

139757

139757

T. Kocaturk

SECRET

İSTANBUL, 2003

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
ÖNSÖZ.....	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. BÜNYE BAĞINTILARI.....	3
2.1 Kiriş için Bünye Bağntıları.....	3
2.2 Ortotrop Plak ve Dairesel Silindirik Kabuk için Bünye Bağntıları.....	3
3. TEMEL BAĞINTILAR.....	5
3.1 Yer Değiştirme ile Şekil Değiştirme Arasındaki Bağntılar.....	5
3.1.1 Kiriş için Yer Değiştirme ile Şekil Değiştirme Arasındaki Bağntı.....	5
3.1.2 Ortotrop Plak için Yer Değiştirmeler ile Şekil Değiştirmeler Arasındaki Bağntılar.....	5
3.1.3 Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk için Yer Değiştirmeler ile Şekil Değiştirmeler Arasındaki Bağntılar.....	7
3.2 İç Potansiyel Enerji.....	9
3.2.1 Kiriş İçin İç Potansiyel Enerji.....	9
3.2.2 Ortotrop Plak İçin İç Potansiyel Enerji.....	10
3.2.3 Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk İçin İç Potansiyel Enerji.....	12
3.3 Kinetik Enerji.....	16
3.3.1 Kiriş İçin Kinetik Enerji.....	16
3.3.2 Ortotrop Plak İçin Kinetik Enerji.....	17
3.3.3 Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk İçin Kinetik Enerji.....	17
3.4 Ritz Metodu.....	18
3.5 Lagrange Çarpanları.....	20
4. KURAMSAL ÇALIŞMA.....	22
4.1 Kiriş İçin Kuramsal Çalışma.....	22
4.2 Ortotrop Plak İçin Kuramsal Çalışma.....	26
4.3 Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk İçin Kuramsal Çalışma.....	27
5. SAYISAL SONUÇLAR.....	34
5.1 Kiriş İçin Sayısal Sonuçlar.....	34
5.2 Ortotrop Plak İçin Sayısal Sonuçlar.....	38

5.3 Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk İçin Sayısal Sonuçlar 47

6. SONUÇ 58

KAYNAKLAR..... 59

ÖZGEÇMİŞ 61



SİMGE LİSTESİ

A	Alan
a	X_1 eksenî yönündeki kenar uzunluğu
b	X_2 eksenî yönündeki kenar uzunluğu
D_{ij}	Plak, kabuk eğilme rijitliği
e	Elastisite modülleri oranı
e_i, e_{ij}	Şekil değiştirme
E_{ii}	Elastisite modülü
G_{ij}	Kayma modülü
h	Kiriş yüksekliği
l	Eleman boyu
Q_{ij}, Q_{ijkl}	Elastik sabitler
r	Kabuk orta düzleminin eğrilik yarıçapı
T	Kinetik enerji
t	Plak yüksekliği
U	X_1 yönündeki yer değiştirme fonksiyonu (boyutlu)
U_i	İç potansiyel enerji
U_{ii}	Birim alanlı eleman için iç potansiyel enerji
u	x_1 yönündeki yer değiştirme fonksiyonu (boyutsuz)
V	X_2 yönündeki yer değiştirme fonksiyonu (boyutlu)
V	Hacim
v	x_2 yönündeki yer değiştirme fonksiyonu (boyutsuz)
W	X_3 yönündeki yer değiştirme fonksiyonu (boyutlu)
w	x_3 yönündeki yer değiştirme fonksiyonu (boyutsuz)
X_1, X_2, X_3	Boyutlu koordinat sistemi
x_1, x_2, x_3	Boyutsuz koordinat sistemi
$\alpha = b/a$	Plak kenar oranları
ρ	Birim hacim kütlesi (yoğunluğu)
β_i	Lagrange çarpanları
σ_i, σ_{ij}	Gerilme
ν_{ij}	i doğrultusundaki gerilmeden dolayı j doğrultusunda oluşan şekil değiştirme cevabı için Poisson oranı
ω	Doğal frekans

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 Kiriş eksenleri gösterimi	5
Şekil 3.2 Nokta mesnetli ortotrop plak.....	6
Şekil 3.3 Nokta mesnetli dairesel silindirik kabuk.....	7
Şekil 3.4 Dairesel silindirik kabukta kabul edilen pozitif yer değiştirme yönleri.....	7
Şekil 3.5 Dairesel silindirik kabuk için ele alınan diferansiyel parça.....	8
Şekil 3.6 Dairesel silindirik kabukta ele alınan birim eleman.....	12
Şekil 3.7 X_3 ün değişimiyle dX_2 deki değişim.	13
Şekil 5.1 $\lambda=9,86960$ için elde edilen $S-1$ mod şekli.....	35
Şekil 5.2 $\lambda=39,47841$ için elde edilen $A-1$ mod şekli.	35
Şekil 5.3 $\lambda=88,82643$ için elde edilen $S-2$ mod şekli.....	36
Şekil 5.4 $\lambda=157,91367$ için elde edilen $A-2$ mod şekli.	36
Şekil 5.5 $\lambda=246,74037$ için elde edilen $S-3$ mod şekli.....	37
Şekil 5.6 $\lambda=355,30865$ için elde edilen $A-3$ mod şekli.	37
Şekil 5.7 Terim sayısının sonuçlar üzerindeki etkisi	38
Şekil 5.8 $\lambda=7,1109$ için elde edilen $SS-1$ mod şekli ($e=1$).	41
Şekil 5.9 $\lambda=19,5961$ için elde edilen $SS-2$ mod şekli ($e=1$).	41
Şekil 5.10 $\lambda=44,3696$ için elde edilen $SS-3$ mod şekli ($e=1$).	42
Şekil 5.11 $\lambda=38,4316$ için elde edilen $AA-1$ mod şekli ($e=1$).	42
Şekil 5.12 $\lambda=69,2654$ için elde edilen $AA-2$ mod şekli ($e=1$).	43
Şekil 5.13 $\lambda=122,3848$ için elde edilen $AA-3$ mod şekli ($e=1$).	43
Şekil 5.14 $\lambda=15,7702$ için elde edilen $SA-1$ mod şekli ($e=1$).	44
Şekil 5.15 $\lambda=50,3767$ için elde edilen $SA-2$ mod şekli ($e=1$).	44
Şekil 5.16 $\lambda=80,3609$ için elde edilen $SA-3$ mod şekli ($e=1$).	45
Şekil 5.17 $\lambda=15,7702$ için elde edilen $AS-1$ mod şekli ($e=1$).	45
Şekil 5.18 $\lambda=50,3767$ için elde edilen $AS-2$ mod şekli ($e=1$).	46
Şekil 5.19 $\lambda=80,3609$ için elde edilen $AS-3$ mod şekli ($e=1$).	46
Şekil 5.20 Kabukta ele alınan açılarının gösterimi.....	48
Şekil 5.21 $\lambda=0.55439$ için elde edilen $SS-1$ mod şekli ($\theta = \pi$, $e = 1$).	50
Şekil 5.22 $\lambda=2.97031$ için elde edilen $SS-2$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	50
Şekil 5.23 $\lambda=8.06390$ için elde edilen $SS-3$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	50
Şekil 5.24 $\lambda=1.33978$ için elde edilen $SS-1$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	51
Şekil 5.25 $\lambda=6.60358$ için elde edilen $SS-2$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	51
Şekil 5.26 $\lambda=14.76605$ için elde edilen $SS-3$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	51
Şekil 5.27 $\lambda=3.21162$ için elde edilen $AA-1$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	52
Şekil 5.28 $\lambda=5.95439$ için elde edilen $AA-2$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	52
Şekil 5.29 $\lambda=8.15674$ için elde edilen $AA-3$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	52
Şekil 5.30 $\lambda=4.56625$ için elde edilen $AA-1$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	53
Şekil 5.31 $\lambda=6.71761$ için elde edilen $AA-2$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	53
Şekil 5.32 $\lambda=16.13966$ için elde edilen $AA-3$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	53
Şekil 5.33 $\lambda=1.75760$ için elde edilen $AS-1$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	54
Şekil 5.34 $\lambda=5.71698$ için elde edilen $AS-2$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	54
Şekil 5.35 $\lambda=8.09967$ için elde edilen $AS-3$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	54
Şekil 5.36 $\lambda=3.13116$ için elde edilen $AS-1$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	55
Şekil 5.37 $\lambda=10.86371$ için elde edilen $AS-2$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	55
Şekil 5.38 $\lambda=16.26141$ için elde edilen $AS-3$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	55
Şekil 5.39 $\lambda=0.71844$ için elde edilen $SA-1$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	56

Şekil 5.40 $\lambda=4.99847$ için elde edilen $SA-2$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	56
Şekil 5.41 $\lambda=7.49005$ için elde edilen $SA-3$ mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).	56
Şekil 5.42 $\lambda=3.42938$ için elde edilen $SA-1$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	57
Şekil 5.43 $\lambda=9.37726$ için elde edilen $SA-2$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	57
Şekil 5.44 $\lambda=12.17535$ için elde edilen $SA-3$ mod şekli($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).	57



ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 1 Terim sayısının sonuçlar üzerindeki etkisi.....	25
Çizelge 2 Nokta mesnetli kirişlere ait λ frekans parametresi değerlerinin kesin sonuçlarla karşılaştırılması.....	34
Çizelge 3 Nokta mesnetli kiriş için S ve A modlarına ait λ değerleri	34
Çizelge 4 Nokta mesnetli kare plaklara ait λ frekans parametrelerinin bu çalışmada ve diğer çalışmalarda bulunan değerlerinin karşılaştırılması, $\nu_{21} = 0.3$, $\alpha = 1$, $e = 1 \dots$	39
Çizelge 5 Nokta mesnetli Ortotrop Plak için SS, AA, AS, SA modlarına ait λ değerleri $\nu_{21} = 0.3$	40
Çizelge 6 Nokta mesnetli Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk için SS, AA, AS, SA modlarına ait λ değerleri $\nu_{21} = 0.3$	49

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasındaki bilimsel ve insani katkılarından dolayı birlikte çalışmaktan büyük zevk duyduğum kıymetli Hocam Sayın Prof. Dr. Turgut Kocatürk'e en derin şükranlarımı sunmayı borç bilirim.

Hayatım boyunca, çalışmamı ve doğruluktan ayrılmamamı salık veren anne ve babama büyük sabır ve anlayışlarından dolayı minnettar kalacağım.



ÖZET

Mühendislikte mekanik biliminin yeri inşaat mühendisliğinde uygulamaları ile büyük bir uygulama alanına sahiptir. Bilgisayar teknolojisi sayesinde hesaplamalardaki kolaylıklar sonucu en karmaşık ve zor problemlere çözüm bulunabilmektedir. Bu avantajlardan yararlanılarak nokta mesnetli kirişlerin, nokta mesnetli ortotrop plakların ve nokta mesnetli ortotrop dairesel silindirik kabukların özdeğerlerinin ve mod şekillerinin elde edilmesi tezin özünü oluşturmaktadır. Problemlerin sayısal çözümü için klasik Ritz metodu kullanılmıştır. Çalışmada, Ritz metodunun uygulanması için elemanların yer değiştirmelerini ifade eden çözüm fonksiyonunun oluşturulmasında polinomlar kullanılmış, Ritz metodu kullanılarak problem cebrik denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir.

Çalışmada, nokta mesnetli kirişlerin titreşimlerine ait özdeğerler ve bu özdeğerler için geçerli mod şekilleri elde edilmiştir. Nokta mesnetli ortotrop dikdörtgen plakların çeşitli boyut oranları ve plak malzemesinin anizotropisini karakterize eden özelliklerin mod şekilleri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Sayısal değerler çok sayıda ortotropi parametresi ve iki adet boyut oranı durumunda, dört mod ailesi için tablolastırılmıştır. Her bir mod ailesi için, ilk üç titreşim moduna ait özdeğerler verilmiştir. Ayrıca nokta mesnetli ortotrop silindirik kabukların serbest titreşim frekansları ve bu frekans değerlerine ait mod şekilleri kabuk malzemesinin anizotropisini karakterize eden özellikler açısından incelenmiştir.

Tablolastırılan sonuçların tasarımcılar için faydalı olacağı ve diğer araştırmacıların sonuçlarını karşılaştırmada referans olacağına inanılmaktadır.

Anahtar kelimeler: Nokta mesnet, ortotropi, serbest titreşim, kiriş, plak, dairesel silindirik kabuk.

ABSTRACT

Science of engineering mechanics has an important place especially in civil engineering. Improvements and advantages of computer technology make it possible to find solutions to most complex and difficult problems. In this study, by using these advantages, eigenvalues and mode shapes of, point supported beams, point supported orthotropic plates and point supported orthotropic circular cylindrical shells are investigated mainly. The classical Ritz method is used for solving the problem. In the study, for applying the Ritz method, the trial function denoting the deflection of the plate is expressed in the polynomial form. By using the Ritz method, the problem is reduced to the solution of a system of algebraic equations.

In this study, the results are given for the eigenvalues and mode shapes of the point supported beams. The influence of the mechanical properties on the mode shapes of the point supported rectangular orthotropic plates are investigated numerically for various values of mechanical properties characterizing the anisotropy at the plate material and aspect ratio. The eigenvalues are tabulated for various orthotropy parameters and two aspect ratios for four mode families. For each mode family, the eigenvalues are provided for the first three vibration modes. Separately, point supported orthotropic circular cylindrical shells are investigated numerically for various values of mechanical properties characterizing the anisotropy at the shell material.

It is believed that the tabulated results will prove useful to designers and provide a reference against which other researchers can compare their results.

Keywords: Point support, orthotropy, free vibration, beam, plate, circular cylindrical shell.

1. GİRİŞ

Mühendislikte, kiriş, plak ve kabuk gibi taşıyıcı elemanlar çok sık olarak kullanılmaktadır. Çalışmada Ritz metodu kullanılmıştır. Nokta mesnetlerde ortaya çıkan kısıtlılık koşulları Lagrange çarpanları kullanılarak probleme dahil edilmiştir. Elde edilen değiştirilmiş fonksiyonelin ekstrem olabilmesi için gerekli şartlar kullanılarak problem çözümlenmiştir.

Çeşitli noktalarından mesnetlenme durumlarına sahip kirişlerin özdeğerlerinin kesin sonuçları Timoshenko (1955) tarafından verilmiştir.

Çeşitli noktalarından mesnetli dikdörtgen izotrop ve ortotrop plakların serbest titreşimine ilişkin çok sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda çoğunlukla Kirchhoff-Love veya Mindlin plak teorileri kullanılmıştır. Nokta mesnetli plakların ilk birkaç frekansı Venkateswara Rao ve diğerleri (1973) tarafından sonlu elemanlar metodu kullanılarak elde edilmiştir. Kerstens (1979) serbest titreşen kirişin özfonksiyonlarını plağın yer değiştirme fonksiyonunu ifade etmek için kullanarak keyfi noktalardan mesnetli bir dikdörtgen plağın titreşimini, mesnet kısıtlılıklarını Lagrange genelleştirilmiş kısıtlılık kuvvetleriyle göz önüne alarak incelemiştir. Kenarlar boyunca simetrik dağılı nokta mesnetli dikdörtgen plakların serbest titreşimlerinin analizi Gorman (1980) tarafından yapılmıştır. Yer değiştirme fonksiyonu olarak çift kuvvet serisi seçilerek, kısıtlılık koşulları Lagrange çarpanları ile sağlatılarak klasik Ritz metodunun kullanılmasıyla nokta mesnetli dikdörtgen plakların serbest titreşim problemi Narita (1984) tarafından çözülmüştür. Plak merkezinden geçen eksenlere göre simetrik yerleştirilmiş nokta mesnetler üzerine oturan ince dikdörtgen ortotropik plakların serbest titreşimi Gorman (1990) tarafından incelenmiştir. Tamamen serbest ortotrop dikdörtgen plakların serbest titreşim analizi Gorman (1994) tarafından yapılmıştır. Nokta mesnetli Mindlin plaklarının serbest titreşimleri süperpozisyon metoduyla Gorman (1999) tarafından incelenmiştir.

Tamamıyla serbest basık kabukların doğal frekansları Leissa ve Narita (1984) tarafından yer değiştirme fonksiyonu çiftli bir polinom şeklinde ifade edilerek bulunmuştur.

Özdeğerler çeşitli ortotropi değerleri, nokta mesnetlerin rijitlikleri için tablolaştırılmıştır. Sonuçların doğruluğu daha önce elde edilmiş veya yayınlanmış sonuçlarla karşılaştırılarak sınanmıştır. Ele alınan problemler Kirchoff-Love hipotezi çerçevesinde çözülmüştür.

Nokta mesnetli kirişlerin, nokta mesnetli ortotrop plakların ve nokta mesnetli ortotrop dairesel silindirik kabukların özdeğerlerinin ve mod şekillerinin elde edilmesi bu çalışmanın özünü

oluşturmaktadır. Problemlerin sayısal çözümü için klasik Ritz metodu kullanılmıştır. Çalışmada, Ritz metodunun uygulanması için elemanların yer değiştirmelerini ifade eden çözüm fonksiyonunun oluşturulmasında polinomlar kullanılmış, Ritz metodu kullanılarak problem cebrik denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Ele alınan yapı elemanların köşe noktalarındaki tutululuk şartları Lagrange çarpanları kullanılarak çözüme katılmıştır.



2. BÜNYE BAĞINTILARI

2.1 Kiriş için Bünye Bağintıları

Mukavemet derslerinden de bilindiği üzere kirişler için gerilmeler ile şekil değiştirmeler arasındaki bağıntı

$$\sigma_1 = Q_{11} e_1 \quad (2.1)$$

şeklinde dir. Burada Q_{11} aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$Q_{11} = E_{11} \quad (2.2)$$

E_{11} , X_1 eksenini doğrultusundaki Young modülüdür.

2.2 Ortotrop Plak ve Dairesel Silindirik Kabuk için Bünye Bağintıları

Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde incelenen plaklarda düzlem gerilme hali ortaya çıkmakta olup bünye ilişkileri, plağın özel ortotrop alınması durumunda indirgenmiş rijitlik tansörünün daraltılmış formdaki ifadesi kullanılarak

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir, (Szilard, 1974), (Choo 1990). Buradaki Q_{ij} ler elastik sabitler olup izleyen şekilde tanımlanmıştır, (Choo, 1990):

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12} \approx \frac{E_{11}\sqrt{e}}{2(1 + \nu_{21}\sqrt{1/e})} \quad (2.4)$$

Yukarıdaki ifadelerdeki E_{ii}, G_{ij} sırasıyla Young modülü ve kayma modülüdür. ν_{ij} , i doğrultusundaki gerilme dolayısıyla j doğrultusundaki şekil değiştirme cevabı için Poisson oranıdır. e , X_2 yönündeki elastisite modülünün X_1 yönündeki elastisite modülüne oranı olarak tanımlanmıştır. Betti karşılıklı teoreminden hareketle Young modülleri ile Poisson oranları arasında

$$\nu_{12}E_{22} = \nu_{21}E_{11} \quad (2.5)$$

şeklinde bir bağıntı yazılabilir, (Choo, 1990). Buradan

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{E_{11}} \quad (2.6)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen (2.6) denklemi (2.4) denkleminde kullanılırsa

$$Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.7)$$

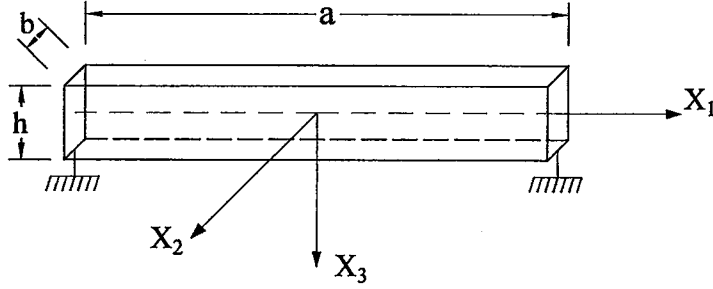
olarak bulunur. Elde edilen (2.7) denkleminde $Q_{21} = Q_{12}$ olduğu görülebilir.



3. TEMEL BAĞINTILAR

3.1 Yer Değiştirme ile Şekil Değiştirme Arasındaki Bağıntılar

3.1.1 Kiriş için Yer Değiştirme ile Şekil Değiştirme Arasındaki Bağıntı



Şekil 3.1 Kiriş eksenleri gösterimi

Kiriş için Bernolli-Navier hipotezine göre X_1 yönündeki şekil değiştirme, eğrilik ve yer değiştirme arasında izleyen bağıntılar vardır (İnan, 1984):

$$e_1 = -X_3 \frac{1}{\rho_x}$$

$$e_1 = -X_3 \frac{d^2 W}{dX_1^2}, \quad (3.1)$$

Bağıntıdaki ρ_x eğrilik yarıçapıdır. W , X_3 eksen yönündeki yer değiştirmeyi göstermektedir. Yer değiştirmeler cinsinden elde edilen şekil değiştirme ifadesi bünye bağıntısında yerine yazılırsa σ_1 gerilmesi izleyen şekilde elde edilmiş olur:

$$\sigma_1 = E_{11} e_1 = E_{11} \left(-X_3 \frac{d^2 W}{dX_1^2} \right) \quad (3.2)$$

3.1.2 Ortotrop Plak için Yer Değiştirmeler ile Şekil Değiştirmeler Arasındaki Bağıntılar

Kenarları a ve b olan t kalınlığındaki plaklar için Şekil 3.2'deki koordinat takımı dikkate alındığında şekil değiştirmelerle yer değiştirmeler arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi verilmektedir, (Szilard, 1974):

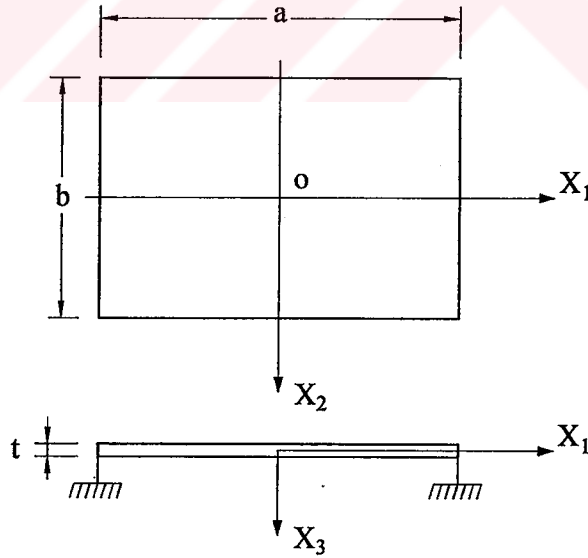
$$\begin{aligned}
e_1 &= -X_3 \frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} \\
e_2 &= -X_3 \frac{\partial^2 W}{\partial X_2^2}, \\
e_6 &= -2X_3 \frac{\partial^2 W}{\partial X_1 \partial X_2}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

e_1 , X_1 yönünde herhangi bir X_3 seviyesindeki şekil değiştirme, e_2 , X_2 yönünde herhangi bir X_3 seviyesindeki şekil değiştirme, e_6 , $X_1 X_2$ düzlemine paralel herhangi bir X_3 seviyesindeki kayma açısı olarak tanımlanabilir.

$W_{,1} = \frac{\partial W}{\partial X_1}$, $W_{,2} = \frac{\partial W}{\partial X_2}$ tanımlamaları kullanılırsa şekil değiştirmelerle yer değiştirmeler arasındaki bağıntılar

$$\begin{aligned}
e_1 &= -X_3 W_{,11} \\
e_2 &= -X_3 W_{,22} \\
e_6 &= -2X_3 W_{,12}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 3.2 Nokta mesnetli ortotrop plak.

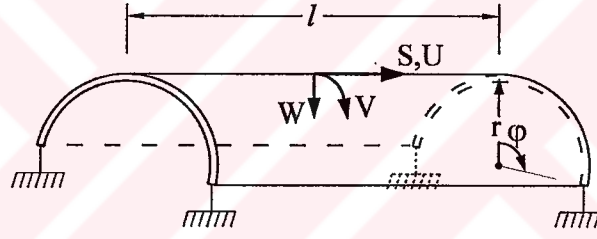
Şekil 3.2 deki plakta koordinat eksenleri olan OX_1 ve OX_2 plak kenarlarına paralel alınmış

olup plak merkezinden (o noktasından) geçirilmiştir. Şekil değiştirme bağıntıları (2.3) te yerine yazılırsa gerilme ve şekil değiştirmeler arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

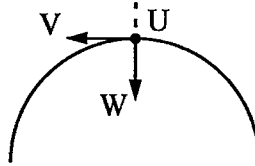
$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E_{11}}{1-\nu_1\nu_2}(e_1 + \nu_2 e_2) = -\frac{E_{11}}{1-\nu_1\nu_2}(X_3 W_{,11} + \nu_2 X_3 W_{,22}) \\ \sigma_2 &= \frac{E_{22}}{1-\nu_1\nu_2}(e_2 + \nu_1 e_1) = -\frac{E_{22}}{1-\nu_1\nu_2}(X_3 W_{,22} + \nu_1 X_3 W_{,11}) \\ \sigma_6 &= G_{12} e_6 = -2G_{12} X_3 W_{,12}\end{aligned}\quad (3.5)$$

σ_1 X_1 yönünde herhangi bir X_3 seviyesindeki gerilme, σ_2 X_2 yönünde herhangi bir X_3 seviyesindeki gerilme, σ_6 $X_1 X_2$ düzlemine paralel herhangi bir X_3 seviyesindeki kayma gerilmesi olarak tanımlanabilir.

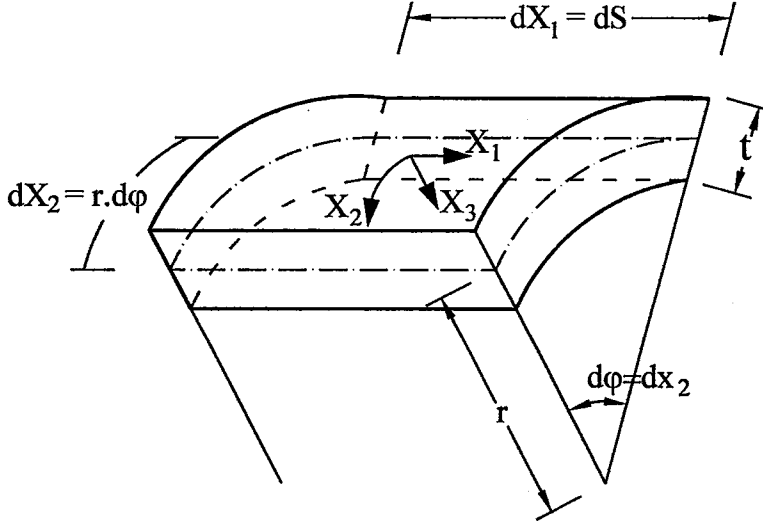
3.1.3 Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk için Yer Değiştirmeler ile Şekil Değiştirmeler Arasındaki Bağıntılar



Şekil 3.3 Nokta mesnetli dairesel silindirik kabuk.



Şekil 3.4 Dairesel silindirik kabukta kabul edilen pozitif yer değiştirme yönleri.



Şekil 3.5 Dairesel silindirik kabuk için ele alınan diferansiyel parça.

Dairesel silindirik kabuk için Şekil 3.5' te gösterilen koordinat takımı dikkate alındığında şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasındaki bağıntı izleyen şekilde verilir, (Flügge, 1973):

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{U'}{r} - \frac{W'' X_3}{r^2} \\
 e_2 &= \frac{\dot{V}}{r} - \frac{W}{r + X_3} - \frac{X_3}{r} \frac{\ddot{W} X_3}{(r + X_3)} \\
 e_6 &= \frac{\dot{U}}{r + X_3} + \frac{V'(r - X_3)}{r^2} - \frac{\dot{W}'}{r} \left(\frac{X_3}{r} + \frac{X_3}{r + X_3} \right)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$S = s.r$, $X_1 = x_1.r$, $X_2 = x_2.r$ boyutsuzlaştırmaları kullanılarak (3.6) denklemindeki kısmi türev kısaltmaları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial S} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \frac{s}{r}} = r \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} = r \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} = (\cdot)'$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \phi} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} = (\cdot)\dot{}$$

X_3 koordinatı $-t/2$ ile $t/2$ aralığında değişmektedir. Bu açıdan bakıldığında paydalardaki X_3 terimleri işlem kolaylığı açısından ve sonucu da fazla değiştirmeyeceğinden r nin yanında ihmal edilirse şekil değiştirme tansörünün elemanları

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{U'}{r} - \frac{W'' X_3}{r^2} \\
e_2 &= \frac{\dot{V}}{r} - \frac{W}{r} - \frac{\ddot{W} X_3}{r^2} \\
e_6 &= \frac{\dot{U}}{r} + \frac{V'(r - X_3)}{r^2} - 2 \frac{\dot{W}' X_3}{r^2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklini alır. (2.3) ve (3.7) bağıntıları kullanılarak gerilme ve şekil değiştirmeler arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_1 + \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_2 = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'}{r} - \frac{W'' X_3}{r^2} \right) + \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{\dot{V}}{r} - \frac{W}{r} - \frac{\ddot{W} X_3}{r^2} \right) \\
\sigma_2 &= \frac{\nu_{12}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_1 + \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_2 = \frac{\nu_{12}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'}{r} - \frac{W'' X_3}{r^2} \right) + \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{\dot{V}}{r} - \frac{W}{r} - \frac{\ddot{W} X_3}{r^2} \right) \\
\sigma_6 &= G_{12} \cdot e_6 = G_{12} \cdot \left(\frac{\dot{U}}{r} + \frac{V'(r - X_3)}{r^2} - 2 \frac{\dot{W}' X_3}{r^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2 İç Potansiyel Enerji

3.2.1 Kiriş İçin İç Potansiyel Enerji

Klasik mekanikten de bilindiği üzere şekil değiştirme enerjisi

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma e dV \tag{3.9}$$

şeklindedir. Kiriş için bu ifade

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{11} e_{11} dX_2 dX_3 dX_1 \tag{3.10}$$

şeklinde düzenlenebilir. (3.1) ve (3.2) denklemleri (3.9) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
U_i &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E \left(-X_3 \frac{d^2 W}{dX_1^2} \right) \left(-X_3 \frac{d^2 W}{dX_1^2} \right) b dX_3 dX_1 \\
U_i &= \frac{1}{2} E_{11} I \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{d^2 W}{dX_1^2} dX_1
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Bu bağıntıdaki ifadeler

$$\begin{aligned}
 a dx_1 &= dX_1 \quad dx_1 = \frac{dX_1}{a} \\
 aw(x_1) &= W(X_1) \quad w(x_1) = \frac{W(X_1)}{a}
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

dönüşümleri kullanılarak boyutsuzlaştırılabilir. Burada, küçük harfle yazılı terimler boyutsuz terimlerdir. Boyutsuzlaştırma yapılırken integral sınırları yeni tanımlanan eksen takımına göre tekrar düzenlenmelidir. dX_1 diferansiyeline göre integral sınırları $-a/2$ den $a/2$ ye kadar tanımlanmıştır. Boyutsuzlaştırmadan sonra yeni integral sınırları $-1/2$ den $1/2$ ye kadar olacaktır. Sonuç olarak kiriş için iç potansiyel enerji denklemi izleyen şekilde elde edilir:

$$U_i = \frac{EI}{2a} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2 w}{dx_1^2} \right)^2 dx_1
 \tag{3.13}$$

3.2.2 Ortotrop Plak İçin İç Potansiyel Enerji

Elastik malzemelerde iç potansiyel enerji ifadesi

$$U_i = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij}
 \tag{3.14}$$

şeklinde olmaktadır. Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde ele alınan ortotrop plaklar düzlem gerilme etkisi altında olduklarından şekil değiştirme enerjisi

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_6 e_6) dV
 \tag{3.15}$$

olur. (3.4) ve (3.5) denklemleri (3.15) denkleminde kullanılarak birim alanlı bir plak eleman için şekil değiştirme enerjisi izleyen şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
 U_{il} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} (e_1 + \nu_{21}e_2) e_1 + \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} (e_2 + \nu_{12}e_1) e_2 + G_{12} e_6^2 \right] dX_3 \\
 U_{il} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} [(-X_3 \ddot{W})^2 + \nu_{21}(-X_3 \ddot{W})(-X_3 \ddot{W}')] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} [(-X_3 \ddot{W})^2 + \nu_{12}(-X_3 \ddot{W})(-X_3 \ddot{W}')] + G_{12} (-2X_3 \dot{W}')^2 \right] dX_3
 \end{aligned}$$

$$U_{II} = \frac{1}{2} \left[\frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{t^3}{12} \dot{W}''^2 + \nu_{21} \frac{t^3}{12} \ddot{W} W'' \right) + \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{t^3}{12} \ddot{W}^2 + \nu_{12} \frac{t^3}{12} W'' \ddot{W} \right) + G_{12} 4 \frac{t^3}{12} \dot{W}'^2 \right]$$

Bu aşamada aşağıda tanımlanmış olan D rijitlik katsayıları kullanılarak ifadeler daha sade hale getirilebilir:

$$D_{11} = \frac{E_{11} t^3}{12(1 - \frac{\nu_{21}^2}{e})}, \quad D_{22} = \frac{E_{22} t^3}{12(1 - \frac{\nu_{21}^2}{e})}, \quad D_{66} = \frac{G_{12} t^3}{12}$$

Ayrıca $\frac{D_{22}}{D_{11}} = \frac{E_{22}}{E_{11}} = e$ olarak tanımlanacaktır. Sonuç olarak plağın birim alanı için şekil değiştirme enerjisi

$$U_{II} = \frac{1}{2} (D_{11} W_{,11}^2 + 2\nu D_{11} W_{,22} W_{,11} + D_{22} W_{,22}^2 + 4D_{66} W_{,12}^2) \quad (3.16)$$

şeklinde bulunur. Birim alanlı plak için elde edilen potansiyel enerji ifadesi bağıntısını boyutsuzlaştırmak için $x_1 = X_1/a$, $x_2 = X_2/b$, $w(x_1, x_2) = W(X_1, X_2)/a$, $\alpha = b/a$ dönüşümleri kullanılarak ifade yeniden düzenlenirse izleyen bağıntı elde edilir:

$$U_{II} = \frac{D_{11}}{2} \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2\nu_{21} \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + e \frac{a^2}{b^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{4D_{66}}{D_{11}} \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]$$

Birim alan için elde edilen yukarıdaki bağıntı plak yüzeyi boyunca integre edilecek olursa plağın iç potansiyel enerjisi

$$U_I = \frac{D_{11}}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2\nu_{21} \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + e \frac{a^2}{b^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{4D_{66}}{D_{11}} \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dX_1 dX_2$$

olarak elde edilir. Buradaki integrasyon $dx_1 = dX_1/a$, $dx_2 = dX_2/b$ boyutsuz diferansiyelleri kullanılarak yapılırsa

$$U_I = \frac{D_{11}}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2\nu_{21} \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + e \frac{a^2}{b^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{4D_{66}}{D_{11}} \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] a.b.d x_1 d x_2$$

$$U_i = \frac{D_{11}}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \frac{2\nu_{21}}{\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{e}{\alpha^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{4D_{66}}{\alpha D_{11}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 \quad (3.17)$$

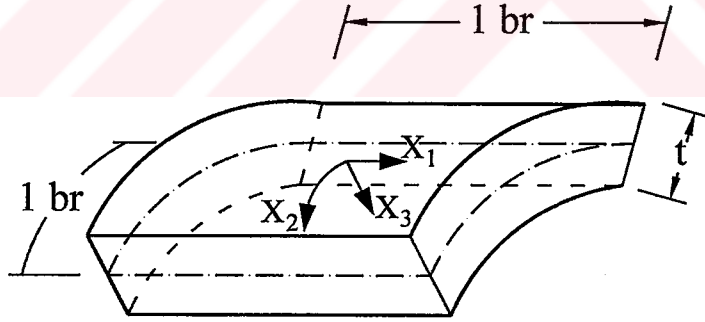
denklemini elde edilmiş olur. Burada integral (x_1, x_2) eksen takımına göre yapıldığı için integral alma işlemi $1/2$ ile $-1/2$ aralığında olmaktadır.

3.2.3 Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk İçin İç Potansiyel Enerji

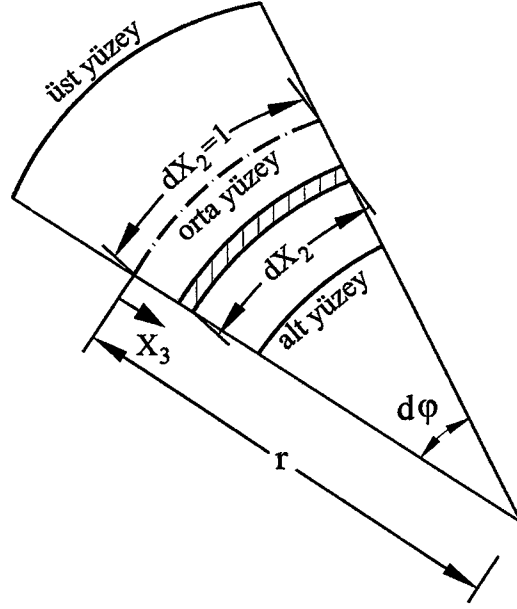
Yine ince kabuklar için düzlem gerilme hali göz önüne alındığında şekil değiştirme enerjisi

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_6 e_6) dV \quad (3.18)$$

olarak verilir. Bu ifadedeki gerilmeler şekil değiştirmeler cinsinden yazılırsa birim alan için iç potansiyel enerji bulunabilir. Şekil 3.7 de görüldüğü üzere dX_2 uzunluğu X_3 eksenine bağımlı olarak değişmektedir. Bu yüzden X_2 eksenine göre dikkate alınan söz konusu birim mesafenin öncelikle bu değişim dikkate alınarak tanımlanması gerekli olacaktır. Orta düzlem için alınan birim uzunluklar Şekil 3.6 da gösterilmiştir.



Şekil 3.6 Dairesel silindirik kabukta ele alınan birim eleman.



Şekil 3.7 X_3 ün değişimiyle dX_2 deki değişim.

Benzerlikten yararlanarak dX_2 nin değişimi X_3 cinsinden ifade edilirse

$$dX_2 = \frac{r - X_3}{r} = 1 - \frac{X_3}{r} \quad (3.19)$$

eşitliği elde edilir. Bu bağıntı kullanılarak orta yüzeyi birim alanlı bir kabuk parçasının iç potansiyel enerji ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_6 e_6) \left(1 - \frac{X_3}{r}\right) dX_3 \quad (3.20)$$

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[\frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_1^2 + 2 \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_1 e_2 + \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_2^2 + G_{12} e_6^2 \right] \left(1 - \frac{X_3}{r}\right) dX_3$$

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[\frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'}{r} - \frac{W'' X_3}{r^2} \right)^2 + 2 \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'}{r} - \frac{W'' X_3}{r^2} \right) \left(\frac{\dot{V}}{r} - \frac{W}{r} - \frac{\ddot{W} X_3}{r^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{\dot{V}}{r} - \frac{W}{r} - \frac{\ddot{W} X_3}{r^2} \right)^2 + G_{12} \left(\frac{\dot{U}}{r} + \frac{V'(r - X_3)}{r^2} - 2 \frac{\dot{W}' X_3}{r^2} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{X_3}{r}\right) dX_3$$

$$\begin{aligned}
U_{11} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'^2}{r^2} - 2 \cdot \frac{U'W''X_3}{r^3} + \frac{W''^2X_3^2}{r^4} \right) + 2 \cdot \frac{E_{22}\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'\dot{V}}{r^2} - \frac{U'W}{r^2} - \frac{U'\ddot{W}X_3}{r^3} - \frac{W''\dot{V}X_3}{r^3} \right. \right. \\
& + \left. \frac{W''W}{r^3} + \frac{W''\ddot{W}X_3^2}{r^4} \right) + \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{\dot{V}^2}{r^2} + \frac{W^2}{r^2} + \frac{\ddot{W}^2X_3^2}{r^2} - 2 \cdot \frac{\dot{V}W}{r^2} - 2 \cdot \frac{\dot{V}\ddot{W}X_3}{r^3} + 2 \cdot \frac{W\ddot{W}X_3}{r^3} \right) \\
& + G_{12} \left(\frac{\dot{U}^2}{r^2} + \frac{V'^2(r-X_3)^2}{r^4} + 4 \cdot \frac{\dot{W}'^2X_3^2}{r^4} + 2 \cdot \frac{\dot{U}V'(r-X_3)}{r^3} - 4 \cdot \frac{\dot{U}\dot{W}'X_3}{r^3} - 4 \cdot \frac{V'\dot{W}'(r-X_3)X_3}{r^4} \right) \Bigg] \\
& \cdot \left(1 - \frac{X_3}{r} \right) dX_3
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Yukarıdaki (3.14) bağıntısında görülen $(1-X_3/r)$ ifadesi köşeli parantez içine alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
U_{11} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'^2}{r^2} - \frac{U'^2X_3}{r^3} - 2 \cdot \frac{U'W''X_3}{r^3} + 2 \cdot \frac{U'W''X_3^2}{r^4} + \frac{W''^2X_3^2}{r^4} - \frac{W''^2X_3^3}{r^5} \right) \right. \\
& + 2 \cdot \frac{E_{22}\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'\dot{V}}{r^2} - \frac{U'\dot{V}X_3}{r^3} - \frac{U'W}{r^2} + \frac{U'WX_3}{r^3} - \frac{U'\ddot{W}X_3}{r^3} + \frac{U'\ddot{W}X_3^2}{r^4} - \frac{W''\dot{V}X_3}{r^3} \right. \\
& + \left. \frac{W''\dot{V}X_3^2}{r^4} + \frac{W''W}{r^3} - \frac{W''W}{r^4} + \frac{W''\ddot{W}X_3^2}{r^4} - \frac{W''\ddot{W}X_3^3}{r^5} \right) \\
& + \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{\dot{V}^2}{r^2} - \frac{\dot{V}^2X_3}{r^3} + \frac{W^2}{r^2} - \frac{W^2X_3}{r^3} + \frac{\ddot{W}^2X_3^2}{r^2} - \frac{\ddot{W}^2X_3^3}{r^3} - 2 \cdot \frac{\dot{V}W}{r^2} + 2 \cdot \frac{\dot{V}WX_3}{r^3} - 2 \cdot \frac{\dot{V}\ddot{W}X_3}{r^3} \right. \\
& + 2 \cdot \frac{\dot{V}\ddot{W}X_3^2}{r^4} + 2 \cdot \frac{W\ddot{W}X_3}{r^3} - 2 \cdot \frac{W\ddot{W}X_3^2}{r^4} \Bigg) + G_{12} \left(\frac{\dot{U}^2}{r^2} - \frac{\dot{U}^2X_3}{r^3} + \frac{V'^2r^2}{r^4} - \frac{V'^2r^2X_3}{r^5} - 2 \cdot \frac{V'^2rX_3}{r^4} \right. \\
& + 2 \cdot \frac{V'^2X_3^2}{r^4} + \frac{V'^2X_3^2}{r^4} - \frac{V'^2X_3^3}{r^5} + 4 \cdot \frac{\dot{W}'^2X_3^2}{r^4} - 4 \cdot \frac{\dot{W}'^2X_3^3}{r^5} + 2 \cdot \frac{\dot{U}V'}{r^2} - 2 \cdot \frac{\dot{U}V'X_3}{r^3} - 2 \cdot \frac{\dot{U}V'X_3}{r^3} \\
& + 2 \cdot \frac{\dot{U}V'X_3^2}{r^4} - 4 \cdot \frac{\dot{U}\dot{W}'X_3}{r^3} + 4 \cdot \frac{\dot{U}\dot{W}'X_3^2}{r^4} - 4 \cdot \frac{V'\dot{W}'X_3}{r^4} + 4 \cdot \frac{V'\dot{W}'X_3^2}{r^4} + 4 \cdot \frac{V'\dot{W}'X_3^2}{r^4} - 4 \cdot \frac{V'\dot{W}'X_3^3}{r^5} \Bigg) \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{11} = \frac{1}{2} & \left[\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'^2}{r^2}X_3 + 2 \cdot \frac{U'W''X_3^3}{r^4} + \frac{W''^2X_3^3}{r^4} \right) + 2 \cdot \frac{E_{22}\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'\dot{V}}{r^2}X_3 - \frac{U'W}{r^2}X_3 + \frac{U'\ddot{W}X_3^3}{r^4} \right. \right. \\
& + \left. \frac{W''\dot{V}X_3^3}{r^4} - \frac{W''W}{r^4}X_3 + \frac{W''\ddot{W}X_3^3}{r^4} \right) + \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{\dot{V}^2}{r^2}X_3 + \frac{W^2}{r^2}X_3 + \frac{\ddot{W}^2X_3^3}{r^2} - 2 \cdot \frac{\dot{V}W}{r^2}X_3 \right. \\
& + 2 \cdot \frac{\dot{V}\ddot{W}X_3^3}{r^4} - 2 \cdot \frac{W\ddot{W}X_3^3}{r^4} \Bigg) + G_{12} \left(\frac{\dot{U}^2}{r^2}X_3 + \frac{V'^2}{r^2}X_3 + 2 \cdot \frac{V'^2X_3^3}{r^4} + \frac{V'^2X_3^3}{r^4} + 4 \cdot \frac{\dot{W}'^2X_3^3}{r^4} \right. \\
& + 2 \cdot \frac{\dot{U}V'}{r^2}X_3 + 2 \cdot \frac{\dot{U}V'X_3^3}{r^4} + 4 \cdot \frac{\dot{U}\dot{W}'X_3^3}{r^4} + 4 \cdot \frac{V'\dot{W}'X_3^3}{r^4} + 4 \cdot \frac{V'\dot{W}'X_3^3}{r^4} \Bigg) \Bigg]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$U_{11} = \frac{1}{2} \left[\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'^2}{r^2} t + 2 \frac{U'W''}{r^4} \frac{t^3}{12} + \frac{W''^2}{r^4} \frac{t^3}{12} \right) + 2 \frac{E_{22}\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{U'\dot{V}}{r^2} t - \frac{U'W}{r^2} t + \frac{U'\ddot{W}}{r^4} \frac{t^3}{12} + \frac{W''\dot{V}}{r^4} \frac{t^3}{12} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{W''W}{r^4} \frac{t^3}{12} + \frac{W''\ddot{W}}{r^4} \frac{t^3}{12} \right) + \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{\dot{V}^2}{r^2} t + \frac{W^2}{r^2} t + \frac{\ddot{W}^2}{r^2} \frac{t^3}{12} - 2 \frac{\dot{V}W}{r^2} t + 2 \frac{\dot{V}\ddot{W}}{r^4} \frac{t^3}{12} - 2 \frac{W\ddot{W}}{r^4} \frac{t^3}{12} \right) \right. \\ \left. + G_{12} \left(\frac{\dot{U}^2}{r^2} t + \frac{V'^2}{r^2} t + 2 \frac{V'^2}{r^4} \frac{t^3}{12} + \frac{V''^2}{r^4} \frac{t^3}{12} + 4 \frac{\dot{W}'^2}{r^4} \frac{t^3}{12} + 2 \frac{\dot{U}V'}{r^2} t + 2 \frac{\dot{U}\dot{V}'}{r^4} \frac{t^3}{12} + 4 \frac{\dot{U}\dot{W}'}{r^4} \frac{t^3}{12} \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \frac{V'\dot{W}'}{r^4} \frac{t^3}{12} + 4 \frac{V'\ddot{W}'}{r^4} \frac{t^3}{12} \right) \right]$$

$$U_{11} = \frac{1}{2} \frac{E_{11}t}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \frac{1}{r^2} (U'^2) + \frac{1}{2} \frac{E_{22}\nu_{12}t}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \frac{1}{r^2} (2U'\dot{V} - 2U'W) + \frac{1}{2} \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \frac{1}{r^2} (\dot{V}^2 - 2\dot{V}W + W^2) \\ + \frac{1}{2} G_{12} t \frac{1}{r^2} (\dot{U}^2 + 2\dot{U}V' + V'^2) + \frac{1}{2} \frac{E_{11}t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \frac{1}{r^4} (2U'W'' + W''^2) + \frac{1}{2} \frac{E_{22}\nu_{12}t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \frac{1}{r^4} (2W''\dot{V} \\ + 2W''\ddot{W} + 2U'\ddot{W} - 2W''W) + \frac{1}{2} \frac{E_{22}t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \frac{1}{r^4} (\ddot{W}^2 + 2\dot{V}\ddot{W} - 2W\ddot{W}) \\ + \frac{1}{2} \frac{G_{12}t^3}{12} \frac{1}{r^4} (3V'^2 + 4\dot{W}'^2 + 2\dot{U}V' + 4\dot{U}\dot{W}' + 8V'\dot{W}') \\ U_{11} = \frac{1}{2} \frac{E_{11}t}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \frac{1}{r^2} (U'^2) + \frac{1}{2} \frac{E_{22}t}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \frac{1}{r^2} (2U'\dot{V}\nu_{12} - 2U'W\nu_{12} + \dot{V}^2 - 2\dot{V}W + W^2) + \frac{1}{2} G_{12} t \frac{1}{r^2} (\dot{U}^2 \\ + 2\dot{U}V' + V'^2) + \frac{1}{2} \frac{E_{11}t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \frac{1}{r^4} (2U'W'' + W''^2) + \frac{1}{2} \frac{E_{22}t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \frac{1}{r^4} (2W''\dot{V}\nu_{12} + 2W''\ddot{W}\nu_{12} \\ + 2U'\ddot{W}\nu_{12} - 2W''W\nu_{12} + \ddot{W}^2 + 2\dot{V}\ddot{W} - 2W\ddot{W}) + \frac{1}{2} \frac{G_{12}t^3}{12} \frac{1}{r^4} (3V'^2 + 4\dot{W}'^2 + 2\dot{U}V' + 4\dot{U}\dot{W}' + 8V'\dot{W}')$$

Aşağıda verilen

$$D_{11} = \frac{E_{11}t^3}{12(1-\frac{\nu_{21}^2}{e})} \quad D_{22} = \frac{E_{22}t^3}{12(1-\frac{\nu_{21}^2}{e})} \quad D_{66} = \frac{G_{12}t^3}{12}$$

dönüşümleri kullanılarak iç potansiyel enerji ifadesi düzenlenirse

$$U_{11} = \frac{1}{2} \frac{12D_{11}}{t^2} \frac{1}{r^2} (U'^2) + \frac{1}{2} \frac{12D_{22}}{t^2} \frac{1}{r^2} (2U'\dot{V}\nu_{12} - 2U'W\nu_{12} + \dot{V}^2 - 2\dot{V}W + W^2) + \frac{1}{2} \frac{12}{t^2} D_{66} \frac{1}{r^2} (\dot{U}^2 + 2\dot{U}V' + V'^2) \\ + \frac{1}{2} D_{11} \frac{1}{r^4} (2U'W'' + W''^2) + \frac{1}{2} D_{22} \frac{1}{r^4} (2W''\dot{V}\nu_{12} + 2W''\ddot{W}\nu_{12} + 2U'\ddot{W}\nu_{12} - 2W''W\nu_{12} + \ddot{W}^2 + 2\dot{V}\ddot{W} - 2W\ddot{W}) \\ + \frac{1}{2} D_{66} \frac{1}{r^4} (3V'^2 + 4\dot{W}'^2 + 2\dot{U}V' + 4\dot{U}\dot{W}' + 8V'\dot{W}') \quad (3.22)$$

olarak bulunur. Boyutsuz ifadeler $u = U/r$, $v = V/r$, $w = W/r$ olarak tanımlanmıştır.

Boyutsuz ifadeler kullanılıp ortotrop dairesel silindirik kabuk için iç potansiyel enerji ifadesi

yeniden düzenlenirse izleyen bağıntı elde edilir:

$$\begin{aligned}
 U_{II} = & \frac{1}{2} \frac{12 D_{11}}{t^2} (u'^2) + \frac{1}{2} \frac{12 D_{22}}{t^2} (2u' \dot{v} v_{12} - 2u' w v_{12} + \dot{v}^2 - 2\dot{v} w + w^2) + \frac{1}{2} \frac{12}{t^2} D_{66} (\dot{u}^2 + 2\dot{u} v' + v'^2) \\
 & + \frac{1}{2} D_{11} \frac{1}{r^2} (2u' w'' + w''^2) + \frac{1}{2} D_{22} \frac{1}{r^2} (2w'' \dot{v} v_{12} + 2w'' \ddot{w} v_{12} + 2u' \ddot{w} v_{12} - 2w'' w v_{12} + \ddot{w}^2 + 2\dot{v} \ddot{w} - 2w \ddot{w}) \\
 & + \frac{1}{2} D_{66} \frac{1}{r^2} (3v'^2 + 4\dot{w}'^2 + 2i\dot{v}' + 4i\dot{w}' + 8v'\dot{w}')
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Birim alan için olan bu ifade yüzey alanı boyunca integre edilince tüm hacim için iç potansiyel enerji elde edilebilir. Dairesel silindirik kabuk için alan elemanı izleyen şekildedir:

$$Alan = r . dX_2 . dX_1$$

Yukarıdaki ifade boyutsuz eksen takımına göre düzenlenirse

$$Alan = r . dx_2 . (r . dx_1) = r^2 . dx_2 . dx_1$$

olarak elde edilir.

3.3 Kinetik Enerji

3.3.1 Kiriş İçin Kinetik Enerji

Kiriş için kinetik enerji ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{dW(X_1, t)}{dt} \right)^2 dV \tag{3.24}$$

$$W(X_1, t) = W(X_1) . e^{i\omega t}$$

Hacme göre integrasyon işlemi yapılırsa kinetik enerji denklemi

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{dW(X_1, t)}{dt} \right)^2 dX_2 dX_3 dX_1$$

$$T = \frac{1}{2} \rho b h \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{dW(X_1, t)}{dt} \right)^2 dX_1$$

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{dW(X_1, t)}{dt} \right)^2 dX_1$$

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{W(X_1) \cdot e^{i\omega t}}{dt} \right)^2 dX_1$$

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\omega W(X_1) \cdot e^{i\omega t} \right)^2 dX_1 \quad (3.25)$$

olarak elde edilir.

Boyutsuz ifadeler $x_1 = X_1 / a$, $dx_1 = dX_1 / a$, $w(x_1, x_2) = W(X_1, X_2) / a$ olarak tanımlanmıştır.

Boyutsuz ifadeler kullanılarak maksimum kinetik enerji izleyen şekilde elde edilir:

$$T = \frac{\rho A a^3}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \omega^2 w^2 dx_1 \quad (3.26)$$

Buradaki ρ birim hacim kütlelerini, ω doğal frekansı göstermektedir.

3.3.2 Ortotrop Plak İçin Kinetik Enerji

Boyutlu büyüklüklerle plak için kinetik enerji ifadesi

$$T = \frac{\rho t \omega^2}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} W^2 dX_1 dX_2 \quad (3.27)$$

şeklinde verilmiştir, (Szilard, 1974). Boyutsuz büyükler burada da kullanılırsa kinetik enerji bu durumda

$$T = \frac{a^3 b \rho t \omega^2}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w^2 dx_1 dx_2 \quad (3.28)$$

şeklinde elde edilir. Denklemlerde ρ plak birim hacim kütlelerini, ω plak doğal frekansı, t plak kalınlığını göstermektedir.

3.3.3 Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk İçin Kinetik Enerji

Orta yüzeyi birim alanlı olan daireSEL silindirik bir kabuk parçası için kinetik enerji bağıntısı izleyen şekilde verilir:

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[\left(\frac{dU}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dt} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{X_3}{r} \right) dX_3 \quad (3.29)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [U^2 + V^2 + W^2] \left(1 - \frac{X_3}{r} \right) dX_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 [U^2 + V^2 + W^2] \left(X_3 - \frac{X_3^2}{2r} \right) \Bigg|_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 [U^2 + V^2 + W^2] \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8r} \right) - \left(\left(-\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8r} \right) \right)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 [U^2 + V^2 + W^2] t$$

Elde edilen bağıntıda görüldüğü üzere $\left(1 - \frac{X_3}{r} \right)$ çarpanının herhangi bir etkisi mevcut değildir. Orta yüzeyi birim alanlı olan bir kabuk paçası için bulunan bu ifadedeki U, V, W yer değiştirmeleri boyutsuz hale getirelecektir. Boyutsuz ifadeler $u = U/r, v = V/r, w = W/r$ olarak tanımlanmıştır. Boyutsuz ifadeler kullanılıp kinetik enerji yeniden düzenlenirse aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho t \omega^2 r^2 [u^2 + v^2 + w^2] \quad (3.30)$$

3.4 Ritz Metodu

Bir varyasyon problemi şeklinde ifade edilebilen fizik ve teknik problemlerinin analitik çözümlerinde, Euler diferansiyel denklemini çözmek ve bulunmuş bu çözümü sınır şartlarına uygun hale getirmek bir çok güçlükler doğurmakta ve bu, sadece en basit hallerde kesin olarak mümkün olmaktadır. Bu sebeple, ortaya çıkan diferansiyel denklemin bu sınır değer problemini, yaklaşık olarak çözmek mümkün olabilir. Diğer taraftan bir varyasyon probleminde, Euler diferansiyel denklemi üzerinden dolaşmaksızın, doğrudan çözüm yapılabilir. Bu, varyasyon hesabının direkt metotlarından biri olan Ritz metodu ile gerçekleştirilebilir. Söz konusu metod basit bir varyasyon problemi üzerinde uygulanarak

açıklanabilir. a ve b noktalarında sınır şartlarını sağlayan bir $x_2(x_1)$ fonksiyonunun belirlenmesi isteniyor. Öyle ki, bu fonksiyon

$$F < x_2 > = \int_a^b f(x_1, x_2, x_2') dx \quad (3.31)$$

integralini ekstremum yapsın. Burada diferansiyel ve integral denklemlerde olduğu gibi, aranan fonksiyonu bir seriye açma şekli düşünülebilir. Yalnız bu amaçla bir kuvvet serisi veya Fourier açılımı yapmaktansa, problem için uygun olan fonksiyonların seçilmesine çalışılacaktır. Bunun için tek ve yeter şart olarak bu fonksiyonların problemin sınır şartlarını gerçeklemesi aranacaktır. Bu duruma göre aranan $x_2(x_1)$ fonksiyonu, aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$x_{2_n}(x_1) = c_1\varphi_1(x_1) + c_2\varphi_2(x_1) + \dots + c_n\varphi_n(x_1) \quad (3.32)$$

burada $\varphi_i(x_1)$ ler, geometrik sınır şartlarını sağlayan fakat bunun haricinde tamamen keyfi olan fonksiyonlar ve c_i ler de aranan sabitlerdir. $x_{2_n}(x_1)$ için kabul edilen bu ifade $F < x_2 >$ de yerine yazılacak olursa sadece c_i lerin bir fonksiyonu olan

$$F(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = \int_a^b f[x_1, x_{2_n}(x_1), x_{2_n}'(x_1)] dx_1 \quad (3.33)$$

elde edilir. Eğer F yi ekstremum yapan c_i lerin değerleri aranıyorsa F nin c_i lere göre kısmi türevleri sıfır olmak zorundadır.

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial c_n} = 0 \quad (3.34)$$

Bu denklemlerden elde edilen c_i değerleri $x_{2_n}(x_1)$ ifadesinde yerine yazılacak olursa aranan fonksiyon bulunmuş olur. Burada $x_{2_n}(x_1)$ fonksiyonundaki terim sayısı arttırılırsa elde edilen $F < x_2 >$ değeri genelde gerçek sonuca yaklaşır.

Bu çalışmada varyasyon hesabı yapılacak büyüklükler u, v, w yer değiştirme fonksiyonlarıdır. Bu yer değiştirme fonksiyonlarının tanımlanması gereklidir. Bu tanımlama yapılırken seçilen yer değiştirme fonksiyonlarının geometrik sınır şartlarını gerçeklemesi şartı aranır. Ancak bu çalışmada geometrik sınır şartlarının sağlanması Lagrange çarpanları kullanılarak

gerçekleştirilmiştir. Böylelikle herhangi bir koşul gözetmeksizin $f(x_3) = a_i \cdot x_3^i$ şeklindeki polinomlar kullanılabilir. Bu fonksiyon içindeki a_i katsayıları başlangıçta bilinmemektedir. Toplam potansiyel enerji bu yer değiştirme denklemi kullanarak tanımlanırsa $U = U(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ şeklini alır. Daha sonra minimum şartı kullanılırsa $\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0$ şeklinde bilinmeyen katsayı sayısınınca denklem elde edilir. Elde edilen denklem takımı kullanılarak bilinmeyen katsayılar bulunabilir. Çözümde kullanılan yer değiştirme fonksiyonu her problem için ayrı ayrı tanımlanmıştır.

3.5 Lagrange Çarpanları

Kısıtlılıklar göz önüne alınarak lineer eşitliklerin minimizasyonu :

Yer değiştirme fonksiyonları belirlenirken, fonksiyonların geometrik sınır koşullarını sağlaması gerekir. Bu şarta haiz bir fonksiyon kolaylıkla belirlenebilir. Ancak şu unutulmamalıdır ki yer değiştirme fonksiyonu sınır şartlarına bağımlıdır ve sınır şartları değiştiği zaman yer değiştirme fonksiyonu artık kullanılamaz hale gelecektir. Bu durumda yeni sınır koşulları için yer değiştirme fonksiyonu belirlenmesi gerekecektir. Lagrange çarpanları burada önem kazanmaktadır. Lagrange çarpanları kullanılarak mesnet şartlarının değişimi ve mesnet yerlerinin değişimi çok rahatlıkla incelenebilir.

Fonksiyonellerin minimizasyonu ikincil (subsidiary) koşulları ihtiva edebilir. Bunlara kısıtlılık koşulları adı verilir.

Bir fonksiyonelin verilen kısıtlılık koşulları altında minimumunu bulma problemi göz önüne alınsın. Fonksiyonel

$$I(w) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, w, w') dt \quad (3.35)$$

ve kısıtlılık koşulu

$$G(w, w') = 0 \quad (3.36)$$

olsun. İlave olarak w problemin belirli sınır koşullarını (geometrik sınır koşullarını) sağlamalıdır. Kısıtlı minimizasyon probleminde kabul edilebilir fonksiyonlar belirlenmiş sınır koşullarını sağlamalı, kısıtlılık koşullarını sağlamalı, yeteri derecede sürekli olmalıdır. Ayrıca, kabul edilebilir varyasyonlar kısıtlılık koşulları bozulmayacak şekilde olmalıdır.

Burada lineer eşitlik kısıtlılıkları ile birlikte bir fonksiyonelin minimizasyonu için Lagrange çarpanları metodu kullanılacaktır. Lagrange çarpanları metodu, w ve β nın, değiştirilmiş fonksiyonelin birinci varyasyonunun sıfıra eşitlenmesiyle çözüm elde edilmesi şeklinde göz önüne alınabilir. Değiştirilmiş fonksiyonel

$$I^*(w, \beta) = I(w) + \int_{t_1}^{t_2} \beta_k G_k(w, w') dt$$

$$I^*(w, \beta) = \int_{t_1}^{t_2} \{L(t, w, w') + \beta_k G_k(w, w')\} dt \quad (3.37)$$

olmaktadır. Burada β_k nokta mesnetlerdeki reaksiyon kuvvetleri olup, $\beta_k G_k(w, w')$ ise göz önüne alınan andaki mesnet kuvvetlerine ilişkin potansiyel olarak isimlendirilebilir. Buradaki problem için $G(w, w')$ fonksiyonu

$G(w, w') = \beta_k w_k(x_{1k}, x_{2k})$ $k = 1, 2, 3, 4$ olarak tariflenebilir. Bu durumda I^* fonksiyonelinin minimizasyonu için

$$\frac{\partial(L + \beta_k \cdot w_k)}{\partial A_{mn}} \quad (3.38)$$

ile birlikte

$$\frac{\partial(L + \beta_k \cdot w_k)}{\partial \beta_k} \quad (3.39)$$

denklemlerinden yararlanılır.

Özetle, yer değiştirme fonksiyonu serbest eleman için, yani herhangi bir kısıtlayıcı sınır şartı aranmayan bir eleman için belirlenir ve seçilen bu fonksiyon için çözüme gidilebilir. Bu çalışmada kenarlarda nokta mesnet kullanılarak, bu noktalardaki yer değiştirmeler tutulmuştur. Bu sebeple bu noktalardaki reaksiyon kuvvetlerinin yapmış olduğu işin sıfır olması gerekir. Bu noktalar tutulu olamadığı zaman söz konusu noktaların yapacağı düşey deplasman serbest eleman için seçilen yer değiştirme fonksiyonunun o noktadaki değerine eşittir. Bu değer bir β_k değeri ile çarpılıp mevcut fonksiyonele eklenirse tutulu bir sistem için değiştirilmiş fonksiyonel elde edilebilir.

4. KURAMSAL ÇALIŞMA

4.1 Kiriş İçin Kuramsal Çalışma

Değiştirilmiş fonksiyonelin minimizasyonundan

$$\frac{\partial(U-T+G)}{\partial A_i} = 0, \quad \frac{\partial(U-T+G)}{\partial \beta_k} = 0 \quad (4.1)$$

olmalıdır. U iç potansiyel enerji, T kinetik enerji, G mesnet kuvvetlerine ilişkin potansiyel olarak tanımlanır. Kiriş için $i = 0, 1, 2, \dots, m$ $k = 1, 2$ olmaktadır.

G mesnet kuvvetlerine ilişkin potansiyel (kısıtlılık koşulu)

$$G = \beta_1 \cdot w(-0.5) + \beta_2 \cdot w(0.5)$$

olarak tanımlanmıştır. Elde edilen enerji bağıntıları yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial \left[\frac{EI}{2a} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2 w}{dx_1^2} \right)^2 dx_1 - \frac{\rho A a^3}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \omega^2 w^2 dx_1 + \bar{\beta}_1 \cdot w(-0.5) + \bar{\beta}_2 \cdot w(0.5) \right]}{\partial A_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \left[\frac{EI}{2a} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2 w}{dx_1^2} \right)^2 dx_1 - \frac{\rho A a^3}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \omega^2 w^2 dx_1 + \bar{\beta}_1 \cdot w(-0.5) + \bar{\beta}_2 \cdot w(0.5) \right]}{\partial \beta_k} = 0 \quad (4.2)$$

bağıntıları elde edilir. İfadeyi daha sade hale getirmek için bağıntılardaki tüm terimler $\frac{2a}{EI}$ ile

çarpılır, $\frac{\rho A a^4 \omega^2}{EI} = \lambda^2$ ve $\bar{\beta}_k \frac{2a}{EI} = \beta_k$ dönüşümlerini yapılırsa

$$\frac{\partial \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2 w}{dx_1^2} \right)^2 dx_1 - \lambda^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w^2 dx_1 + \beta_1 \cdot w(-0.5) + \beta_2 \cdot w(0.5) \right]}{\partial A_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2 w}{dx_1^2} \right)^2 dx_1 - \lambda^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w^2 dx_1 + \beta_1 \cdot w(-0.5) + \beta_2 \cdot w(0.5) \right]}{\partial \beta_k} = 0 \quad (4.3)$$

bağıntıları elde edilir.

Sayısal çözümleme yapmak için seçilen yer değiştirme fonksiyonu $m = 2$ için

$$w = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2$$

şeklinde üç terimli bir polinom alınacaktır. Terim sayısını arttırmanın sonuçları daha da hassas hale getireceği açıktır. Ancak bu durumda işlem yükü artacaktır. Burada seçilen w fonksiyonu yerine yazılır ve işleme izleyen şekilde devam edilirse

$$\frac{\partial \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\frac{d^2(A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2)}{dx_1^2} \right]^2 - \lambda^2 (A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2)^2 \right\} dx_1}{\partial A_i} +$$

$$\frac{\partial \left[\beta_1 \cdot (A_0 + A_1(-0.5) + A_2(-0.5)^2) + \beta_2 \cdot (A_0 + A_1(0.5) + A_2(0.5)^2) \right]}{\partial A_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\frac{d^2(A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2)}{dx_1^2} \right]^2 - \lambda^2 (A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2)^2 \right\} dx_1}{\partial \beta_k} +$$

$$\frac{\partial \left[\beta_1 \cdot (A_0 + A_1(-0.5) + A_2(-0.5)^2) + \beta_2 \cdot (A_0 + A_1(0.5) + A_2(0.5)^2) \right]}{\partial \beta_k} = 0$$

$$\frac{\partial \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ (2A_2)^2 - \lambda^2 (A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2)^2 \right\} dx_1 + \beta_1 \cdot (A_0 + A_1(-0.5) + A_2(-0.5)^2) + \beta_2 \cdot (A_0 + A_1(0.5) + A_2(0.5)^2) \right]}{\partial A_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ (2A_2)^2 - \lambda^2 (A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2)^2 \right\} dx_1 + \beta_1 \cdot (A_0 + A_1(-0.5) + A_2(-0.5)^2) + \beta_2 \cdot (A_0 + A_1(0.5) + A_2(0.5)^2) \right]}{\partial \beta_k} = 0$$

şeklinde bağıntılar elde edilir. Çözüm için A_i ve β_k bilinmeyen katsayılarına göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial A_0} = 0 &\Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -\lambda^2 2(A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2)^2 dx_1 + \beta_1 + \beta_2 = 0 \\
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial A_1} = 0 &\Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -\lambda^2 2(A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2)^2 x_1 dx_1 + (-0.5) \cdot \beta_1 + (0.5) \cdot \beta_2 = 0 \\
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial A_2} = 0 &\Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 8A_2 - \lambda^2 2(A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2)^2 x_1^2 dx_1 + (-0.5)^2 \cdot \beta_1 + (0.5)^2 \cdot \beta_2 = 0 \quad (4.4) \\
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial \beta_1} = 0 &\Rightarrow (A_0 + A_1(-0.5) + A_2(-0.5)^2) = 0 \\
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial \beta_2} = 0 &\Rightarrow (A_0 + A_1(0.5) + A_2(0.5)^2) = 0
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerdeki integrasyon işlemleri yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial A_0} = 0 &\Rightarrow -\lambda^2 2(A_0 x_1 + \frac{A_1 x_1^2}{2} + \frac{A_2 x_1^3}{3}) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\lambda^2 2(A_0 + \frac{A_2 2}{24}) + \beta_1 + \beta_2 = 0 \\
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial A_1} = 0 &\Rightarrow -\lambda^2 2(A_0 \frac{x_1^2}{2} + A_1 \frac{x_1^3}{3} + A_2 \frac{x_1^4}{4}) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\lambda^2 2(A_1 \frac{2}{24}) + (-0.5) \cdot \beta_1 + (0.5) \cdot \beta_2 = 0 \\
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial A_2} = 0 &\Rightarrow 8A_2 x - \lambda^2 2(A_0 \frac{x_1^3}{3} + A_1 \frac{x_1^4}{4} + A_2 \frac{x_1^5}{5}) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 8A_2 - \lambda^2 2(A_0 \frac{2}{24} + A_2 \frac{1}{80}) + (-0.5)^2 \cdot \beta_1 + 0.5^2 \beta_2 = 0 \\
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial \beta_1} = 0 &\Rightarrow A_0 - 0.5A_1 + 0.25A_2 = 0 \\
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial \beta_2} = 0 &\Rightarrow A_0 + 0.5A_1 + 0.25A_2 = 0
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. λ^2 köklerinin bulunabilmesi için yukarıdaki ifadeler

$$\begin{bmatrix} -2\lambda^2 & 0 & \frac{-\lambda^2}{6} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-\lambda^2}{6} & 0 & -1/2 & 1/2 \\ \frac{-\lambda^2}{6} & 0 & \left(8 - \frac{\lambda^2}{40}\right) & 1/4 & 1/4 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

olarak matris formunda düzenlenir. A_i , β_k bilinmeyen katsayılarının hepsinin birden sıfır etmesi mümkün olmadığından, trivial olmayan bir çözüm için katsayılar matrisinin determinanı sıfır olmalıdır. Matrisin determinanı sıfıra eşitlenirse (4.3) denklemini

gerçekleyen λ^2 kökleri bulunabilir. Sonraki adımda bulunan λ_i^2 kökleri sırasıyla (4.3) denkleminde yerine yazılır, katsayılarından biri için belli bir değer seçilirse A_i, β_j bilinmeyenleri seçilen değere bağlı olarak elde edilir. Sonuçta (4.3) deki katsayılar matrisinin determinantı alınır

$$-\frac{\lambda^2}{15} + 8 = 0$$

$$\lambda^2 = 120$$

$$\lambda = \pm 10.9545$$

sonucu bulunur. Buradaki eksi işaretli kökün herhangi bir fiziksel anlamı yoktur. Sonuçta $\lambda = 10.955$ bulunur. Üç terim kullanılarak bulunan bu değer kökün gerçek değeri olan 9.8696'ya oldukça yakındır. Terim sayısını arttırdıkça bu gerçek değere daha da çok yaklaşılır. Çizelge 1 de çözüme esas alınan denklemdaki terim sayısına göre elde edilen sonuçların karşılaştırılması görülmektedir.

Çizelge 1 Terim sayısının sonuçlar üzerindeki etkisi

Terim sayısı	Determinant boyutu	λ kökleri
3	5×5	10.9544512
4	6×6	10.9544512
5	7×7	9.8725271
6	8×8	9.8725271
7	9×9	9.8696057
8	10×10	9.8696057
16	18×18	9.8696044

Elde edilen sonuçlarda görüldüğü gibi, terim sayısının ikişer ikişer artması sonuç üzerinde etkili olmaktadır. Burada kullanılan λ değeri simetrik bir mod şekli için geçerlidir. Bu yüzden denklemden kullanılan üssü tek sayı olan terimlerin çözüme herhangi bir etkisi olmamaktadır. Simetrik modlar için bu değerler denklemden çıkarılırsa işlem hacmi azalmakta ayrıca yakınsama daha hızlı olmaktadır. Bu durumda kullanılan yer değiştirme fonksiyonu $A_i x_i^i$, $i = 0, 2, 4, 6, \dots$ şeklinde olacaktır. Antisimetrik mod değerleri için yer değiştirme fonksiyonu $A_i x_i^i$, $i = 1, 3, 5, 7, \dots$ şeklini alır.

4.2 Ortotrop Plak İçin Kuramsal Çalışma

Plakta sayısal çözümleme yapmak için seçilen yer değiştirme fonksiyonu

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^M A_{mn} x_1^m x_2^n \quad (4.6)$$

olarak alınmıştır, (Narita, 1984). Değiştirilmiş fonksiyonelin minimizasyonundan,

$$\frac{\partial(U - T + G)}{\partial A_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial(U - T + G)}{\partial \beta_k} = 0 \quad (4.7)$$

olmalıdır. Burada U iç potansiyel enerji, T kinetik enerji, G mesnet kuvvetlerine ilişkin potansiyel (kısıtlılık koşulu) olmaktadır.

G mesnet kuvvetlerine ilişkin potansiyel (kısıtlılık koşulu)

$$G = \beta_1 \cdot w(-0.5, -0.5) + \beta_2 \cdot w(0.5, -0.5) + \beta_3 \cdot w(-0.5, 0.5) + \beta_4 \cdot w(0.5, 0.5)$$

olarak tanımlanmıştır. Elde edilen enerji ifadelerini denklemlerde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[\frac{D_{11}}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \frac{2\nu_{21}}{\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{e}{\alpha^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{4D_{66}}{\alpha D_{11}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 - \frac{a^3 b \rho t \omega^2}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w^2 dx_1 dx_2 \right]}{\partial A_{mn}} \\ & + \frac{\bar{\beta}_1 \cdot w(-0.5, -0.5)}{\partial A_{mn}} + \frac{\bar{\beta}_2 \cdot w(0.5, -0.5)}{\partial A_{mn}} + \frac{\bar{\beta}_3 \cdot w(-0.5, 0.5)}{\partial A_{mn}} + \frac{\bar{\beta}_4 \cdot w(0.5, 0.5)}{\partial A_{mn}} = 0 \\ & \frac{\partial \left[\frac{D_{11}}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \frac{2\nu_{21}}{\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{e}{\alpha^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{4D_{66}}{\alpha D_{11}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 - \frac{a^3 b \rho t \omega^2}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w^2 dx_1 dx_2 \right]}{\partial \beta_k} \\ & + \frac{\bar{\beta}_1 \cdot w(-0.5, -0.5)}{\partial \beta_k} + \frac{\bar{\beta}_2 \cdot w(0.5, -0.5)}{\partial \beta_k} + \frac{\bar{\beta}_3 \cdot w(-0.5, 0.5)}{\partial \beta_k} + \frac{\bar{\beta}_4 \cdot w(0.5, 0.5)}{\partial \beta_k} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

denklemleri elde edilir. (4.8) denklemlerindeki tüm terimler $\frac{2}{D_{11} \alpha}$ ile çarpılıp, $\frac{\rho t a^4 \omega^2}{D_{11}} = \lambda^2$

ve $\bar{\beta}_k \frac{2}{D_{11} \alpha} = \beta_k$ dönüşümleri yapılırsa denklemler

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \frac{2\nu_{21}}{\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{e}{\alpha^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{4D_{66}}{\alpha^2 D_{11}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 - \lambda^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w^2 dx_1 dx_2 \right] \\
& + \frac{\beta_1 \cdot w(-0.5, -0.5)}{\partial A_{mn}} + \frac{\beta_2 \cdot w(0.5, -0.5)}{\partial A_{mn}} + \frac{\beta_3 \cdot w(-0.5, 0.5)}{\partial A_{mn}} + \frac{\beta_4 \cdot w(0.5, 0.5)}{\partial A_{mn}} = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \frac{2\nu_{21}}{\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{e}{\alpha^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{4D_{66}}{\alpha^2 D_{11}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 - \lambda^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w^2 dx_1 dx_2 \right] \\
& + \frac{\beta_1 \cdot w(-0.5, -0.5)}{\partial \beta_k} + \frac{\beta_2 \cdot w(0.5, -0.5)}{\partial \beta_k} + \frac{\beta_3 \cdot w(-0.5, 0.5)}{\partial \beta_k} + \frac{\beta_4 \cdot w(0.5, 0.5)}{\partial \beta_k} = 0 \tag{4.9}
\end{aligned}$$

şeklini alır. Kısmi türev işlemleri yapılırsa $m \times n + 4$ adet homojen denklem elde edilir. Elde edilen denklem takımı w yer değiştirme denklemleri yerlerine konulup sayısal olarak çözümlenirse λ kökleri ve β_k değerleri bulunur.

4.3 Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk İçin Kuramsal Çalışma

Kabukta sayısal çözümleme yapmak için seçilen yer değiştirme fonksiyonları

$$\begin{aligned}
u &= A_{ij} x_1^i x_2^j \\
v &= B_{ij} x_1^i x_2^j \\
w &= C_{ij} x_1^i x_2^j
\end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklindedir. Değiştirilmiş fonksiyonelin minimizasyonundan

$$\frac{\partial(U-T+G)}{\partial A_{ij}} = 0, \frac{\partial(U-T+G)}{\partial B_{ij}} = 0, \frac{\partial(U-T+G)}{\partial C_{ij}} = 0, \frac{\partial(U-T+G)}{\partial \beta_k} = 0 \tag{4.11}$$

olmalıdır. Burada, U iç potansiyel enerji, T kinetik enerji, G mesnet kuvvetlerine ilişkin potansiyel (kısıtlılık koşulu) olmaktadır.

G mesnet kuvvetlerine ilişkin potansiyel (kısıtlılık koşulu)

$$G = \beta_1.w\left(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2}\right) + \beta_2.u\left(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2}\right) + \beta_3.w\left(\frac{l}{2r}, \frac{-\theta}{2}\right) + \beta_4.u\left(\frac{l}{2r}, \frac{-\theta}{2}\right) + \beta_5.w\left(\frac{-l}{2r}, \frac{\theta}{2}\right) + \beta_6.u\left(\frac{-l}{2r}, \frac{\theta}{2}\right) \\ \beta_7.w\left(\frac{-l}{2r}, \frac{-\theta}{2}\right) + \beta_8.u\left(\frac{-l}{2r}, \frac{-\theta}{2}\right)$$

olarak tanımlanmıştır. Sonuç olarak sistemin çözümünde kullanılacak olan enerji denklemi aşağıdaki elde edilir.

$$U - T + G =$$

$$\int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2r}}^{\frac{l}{2r}} \left[\frac{1}{2} \frac{12 D_{11}}{t^2} (u'^2) + \frac{1}{2} \frac{12 D_{22}}{t^2} (2u'\dot{v}v_{12} - 2u'wv_{12} + \dot{v}^2 - 2\dot{v}w + w^2) + \frac{1}{2} \frac{12 D_{66}}{t^2} (\dot{u}^2 + 2\dot{u}v' + v'^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} D_{11} \frac{1}{r^2} (2u'w'' + w''^2) + \frac{1}{2} D_{22} \frac{1}{r^2} (2w''\dot{v}v_{12} + 2w''\ddot{w}v_{12} + 2u'\ddot{w}v_{12} - 2w''wv_{12} + \ddot{w}^2 + 2\dot{v}\ddot{w} - 2w\ddot{w}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} D_{66} \frac{1}{r^2} (3v'^2 + 4\dot{w}^2 + 2\dot{u}v' + 4\dot{u}\dot{w}' + 8v'\dot{w}') - \frac{1}{2} \rho t \omega^2 r^2 [u^2 + v^2 + w^2] \right] r^2 dx_1 dx_2 + \\ \beta_1.w\left(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2}\right) + \beta_2.u\left(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2}\right) + \beta_3.w\left(\frac{l}{2r}, \frac{-\theta}{2}\right) + \beta_4.u\left(\frac{l}{2r}, \frac{-\theta}{2}\right) + \beta_5.w\left(\frac{-l}{2r}, \frac{\theta}{2}\right) + \beta_6.u\left(\frac{-l}{2r}, \frac{\theta}{2}\right) + \\ \beta_7.w\left(\frac{-l}{2r}, \frac{-\theta}{2}\right) + \beta_8.u\left(\frac{-l}{2r}, \frac{-\theta}{2}\right) \quad (4.12)$$

Elde edilen (4.12) denkleminin A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} Langrange çarpanlarına göre kısmi türevleri sıfıra eşit olmalıdır. Bu ifadeler işlemlerde kolaylık olması açısından ayrı ayrı ele alınırsa

$$\frac{\partial U_n}{\partial A_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{12}{t^2} \left(D_{11} 2u' \frac{du'}{dA_{ij}} + 2D_{22}v_{12}\dot{v} \frac{du'}{dA_{ij}} - 2D_{22}v_{12}w \frac{du'}{dA_{ij}} \right) + \frac{1}{2} \frac{12 D_{66}}{t^2} \left(2\dot{u} \frac{d\dot{u}}{dA_{ij}} + 2v' \frac{d\dot{u}}{dA_{ij}} \right) \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(D_{11} 2w'' \frac{du'}{dA_{ij}} + 2D_{22}v_{12}\ddot{w} \frac{du'}{dA_{ij}} \right) + \frac{1}{2} D_{66} \frac{1}{r^2} \left(4\dot{w}' \frac{d\dot{u}}{dA_{ij}} \right) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial B_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{12}{t^2} \left(2D_{22}\dot{v} \frac{d\dot{v}}{dB_{ij}} - 2D_{22}w \frac{d\dot{v}}{dB_{ij}} + 2D_{22}v_{12}u' \frac{d\dot{v}}{dB_{ij}} \right) + \frac{1}{2} \frac{12}{t^2} D_{66} \left(2\dot{u} \frac{dv'}{dB_{ij}} + 2v' \frac{dv'}{dB_{ij}} \right) \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(2D_{22}\ddot{w} \frac{d\dot{v}}{dB_{ij}} + 2D_{22}v_{12}w'' \frac{d\dot{v}}{dB_{ij}} \right) + \frac{1}{2} D_{66} \frac{1}{r^2} \left(6v' \frac{dv'}{dB_{ij}} + 8\dot{w}' \frac{dv'}{dB_{ij}} + 2\dot{u} \frac{dv'}{dB_{ij}} \right) \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{11}}{\partial C_{ij}} = & \frac{1}{2} \frac{12}{t^2} \left(-2 D_{22} \dot{v} \frac{dw}{dC_{ij}} - 2 D_{22} v_{12} u' \frac{dw}{dC_{ij}} + 2 D_{22} w \frac{dw}{dC_{ij}} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left[2 D_{11} u' \frac{dw''}{dC_{ij}} + 2 D_{11} w'' \frac{dw''}{dC_{ij}} \right. \\
& + 2 D_{22} \ddot{w} \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} - 2 D_{22} \left(w \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} + \ddot{w} \frac{dw}{dC_{ij}} \right) + 2 D_{22} \dot{v} \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} + 2 D_{22} v_{12} \dot{v} \frac{dw''}{dC_{ij}} + 2 D_{22} v_{12} \left(\ddot{w} \frac{dw''}{dC_{ij}} + w'' \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} \right) \\
& \left. + 2 D_{22} v_{12} u' \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} - 2 D_{22} v_{12} \left(w \frac{dw''}{dC_{ij}} + w'' \frac{dw}{dC_{ij}} \right) \right] + \frac{1}{2} D_{66} \frac{1}{r^2} \left(4 \dot{u} \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} + 8 v' \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} + 8 \dot{w}' \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} \right)
\end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial A_{ij}} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho h r^2 2u \frac{\partial u}{\partial A_{ij}} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial B_{ij}} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho h r^2 2v \frac{\partial v}{\partial B_{ij}} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho h r^2 2w \frac{\partial w}{\partial A_{ij}} \quad (4.18)$$

şeklinde elde edilir. İfadeler birleştirilirse A_{ij} ye göre kısmi türevden

$$\frac{\partial(U - T + G)}{\partial A_{ij}} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2r}}^{\frac{l}{2r}} \left[\frac{1}{2} \frac{12}{t^2} \left(D_{11} 2u' \frac{du'}{dA_{ij}} + 2 D_{22} v_{12} \dot{v} \frac{du'}{dA_{ij}} - 2 D_{22} v_{12} w \frac{du'}{dA_{ij}} \right) + \frac{1}{2} \frac{12 D_{66}}{t^2} \left(2 \dot{u} \frac{d\dot{u}}{dA_{ij}} + 2 v' \frac{d\dot{u}}{dA_{ij}} \right) \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(D_{11} 2w'' \frac{du'}{dA_{ij}} + 2 D_{22} v_{12} \ddot{w} \frac{du'}{dA_{ij}} \right) + \frac{1}{2} D_{66} \frac{1}{r^2} \left(4 \dot{w}' \frac{d\dot{u}}{dA_{ij}} \right) - \left. \left(\frac{1}{2} \omega^2 \rho h r^2 2u \frac{du}{dA_{ij}} \right) \right] r^2 dx_1 dx_2 \\
& + \frac{\beta_2 u(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dA_{ij}} + \frac{\beta_4 u(\frac{l}{2r}, -\frac{\theta}{2})}{dA_{ij}} + \frac{\beta_6 u(\frac{-l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dA_{ij}} + \frac{\beta_8 u(\frac{-l}{2r}, -\frac{\theta}{2})}{dA_{ij}} = 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki 1/2 ortak çarpanı sadeleştirilir ve ifade $1/D_{11}$ le çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2r}}^{\frac{l}{2r}} \left[\frac{12 r^2}{t^2} \left(2u' \frac{du'}{dA_{ij}} + 2 e v_{12} \dot{v} \frac{du'}{dA_{ij}} - 2 e v_{12} w \frac{du'}{dA_{ij}} \right) + \frac{12 r^2}{t^2} \frac{D_{66}}{D_{11}} \left(2 \dot{u} \frac{d\dot{u}}{dA_{ij}} + 2 v' \frac{d\dot{u}}{dA_{ij}} \right) \right. \\
& + \left(2 w'' \frac{du'}{dA_{ij}} + 2 e v_{12} \ddot{w} \frac{du'}{dA_{ij}} \right) + \frac{D_{66}}{D_{11}} \left(4 \dot{w}' \frac{d\dot{u}}{dA_{ij}} \right) - \left. \left(\frac{1}{D_{11}} \omega^2 \rho h r^4 2u \frac{du}{dA_{ij}} \right) \right] dx_1 dx_2 \\
& + \frac{\beta_2 u(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dA_{ij}} + \frac{\beta_4 u(\frac{l}{2r}, -\frac{\theta}{2})}{dA_{ij}} + \frac{\beta_6 u(\frac{-l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dA_{ij}} + \frac{\beta_8 u(\frac{-l}{2r}, -\frac{\theta}{2})}{dA_{ij}} = 0 = 0
\end{aligned} \quad (4.19)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıda görüldüğü üzere $1/r^2$ li terimler sadeleşir, ayrıca $1/t^2$ li ifadeler r^2 ile çarpılarak r^2/t^2 boyutsuz ifadesi elde edilir, bunlara ilaveten $\frac{D_{22}}{D_{11}} = e$

kısaltması yapılabilir. Ayrıca $\frac{D_{66}}{D_{11}}$ teriminin de boyutsuz olduğu görülmektedir. B_{ij} ye göre kısmi türevden

$$\frac{\partial(U-T+G)}{\partial B_{ij}} = 0$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2r}}^{\frac{l}{2r}} \left[\frac{1}{2} \frac{12}{t^2} \left(2D_{22}\dot{v} \frac{dv}{dB_{ij}} - 2D_{22}w \frac{dv}{dB_{ij}} + 2D_{22}v_{12}u' \frac{dv}{dB_{ij}} \right) + \frac{1}{2} \frac{12}{t^2} D_{66} \left(2\dot{u} \frac{dv'}{dB_{ij}} + 2v' \frac{dv'}{dB_{ij}} \right) \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(2D_{22}\ddot{w} \frac{dv}{dB_{ij}} + 2D_{22}v_{12}w'' \frac{dv}{dB_{ij}} \right) + \frac{1}{2} D_{66} \frac{1}{r^2} \left(6v' \frac{dv'}{dB_{ij}} + 8\dot{w}' \frac{dv'}{dB_{ij}} + 2\dot{u} \frac{dv'}{dB_{ij}} \right) \\ & \left. - \left(\frac{1}{2} \omega^2 \rho h r^2 2v \frac{dv}{dB_{ij}} \right) \right] r^2 dx_1 dx_2 = 0 \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bir önceki türev alma işlemlerindeki düzenlemeler tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2r}}^{\frac{l}{2r}} \left[\frac{12r^2}{t^2} \left(2e\dot{v} \frac{dv}{dB_{ij}} - 2ew \frac{dv}{dB_{ij}} + 2ev_{12}u' \frac{dv}{dB_{ij}} \right) + \frac{12r^2}{t^2} \frac{D_{66}}{D_{11}} \left(2\dot{u} \frac{dv'}{dB_{ij}} + 2v' \frac{dv'}{dB_{ij}} \right) \right. \\ & + \left(2e\ddot{w} \frac{dv}{dB_{ij}} + 2ev_{12}w'' \frac{dv}{dB_{ij}} \right) + \frac{D_{66}}{D_{11}} \left(6v' \frac{dv'}{dB_{ij}} + 8\dot{w}' \frac{dv'}{dB_{ij}} + 2\dot{u} \frac{dv'}{dB_{ij}} \right) \\ & \left. - \left(\frac{1}{D_{11}} \omega^2 \rho h r^4 2v \frac{dv}{dB_{ij}} \right) \right] dx_1 dx_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

C_{ij} ye göre kısmi türevden

$$\frac{\partial(U-T+G)}{\partial C_{ij}} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2r}}^{\frac{l}{2r}} \left[\frac{1}{2} \frac{12}{t^2} \left(-2 D_{22} \dot{v} \frac{dw}{dC_{ij}} - 2 D_{22} v_{12} u' \frac{dw}{dC_{ij}} + 2 D_{22} w \frac{dw}{dC_{ij}} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left[2 D_{11} u' \frac{dw''}{dC_{ij}} + 2 D_{11} w'' \frac{dw''}{dC_{ij}} \right. \right. \\
& + 2 D_{22} \ddot{w} \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} - 2 D_{22} \left(w \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} + \ddot{w} \frac{dw}{dC_{ij}} \right) + 2 D_{22} \dot{v} \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} + 2 D_{22} v_{12} \dot{v} \frac{dw''}{dC_{ij}} + 2 D_{22} v_{12} \left(\ddot{w} \frac{dw''}{dC_{ij}} + w'' \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} \right) \\
& \left. \left. + 2 D_{22} v_{12} u' \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} - 2 D_{22} v_{12} \left(w \frac{dw''}{dC_{ij}} + w'' \frac{dw}{dC_{ij}} \right) \right] + \frac{1}{2} D_{66} \frac{1}{r^2} \left(4 \dot{u} \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} + 8 v' \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} + 8 \dot{w}' \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{1}{2} \omega^2 \rho h r^2 2 w \frac{dw}{dC_{ij}} \right) \right] r^2 dx_1 dx_2 + \frac{\beta_1 \cdot w(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dC_{ij}} + \frac{\beta_3 \cdot w(\frac{l}{2r}, -\frac{\theta}{2})}{dC_{ij}} + \frac{\beta_5 \cdot w(-\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dC_{ij}} + \frac{\beta_7 \cdot w(-\frac{l}{2r}, -\frac{\theta}{2})}{dC_{ij}} = 0
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bir önceki türev alma işlemlerindeki düzenlemeler tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2r}}^{\frac{l}{2r}} \left[\frac{12 r^2}{t^2} \left(-2 e \dot{v} \frac{dw}{dC_{ij}} - 2 e v_{12} u' \frac{dw}{dC_{ij}} + 2 e w \frac{dw}{dC_{ij}} \right) + \left[2 u' \frac{dw''}{dC_{ij}} + 2 w'' \frac{dw''}{dC_{ij}} + 2 e \ddot{w} \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} \right. \right. \\
& - 2 e \left(w \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} + \ddot{w} \frac{dw}{dC_{ij}} \right) + 2 e \dot{v} \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} + 2 e v_{12} \dot{v} \frac{dw''}{dC_{ij}} + 2 e v_{12} \left(\ddot{w} \frac{dw''}{dC_{ij}} + w'' \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} \right) \\
& \left. \left. + 2 e v_{12} u' \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} - 2 e v_{12} \left(w \frac{dw''}{dC_{ij}} + w'' \frac{dw}{dC_{ij}} \right) \right] + \frac{D_{66}}{D_{11}} \left(4 \dot{u} \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} + 8 v' \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} + 8 \dot{w}' \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{1}{D_{11}} \omega^2 \rho h r^4 2 w \frac{dw}{dC_{ij}} \right) \right] dx_1 dx_2 + \frac{\beta_1 \cdot w(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dC_{ij}} + \frac{\beta_3 \cdot w(\frac{l}{2r}, -\frac{\theta}{2})}{dC_{ij}} + \frac{\beta_5 \cdot w(-\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dC_{ij}} + \frac{\beta_7 \cdot w(-\frac{l}{2r}, -\frac{\theta}{2})}{dC_{ij}} = 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

olarak bulunur. Sonuçta (4.14), (4.15) (4.16) denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde

$$\frac{\omega^2 \rho h r^4}{D_{11}} = \lambda^2$$

olarak kısaltılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial A_{ij}} &= \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{12r^2}{t^2} \left(2u' \frac{du'}{dA_{ij}} + 2ev_{12} \dot{v} \frac{du'}{dA_{ij}} - 2ev_{12} w \frac{du'}{dA_{ij}} \right) + \frac{12r^2}{t^2} \frac{D_{66}}{D_{11}} \left(2\dot{u} \frac{du}{dA_{ij}} + 2v' \frac{du}{dA_{ij}} \right) \right. \\
&\quad + \left(2w'' \frac{du'}{dA_{ij}} + 2ev_{12} \ddot{w} \frac{du'}{dA_{ij}} \right) + \frac{D_{66}}{D_{11}} \left(4\dot{w}' \frac{du}{dA_{ij}} \right) - \left(\lambda^2 2u \frac{du}{dA_{ij}} \right) \Big] dx_1 dx_2 \\
&\quad + \frac{\beta_2 u(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dA_{ij}} + \frac{\beta_4 u(\frac{l}{2r}, \frac{-\theta}{2})}{dA_{ij}} + \frac{\beta_6 u(\frac{-l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dA_{ij}} + \frac{\beta_8 u(\frac{-l}{2r}, \frac{-\theta}{2})}{dA_{ij}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial B_{ij}} &= \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{12r^2}{t^2} \left(2e\dot{v} \frac{dv}{dB_{ij}} - 2ew \frac{dv}{dB_{ij}} + 2ev_{12} u' \frac{dv}{dB_{ij}} \right) + \frac{12r^2}{t^2} \frac{D_{66}}{D_{11}} \left(2\dot{u} \frac{dv'}{dB_{ij}} + 2v' \frac{dv'}{dB_{ij}} \right) \right. \\
&\quad + \left(2e\ddot{w} \frac{dv}{dB_{ij}} + 2ev_{12} w'' \frac{dv}{dB_{ij}} \right) + \frac{D_{66}}{D_{11}} \left(6v' \frac{dv'}{dB_{ij}} + 8\dot{w}' \frac{dv'}{dB_{ij}} + 2\dot{u} \frac{dv'}{dB_{ij}} \right) \\
&\quad \left. - \left(\lambda^2 2v \frac{dv}{dB_{ij}} \right) \right] dx_1 dx_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(U-T+G)}{\partial C_{ij}} &= \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{12r^2}{t^2} \left(-2e\dot{v} \frac{dw}{dC_{ij}} - 2ev_{12} u' \frac{dw}{dC_{ij}} + 2ew \frac{dw}{dC_{ij}} \right) + \left[2u' \frac{dw''}{dC_{ij}} + 2w'' \frac{dw''}{dC_{ij}} + 2e\ddot{w} \frac{dw''}{dC_{ij}} \right. \right. \\
&\quad \left. - 2e \left(w \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} + \ddot{w} \frac{dw}{dC_{ij}} \right) + 2e\dot{v} \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} + 2ev_{12} \dot{v} \frac{dw''}{dC_{ij}} + 2ev_{12} \left(\ddot{w} \frac{dw''}{dC_{ij}} + w'' \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2ev_{12} u' \frac{d\ddot{w}}{dC_{ij}} - 2ev_{12} \left(w \frac{dw''}{dC_{ij}} + w'' \frac{dw}{dC_{ij}} \right) \right] + \frac{D_{66}}{D_{11}} \left(4\dot{u} \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} + 8v' \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} + 8\dot{w}' \frac{d\dot{w}'}{dC_{ij}} \right) \\
&\quad \left. - \left(\lambda^2 2w \frac{dw}{dC_{ij}} \right) \right] dx_1 dx_2 + \frac{\beta_1 w(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dC_{ij}} + \frac{\beta_3 w(\frac{l}{2r}, \frac{-\theta}{2})}{dC_{ij}} + \frac{\beta_5 w(\frac{-l}{2r}, \frac{\theta}{2})}{dC_{ij}} + \frac{\beta_7 w(\frac{-l}{2r}, \frac{-\theta}{2})}{dC_{ij}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(U-T+G)}{\partial\beta_k} = \\
& \frac{\frac{\theta}{2} \frac{l}{2r} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \int_{-\frac{l}{2r}}^{\frac{l}{2r}} \left[\frac{12}{t^2} (u'^2) + \frac{12e}{t^2} (2u'\dot{v}v_{12} - 2u'wv_{12} + \dot{v}^2 - 2\dot{v}w + w^2) + \frac{12}{t^2} \frac{D_{66}}{D_{11}} (\dot{u}^2 + 2\dot{u}v' + v'^2) \right.}{\partial\beta_k} \\
& \left. + (2u'w'' + w''^2) + e(2w''\dot{v}v_{12} + 2w''\ddot{w}v_{12} + 2u'\ddot{w}v_{12} - 2w''wv_{12} + \ddot{w}^2 + 2\dot{v}\ddot{w} - 2w\ddot{w}) \right.}{\partial\beta_k} \\
& \left. + \frac{D_{66}}{D_{11}} (3v'^2 + 4\dot{w}'^2 + 2\dot{u}v' + 4\dot{u}\dot{w}' + 8v'\dot{w}') - \lambda^2 [u^2 + v^2 + w^2] \right] dx_1 dx_2 +}{\partial\beta_k} \\
& \frac{\beta_1 \cdot w(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2}) + \beta_2 \cdot u(\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2}) + \beta_3 \cdot w(\frac{l}{2r}, -\frac{\theta}{2}) + \beta_4 \cdot u(\frac{l}{2r}, -\frac{\theta}{2}) + \beta_5 \cdot w(-\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2}) + \beta_6 \cdot u(-\frac{l}{2r}, \frac{\theta}{2}) +}{\partial\beta_k} \\
& \frac{\beta_7 \cdot w(-\frac{l}{2r}, -\frac{\theta}{2}) + \beta_8 \cdot u(-\frac{l}{2r}, -\frac{\theta}{2})}{\partial\beta_k} = 0
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bundan sonrasında sayısal çözümleme yapılarak işleme devam edilebilir.

5. SAYISAL SONUÇLAR

5.1 Kiriş İçin Sayısal Sonuçlar

Çözümde esas alınan yer değiştirme fonksiyonu $w = A_i x^i$ olarak seçilmiştir. Simetrik modlar için yapılan çözümlemede $i = 0, 2, 4, \dots$ olarak, antisimetrik modlar için $i = 1, 3, 5, \dots$ olarak alınmıştır. w fonksiyonu 8 terimli olarak alınıp problem çözülürse Çizelge 3 teki λ değerleri ve bu λ lar için mod şekilleri elde edilir. S simetrik modları, A antisimetrik modları belirtmektedir. Bulunan λ değerleri ile doğal frekanslar arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\frac{\rho A a^4 \omega^2}{EI} = \lambda^2 \quad (5.1)$$

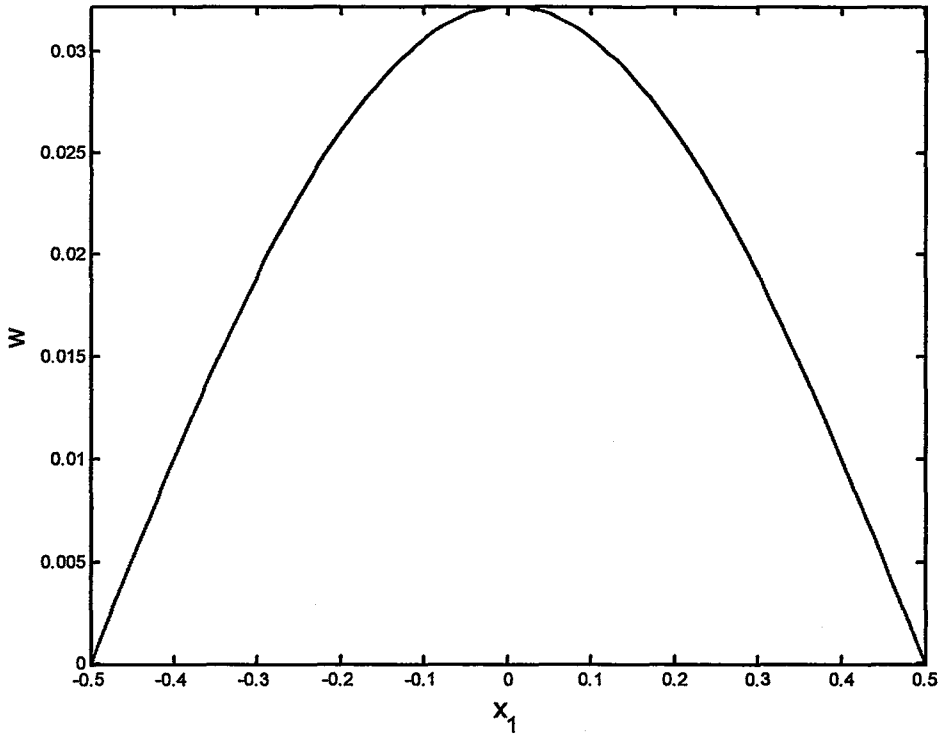
Çizelge 2 de bu çalışmada bulunan λ frekans parametreleri ile Timoshenko (1955) tarafından verilen λ değerlerinin nokta mesnetli kiriş için karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge 2 Nokta mesnetli kirişlere ait λ frekans parametresi değerlerinin kesin sonuçlarla karşılaştırılması

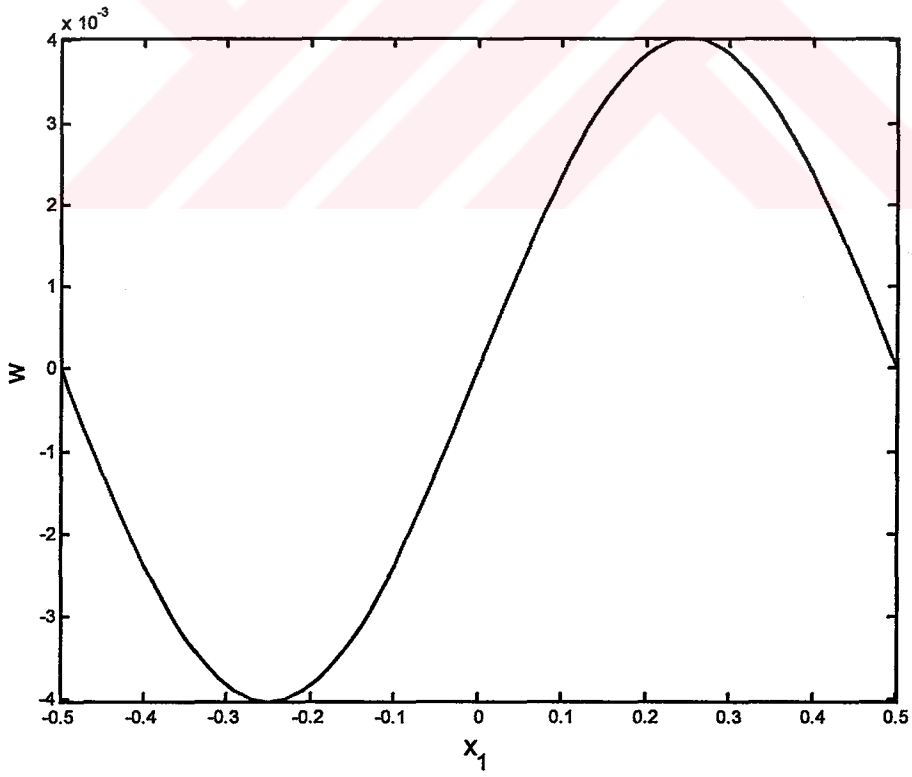
	Terim sayısı	Determinant boyutu	S-1 modu	A-1 modu	S-2 modu	A-2 modu
Sunulan Çalışma	2	4×4	10.9544512	50.1996078	-	-
	3	5×5	9.8725271	39.6455612	131.8124926	276.0221553
	4	6×6	9.8696057	39.4791336	90.3369707	164.5755286
	8	10×10	9.8696044	39.4784176	88.8264396	157.9136704
Timoshenko (1955)			9.8696044	39.4784176	88.8264396	157.9136704

Çizelge 3 Nokta mesnetli kiriş için S ve A modlarına ait λ değerleri

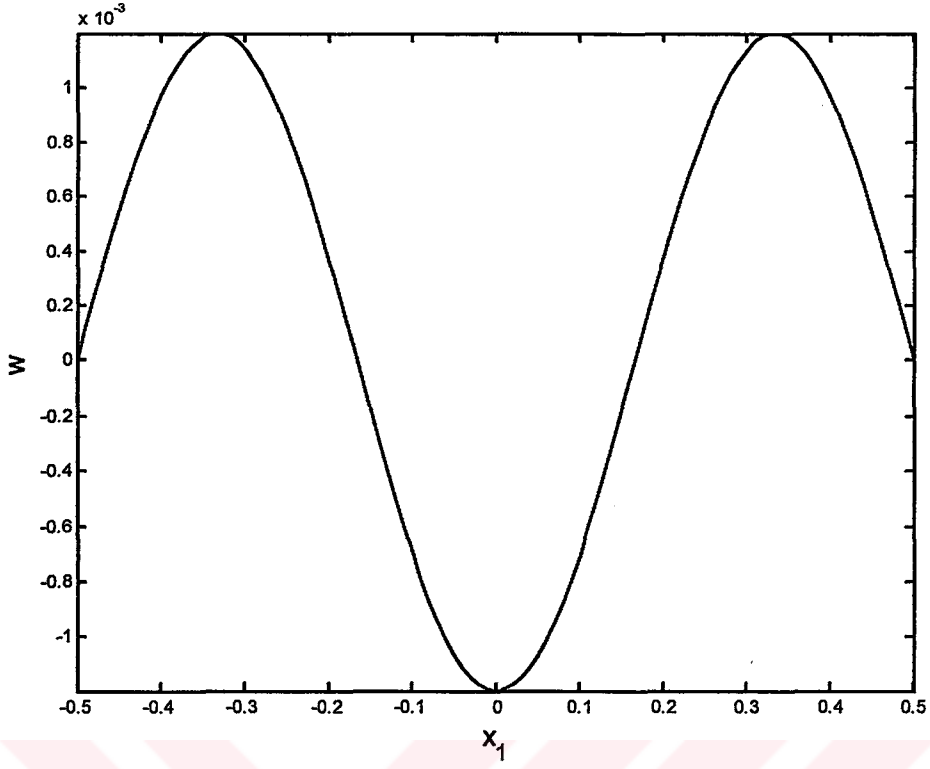
	S modu	A modu
λ	9,86960	39,47841
	88,82643	157,91367
	246,74037	355,30865
	484,30497	633,96703
	852,71802	1084,43946
	1912,77903	2453,76685
	10061,65556	12958,39826



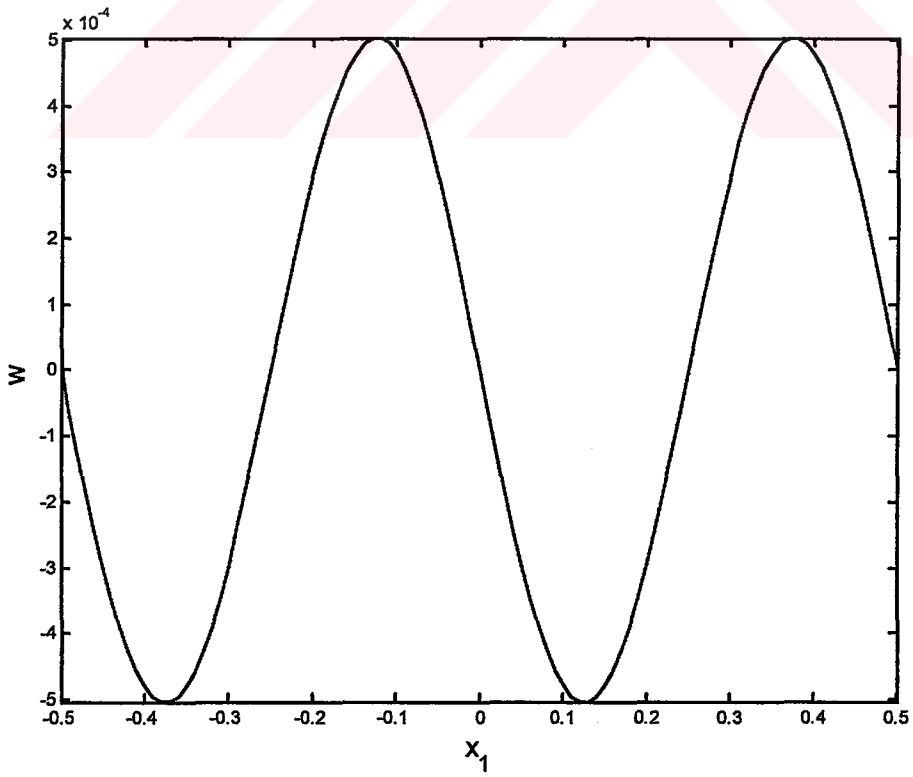
Şekil 5.1 $\lambda=9,86960$ için elde edilen *S-I* mod şekli.



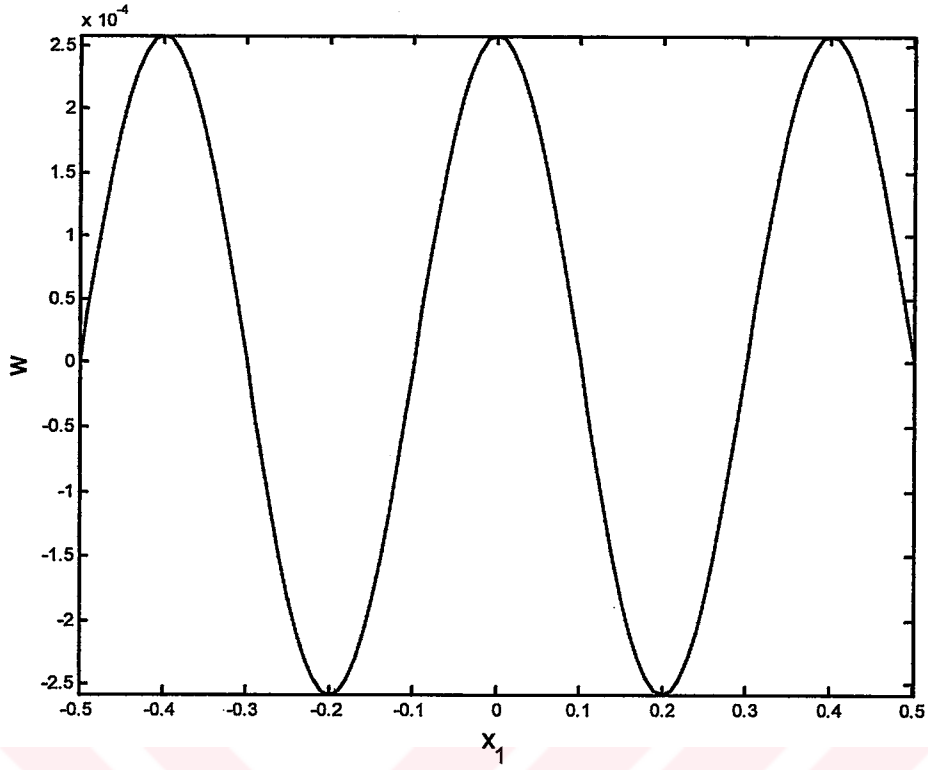
Şekil 5.2 $\lambda=39,47841$ için elde edilen *A-I* mod şekli.



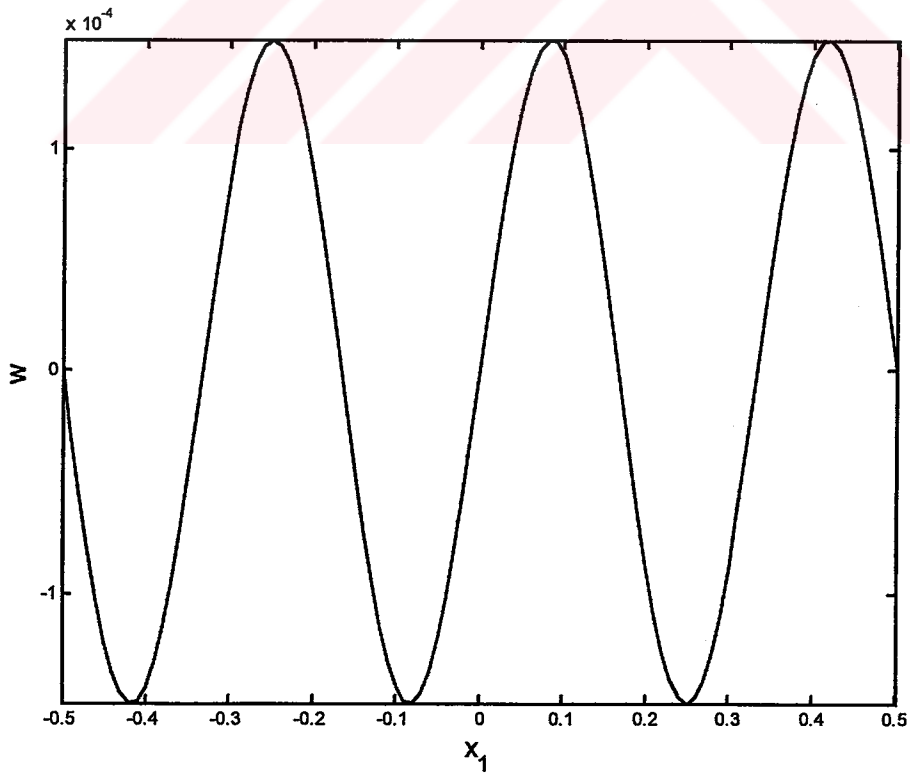
Şekil 5.3 $\lambda=88,82643$ için elde edilen S-2 mod şekli.



Şekil 5.4 $\lambda=157,91367$ için elde edilen A-2 mod şekli.



Şekil 5.5 $\lambda = 246,74037$ için elde edilen S-3 mod şekli.



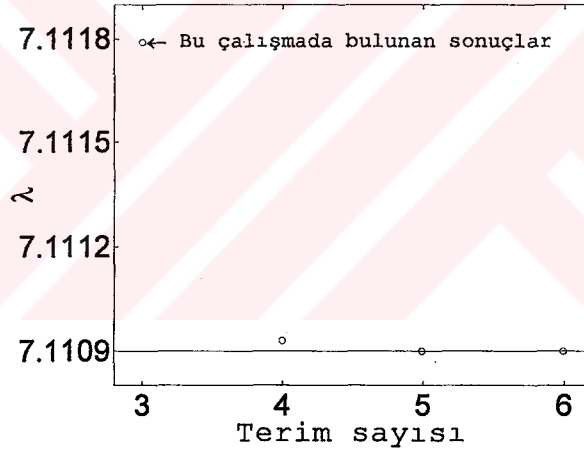
Şekil 5.6 $\lambda = 355,30865$ için elde edilen A-3 mod şekli.

5.2 Ortotrop Plak İçin Sayısal Sonuçlar

Çözümde kullanılan yer değiştirme fonksiyonu

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^M A_{mn} x_1^m x_2^n \quad (5.2)$$

şeklinde alınmıştır. Yer değiştirme fonksiyonu 5 terimli olarak alınıp problem çözümlenirse Çizelge 3 teki λ değerleri ve bu λ değerleri için mod şekilleri elde edilir. Özel ortotrop olan nokta mesnetli plakta 4 tip titreşim modu bulunmaktadır, bunlar SS, SA, AS, AA olarak gösterilirler. S simetrik, A antisimetrik anlamına gelmektedir. Frekans denklemlerindeki m ve n sayılarının tek veya çift olması mod şeklini tayin etmektedir. Örneğin SA modu x_2 eksenine göre simetrik, x_1 eksenine göre antisimetriktir. Bu yüzden SA modunda $m=0,2,4,\dots, n=1,3,5,\dots$ şeklindedir. m ve n değerleri ne kadar büyük seçilirse elde edilen sonuçlar gerçek değere o nispette yaklaşır. w denklemindeki terim sayısının artmasına göre elde edilen sonuçlar Çizelge 3 te gösterilmiştir.



Şekil 5.7 Terim sayısının sonuçlar üzerindeki etkisi

Sayısal çözümlemede G_{12}

$$G_{12} \approx \frac{E_{11} \sqrt{e}}{2(1 + \nu_{21} \sqrt{1/e})} \quad (5.3)$$

şeklinde alınmıştır, (Szilard, 1974).

Bulunan λ değerleri ile doğal frekanslar arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\frac{\rho t a^4 \omega^2}{D_{11}} = \lambda^2 \quad (5.4)$$

Çizelge 4 Nokta mesnetli kare plaklara ait λ frekans parametrelerinin bu çalışmada ve diğer çalışmalarda bulunan değerlerinin karşılaştırılması, $v_{21} = 0.3$, $\alpha = 1$, $e = 1$.

	Terim sayısı	Determinant boyutu	SS-1	SA(AS)-1	SS-2	AA-1	SS-3
Sunulan Çalışma	3×3	10×10	7.11179	15.77153	19.72570	38.45861	45.55991
	4×4	17×17	7.11093	15.77028	19.59627	38.43224	44.37619
	5×5	26×26	7.11089	15.77022	19.59614	38.43163	44.36968
	6×6	37×37	7.11088	15.77021	19.59614	38.43155	44.36961
Narita (1984)			7.11089	15.7702	19.5961	38.4316	44.3696
Venkateswara Rao et. al. (1973)			7.11088	15.7702	19.5961	-----	-----
Kerstens (1979)			7.15	15.64	19.49	38.62	43.89

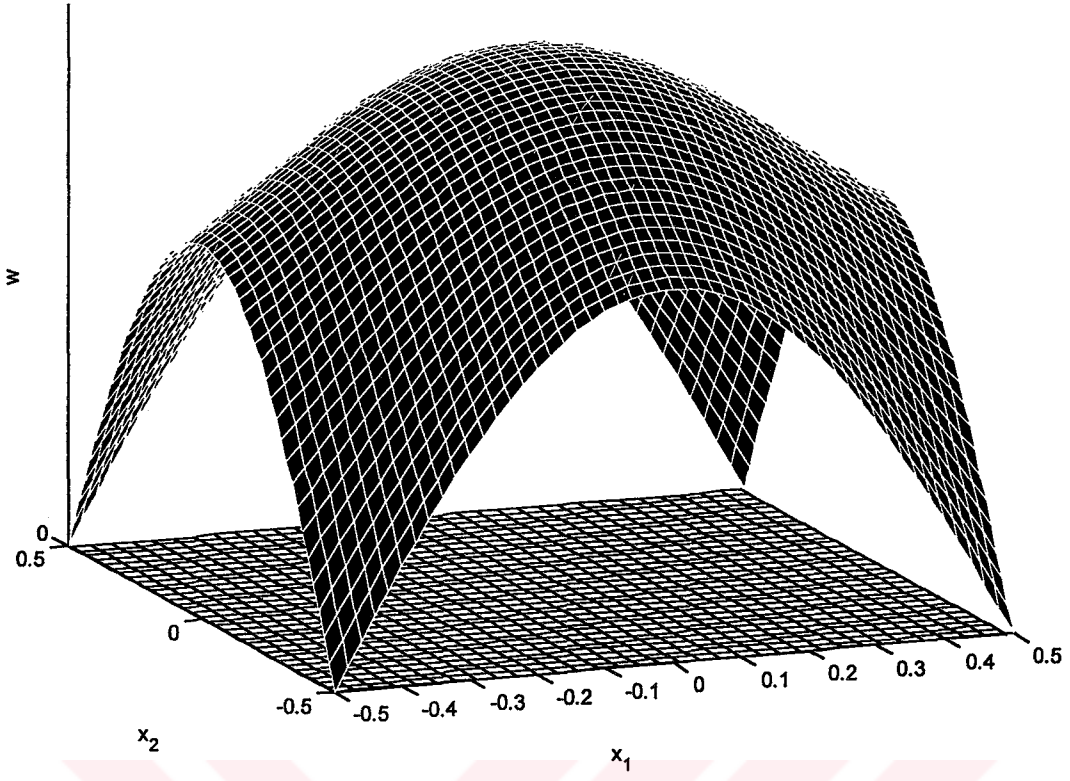
Çizelge 5 Nokta mesnetli Ortotrop Plak için SS, AA, AS, SA modlarına ait λ değerleri $\nu_{21} = 0.3$

SS modu										
e mod		1.4	1.3	1.2	1.1	1	0.9	0.8	0.7	0.6
SS-1	b/a=1	7.6665	7.5527	7.4243	7.2784	7.1109	6.9166	6.6883	6.4160	6.0851
SS-1	b/a=2	2.7494	2.6511	2.5477	2.4385	2.3227	2.1992	2.0665	1.9227	1.7649
SS-2	b/a=1	22.0112	21.4418	20.8512	20.2371	19.5961	18.9243	18.2155	17.4611	16.6468
SS-2	b/a=2	13.8027	13.6231	13.4269	13.2104	12.9688	12.6954	12.3807	12.0105	11.5627
SS-3	b/a=1	48.8553	47.8211	46.7342	45.5868	44.3696	43.0707	41.6742	40.1593	38.4963
SS-3	b/a=2	26.8519	26.4136	25.9309	25.3903	24.7733	24.0544	23.2009	22.1742	20.9335

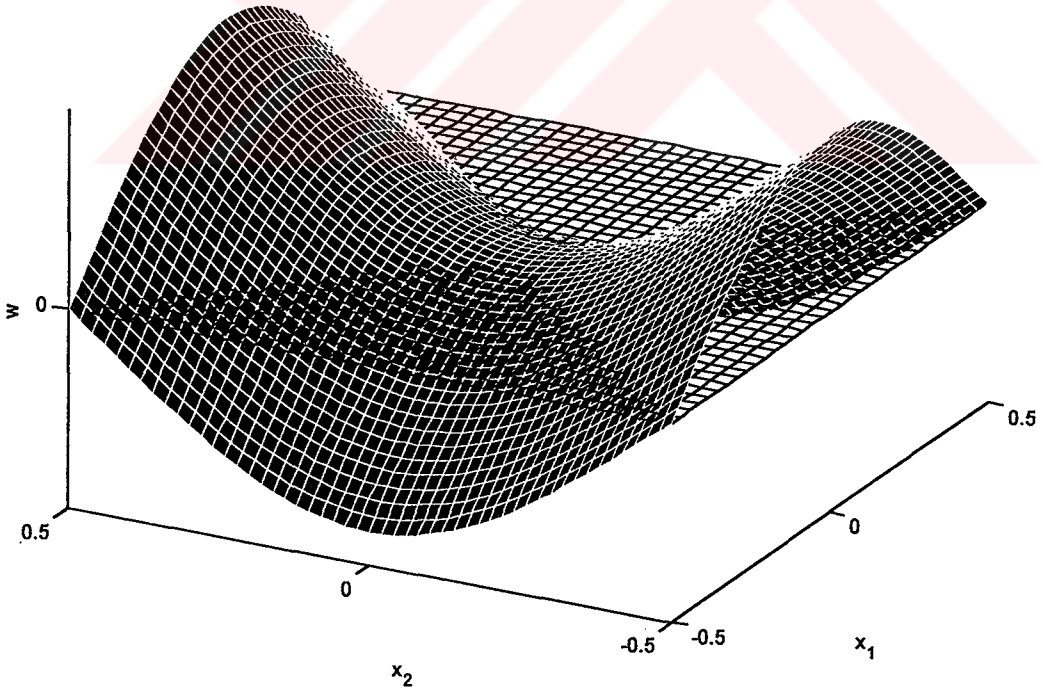
AA modu										
e mod		1.4	1.3	1.2	1.1	1	0.9	0.8	0.7	0.6
AA-1	b/a=1	41.9332	41.1757	40.3495	39.4409	38.4316	37.2973	36.0046	34.5062	32.7321
AA-1	b/a=2	18.1499	17.6503	17.1203	16.5551	15.9487	15.2931	14.5774	13.7864	12.8980
AA-2	b/a=1	77.4307	75.5176	73.5255	71.4452	69.2654	66.9710	64.5413	61.9460	59.1371
AA-2	b/a=2	44.9747	44.1258	43.1886	42.1456	40.9746	39.6473	38.1264	36.3623	34.2854
AA-3	b/a=1	134.0032	131.3602	128.5592	125.5772	122.3846	118.9430	115.1999	111.0803	106.4689
AA-3	b/a=2	65.5780	64.2227	62.8063	61.3224	59.7619	58.1118	56.3509	54.4445	52.3311

AS modu										
e mod		1.4	1.3	1.2	1.1	1	0.9	0.8	0.7	0.6
AS-1	b/a=1	17.8399	17.3749	16.8785	16.3457	15.7702	15.1441	14.4562	13.6912	12.8265
AS-1	b/a=2	7.7662	7.5644	7.3498	7.1205	6.8737	6.6059	6.3124	5.9864	5.6180
AS-2	b/a=1	52.4286	51.9839	51.5008	50.9694	50.3767	49.7034	48.9215	47.9874	46.8293
AS-2	b/a=2	31.6043	30.7831	29.9019	28.9520	27.9222	26.7983	25.5608	24.1831	22.6259
AS-3	b/a=1	86.2517	84.8963	83.4707	81.9638	80.3609	78.6413	76.7739	74.7075	72.3467
AS-3	b/a=2	54.1048	53.3674	52.5620	51.6739	50.6831	49.5614	48.2672	46.7366	44.8669

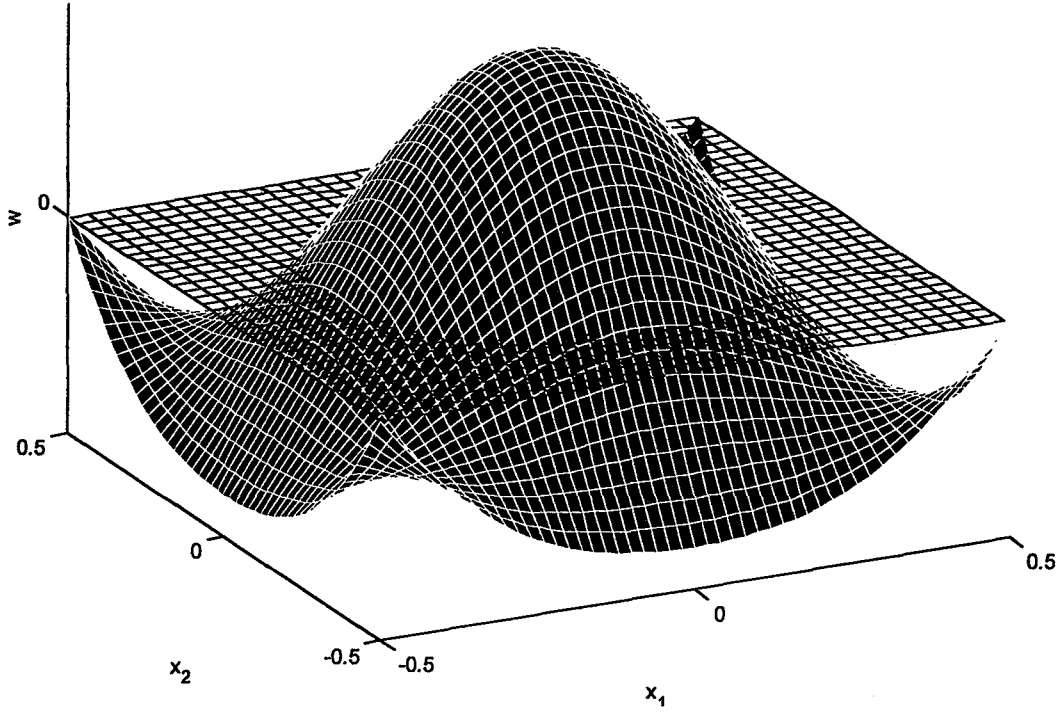
SA modu										
e mod		1.4	1.3	1.2	1.1	1	0.9	0.8	0.7	0.6
SA-1	b/a=1	17.1226	16.8170	16.4920	16.1445	15.7702	15.3637	14.9169	14.4188	13.8521
SA-1	b/a=2	9.2386	9.0118	8.7662	8.4989	8.2057	7.8815	7.5195	7.1104	6.6410
SA-2	b/a=1	58.6615	56.7856	54.7900	52.6599	50.3767	47.9169	45.2498	42.3332	39.1069
SA-2	b/a=2	19.9423	19.4392	18.9182	18.3767	17.8113	17.2175	16.5887	15.9148	15.1802
SA-3	b/a=1	89.7673	87.6067	85.3319	82.9243	80.3609	77.6118	74.6379	71.3860	67.7806
SA-3	b/a=2	41.0099	40.1643	39.2628	38.2940	37.2419	36.0836	34.7845	33.2896	31.5104



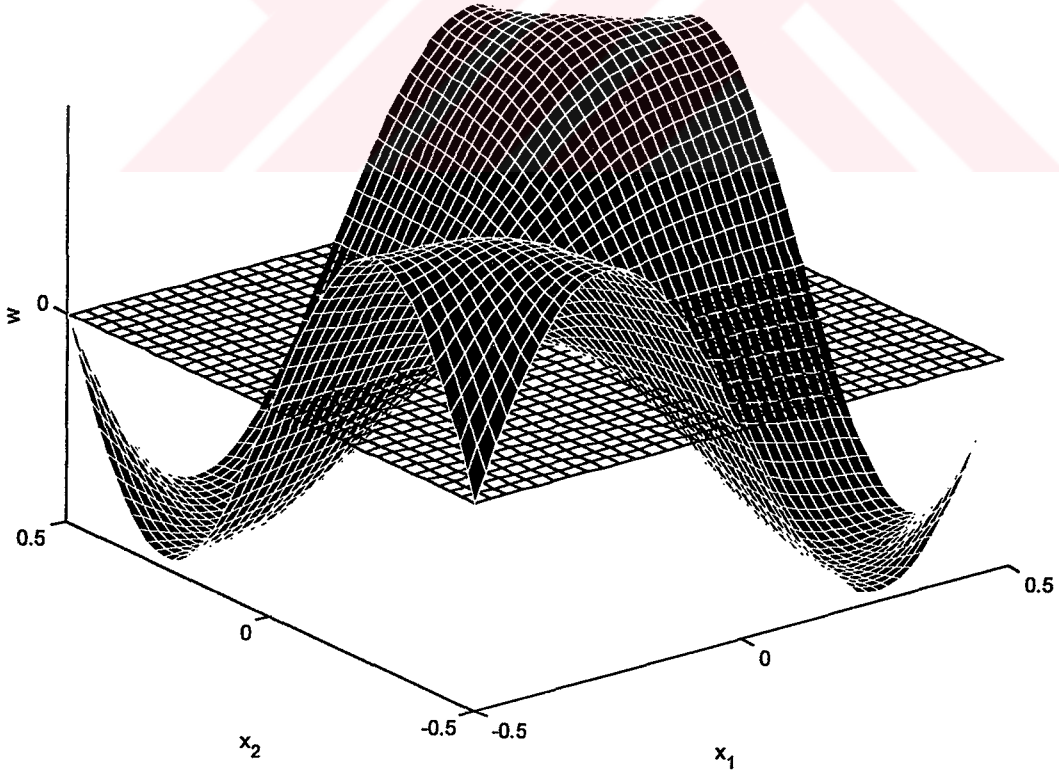
Şekil 5.8 $\lambda=7,1109$ için elde edilen $SS-1$ mod şekli ($e=1$).



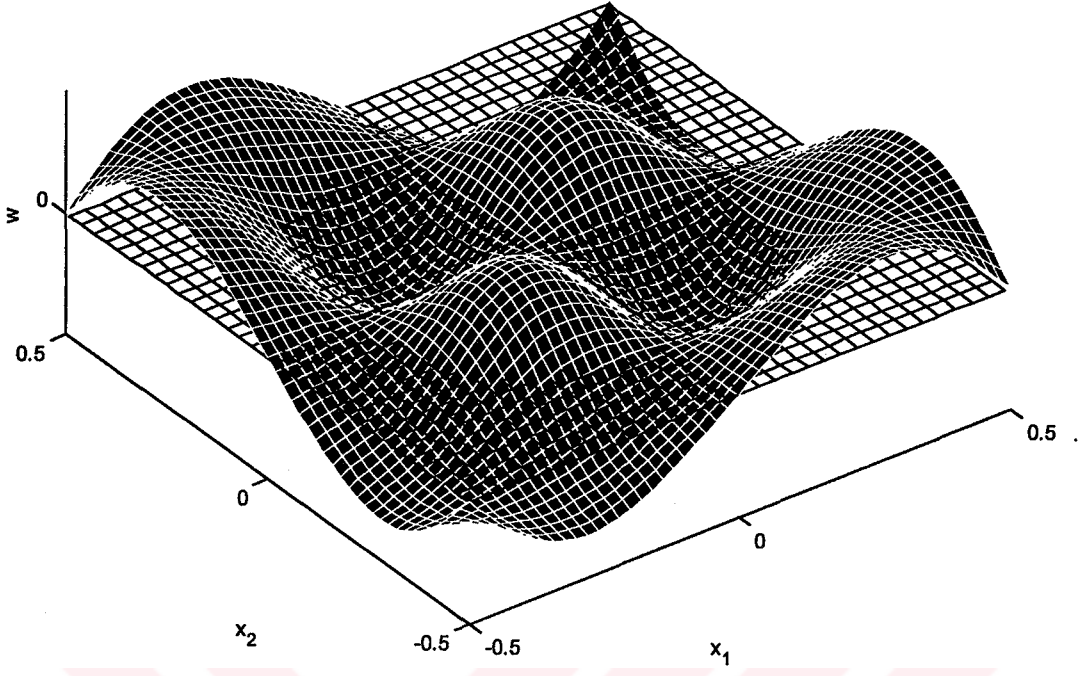
Şekil 5.9 $\lambda=19,5961$ için elde edilen $SS-2$ mod şekli ($e=1$).



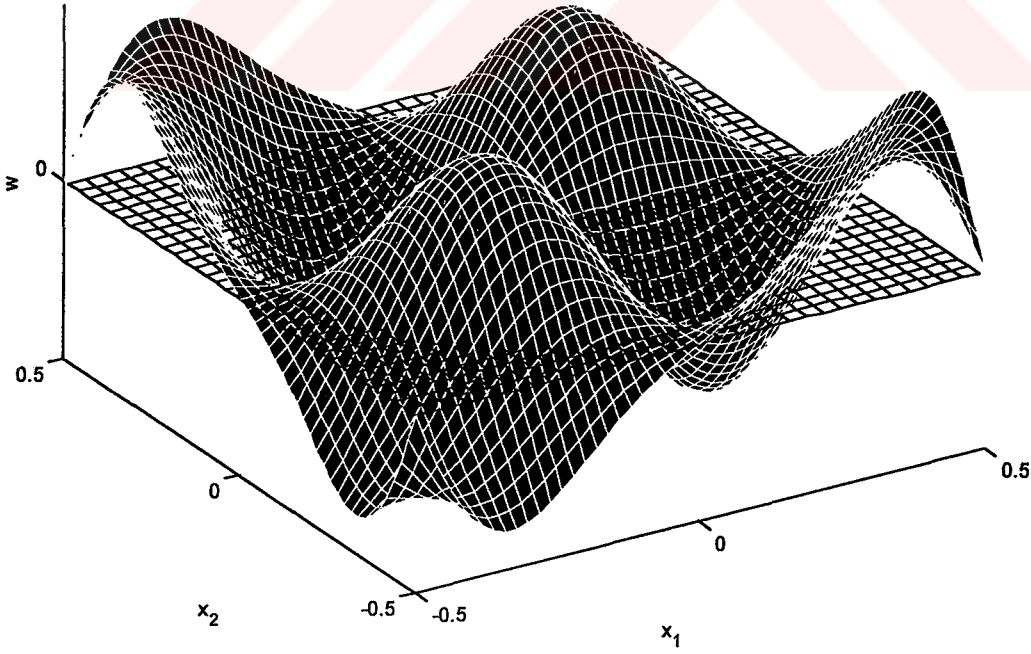
Şekil 5.10 $\lambda=44,3696$ için elde edilen $SS-3$ mod şekli ($e=1$).



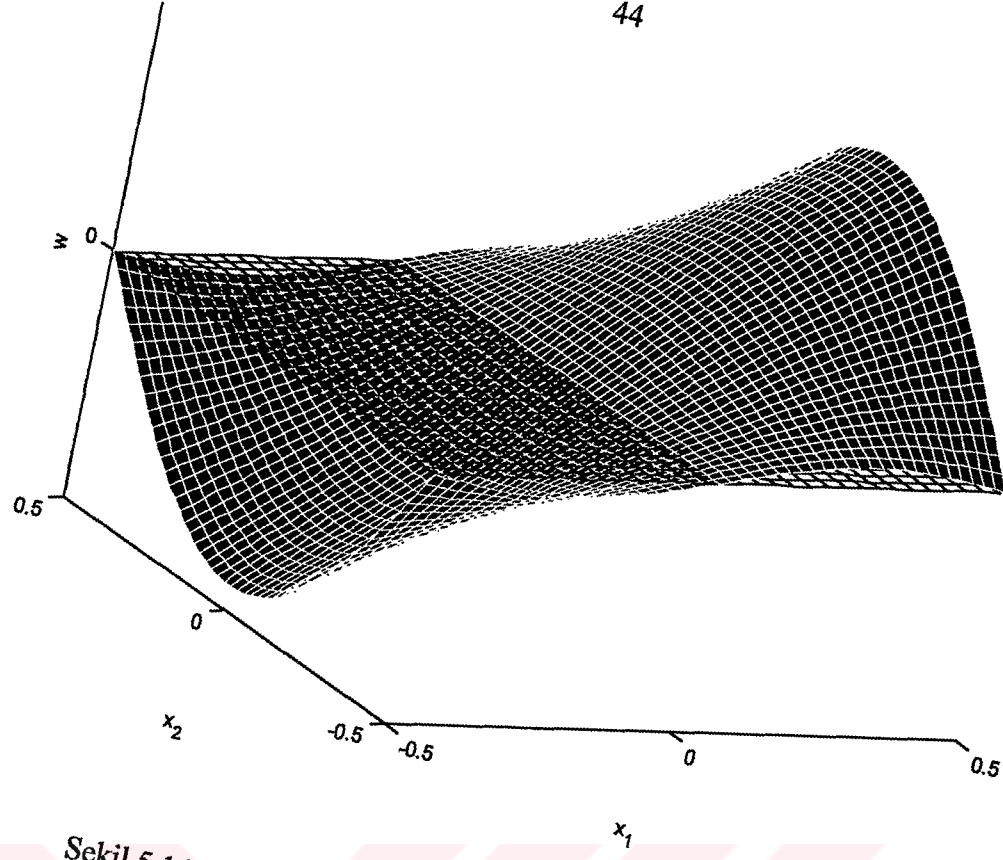
Şekil 5.11 $\lambda=38,4316$ için elde edilen $AA-1$ mod şekli ($e=1$).



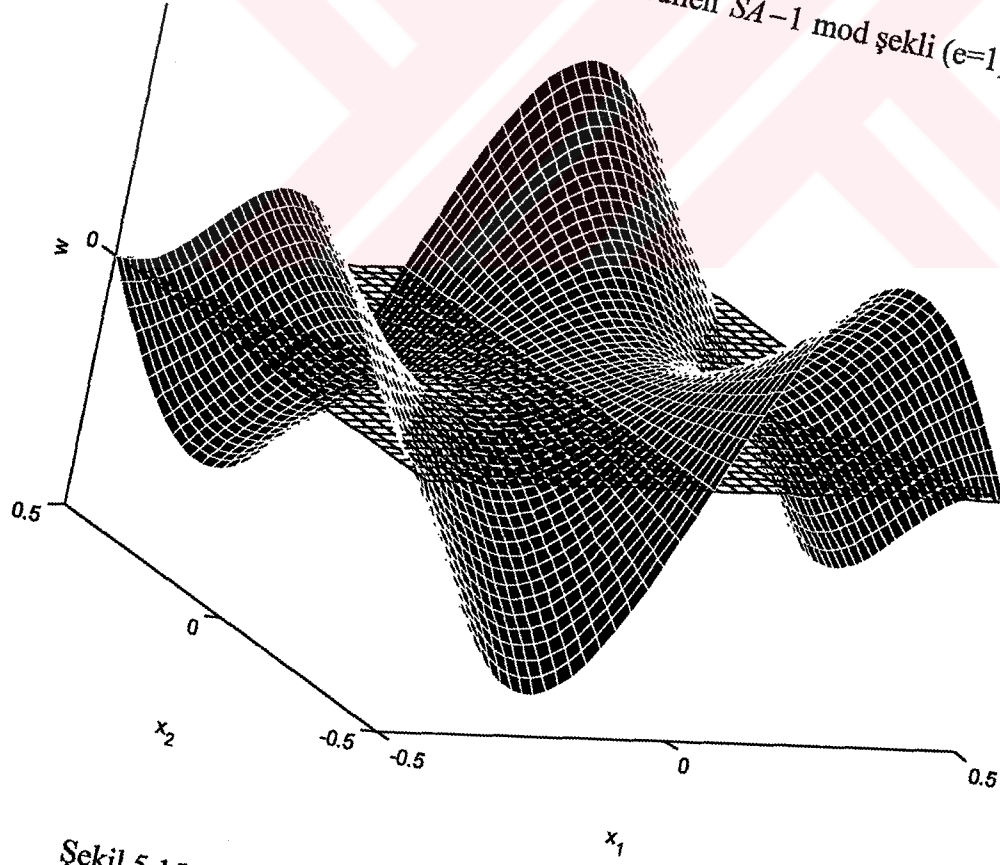
Şekil 5.12 $\lambda=69,2654$ için elde edilen $AA-2$ mod şekli ($e=1$).



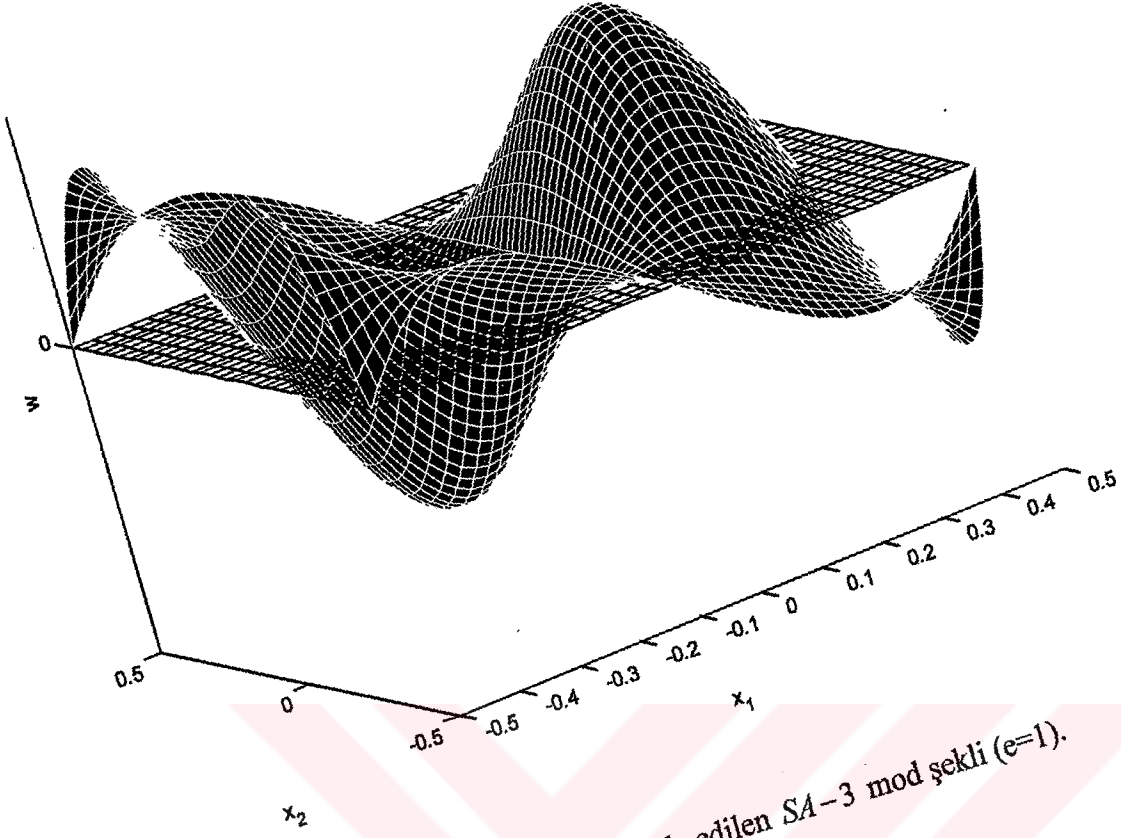
Şekil 5.13 $\lambda=122,3848$ için elde edilen $AA-3$ mod şekli ($e=1$).



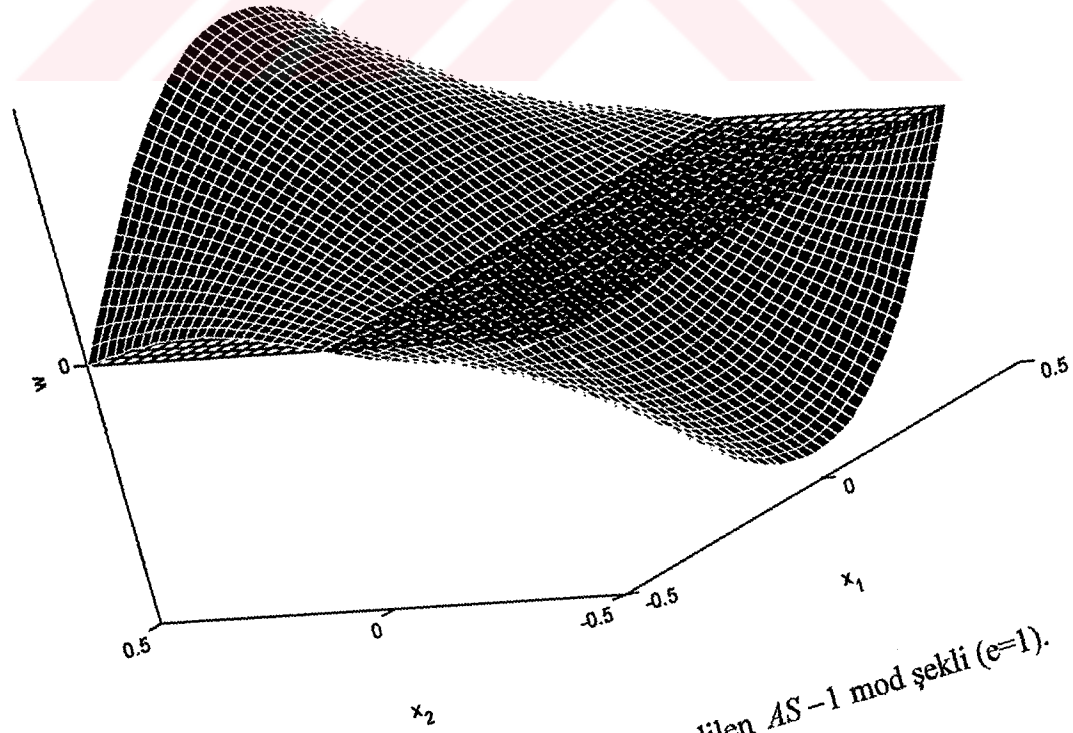
Şekil 5.14 $\lambda=15,7702$ için elde edilen SA-1 mod şekli ($e=1$).



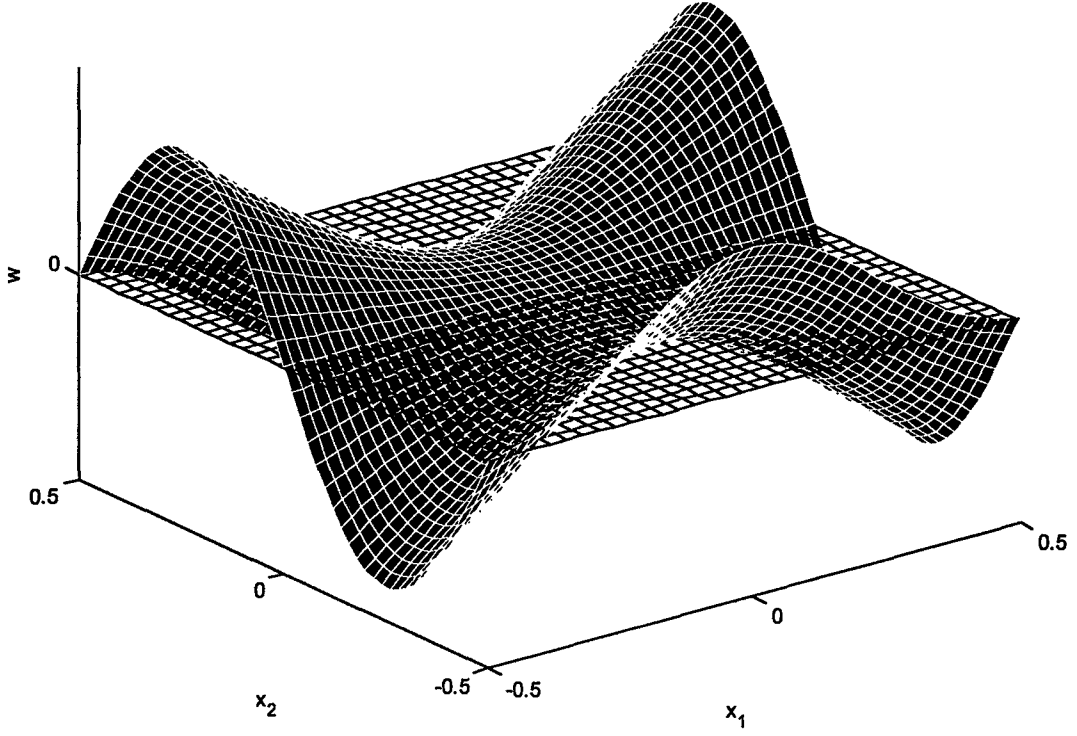
Şekil 5.15 $\lambda=50,3767$ için elde edilen SA-2 mod şekli ($e=1$).



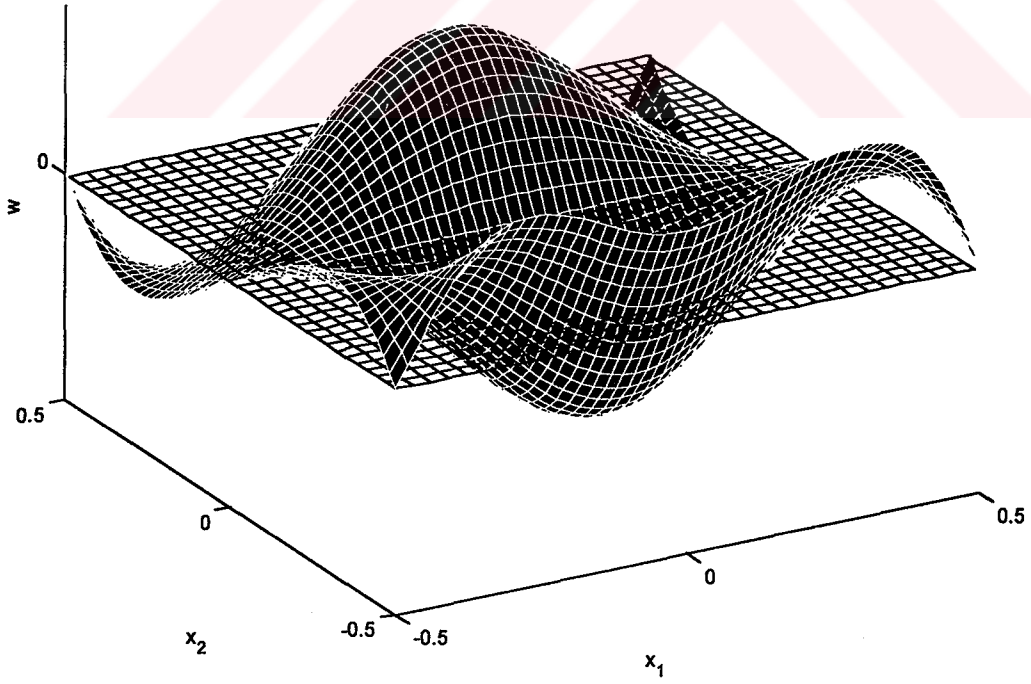
Şekil 5.16 $\lambda=80,3609$ için elde edilen SA-3 mod şekli ($e=1$).



Şekil 5.17 $\lambda=15,7702$ için elde edilen AS-1 mod şekli ($e=1$).



Şekil 5.18 $\lambda=50,3767$ için elde edilen $AS-2$ mod şekli ($e=1$).



Şekil 5.19 $\lambda=80,3609$ için elde edilen $AS-3$ mod şekli ($e=1$).

5.3 Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk İçin Sayısal Sonuçlar

Kabukta sayısal çözümleme için şekil değiştirme fonksiyonları

$$\begin{aligned} u &= A_{ij} x_1^i x_2^j \quad i=0,2,4,6 \quad j=0,2,4,6 \\ v &= B_{ij} x_1^i x_2^j \quad i=1,3,5,7 \quad j=0,2,4,6 \\ w &= C_{ij} x_1^i x_2^j \quad i=0,2,4,6 \quad j=1,3,5,7 \end{aligned} \quad (5.5)$$

şeklinde alınmıştır. Yer değiştirme fonksiyonları 4 terimli olarak alınıp problem çözümlenirse Çizelge 5 teki λ değerleri ve bu λ değerleri için kabuk orta yüzeyine göre w yer değiştirmelerini belirten mod şekilleri elde edilir. Özel ortotrop olan nokta mesnetli kabukta 4 tip titreşim modu bulunmaktadır, bunlar SS, SA, AS, AA olarak gösterilirler. S simetrik, A antisimetrik anlamına gelmektedir.

SS modu x_2 eksenine göre ve x_1 eksenine göre simetriktir. Bu mod şekilleri için

u yer değiştirme fonksiyonu için $i=1,3,5,7 \quad j=0,2,4,6$
 v yer değiştirme fonksiyonu için $i=0,2,4,6 \quad j=1,3,5,7$
 w yer değiştirme fonksiyonu için $i=0,2,4,6 \quad j=0,2,4,6$
 terimleri alınır.

AA modu x_2 eksenine göre ve x_1 eksenine göre antisimetriktir. Bu mod şekillerinde

u yer değiştirme fonksiyonu için $i=0,2,4,6 \quad j=1,3,5,7$
 v yer değiştirme fonksiyonu için $i=1,3,5,7 \quad j=0,2,4,6$
 w yer değiştirme fonksiyonu için $i=1,3,5,7 \quad j=1,3,5,7$
 olarak alınmalıdır.

AS modu x_2 eksenine göre antisimetrik, x_1 eksenine göre simetriktir. Bu mod şekillerinde

u yer değiştirme fonksiyonu için $i=1,3,5,7 \quad j=1,3,5,7$
 v yer değiştirme fonksiyonu için $i=0,2,4,6 \quad j=0,2,4,6$
 w yer değiştirme fonksiyonu için $i=0,2,4,6 \quad j=1,3,5,7$
 olarak alınmalıdır.

SA modu x_2 eksenine göre simetrik, x_1 eksenine göre antisimetriktir. Bu mod şekillerinde

u yer değiştirme fonksiyonu için $i = 0, 2, 4, 6$ $j = 0, 2, 4, 6$

v yer değiştirme fonksiyonu için $i = 1, 3, 5, 7$ $j = 1, 3, 5, 7$

w yer değiştirme fonksiyonu için $i = 1, 3, 5, 7$ $j = 0, 2, 4, 6$

olarak alınmalıdır.

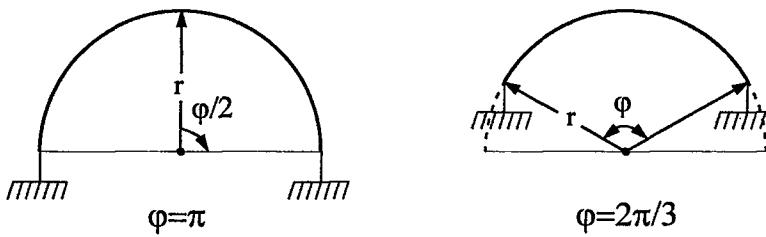
m ve n değerleri ne kadar büyük seçilirse elde edilen sonuçlar gerçek değere o nispette yaklaşır. Sayısal çözümlemede kabuk boyuna doğrultusu $l/r = 4$ olarak, kabuk eğrilik yarıçapının kabuk kalınlığına oranının karesi $r^2/t^2 = 100$ olarak alınmıştır. Bulunan λ larla doğal frekanslar arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2 \rho h r^4}{D_{11}} \quad (5.6)$$

Sayısal çözümlemede G_{12}

$$G_{12} \approx \frac{E_{11} \sqrt{e}}{2(1 + \nu_{21} \sqrt{1/e})} \quad (5.7)$$

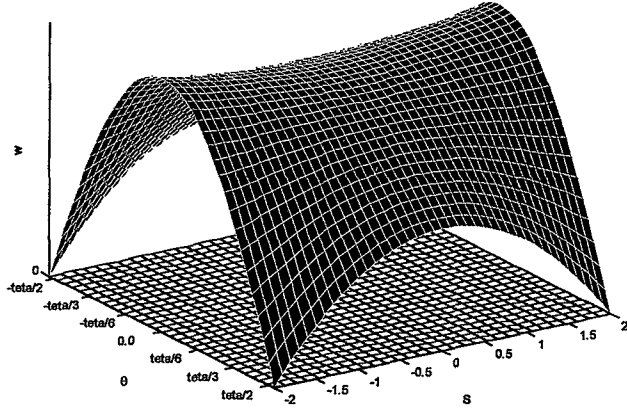
şeklinde alınmıştır (Szilard, 1974).



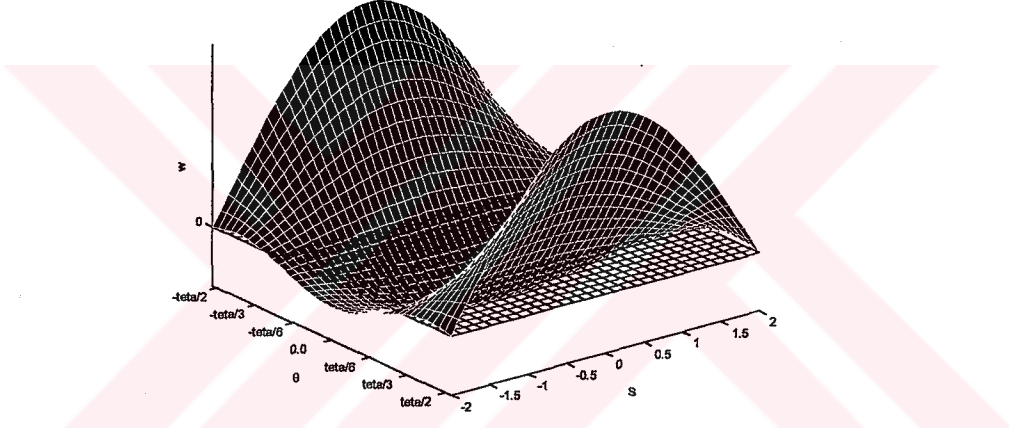
Şekil 5.20 Kabukta ele alınan açılarının gösterimi

Çizelge 6 Nokta mesnetli Ortotrop Dairesel Silindirik Kabuk için SS, AA, AS, SA modlarına ait λ değerleri $\nu_{21} = 0.3$

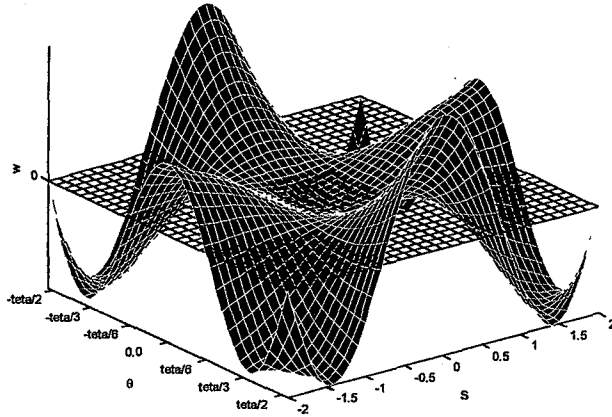
$r^2/t^2 = 100 \quad l/r = 4$									
		$e = 0.6$	$e = 0.8$	$e = 1$			$e = 0.6$	$e = 0.8$	$e = 1$
	SS modları					AA modları			
$\alpha = \pi$	SS-1	0.44189	0.50303	0.55439		AA-1	2.58506	2.92900	3.21162
	SS-2	2.44531	2.72656	2.97031		AA-2	5.25459	5.65732	5.95439
	SS-3	6.85156	7.53906	8.06390		AA-3	7.00361	7.62881	8.25674
$\alpha = 2\pi/3$	SS-1	0.96250	1.02344	1.11719		AA-1	3.89313	4.17911	4.38818
	SS-2	4.21686	4.79913	5.29327		AA-2	5.61747	6.05414	6.38829
	SS-3	7.61151	8.06586	8.40713		AA-3	8.98431	9.97028	10.73868
$\alpha = \pi/2$	SS-1	1.30670	1.45038	1.56207		AA-1	4.15721	4.44647	4.66757
	SS-2	5.33051	5.76874	6.09479		AA-2	5.42953	5.80831	6.09232
	SS-3	7.94379	8.95367	9.85406		AA-3	11.50665	12.44926	13.15365
$\alpha = \pi/3$	SS-1	1.23383	1.29681	1.33978		AA-1	4.16827	4.40204	4.56625
	SS-2	5.84003	6.27850	6.60358		AA-2	5.73578	6.28038	6.71761
	SS-3	12.39642	13.719	14.76605		AA-3	14.37311	15.35773	16.13966
	AS modları					SA modları			
$\alpha = \pi$	AS-1	1.45869	1.62528	1.75760		SA-1	0.52099	0.62433	0.71844
	AS-2	4.58604	5.20575	5.71698		SA-2	4.33682	4.71271	4.99847
	AS-3	7.14287	7.66266	8.09967		SA-3	6.63467	7.12543	7.49005
$\alpha = 2\pi/3$	AS-1	1.74814	1.89569	2.00934		SA-1	1.41924	1.63322	1.81705
	AS-2	6.58896	7.20844	7.68890		SA-2	5.57451	6.06266	6.42826
	AS-3	10.77705	12.23627	13.47162		SA-3	7.79287	8.33756	8.78995
$\alpha = \pi/2$	AS-1	1.91338	2.09918	2.24689		SA-1	2.42627	2.73881	2.99344
	AS-2	7.81299	8.37738	8.81158		SA-2	6.38330	6.84037	7.16910
	AS-3	15.71963	17.67682	18.95282		SA-3	9.54502	10.46073	11.20804
$\alpha = \pi/3$	AS-1	2.60811	2.89862	3.13116		SA-1	3.17451	3.32867	3.42938
	AS-2	9.48877	10.25274	10.86371		SA-2	7.88584	8.71405	9.37726
	AS-3	14.73877	15.63251	16.26141		SA-3	11.28643	11.81146	12.17535



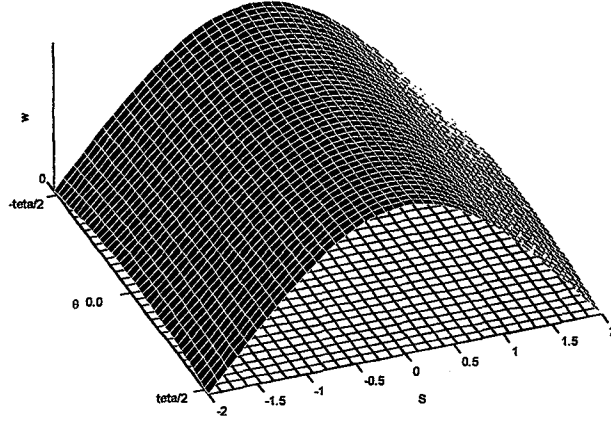
Şekil 5.21 $\lambda=0.55439$ için elde edilen *SS-1* mod şekli ($\theta = \pi$, $e = 1$).



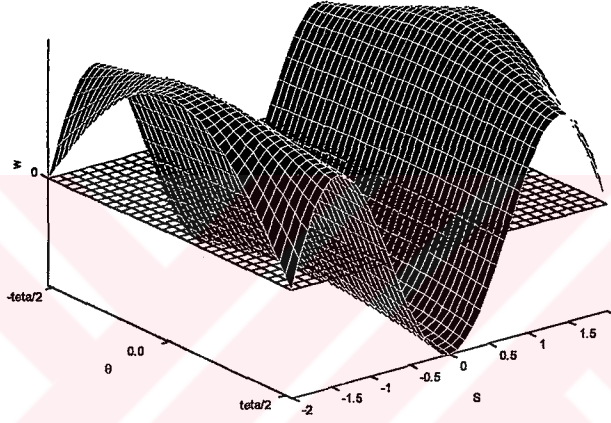
Şekil 5.22 $\lambda=2.97031$ için elde edilen *SS-2* mod şekli ($\theta = \pi$, $e = 1$).



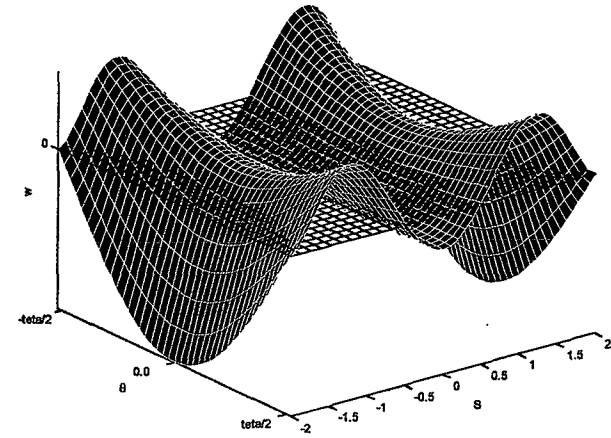
Şekil 5.23 $\lambda=8.06390$ için elde edilen *SS-3* mod şekli ($\theta = \pi$, $e = 1$).



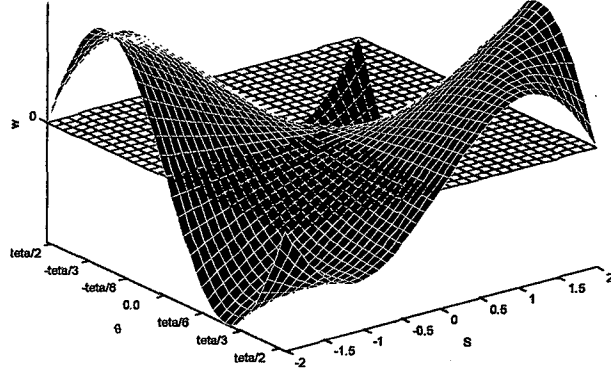
Şekil 5.24 $\lambda=1.33978$ için elde edilen *SS-1* mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).



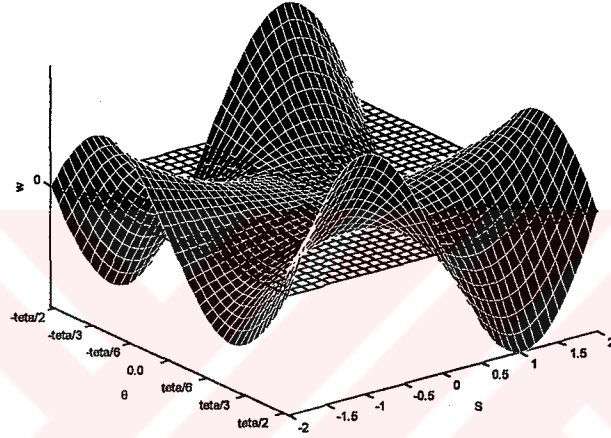
Şekil 5.25 $\lambda=6.60358$ için elde edilen *SS-2* mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).



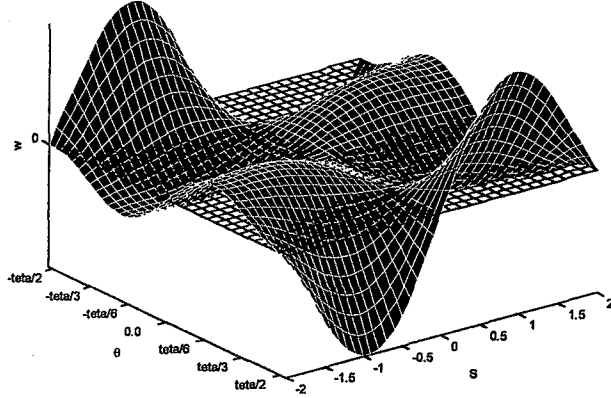
Şekil 5.26 $\lambda=14.76605$ için elde edilen *SS-3* mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).



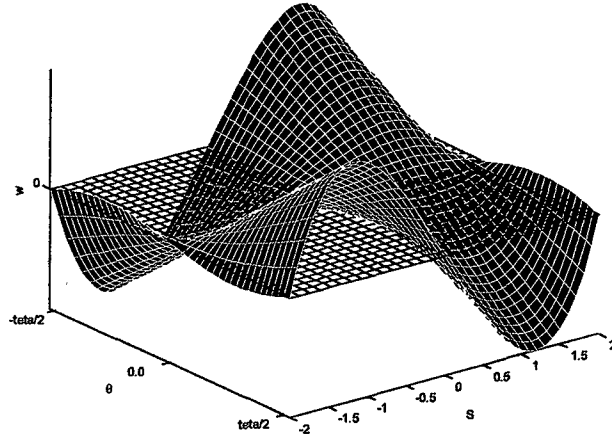
Şekil 5.27 $\lambda=3.21162$ için elde edilen $AA-1$ mod şekli ($\theta = \pi$, $e = 1$).



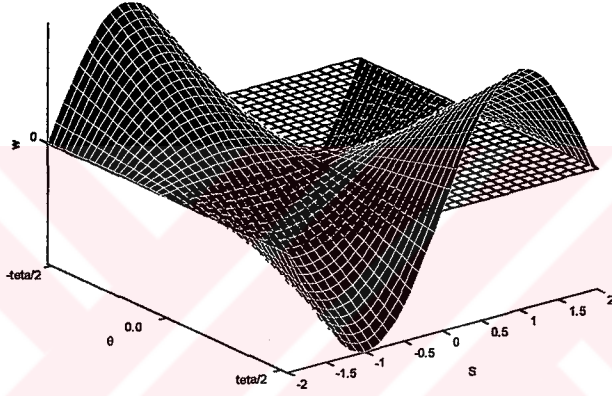
Şekil 5.28 $\lambda=5.95439$ için elde edilen $AA-2$ mod şekli ($\theta = \pi$, $e = 1$).



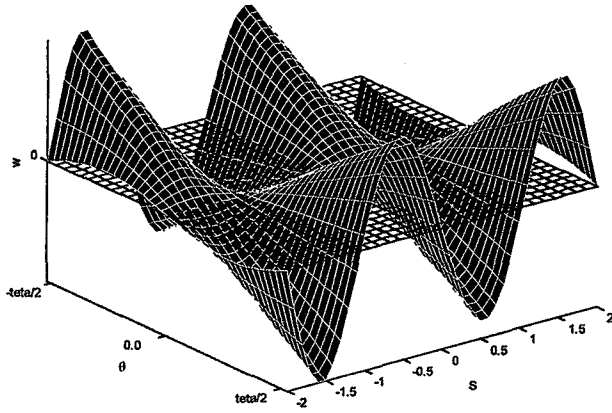
Şekil 5.29 $\lambda=8.15674$ için elde edilen $AA-3$ mod şekli ($\theta = \pi$, $e = 1$).



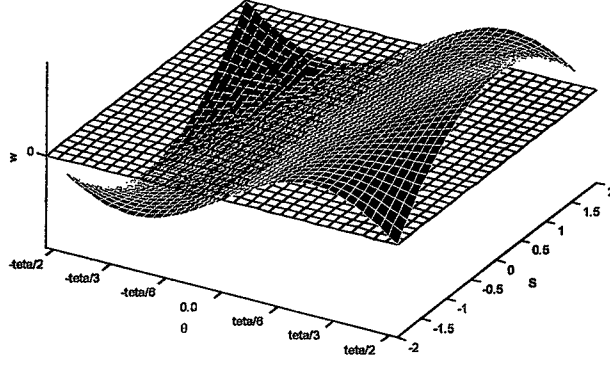
Şekil 5.30 $\lambda=4.56625$ için elde edilen AA-1 mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e=1$).



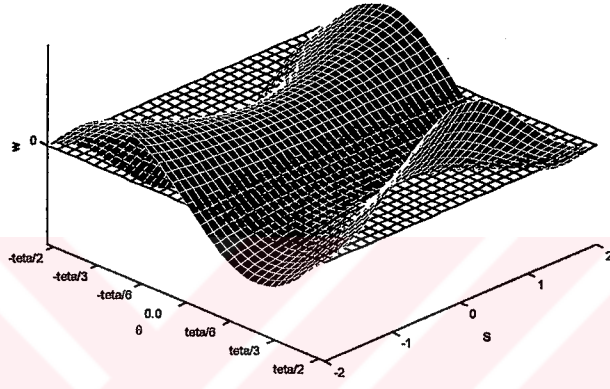
Şekil 5.31 $\lambda=6.71761$ için elde edilen AA-2 mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e=1$).



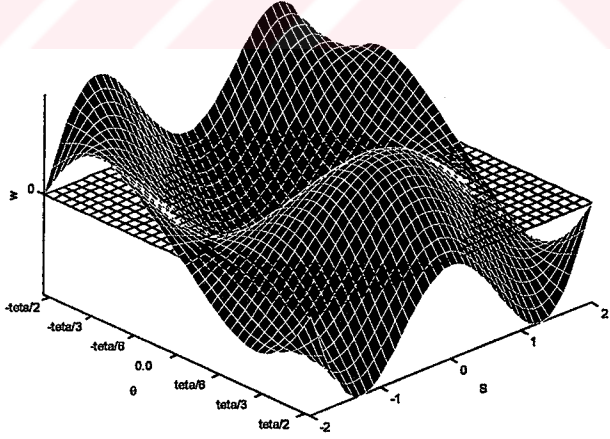
Şekil 5.32 $\lambda=16.13966$ için elde edilen AA-3 mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e=1$).



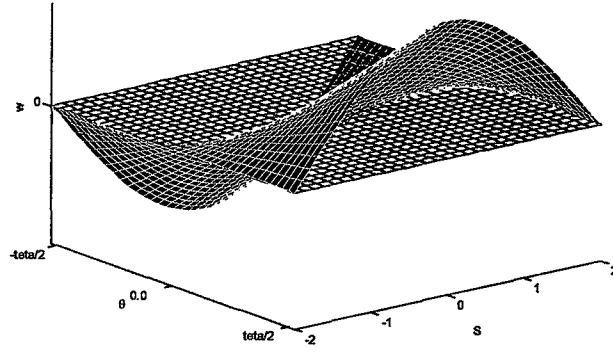
Şekil 5.33 $\lambda=1.75760$ için elde edilen *AS-1* mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).



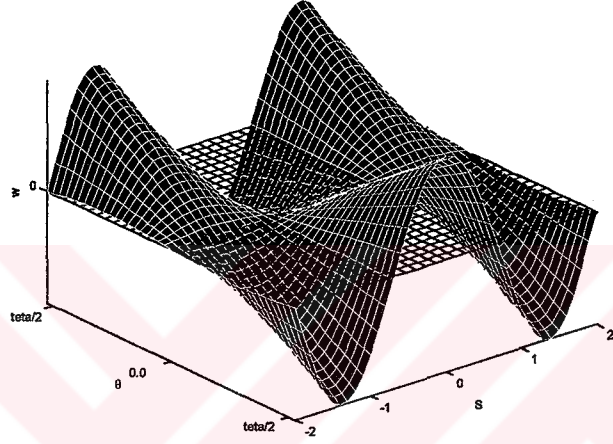
Şekil 5.34 $\lambda=5.71698$ için elde edilen *AS-2* mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).



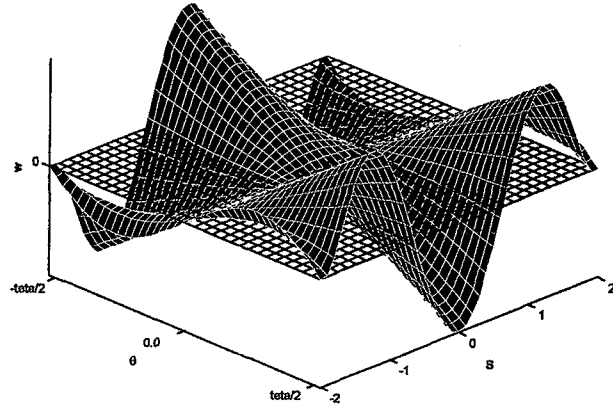
Şekil 5.35 $\lambda=8.09967$ için elde edilen *AS-3* mod şekli($\theta = \pi$, $e = 1$).



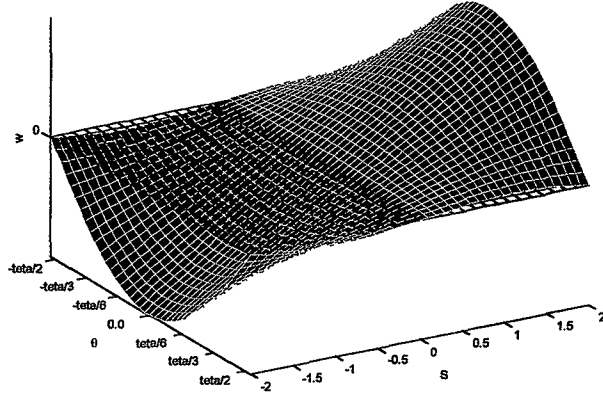
Şekil 5.36 $\lambda=3.13116$ için elde edilen *AS-1* mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).



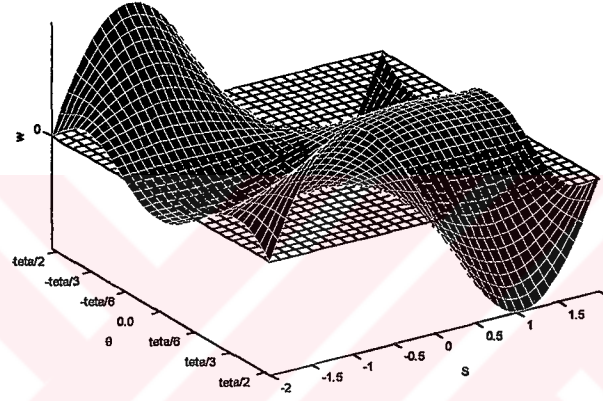
Şekil 5.37 $\lambda=10.86371$ için elde edilen *AS-2* mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).



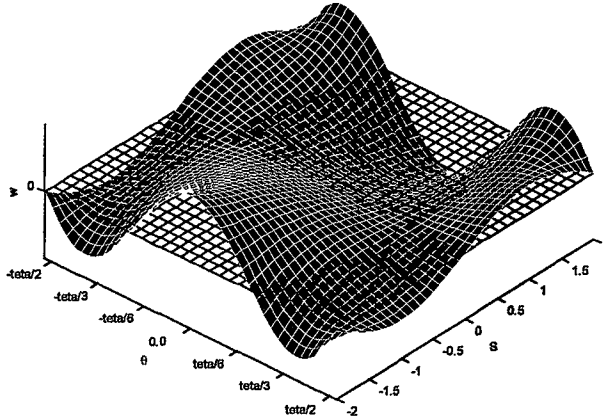
Şekil 5.38 $\lambda=16.26141$ için elde edilen *AS-3* mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e = 1$).



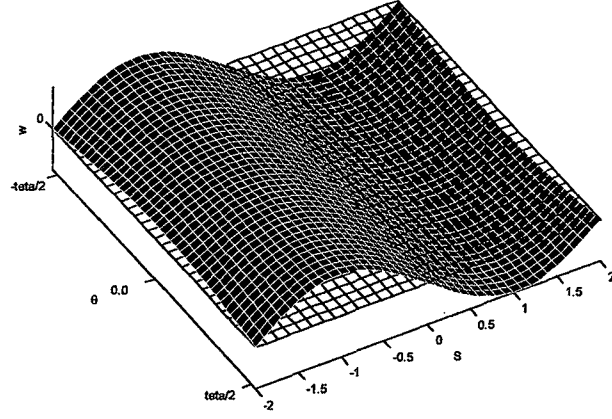
Şekil 5.39 $\lambda=0.71844$ için elde edilen *SA-1* mod şekli ($\theta = \pi$, $e = 1$).



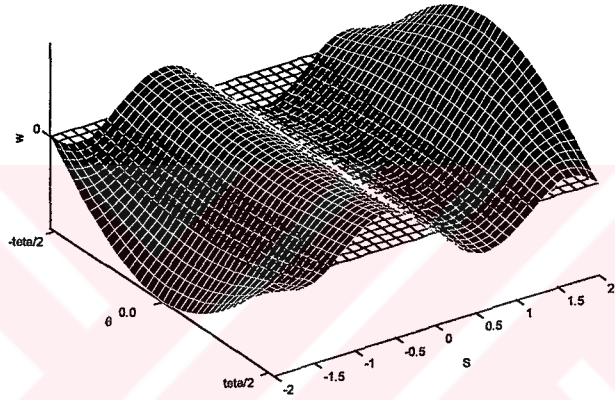
Şekil 5.40 $\lambda=4.99847$ için elde edilen *SA-2* mod şekli ($\theta = \pi$, $e = 1$).



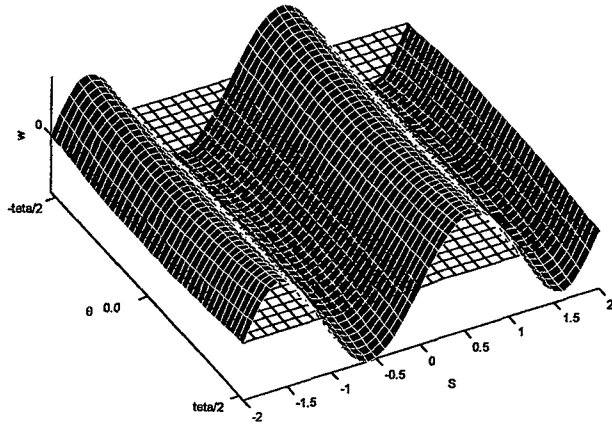
Şekil 5.41 $\lambda=7.49005$ için elde edilen *SA-3* mod şekli ($\theta = \pi$, $e = 1$).



Şekil 5.42 $\lambda=3.42938$ için elde edilen $SA-1$ mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e=1$).



Şekil 5.43 $\lambda=9.37726$ için elde edilen $SA-2$ mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e=1$).



Şekil 5.44 $\lambda=12.17535$ için elde edilen $SA-3$ mod şekli ($\theta = 2\pi/3$, $e=1$).

6. SONUÇ

Çalışmada, nokta mesnetli kirişlerin, nokta mesnetli ortotropik plakların ve nokta mesnetli ortotrop dairesel silindirik kabukların titreşimlerine ait özdeğerler ve bu özdeğerler için geçerli mod şekilleri elde edilmiştir.

Nokta mesnetli ortotrop dikdörtgen plakların doğal frekans değerleri çok sayıda ortotropi parametresi ve iki adet boyut oranı durumunda, dört mod ailesi için tablolaştırılmıştır. Her bir mod ailesi için, ilk üç titreşim moduna ait özdeğerler verilmiştir.

Nokta mesnetli ortotrop silindirik kabukların serbest titreşim frekansları ve bu frekans değerlerine ait mod şekilleri kabuk malzemesinin anizotropisini karakterize eden özellikler açısından incelenmiştir.

Sayısal çözümlemede kullanılan Ritz metoduyla elde edilen sonuçların kesin sonuçlara üsten yaklaştığı görülmüştür. Kullanılan fonksiyonların terim sayılarının arttırılmasının sonuçların yakınsamasında çok büyük etkisinin olduğu görülmüştür. Yakınsamanın ilk birkaç terim artımında çok hızlı ve etkili olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Altıntaş, G., (2002), “Viskoelastik Nokta Mesnetli Elastik Anizotrop Plakların Periyodik Zorlanmış Titreşimlerinin Analizi”, Y.T.Ü. Doktora Tezi, İstanbul.
- Choo, V. K. S., (1990), “Fundamentals of Composite Materials”, Knowen Academic Press, Delaware, U.S.A.
- Flügge, W., (1973), “Stresses in Shells”, Springer-Verlag, Berlin.
- Gorman, D. J., “Free Vibration Analysis of The Completely Free Rectangular Plate by The Method of Superposition”, Journal of Sound and Vibration, 57(3):437-447,1978.
- Gorman D. J., “Accurate Free Vibration Analysis of Point Supported Mindlin Plates by the Superposition Method”, Journal of Sound and Vibration, 219,2,265-277,1999.
- Gorman D. J., “Free vibration analysis of point-supported orthotropic plates”, American Society of Civil Engineers, Journal of Engineering Mechanics, 120,1,58-74,1994.
- Gorman D. J., “Free Vibration Analysis of Rectangular Plates with Symmetrically Distributed Point Supports Along the Edges”, Journal of Sound and Vibration, 73,4,563-574,1980.
- Gorman D. J., “A General Solution for the Free Vibration of Rectangular Plates Resting on Uniform Elastic Edge Supports”, Journal of Sound and Vibration, 139,2,325-335,1990.
- İnan, M., (1984), “Cisimlerin Mukavemeti”, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Kelly, S. G., (1993), “Fundamentals of Mechanical Vibrations”, McGraw-Hill, NewYork.
- Kersterns, J. G. M., “Vibration of a Rectangular Plate Supported at an Arbitrary Number of Points”, Journal of Sound and Vibration, 65(4):493-504,1979.
- Kocatürk, T., (1998), “Determination of the Steady State Response of Viscoelastically Point-Supported Rectangular Anisotropic (Orthotropic) Plates”, Journal of Sound and Vibration, 213(4):665-672.
- Kocatürk, T. ve İlhan, N., “Free Vibration Analysis of Elastically Point Supported Orthotropic Plates”, Journal of Yildiz Technical University, 2003(1):104-115.
- Leissa, A. W. and Narita, Y., (1984) “Vibration of Completely Free Shallow Shells of Rectangular Planform”, Journal of Sound and Vibration, 96(2):207-218.
- Narita Y., “Note on Vibrations of Point Supported Rectangular Plates”, Journal of Sound and Vibration, 93,4,593-597,1984.
- Reddy, J. N.; (1984), “Energy and Variational Methods in Applied Mechanics”, John Wiley&Sons, New York
- Szillard, R., (1974), “Theory and Analysis of Plates”, Prentice-Hall, New Jersey.
- Şuhubi, E., (1981), “Rijit Cisimler Dinamiği”, Fatih Yayınevi, İstanbul.
- Tameroğlu, S., (1963), “Sınır Değer Problemleri”, Teknik Üniversite Matbaası, İstanbul.
- Tameroğlu, S., Cinemre, V., Özbek, T., (1970), “Elastostatikğin Stabilité Problemleri”, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.

Timoshenko, S., Young, D. H., (1955), "Vibration Problems in Engineering", D. Van Nostrand Company, New York

Venkateswara Rao G., Raju I. S., Amba-Rao C. L., "Vibrations of Point Supported Plates", *Journal of Sound and Vibration*, 29,3,387-391,1973.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 08.04.1979

Doğum yeri İstanbul

Lise 1992-1995 Büyükçekmece Lisesi

Lisans 1996-2000 Yıldız Üniversitesi İnşaat Fak.
İnşaat Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2000- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik Programı

Çalıştığı kurum

2002-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

