farklı sınır şartları ve sönüm oranları için incelenmiştir.

Yüksek Lisans ve Tez çalışmalarım süresince beni amaca yönlendirip değerli bilgileriyle aydınlatan, Sayın Prof. Dr. Ercüment Köksal'a, her türlü desteği ve yardımı esirgemeyen Sayın İnş. Yük. Müh. Sezgin Kurtuldu'ya teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, başta bu günlere ulaşmamı sağlayan ailem olmak üzere, tez çalışmalarım sırasında yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen İnş. Yük. Müh. Ömer Güzel'e, İnş. Yük. Müh. Kürşat Oğuzhan'a, İnş. Yük. Müh. Nihan Doğramacı'ya ve YM Mühendislik Bölümü çalışanlarına teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Ülkemizde 17 Ağustos 1999 ve sonraki depremlerin neden olduğu can ve mal kayıpları, dolayısı ile deprem olaylarına verilen önem, yapı dinamiği, dinamik analiz ve deprem mühendisliği konularına olan ilginin artmasına neden olmuştur. Dinamik analiz deprem mühendisliği konularının temel esaslarını vermesi bakımından önemlidir.

Bu tez çalışmasında, plakların eğilmeli dinamik davranışları sonlu elemanlar metodu kullanılarak modellenmiş, serbest titreşim özellikleri belirlenerek, sinüzoidal yük ve düşey deprem kayıtları altındaki titreşimleri, farklı sınır şartları ve sönüm oranları için incelenmiştir.

İlk olarak plak tanımları yapılmış, elastisite teorisi ve bunun özel bir durumu olan plak teorisi açıklanarak, sonlu elemanlar metodu hakkında genel bilgiler verilmiştir. Daha önce yapılan çalışmalar incelenmiş ve karşılaştırmaları hakkında bilgi verilmiştir. Plak analizlerinde kullanılan “Melosh Plak Elemanı’na” ait matrisler ve bağıntılar çıkartılarak, analizlerin yapılacağı bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu program yardımı ile değişik mesnetlenme şartlarına ve sönüm oranlarına sahip plakların serbest sönümsüz titreşim ile zorlanmış sönümlü titreşim analizleri yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Sonlu elemanlar metodu, zorlanmış plak titreşimi, Jacobi metodu, Ragleigh sönümü, Newmark metodu

ABSTRACT

17 August 1999 and the subsequent earthquakes caused losses of life and possessions, in our country. Afterwards the increasing importance of earthquake incidents, were expanded the importance of structure dynamics, dynamic analysis and earthquake engineering subjects. Dynamic analysis is essential because of stating the rule of thumb of earthquake engineering subjects.

In this thesis, flexural dynamic behaviours of plates was modelled with finite element method, free vibration properties was determined and forced vibrations under sinusoidal force and earthquake motion data was analyzed with different boundary conditions and damping ratios.

First of all the definition of the plates was stated. Elasticity theory and a specific case of it, plate theory was described. Some preliminary issues and descriptions about finite element method was explained. A research was done related with the previous works and the comparison of these works was stated. The element matrices and correlations of "Melosh Plate Element" was derived and a computer program was written in order to make the necessary analysis. With the help of this programme free undamped vibration and forced damped vibration analysis were performed for several plates with different boundary conditions and damping ratios.

Keywords: Finite element method, forced plate vibrations, Jacobi method, Ragleigh Damping, Newmark Method

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, plakların eğilmeli dinamik davranışları sonlu elemanlar metodu kullanılarak modellenmiş, serbest titreşim özellikleri belirlenerek, sinüzoidal yük ve düşey deprem kayıtları altındaki titreşimleri, farklı sınır şartları ve sönüm oranları için incelenmiştir.

İkinci bölümde yüzeysel taşıyıcı sistemler ve plaklar genel olarak tanıtılmış, plak davranışının teorik altyapısını açıklamak için de elastisi teorisi ve bu teorinin özel bir durumu olan plak teorisi anlatılmış, kabulleri ve bağıntıları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, analizlerin yapılmasında kullanılan sonlu elemanlar metodunun özellikleri ve kullanım alanları anlatılmıştır. Bu metodun uygulanışında kullanılan deplasman ve şekil fonksiyonlarına ait bilgiler verilerek, virtüel iş prensibi ile eleman matrislerinin bulunuşu açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde daha önce bu konuda yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca plakların eğilmeli dinamik davranışının modellenmesi amacıyla geliştirilen sonlu elemanlar ile bu elemanların kullanım kriterleri belirtilerek karşılaştırmaları yapılmıştır.

Beşinci bölümde ise, yapılan analizlerde kullanılan “*Melosh Plak Elemanı’na*” ait eleman matrisleri çıkartılmıştır. Serbest sönümsüz titreşim ve zorlanmış sönümlü titreşim analizleri için gereken hareket denklemleri çıkartılmış ve bu denklemlerin çözümlerinde kullanılan sayısal metodlar hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca sönüm tipleri hakkında bilgi verilmiş, ve sistem sönüm matrislerinin hazırlanışı açıklanmıştır.

Altıncı bölümde ise, beşinci bölümde açıklanan metodlarla yazılan bilgisayar programı ile yapılan analizlerin, sonuçları verilmiştir. Yapılan analizler genel olarak iki başlık altında toplanmıştır: Serbest sönümsüz titreşim analizleri ve zorlanmış sönümlü titreşim analizleri. Serbest sönümsüz titreşim analizlerinde, mesnet şartlarının, plak açıklıklarının ve sonlu eleman sayısının etkisi incelenmiştir. Zorlanmış sönümlü titreşim analizlerinde ise, sinüzoidal yük ve deprem ivmesi altındaki plaklarda, mesnet şartlarının, sönüm oranlarının, yük frekanslarının ve deprem ivme kayıtlarının etkisi incelenmiştir.

Elde edilen tüm sonuçlar, son bölüm SONUÇLAR’da yorumlanmıştır.

2. PLAK TEORİSİ

Klasik plak teorisi, elastisite teorisinin özel uygulama alanıdır. Elastisite teorisi elastik cisimlerde; kuvvet, yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilmeler arasındaki ilişkileri inceler. Bu teoride, incelenen cisimlerin lineer-elastik, homojen ve izotrop olduğu kabulü esastır. Elastik plak teorisi ise, özel olarak, plak problemlerini ve matematiksel çözüm yollarını, yani geometrisi, sınır şartları ve üzerine etkiyen yükleri bilinen plağın $\Delta\Delta w = P(x,y)/D$ diferansiyel denkleminin sınır şartlarını da sağlayan $w = w(x,y)$ elastik yüzey ifadesini araştırır. Küçük sehimli ince plaklar, plak probleminin özel bir durumu olarak ele alınabilir. Uygulamada çok geniş bir alanı olan bu tip plaklar özellikle betonarme döşemelerin çoğunu kapsar.

2.1 Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler

Kalınlıkları, taşıyıcı yöndeki boyutları yanında küçük olan sistemlere, yüzeysel taşıyıcı sistemler denir. Bu tür taşıyıcıların kalınlıklarının orta noktalarını birleştiren yüzeye orta yüzey denir. (Berktaş, 1992)

- Orta yüzey bir düzlem ise, sistem düzlemsel taşıyıcı sistem adını alır. Düzlemsel taşıyıcı sistemler dış yüklerin etkiye biçimine göre bölümlere ayrılır:
 - Dış yükler orta düzleme dik olarak etkiyorsa sistem plak adını alır.
 - Dış yükler orta düzlem içinde etkiyorsa sistem levha adını alır.
- Orta yüzey düzlem değil de, herhangi bir eğri yüzey ise bu yüzeysel taşıyıcı sisteme kabuk denir. Kabuklar kendi aralarında geometrik özelliklerine göre sınıflandırılır:
 - Dönel Kabuklar: Bir eğri parçasının bir eksen etrafında dönmesi ile elde edilen kabuklardır.
 - Silindirik Kabuklar: Dönel kabukların özel bir halidir. Dönen eğri parçası, eksene paralel bir doğru ise silindirik kabuk meydana gelir.
 - Öteleme Kabuklar: Bir eğrinin diğer bir eğri üzerinde kaydırılması ile elde edilen kabuklardır.

2.2 Plaklar

Plaklar, yüzeysel taşıyıcı sistemlerin, düzlemsel taşıyıcı sistemidir. Yani kalınlığı diğer boyutları yanında çok küçük olan, statik ve dinamik yükler düzlemine dik olarak etkiyen, düzlem sistemlerdir. Geometrik olarak hem düz hem de eğri kenarlar ile sınırlandırılabilirler. Statik olarak plaklar; serbest, sabit, ankastre sınır şartlarına veya bazı durumlarda nokta mesnetlenme şekillerine sahip olabilirler. (Berktaş, 1992)

Plakları çalışma biçimi göz önünde tutularak aşağıdaki şekilde gruplara ayrılırlar:

- **Rijit Plaklar:** Eğilme rijitlikleri olan ince plaklardır. Yükler iki boyutlu olarak genelde iç (eğilme ve burulma) momentleri ve kesme kuvvetleri ile taşınır. Mühendislikte aksi belirtilmedikçe rijit plak anlaşılır.
- **Membran:** Eğilme rijitliği olmayan ince plaklardır. Yükler eksenel (normal) kuvvetler ile taşınır.
- **Esnek Plaklar:** Bu plaklar rijit ve membran plakların birleşik çalışmasıdır. Dış kuvvetler, iç momentler, kesme ve normal (eksenel) kuvvetler ile taşınır.
- **Kalın Plaklar:** Bu plakların iç gerilmeleri üç boyutlu gerilme durumuna benzer.

Bütün yapısal teoriler kesin olarak küçük yer değiştirmelere sahip olan yapılar ile büyük yer değiştirmelere sahip yapılar olarak ayrılır. Plaklar, küçük sehimli ve büyük sehimli olarak ayrılabilir. Büyük sehim yapan plaklardan sakınılır. Bu tip plaklar, mühendislik pratiğinde, (analizinde ve uygulamasında) pek çok problem oluşturur. Ayrıca plaklar izotropik ve ortotropik mekanik özelliklere sahip olabilir ve çeşitli malzemelerin tabakalaşması ile meydana gelebilir. Plak teorileri gerilme-şekil değiştirme ilişkilerine bağlı olarak gruplandırılabilir. Elastik plak teorisi, gerilme-şekil değiştirme arasında lineer bir ilişkinin kabulüne dayanır.

2.3 Elastisite Teorisi

Elastisite teorisi, elastik cisimde kuvvetlerin, yer deşiştirmelerin, gerilme ve şekil deşiştirmelerin ilişkisini ortaya koyan matematiksel fiziğin önemli bir konusudur. Katı bir cisim, dış kuvvetlere maruz kaldığında, iç gerilme üreterek şekil deşiştirir. Deformasyonlar, cismin geometrik ve mekanik özelliklerinden etkilenir. Elastisite teorisinde, malzemeler lineer elastik (yani gerilme-şekil deşiştirme ilişkisi lineerdir), homojen, izotropdur (malzemenin mekanik özellikleri E ve ν her doğrultuda aynı değeri alır) ve dış yük ortadan kalktığında gerilmeler ve şekil deşiştirmeler de yok olur. (Köksal, 1996)

2.3.1 Elastik Cisimlerde Gerilme Hali

Rijit cisim statığında sadece cisme uygulanan dış kuvvetler ile ilgilenilir, deformasyonlar ihmal edilir. Oysa ki, elastisite teorisinde dış kuvvetlerin meydana getirdiği deformasyon göz önünde tutulur ve cismin deformasyonu içinde dış kuvvetler, iç kuvvetlere dönüşür. X, Y, Z koordinat sistemi içinde dış kuvvetlere maruz dengede olan elastik cismi, iki parçaya ayırdığımızda, cismin dengesi, ara kesit üzerine etki eden dış kuvvetler tarafından sağlanabilmektedir. Ara kesit üzerinde küçük bir ΔA alanı alıp, bu alana etkiyen iç kuvvetleri ΔP ile gösterdiğimizde $\Delta P / \Delta A$ oranı gerilmeyi verir. Gerilme bu oranın limitidir.

$$\text{Gerilme} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta P / \Delta A \quad (\text{Birim alana gelen kuvvet}) \quad (2.1)$$

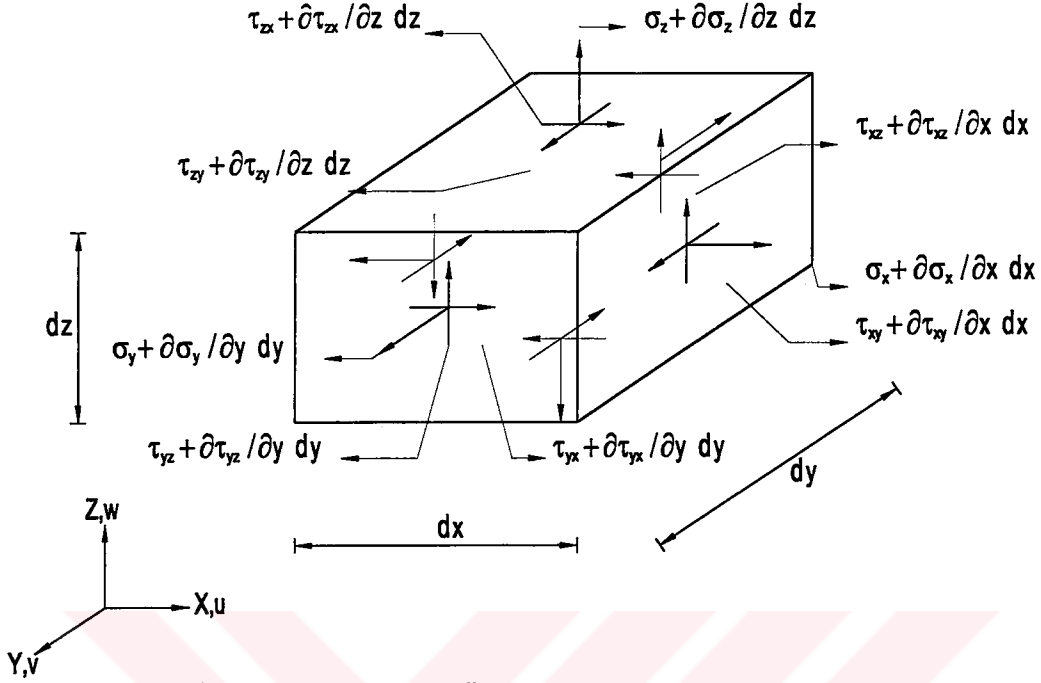
ΔP kesite genelde normal değildir. Bunu normal ve teğet bileşenlerine ayırarak, σ normal gerilme ve τ kayma gerilmeleri elde edilir.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta P_n / \Delta A \quad (2.2)$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta P_t / \Delta A \quad (2.3)$$

Elastik cisim üzerinde gerilme durumu noktadan noktaya değişir. $\sigma(x, y, z), \tau(x, y, z)$

Üç boyutlu gerilme durumunu tanımlayabilmek için koordinat düzlemlerine paralel yüzleri olan paralelkenarlı sonsuz küçük prizmayı alalım.



Şekil 2.1 Üç boyutlu gerilme hali

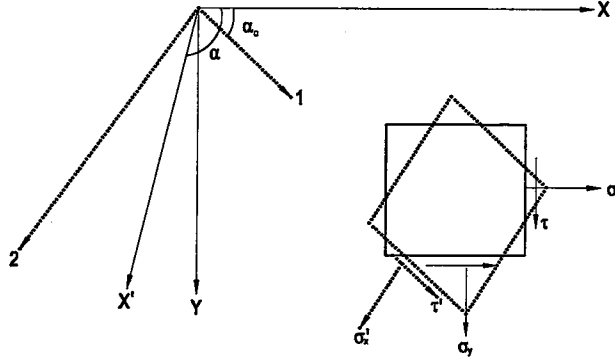
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sırasıyla X, Y, Z doğrultularındaki normal gerilmelerdir. Alt indis gerilme vektörünün etki ettiği yüzeyin normalini belirler. Kayma gerilmeleri iki alt indisle belirtilir. Birinci alt indis yüzeyin normalini, ikinci alt indis τ kayma gerilmesinin yönünü belirtir. Çekme gerilmesi pozitif, basınç gerilmesi negatif işaret ile gösterilir. Üç boyutlu gerilme halinde elastik cismin herhangi bir noktasında dokuz bileşenli gerilme tansörü vardır. $[\sigma]$ matrisi diagonal eksenine göre simetriktir.

Dönmeye karşı yazılan denge denklemlerinden;

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2.4)$$

Bu bağıntıları, karşılıklı kayma gerilmelerinin eşitliği teoremi olarak ifade edilir.

İki boyutlu elemana uygun olan σ_x, σ_y, τ gerilme bileşenlerinin kartezyen koordinatlarda bilindiğini kabul edelim.



Şekil 2.2 Asal yönler

1 ve 2 asal yönleri içinde τ kayma gerilmesi ortadan kalkar ve σ maksimum değere ulaşır. 1 ekseninin X eksenine ile yaptığı açı α_0 ;

$$\tan 2\alpha_0 = 2\tau / (\sigma_x - \sigma_y) \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \tan^{-1} 2\tau / (\sigma_x - \sigma_y) \quad (2.5)$$

Bu düzlem üzerindeki maksimum ve minimum gerilmeler, asal gerilmeler olarak adlandırılır. σ_1, σ_2 ;

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (2.6)$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 / 4 + \tau^2} \quad (2.7)$$

α açısı değiştiğinde gerilme bileşenlerinin değişimi;

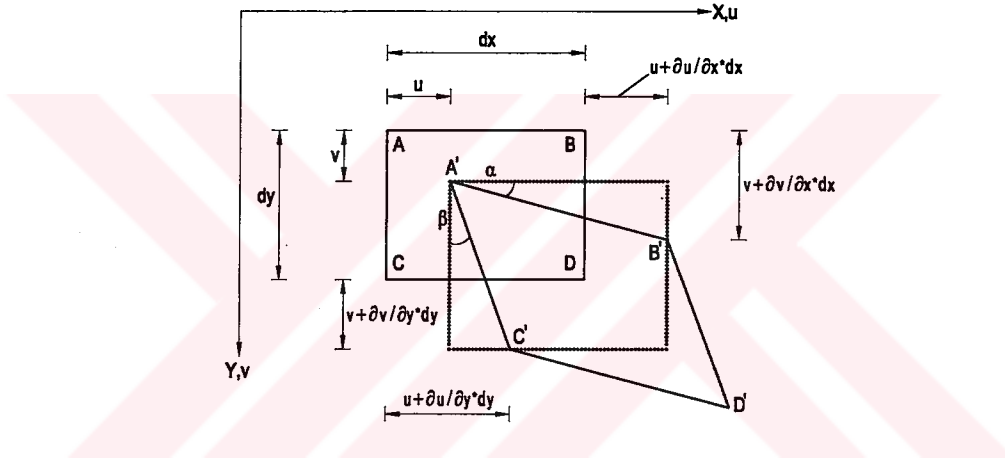
$$\sigma_x^1 = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 + (\sigma_x - \sigma_y) / 2 \times \cos 2\alpha + \tau \times \sin 2\alpha \quad (2.8)$$

$$\tau^1 = \tau \times \cos 2\alpha - (\sigma_x - \sigma_y) / 2 \times \sin 2\alpha \quad (2.9)$$

2.3.2 Şekil Değiştirme Hali

Katı bir cismin şekil değiştirmesi, bu cisme ait noktaların u, v, w yer değiştirme bileşenleri yardımıyla tarif edilebilir. Şekil değiştirme esnasında cismin sürekliliği korunduğundan yer değiştirme bileşenleri X, Y, Z koordinatlarının sürekli bir fonksiyonu olurlar. Komşu noktaların yer değiştirmeleri birbirlerinden, sadece diferansiyel kadar fark ederler. $P(x, y, z)$ noktasında meydana gelen yer değiştirmeler u, v, w ise, buna komşu olan $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ noktasındakiler $u+du, v+dv, w+dw$ olur.

Katı cismin şekil değiştirmesi esnasında bu cisme ait noktaların birbirlerine olan mesafeleri değiştiği gib doğrusal elemanların meydana getirdiği açılar da değişir.



Şekil 2.3 ABCD sonsuz küçük dikdörtgen elemanın şekil değiştirmesi

Şekilde belirtilen yer değiştirme vektörleri bileşenlerinden yararlanılarak şekil değiştirme bileşenleri aşağıdaki şekilde hesaplanır. Bu hesaplarda birinci mertebe teorisinin gerektirdiği ihmalleri yapılarak sonuçlara ulaşılır.

$$\varepsilon_x = A'B' - AB / AB \approx [(dx + \partial u / \partial x \times dx) - dx] / dx = \partial u / \partial x \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_y = A'C' - AC / AC \approx [(dy + \partial v / \partial y \times dy) - dy] / dy = \partial v / \partial y \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx (\partial v / \partial x \times dx / dx + \partial u / \partial y \times dy / dy) = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y \quad (2.12)$$

benzer tarz ile $\varepsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ bulunur. $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ kordinat eksenleri doğrultusundaki boy değişimi (birim boy değişimi), $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ dx, dy, dz elemanları arasındaki dik açılarda değişme miktarını gösterir.

2.3.3 Hooke Elastisite Kanunu

Gerilme ve yer değiştirme bileşenleri, birbirlerine şekil değiştirme kanunları ile bağlıdır. En basit şekil değiştirme kanunu *Hooke Kanunu*' dur. Bu kanuna göre şekil değiştirme onu meydana getiren gerilme ile orantılıdır ve ayrıca gerilmeler ile şekil değiştirme arasında $\varepsilon = \sigma / E$ türünde bir ilişkiyi ortaya koyar. Ayrıca ε_q enine büzölme de σ ile orantılıdır. $\varepsilon_q = -\nu \sigma / E$. E sabitine Elastisite Modülü, ν sabitine ise Poisson Oranı adı verilir. Hooke kanunu lineer bir bağıntı olduğundan ayrı ayrı tesirleri biraraya getirerek süperpozisyonuna imkan verir. X, Y, Z doğrultularındaki normal gerilmeler ile boy değişimleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] / E \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] / E \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_z = [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] / E \quad (2.15)$$

Benzer analogi ile kayma gerilmesi ile kayma şekil değiştirmeleri arasında da $\gamma = \tau / G$ bağıtısı vardır. G sabitine *Kayma Modülü* denir. Kayma modülü ile elastisite modülü arasında $G = E / 2 (1 + \nu)$ ilişkisi vardır.

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \quad (2.16)$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G \quad (2.17)$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{zx} / G \quad (2.18)$$

2.3.4 Şekil Değiştirme İşi

Yüklenmiş bir cismin deformasyonu esnasında, etki eden kuvvetlerin yaptığı iş, cismin bütün hacmi boyunca şekil değiştirme enerjisi olarak depo edildiği kabul edilir. Bu iş, hiçbir parçası diğer enerjilere dönüşerek kaybolmamalıdır. Kuvvetlerin sıfırdan başlayarak son derece yavaş bir biçimde cisme etki ettikleri kabul edilir. Bu durumda her an dış kuvvetler ile iç kuvvetler arasında denge kurulmuş olur. Cismin şekil değiştirme işi, bu cismi teşkil eden hacim elemanlarındaki işlerin toplanması ile elde edilir. Şekil 2.1 cismini gözönüne aldığımızda yan yüzlerin cismin diğer parçaları tarafından $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ birim kuvvetlerinin etkidiği ve bu kuvvetlerin dış kuvvet olarak alınabileceği kabul edilir. İç direçler ise bunların ters yönünde olup bunlarla denge kurmaktadır. Bundan dolayı iç dirençlerin şekil değiştirme işini, dış kuvvetlerin işi olarak hesaplayabiliriz. Her iki iş de mutlak değerce aynı değerdedir. Elemanın X eksenine dik kenar yüzleri arasında dx mesafesi deformasyon esnasında $\sigma_x dx dz$ etkisinde $\epsilon_x dx$ kadar büyür. Bu esnada kuvvet yer değiştirme işini meydana getirir ve gerçekte kuvvet sıfırdan başlayarak son değerini almaktadır. $dV = dx dy dz$ olmak üzere

$$\frac{1}{2}(\sigma_x dy dz) \epsilon_x dx = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x) dV \quad (2.19)$$

bağıntısı yazılır. σ_y, σ_z için de benzer tarzda hesaplanır. Kayma kuvvetlerinin tatbik noktasının yer değiştirmesi $\lambda_{xy} dx$ ve buna ait iş ise

$$\frac{1}{2}(\tau_{xy} dy dz) \gamma_{xy} dx = \frac{1}{2}(\tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (2.20)$$

şeklindedir. γ_{yz} ve γ_{zx} için de benzer ifadeler elde edilir. Bu takdirde cisme ait şekil değiştirme işi, hacim elemanı içinde elde edilmiş olan işleri toplayıp, hacmi boyunca integre edilerek aşağıdaki bağıntı bulunur,

$$Ai = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (2.21)$$

2.3.5 Virtüel Yer Değiştirme Prensibi

Bir cisim oluşturan noktaların, bu cismin mesnet şartlarına ve katı formuna uygun olarak ve şekil değiştirmeleri sonsuz küçük olması halinde yapabileceği yer değiştirmelerine *virtüel yer değiştirmeler* denir. Bu prensip; dengede bulunan bir cisim sınır koşullarına uygun, denge konumunu bozacak şekilde bir virtüel yer değiştirme verilecek olursa bu takdirde dış kuvvetlerin (hacim ve yüzey kuvvetler) yapacağı iş, iç kuvvetlerin δA_i işine eşit olur. Birim hacime etki eden kuvvetleri bileşenleri b_x, b_y, b_z dış yüzeyin birim alanına etki eden yüzey kuvvetlerin bileşenleri p_x, p_y, p_z cisme ait noktaların virtüel yer değiştirme yolunun bileşenleri $\delta u, \delta v, \delta w$ ile yüzey kuvvetlerinin tatbik noktalarına ait virtüel yer değiştirme bileşenleri $\delta u', \delta v', \delta w'$ ile gösterilirse

$$\delta Ad = \int_v (b_x \delta u + b_y \delta v + b_z \delta w) dV + \int_0 (p_x \delta u' + p_y \delta v' + p_z \delta w') dO \quad (2.22)$$

yazılabilir. Burada birinci integral cismin hacmi, ikincisi ise yüklenmiş bütün dış yüzey boyunca alınmalıdır. Kuvvetlerin yer değiştirme esnasında değişmedikleri kabul edilmektedir. Bundan başka;

$$\delta A_i = \int_v (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \dots + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (2.23)$$

yazılabilir. Burada $\delta \varepsilon_x + \delta \varepsilon_y + \delta \varepsilon_z + \dots + \delta \gamma_{xz}$ değerleri, virtüel yer değiştirme esnasında şekil değiştirme bileşenlerinde meydana gelen değişimlerdir. Bu prensip gereği $\delta Ad = \delta A_i$ olur.

Kuvvetlerin değişmediği düşünülerek (2.22) ifadesindeki varyasyon işareti integral önüne koyacak olursak bu takdirde virtüel yer değiştirmeler prensibi;

$$\delta \left[Ad - \int_v (b_x u + b_y v + b_z w) dV + \int_0 (p_x u' + p_y v' + p_z w') dO \right] = 0 \quad (2.24)$$

formunda yazılabilir. Köşeli parantez içindeki ifadeye sistemin *potansiyel enerjisi* denir ve π ile gösterilir. Bu ifade gerçek durumda oluşan u, v, w yer değişimleri, cismin mesnet şartlarına ve katı formuna uygun olarak yapabileceği çeşitli $u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w$ yer değişimlerine nazaran, π potansiyel enerjisini ekstrem kılma özelliğine sahiptir. Bu ekstrem araştırılmasından da elde edilebileceği gibi burada, bir en küçük değer söz konusudur. Bu

teoreme *potansiyel enerjinin minimum olması teoremi* denir ve $\delta\pi = 0$, $\pi = \text{minimum}$ şeklinde ifade edilir.

2.4 Plak Diferansiyel Denkleminin Çıkartılması

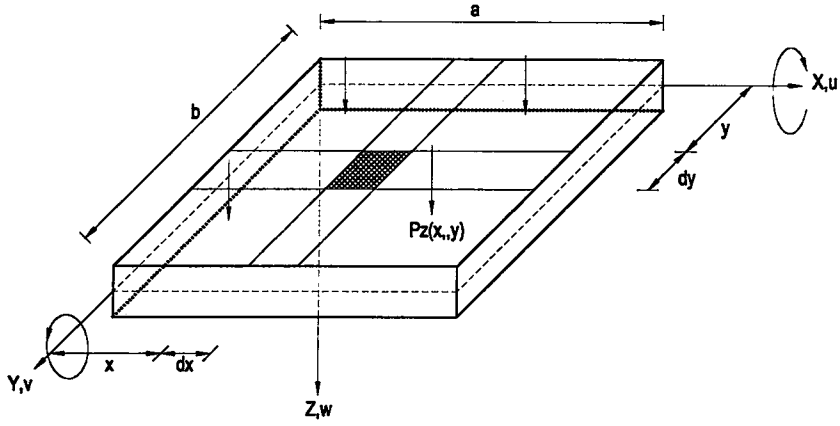
2.4.1 Tanım ve Varsayımlar

Kalınlığı, taşıyıcı boyutların yanında küçük ve orta düzlemine dik olarak yüklenmiş düzlemsel taşıyıcı sistemlere plak denir. Farklı konumlarda çeşitli plak teorileri vardır. En basit ve en geniş alanda kullanılan klasik küçük sehimli plak teorisidir. Bu teori aşağıdaki bazı varsayımları kapsar. (Köksal, 1996)

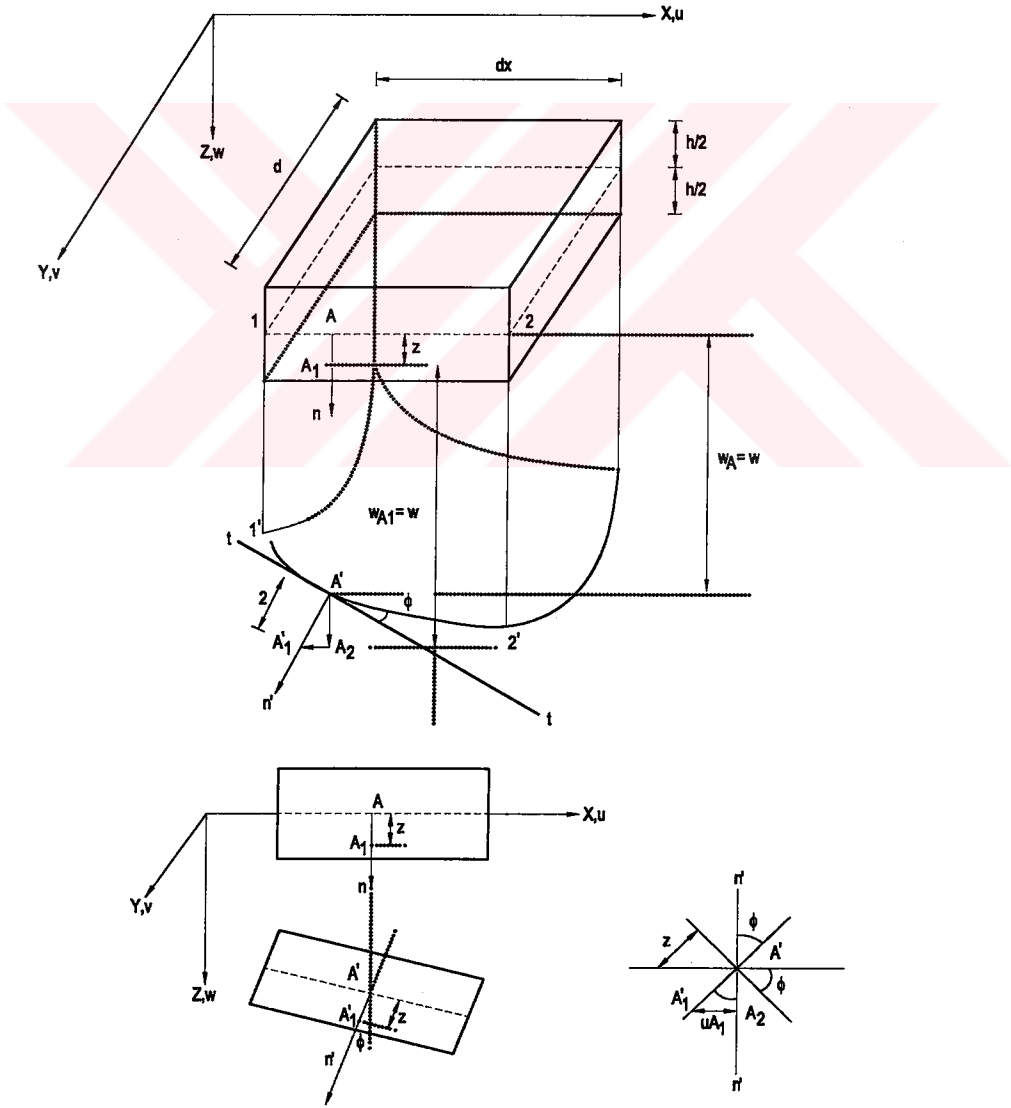
- Plak geometrisi olarak;
 - Plak kalınlığı diğer boyutların yanında çok küçüktür.
 - Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlemdir.
 - Yükler orta düzleme diktir.
 - Plagın sehim h kalınlığının yanında daima çok küçüktür, ($w \ll h$).
- Malzeme yönünden;
 - Malzeme homojen, izotrop, Hooke kanununa uyan lineer elastik bir malzemedir.
- Hesapları basitleştirme yönünden;
 - Deformasyondan önce orta düzlemin herhangi bir noktasının normali, deformasyondan sonra meydana gelen elastik yüzeyin normali olarak kalır. Başka bir deyişle deformasyondan önce, orta düzlemin normali üzerinde bulunan nokta, deformasyondan sonra da elastik yüzeyin o noktadaki normali üzerinde bulunur. Bu çubuk sistemlerdeki *Bernouilli-Navier* hipotezine karşı gelen *Kirchhoff-Love* hipotezidir.
 - Plak orta düzlemine dik doğrultudaki σ_z normal gerilmeleri yok sayılabilecek kadar küçüktür.
 - Yukarıdaki varsayıma bağlı olarak $\varepsilon_z \approx 0$ alınabilir.
 - Kesitin orta düzleminde şekil değiştirme yoktur.

2.4.2 Geometrik Bağıntılar

Bu bölümde, geometrik bağıntılar yardımı ile şekil değiştirme bileşenleri ve yer değiştirme bileşenleri arasındaki bağıntılar çıkarılacaktır. Bir plagi ve XZ, YZ düzlemlerine paralel olan düzlemleri plaktan çıkararak alınan bir elemanı gözönüne alalım.



Şekil 2.4 Plak elemanı



Şekil 2.5 Plak elemanın şekil değiştirme hali

Çökmeden sonra A noktası z doğrultusunda A' noktasına yerleşecek ve (1-2) çizgisi (1'-2') eğrisi olacaktır. Ayrıca A_1 noktası A_1' konumunu alacaktır. Eğrinin A' noktasında çizilen teğeti ile yatay eksen arası ϕ açısı, bu noktadaki normal düzlem ile düşey eksen arasındaki açıya eşittir. Bu açının çok küçük olacağı kabul edilebilir. Sonucunda $1 \tan^2 \phi \approx 1$ ve ayrıca $\sin \phi \approx \tan \phi \approx \phi$ (radyan), $\cos \phi \approx 1$

$$u_A = 0, \quad v_A = 0 \quad (2.25)$$

$$|AA_1| = |A'A_1| = z \quad (2.26)$$

$$|A'A_2| = z \cos \phi \approx z \quad (2.27)$$

$$|AA'| = w_A = w = |A_1A_2| = w_{A1} \quad (2.28)$$

$$|A_1'A_2| = |A'A_2| \tan \phi = z \tan \phi = z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.29)$$

$$u_{A1} = u_A - z \frac{\partial w}{\partial x} = 0 - z \frac{\partial w}{\partial x} = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.30)$$

benzer şekilde;

$$v_{A1} = v_A - z \frac{\partial w}{\partial y} = 0 - z \frac{\partial w}{\partial y} = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.31)$$

Bağıntılardan z derinliğinde A_1 noktasının yer değiştirmeleri bilinmektedir.

$$u_{A1}(x, y) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.32)$$

$$v_{A1}(x, y) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.33)$$

$$w_{A1}(x, y) = w(x, y) \quad (2.34)$$

z derinliğinde A_1 noktasının şekil değiştirmeleri de bulunur. Birim boy değişimi;

$$(\varepsilon_x)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_z = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.35)$$

$$(\varepsilon_y)_z = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_z = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.36)$$

Açı değişimi

$$(\gamma_{xy})_z = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.37)$$

2.4.3 Gerilmelerle-Şekil Değiştirme ve Yer Değiştirme Bileşenleri Arasındaki Bağlılıklar

Yapılan varsayımlar sonucu $\sigma_z \approx 0$ ve $\varepsilon_z \approx 0$ olduğuna göre elastisite teorisinden bilinen bağıntılar yardımı ile;

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu \sigma_y] / E \quad (2.38)$$

$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu \sigma_x] / E \quad (2.39)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G = 2(1 + \nu) \gamma_{xy} / E \quad (2.40)$$

bu bağıntılardan gerilmeler çekilirse;

$$(\sigma_x)_z = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)_z \quad (2.41)$$

$$(\sigma_y)_z = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)_z \quad (2.42)$$

$$(\tau_{xy})_z = \frac{E}{2(1 + \nu)} (\gamma_{xy})_z \quad (2.43)$$

gerilme bağıntılarında; şekil değiştirme bağıntıları (2.35), (2.36) ve (2.37) yerlerine yazılırsa;

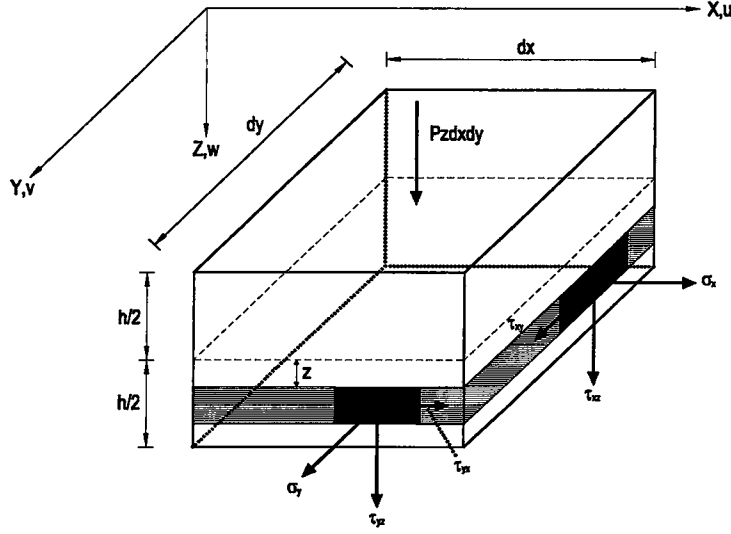
$$(\sigma_x)_z = -\frac{Ez}{(1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.44)$$

$$(\sigma_y)_z = -\frac{Ez}{(1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.45)$$

$$(\tau_{xy})_z = -\frac{Ez}{(1 + \nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.46)$$

Bağıntılardan görüldüğü gibi gerilmeler, kesit yüksekliğince lineer değişmektedir.

2.4.4 Gerilmelerin Bileşkesi Olarak Momentlerin Bulunması



Şekil 2.6 Plak elemanında gerilmeler

Gerilme bileşenleri $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ kiriş teorisinde olduğu gibi plak elemanında da moment oluştururlar. M_x, M_y, M_{xy} birim boyda etki eden momentlerdir. M_x momenti $dy=1$ birim için σ_x gerilmelerin tarafsız eksene göre momentidir. dz yüksekliğinde diferansiyel elemana etki eden kuvvet $\sigma_x dF$ olur. Bu kuvvetin tarafsız eksene göre momenti, ($dF=dy dz$)

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dy dz z = dy \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \quad (2.47)$$

$$M_x = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{h^3}{12} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.48)$$

Benzer şekilde

$$M_y = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.49)$$

$$M_{xy} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.50)$$

Dikkat edilirse $1 \times h^3 / 12$ 'nin birim genişlik için plak atalet momenti olduğu görülür. Buradan,

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z \quad (2.51)$$

bağıntısı bulunur. $D = \frac{EI}{(1-\nu^2)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ *plakın eğilme rijitliği* olarak tanımlanır.

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.52)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.53)$$

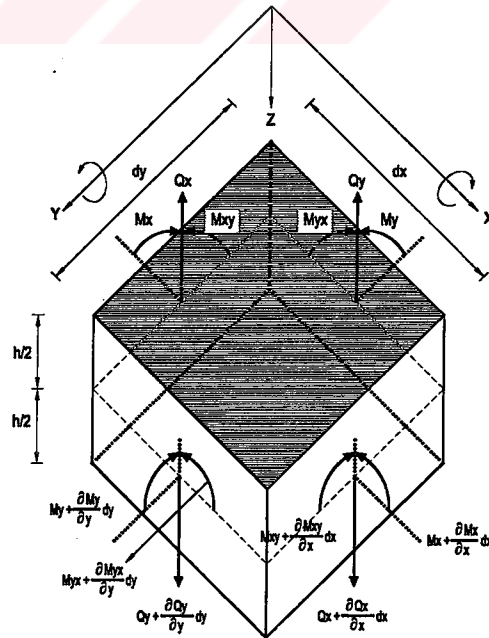
$$M_{xy} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.54)$$

2.4.5 Plak Elamanının Dengesi ve Plak Diferansiyel Denklemleri

$P_z(x, y)$ yükü etkisinde bulunan plakta 6 temel denge denklemlerinden 3 tanesi kullanılır.

$$\sum P_z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0$$

Plakların davranışı, iki boyutlu olarak kirişlerin ızgara çalışımı yönünden önemli farklılığı M_{xy} , M_{yx} burulma momentidir. Diferansiyel bir elemanın serbest yüzlerine etki eden kesit tesirleri M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y olacaktır.



Şekil 2.7 Sonsuz küçük plak elemanın dengesi

Z yönünde kuvvetlerin toplamı $\sum P_z = 0$

$$P_z dx dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -P \quad (2.55)$$

Bütün kuvvetlerin Y eksenini etrafındaki momentlerin toplamı $\sum M_x = 0$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy dx - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy dx - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx dx / 2 - P dx dy dx / 2 = 0 \quad (2.56)$$

3. derece terimler ihmal edilirse

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x \quad (2.57)$$

benzer şekilde

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (2.58)$$

(2.57), (2.58) bağıntılarında (2.52), (2.53) ve (2.54) bağıntıları yerlerine konulursa Q_x , Q_y nin (w) cinsinden değeri;

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) - D (1 - \nu) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) \quad (2.59)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad (2.60)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad (2.61)$$

$$\Delta \text{ Laplace operatörü } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.62)$$

Q_x , Q_y (2.60) ve (2.61) bağıntılarında bulunan değerleri (2.55) bağıntısında yerine yazılırsa, dış yük ile deformasyonlar arasındaki diferansiyel denklem bulunur. (Berktaş, 1992)

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) - D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) = -P_z \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P_z}{D} \quad (2.64)$$

$$\Delta\Delta w = \frac{P_z}{D} \quad (2.65)$$

2.4.6 Sınır Şartları

Bir plak probleminde $w(x,y)$ çözümü yardımıyla, plağın kenarında 3 sınır değeri elde edilir. Bunlar eğilme momenti M_x (ya da M_y), burulma momenti M_{xy} ve kesme kuvveti Q_x (yada Q_y) dir. Sınır şartlarının kesin olarak sağlanması durumunda, bu büyüklüklerin, eğilme momenti, burulma momenti ve kesme kuvvetlerinin dış değerleriyle aynı olması gerekir. Oysa ki, $w(x,y)$ çözümü ancak 2 sınır şartını sağlayacak biçimde düzenlenebilir. Özellikle boşta kenar sınırı için sorun ortaya çıkar. İki sınır şartının yeterli olabilmesi için şu yol izlenir. Kenarda etkiyen burulma momentleri, kuvvet çiftleri olarak ifade edilsin. Birim boya etkiyen burulma momenti M_{xy} , dy boyunca etkiyen burulma momenti $M_{xy}dy$ dir. Her bir eleman için ortadan kesim yapıp, düşey kuvvetlerin toplamı yazılırsa aşağıya doğru etkiyen $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy$

kuvvetleri bulunur. Birim boya etki eden kuvvet ise $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ olur. Burulma momenti yerine

birim boya etki eden $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy$ şiddetinde “eşdeğer kesme kuvveti” alınır ve bu kuvvetler

Kirchhoff ek kuvvetleri olarak adlandırılır. (Berktaş, 1992)

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) \quad (2.66)$$

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (2.67)$$

Sadece sınırlarda bir sorun çıkar. Diğer kuvvetler birbirini götürür fakat uçtakiler toplanır, buna köşe kuvveti denir. $R_o = 2 M_{xy}$. Mesnetlenme biçimine göre, plak difarensiyel denkleminin sağlaması gereken sınır şartları;

- Basit mesnetlenmiş ve çökmeyen kenar

$x=l_x$ sınırı basit mesnetli kenar ise $w=0$ ve $M_x=0$ olması gerekir.

- Ankastre mesnet

$x=l_x$ sınırı ankastre mesnetli kenar ise $w=0$ ve $\theta_x = \partial w / \partial x = 0$ olması gerekir.

- Boşta kenar

$x=l_x$ sınırı boşta kenar ise $M_x=0$ ve $V_x=0$ olması gerekir.

3. SONLU ELEMANLAR METODU

Yapı mühendisliğinde karşılaştığımız problemler aşağıdaki gibi üç çeşittir;

- Denge problemi: Burada sistemin denge durumu araştırılır. Deformasyon ve deplasman durumuna bakılır, iç kuvvetler ve gerilmeler hesaplanır.
- Stabilité problemi: Stabilitéde denge konumu bellidir. Bu konumun kararlı olup olmadığı araştırılır. Kararsız denge konumlu sistemleri kararlı hale getirecek yük ve boyutlar kritik farksız dengeden hareketle hesaplanır.
- Dinamik problem: Zamanla değişen dış etkileri, sisteme gelen ani tesirleri ve çarpışmadan doğan etkileri inceler. Sistemin titreşim frekansları ve mod şekilleri hesaplanır.

Stabilité ve dinamik problem bir öz değer problemidir. (Köksal, 1996)

Sonlu elemanlar yöntemi; sürekli bir sistemi problemin karakterine uygun sonlu elemanlara ayırarak elde edilen elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonu ve sonra bu elemanların birleştirilmesi tarzında bir uygulama getirir. Bunun sonucu olarak mesnet şartları, sisteme ait özellikler, dış yüklerin sürekli yada ani değişimleri kolayca göz önüne alınabilir. Dolayısıyla sonlu elemanlar yöntemi analitik metotlarla çözülemeyen karışık problemlere uygulanabilir. Yüzeysel sistemin tipik bölgelerinde eleman boyutları küçültülerek o bölgenin daha ayrıntılı incelenmesi mümkün olur. Diğer bir avantajı sınır şartlarının problemin çözüm sırasına göre en son adımda probleme dahil edilmesidir. Böylelikle çeşitli sınır şartlarını probleme uygularken baştaki yoğun hesaplara girilmez. (Köksal, 1995)

Sonlu elemanlar metodunda sistem sonlu sayıda elemana ayrılmaktadır. Eleman boyutları küçüldükçe problemin hata oranı azalmakta, fakat çözüm süresi uzamaktadır. Sistemi oluşturan elemanların her birine sonlu eleman denir ve birleştikleri köşe noktaları da düğüm noktaları olarak adlandırılır. Sonlu eleman yüzeyinin şekil değiştirmesi, düğüm noktalarının deplasman parametrelerine bağlı olarak ifade edilebilir. Deplasman parametreleri; deplasman bileşenleri, dönmeler ve burulma eğriliği gibi deplasman vektörlerini içermektedir. Eğilme hesaplarında düğüm noktalarının, deplasman parametrelerinin belirlenmesi, sistemin deplasman yüzeyinin ve her düğüm noktasındaki kesit tesirlerinin bulunması için kafidir. Stabilité hesabında ise, bu deplasman parametrelerine göre kurulan denklem takımının (Δ) katsayılar determinantını sıfır yapan yük yani kritik yük tayin edilir. Dinamik hesapta ise frekans determinantını sıfır yaparak özel açısal frekans ve mod şekilleri hesaplanır.

3.1 Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi ve Şekil Fonksiyonları

Deplasman fonksiyonları; rijit cisim hareketi ve sabit deformasyon şartını sağlayacak şekilde seçilmelidir, [6]. Koordinat eksenini değişince çözüm farklı olmamalıdır. Bunun için deplasman fonksiyonları ya tam polinom veya tabii koordinatlarının fonksiyonu şeklinde olmalıdır. Elemanın içinde ve kenarlarında sürekli olmalıdır. Ayrıca iç ve dış kuvvetlerin içindeki türevlerde de sürekli olmalıdır.

Herhangi bir (e_i) elemanına ait ve bu elemanın içinde yada sınırları üzerinde bir (i) noktasındaki deplasman vektörü $\{u\}$ olsun.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u\{x, y\} \\ v\{x, y\} \\ w\{x, y\} \end{Bmatrix} = [\phi(x, y)] \cdot \{a\} \quad (3.1)$$

Burada $[\phi(x, y)]$ seçilen deplasman fonksiyonlarıdır. Hesap kolaylığı bakımından genellikle polinom seçilir. Paskal üçgeni polinomların seçilmesine yardımcı olur. Polinomlarda türev almak, integral almak kolaydır. Gerçek çözüme istenildiği kadar yaklaşmak mümkündür. Seçilen deplasman fonksiyonları tam bir polinom ise geometrik izotropi sağlanır. Eğer polinom tam değil; fakat simetri varsa, yine geometrik izotropi sağlanır. Burada $\{a\}$ bilinmeyen katsayılarıdır. Bu $\{a\}$ katsayıların sayısı bir elemandaki düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin toplam sayısına eşit olmalıdır.

Elemanın düğüm noktası deplasman parametreleri; eğer elemanda dört düğüm noktası varsa:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \\ [d]_3 \\ [d]_4 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

şeklindedir. Elemanın herhangi bir (i) düğüm noktasında tarif edilen deplasman parametreleri ise şunlardır.

$$\{d\}_{i(i=1,2,3,4)} = (u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \tau \dots) \quad (3.3)$$

Eleman düğüm noktası deplasmanları $\{d\}$ ile, polinom sabitleri $\{a\}$ arasındaki bağı veren $[A]$ matrisi, elemanın düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin $\phi(x, y)$ ve $\phi(x, y)$ 'nin türevleri cinsinden yazılmış değerlerine, düğüm noktası koordinatlarının yerlerine konmasıyla bulunur. Burada $\{d\}$ ile $\{a\}$ bilinmeyendir. Bağ matrisi vasıtasıyla bilinmeyen yalnız $\{d\}$

deplasman parametreleri kalır, $\{a\}$ katsayıları $\{d\}$ deplasman parametreleri cinsinden hesaplanır.

$$\{d\}=[A] \{a\} \quad (3.4)$$

$$\{a\}=[A]^{-1} \{d\} \quad (3.5)$$

$$[B]=[A]^{-1} \quad (3.6)$$

$$\{a\}=[B] \{d\} \quad (3.7)$$

(3.7) denklemini (3.1) denkleminde yerine koyarsak; elemanın deplasman vektörü, elemanın düğüm noktalarının deplasman parametreleri cinsinden belirlenmiş olur.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u\{x,y\} \\ v\{x,y\} \\ w\{x,y\} \end{Bmatrix} = [\phi(x,y)] \cdot [B] \cdot \{d\} \quad (3.8)$$

$$[N] = [\phi(x,y)][B] \quad (3.9)$$

Bu ifadeye şekil fonksiyonları denir. Deplasman parametresi sayısı kadar şekil fonksiyonu elde edilir.

$$\{u\}=[N] \{d\} \quad (3.10)$$

Şekil değiştirmeler ise şöyle yazılır.

$$\{\epsilon\}=[\Delta] \{u\}=[\Delta][N] \{d\}=[\Delta N] \{d\} \quad (3.11)$$

Burada $[\Delta N]$ şekil değiştirme matrisidir.

Birinci düğüm noktasındaki d_1 deplasman parametrelerine ait N_1 şekil fonksiyonu öyle hesaplanır ki; birinci düğüm noktasının (x,y) koordinatları bulunduğu zaman,

$$N_1 = 1; N_2 = N_3 = \dots = 0 \quad (3.12)$$

olur. Bu şekil fonksiyonları, eleman şekli ve boyutu değişmediği sürece her elemanda aynıdır. Yalnız deplasman parametreleri elemandan elemana değişir. Problemden bu deplasman parametreleri bilinmeyen olarak hesaplanır. Lineer transformasyon halinde şekil fonksiyonları değişmiyorsa geometrik izotropi vardır denir. (Köksal, 1995)

3.2 Dinamik Dış Etkiler Halinde Sonlu Elemanlar Metodu

İnşaat mühendisliğinde deprem, darbe kuvvetleri, makine titreşim kuvvetleri ve ani patlama kuvvetleri zamanla değişen kuvvetlerdir. Dış etkilerin zamana bağlı olarak sonlu bir hızla değişmesi halinde atalet kuvvetlerinin de göz önüne alınması gerekmektedir. Sisteme etkiyen kuvvetler zamanın bir fonksiyonu ise, bu kuvvetlerin etkidiği yapıların tepkisi de zamanın bir fonksiyonudur ve zamana bağlı olarak meydana gelebilecek yer değiştirmelerin ivmeleri, atalet kuvvetleri meydana getirirler. Bu durumda sistem iki tip yükün etkisi altında düşünülebilir. Harekete neden olan dış yük ve hareketin ivmelenmesine karşı duran atalet kuvvetleri, yapı özellikleri, zemin özellikleri ve etkiyen kuvvetlerden yola çıkılarak, titreşim sistemine ait mekanik bir yay-kütle modeli oluşturulur ve kütlelere ait titreşim denklemleri kurularak çözüme ulaşılır. (Köksal, 1995)

Eleman üzerinde yayılı kütleler düğüm noktalarına toplanabilir. Eleman boyutlarının büyük olması halinde gerçek sonuca iyi yaklaşmak için nokta kütle sayısını arttırmak ve mümkün olduğu kadar yayılı kütle haline yaklaşmak gerekir. Yüzeysel kütlelerden doğan atalet kuvvetlerinin gerçek yayılışları ile hesaba katılması uygundur. Yayılı kütlelerin ortalama yüzeye indirildiği kabulü yapılacaktır. Zamana bağlı şekil değiştirme, ortalama yüzeyin yer değiştirmeleri cinsinden belirlendiğinden, yayılı atalet kuvvetleri yalnız yer değiştirme bileşenlerine bağlı olacaktır. Dönme bileşenlerine bağlı olarak ayrıca yüzeysel yayılı momentler meydana gelmeyecektir. Herhangi bir (t) anındaki bir yüzeysel elemanın hareket denklemi D'Alembert prensibine göre; sisteme etki eden atalet kuvvetleri, sönüm etkileri ve yay kuvvetleriyle beraber dış kuvvetler denge halinde olmalıdır. Bilindiği gibi sönüm tesirleri de, μ sürtünme katsayısı olmak üzere viskoz bir ortamda hızla orantılı bir sürtünme kuvveti gibi düşünülmektedir. Birim alana gelen kütle yoğunluğu ρ olduğuna göre; titreşime maruz kütlenin etkisi altında kaldığı atalet kuvveti; sönüm kuvveti ve yay kuvvetlerinin ilave dış yükler gibi düşünülmesiyle virtüel iş teoremi uygulanabilir.

3.3 Virtüel İş Prensibiyle Eleman Matrislerinin Bulunması

Virtüel iş; virtüel deplasmanlar metodu ve virtüel kuvvetler metodu olmak üzere ikiye ayrılır. Sonlu elemanlar metodunda virtüel deplasmanlar metodu kullanılır. Kuvvetlerin işi hesaplanırken, yer değiştirmelerin mutlaka o kuvvetlerden doğması gerekmez. Yani iş her zaman gerçek olmayabilir. Geometrik açıdan veya fiziksel açıdan lineer ve lineer olmayan sistemlere uygulanabilir. Cismin fiziksel bünyesine bağlı değildir. Dengesi incelenen cisim elastik veya plastik olabilir. Bu yöntemde, iç kuvvetlerin yaptığı virtüel işle dış kuvvetlerin yaptığı işin eşit olması kabulü ile çözüm yapılır. u hakiki deplasman, δu virtüel deplasman, ϵ hakiki deformasyon, $\delta \epsilon$ virtüel deformasyon ise

∂V_i iç kuvvetlerin, ∂V_d dış kuvvetlerin, virtüel işini gösterebilir.

$$\partial V_i = \int_F \{\partial \epsilon\}_i^T \sigma dx dy \quad (3.13)$$

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (3.14)$$

ϵ_0 başlangıç şekil değiştirmelerini ve σ_0 başlangıç gerilmelerini ihmal edersek

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (3.15)$$

elde edilir.

$$\partial V_i = \int_F \{\partial \epsilon\}_i^T [D]\{\epsilon\} dx dy \quad (3.16)$$

$$\partial V_d = -\rho \int_F \{\partial u\}_i^T \{\ddot{u}\} dx dy - \mu \int_F \{\partial u\}_i^T \{\dot{u}\} dx dy - c \int_F \{\partial u\}_i^T \{u\} dx dy \quad (3.17)$$

Burada ρ birim alana gelen yoğunluk, μ sürtünme katsayısı, c zemin yatak katsayısıdır.

Tabii durum hakiki yükleme, i birim durumu ise virtüel deplasman ve virtüel şekil değiştirme durumu olarak alınıp; virtüel iş teoremi uyarınca iç kuvvetlerle, dış kuvvetlerin eşitliğini yazalım.

Çizelge 3.1 Virtüel yer - hakiki yer ve şekil değiştirmeler

Virtüel yer ve şekil değiştirmeler.	Hakiki yer ve şekil değiştirmeler
$\partial u = [N]\{\partial d\}$	$\{u\} = [N]\{d\}$
$\partial \dot{u} = [N]\{\partial \dot{d}\}$	$\{\dot{u}\} = [N]\{\dot{d}\}$
$\partial \ddot{u} = [N]\{\partial \ddot{d}\}$	$\{\ddot{u}\} = [N]\{\ddot{d}\}$
$\partial \epsilon = [\Delta N]\{\partial d\}$	$\{\epsilon\} = [N]\{d\}$

Çizelge 3.1 deki denklemleri (3.16) ve (3.17) denklemlerinde yerine koyup;

$\partial V_i = \partial V_d$ yazarsak dinamik dış etkiler halinde genel denklemi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
 \{\partial d\}^T \left[\int_F [\Delta N]^T [D] [\Delta N] dx dy \right] \{d\} = & -\{\partial d\}^T \left[\rho \int_F [N]^T [N] dx dy \right] \{\ddot{d}\} \\
 & -\{\partial d\}^T \left[\mu \int_F [N]^T [N] dx dy \right] \{\dot{d}\} - \{\partial d\}^T \left[c \int_F [N(w)]^T [N(w)] dx dy \right] \{d\} + \{p(t)\}_0
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Matris formda ise aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[k_e]\{d(t)\} + [c_e]\{\dot{d}(t)\} + [m_e]\{\ddot{d}(t)\} + [s_e]\{d(t)\} = \{p_e(t)\}_0 \quad (3.19)$$

$$[k_e] = \int_F [\Delta N]^T [D] [\Delta N] dx dy \quad : \text{Eleman rijitlik matrisi}$$

$$[c_e] = \mu \int_F [N]^T [N] dx dy \quad : \text{Eleman sönüm matrisi}$$

$$[m_e] = \rho \int_F [N]^T [N] dx dy \quad : \text{Eleman kütle matrisi}$$

$$[s_e] = c \int_F [N(w)]^T [N(w)] dF \quad : \text{Eleman zemin etki matrisi}$$

$$\{p_e(t)\} \quad : \text{Elemanın zamana bağlı dış yükü}$$

Burada “e” indisi elemanı göstermektedir.

Sisteme geçiş:

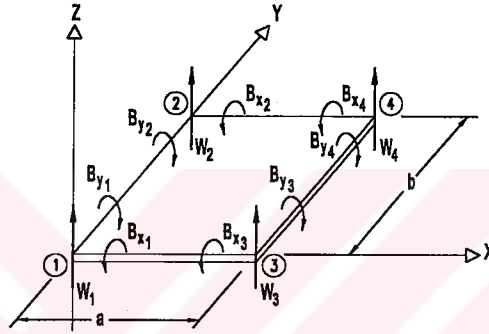
$$[K]\{D(t)\} + [C]\{\dot{D}(t)\} + [M]\{\ddot{D}(t)\} + [S]\{D(t)\} = \{P(t)\}_0 \quad (3.20)$$

ifadesi yardımı ile yapılır.

4. EĞİLMELİ PLAK ELEMANLARI

4.1 Şekil Fonksiyonları

Literatürde birçok 12 serbestlik derecesine sahip olan dikdörtgen eleman bulunmaktadır. Genel olarak bunları iki ayrı grupta toplamak mümkündür. Bunlardan ilki, elemanlar arası sürekliliklerin bazılarını sağlayamayan elemanlardır, (Melosh, 1961). İkincisi ise süreklilik kriterlerini sağlayıp sabit şekil değiştirme kriterini sağlayamayan elemanlardır, (Pagenfuss, 1959). Armanios ve Negan, tip parametrelere bağlı olarak (p, q, r) her iki elemanı kapsayacak genel şekil fonksiyonları üretmişlerdir, (Armanios, 1983).



Şekil 4.1 Genel dikdörtgen eğilmeli plak elemanı

Eğilmeli plak elemanı (Şekil 4.1) için, üretilen genel şekil fonksiyonları;

$$[N]^T = \begin{bmatrix} f(\xi)h(\eta, \tau) + f(\eta)h(\xi, \tau) - h(\eta, \tau)h(\xi, \tau) \\ g(\eta)h(\xi, p)b \\ -g(\xi)h(\eta, q)a \\ f(\xi)h(1-\xi, \tau) + f(1-\eta)h(\xi, \tau) - h(1-\eta, \tau)h(\xi, \tau) \\ -g(1-\eta)h(\xi, p)b \\ -g(\xi)h(1-\eta, q)a \\ f(1-\xi)h(\eta, \tau) + f(\eta)h(1-\xi, \tau) - h(\eta, \tau)h(1-\xi, \tau) \\ g(\eta)h(1-\xi, p)b \\ g(1-\xi)h(\eta, q)a \\ f(1-\xi)h(1-\eta, \tau) + f(1-\eta)h(1-\xi, \tau) - h(1-\eta, \tau)h(1-\xi, \tau) \\ -g(1-\eta)h(1-\xi, p)b \\ g(1-\xi)h(1-\eta, q)a \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ve bu şekil fonksiyonlarının tanımlanmasında kullanılan bağıntılar,

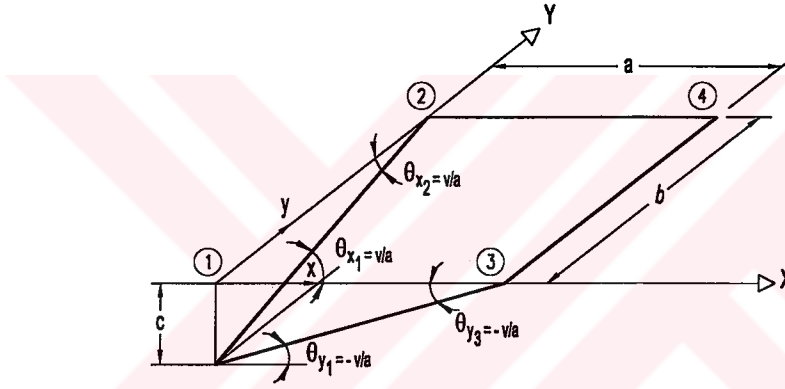
$$f(x) = (1-z)^2 (1+2z) \quad (4.2)$$

$$g(z) = z(1-z^2) \quad (4.3)$$

$$h(z,s) = (1-z)(1+sz-sz^2) \quad (4.4)$$

Bu şekil fonksiyonları dikkatle incelendiğinde; Melosh elemanının, $p=q=r=0$ durumuna karşı geldiği ve Papentus elemanının, $p=q=r=2$ durumunu karşıladığı görülebilir. Ayrıca tüm p, q, r değerleri rijit cisim hareketi ve sabit eğilme şekil değiştirmesi durumlarını karşılayabilmektedir. Ancak aşağıda da gösterildiği üzere elemanlar arası süreklilik ve sabit burulma şekil değiştirmesi kriterleri bazı kısıtlamalarla sağlanabilmektedir, (Cheung, 1991).

4.1.1 Sabit Burulma Şekil Değiştirmesi



Şekil 4.2 Birinci düğüm noktasının hareketiyle oluşan burulma

Şekil 4.2'deki elemanda görüldüğü gibi sabit burulma şekil değiştirmesi kriterinin sağlanabilmesi için aşağıdaki deplasman parametrelerinin elemana uygulanması gerekmektedir.

$$w_1 = c \quad w_2 = w_6 = w_4 = 0 \quad (4.5)$$

$$Q_{y2} = Q_{y4} = Q_{x3} = Q_{x4} = 0 \quad Q_{x1} = Q_{x2} = c/b \quad Q_{y1} = Q_{y3} = -c/a \quad (4.6)$$

Burulma eğriliği değerini veren ifadeye, $\partial^2 w / \partial w \partial y$, yukarıdaki deplasman değerleri uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = c \left[\left(1 + r \left(1 - \frac{r}{4} \right) - \frac{1}{2} (p + q) \right) - \right. \\ \left. - 6 \left(r \left(1 - \frac{r}{4} \right) - \frac{1}{2} (p + q) \right) \times [(\xi(1-\xi) + \eta(1-\eta) - 6\xi\eta(1-\xi)(1-\eta))] \right] \quad (4.7)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeden de görülebildiği gibi, sabit burulma şekil değiştirmesi sadece

$$\left[r \left(1 - \frac{r}{4} \right) - \frac{1}{2} (p + q) \right] \quad (4.8)$$

ifadesi “0” a eşit olursa elde edilebilir. Buradan;

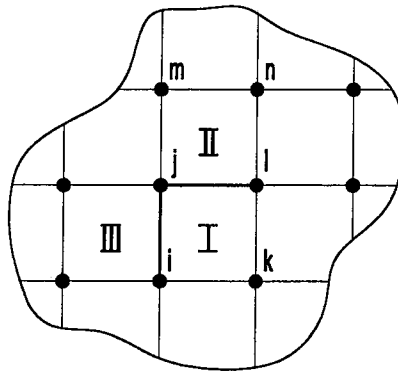
$$r = 2 \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2} (p + q)} \right] \quad (4.9)$$

ifadesine ulaşılır ki bu da aşağıdaki durumlara karşılık gelir.

$$\begin{aligned} p = q = 1, & \quad r = 2 \\ p = q = r = 0 & \\ p = r = 2, & \quad q = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.1.2 Elemanlar Arası Süreklilik

Şekil 4.3’de gösterilen, birbirine komşu iki elemanı ele alalım. Sınırlardaki deplasman değerleri genellikle sürekli ve uyumludur. Bu yüzden sadece normal eğim’lerin sürekliliğinin incelenmesi yeterlidir.



Şekil 4.3 Sonlu elemanlar ağı içindeki komşu elemanlar

(4.1)'de verilen şekil fonksiyonlarından j-i ortak sınırındaki normal eğim değerleri aşağıdaki gibi bulunur:

Birinci eleman için

$$\begin{aligned}
 (\partial w / \partial n)_I &= \xi(1-\xi)(1-q/2)[(1-\xi)(\theta_{yj} - \theta_{yi}) + a] \\
 &+ \xi(1-\xi)(1-2\xi)(1-r/2)^2[w_j + w_k - w_i - w_l] \\
 &- (1-\xi)(1 + \frac{1}{2}p\xi - p\xi^2)b\theta_{xj} \\
 &- \xi\left[1 + \frac{1}{2}p(1-\xi) - p(1-\xi)^2\right]b\theta_{xl}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

İkinci eleman için

$$\begin{aligned}
 (\partial w / \partial n)_{II} &= \xi(1-\xi)(1-q/2)[(1-\xi)(\theta_{ym} - \theta_{yj}) + \xi(\theta_{yl} - \theta_{yn})]a \\
 &+ \xi(1-\xi)(1-2\xi)(1-r/2)^2[w_m + w_l - w_j - w_n] \\
 &- (1-\xi)(1 + \frac{1}{2}p\xi - p\xi^2)b\theta_{xj} \\
 &- \xi\left[1 + \frac{1}{2}p(1-\xi) - p(1-\xi)^2\right]b\theta_{xl}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

yukarıdaki ifadelerden de görülebildiği üzere, ifadelerin sadece son iki terimleri aynıdır. Bu yüzden sürekliliğin sağlanması ancak ilk iki terimin sıfıra eşit olması durumunda mümkündür. Bunun içinde aşağıdaki ifadelerin gerçekleşmesi gerekmektedir.

$$(1-q/2) = 0; \quad q = 2 \tag{4.13}$$

$$(1-qr/2) = 0; \quad r = 2 \tag{4.14}$$

Yukarıda açıklanan ifadelerden görülebildiği gibi aslında her iki koşulunda sağlanabildiği tek durum

$$P = 0; \quad q = r = 2 \tag{4.15}$$

parametrelerinin kullanılmasıyla elde edilir.

4.2 Literatürdeki 12 Serbestlik Dereceli Dikdörtgen Plak Elemanlarının Karşılaştırılması

Sonlu elemanlar metodunun, ve kişisel bilgisayarların gelişmesiyle birlikte, zaman içinde, plakların analizinde kullanılacak birçok sonlu eleman geliştirilmiştir. Bu bölümde karşılaştırması yapılan elemanlar;

Δ : ACM (Zienkiewicz, Cheung, 1964)

Δ : ACM (Adini, Clough, 1961)

$\boxtimes$: Q19 (Clough, Felippa, 1968)

∇ : M (Fraeijs, Veubeke, 1968)

$\blacklozenge$: DKQ (Batoz, Ben Tohor, 1982)

$\blacktriangle$: PIAN (Pian, 1964)

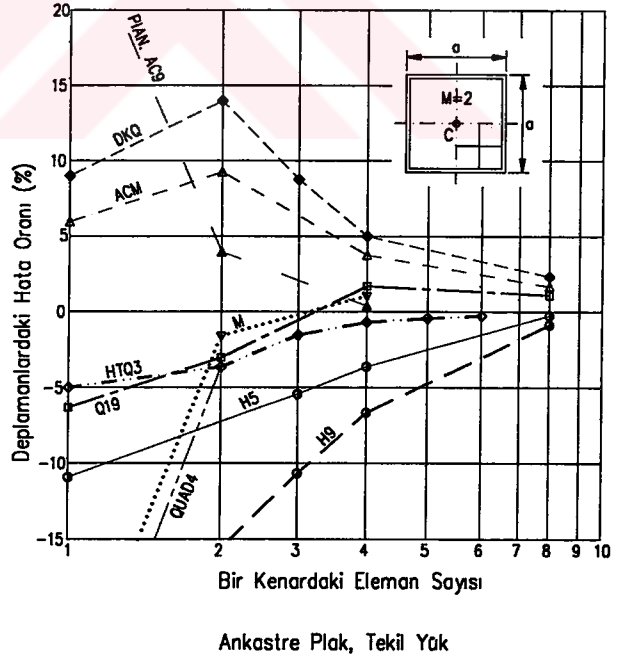
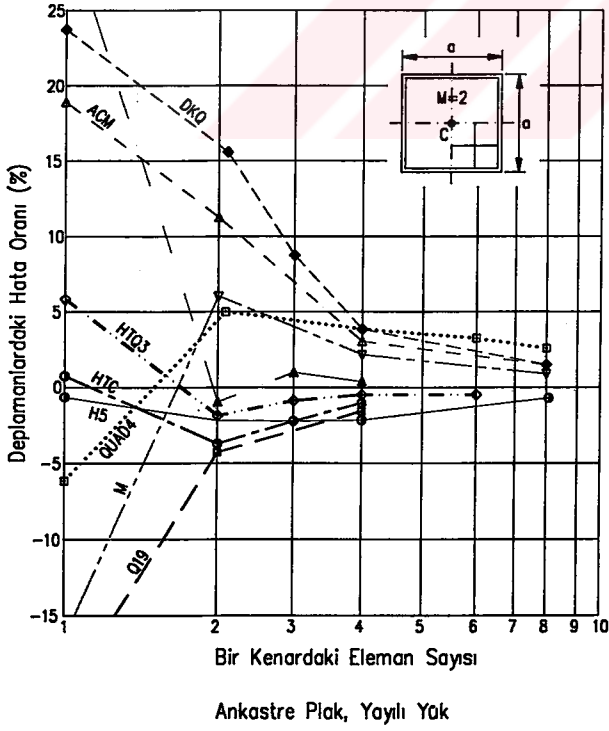
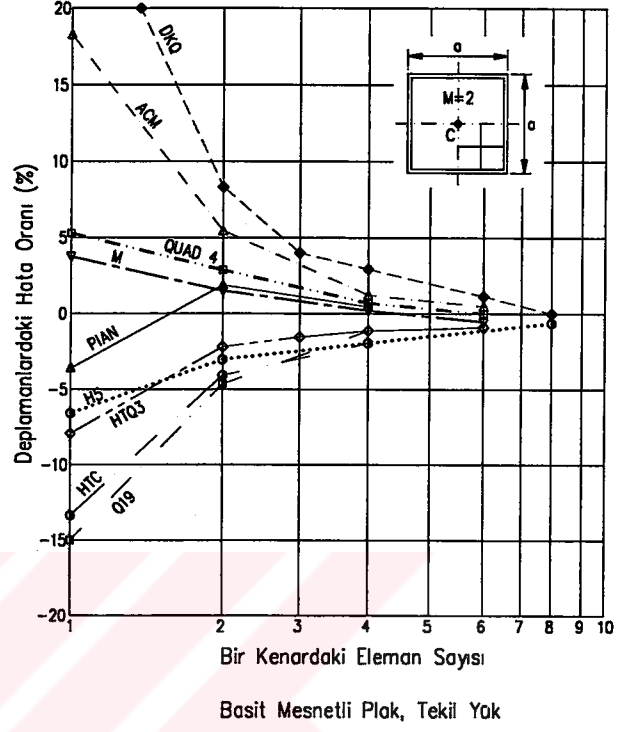
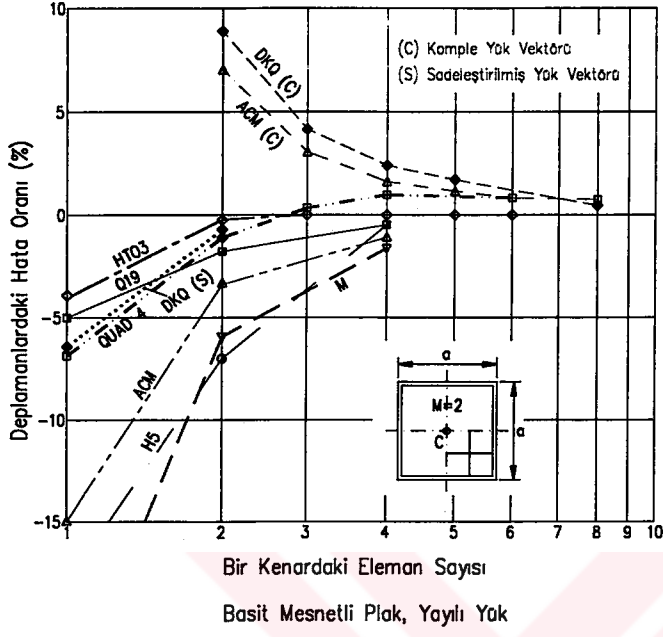
$\blacktriangle$: PIAN (Pian, Tong, 1968)

$\diamond$: HTQ3 (Jirovsek, Lan Guex, 1986)

$\star$: H/HTC (Cook, 1972)

$\square$: QVADA (Mc Neal, 1978)

Aşağıda yer alan Şekil 4.4’de, dört kenarından ankastre ve basit mesnetli plakların sabit yayılı yük ve plak merkezinden tekil yük etkisi altında, orta nokta deplasmanının hata oranının eleman yoğunluğuna bağlı olarak değişimi gösterilmiştir, (Zienkiewicz, 1991).



Şekil 4.4 12 Serbestlik dereceli elemanların karşılaştırması

Aynı tür bir çalışma 9 serbestlik dereceli üçgen elemanlar için de yapılmış olup (Zienkiewicz, 1991)'den detaylı bilgi edinilebilir.

Bu çalışmada kullanılan eleman aynı zamanda Melosh Plak Elemanı olarakta bilinen Zienkiewicz ve Cheung' un eğilmeli plak elemanıdır.

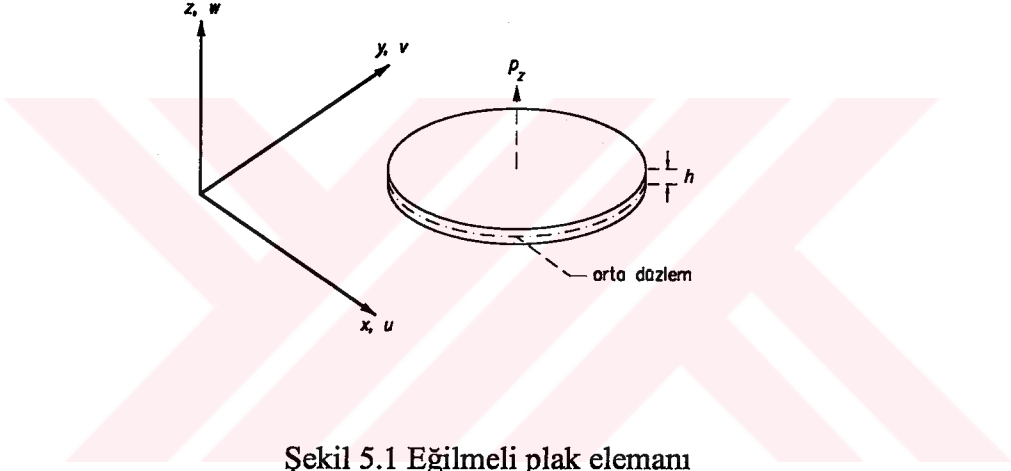


5. PLAKLARIN EĞİLMELİ TİTREŞİM ANALİZİ

Plak sistemler (uçakların gövdeleri, binaların döşemeleri, gemilerin güverteleri, köprülerin tabliyeleri gibi) düzlemlerine dik doğrultuda dinamik yüklere maruz kaldıklarında, eğilmeli titreşim davranışı gösterirler. Bu tip plak sistemleri, plak eğilme elemanları olarak adlandırılan iki boyutlu sonlu elemanlarla analiz edilebilirler. Bu elemanlar, üçgen, dikdörtgen veya dörtgen şeklinde olabileceği gibi başka geometriye de sahip olabilirler.

5.1 Eğilmeli İnce Plak Elemanının Enerji Denklemleri

Şekil 5.1’de, sabit kalınlığa (h) sahip, düzgün yayılı yük (p_z) etkisindeki bir ince plak gösterilmiştir. Bu yükler plağın orta düzlemine ($z=0$) diktir.



Şekil 5.1 Eğilmeli plak elemanı

İnce plak için enerji denklemleri çıkartılırken, aşağıda kabuller yapılmıştır.

- Plağın orta düzlemine dik olan normal gerilmeler sıfırdır. $\sigma_z = 0$
- Şekil değiştirmemiş plağın orta düzleminin normali, şekil değiştirdikten sonra düz ve orta düzleme diktir.
- Yukarıdaki kabuller dolayısıyla da şekil değiştirmemiş sistemin orta düzlemine paralel olan yer değiştirmeler;

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.1)$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5.2)$$

şeklinde kabul edilir.

Burada $w(x,y)$ değişkeni plağın orta düzlemin, z yönündeki (orta düzleme dik eksen) yerdeğiştirmesini ifade etmektedir.

Bu kabuller altında şekil değiştirmenin bileşenleri;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5.6)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (5.7)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (5.8)$$

olarak karşımıza çıkar.

σ_z, γ_{xz} ve γ_{yz} değerleri sıfır olduğundan dolayı eğilmeli ince plak elemanındaki potansiyel enerji,

$$U = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (5.9)$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca bu ifadeyi matris formunda yazarsak,

$$U = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (5.10)$$

elde ederiz.

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \quad (5.11)$$

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}] \quad (5.12)$$

$\sigma_z = 0$ olduğundan gerilme-şekil değiştirme ilişkisi aşağıdaki gibi olur.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (5.13)$$

burada malzeme özelliklerini içeren $[D]$ matrisi;

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ & & d_{33} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$d_{ij} = (i, j = 1, 2, 3)$ malzeme sabitleri

Ortotropic malzemeler için

$$[D] = \begin{bmatrix} E'_{\bar{x}} & E_{\bar{x}} \nu_{\bar{x}\bar{y}} & 0 \\ & E'_{\bar{y}} & 0 \\ & & G_{\bar{x}\bar{y}} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$\bar{X}, \bar{Y}$: ortotropic malzemelerin sahip olduğu iki simetri eksen

$E_{\bar{x}}$: $\bar{x}$ - yönündeki elastisite modülü

$E_{\bar{y}}$: $\bar{y}$ - yönündeki elastisite modülü

$$E'_{\bar{x}} = \frac{E_{\bar{x}}}{1 - \nu_{\bar{x}\bar{y}} \nu_{\bar{y}\bar{x}}}$$

$$E'_{\bar{y}} = \frac{E_{\bar{y}}}{1 - \nu_{\bar{x}\bar{y}} \nu_{\bar{y}\bar{x}}}$$

$\nu_{\bar{x}\bar{y}}$: $\bar{y}$ - yönündeki birim şekil değiştirmeden dolayı $\bar{x}$ - yönünde oluşan şekil değiştirme

$\nu_{\bar{y}\bar{x}}$: $\bar{x}$ - yönündeki birim şekil değiştirmeden dolayı $\bar{y}$ - yönünde oluşan şekil değiştirme

$G_{\bar{x}\bar{y}}$: $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ eksenlerindeki kayma modülü

Genellikle malzeme eksenleri, geometrik eksenlerle çakışmazlar ve belirli bir açı ile kesişirler.

Böyle bir durumda $[D]$ matrisinin dönüştürülmesi gerekir.

İzotropic malzemeler için

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

E: Elastisite modülü

ν : Poisson oranı

olarak karşımıza çıkar.

Bu çalışmada izotropik malzeme kabulü yapılmış ve hesaplamaların tümü bu kabule göre yapılmıştır.

(5.13) ifadesini (5.10) ifadesinde yerine koyarsak;

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad (5.17)$$

elde edilir. (5.3) ve (5.8) ifadelerini kullanırsak, şekil değiştirme matrisi;

$$\{\varepsilon\} = -z \{X\} \quad (5.18)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\{X\} = \begin{bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

(5.18) ifadesini (5.17) ifadesinde yerine koyup z eksenine göre integralini alırsak;

$$U = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{X\}^T [D] \{X\} dA \quad (5.20)$$

ifadesi elde olunur.

Ayrıca plağın kinetik enerji ifadesi;

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho h w^2 dA \quad (5.21)$$

ve düzleme dik doğrultudaki bir yükleme altında virtüel iş bağıntısı;

$$\delta W = \int_A P_z \delta w \, dA \quad (5.22)$$

olarak bulunur, (Petyt, 1990).



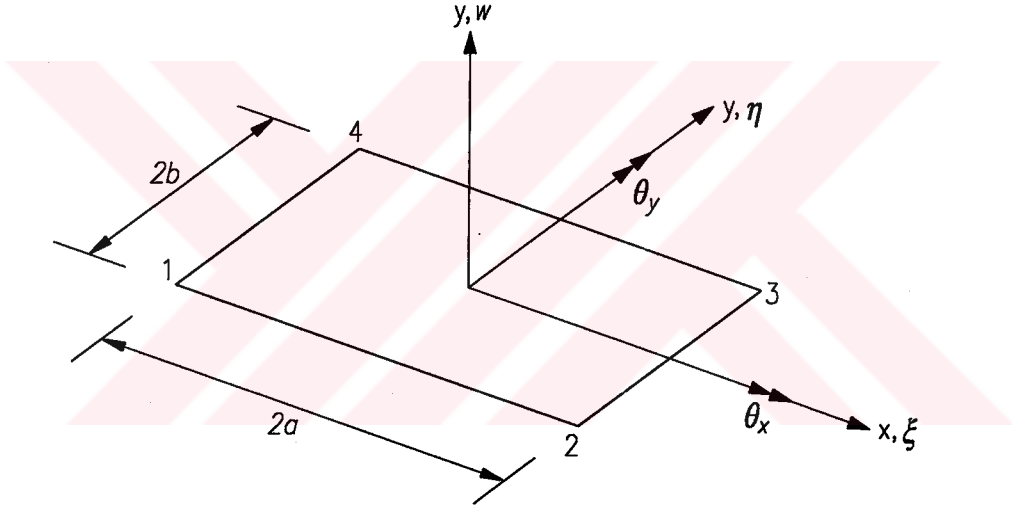
5.2 Şekil Fonksiyonlarının Bulunması

Yukarıdaki enerji ifadelerinde bulunan en yüksek türev, ikinci derecedendir. Bu yüzden yakınsamanın ve sürekliliğin sağlanması için $w, \partial w / \partial y$ ve $\partial w / \partial x$ değerlerinin elemanlar arasında sürekli olması gerekmektedir. Bu yüzden bu üç ifade her noktada serbestlik derecesi olarak alınmalıdır. Ayrıca şekil fonsiyonu olarak ikinci dereceden tam bir polinom kullanılması gerekir.

Bir elemanın geometrisi ne olursa olsun, şekil fonksiyonun formu;

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \dots \text{yüksek dereceli terimler}$$

olmalıdır.



Şekil 5.2 Dikdörtgen elemanın geometrisi $\left(\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b} \right)$

Şekil 5.2’de her köşesinde bir nokta olan, 4 noktalı dikdörtgen bir eleman gösterilmiştir. Her noktada üç serbestlik derecesi bulunmaktadır.

w : plağın normal eksenine dik öteleme

$Q_x = \partial w / \partial y$: x – eksenini etrafında dönme

$Q_y = \partial w / \partial x$: y – eksenini etrafında dönme

dönme bileşenleri (ξ, η) değişkenleri cinsinden

$$Q_x = \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad Q_y = -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (5.23)$$

olarak ifade edilir.

Eleman 12 serbestlik derecesine sahip olduğu için şekil fonsiyonu 12 terimli bir polinom olarak ifade edilebilir.

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^3 \quad (5.24)$$

şekil fonsiyonu 3. derece bir fonsiyonun tüm elemanlarının yanında Paskal üçgeninde simetrik olarak yer alan iki tane dördüncü derece terime de, $\xi^3 \eta + \xi \eta^3$, sahiptir. Bu ifade matris formunda

$$w = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi \eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2 \eta & \xi \eta^2 & \eta^3 & \xi^3 \eta & \xi \eta^3 \end{bmatrix} \{\alpha\} \\ = [P(\xi, \eta)] \{\alpha\} \quad (5.25)$$

olarak yazılır.

$$\{\alpha\}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \dots \alpha_{12}] \quad (5.26)$$

(5.25)' deki ifadenin ξ ve η ye göre türevini alırsak,

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2\xi & \eta & 0 & 3\xi^2 & 2\xi \eta & \eta^2 & 0 & 3\xi^2 \eta & \eta^3 \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 2\eta & 0 & \xi^2 & 2\xi \eta & 3\eta^2 & \xi^3 & 3\xi \eta^2 \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (5.28)$$

elde ederiz. (5.25), (5.27) ve (5.28) ifadelerini $\xi = \mp 1$ ve $\eta = \mp 1$ ' e göre hesaplırsak

$$\{\bar{w}\}_e = [A]_e \{\alpha\} \quad (5.29)$$

$$\{\bar{w}\}_e^T = [w_1 \quad bQ_{x1} \quad aQ_{y1} \dots w_4 \quad bQ_{x4} \quad aQ_{y4}] \quad (5.30)$$

$$[A]_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

ifadeleri elde edilir.

(5.29) değerini $\{\alpha\}$ için çözersek.

$$\{\alpha\} = [A]_e^{-1} \{\bar{w}\}_e \quad (5.32)$$

$$[A]_e^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & -1 & -1 & 4 & -1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

elde edilir. (5.32), (5.25)' de yerine konulursa aşağıdaki ifadeler ve elemanın şekil fonksiyonu elde edilir.

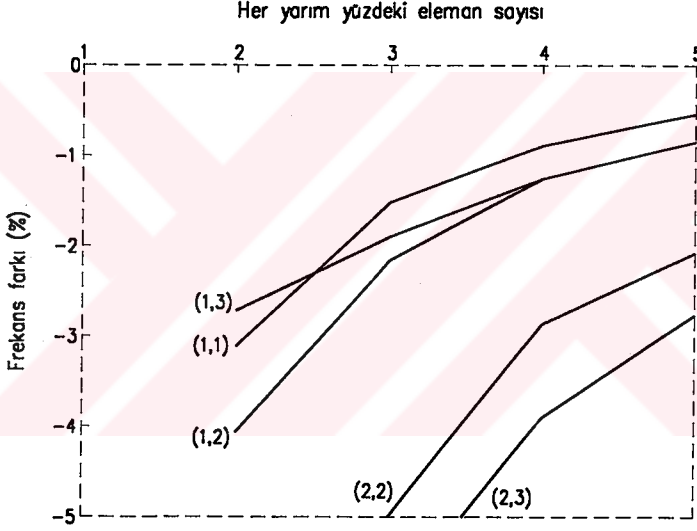
$$w = [N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_4(\xi, \eta) \quad N_5(\xi, \eta)] \{w\}_e \quad (5.34)$$

$$w = [N(\xi, \eta)] \{w\}_e \quad (5.35)$$

$$\{w\}_e^T = [w_1 \quad Q_{x1} \quad Q_{y1} \dots w_4 \quad Q_{x4} \quad Q_{y4}] \quad (5.36)$$

$$N_j^T(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)(2 + \xi_j \xi + \eta_j \eta - \xi^2 - \eta^2) \\ \frac{b}{8}(1 + \xi_j \xi)(\eta_j + \eta)(\eta^2 - 1) \\ \frac{a}{8}(\xi_j + \xi)(\xi^2 - 1)(1 + \eta_j \eta) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

bu eleman genellikle ACM olarak adlandırılan elemandır, (Melosh, 1963). Ayrıca Bölüm 4.1.2.'de açıklandığı gibi Q_y dönmesinde elemanlar arası sürekliliğin sağlanması için gerekli özelliklere sahip değildir, (Petyt, 1990). Ancak her ne kadar elemanlar arası yakınsama ve süreklilik özelliklerine tam olarak sahip olmasada, Şekil 5.3' de görüldüğü gibi bu eleman kullanılarak bulunan sonuçlar, teorik sonuçlara mühendislik açısından yeterli derecede yaklaşmaktadır.



Şekil 5.3 Basit mesnetli kare plağın titreşim frekansları

5.3 Eleman Matrislerinin Bulunması

5.3.1 Kütle Matrisi Tipleri

Sistemlerin kütle matrisleri, oluşturuluş biçimleri ve ortaya çıkan matrisin özellikleri açısından üçe ayrılır. Bunlar;

- Consistent Kütle Matrisi
- Diyagonal Kütle Matrisi
- Lumped Kütle Matrisi

olarak adlandırılırlar.

E. Hinton, T. Rock ve O. C. Zienkiewicz tarafından yapılan çalışmada, (Hinton, 1976), açıklık/kalınlık oranı 10 olan, poisson oranı $\nu=0.3$ olan, basit olarak mesnetlenmiş bir kare plak incelenmiştir. Yapı frekansları, yukarıda yazılan üç kütle matrisi için ayrı ayrı hesaplanmış ve sonuçları Çizelge 5.1’de verilmiştir. Ayrıca hesaplanan bu frekanslar, analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.1 Basit mesnetli plağın doğal titreşim frekanslarının, analitik sonuçlara göre hata oranı

Mod Sayısı		Kütle Matrisi Tipi		
m	n	Consistent	Lumped	Diagonal
1	1	0,11	0,54	0,54
2	1	-0,05	-0,09	0,81
2	2	0,21	-3,60	-2,20
3	1	5,90	-5,10	0,70
3	2	5,50	-9,40	-2,20
3	3	14,90	-18,60	-4,20

Yapı sistemlerinin genelinde, sistemin ilk frekanslarının yapı davranışlarını belirlediği bilinmektedir. Bu nedenle yukarıda yapılan çalışmadan da görüleceği gibi yapı sisteminin ilk frekansları göz önüne alındığında consistent kütle matrisi kullanmak, sonuçların daha güvenli

olmasına yol açacaktır. Ancak diyagonal kütle matrisi kullanılarak yapılan hesaplarda oluşan maksimum hata oranının, diğer iki tip kütle matrisi kullanılarak yapılan hesaplarda oluşan hata oranlarının altında olduğu da dikkate alınmalıdır.

Bu çalışmada yapılan hesaplarda consistent kütle matrisi kullanılmıştır.

5.3.2 Kütle Matrisinin Bulunması

(5.35) ifadesini (5.21)'de yerine koyarsak;

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{w}\}_e^T [m]_e \{\dot{w}\}_e \quad (5.38)$$

$$[m]_e = \int_{Ae} \rho h [N]^T [N] dA = \rho h ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta)]^T [N(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (5.39)$$

ifadelerini elde ederiz. Burada $[m]_e$ elemanın kütle matrisidir. Şekil fonksiyonlarını bu ifade de yerine koyup integralini aldığımızda;

$$[m]_e = \frac{\rho h ab}{6300} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21}^T \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$m_{11} = \begin{bmatrix} 3454 & & & & & \\ 922b & 320b^2 & & & & \\ -922a & -252ab & 320a^2 & & & \\ 1226 & 398b & -548a & 3454 & & \\ 398b & 160b^2 & -168ab & 922b & 320b^2 & \\ 548a & 168ab & -240a^2 & 922a & 252ab & 320a^2 \end{bmatrix} \quad \text{Sym} \quad (5.41)$$

$$m_{21} = \begin{bmatrix} 394 & 232b & -232a & 1226 & 548b & 398a \\ -232b & -120b^2 & 112ab & -548b & -240b^2 & -168ab \\ 232a & 112ab & -120a^2 & 398a & 168ab & 160a^2 \\ 1226 & 548b & -398a & 394 & 232b & 232a \\ -548b & -240b^2 & 168ab & -232b & -120b^2 & -112ab \\ -398a & -168ab & 160a^2 & -232b & -112ab & -120a^2 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$m_{22} = \begin{bmatrix} 3454 & & & & & \\ -922b & 320b^2 & & & & \\ 922a & -252ab & 320a^2 & & & \\ 1226 & -398b & 548a & 3454 & & \\ -398b & 160b^2 & -168ab & -922b & 320b^2 & \\ -548a & 168ab & -240a^2 & -922a & 252ab & 320a^2 \end{bmatrix} \quad \text{Sym} \quad (5.43)$$

elemanın kütle matrisini elde etmiş oluruz.

5.3.3 Rijitlik Matrisinin Bulunması

(5.35) ifadesini (5.19) ve (5.20) ifadelerinde yerine koyarsak;

$$U_e = \frac{1}{2} \{w\}_e^T [k]_e \{w\}_e \quad (5.44)$$

ifadesini elde ederiz. Buradan rijitlik matrisi

$$[k]_e = \int_{Ae} \frac{h^3}{12} [B]^T [D] [B] dA \quad (5.45)$$

şeklinde bulunur, (Smith, 1970).

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial^2 / \partial x^2 \\ \partial^2 / \partial x^2 \\ 2(\partial^2 / (\partial x \partial y)) \end{bmatrix}, [N] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} & \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} & \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} [N(\xi, \eta)] \quad (5.46)$$

şekil fonksiyonlarını bu ifadeye yerine koyup izotropik malzeme için integre edersek, rijitlik matrisini elde ederiz.

$$k_{11} = \begin{bmatrix} \left\{ 4(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{2}{5}(7 - 2\nu) \right\} & \text{Sym} & \\ \left\{ 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu) \right\} b & \left\{ \frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{4}{5}(1 - \nu) \right\} b^2 & \\ -\left\{ -2\beta^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu) \right\} a & -\nu ab & \left\{ \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu) \right\} a^2 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$k_{21} = \begin{bmatrix} -\left\{ 2(2\beta^2 - \alpha^2) + \frac{2}{5}(7 - 2\nu) \right\} & \left\{ \alpha^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu) \right\} b & \left\{ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu) \right\} a \\ \left\{ \alpha^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu) \right\} b & \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{4}{15}(1 - \nu) \right\} b^2 & 0 \\ -\left\{ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu) \right\} a & 0 & \left\{ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1 - \nu) \right\} a^2 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$k_{31} = \begin{bmatrix} \left\{ -2(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{2}{5}(7-2\nu) \right\} & \left\{ -\alpha^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} b & \left\{ \beta^2 - \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} a \\ \left\{ \alpha^2 - \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} b & \left\{ \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \right\} b^2 & 0 \\ \left\{ -\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} a & 0 & \left\{ \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \right\} a^2 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$k_{41} = \begin{bmatrix} \left\{ 2(\beta^2 - 2\alpha^2) - \frac{2}{5}(7-2\nu) \right\} & \left\{ -2\alpha^2 - \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} b & \left\{ -\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \right\} a \\ \left\{ 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} b & \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{1}{15}(1-\nu) \right\} b^2 & 0 \\ \left\{ -\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \right\} a & 0 & \left\{ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \right\} a^2 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Bu ifadelerde $\alpha = \frac{a}{b}$ $\beta = \frac{a}{b}$

$$I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$k_{22} = I_3^T k_{11} I_3$$

$$k_{32} = I_3^T k_{41} I_3$$

$$k_{42} = I_3^T k_{31} I_3$$

$$k_{33} = I_1^T k_{11} I_1$$

$$k_{43} = I_1^T k_{21} I_1$$

$$k_{44} = I_2^T k_{11} I_2 \quad \text{'dir.} \quad (5.52)$$

Ayrıca bu prosedür (Tinavi, 1972)'de anisotropic malzeme içinde tekrarlanmıştır.

5.3.4 Yük Matrisinin Bulunması

(5.35) denklemini (5.22) ifadesinde yerine koyarsak

$$\delta w_e = [\delta w]_e^T \{f\}_e \quad (5.53)$$

$$\{f\}_e = \int_a^T [N]^T p_z dA \quad (5.54)$$

Burada $\{f\}_e$ matrisi p_z yayılı yükü altındaki elemanın eşdeğer kuvvet matrisidir. p_z 'nin sabit olduğunu kabul eder ve şekil fonksiyonlarını yerine koyup integre edersek, kuvvet matrisi olarak;

$$\{f\}_e = p_z \frac{ab}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ b \\ -a \\ 3 \\ b \\ a \\ 3 \\ -b \\ a \\ 3 \\ -b \\ -a \end{bmatrix} \quad \text{ifadesi elde edilir} \quad (5.55)$$

5.3.5 Plak İç Kuvvetlerinin Bulunması

Plagın herhangi bir noktasındaki gerilme değerleri, aşağıdaki bağıntı ile elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x \\ \sigma_x \end{bmatrix} = \{\sigma\} = [D] = \{\varepsilon\} \quad (5.56)$$

denklem (5.18)'deki şekil değiştirme ifadesini burada yerine koyarsak

$$\{\sigma\} = -z[D]\{X\} \quad (5.57)$$

$$\{\sigma\} = -z[D][B]\{w\}_e \quad (5.58)$$

bağıntıları elde edilir.

Buradaki $[B]$ matrisi x ve y 'nin (yada ξ ve η) bir fonksiyonu olduğuna göre (5.58) ifadesi plagın herhangi bir noktasındaki (x, y, z) gerilme değerlerinin, elemanın serbestlik derecelerinin yaptığı deplasmanlara göre bulunmasını sağlar.

M_x ve M_y eğilme momentleri ile M_{xy} ve M_{yx} burulma momentleri birim uzunluk için aşağıdaki şekilde bulunur.

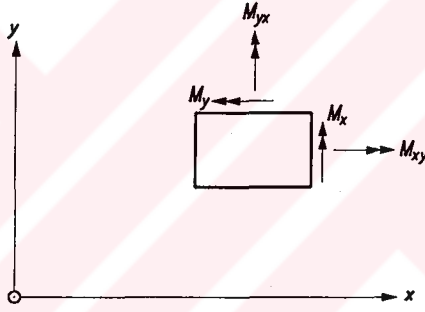
$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z dz \quad (5.59)$$

Ayrıca $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ olduğu için $M_{yx} = M_{xy}$ ' dir. Bu momentlerin yönleri ve plak elemanı üzerindeki gösterimi Şekil 5.4'de görülebilir.



Şekil 5.4 İç kuvvetlerin pozitif yön kabulleri

(5.58)'deki ifadeyi (5.59) ifadelerinde yerine koyarsak moment değerleri için aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{h^3}{12} [I]_3 [D][B]\{W\}_e \quad (5.60)$$

5.4 Serbest Sönümsüz Titreşim Analizi

Sönümsüz bir sistemin doğal titreşim frekanslarının, ω_i , ve mod şekillerinin, $\{\phi\}_i$, belirlenebilmesi için aşağıdaki lineer özdeğer problemin çözülmesi gerekmektedir.

$$[K - \omega_i^2 M] \{\phi\}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.61)$$

K : Sistemin rijitlik matrisi

M : Sistemin kütle matrisi

ω_i : Sistemin i 'inci doğal titreşim frekansı

$\{\phi\}_i$: Sistemin i 'inci mod şeklinin vektörü

Böyle bir özdeğer probleminin çözülebilmesi için değişik nümerik yöntemler kullanılabilir. Aşağıda bunlardan bazılarına ve bu çalışmada kullanılmış olana değinilecektir. Ancak önce bazı ön dönüşümlerin ve hazırlıkların yapılmasında fayda vardır.

Öncelikle i indisini kaldırır ve ω^2 yerine λ değerini kullanırsak (5.61) ifadesi aşağıdaki şekli alır.

$$[K - \lambda M] \{\phi\} = 0 \quad (5.62)$$

K ve M (rijitlik ve kütle) matrislerinin $n \times n$ boyutunda olduğunu varsayarak, (5.62) ifadesi n adet lineer homojen denklemi yansıtmaktadır. Böyle bir denklem takımının sıfırdan farklı bir sonuca sahip olabilmesi için katsayılar determinantının sıfıra eşit olması gerekir.

$$\det[K - \lambda M] = |K - \lambda M| = 0 \quad (5.63)$$

Denklem (5.63) n 'inci dereceden, λ değişkenine sahip bir polinom şeklinde genişletilebilir. Bu polinomun $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olmak üzere n tane kökü vardır. Bu kökler yukarıda gösterilen ifadenin özdeğeridir.

Bu özdeğerlerin hepsi gerçel ve pozitif ve ya sıfırdır. Ancak bunların hepsinin birbirinden farklı olması gerekmez.

Eğer bütün özdeğer birbirinden farklı ise her biri için denklem (5.62)'nin $\{\phi\}$ için bir çözümü bulunur. Bu çözümler özvektörler olarak adlandırılır. Bir özvektörün tüm

değerlerinin belirli bir sabitle çarpılmasıyla elde edilen vektör'de denklem (5.62)'nin bir çözümüdür. Bu yüzden özvektörleri belirli bazı özelliklere sahip olacak şekilde oralamakta fayda vardır. Bu şekilde belirli bir sabitle çarpılmış özvektörler normalize edilmiş özvektörler olarak adlandırılır.

Normalizasyon prosedürlerinin en yaygın olanları; özvektör değerlerinin, en büyüğü 1 olacak şekilde bir sabitle çarpılması veya $\{\phi\}^T [M] \{\phi\} = 0$ ifadesinin sağlanacağı şekilde oranlanmasıdır.

Eğer λ_s m adet tekrarı olan bir özdeğer ise, (5.62) dekleminin λ_s için m adet özvektör çözümü bulunur, (Chopra, 1995). Tüm özdeğeri farklı olan durum için belirtilen özelliklerin hepsi özdeğerinde tekrarlar bulunan problemler için de geçerlidir.

5.4.1 Özvektörlerin Ortogonalliği

$\{\phi\}_r$ ve $\{\phi\}_s$ 'in λ_r ve λ_s özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler olduğunu kabul edersek;

$$[K] \{\phi\}_r - \lambda_r [M] \{\phi\}_r = 0 \quad (5.64)$$

$$[K] \{\phi\}_s - \lambda_s [M] \{\phi\}_s = 0 \quad (5.65)$$

bağıntılarını yazabiliriz. (5.65) ifadesini $\{\phi\}_r^T$ ile önden çarparsak ;

$$\{\phi\}_r^T [K] \{\phi\}_s - \lambda_s \{\phi\}_r^T [M] \{\phi\}_s = 0 \quad (5.66)$$

elde edilir.

Benzer olarak (5.64) ifadesini de $\{\phi\}_s^T$ ile çarparsak ve transpoze edersek;

$$\{\phi\}_s^T [K] \{\phi\}_s - \lambda_r \{\phi\}_s^T \{\phi\}_r^T = 0 \text{ elde edilir} \quad (5.67)$$

$[K]$ ve $[M]$ matrisleri simetrik olduğu için (5.66) ifadesinden (5.67) ifadesini çıkartırsak

$$(\lambda_r - \lambda_s) \{\phi\}_r^T [M] \{\phi\}_s = 0 \quad (5.68)$$

ifadesi bulunur. $s \neq r$ ve $\lambda_s \neq \lambda_r$ durumu için;

$$\{\phi\}_r^T [M] \{\phi\}_s = 0 \quad (5.69)$$

elde edilir ve bu bağıntı (5.67)'de yerine konulduğunda

$$\{\phi\}_r^T [K] \{\phi\}_s = 0 \quad (5.70)$$

bağıntısı bulunur. Denklem (5.69) ve (5.70) özvektörlerin ortogonallikleri yansıtır. Bu iki ifadenin $\lambda_s = \lambda_s$ ve $s \neq r$ durumunda da geçerli olduğu gösterilebilir, (Petyt, 1990).

5.4.2 Özdeğer Problemin standart hale dönüştürülmesi

Litaratürde özdeğer problemi

$$[A - \lambda I] \{\psi\} = 0 \quad I : \text{birim dialog matris} \quad (5.71)$$

şeklinde ifade edilir.

(5.62) ifadesini bu standart forma dönüştürmek için birçok yol vardır. Bu çalışmada kullanılan yöntem aşağıda açıklanmıştır. Öncelikle kütle matrisinin ;

$$M = LL^T \quad L: \text{alt üçgen matris} \quad (5.72)$$

Şeklinde ifade edelim. Bu sadece M matrisinin simetrik ve pozitif definit olması ile mümkündür.

(5.72) ifadesini (5.62) denkleminde yerine koyarsak

$$[K - \lambda LL^T] \{\phi\} = 0 \quad (5.73)$$

bu ifadeyi önden L^{-1} ile çarpıp

$$\{\phi\} = [L]^{-T} \{\psi\} \quad (5.74)$$

tanımını kullanırsak

$$[L^{-1}KL^{-T} - \lambda I] \{\psi\} = 0 \quad (5.75)$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifade özdeğer probleminin (5.71) ifadesinde gösterilen standart formuna sahiptir. Standart formda A ile gösterilen değişken (5.75) ifadesinde

$$A = L^{-1}KL^{-T} \quad (5.76)$$

değerine karşılık gelmektedir. Standart forma dönüştürülmüş özdeğer probleminin özdeğerleri başlangıçtaki problemin özdeğerleri ile aynıdır. Özvektörler arasında ise (5.74) ifadesinde belirtilen ilişki vardır, (Petyt, 1990).

5.4.3 Standart Özdeğer Probleminin Çözümü

Standart hale dönüştürülmüş özdeğer probleminin çözümü için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bir özdeğer problemin çözümünde önemli olan bazı noktalar vardır:

- Hesaplama süresi.
- Doğal titreşim frekansların hepsinin hesaplanması yerine istenildiği kadar modun dikkate alınması.
- Hesaplanan değerlerdeki hata oranı.

Her metodun bazı avantajları ve dezavantajları bulunmaktadır. Bu yüzden en uygun metodun seçilmesi, incelen sistemin özelliklerine bağlıdır. Bu metodlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

- Jacobi Metodu
- Givens Metodu
- Householder Metodu
- Bisection Metodu
- Inverse İterasyon Metodu
- LR, QR, QL Metodları

Ayrıca, çok fazla serbestlik derecesine sahip sistemlerin büyük özdeğer problemlerini çözmek için geliştirilmiş bazı metodlar aşağıda sıralanmıştır;

- Bisection- Inverse İterasyon Metodu
- Subspace İterasyon
- Simultaneous İterasyon
- Lanczos Metodu

Bu çalışmada, çalışmanın amacına uygun olduğu düşünülen ve hata oranının kolayca kontrol edilmesine imkan veren Jacobi metodu kullanılmıştır.

Jacobi metodunun bilgisayar programları için hazırlanmış algoritması (Wilson, 1998)'den alınmış ve hazırlanan programın dilinde tekrar yazılarak, çalışmanın özelliklerine uygun olacak şekilde uyarlanmıştır.

5.4.3.1 Cholesky Ayrışımı

Bu prosedürün başında yer alan kütle matrisinin alt üçgen matrislerin çarpımı şeklinde ifade edilmesi;

$$M = L L^T \quad (5.77)$$

Cholesky' nin simetrik ayrışım yöntemi ile yapılabilir. Bu yöntemi basitçe açıklamak gerekirse; [L] matrisinin terimleri

$$l_{jj} = (M_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{1/2} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.78)$$

$$l_{ij} = (M_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk})^{1/2} / l_{jj} \quad \begin{matrix} j = 1, 2, 3, \dots, (n-1) \\ i = (j+1), \dots, n \end{matrix} \quad (5.79)$$

ifadeleriyle elde edilir, (Petyt, 1990).

5.4.3.2 Jacobi Metodu

Jacobi metodu aşağıda belirtilen formda bir dizi ortogonal dönüşüm yapılmasını içerir.

$$A_{r+1} = P_r^T A_r P_r \quad (5.80)$$

Bu dönüşümlerin her biri, simetrik matrisin diyagonal dışındaki elemanlarının bir çiftini elimine eder. Eğer elimine edilecek elemanlar (i, j) ve (j, i) ise, aşağıda verilen ortogonal P_r matrisi kullanılır.

$$P_r = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \cos Q & -\sin Q & \\ & \sin Q & \cos Q & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

(5.80) ifadesindeki matris çarpımı sadece i, j sıraları ile i, j sütunlarında değişikliğe yol açar.

A_{r+1} matrisinin (i, j) elemanını elimine etmek

$$(-a_{ii} + a_{jj}) \sin \theta \cos \theta + a_{ij} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0 \quad (5.82)$$

bağıntısının sağlanması ile olur. Dolayısı ile

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{ij}}{(a_{ii} - a_{jj})} \quad a_{ii} \neq a_{jj} \quad -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4 \quad (5.83)$$

$$\theta = \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|} \frac{\pi}{4} \quad a_{ii} = a_{jj} \quad (5.84)$$

olarak bulunur.

Bu metod, her dönüşümde diyagonal dışı bir çift elemanın elimine edilmesini sağlar. Her dönüşümde elimine edilen eleman en yüksek modüle sahip elemandır. Ancak elimine edilen eleman her zaman sifıra eşitlenememiş olabilir. Bu yüzden bu metod bir iterasyon metodudur.

Bu metotta $r \rightarrow \infty$, A_{r+1} diyagonal bir matrise doğru yaklaşır. Bu diyagonal terimler de özdeğer probleminin sonucunda elde edilen özdeğerlere eşittir. Eğer yeterli yaklaşımda sonuç almak için s adet iterasyon yapılmışsa özdeğer problemin özvektörleri

$$P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots \ P_s \quad (5.85)$$

matrislerinin çarpımı sonucunda elde edilen matrisin sütunlarıdır.

Jacobi metodunun çeşitli geliştirilmiş varyasyonları bulunmaktadır. Bunlardan biri de Threshold Jacobi metodudur. Bu metotta her değer elimine edilmektense belirli bir modülün (limitin) üstündeki elemanların elimine edilmesidir.

Tipik bir modül, r ' inci dönüşüm için 10^{-2r} dir. Yani a_{ij} elemanı

$$\left[\frac{a_{ij}^2}{a_{ii} a_{jj}} \right]^{1/2} \leq 10^{-2r} \quad (5.86)$$

ifadesi sağlanıyorsa elimine edilmemektedir, (Wilson, 1998).

Jacobi metodu ile pozitif ve sıfır olan tüm özdeğerler bulunabilmektedir. İki özdeğer birbirine çok yakın ise hesaplanan özvektörler ortogonal olmasına rağmen hata oranları yüksektir. Ancak bu yüksek hata oranları yine de pratik mühendislik açısından kabul edilebilir derecelerdir.

5.5 Sönüm Etkileri

Yapı sistemlerinin, serbest ve/veya zorlanmış titreşimleri kesitlerde oluşan sürtünme, çatlama ve hava direnci gibi sönümlendirici kuvvetlerin etkisindedir. Bu etki dolayısı ile, serbest titreşimin genliği, aynı kalmak yerine, zamanla azalır ve bir süre sonra sönümlenerek sıfırlanır. Aynı şekilde zorlanmış titreşimlerde, rezonans halindeki hareketin genliği sınırsız bir şekilde artmak yerine, belirli bir limitte kalmaktadır. Tüm bu etkiler göz önüne alındığında, analitik çalışmaların gerçeği daha doğru bir şekilde yansıtmasını sağlamak için, sönümlendirici kuvvetlerin etkisinin de göz önüne alınması gerekmektedir.

Sönümlendirici kuvvetler; birbirleri üzerinde kayan yüzeyler arasındaki sürtünme kuvvetleri, hava veya akışkanların dirençleri, malzemelerin iç sürtünmeleri gibi etkilerden oluşurlar.

Enerji kaybına yol açan tüm etkenlerden, hız ile orantılı olan sönüm kuvvetlerine viskoz sönüm adı verilir. Viskoz sönüm matematiksel açıdan ele alınması en kolay sönüm türüdür.

Bu yüzden, analiz kolaylığı için, karmaşık bir sistemdeki tüm sönümlendirici kuvvetler, eşdeğer viskoz sönüm kuvvetine çevrilir. Örneğin; kesitlerde iç sürtünme kuvvetleri dolayısıyla oluşan yapısal sönüm, bu şekilde ele alınabilir.

5.5.1 Sönüm Matrisinin Özellikleri

Yapıların sönüm matrisleri yapısal boyutlara, yapı elemanlarının boyutlarına ve yapı malzemesinin sönümüne bağlı olarak hesaplanamamaktadır. Yapının sönüm matrisi, aynı rijitlik veya kütle matrislerinde olduğu gibi, yapının tüm elemanlarının sönüm özelliklerinden hesaplanabileceği düşünülebilir. Ancak, rijitlik ve kütle matrislerinden farklı olarak, sönüm matrisinin oluşturulmasında elemanların sönümünü yansıtacak pratik bir parametre mevcut değildir. Ayrıca malzemenin sönüm özelliklerini yansıtabilecek parametreler bilinse bile, oluşturulacak sönüm matrisi, kaybolan enerjinin büyük bir kısmını oluşturan; çelik yapılarda birleşimlerdeki sürtünmeler, betonarmede açılıp kapanan mikroçatlaklar, taşıyıcı olmayan yapı elemanlarıyla taşıyıcı yapı elemanları arasındaki sürtünmeler, gibi etkenleri göz önüne alamayacaktır, (Weaver, 1987).

Bu yüzden tüm enerji kaybına yol açan etkileri göz önüne alan modal sönüm oranları ile bulunan sönüm matrislerinin kullanılması, hem gerçeğe daha yakın hem de pratik bir sonuç bulunmasına olanak sağlar.

Modal sönüm oranı; sönümün sistemin kritik sönümüne bölünmesiyle elde edilen, boyutsuz

bir değerdir. Sistemin kütlesine ve rijitliğine bağlı olarak yapının sönümünü yansıtır. Modal sönüm oranının belirlenmesi deneysel yoldan yapılabildiği gibi, daha önceki deneyimlerden yola çıkılarak tahmin de edilebilir.

Birçok şartnamede, yapı malzemesinden dolayı sönümde oluşan değişiklikler göz önünde bulundurulmadan %5' lik sönüm oranı kullanılması önerilmektedir.

Çizelge 5.3'de daha önceki deneyimlere ve deneylere dayanarak hazırlanmış tavsiye edilen sönüm oranları bulunmaktadır, (Chopra, 1995).

Çizelge 5.2 Tavsiye edilen sönüm oranları

Gerilme Düzeyi	Taşıyıcı Sistemin Tipi	Sönüm Oranı (%)
Akma Sınırının Yarısında	Kaynaklı Çelik, Öngerilmeli Beton	2 – 3
	Betonarme	3 – 5
	Bulonlu Çelik, Bulonlu ve Çivili Ahşap	5 – 7
Akma Sınırına Yakın	Kaynaklı Çelik, Öngerilmeli Beton	5 – 7
	Öngerilmeli Beton (Tüm öngerme kuvveti kaybolmuş)	7 – 10
	Betonarme	7 – 10
	Bulanlu Çelik, Bulonlu Ahşap	10 – 15
	Çivili Ahşap	15 - 20

5.5.2 Klasik Sönüm Matrisi

Yapı sisteminin tümünde benzer sönüm mekanizmaları var ise ve yapının davranışı lineer elastik ise, klasik sönüm matrisi yeterli bir yaklaşım göstermektedir.

Modal sönüm oranlarından, sönüm matrisinin oluşturulmasını sağlayan metodların iki tanesi, Rayleigh ve Caugheg Sönümü ile Modal Sönüm Matrislerinin Süperpozisyonudur, (Chopra, 1995).

5.5.2.1 Rayleigh Sönümü ve Caugheg Sönümü

Öncelikle kütle oranlı sönümü ve rijitlik oranlı sönümü ele alalım.

$$c=a_0 m \quad c=a_1 k \quad (5.87)$$

a_0 ve a_1 birimleri sırası ile sn^{-1} ve sn olan sabit katsayılardır. Her iki sönüm matrisi tipinde de $\phi^T c \phi$ ifadesi mod şekillerinin ortogonal alınmasından dolayı diyagonal bir matris oluşturur. Bu yüzden bu tip sönüm matrislerine klasik sönüm matrisi denir.

Kütle oranlı sönümü olan bir sistem ele alırsak, modal sönüm oranları ile a_0 sabiti arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir. Bir sistemin n 'inci modu için genelleştirilmiş sönümü;

$$C_n = a_0 m_n \quad (5.88)$$

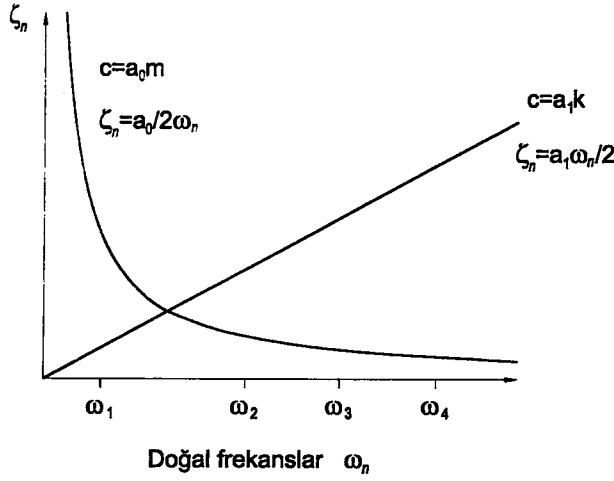
ve modal sönüm oranı;

$$\xi_n = \frac{C_n}{2M_n \omega_n} = \frac{a_0}{2\omega_n} \text{ olarak bulunur} \quad (5.89)$$

Şekil 5.5'te görüldüğü gibi sönüm oranı, doğal titreşim frekansı ile ters orantılıdır.

a_0 katsayısı, herhangi bir modda istenilen sönüm oranını verecek şekilde seçilebilir.

$$a_0 = 2\xi_j \omega_j \quad (5.90)$$



Şekil 5.5 Kütle ve rijitlik oranlı sönüm

Bu şekilde a_0 katsayısının hesaplanmasından sonra sönüm matrisi, c (5.87) yardımı ile hesaplanabilir. Ayrıca denklem (5.89) yardımı ile diğer modlara karşılık gelen sönüm oranları da hesaplanabilir.

Benzer şekilde, rijitliğe bağlı sönüme sahip sistemlerde de modal sönüm oranları ile, a_1 katsayısı arasında bir bağıntı kurulabilir. Bu durumda;

$$C_n = a_1 \omega_n^2 M_n \quad (5.91)$$

$$\xi_n = \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (5.92)$$

olarak bulunur.

Sönüm oranı, doğal titreşim frekansının artmasıyla lineer olarak artmaktadır, (Şekil 5.5). a_1 katsayısı, herhangi bir modda istenilen sönüm oranını verecek şekilde seçilir.

$$a_1 = \frac{2\xi_j}{\omega_j} \quad (5.93)$$

Bu şekilde a_1 katsayısının hesaplanmasından sonra sönüm matrisi, c (5.87) yardımı ile hesaplanabilir. Ancak bu iki şekilde de hesaplanan sönüm matrisleri, çok serbestlik dereceli sistemlerin analizlerinde kullanılmaya uygun değildir. Şekil 5.5' te verilen sönüm oranlarının doğal titreşim periyotları karşısında değişimi, deneysel çalışmaların sonuçları ile uyum göstermemektedir.

Deneysel çalışmalar birden fazla doğal titreşim frekansının aynı sönüm oranına sahip olduğunu göstermektedir. Deneysel çalışmalarla uyum gösteren, klasik sönüm matrisinin oluşturulmasında ilk adım olarak Rayleigh Sönümünü ele alalım

$$C=a_0m+a_1k \quad (5.94)$$

Böyle bir sistemin n'inci modundaki sönüm oranı;

$$\xi_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad \text{olur} \quad (5.95)$$

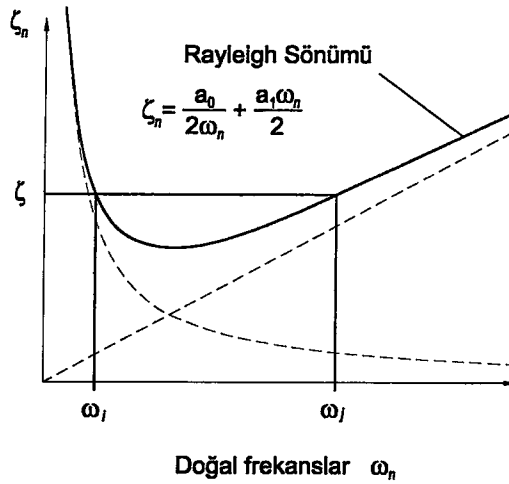
a_0 ve a_1 katsayıları, i'inci ve j'inci iki ayrı moda karşılık gelen ξ_i ve ξ_j sönüm oranlarının bilinmesi ile bulunur.

(5.95)'i bu iki mod için matris şeklinde ifade edersek;

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

Bu sistemin çözülmesi ile a_0 ve a_1 katsayıları bulunabilir.

Böylece sistemin sönüm matrisi ve diğer modlara ait sönüm oranları (5.94) ve (5.95) ile bulunur. Rayleigh tipi sönümde, sönüm oranının doğal titreşim frekansı karşısındaki değişimi Şekil 5.6'da gösterilmiştir, (Chopra, 1995).



Şekil 5.6 Rayleigh sönümü

Eğer ikiden fazla moda karşılık gelen sönüm oranları belirtmek isteniyorsa, klasik sönüm matrisinin genel hali, (Caughey Damping) ele alınmalıdır. Bu durumda sönüm;

$$c = m \sum_{l=0}^{N-1} a_l [m^{-1}k]^l \quad (5.97)$$

N: serbestlik derecesi sayısı

olarak karşımıza çıkar. Ve modal sönüm oranları ile katsayılar arasındaki ilişki ise;

$$\xi_n = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{j-1} a_l \omega_n^{2l-1} \quad (5.98)$$

j: belirtilmek istenen modal sönüm sayısı

5.5.2.2 Modal Sönüm Matrislerinin Süperpozisyonu

Klasik sönüm matrisinin, modal sönüm oranlarından oluşturulmasında kullanılan bir diğer yol ise modal sönüm matrislerinin süperpozisyonudur. Bu yöntemin uygulanış biçimi ise,

$$\Phi^T c \Phi = C \quad (5.99)$$

C: n'inci diyagonal elemanı genelleştirmiş modal sönüm oranına eşit diyagonal matris

$$C_n = \xi_n (2 M_n \omega_n) \quad (5.100)$$

ξ_n 'in önceden tahmin edilerek belirlenmesi ve C'nin denklem (5.100) ile bulunması ile (5.99) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$c = (\Phi^T)^{-1} C \Phi^{-1} \quad (5.101)$$

Sönüm matrisinin bu şekilde hesaplanması iki ayrı matrisin tersinin alınması gerektirdiğinden uzun zaman alabilir. Bu yüzden modların ortogonallik özelliğinden yararlanılarak aşağıdaki kısaltmalar uygulanabilir.

$$\Phi^T m \Phi = M \quad (5.102)$$

$$\Phi^{-1} = M^{-1} \Phi^T m \quad (5.103)$$

$$(\Phi^T)^{-1} = m \Phi^T M^{-1} \quad (5.104)$$

M matrisi; diyagonal terimleri genelleştirilmiş modal kütleleri olan diyagonal bir matris

olduğu için, M^{-1} matrisi hemen hesaplanabilir, (Chopra, 1995).

$$c = m(m\Phi M^{-1})C(M^{-1}\Phi^T m) \quad (5.105)$$



5.6 Zorlanmış Titreşim

İnce plağın zorlanmış titreşiminin hareket denklemi, sonlu elemanlar yöntemi için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[K]\{D(t)\} + [C]\{\dot{D}(t)\} + [M]\{\ddot{D}(t)\} = \{P(t)\} \quad (5.106)$$

Burada $\{D(t)\}$ deplasman parametrelerine $\{u\}$ denirse, denklem aşağıdaki şekli alır.

$$[K]\{u\} + [C]\{\dot{u}\} + [M]\{\ddot{u}\} = \{P(t)\} \quad (5.107)$$

u : Serbestlik derecelerinin yerdeğiştirmelerini içeren kolon matris

M : Kütle matrisi

C : Sönüm matrisi

K : Rijitlik matrisi

P : Serbestlik derecelerine etkiyen eşdeğer kuvvetleri içeren kolon matrisi

Hareket denkleminin çözümü için birçok değişik yol kullanılabilir. Kullanılacak yöntemin seçiminde önemli olan unsur, sisteme etkiyen yükün cinsidir; harmonik, periyodik, değişken vb gibi. Bu yöntemlerden bazıları şu şekilde sıralanabilir, (Petyt, 1990).

Lineer çözüm için:

- Doğrudan integrasyon yöntemleri;
 - Merkezi fark yöntemi,
 - Houbolt yöntemi,
 - Wilson θ yöntemi,
 - Newmark yöntemi.
- Mod süperpozisyon yöntemi.

Nonlinear çözüm için:

- Doğrudan integrasyon yöntemleri;
 - Merkez fark yöntemi,
 - Newmark yöntemi,
 - Wilson θ yöntemi.
- Mod süperpozisyon yöntemi.

Mod birleştirme yönteminde, yapıya etkiyen dinamik yüklerin etkisi bulunurken, sistemin yeterli sayıda titreşim periyodu ve mod şekli hesaba katılır. Ayrıca bu etkinin, serbestlik dereceleri arasında dağıtılmasında ilgili mod şekli için ayrı ayrı değerlendirilmesi olarak da görülebilir.

Bu çalışmada, sistemin dinamik kuvvet etkisi altındaki davranışının daha ayrıntılı bir şekilde izlenebilmesi için, doğrudan integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

5.6.1 Newmark Metodu

Doğrudan integrasyon yöntemi, genel olarak, (5.106)'da belirtilen hareket denkleminin, (ikinci derece difarensiyel denklem) değişik nümerik integrasyon metodları ile zaman tanım alanında çözülmesini içerir. 1959 yılında N.M. Newmark, aşağıdaki ifadelere dayanan, bir metod ortaya koymuştur, (Chopra, 1995).

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1 - \gamma) \Delta t] \ddot{u}_i + (\gamma \Delta t) \ddot{u}_{i+1} \quad (5.108)$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t) \dot{u}_i + [(0.5 - \beta) (\Delta t)^2] \ddot{u}_i + [\beta (\Delta t)^2] \ddot{u}_{i+1} \quad (5.109)$$

β ve γ parametreleri, belirli bir zaman aralığı içinde, ivmenin değişimini tanımlamakla birlikte, metodun yaklaşıklık ve stabilite derecelerini de belirler. Bu parametrelerin yeterli yaklaşıklık derecesinde sonuç alınmasını sağlayan tipik değerleri;

$$\gamma = 1/2 \quad (5.110)$$

$$1/6 \leq \beta \leq 1/4 \quad (5.111)$$

olarak sınırlandırılır. Yukarıda belirtilen (5.108), (5.109) ifadeleri (5.106)'da verilen hareket denklemi ile birlikte kullanıldığında; i zamanındaki u_i , $\dot{u}_i$ ve $\ddot{u}_i$ değerlerinin bilinmesi ile $i+1$ zamanındaki u_{i+1} , $\dot{u}_{i+1}$ ve $\ddot{u}_{i+1}$ değerlerinin hesaplanmasına olanak verir. $\ddot{u}_{i+1}$ bilinmeyen değeri (5.108) ve (5.109) ifadelerinin sağ tarafında bulunduğundan, bu hesaplamaların yapılması için iterasyon gerekmektedir.

Ancak lineer sistemler için (5.108), (5.109) ve (5.106) ifadeleri değiştirilerek iterasyondan kurtulunabilir.

β ve γ parametrelerinin bazı sabit değerlere sahip olması ile Newmark metodunun bazı özel halleri geliştirilmiştir.

Bunlar;

- Ortalama ivme değişimi yöntemi; $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$
- Lineer ivme değişimi yöntemi; $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$

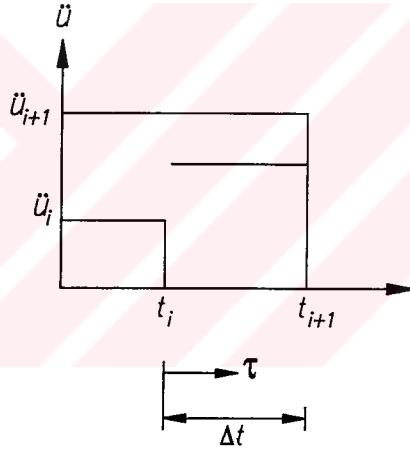
5.6.1.1 Ortalama İvme Değişimi Yöntemi

Ortalama ivme değişimi yönteminde, belirli bir zaman aralığında ivmenin sabit olduğu ve bu ivmenin değerinin, zaman aralığının başlangıç ve bitiş değerlerinin ortalaması olduğu kabul edilir.

Şekil 5.7’den de görülebildiği gibi zaman aralığındaki ivmenin değişimi;

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.112)$$

ifadesiyle tanımlanabilir.



Şekil 5.7 Ortalama ivme değişim yönteminde ivme değişimi

Bu ifadenin integralinin alınması ile zaman aralığındaki hızın, $\dot{u}(\tau)$, değişimi elde edilir.

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.113)$$

Zaman aralığının sonundaki hızın, $\dot{u}_{i+1}$, belirlenmesi için (5.113) ifadesine $\tau = \Delta t$ eşitliği eklenir.

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.114)$$

Bu ifadenin integralinin alınması ile zaman aralığındaki yer değıştirmenin , $u(\tau)$, değışimi elde edilir.

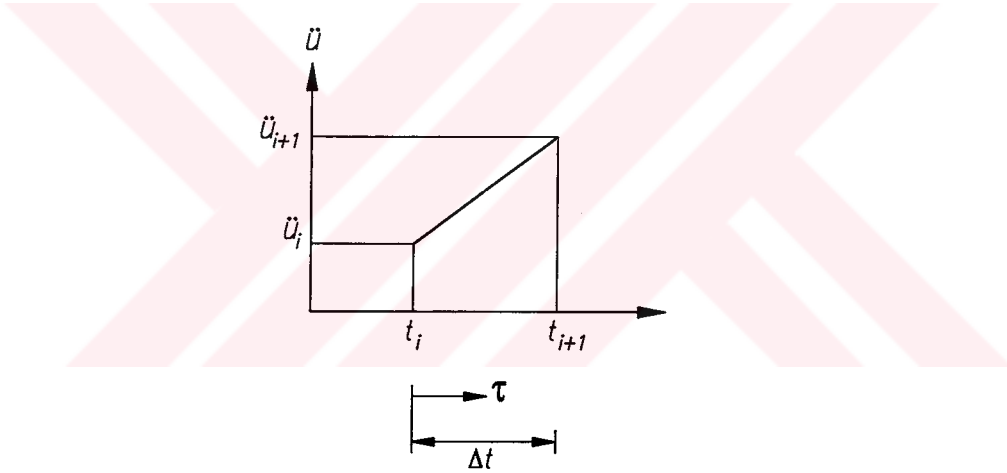
$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{\tau^2}{4} (\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.115)$$

$i+1$ zamanındaki yerdeğıştirmenin bulunabilmesi için (5.115) ifadesinde, $\tau = \Delta t$, bağıntısı yerine konur.

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} (\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.116)$$

5.6.1.2 Doğrusal İvme Değışimi Yöntemi

Linear ivme değışimi yönteminde, belirli bir zaman aralığında ivmenin linear olarak değıştiğı kabul edilir.



Şekil 5.8 Linear ivme değışimi yönteminde ivme değışimi

Şekil 5.8’de görülebildiğı gibi zaman aralığındaki ivmenin değışimi;

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\tau}{\Delta t} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \quad (5.117)$$

ifadesiyle tanımlanabilir. Bu ifadenin integralinin alınması ile zaman aralığındaki hızın, $\dot{u}(\tau)$, değışimi elde edilir.

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \quad (5.118)$$

Zaman aralığının sonundaki hızın, $\dot{u}_{i+1}$, belirlenmesi için (5.118) ifadesine $\tau = \Delta t$ eşitliği eklenir.

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.119)$$

Bu ifadenin integralinin alınması ile zaman aralığındaki yer değiştirmenin, $u(\tau)$, değişimi elde edilir.

$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \ddot{u}_i \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \quad (5.120)$$

$i+1$ zamanındaki yerdeğiştirmenin bulunabilmesi için (5.120) ifadesinde, $\tau = \Delta t$, bağıntısı yerine konur.

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{6} \ddot{u}_{i+1} + \frac{1}{3} \ddot{u}_i \right) \quad (5.121)$$

5.6.1.3 Lineer Sistemler için Newmark Bağıntıları

Tekrar (5.108) ve (5.109) bağıntılarına dönüp, iterasyon gerektirmeyen bir metod geliştirmek için aşağıdaki eşitliklerin kullanılması gerekir.

$$\Delta u_i \equiv u_{i+1} - u_i \quad (5.122)$$

$$\Delta \dot{u}_i \equiv \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i \quad (5.123)$$

$$\Delta \ddot{u}_i \equiv \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i \quad (5.124)$$

$$\Delta p_i \equiv p_{i+1} - p_i \quad (5.125)$$

(5.108) ve (5.109) ifadelerini tekrar yazarsak;

$$\Delta \dot{u}_i = (\Delta t) \ddot{u}_i + (\gamma \Delta t) \Delta \ddot{u}_i \quad (5.126)$$

$$\Delta u_i = (\Delta t) \dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i + \beta (\Delta t)^2 \Delta \ddot{u}_i \quad (5.127)$$

ve (5.127) ifadesini $\Delta \ddot{u}_i$ değeri için çözersek;

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i \quad (5.128)$$

ve (5.128) ifadesini (5.126)'da yerine koyarsak,

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i \quad (5.129)$$

bağıntısını elde ederiz. (5.128) ve (5.129) ifadelerini zaman aralığındaki hareket denkleminde (5.130);

$$m \Delta \ddot{u}_i + c \Delta \dot{u}_i + k \Delta u_i = \Delta p_i \quad (5.130)$$

yerine koyarsak;

$$\hat{k} \Delta u_i = \Delta \hat{p}_i \quad (5.131)$$

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m \quad (5.132)$$

$$\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c \right) \dot{u}_i + \left[\frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \right] \ddot{u}_i \quad (5.133)$$

bağıntılarını elde ederiz.

$\hat{k}$ ve $\Delta \hat{p}_i$ değişkenleri; sistem özellikleri (m, k, c), algoritma parametreleri (γ, β), ve zaman aralığının başlangıç değerleri ($\dot{u}_i, \ddot{u}_i$) ile hesaplanabilir. Sonuç olarak bu iki değişken ile zaman aralığındaki deplasman değişimi ;

$$\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}} \quad (5.134)$$

ifadesi ile integrasyona gerek kalmadan hesaplanabilir. Bu değerin bilinmesi ile $\Delta \dot{u}_i$ ve $\Delta \ddot{u}_i$ değerleri, (5.128), (5.129) bağıntıları yardımı ile, $u_{i+1}, \dot{u}_{i+1}, \ddot{u}_{i+1}$ değerleride (5.122), (5.123), (5.124) bağıntıları ile hesaplanabilir. Ayrıca t_{i+1} anındaki ivme değeri de

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c \dot{u}_{i+1} - k u_{i+1}}{m} \quad (5.135)$$

ifadesiyle hesaplanabilir. Ayrıca bu ifade $\ddot{u}_0$ değerinin, başlangıç koşulları ile hesaplanmasında da kullanılır.

5.6.1.4 Newmark Metodu Algoritması

Aşağıda Newmark metodu kullanırken yapılması gereken hesaplamalar bir sıra halinde verilmiştir.

Ortalama ivme yöntemi için : $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$

Lineer ivme teoremi için: $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$

- Başlangıç Değerleri

- $\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$
- Δt 'nin belirlenmesi
- $\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m$
- $a = \frac{1}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c,$
- $b = \frac{1}{2\beta}m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c$

- Her Adımda Tekrarlanan İşlemler

- $\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + a\dot{u}_i + b\ddot{u}_i$
- $\Delta u_i = \frac{\Delta\hat{p}_i}{\hat{k}}$
- $\Delta\dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i$
- $\Delta\ddot{u}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta u_i - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_i$
- $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i, \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i, \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i$
- $i+1$ zamanına ait değerler i zamanına ait değişkenlere atanarak (b) bölümündeki işlemler tekrarlanır.

5.6.1.5 Newmark Metodunun Uygulanma Kriterleri

Newmark metodunun stabil olması için ;

$$\frac{\Delta t}{T_j} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \quad (5.136)$$

kriterinin sağlanması gerekir. Ortalama ivme yönteminde $\left(\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}\right)$ bu kriter;

$$\frac{\Delta t}{T_j} \prec \infty \quad (5.137)$$

olarak gelişir. Bunun sonucu olarak ortalama ivme yönteminde Δt ne kadar büyük olursa olsun çözüm stabildir. Ancak çözümün doğru olması için Δt 'nin yeterince küçük olması gerekir.

Lineer ivme yönteminde $\left(\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6} \right)$ bu kriter ;

$$\frac{\Delta t}{T_j} \leq 0.551 \quad (5.138)$$

olarak karşımıza çıkar. Çözümün stabil olaması için zaman aralığının;

$$\Delta t \leq 0.551 T_j \quad (5.139)$$

T_j : Sistemin en küçük doğal titreşim peryodu.

kriterini sağlanması gerekir, (Petyt, 1990).

6. Analizler

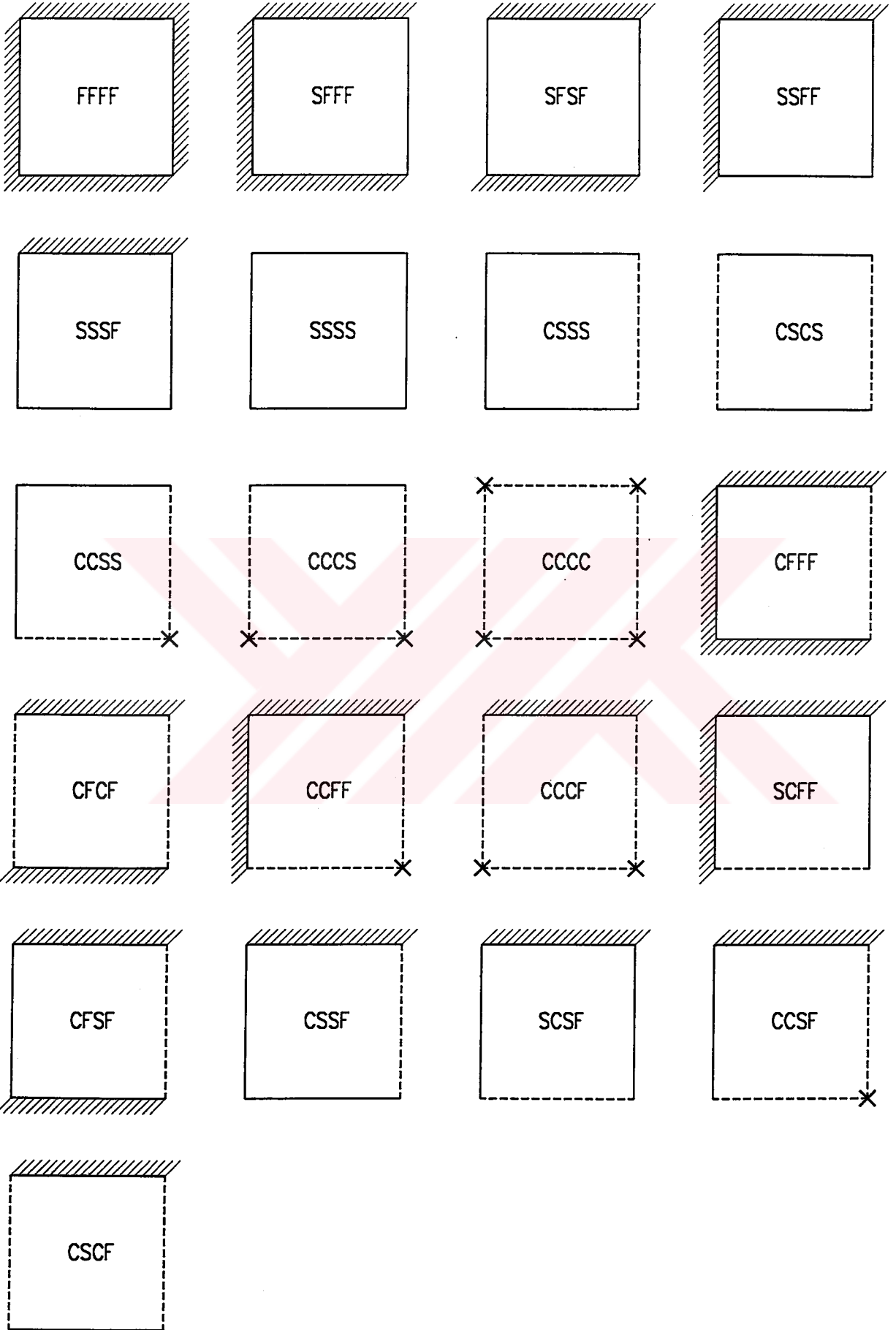
Sonlu elemanlar metodu ile plakların eğilmeli titreşimini incelemek amacıyla yukarıda anlatılan metodlara dayanan bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu program Microsoft Excel 97 ortamında Visual Basic 6.0 programlama dili ile yazılmıştır. Programın kodu Ekler kısmında verilmiştir.

Yapılan analizler iki ana başlık altında toplanabilir. Bunlar;

- Serbest titreşim analizi,
- Zorlanmış titreşim analizi'dir.

Ayrıca aşağıda detaylı olarak açıklanan analizlerde 21 adet değişik mesnetlenme tipi kullanılmıştır. Şekil 6.1'de değişik analizlerde kullanılan bu mesnetlenme tipleri ve bunların belirtilmesinde kullanılan kısaltmalar verilmiştir.





Şekil 6.1. Mesnetlenme Tipleri ve Kısaltmalar

6.1 Serbest Titreşim Analizi

Plakların eğilmeli serbest titreşimi, boyut, mesnetlenme koşulları ve sonlu eleman sayısı etkisi altında incelenmiştir. Yapılan tüm serbest titreşim analizlerinde sönümün etkisi çok az olduğunda ihmal edilmiştir.

6.1.1 Sonlu Eleman Sayısının Etkisi

İlk olarak dört değişik mesnetlenme tipine sahip plaklar (dört kenarından ankastre, dört kenarında basit mesnetli, karşılıklı kenarları ankastre ve basit mesnetli, komşu kenarları ankastre ve basit mesnetli) bir yüzdeki sonlu eleman sayısı 2, 4, 6, ve 8 alınarak incelenmiştir.

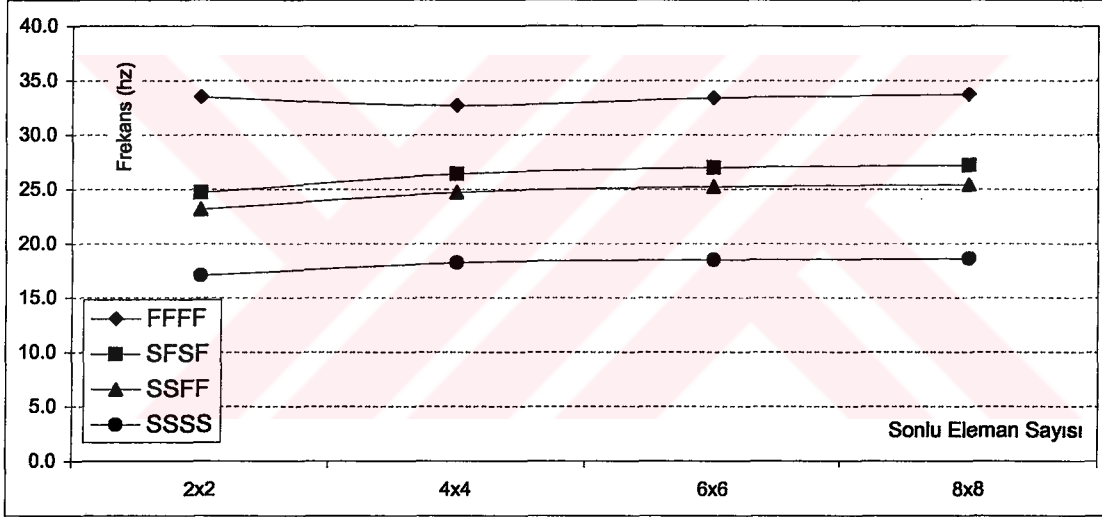
Analizleri yapılan plağın geometri ve malzeme özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Elastisite Modülü, E : 28 000 000 kN/m²
- Poisson Oranı, ν : 0.20
- Plak Kalınlığı, t : 0.15 m
- Plak Boyutları: 4 x 4 m
- Düzgün Yayılı Kütle: 0.90 ton/m² (Zati kütle dahil)

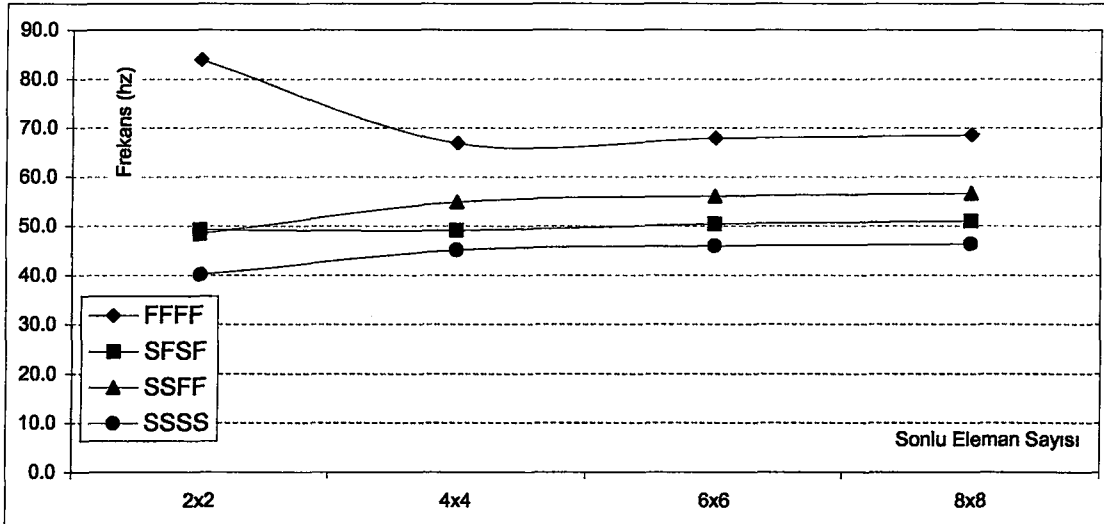
Çizelge 6.1’de sonlu eleman sayısının etkisinin incelendiği plaklara ait ilk üç titreşim frekansı verilmiştir. Şekil 6.2’de birinci titreşim frekansının, Şekil 6.3’de ise ikinci titreşim frekansının kullanılan eleman sayısı karşısındaki değişimi gösterilmiştir.

Çizelge 6.1 Sonlu eleman sayısının doğal titreşim frekansına etkisi

	Mesnet Tipi	Eleman Sayısı	f1	f2	f3
1	FFFF	2_2	33.5	83.8	83.8
2	FFFF	4_4	32.7	66.8	66.8
3	FFFF	6_6	33.4	67.8	67.8
4	FFFF	8_8	33.7	68.5	68.5
5	SFSF	2_2	24.7	49.2	77.8
6	SFSF	4_4	26.4	49.1	63.4
7	SFSF	6_6	27.0	50.4	64.5
8	SFSF	8_8	27.2	51.0	65.0
9	SSFF	2_2	23.2	48.5	58.1
10	SSFF	4_4	24.7	54.9	55.4
11	SSFF	6_6	25.2	56.1	56.4
12	SSFF	8_8	25.4	56.6	56.9
13	SSSS	2_2	17.1	40.1	40.1
14	SSSS	4_4	18.2	45.1	45.1
15	SSSS	6_6	18.5	46.0	46.0
16	SSSS	8_8	18.6	46.3	46.3



Şekil 6.2 Birinci doğal titreşim frekansının sonlu eleman sayısı karşısındaki değişimi



Şekil 6.3 İkinci doğal titreşim frekansının sonlu eleman sayısı karşısındaki değişimi

6.1.2 Mesnet Açıklığının ve Koşullarının Etkisi

Yapılan bir diğer çalışmada ise dört değişik plak açıklığına ve 21 değişik mesnetlenme koşuluna sahip plakların doğal titreşim frekansları ve mod şekilleri hesaplanmıştır. Bu çalışmada kullanılan plağın geometri ve malzeme özellikleri aşağıda verilmiştir.

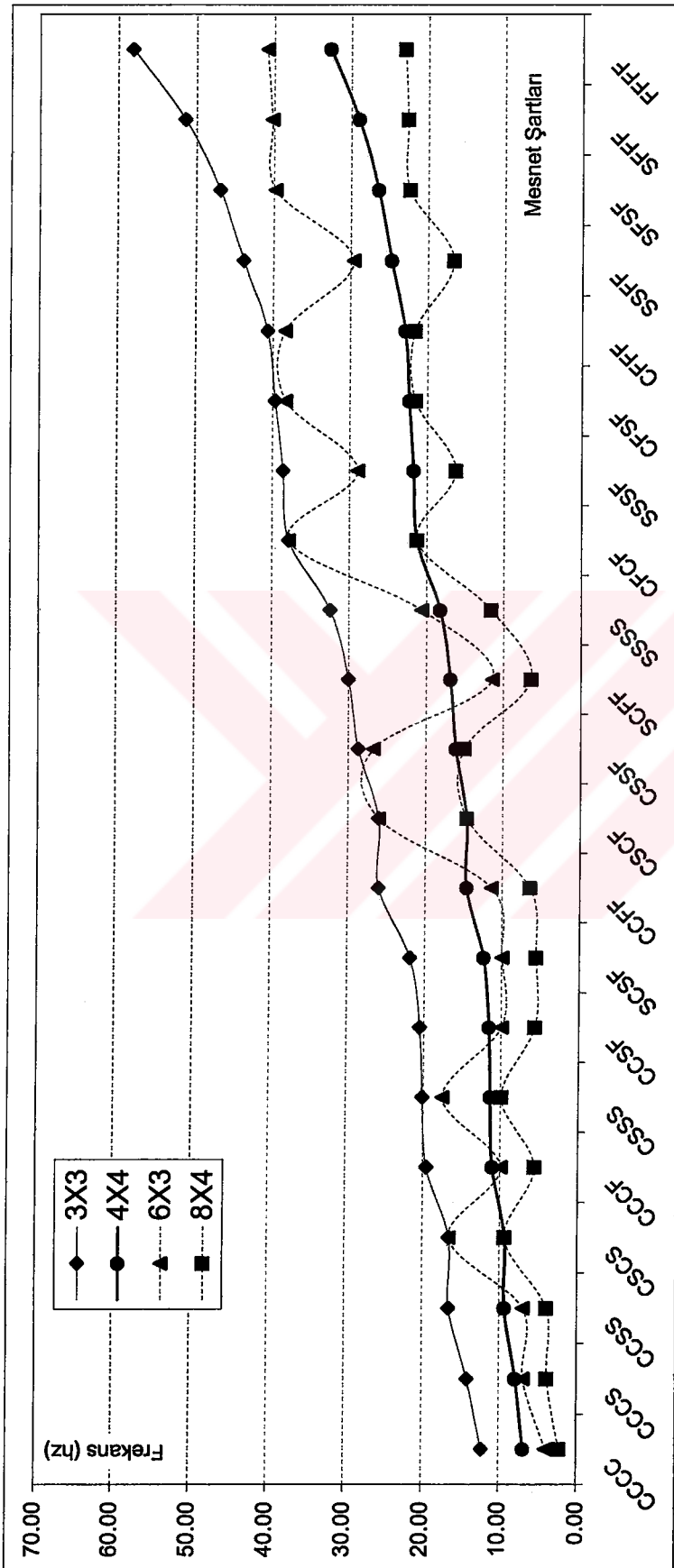
- Elastisite Modülü, E : 28 000 000 kN/m²
- Poisson Oranı, ν : 0.20
- Plak Kalınlığı, t : 0.15 m
- Düzgün Yayılı Kütle: 0.90 ton/m² (Zati kütle dahil)

Çizelge 6.2’de mesnetlenme koşulları ve mesnet açıklıkları incelenen plakların ilk üç doğal titreşim frekansı verilmiştir. Şekil 6.4’de dört değişik açıklıktaki plakların birinci doğal titreşim frekanslarının mesnetlenme koşulları karşısındaki değişimi gösterilmiştir.

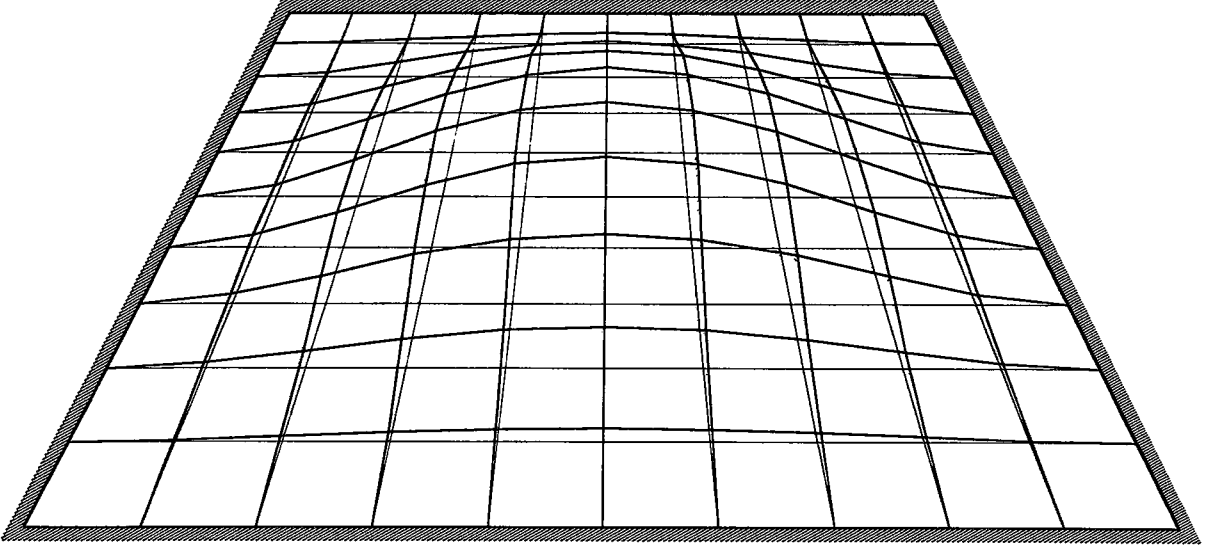
Şekil 6.5 ve Şekil 6.6’de ise dört kenarından ankastre mesnetli ve 4 x 4 m açıklığındaki kare plağın birinci ve ikinci mod şekilleri gösterilmiştir.

Çizelge 6.2 Mesnetlenme koşullarına ve mesnet açıklıklarına göre doğal titreşim frekansları

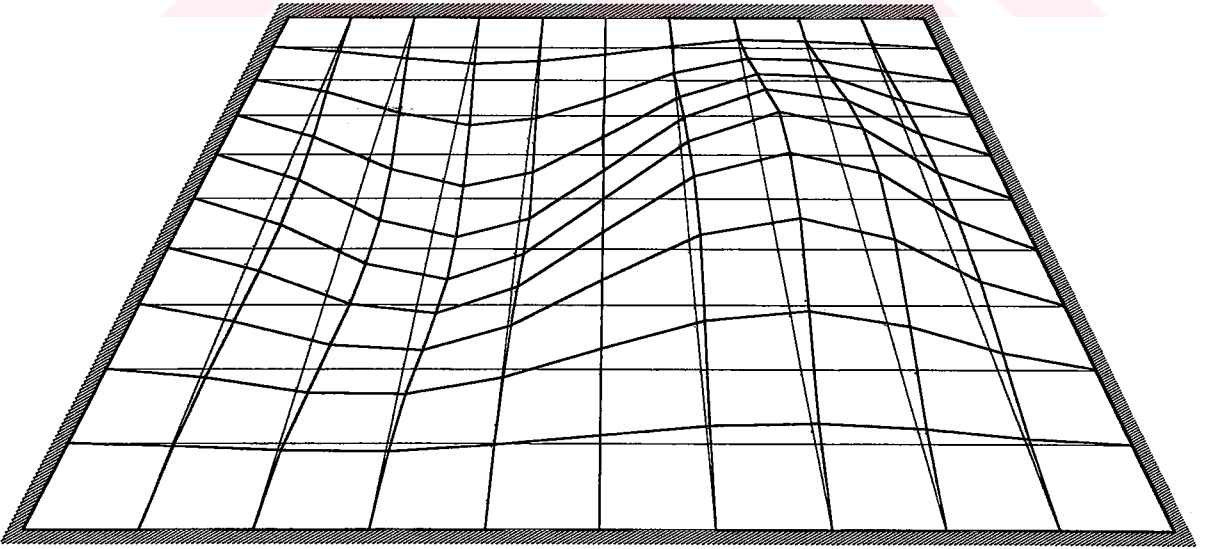
	Mesnet Tipi	Açıklık (m)	Eleman Sayısı	f_1	f_2	f_3
1	CCCC	3 3	4 4	12.2	27.8	27.8
2	CCCC	4 4	4 4	6.9	15.6	15.6
3	CCCC	6 3	8 4	4.0	12.3	14.1
4	CCCC	8 4	8 4	2.3	6.9	7.9
5	CCCF	3 3	4 4	19.5	35.0	38.7
6	CCCF	4 4	4 4	11.0	19.7	21.8
7	CCCF	6 3	8 4	9.9	20.5	30.1
8	CCCF	8 4	8 4	5.6	11.6	16.9
9	CCCS	3 3	4 4	14.1	28.1	31.5
10	CCCS	4 4	4 4	7.9	15.9	17.7
11	CCCS	6 3	8 4	6.9	16.6	22.0
12	CCCS	8 4	8 4	3.9	9.3	12.4
13	CCFF	3 3	4 4	26.0	42.0	65.4
14	CCFF	4 4	4 4	14.6	23.7	36.8
15	CCFF	6 3	8 4	11.4	24.1	34.8
16	CCFF	8 4	8 4	6.4	13.5	19.6
17	CCSF	3 3	4 4	20.5	37.1	58.5
18	CCSF	4 4	4 4	11.6	20.9	32.9
19	CCSF	6 3	8 4	9.9	21.1	32.8
20	CCSF	8 4	8 4	5.7	11.9	18.4
21	CCSS	3 3	4 4	16.6	30.6	51.4
22	CCSS	4 4	4 4	9.3	17.2	28.9
23	CCSS	6 3	8 4	7.0	17.7	26.1
24	CCSS	8 4	8 4	3.9	9.9	14.7
25	CFCF	3 3	4 4	37.8	45.2	72.9
26	CFCF	4 4	4 4	21.3	25.4	41.0
27	CFCF	6 3	8 4	37.8	39.7	46.0
28	CFCF	8 4	8 4	21.3	22.3	25.9
29	CFFF	3 3	4 4	40.7	65.9	107.3
30	CFFF	4 4	4 4	22.9	37.1	60.3
31	CFFF	6 3	8 4	38.4	43.4	55.1
32	CFFF	8 4	8 4	21.6	24.4	31.0
33	CFSF	3 3	4 4	39.6	58.6	106.6
34	CFSF	4 4	4 4	22.3	32.9	60.0
35	CFSF	6 3	8 4	38.3	42.3	52.4
36	CFSF	8 4	8 4	21.5	23.8	29.5
37	CSCF	3 3	4 4	26.0	35.7	66.8
38	CSCF	4 4	4 4	14.6	20.1	37.6
39	CSCF	6 3	8 4	26.0	28.7	36.9
40	CSCF	8 4	8 4	14.6	16.1	20.8
41	CSCS	3 3	4 4	16.6	28.3	62.1
42	CSCS	4 4	4 4	9.3	15.9	35.0
43	CSCS	6 3	8 4	16.6	20.1	30.1
44	CSCS	8 4	8 4	9.3	11.3	16.9
45	CSSF	3 3	4 4	28.7	51.7	87.3
46	CSSF	4 4	4 4	16.1	29.1	49.1
47	CSSF	6 3	8 4	26.7	32.4	44.8
48	CSSF	8 4	8 4	15.0	18.2	25.2
49	CSSS	3 3	4 4	20.1	46.5	70.2
50	CSSS	4 4	4 4	11.3	26.1	45.2
51	CSSS	6 3	8 4	17.6	24.9	39.2
52	CSSS	8 4	8 4	9.9	14.0	22.1
53	FFFF	3 3	4 4	58.1	118.7	118.7
54	FFFF	4 4	4 4	32.7	66.8	66.8
55	FFFF	6 3	8 4	40.9	51.5	71.6
56	FFFF	8 4	8 4	23.0	29.0	40.3
57	SCFF	3 3	4 4	30.0	59.7	88.0
58	SCFF	4 4	4 4	16.9	33.6	49.5
59	SCFF	6 3	8 4	11.4	25.6	42.6
60	SCFF	8 4	8 4	6.4	14.4	24.0
61	SCSF	3 3	4 4	21.9	55.0	71.0
62	SCSF	4 4	4 4	12.3	30.9	39.9
63	SCSF	6 3	8 4	9.9	21.9	42.0
64	SCSF	8 4	8 4	5.6	12.3	23.6
65	SFFF	3 3	4 4	51.4	101.7	115.2
66	SFFF	4 4	4 4	28.9	57.2	64.8
67	SFFF	6 3	8 4	40.2	49.0	66.7
68	SFFF	8 4	8 4	22.6	27.5	37.5
69	SFSF	3 3	4 4	46.9	87.2	112.8
70	SFSF	4 4	4 4	26.4	49.1	63.4
71	SFSF	6 3	8 4	39.7	47.0	62.3
72	SFSF	8 4	8 4	22.3	26.4	35.1
73	SSFF	3 3	4 4	43.9	97.5	98.4
74	SSFF	4 4	4 4	24.7	54.8	55.4
75	SSFF	4 4	4 4	21.7	46.8	53.6
76	SSFF	6 3	8 4	29.6	41.0	61.2
77	SSFF	6 3	8 4	28.9	38.6	56.5
78	SSFF	8 4	8 4	16.6	23.1	34.4
79	SSFF	8 4	8 4	16.3	21.7	31.8
80	SSSF	3 3	4 4	38.5	83.2	95.3
81	SSSS	3 3	4 4	32.4	80.2	80.2
82	SSSS	4 4	4 4	18.2	45.1	451.0
83	SSSS	6 3	8 4	20.6	32.4	52.2
84	SSSS	8 4	8 4	11.6	18.2	29.4



Şekil 6.4 Mesnetlenme koşullarının ve açıklıklarının birinci doğal titreşim frekansı üzerindeki etkisi



Şekil 6.5 Dört kenarından ankastre kare plâgın birinci mod şekli



Şekil 6.6 Dört kenarından ankastre kare plâgın ikinci mod şekli

6.2 Zorlanmış Titreşim Analizi

Plakların eğilmeli zorlanmış titreşimi iki değişik yük altında incelenmiştir. Bunların ilki sinüzoidal yük, diğeri ise deprem hareketidir.

6.2.1 Sinüzoidal Yük Altında Zorlanmış Titreşim

Sinüzoidal yük altında plakların eğilmeli titreşimini incelemek amacıyla dört kenarından ankastre mesnetli ve birinci doğal titreşim açısı frekansı, $w = 205.4$ hz olan bir plak seçilmiştir. Bu plağın geometri ve malzeme özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Elastisite Modülü, E : 28 000 000 kN/m²
- Poisson Oranı, ν : 0.20
- Plak Kalınlığı, t : 0.15 m
- Plak Boyutları: 4 x 4 m
- Düzgün Yayılı Kütle: 0.90 ton/m² (Zati kütle dahil)
- Sönüm Oranı: % 5

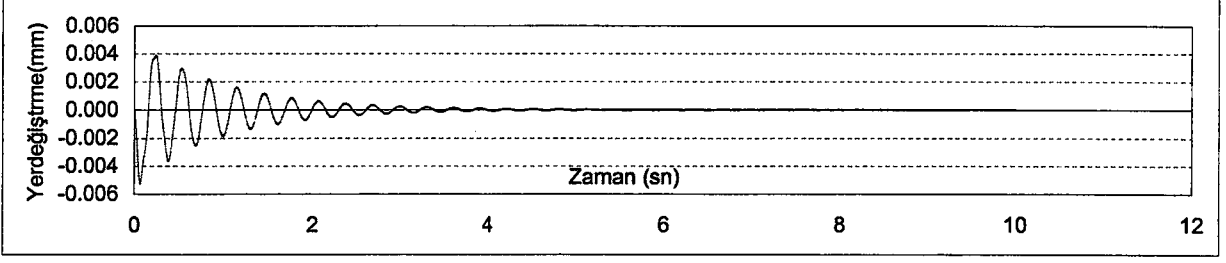
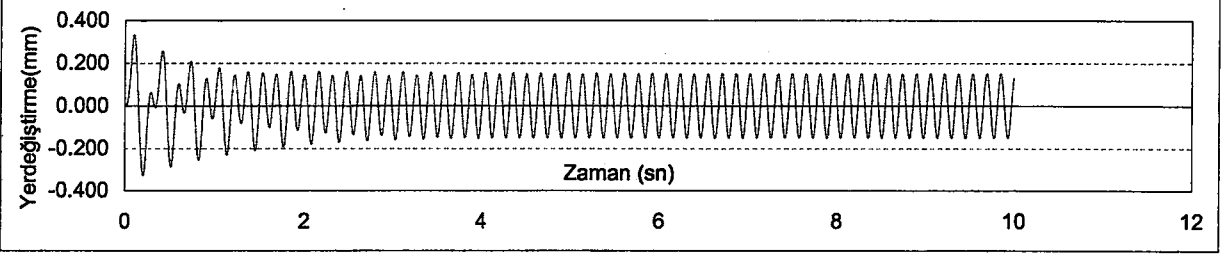
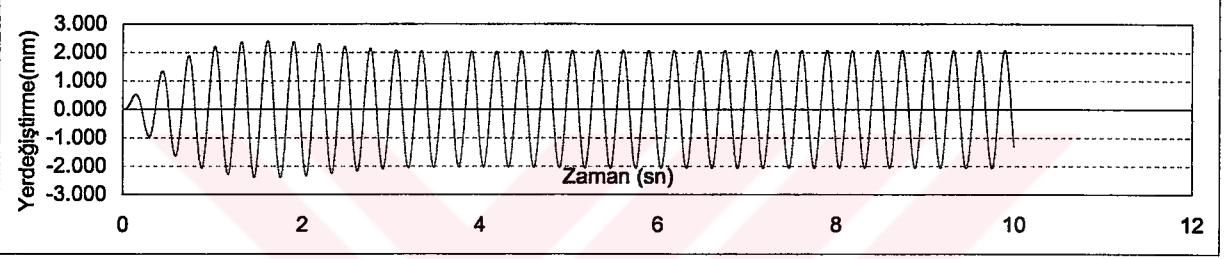
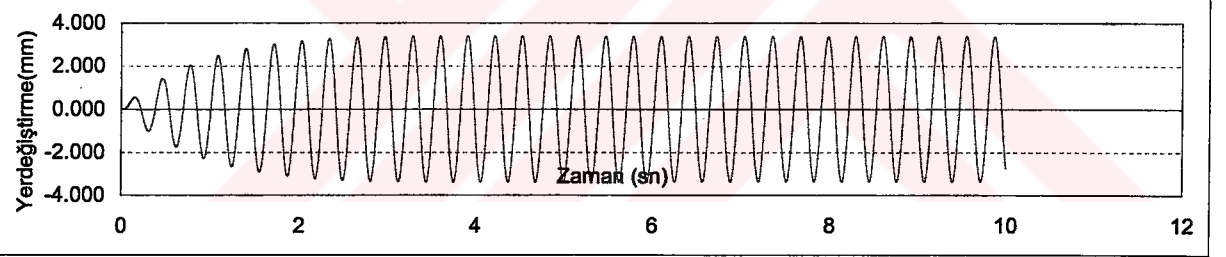
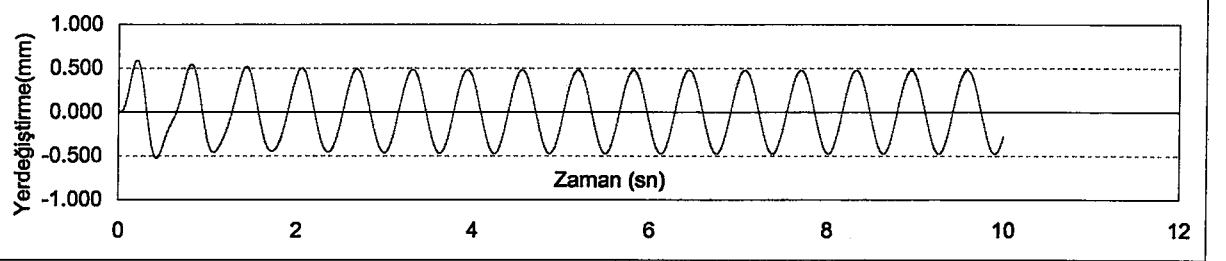
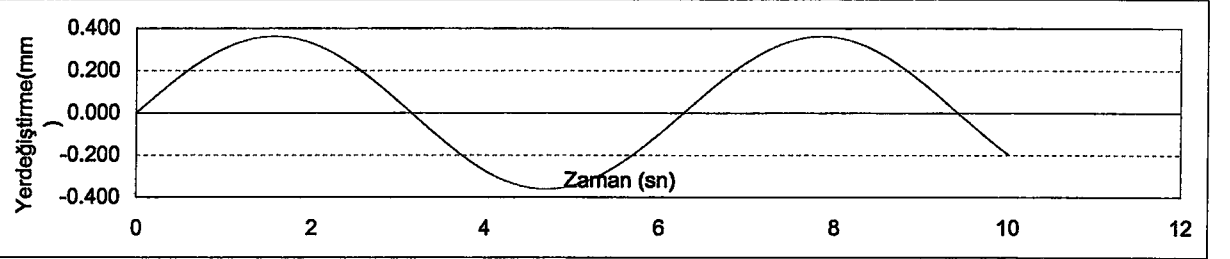
Bu plak;

$$a(t) = 10 \sin \omega t$$

sinüzoidal ivmesine maruz bırakılmış ve nümerik integrasyonlar, ortalama ivme değişimi yöntemi ile 0.001 sn'lik adımlarla gerçekleştirilmiştir.

6.2.1.1 Sinüzoidal Yük Frekansının Etkisi

Uygulanan sinüzoidal yükün açısal frekansı altı ayrı değer alınarak tekrarlanmıştır. Bu değerler sırasıyla 50000, 400, 220, 200, 100, 1 hz'dir. Şekil 6.7'de bu analizler sonucunda hazırlanan grafikler verilmiştir.

a) Sinüzoidal Yük ($w = 50000$), Max = 0.005 mmb) Sinüzoidal Yük ($w = 400$), Max = 0.3 mmc) Sinüzoidal Yük ($w = 220$), Max = 2.4 mmd) Sinüzoidal Yük ($w = 200$), Max = 3.4 mme) Sinüzoidal Yük ($w = 100$), Max = 0.6 mme) Sinüzoidal Yük ($w = 1$), Max = 0.4 mm

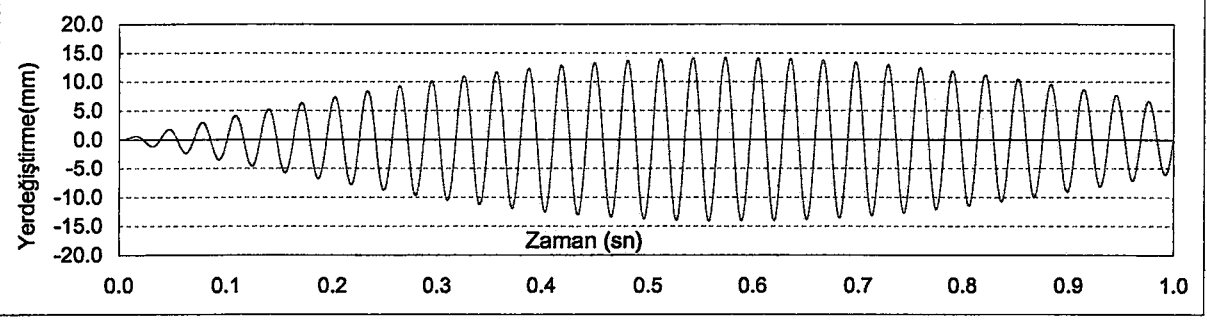
Şekil 6.7 Dört kenarından ankastre plağın değişik frekanslı sinüzoidal yükler altındaki zorlanmış titreşimi, Sönüm=%5

6.2.1.2 Sönüm Oranı Etkisi

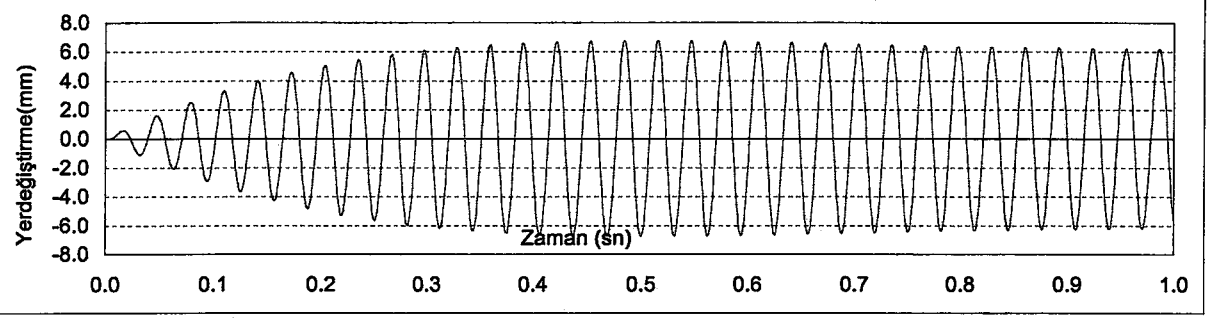
Ayrıca sinüzoidal yük altındaki zorlanmış titreşime sönümün etkisinin incelenmesi amacıyla $w = 200$ hz açısal frekanslı yük altındaki plak beş ayrı sönüm oranı altında 0.0001sn'lik adımlarla incelenmiş ve bulunan sonuçlar Şekil 6.8'de verilmiştir.



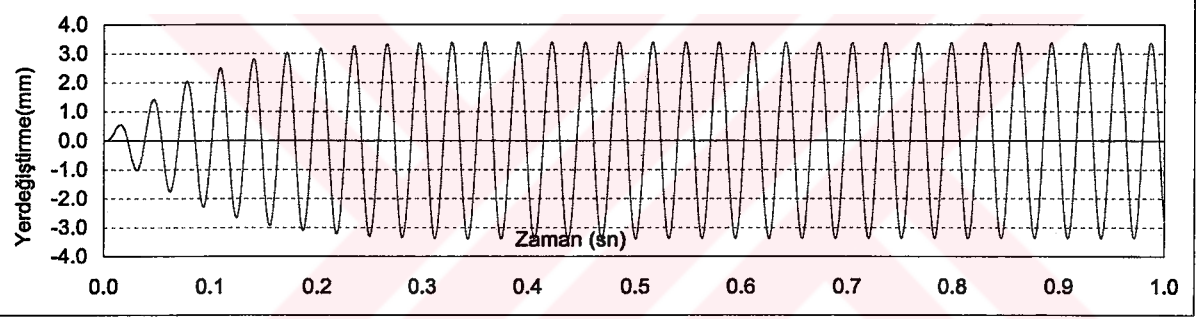
a) Sinüzoidal Yük (Sönüm = % 0), Max = 14.1 mm



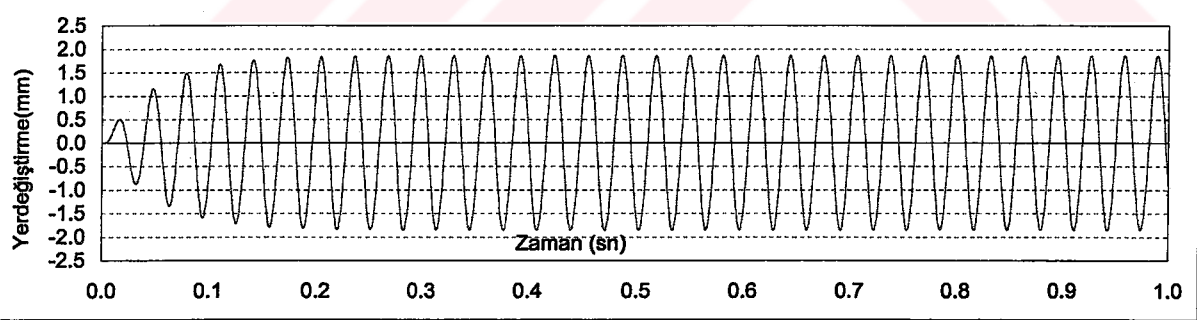
b) Sinüzoidal Yük (Sönüm = % 2), Max = 6.7 mm



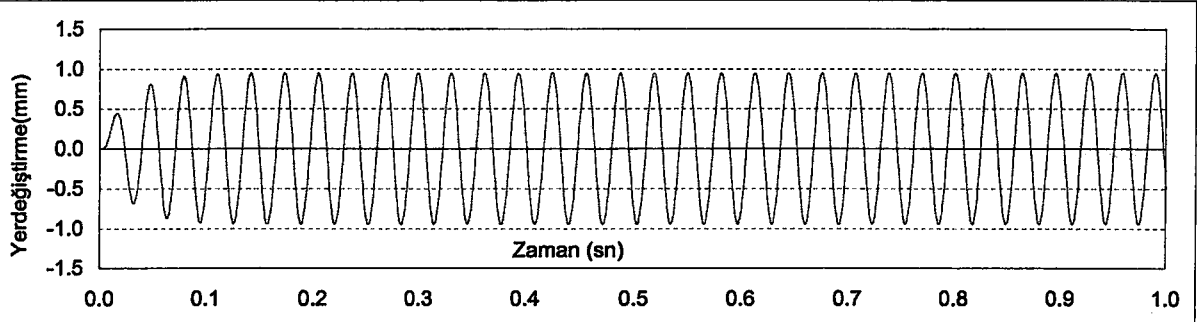
c) Sinüzoidal Yük (Sönüm = % 5), Max = 3.4 mm



d) Sinüzoidal Yük (Sönüm = % 10), Max = 1.9 mm



e) Sinüzoidal Yük (Sönüm = % 20), Max = 0.9 mm



Şekil 6.8. Değişik sönümlere sahip dört kenarından ankastre plağın sinüzoidal yük altındaki zorlanmış titreşimi, $w=200$ Hz

6.2.2 Deprem İvme Kayıtları Altında Zorlanmış Titreşim

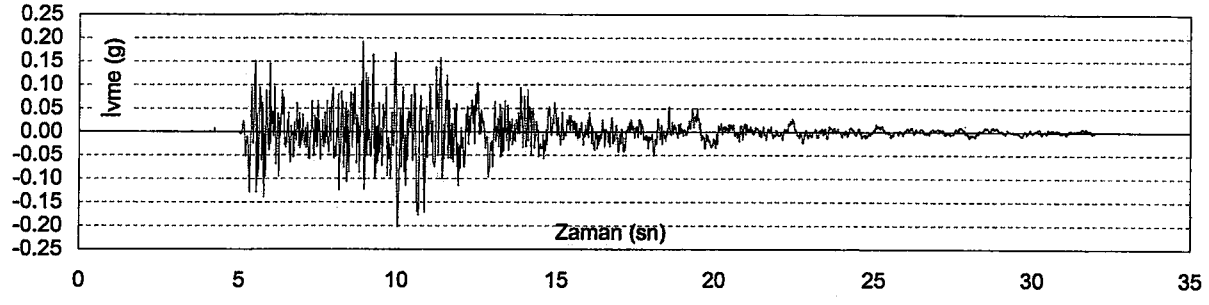
Plakların eğilmeli zorlanmış titreşimi deprem hareketi altında da incelenmiştir. Bu incelemelerde beş ayrı depremin ivme kayıtları kullanılmıştır. Kullanılan deprem kayıtları ve maksimum ivmeler;

- Düzce 1999, max = 0.20 g
- Erzincan 1992, max = 0.25 g
- El Centro 1940, max = 0.21 g
- Kobe 1995, (Kjm) max = 0.34 g
- Kobe 1995, (Takarazu)max = 0.43 g

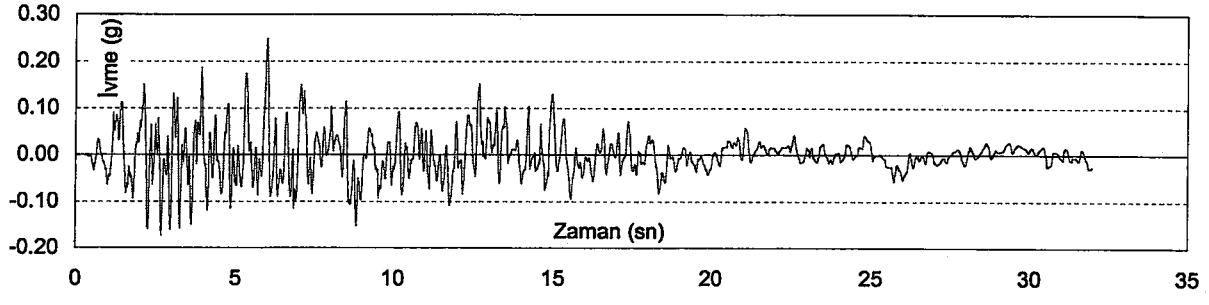
Şekil 6.9 kullanılan ivme kayıtları ve Şekil 6.10'da %5 sönüme göre hazırlanmış spektrumları verilmiştir.



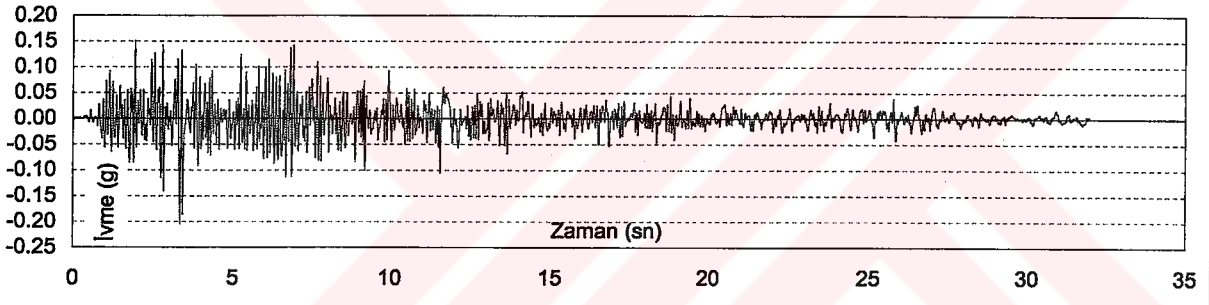
a) Düzce 1999 Depremi Düşey İvme Kaydı, Max = 0.20 g



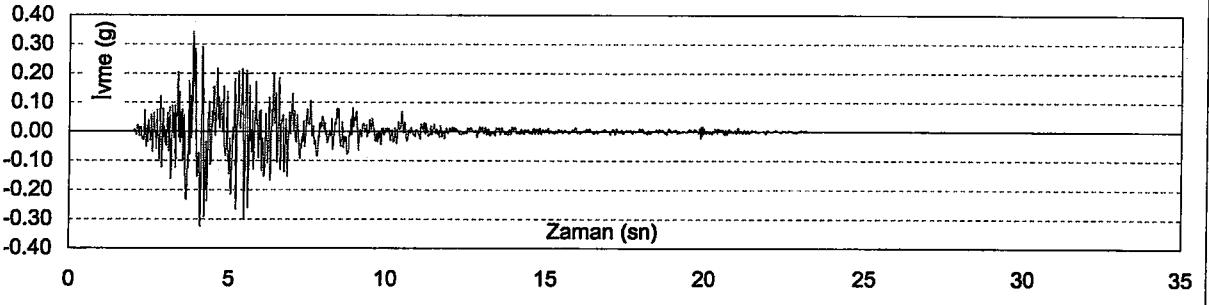
b) Erzincan 1992 Depremi Düşey İvme Kaydı, Max = 0.25 g



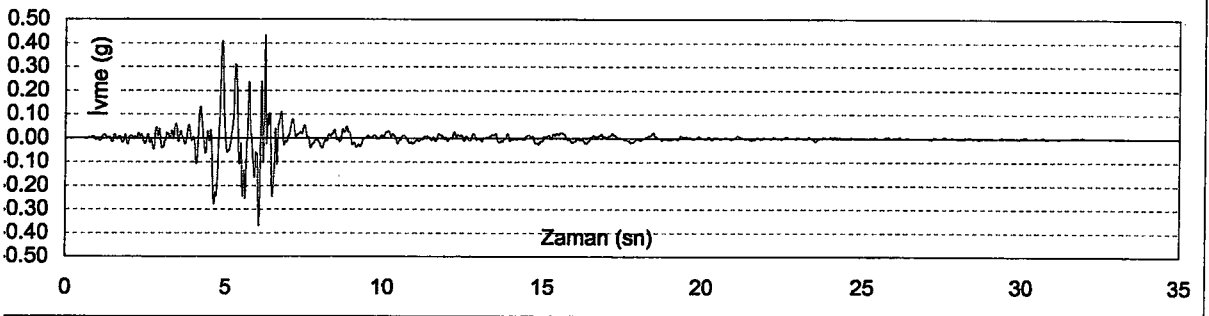
c) El Centro 1940 Depremi Düşey İvme Kaydı, Max = 0.21 g



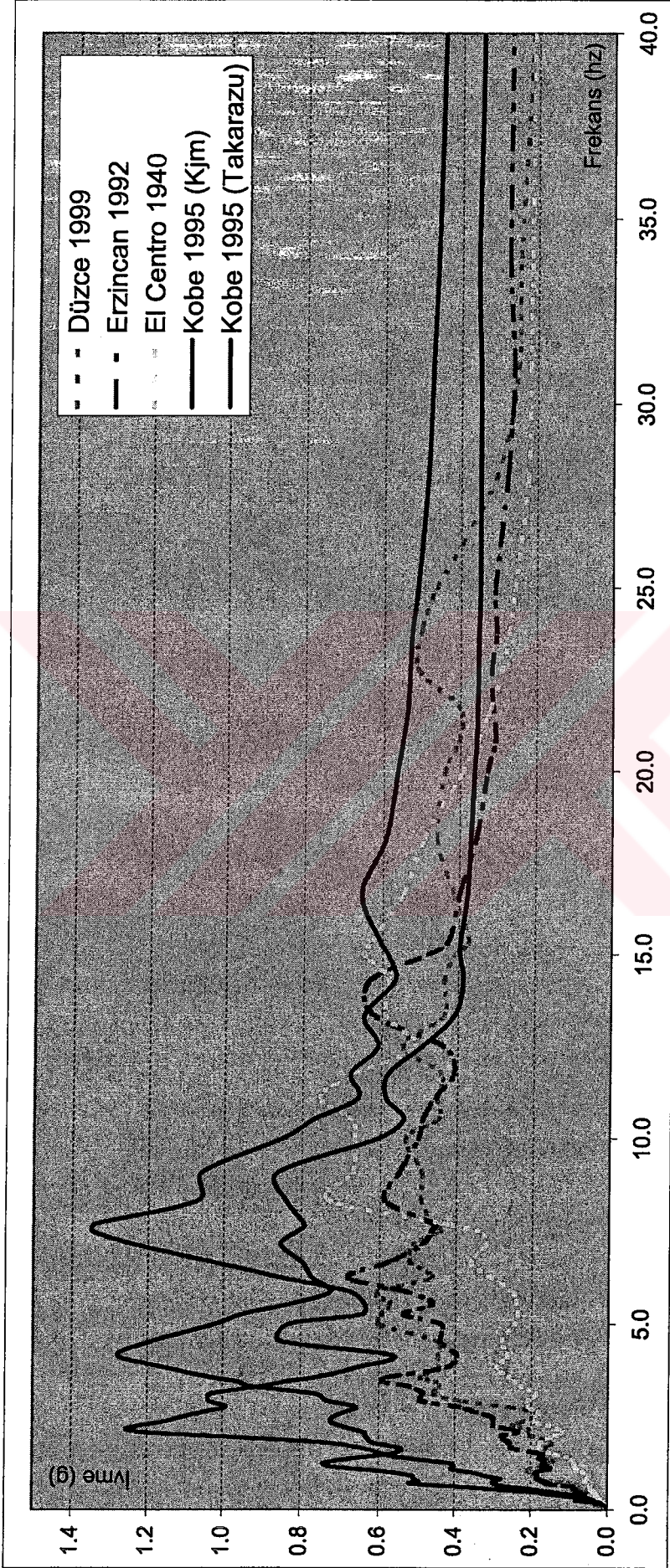
d) Kobe 1995 Depremi Düşey İvme Kaydı (Kjı), Max = 0.34 g



e) Kobe 1995 Depremi Düşey İvme Kaydı (Takarazu), Max = 0.43 g



Resim 6.9. Deprem düşey ivme kayıtları



Şekil 6.10 Deprem düşey ivme kayıtlarının %5 sönüme göre hazırlanmış spektrumları

6.2.2.1 İvme Kayıtları ve Mesnet Şartları Etkisi

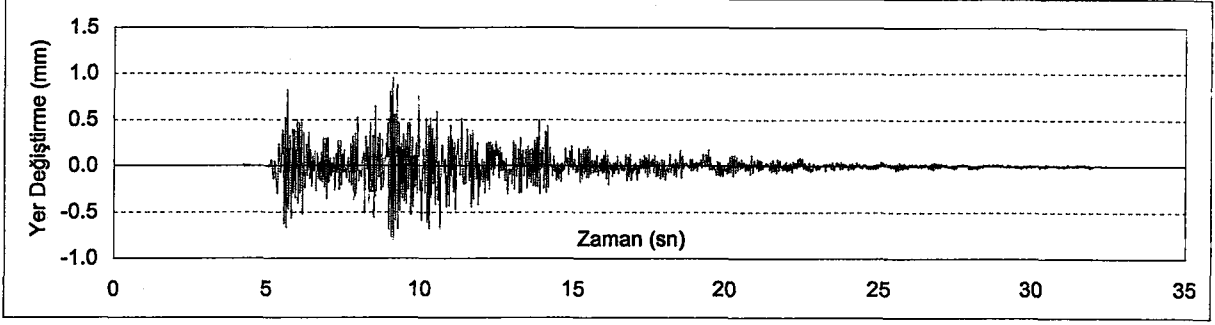
Deprem ivmesi altında yapılan analizlerden ilkinde üç değişik mesnet koşuluna sahip (dört kenarda ankastre mesnetli, dört kenardan basit mesnetli ve karşılıklı kenarları ankastre ve basit mesnetli) plaklar, yukarıda verilen beş ayrı ivme kaydı etkisi altında 0.001 sn'lik zaman aralığında, %5 sönüm oranıyla incelenmiştir.

İncelenen plakların geometri ve malzeme özellikleri aşağıda verilmiştir.

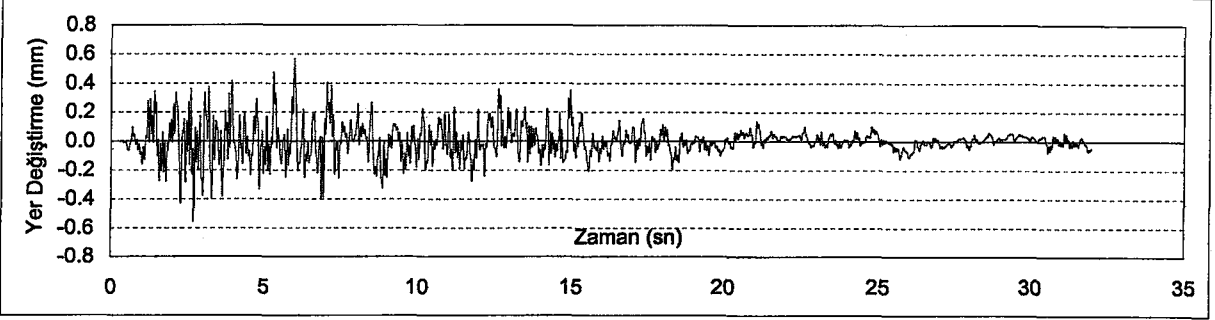
- Elastisite Modülü, E : 28 000 000 kN/m²
- Poisson Oranı, ν : 0.20
- Plak Kalınlığı, t : 0.15 m
- Plak Boyutları: 6 x 6 m
- Düzgün Yayılı Kütle: 0.90 ton/m² (Zati kütle dahil)

Şekil 6.11, Şekil 6.12 ve Şekil 6.13'de üç değişik mesnet koşuluna sahip plağın, her beş deprem ivme kaydı altındaki plak orta nokta deplasmanlarının değişimi gösterilmiştir.

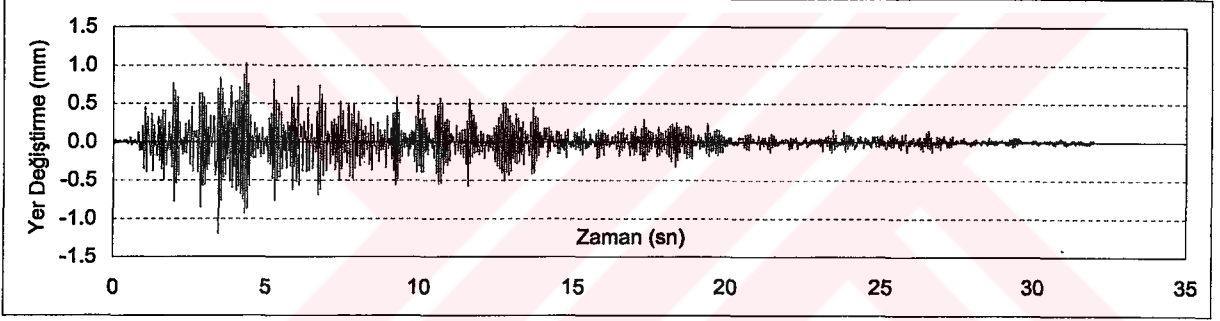
a) Düzce 1999, Max = 0.9 mm



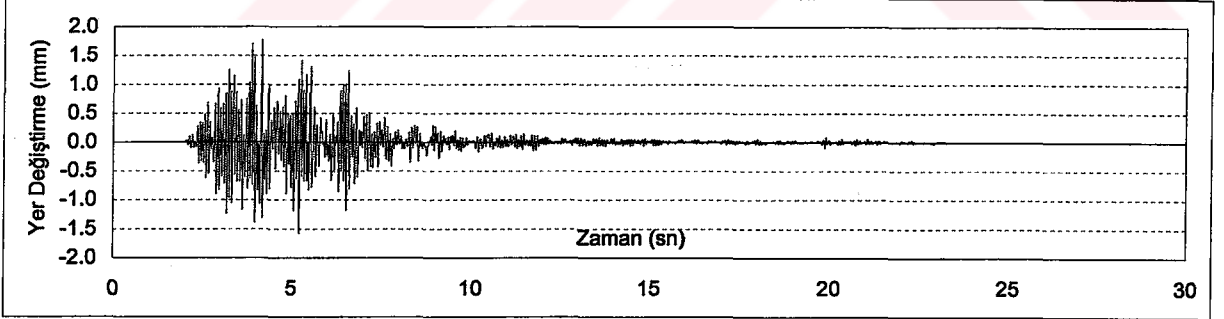
b) Erzincan 1992, Max = 0.6 mm



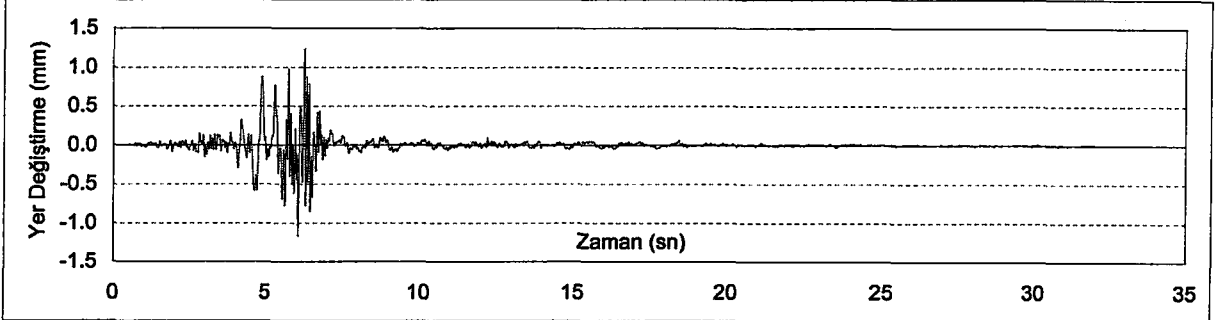
c) El Centro 1940, Max = 1.2 mm



d) Kobe 1995 (Kjm), Max = 1.8 mm

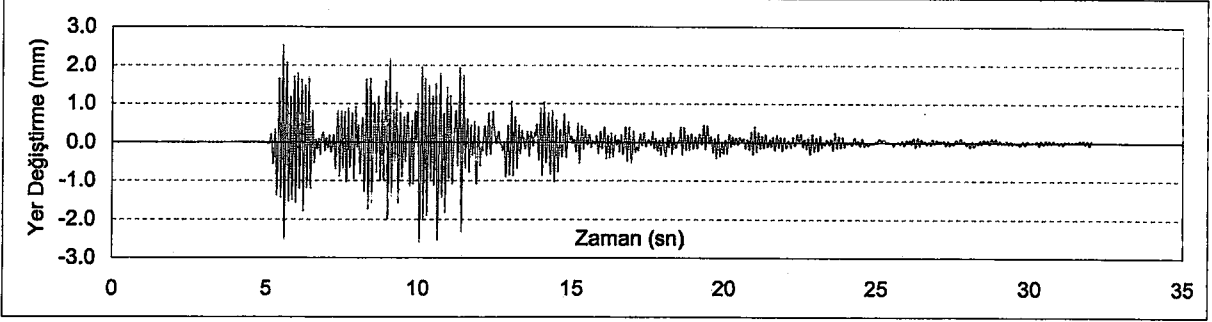


e) Kobe 1995 (Takarazu), Max = 1.2 mm

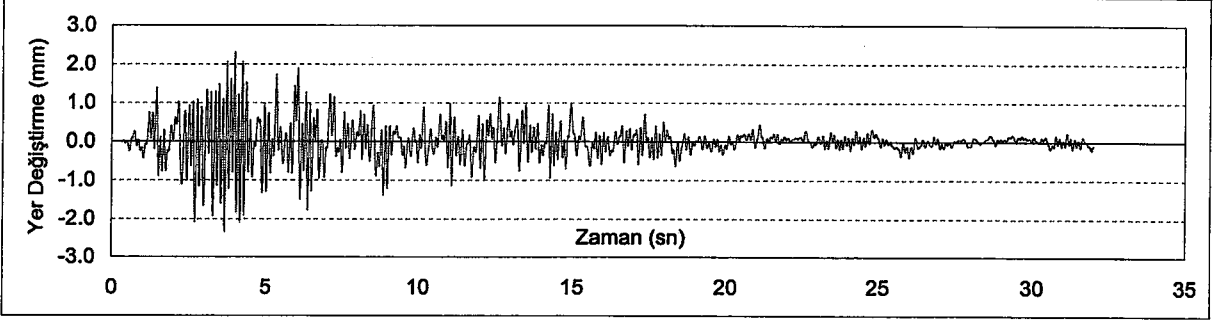


Şekil 6.11 Dört kenarından ankastre mesnetli kare plağın düşey deprem ivmesi altında zorlanmış titreşimi, $L = 6$ m, %5 Sönüm

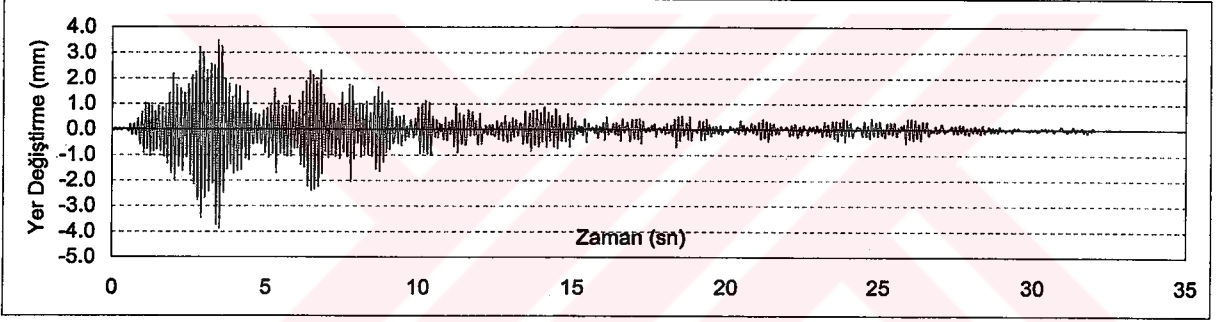
a) Düzce 1999, Max = 2.6 mm



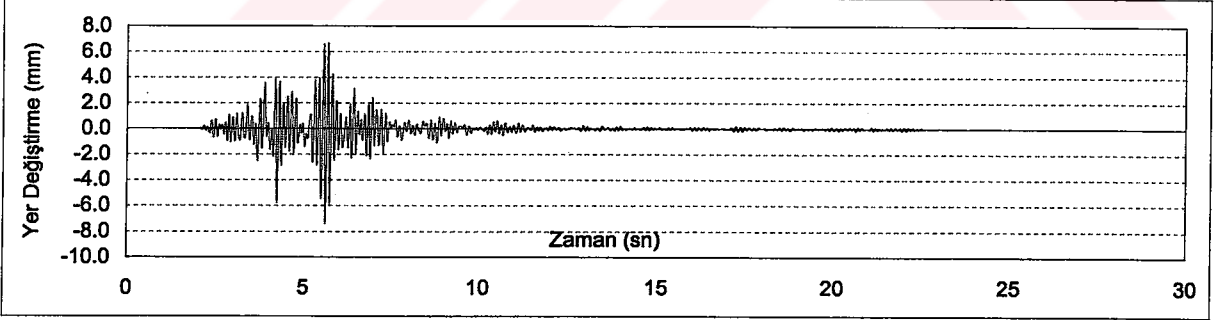
b) Erzincan 1992, Max = 2.4 mm



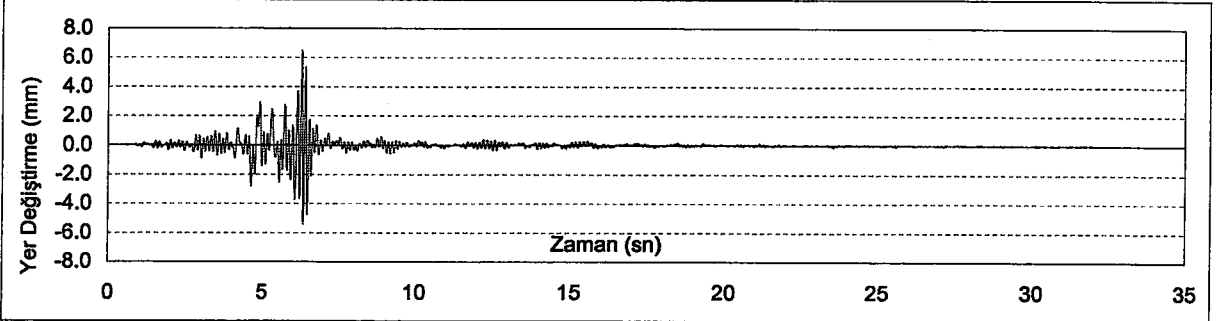
c) El Centro 1940, Max = 3.9 mm



d) Kobe 1995 (Kjm), Max = 7.4 mm

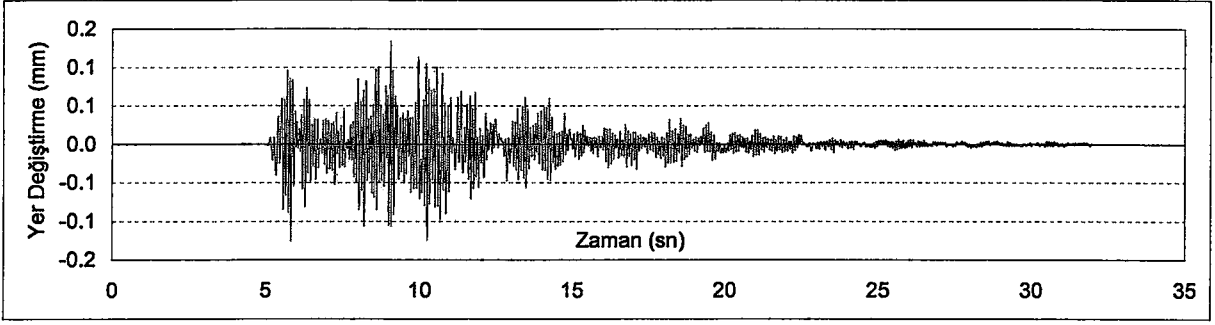


e) Kobe 1995 (Takarazu), Max = 6.5 mm

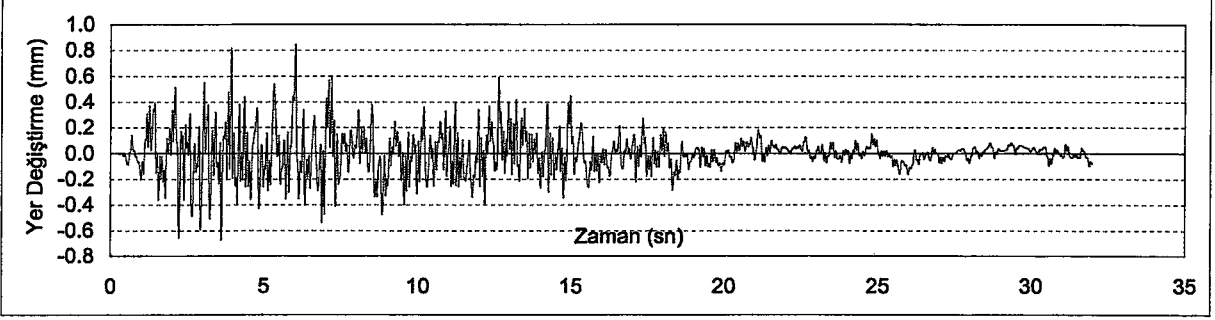


Şekil 6.12 Dört kenarından basit mesnetli kare plağın düşey deprem ivmesi altında zorlanmış titreşimi, $L = 6$ m, %5 Sönüm

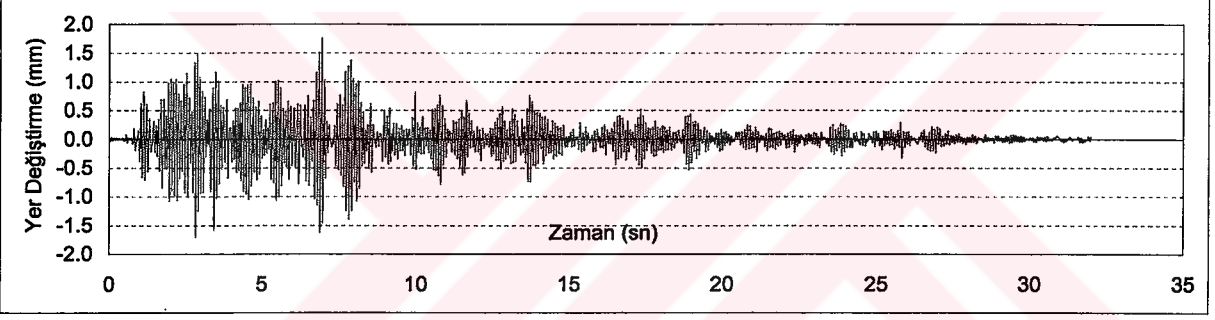
a) Düzce 1999, Max = 1.3 mm



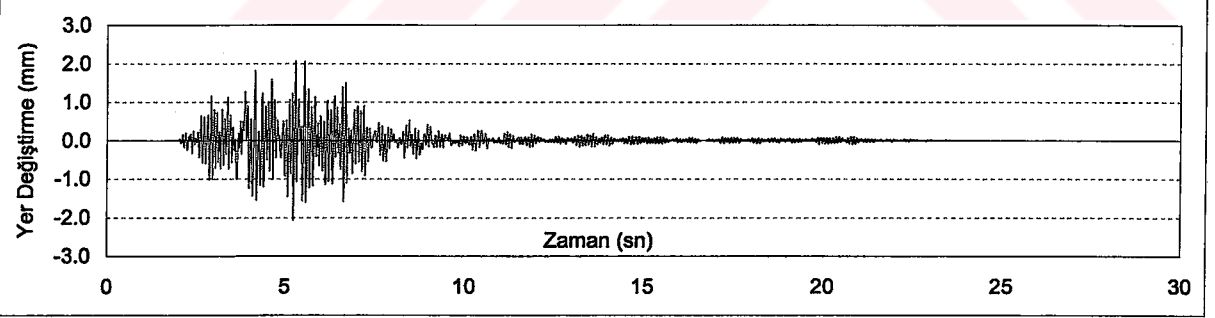
b) Erzincan 1992, Max = 0.8 mm



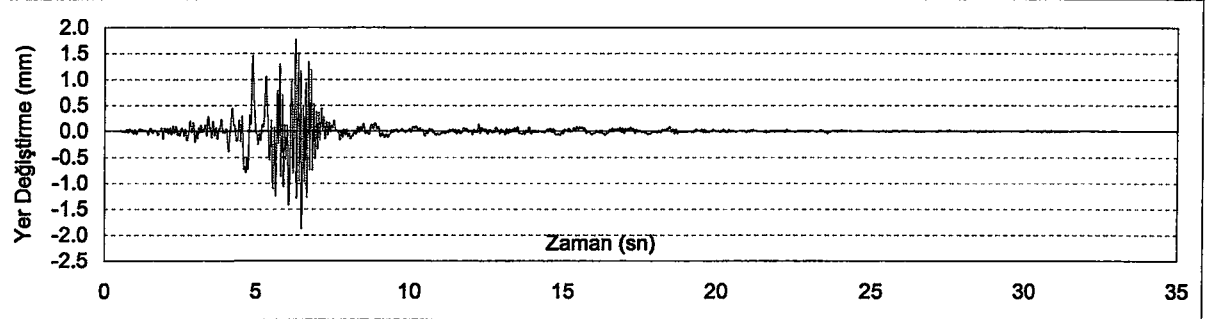
c) El Centro 1940, Max = 1.8 mm



d) Kobe 1995 (Kjm), Max = 2.1 mm



e) Kobe 1995 (Takarazu), Max = 1.9 mm



Şekil 6.13 Karşılıklı kenarları basit ve ankastre mesnetli kare plağın düşey deprem ivmesi altında zorlanmış titreşimi, $L = 6$ m, %5 Sönüm

6.2.2.2 Sönüm Etkisi

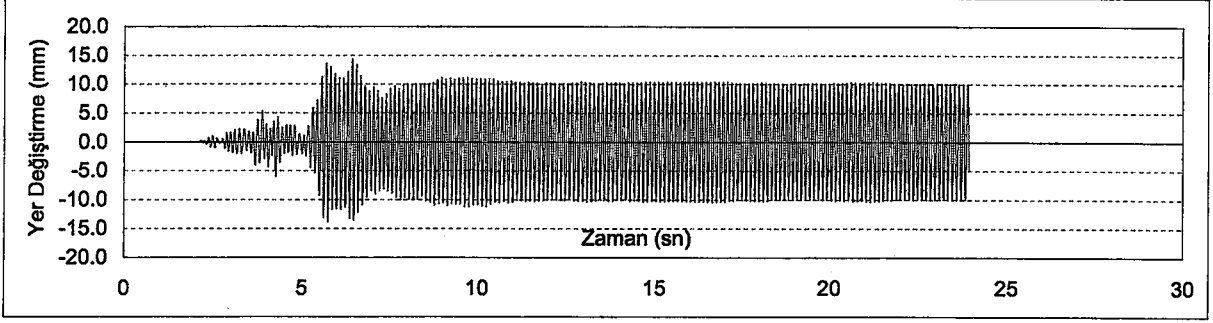
Deprem ivmesi altındaki plakların eğilmeli titreşim davranışlarında, sönüm oranının etkisinin incelenmesi amacıyla, dört kenarında basit mesnetli bir plak, beş ayrı sönüm oranıyla ele alınmıştır. İncelenen plağın geometri ve malzeme özellikler aşağıda verilmiştir.

- Elastisite Modülü, E : 28 000 000 kN/m²
- Poisson Oranı, ν : 0.20
- Plak Kalınlığı, t : 0.15 m
- Plak Boyutları: 6 x 6 m
- Düzgün Yayılı Kütle: 0.90 ton/m² (Zati kütle dahil)

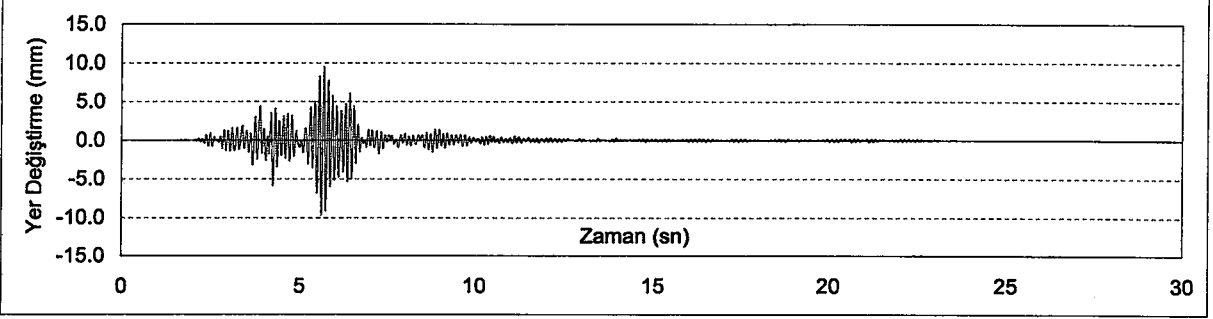
Plak, Kobe 1995 (Kjm) deprem ivme kaydı altında, sırasıyla %0, %2, %5, %10 ve %20 sönüm oranları ile çözülmüş ve plağın orta noktasının deplasman değişimi Şekil 6.14’de verilmiştir.



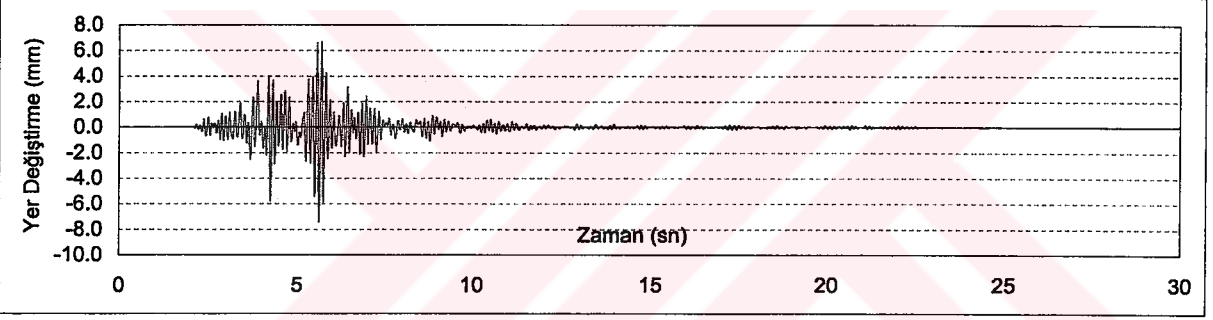
a) Kobe 1995 (Kjm), Sönüm = % 0, Max = 14.3 mm



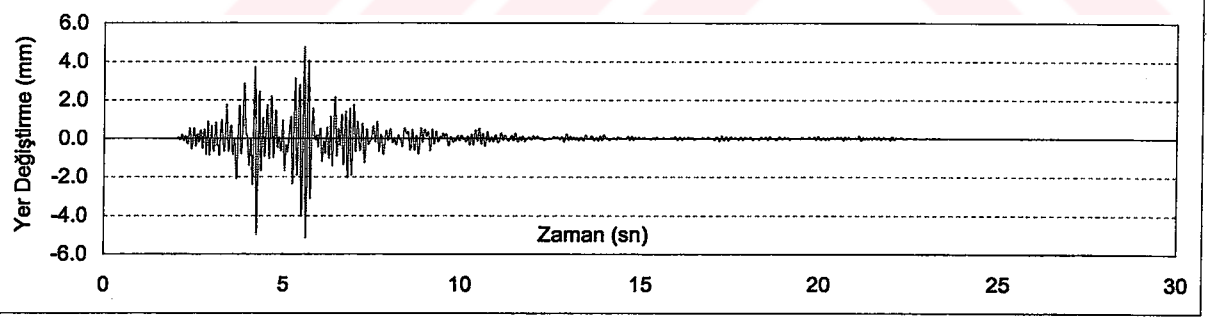
b) Kobe 1995 (Kjm), Sönüm = % 2, Max = 9.7 mm



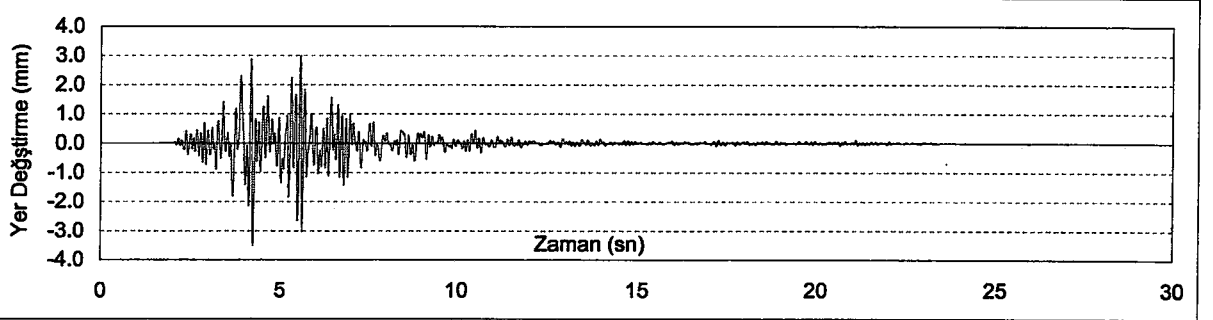
c) Kobe 1995 (Kjm), Sönüm = % 5, Max = 7.4 mm



d) Kobe 1995 (Kjm), Sönüm = % 10, Max = 5.2 mm



e) Kobe 1995 (Kjm), Sönüm = % 20, Max = 3.5 mm



Şekil 6.14 Dört kenarından basit mesnetli kare plağın düşey deprem ivmesi altında zorlanmış titreşimine sönümün etkisi, $L = 6$ m

7. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, plakların eğilmeli dinamik davranışları sonlu elemanlar metodu kullanılarak modellenmiş, serbest titreşim özellikleri belirlenerek, sinüzoidal yük ve düşey deprem kayıtları altındaki titreşimleri, farklı sınır şartları ve sönüm oranları için ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Bu amaçla hazırlanan bilgisayar programına, plağın geometrik özelliklerinin, malzeme özelliklerinin, sınır şartlarının ve dış yük tipinin ve boyutlarının girilmesiyle, statik lineer, serbest sönümsüz titreşim ve zorlanmış sönümlü titreşim analizlerinin hızlı bir şekilde yapılması ve elde edilen sonuçların işlenerek görselleştirilmesi sağlanmıştır.

Geliştirilen bu bilgisayar programı kullanılarak, plakların eğilmeli dinamik davranışlarının daha iyi belirlenmesi ve sayısal değerlere dayandırılması amacıyla, değişik sınır koşullarındaki ve boyutlardaki plak elemanlar için bir dizi analiz yapılmış ve aşağıdaki sonuçlara varılmıştır.

İlk olarak plak geometrisini tanımlamakta kullanılan sonlu eleman sayısının, değişik mesnetlenme koşullarına sahip plaklarda, doğal titreşim frekanslarına etkisi incelenmiştir. Bu amaçla yapılan analizler sonucunda, 4x4 sonlu eleman sayısından daha fazla eleman kullanılarak yapılan hesaplarda, ilk üç frekansın belirlenmesinde, mühendislik açısından kabul edilebilir sınırların altına inildiği görülmüştür. Daha yüksek frekansa sahip modların hassas olarak belirlenebilmesi için sonlu eleman sayısının bu değerin üstüne çıkarılması gerektiği tespit edilmiştir.

Plakların dinamik davranışlarını belirleyen önemli etkenlerden biri olan serbest titreşim frekanslarına, değişik sınır şartlarının ve değişik mesnet açıklıklarının etkisinin incelenmesi için bazı analizler yapılmıştır. Bu incelemelerde 4 değişik açıklığa sahip plakların 21 değişik sınır şartıyla serbest sönümsüz titreşim analizleri yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar, sayısal değerler, ön tasarım aşamalarında faydalanılması için grafikleştirilerek Şekil 6.4'de verilmiştir.

Plakların sinüzoidal yük altındaki dinamik davranışlarıyla ilgili yapılan analizlerde, yükün frekansı ve plağın sönüm oranı değiştirilerek davranışlara etkisi incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda, değişen frekanslı yüklere karşı, plakların da tek serbestlik dereceli sistemler gibi tepki verdikleri görülmüştür. Yüksek frekanslı yükte tepki vermedikleri, düşük frekanslı yüklerde, yükle birlikte, yükün statik etkisine eşdeğer bir tepki gösterdikleri ve birinci serbest

titreşim frekansına yakın etkilerde, sönüm oranına bağlı olarak rezonans davranışına yaklaştıkları görülmüştür. Ayrıca değişik sönüm oranları ile yapılan analizler sonucunda, sönümün davranışı çok fazla etkilediği görülmüştür. Sönümsüz yapılacak zorlanmış titreşim analizlerinin büyük oranda hataya yol açtığı tespit edilmiştir.

Daha önce yaşanmış beş ayrı deprem kaydı altında, değişik sönüm oranlarıyla zorlanmış sönümlü titreşim analizleri yapılmıştır. Bu analizlerde depremlerin düşey ivme değerleri kullanılmıştır. Bu analizler sonucunda plakların bu ivme kayıtları altında, özellikle düşük sönüm oranlarında, kayda değer bir zorlanmaya maruz kaldıkları görülmüştür. Ancak bu zorlanmaların her ne kadar plaklar için önemli olmadığı biliniyor olsa bile, plakların bu düşey hareket sırasında mesnet elemanlarına aktardıkları yüklerde belirli bir artış olmaktadır. Bu etkilerin de yapıların dinamik analizinde dikkate alınmasında fayda görülmektedir.

Gelişen bilişim teknolojisi ve her geçen gün geliştirilen sonlu elemanlar metoduyla, yapıların plak elemanları da dahil olarak modellenip, analizlerin depremin her üç ivme bileşeni altında yapılması, yapı dinamik davranışının ve içkuvvetlerinin daha gerçekçi belirlenmesine olanak sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- Adini, A., Clough, R.W., (1961) "Analysis of Plate Bending by The Finite Element Method", Report to National Science Foundation, G.7337, USA.
- Armanios, E.A., Nagan, H.M., (1983) "An Improved Rectangular Element for Plate Bending Analysis", Computer and Structures, Vol. 16, 677-686.
- Astley, R.J., (1992), "Finite Elements in Solids and Structures: An Introduction", Chapman and Hall, Cambridge.
- Batoz, J.L., Ben Tohar, M., (1982) "Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element", Int. J. Num. Meth. Eng., 18, 1655-1677.
- Berktaş, İ., (1992) "Plak Teorisi ve Uygulamaları, Küçük Şehimli İnce Plaklar", Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Yayınları, 237, İstanbul.
- Cheung, Y.K., Leung, A.Y.T., (1991) "Finite Element Methods in Dynamics", Science Press, Hong Kong.
- Chopra, A.K., (1995) "Dynamics of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering", Prentice Hall, New Jersey.
- Clough, R.W., Felippa, C.A., (1968) "A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending", Proc. 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AF Base, Ohio.
- Cook, R.D., (1972) "Two Hybrid Elements for Analysis of Thick, Thin and Sandwich Plates", Int. J. Num. Meth. Eng., 5, 277-266.
- Fraeijs De Veubeke, B., (1968) "An Equilibrium Model for Plate Bending", Int. J. Solids Struct., 4, 447-468.
- Hinton, E., Rock, T., Zienkiewicz, O.C., (1976) "A Note on Mass Lumping and Related Processes in The Finite Element Method", Int. J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 4, 245-249.

- Jirousek, J., Guex, L., (1986) "The Hybrid-Trefftz Finite Element Model and its Application to Plate Bending", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23, 651-693.
- Köksal, E., Köksal, T., (1996) "Çubuk Plak Kabuk Stabilitesi", Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, 309, İstanbul.
- Köksal, T., (1995) "Sonlu Elemanlar Metodu", Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, 304, İstanbul.
- MacNeal, R.H., (1978) "A Simple Quadrilateral Shell Element", *Comp. Struct.*, 8, 175-183.
- Melosh, R.J., (1961), "A Stiffness Matrix for The Analysis of Thin Plates in Bending", *J. Aero. Sci.*, Vol. 28, 34-42.
- Melosh, R.J., (1963), "Basis for Derivation of Matrices for The Direct Stiffness Method", *AIAA J.*, 1, 1631-1637.
- Pagenfuss, B.W., (1959) "Lateral Plate Deflection by Stiffness Matrix Methods with Application to Marquee", M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Washington, Seattle.
- Pian, T.H.H., Tong, P., (1969) "Basis of Finite Element Methods for Solid Continua", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1, 3-28.
- Petyt, M., (1990) "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambridge University Press, Avon.
- Smith, C.V., (1970) "Finite Element Model, with Applications to Buildings and K-33 and K-31", Union Carbide Corporation Report Number CTC-29.
- Tinavi, R.A., (1972) "Anisotropic Tapered Elements Using Displacement Models", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 4, 475-489.
- Weaver, W., Johnston, P.R., (1987) "Structural Dynamics by Finite Elements", Prentice Hall, New Jersey.
- Wilson, E.L., (1998) "Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures", Computers and Structures Inc.", California.

Zienkiewicz, O.C., (1971) "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, London.

Zienkiewicz, O.C., Cheung, Y.K., (1964) "The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs", Proc. Inst. Civ. Eng., 28, 471-488.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., (1989) "The Finite Element Method, Vol. 1 Basic Formulation and Linear Problems", McGraw-Hill Book Company, Europe.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., (1991) "The Finite Element Method, Vol. 2 Solid and Fluid Mechanics", McGraw-Hill Book Company, Europe.



EKLER

Ek 1 Bigisayar programı



Ek 1 Bilgisayar programı

```

Option Base 1
Dim SolType As Integer
Dim DType As Integer
Dim lenx, leny As Double
Dim nelemx, nelemy As Integer
Dim elemnum, nodenum, dofnum, rdofnum, fdofnum As Integer
Dim pi As Double
Dim Dmp1, Dmp2 As Double
Dim NdRest() As Integer
Dim IdeDof() As Integer
Dim Props() As Double
Dim Elems() As Double
Dim NdCoors() As Double
Dim ElStif() As Double
Dim ElMass() As Double
Dim ElForce() As Double
Dim Stif() As Double
Dim Mass() As Double
Dim Damp() As Double
Dim Force() As Double
Dim Disp() As Double
Dim EigVal() As Double
Dim EigVec() As Double
Dim MNEigVec() As Double
Dim dt As Double
Dim TotAccNum As Double
Dim AccVal() As Double
Dim FRDisp() As Double
Dim FRVel() As Double
Dim FRAcc() As Double
Dim FRForce() As Double
Dim id As Integer

```

```

Sub Main()
Dim i, j As Integer
pi = 4 * Atn(1)
SubInput
SubProperty
SubGeometry
SubAssembly
If SolType = 1 Then SubLinearSolve
If SolType = 2 Then SubModalAnalysis
If SolType = 3 Then
    SubModalAnalysis
    SubForcedResponse
End If
End Sub

```

```

Sub SubInput()
Dim rngRNd As Range
Dim rngRCd1 As Range
Dim rngRCd2 As Range
Dim rngRCd3 As Range

```

```

Dim i1, j1 As Integer
SolType = Range("rngType").Value
DType = Range("rngDType").Value
lenx = Range("rngLenx").Value
leny = Range("rngLeny").Value
nelemx = Range("rngNelemx").Value
nelemy = Range("rngNelemy").Value
Dmp1 = Range("rngDmp1").Value
Dmp2 = Range("rngDmp2").Value
elemnum = nelemx * nelemy
nodenum = (nelemx + 1) * (nelemy + 1)
dofnum = 3 * nodenum
ReDim NdRest(dofnum)
ReDim IdeDof(dofnum)
ReDim Props(1, 5)
ReDim Elems(elemnum, 5)
ReDim NdCoors(nodenum, 2)
ReDim ElStif(elemnum, 12, 12)
ReDim ElMass(elemnum, 12, 12)
ReDim ElForce(elemnum, 12)
ReDim Disp(dofnum)
For i1 = 1 To dofnum
    NdRest(i1) = 0
Next i1
Set rngRNd = Range("strRNd")
Set rngRCd1 = Range("strRCd1")
Set rngRCd2 = Range("strRCd2")
Set rngRCd3 = Range("strRCd3")
10 Set rngRNd = rngRNd.Offset(1, 0)
Set rngRCd1 = rngRCd1.Offset(1, 0)
Set rngRCd2 = rngRCd2.Offset(1, 0)
Set rngRCd3 = rngRCd3.Offset(1, 0)
If rngRNd.Value = 0 Then GoTo 20
NdRest(3 * rngRNd.Value - 2) = rngRCd1.Value
NdRest(3 * rngRNd.Value - 1) = rngRCd2.Value
NdRest(3 * rngRNd.Value) = rngRCd3.Value
GoTo 10
20 i1 = 0
rdofnum = 0
For i1 = 1 To dofnum
    rdofnum = rdofnum + NdRest(i1)
Next i1
fdofnum = dofnum - rdofnum
ReDim Stif(fdofnum, fdofnum)
ReDim Mass(fdofnum, fdofnum)
ReDim Damp(fdofnum, fdofnum)
ReDim Force(fdofnum)
ReDim EigVal(fdofnum)
ReDim EigVec(dofnum, fdofnum)
i1 = 0
For j1 = 1 To dofnum
    i1 = i1 + NdRest(j1)
    IdeDof(j1) = j1 - i1
    If NdRest(j1) > 0 Then IdeDof(j1) = fdofnum + i1
Next j1

```

End Sub

```
Sub SubProperty()
Props(1, 1) = Range("rngE").Value
Props(1, 2) = Range("rngV").Value
Props(1, 3) = Range("rngT").Value
Props(1, 4) = Range("rngD").Value
Props(1, 5) = Range("rngQ").Value
End Sub
```

```
Sub SubGeometry()
Dim dx, dy As Double
Dim elemid As Integer
Dim i2, j2 As Integer
Dim ndi, ndj, ndk, ndl As Integer
dx = lenx / nelemx
dy = leny / nelemy
elemid = 0
For j2 = 1 To nelemy
  For i2 = 1 To nelemx
    elemid = elemid + 1
    ndi = (j2 - 1) * (nelemx + 1) + i2
    ndj = (j2 - 1) * (nelemx + 1) + i2 + 1
    ndk = j2 * (nelemx + 1) + i2 + 1
    ndl = j2 * (nelemx + 1) + i2
    Elems(elemid, 1) = ndi
    Elems(elemid, 2) = ndj
    Elems(elemid, 3) = ndk
    Elems(elemid, 4) = ndl
    Elems(elemid, 5) = 1
    NdCoors(ndi, 1) = dx * (i2 - 1)
    NdCoors(ndi, 2) = dy * (j2 - 1)
    NdCoors(ndj, 1) = dx * i2
    NdCoors(ndj, 2) = dy * (j2 - 1)
    NdCoors(ndk, 1) = dx * i2
    NdCoors(ndk, 2) = dy * j2
    NdCoors(ndl, 1) = dx * (i2 - 1)
    NdCoors(ndl, 2) = dy * j2
  Next i2
Next j2
End Sub
```

```
Sub SubEleStif(id)
Dim elempropid As Integer
Dim eleme, elemv, elemt As Double
Dim elemi, elemj, elemk, elem1 As Integer
Dim elemx, elemy As Double
Dim a, b As Double
Dim c As Double
Dim a1, b1 As Double
Dim v As Double
Dim i3, j3 As Integer
elempropid = Elems(id, 5)
eleme = Props(elempropid, 1)
elemv = Props(elempropid, 2)
```

```

elemt = Props(elempropid, 3)
elemi = Elems(id, 1)
elemj = Elems(id, 2)
elemk = Elems(id, 3)
eleml = Elems(id, 4)
elemx = NdCoors(elemj, 1) - NdCoors(elemi, 1)
elemy = NdCoors(elemk, 2) - NdCoors(elemj, 2)
a = elemx / 2
b = elemy / 2
c = eleme * elemt ^ 3 / (48 * (1 - elemv ^ 2) * a * b)
a1 = a / b
b1 = b / a
v = elemv
ElStif(id, 1, 1) = c * (4 * (b1 ^ 2 + a1 ^ 2) + (2 / 5) * (7 - 2 * v))
ElStif(id, 2, 1) = c * (2 * a1 ^ 2 + (1 / 5) * (1 + 4 * v)) * 2 * b
ElStif(id, 2, 2) = c * ((4 / 3) * a1 ^ 2 + (4 / 15) * (1 - v)) * 4 * b ^ 2
ElStif(id, 3, 1) = c * (-2 * b1 ^ 2 - (1 / 5) * (1 + 4 * v)) * 2 * a
ElStif(id, 3, 2) = -c * v * 4 * a * b
ElStif(id, 3, 3) = c * ((4 / 3) * b1 ^ 2 + (4 / 15) * (1 - v)) * 4 * a ^ 2
ElStif(id, 4, 1) = -c * (2 * (2 * b1 ^ 2 - a1 ^ 2) + (2 / 5) * (7 - 2 * v))
ElStif(id, 4, 2) = c * (a1 ^ 2 - (1 / 5) * (1 + 4 * v)) * 2 * b
ElStif(id, 4, 3) = c * (2 * b1 ^ 2 + (1 / 5) * (1 - v)) * 2 * a
ElStif(id, 4, 4) = c * (4 * b1 ^ 2 + 4 * a1 ^ 2 + 14 / 5 - (4 / 5) * v)
ElStif(id, 5, 1) = c * (a1 ^ 2 - (1 / 5) * (1 + 4 * v)) * 2 * b
ElStif(id, 5, 2) = c * ((2 / 3) * a1 ^ 2 - (4 / 15) * (1 - v)) * 4 * b ^ 2
ElStif(id, 5, 3) = 0
ElStif(id, 5, 4) = c * (1 / 5) * (10 * a1 ^ 2 + 1 + 4 * v) * 2 * b
ElStif(id, 5, 5) = c * (4 / 15) * (5 * a1 ^ 2 + 1 - v) * 4 * b ^ 2
ElStif(id, 6, 1) = -c * (2 * b1 ^ 2 + (1 / 5) * (1 - v)) * 2 * a
ElStif(id, 6, 2) = 0
ElStif(id, 6, 3) = c * ((2 / 3) * b1 ^ 2 - (1 / 15) * (1 - v)) * 4 * a ^ 2
ElStif(id, 6, 4) = c * (1 / 5) * (10 * b1 ^ 2 + 1 + 4 * v) * 2 * a
ElStif(id, 6, 5) = c * v * 4 * a * b
ElStif(id, 6, 6) = -c * (4 / 15) * (-5 * b1 ^ 2 - 1 + v) * 4 * a ^ 2
ElStif(id, 7, 1) = c * (-2 * (b1 ^ 2 + a1 ^ 2) + (2 / 5) * (7 - 2 * v))
ElStif(id, 7, 2) = c * (-a1 ^ 2 + (1 / 5) * (1 - v)) * 2 * b
ElStif(id, 7, 3) = c * (b1 ^ 2 - (1 / 5) * (1 - v)) * 2 * a
ElStif(id, 7, 4) = c * (2 * b1 ^ 2 - 4 * a1 ^ 2 - (14 / 5) + (4 / 5) * v)
ElStif(id, 7, 5) = -c * (1 / 5) * (10 * a1 ^ 2 + 1 - v) * 2 * b
ElStif(id, 7, 6) = -c * (1 / 5) * (-5 * b1 ^ 2 + 1 + 4 * v) * 2 * a
ElStif(id, 7, 7) = c * (4 * b1 ^ 2 + 4 * a1 ^ 2 + (14 / 5) - (4 / 5) * v)
ElStif(id, 8, 1) = c * (a1 ^ 2 - (1 / 5) * (1 - v)) * 2 * b
ElStif(id, 8, 2) = c * ((1 / 3) * a1 ^ 2 + (1 / 15) * (1 - v)) * 4 * b ^ 2
ElStif(id, 8, 3) = 0
ElStif(id, 8, 4) = c * (1 / 5) * (10 * a1 ^ 2 + 1 - v) * 2 * b
ElStif(id, 8, 5) = c * (1 / 15) * (10 * a1 ^ 2 - 1 + v) * 4 * b ^ 2
ElStif(id, 8, 6) = 0
ElStif(id, 8, 7) = -c * (1 / 5) * (10 * a1 ^ 2 + 1 + 4 * v) * 2 * b
ElStif(id, 8, 8) = c * (4 / 15) * (5 * a1 ^ 2 + 1 - v) * 4 * b ^ 2
ElStif(id, 9, 1) = c * (-b1 ^ 2 + (1 / 5) * (1 - v)) * 2 * a
ElStif(id, 9, 2) = 0
ElStif(id, 9, 3) = c * ((1 / 3) * b1 ^ 2 + (1 / 15) * (1 - v)) * 4 * a ^ 2
ElStif(id, 9, 4) = -c * (1 / 5) * (-5 * b1 ^ 2 + 1 + 4 * v) * 2 * a
ElStif(id, 9, 5) = 0
ElStif(id, 9, 6) = c * (2 / 15) * (5 * b1 ^ 2 - 2 + 2 * v) * 4 * a ^ 2

```

```

ElStif(id, 9, 7) = c * (1 / 5) * (10 * b1 ^ 2 + 1 + 4 * v) * 2 * a
ElStif(id, 9, 8) = -c * v * 4 * a * b
ElStif(id, 9, 9) = -c * (4 / 15) * (-5 * b1 ^ 2 - 1 + v) * 4 * a ^ 2
ElStif(id, 10, 1) = c * (2 * (b1 ^ 2 - 2 * a1 ^ 2) - (2 / 5) * (7 - 2 * v))
ElStif(id, 10, 2) = c * (-2 * a1 ^ 2 - (1 / 5) * (1 - v)) * 2 * b
ElStif(id, 10, 3) = c * (-b1 ^ 2 + (1 / 5) * (1 + 4 * v)) * 2 * a
ElStif(id, 10, 4) = c * (-2 * b1 ^ 2 - 2 * a1 ^ 2 + (14 / 5) - (4 / 5) * v)
ElStif(id, 10, 5) = -c * (1 / 5) * (5 * a1 ^ 2 - 1 + v) * 2 * b
ElStif(id, 10, 6) = -c * (1 / 5) * (5 * b1 ^ 2 - 1 + v) * 2 * a
ElStif(id, 10, 7) = c * (-4 * b1 ^ 2 + 2 * a1 ^ 2 - (14 / 5) + (4 / 5) * v)
ElStif(id, 10, 8) = -c * (1 / 5) * (5 * a1 ^ 2 - 1 - 4 * v) * 2 * b
ElStif(id, 10, 9) = c * (1 / 5) * (-10 * b1 ^ 2 - 1 + v) * 2 * a
ElStif(id, 10, 10) = c * (4 * b1 ^ 2 + 4 * a1 ^ 2 + (14 / 5) - (4 / 5) * v)
ElStif(id, 11, 1) = c * (2 * a1 ^ 2 + (1 / 5) * (1 - v)) * 2 * b
ElStif(id, 11, 2) = c * ((2 / 3) * a1 ^ 2 - (1 / 15) * (1 - v)) * 4 * b ^ 2
ElStif(id, 11, 3) = 0
ElStif(id, 11, 4) = c * (1 / 5) * (5 * a1 ^ 2 - 1 + v) * 2 * b
ElStif(id, 11, 5) = c * (1 / 15) * (5 * a1 ^ 2 + 1 - v) * 4 * b ^ 2
ElStif(id, 11, 6) = 0
ElStif(id, 11, 7) = -c * (1 / 5) * (5 * a1 ^ 2 - 1 - 4 * v) * 2 * b
ElStif(id, 11, 8) = c * (2 / 15) * (5 * a1 ^ 2 - 2 + 2 * v) * 4 * b ^ 2
ElStif(id, 11, 9) = 0
ElStif(id, 11, 10) = -c * (1 / 5) * (10 * a1 ^ 2 + 1 + 4 * v) * 2 * b
ElStif(id, 11, 11) = c * (4 / 15) * (5 * a1 ^ 2 + 1 - v) * 4 * b ^ 2
ElStif(id, 12, 1) = c * (-b1 ^ 2 + (1 / 5) * (1 + 4 * v)) * 2 * a
ElStif(id, 12, 2) = 0
ElStif(id, 12, 3) = c * ((2 / 3) * b1 ^ 2 - (4 / 15) * (1 - v)) * 4 * a ^ 2
ElStif(id, 12, 4) = c * (1 / 5) * (5 * b1 ^ 2 - 1 + v) * 2 * a
ElStif(id, 12, 5) = 0
ElStif(id, 12, 6) = -c * (1 / 15) * (-5 * b1 ^ 2 - 1 + v) * 4 * a ^ 2
ElStif(id, 12, 7) = -c * (1 / 5) * (-10 * b1 ^ 2 - 1 + v) * 2 * a
ElStif(id, 12, 8) = 0
ElStif(id, 12, 9) = c * (1 / 15) * (10 * b1 ^ 2 - 1 + v) * 4 * a ^ 2
ElStif(id, 12, 10) = -c * (1 / 5) * (10 * b1 ^ 2 + 1 + 4 * v) * 2 * a
ElStif(id, 12, 11) = c * v * 4 * a * b
ElStif(id, 12, 12) = -c * (4 / 15) * (-5 * b1 ^ 2 - 1 + v) * 4 * a ^ 2
For i3 = 1 To 12
    For j3 = 1 To (i3 - 1)
        ElStif(id, j3, i3) = ElStif(id, i3, j3)
    Next j3
Next i3
End Sub

Sub SubEleMass(id)
Dim elempropid As Integer
Dim elemt, elemd As Double
Dim elemi, elemj, elemk, elem1 As Integer
Dim elemx, elemy As Double
Dim a, b As Double
Dim c As Double
Dim i4, j4 As Integer
elempropid = Elems(id, 5)
elemt = Props(elempropid, 3)
elemd = Props(elempropid, 4)
elemi = Elems(id, 1)

```

```

elemj = Elems(id, 2)
elemk = Elems(id, 3)
elemi = Elems(id, 4)
elemx = NdCoors(elemj, 1) - NdCoors(elemi, 1)
elemy = NdCoors(elemk, 2) - NdCoors(elemj, 2)
a = elemx / 2
b = elemy / 2
c = elemd * elemt * a * b / 6300
ElMass(id, 1, 1) = c * 3454
ElMass(id, 2, 1) = c * 922 * b
ElMass(id, 2, 2) = c * 320 * b * b
ElMass(id, 3, 1) = -c * 922 * a
ElMass(id, 3, 2) = -c * 252 * a * b
ElMass(id, 3, 3) = c * 320 * a * a
ElMass(id, 4, 1) = c * 1226
ElMass(id, 4, 2) = c * 398 * b
ElMass(id, 4, 3) = -c * 548 * a
ElMass(id, 4, 4) = c * 3454
ElMass(id, 5, 1) = c * 398 * b
ElMass(id, 5, 2) = c * 160 * b * b
ElMass(id, 5, 3) = -c * 168 * a * b
ElMass(id, 5, 4) = c * 922 * b
ElMass(id, 5, 5) = c * 320 * b * b
ElMass(id, 6, 1) = c * 548 * a
ElMass(id, 6, 2) = c * 168 * a * b
ElMass(id, 6, 3) = -c * 240 * a * a
ElMass(id, 6, 4) = c * 922 * a
ElMass(id, 6, 5) = c * 252 * a * b
ElMass(id, 6, 6) = c * 320 * a * a
ElMass(id, 7, 1) = c * 394
ElMass(id, 7, 2) = c * 232 * b
ElMass(id, 7, 3) = -c * 232 * a
ElMass(id, 7, 4) = c * 1226
ElMass(id, 7, 5) = c * 548 * b
ElMass(id, 7, 6) = c * 398 * a
ElMass(id, 7, 7) = c * 3454
ElMass(id, 8, 1) = -c * 232 * b
ElMass(id, 8, 2) = -c * 120 * b * b
ElMass(id, 8, 3) = c * 112 * a * b
ElMass(id, 8, 4) = -c * 548 * b
ElMass(id, 8, 5) = -c * 240 * b * b
ElMass(id, 8, 6) = -c * 168 * a * b
ElMass(id, 8, 7) = -c * 922 * b
ElMass(id, 8, 8) = c * 320 * b * b
ElMass(id, 9, 1) = c * 232 * a
ElMass(id, 9, 2) = c * 112 * a * b
ElMass(id, 9, 3) = -c * 120 * a * a
ElMass(id, 9, 4) = c * 398 * a
ElMass(id, 9, 5) = c * 168 * a * b
ElMass(id, 9, 6) = c * 160 * a * a
ElMass(id, 9, 7) = c * 922 * a
ElMass(id, 9, 8) = -c * 252 * a * b
ElMass(id, 9, 9) = c * 320 * a * a
ElMass(id, 10, 1) = c * 1226
ElMass(id, 10, 2) = c * 548 * b

```

```

ElMass(id, 10, 3) = -c * 398 * a
ElMass(id, 10, 4) = c * 394
ElMass(id, 10, 5) = c * 232 * b
ElMass(id, 10, 6) = c * 232 * a
ElMass(id, 10, 7) = c * 1226
ElMass(id, 10, 8) = -c * 398 * b
ElMass(id, 10, 9) = c * 548 * a
ElMass(id, 10, 10) = c * 3454
ElMass(id, 11, 1) = -c * 548 * b
ElMass(id, 11, 2) = -c * 240 * b * b
ElMass(id, 11, 3) = c * 168 * a * b
ElMass(id, 11, 4) = -c * 232 * b
ElMass(id, 11, 5) = -c * 120 * b * b
ElMass(id, 11, 6) = -c * 112 * a * b
ElMass(id, 11, 7) = -c * 398 * b
ElMass(id, 11, 8) = c * 160 * b * b
ElMass(id, 11, 9) = -c * 168 * a * b
ElMass(id, 11, 10) = -c * 922 * b
ElMass(id, 11, 11) = c * 320 * b * b
ElMass(id, 12, 1) = -c * 398 * a
ElMass(id, 12, 2) = -c * 168 * a * b
ElMass(id, 12, 3) = c * 160 * a * a
ElMass(id, 12, 4) = -c * 232 * b
ElMass(id, 12, 5) = -c * 112 * a * b
ElMass(id, 12, 6) = -c * 120 * a * a
ElMass(id, 12, 7) = -c * 548 * a
ElMass(id, 12, 8) = c * 168 * a * b
ElMass(id, 12, 9) = -c * 240 * a * a
ElMass(id, 12, 10) = -c * 922 * a
ElMass(id, 12, 11) = c * 252 * a * b
ElMass(id, 12, 12) = c * 320 * a * a
For i4 = 1 To 12
  For j4 = 1 To (i4 - 1)
    ElMass(id, j4, i4) = ElMass(id, i4, j4)
  Next j4
Next i4
End Sub

```

```

Sub SubEleForce(id)
Dim elempropid As Integer
Dim elemq As Double
Dim elemi, elemj, elemk, elem1 As Integer
Dim elemx, elemy As Double
Dim a, b As Double
Dim c As Double
Dim i5, j5 As Integer
elempropid = Elems(id, 5)
elemq = Props(elempropid, 5)
elemi = Elems(id, 1)
elemj = Elems(id, 2)
elemk = Elems(id, 3)
elem1 = Elems(id, 4)
elemx = NdCoors(elemj, 1) - NdCoors(elemi, 1)
elemy = NdCoors(elemk, 2) - NdCoors(elemj, 2)
a = elemx / 2

```

```

b = elemy / 2
c = elemq * a * b / 3
ElForce(id, 1) = c * 3
ElForce(id, 2) = c * b
ElForce(id, 3) = -c * a
ElForce(id, 4) = c * 3
ElForce(id, 5) = c * b
ElForce(id, 6) = c * a
ElForce(id, 7) = c * 3
ElForce(id, 8) = -c * b
ElForce(id, 9) = c * a
ElForce(id, 10) = c * 3
ElForce(id, 11) = -c * b
ElForce(id, 12) = -c * a
End Sub

```

```

Sub SubAssembly()
Dim i6, j6, k6 As Integer
Dim Aelemi, Aelemj, Aelemk, Aelem1 As Integer
Dim Ide(12) As Integer
Dim nrow, ncol, temp As Integer
For i6 = 1 To fdofnum
    Force(i6) = 0
    For j6 = 1 To fdofnum
        Stiff(i6, j6) = 0
        Mass(i6, j6) = 0
    Next j6
Next i6
For i6 = 1 To elemnum
    Aelemi = Elems(i6, 1)
    Aelemj = Elems(i6, 2)
    Aelemk = Elems(i6, 3)
    Aelem1 = Elems(i6, 4)
    Ide(1) = IdeDof(3 * Aelemi - 2)
    Ide(2) = IdeDof(3 * Aelemi - 1)
    Ide(3) = IdeDof(3 * Aelemi)
    Ide(4) = IdeDof(3 * Aelemj - 2)
    Ide(5) = IdeDof(3 * Aelemj - 1)
    Ide(6) = IdeDof(3 * Aelemj)
    Ide(7) = IdeDof(3 * Aelemk - 2)
    Ide(8) = IdeDof(3 * Aelemk - 1)
    Ide(9) = IdeDof(3 * Aelemk)
    Ide(10) = IdeDof(3 * Aelem1 - 2)
    Ide(11) = IdeDof(3 * Aelem1 - 1)
    Ide(12) = IdeDof(3 * Aelem1)
    SubEleStiff (i6)
    SubEleMass (i6)
    SubEleForce (i6)
    For j6 = 1 To 12
        If Ide(j6) > fdofnum Then GoTo 20
        nrow = Ide(j6)
        Force(nrow) = Force(nrow) + ElForce(i6, j6)
        For k6 = j6 To 12
            If Ide(k6) > fdofnum Then GoTo 10
            nrow = Ide(j6)

```

```

    ncol = Ide(k6)
    If nrow > ncol Then
        temp = nrow
        nrow = ncol
        ncol = temp
    End If
    Stif(nrow, ncol) = Stif(nrow, ncol) + ElStif(i6, j6, k6)
    Mass(nrow, ncol) = Mass(nrow, ncol) + ElMass(i6, j6, k6)
10  Next k6
20  Next j6
Next i6
For i6 = 2 To fdofnum
    For j6 = 1 To (i6 - 1)
        Stif(i6, j6) = Stif(j6, i6)
        Mass(i6, j6) = Mass(j6, i6)
    Next j6
Next i6
End Sub

Sub SubLinearSolve()
Dim i8, j8, k8, l8, m8 As Integer
Dim dtemp As Double
ReDim AA(fdofnum, fdofnum) As Double
ReDim BB(fdofnum) As Double
For i8 = 1 To fdofnum
    BB(i8) = Force(i8)
    For j8 = 1 To i8
        AA(i8, j8) = Stif(i8, j8)
    Next j8
Next i8
For i8 = 1 To fdofnum
    dtemp = 0
    For j8 = 1 To (i8 - 1)
        dtemp = dtemp + AA(i8, j8) * AA(i8, j8)
    Next j8
    AA(i8, i8) = Sqr(AA(i8, i8) - dtemp)
    For k8 = 1 To (i8 - 1)
        For l8 = (i8 + 1) To fdofnum
            AA(l8, i8) = AA(l8, i8) - AA(i8, k8) * AA(l8, k8)
        Next l8
    Next k8
    For m8 = (i8 + 1) To fdofnum
        AA(m8, i8) = AA(m8, i8) / AA(i8, i8)
    Next m8
Next i8
For i8 = 1 To fdofnum
    If BB(i8) <> 0 Then
        BB(i8) = BB(i8) / AA(i8, i8)
        For j8 = (i8 + 1) To fdofnum
            BB(j8) = BB(j8) - BB(i8) * AA(j8, i8)
        Next j8
    End If
Next i8
For k8 = fdofnum To 1 Step (-1)
    dtemp = BB(k8)

```

```

For l8 = (k8 + 1) To fdofnum
    dtemp = dtemp - AA(l8, k8) * BB(l8)
Next l8
dtemp = dtemp / AA(k8, k8)
BB(k8) = dtemp
Next k8
For k8 = 1 To dofnum
    Disp(k8) = 0
    If IdeDof(k8) <= fdofnum Then Disp(k8) = BB(IdeDof(k8))
Next k8
For ii = 1 To dofnum
    [Out1].Cells(ii, 1) = Disp(ii)
Next ii
End Sub

```

```

Sub SubModalAnalysis()
Dim i9, j9, k9, l9, m9, n9, p9, q9 As Integer
Dim sum, temp, temp1, temp2 As Double
Dim suma, tol, ssum, amax, aa9, si, co, tt9, big As Double
ReDim AA(fdofnum, fdofnum) As Double
ReDim BB(fdofnum, fdofnum) As Double
ReDim VV(fdofnum, fdofnum) As Double
ReDim MAtempM(dofnum) As Double
For i9 = 1 To fdofnum
    For j9 = 1 To fdofnum
        AA(i9, j9) = Mass(i9, j9)
        BB(i9, j9) = Stif(i9, j9)
    Next j9
Next i9
For i9 = 1 To fdofnum
    For j9 = 1 To fdofnum
        sum = BB(i9, j9)
        For k9 = 1 To (i9 - 1)
            sum = sum - BB(k9, i9) * BB(k9, j9)
        Next k9
        If i9 <> j9 Then
            BB(i9, j9) = sum / BB(i9, i9)
        Else
            If sum < 0 Then End
            BB(i9, i9) = Sqr(sum)
        End If
    Next j9
Next i9
For i9 = 1 To fdofnum
    BB(i9, i9) = 1 / BB(i9, i9)
Next i9
For i9 = 1 To (fdofnum - 1)
    For j9 = (i9 + 1) To fdofnum
        sum = 0
        For k9 = i9 To (j9 - 1)
            sum = sum - BB(k9, i9) * BB(k9, j9)
        Next k9
        BB(j9, i9) = sum * BB(j9, j9)
    Next j9
Next i9

```

```

For i9 = fdofnum To 1 Step -1
  For j9 = fdofnum To 1 Step -1
    temp = 0
    For k9 = 1 To j9
      temp = temp + BB(j9, k9) * AA(i9, k9)
    Next k9
    AA(i9, j9) = temp
  Next j9
Next i9
For i9 = fdofnum To 1 Step -1
  For j9 = 1 To fdofnum
    temp = 0
    For k9 = 1 To i9
      temp = temp + AA(k9, j9) * BB(i9, k9)
    Next k9
    AA(i9, j9) = temp
  Next j9
Next i9
tol = 0.0000000000001
suma = 0
For i9 = 1 To fdofnum
  For j9 = 1 To fdofnum
    VV(i9, j9) = 0
    suma = suma + Abs(AA(i9, j9))
  Next j9
  VV(i9, i9) = 1
Next i9
suma = suma / fdofnum ^ 2
10 ssum = 0
amax = 0
For j9 = 2 To fdofnum
  For i9 = 1 To (j9 - 1)
    aa9 = Abs(AA(i9, j9))
    If aa9 > amax Then amax = aa9
    ssum = ssum + aa9
    If (aa9 < (0.1 * amax)) Then GoTo 20
    aa9 = Atn2((2 * AA(i9, j9)), (AA(i9, i9) - AA(j9, j9))) / 2
    si = Sin(aa9)
    co = Cos(aa9)
    For k9 = 1 To fdofnum
      tt9 = AA(k9, i9)
      AA(k9, i9) = co * tt9 + si * AA(k9, j9)
      AA(k9, j9) = -si * tt9 + co * AA(k9, j9)
      tt9 = VV(k9, i9)
      VV(k9, i9) = co * tt9 + si * VV(k9, j9)
      VV(k9, j9) = -si * tt9 + co * VV(k9, j9)
    Next k9
    AA(i9, i9) = co * AA(i9, i9) + si * AA(j9, i9)
    AA(j9, j9) = -si * AA(i9, j9) + co * AA(j9, j9)
    AA(i9, j9) = 0
  For k9 = 1 To fdofnum
    AA(i9, k9) = AA(k9, i9)
    AA(j9, k9) = AA(k9, j9)
  Next k9
20 Next i9

```

```

Next j9
Range("Chk").Value = (ssum / suma)
If ssum / suma > tol Then GoTo 10
For i9 = 1 To fdofnum
    EigVal(i9) = 1 / Sqr(AA(i9, i9))
Next i9
For i9 = 1 To fdofnum
    For j9 = 1 To fdofnum
        sum = 0
        For k9 = i9 To fdofnum
            sum = sum + BB(k9, i9) * VV(k9, j9)
        Next k9
        VV(i9, j9) = sum
    Next j9
Next i9
For i9 = 1 To fdofnum
    big = 0
    For j9 = 1 To fdofnum
        temp1 = Abs(VV(j9, i9))
        temp2 = Abs(big)
        If temp1 > temp2 Then big = temp1
    Next j9
    For j9 = 1 To fdofnum
        VV(j9, i9) = VV(j9, i9) / big
    Next j9
Next i9
For i9 = 1 To (fdofnum / 2)
    j9 = fdofnum - i9 + 1
    temp = EigVal(i9)
    EigVal(i9) = EigVal(j9)
    EigVal(j9) = temp
    For k9 = 1 To fdofnum
        temp = VV(k9, i9)
        VV(k9, i9) = VV(k9, j9)
        VV(k9, j9) = temp
    Next k9
Next i9
For i9 = 1 To fdofnum
    For j9 = 1 To dofnum
        k9 = IdeDof(j9)
        If k9 <= fdofnum Then
            MAtempM(j9) = VV(k9, i9)
        Else
            MAtempM(j9) = 0
        End If
    Next j9
    For j9 = 1 To dofnum
        EigVec(j9, i9) = MAtempM(j9)
    Next j9
Next i9
If SolType = 3 And DType = 1 Then
    For i9 = 1 To fdofnum
        For j9 = 1 To fdofnum
            sum = 0
            For k9 = 1 To fdofnum

```

```

        sum = sum + VV(k9, i9) * Mass(k9, j9)
    Next k9
    MAtempM(j9) = sum
Next j9
sum = 0
For j9 = 1 To fdofnum
    sum = sum + MAtempM(j9) * VV(j9, i9)
Next j9
sum = Sqr(sum)
For j9 = 1 To fdofnum
    VV(j9, i9) = VV(j9, i9) / sum
Next j9
Next i9
ReDim MNEigVec(fdofnum, fdofnum)
For i9 = 1 To fdofnum
    For j9 = 1 To fdofnum
        MNEigVec(i9, j9) = VV(i9, j9)
    Next j9
Next i9
End If
For ii = 1 To dofnum
    For jj = 1 To fdofnum
        If ii = 1 Then [Out2].Cells(1, jj) = EigVal(jj)
        [Out2].Cells((ii + 2), jj) = EigVec(ii, jj)
    Next jj
Next ii
End Sub

Sub SubForcedResponse()
    Dim gamma, beta As Double
    Dim i10, j10, k10, l10, m10, n10, p10, q10 As Integer
    Dim rngAcc As Range
    Dim FRfmax, FRf, FRg As Double
    Dim FRtemp, FRtemp1, FRtemp2, FRtemp3 As Double
    Dim MsConst, StConst, afreq1, afreq2 As Double
    Dim sum As Double
    ReDim FRtempM1(fdofnum, fdofnum) As Double
    If DType = 1 Then
        For i10 = 1 To fdofnum
            FRtemp = Sqr(2 * Dmp1 * EigVal(i10))
            For j10 = 1 To fdofnum
                sum = 0
                For k10 = 1 To fdofnum
                    sum = sum + Mass(j10, k10) * MNEigVec(k10, i10)
                Next k10
                FRtempM1(j10, i10) = sum * FRtemp
            Next j10
        Next i10
        For k10 = 1 To fdofnum
            For j10 = 1 To fdofnum
                sum = 0
                For i10 = 1 To fdofnum
                    sum = sum + FRtempM1(k10, i10) * FRtempM1(j10, i10)
                Next i10
                Damp(k10, j10) = sum
            Next j10
        Next k10
    End If
End Sub

```

```

    Next j10
  Next k10
End If
If DType = 2 Then
  afreq1 = EigVal(1)
  afreq2 = EigVal(2)
  If afreq1 > afreq2 Then
    afreq1 = EigVal(2)
    afreq2 = EigVal(1)
  End If
  For i10 = 3 To fdofnum
    If EigVal(i10) < afreq1 Then afreq1 = EigVal(i10)
  Next i10
  For i10 = 3 To fdofnum
    If EigVal(i10) > afreq1 And EigVal(i10) < afreq2 Then afreq2 = EigVal(i10)
  Next i10
  MsConst = 2 * afreq1 * afreq2 * (afreq2 * Dmp1 - afreq1 * Dmp2) / (afreq2 ^ 2 - afreq1 ^ 2)
  StConst = 2 * (afreq2 * Dmp2 - afreq1 * Dmp1) / (afreq2 ^ 2 - afreq1 ^ 2)
  For i10 = 1 To fdofnum
    For j10 = 1 To fdofnum
      Damp(i10, j10) = MsConst * Mass(i10, j10) + StConst * Stif(i10, j10)
    Next j10
  Next i10
  ReDim DampM(fdofnum) As Double
  For i10 = 1 To fdofnum
    DampM(i10) = MsConst / 2 / EigVal(i10) + StConst * EigVal(i10) / 2
  Next i10
  For ii = 1 To fdofnum
    [Out2].Cells(2, ii) = DampM(ii)
  Next ii
End If
If DType = 3 Then
  MsConst = Dmp1
  StConst = Dmp2
  For i10 = 1 To fdofnum
    For j10 = 1 To fdofnum
      Damp(i10, j10) = MsConst * Mass(i10, j10) + StConst * Stif(i10, j10)
    Next j10
  Next i10
End If
gamma = Range("rngGamma").Value
beta = Range("rngBeta").Value
dt = Range("rngdt").Value
TotAccNum = Range("rngANum").Value
ReDim AccVal(TotAccNum)
Set rngAcc = Range("strFRacc")
For i10 = 1 To TotAccNum
  Set rngAcc = rngAcc.Offset(1, 0)
  AccVal(i10) = rngAcc.Value
Next i10
ReDim FRDisp(TotAccNum, fdofnum)
ReDim FRVel(TotAccNum, fdofnum)
ReDim FRAcc(TotAccNum, fdofnum)
ReDim FRForce(TotAccNum, fdofnum)
ReDim OneVector(dofnum) As Double

```

```

ReDim tempForceMass(dofnum) As Double
For i10 = 1 To fdofnum
    OneVector(i10) = 0
Next i10
For i10 = 1 To nodenum
    If IdeDof(3 * i10 - 2) < fdofnum Then OneVector(IdeDof(3 * i10 - 2)) = 1
Next i10
For i10 = 1 To fdofnum
    temp = 0
    For j10 = 1 To fdofnum
        temp = temp + Mass(i10, j10) * OneVector(j10)
    Next j10
    tempForceMass(i10) = temp
Next i10
ReDim FRcM1t(fdofnum, fdofnum) As Double
ReDim FRcM2(fdofnum, fdofnum) As Double
ReDim FRcM3(fdofnum, fdofnum) As Double
For i10 = 1 To fdofnum
    For j10 = 1 To fdofnum
        FRcM1t(i10, j10) = Stif(i10, j10) + Damp(i10, j10) * (gamma / beta / dt) _
            + Mass(i10, j10) / (beta * dt ^ 2)
        FRcM2(i10, j10) = Mass(i10, j10) / (beta * dt) + Damp(i10, j10) * (gamma / beta)
        FRcM3(i10, j10) = Mass(i10, j10) / (2 * beta) + Damp(i10, j10) * dt * (gamma / 2 / beta - 1)
    Next j10
Next i10
ReDim FRcM1(fdofnum, fdofnum) As Double
ReDim FRtempM(fdofnum, fdofnum) As Double
For i10 = 1 To fdofnum
    For j10 = 1 To fdofnum
        If i10 = j10 Then
            FRcM1(i10, j10) = 1
        Else
            FRcM1(i10, j10) = 0
        End If
        FRtempM(i10, j10) = FRcM1t(i10, j10)
    Next j10
Next i10
For k10 = 1 To fdofnum
    l10 = k10
    FRfmax = Abs(FRtempM(k10, k10))

    If l10 <> k10 Then
        For j10 = 1 To fdofnum
            FRtemp = FRtempM(k10, j10)
            FRtempM(k10, j10) = FRtempM(l10, j10)
            FRtempM(l10, j10) = FRtemp
            FRtemp = FRcM1(k10, j10)
            FRcM1(k10, j10) = FRcM1(l10, j10)
            FRcM1(l10, j10) = FRtemp
        Next j10
    End If
    FRf = FRtempM(k10, k10)
    For i10 = 1 To fdofnum
        FRtempM(k10, i10) = FRtempM(k10, i10) / FRf
        FRcM1(k10, i10) = FRcM1(k10, i10) / FRf
    Next i10
Next k10

```

```

Next i10
For l10 = (k10 + 1) To fdofnum
    FRg = FRtempM(l10, k10)
    For i10 = 1 To fdofnum
        FRtempM(l10, i10) = FRtempM(l10, i10) - FRg * FRtempM(k10, i10)
        FRcM1(l10, i10) = FRcM1(l10, i10) - FRg * FRcM1(k10, i10)
    Next i10
Next l10
Next k10
For k10 = fdofnum To 1 Step -1
    For l10 = (k10 - 1) To 1 Step -1
        FRg = FRtempM(l10, k10)
        For i10 = 1 To fdofnum
            FRtempM(l10, i10) = FRtempM(l10, i10) - FRg * FRtempM(k10, i10)
            FRcM1(l10, i10) = FRcM1(l10, i10) - FRg * FRcM1(k10, i10)
        Next i10
    Next l10
Next k10
ReDim FRinvM(fdofnum, fdofnum) As Double
ReDim FRtempM(fdofnum, fdofnum) As Double
For i10 = 1 To fdofnum
    For j10 = 1 To fdofnum
        If i10 = j10 Then
            FRinvM(i10, j10) = 1
        Else
            FRinvM(i10, j10) = 0
        End If
        FRtempM(i10, j10) = Mass(i10, j10)
    Next j10
Next i10
For k10 = 1 To fdofnum
    l10 = k10
    FRfmax = Abs(FRtempM(k10, k10))
    If l10 <> k10 Then
        For j10 = 1 To fdofnum
            FRtemp = FRtempM(k10, j10)
            FRtempM(k10, j10) = FRtempM(l10, j10)
            FRtempM(l10, j10) = FRtemp
            FRtemp = FRinvM(k10, j10)
            FRinvM(k10, j10) = FRinvM(l10, j10)
            FRinvM(l10, j10) = FRtemp
        Next j10
    End If
    FRf = FRtempM(k10, k10)
    For i10 = 1 To fdofnum
        FRtempM(k10, i10) = FRtempM(k10, i10) / FRf
        FRinvM(k10, i10) = FRinvM(k10, i10) / FRf
    Next i10
    For l10 = (k10 + 1) To fdofnum
        FRg = FRtempM(l10, k10)
        For i10 = 1 To fdofnum
            FRtempM(l10, i10) = FRtempM(l10, i10) - FRg * FRtempM(k10, i10)
            FRinvM(l10, i10) = FRinvM(l10, i10) - FRg * FRinvM(k10, i10)
        Next i10
    Next l10

```

```

Next k10
For k10 = fdofnum To 1 Step -1
  For i10 = (k10 - 1) To 1 Step -1
    FRg = FRtempM(i10, k10)
    For i10 = 1 To fdofnum
      FRtempM(i10, i10) = FRtempM(i10, i10) - FRg * FRtempM(k10, i10)
      FRinvM(i10, i10) = FRinvM(i10, i10) - FRg * FRinvM(k10, i10)
    Next i10
  Next i10
Next k10
ReDim tempDisp(fdofnum) As Double
ReDim tempVel(fdofnum) As Double
ReDim tempAcc(fdofnum) As Double
ReDim tempForce(fdofnum) As Double
ReDim deltempDisp(fdofnum) As Double
ReDim deltempVel(fdofnum) As Double
ReDim deltempAcc(fdofnum) As Double
ReDim deltempForce(fdofnum) As Double
ReDim deltempForceExp(fdofnum) As Double
ReDim FRtempSt1M(fdofnum) As Double
ReDim FRtempSt2M(fdofnum) As Double
ReDim FRtempSt3M(fdofnum) As Double
For i10 = 1 To fdofnum
  tempDisp(i10) = 0
  FRDisp(1, i10) = 0
  tempVel(i10) = 0
  FRVel(1, i10) = 0
  tempForce(i10) = AccVal(1) * tempForceMass(i10)
  FRForce(1, i10) = tempForce(i10)
Next i10
For i10 = 1 To fdofnum
  FRtemp = 0
  For j10 = 1 To fdofnum
    FRtemp = FRtemp + Damp(i10, j10) * tempVel(j10) + Stif(i10, j10) * tempDisp(j10)
  Next j10
  FRtempSt1M(i10) = tempForce(i10) - FRtemp
Next i10
For i10 = 1 To fdofnum
  FRtemp = 0
  For j10 = 1 To fdofnum
    FRtemp = FRtemp + FRinvM(i10, j10) * FRtempSt1M(j10)
  Next j10
  tempAcc(i10) = FRtemp
  FRAcc(1, i10) = tempAcc(i10)
Next i10
For i10 = 1 To (TotAccNum - 1)
  Range("Chk").Value = i10
  For j10 = 1 To fdofnum
    deltempForce(j10) = AccVal(i10 + 1) * tempForceMass(j10) - tempForce(j10)
    tempForce(j10) = tempForce(j10) + deltempForce(j10)
    FRForce((i10 + 1), j10) = tempForce(j10)
  Next j10
  For j10 = 1 To fdofnum
    FRtemp1 = 0
    FRtemp2 = 0

```

```

For k10 = 1 To fdofnum
    FRtemp1 = FRtemp1 + FRcM2(j10, k10) * tempVel(k10)
    FRtemp2 = FRtemp2 + FRcM3(j10, k10) * tempAcc(k10)
Next k10
deltempForceExp(j10) = deltempForce(j10) + FRtemp1 + FRtemp2
Next j10
For j10 = 1 To fdofnum
    FRtemp = 0
    For k10 = 1 To fdofnum
        FRtemp = FRtemp + FRcM1(j10, k10) * deltempForceExp(k10)
    Next k10
    deltempDisp(j10) = FRtemp
    deltempVel(j10) = (gamma / beta / dt) * deltempDisp(j10) - _
    (gamma / beta) * tempVel(j10) + dt * (1 - gamma / 2 / beta) * tempAcc(j10)
    deltempAcc(j10) = (1 / (beta * dt ^ 2)) * deltempDisp(j10) - _
    (1 / beta / dt) * tempVel(j10) - (1 / 2 / beta) * tempAcc(j10)
Next j10
For j10 = 1 To fdofnum
    tempDisp(j10) = tempDisp(j10) + deltempDisp(j10)
    FRDisp(i10 + 1, j10) = tempDisp(j10)
    tempVel(j10) = tempVel(j10) + deltempVel(j10)
    FRVel(i10 + 1, j10) = tempVel(j10)
    tempAcc(j10) = tempAcc(j10) + deltempAcc(j10)
    FRAcc(i10 + 1, j10) = tempAcc(j10)
Next j10
Next i10
For ii = 1 To TotAccNum
    Range("Chk").Value = ii
    [Out3].Cells(ii, 1) = FRDisp(ii, 3)
    [Out3].Cells(ii, 2) = FRDisp(ii, 25)
    [Out3].Cells(ii, 3) = FRDisp(ii, 47)
Next ii
End Sub

```

```

Public Function Atn2(X As Variant, Y As Variant) As Variant

```

```

    Const NearZero = 0.0000000001

```

```

    If Y = 0 Then Y = NearZero

```

```

    Atn2 = (Atn(Abs(X) / Abs(Y)) * Sgn(X)) * Sgn(Y)

```

```

End Function

```

```

Sub Clear()

```

```

    Sheets("Out1").Select

```

```

    Cells.Select

```

```

    Selection.ClearContents

```

```

    Range("A1").Select

```

```

    Sheets("Out2").Select

```

```

    Cells.Select

```

```

    Selection.ClearContents

```

```

    Range("A1").Select

```

```

    Sheets("Out3").Select

```

```

    Columns("A:C").Select

```

```

    Selection.ClearContents

```

```

    Range("A1").Select

```

```

    Sheets("Main").Select

```

```

    Range("A1").Select

```

```

End Sub

```

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	12.02.1978	
Doğum yeri	Ankara	
Lise	1985-1995	TED Ankara Koleji
Lisans	1995-1999	Orta Doğu Teknik Üniversitesi Mühendislik Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2000-	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı
Çalıştığı kurum	2000-	YM İnşaat San. ve Tic. AŞ. Tasarım Mühendisi

