

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ELASTİK ZEMİNE OTURAN ÇUBUK VE PLAK SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜ

İnşaat Mühendisi Adnan ÇORUK

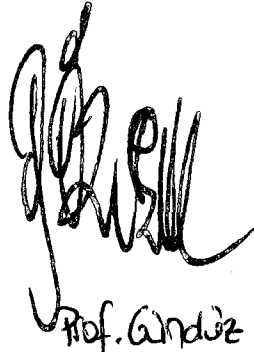
**F.B.E.İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Sinan ÇAĞDAŞ



Prof. Sinan ÇAĞDAŞ



Prof. Gündüz ÖZGÜL
İSTANBUL, 1998



Prof. Feride Yükselen

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	i
ÖNSÖZ	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
I. ELASTİK ZEMİNE OTURAN ÇUBUK SİSTEMLERİN MATRİS DEPLASMAN METODU İLE ÇÖZÜMÜ.....	1
I.1 Matris Deplasman Metodu.....	1
I.1.1 Giriş ve genel tanımlar	1
I.1.2 Yedek Sistem	4
I.1.3 Kiriş hesabı.....	5
I.1.4 Yedek Sistemin Rijitlik Matrisinin bulunması.....	8
I.1.5 Kesit tesirlerinin bulunması	11
I.2 Elastik Zemine Oturan Kirişin Matris Deplasman Metodu ile çözümü..	12
I.2.1 Giriş.....	12
I.2.2 Hesap esasları.....	13
I.2.3 Bilgisayar programı ile çözülecek sisteme ait verilerin hazırlanması ve tanımı.....	14
I.3 Elastik Zemine Oturan Izgara Sistemlerin Matris Deplasman Metodu ile Hesabı	21
I.3.1 Izgara Sistemler hakkında bilgi.....	21
I.3.1.1 Giriş ve genel tanımlar	21
I.3.1.2 Hesaplamanın ana prensipleri	25
I.3.1.3 Veri giriş ve çıkışının açıklanması.....	28
I.3.2 Elastik Mesnetlenmiş Taşıyıcı Izgaraların hesabı.....	35
I.3.2.1 Giriş ve genel bakış.....	35
I.3.2.2 Hesaplamanın ana prensipleri	35
I.3.2.3 Elastik mesnetlenmiş plakların hesaplanmasında Yaklaşım Yöntemi....	38
I.3.2.4 Veri giriş ve çıkışlarının açıklanması.....	39
II. ELASTİK ZEMİNE OTURAN SİSTEMLERİN NÜMERİK METODLARLA ÇÖZÜMÜ	50
II.1 Elastik Zemine Oturan Sistemlerin Sonlu Farklar Metodu ile Çözümü .	50
II.1.1 İki değişkenli fonksiyonlarda Sonlu Fark ifadelerinin çıkarılması.....	50
II.1.2 Dikdörtgen plaklarda klasik diferansiyel denklemin Sonlu Farklarla çözümü	59

II.1.2.1	Dikdörtgen plaklarda sınır şartlarının sonlu farklarla ifadesi	62
II.1.2.2	Elastik zemine oturan ve muhtelif sınır şartlarına haiz olan dikdörtgen plakların Sonlu Fark denklemlerinin teşkili	70
II.1.2.2.1	Elastik zemin üzerindeki dikdörtgen plağın dört kenarı üzerinde sabit mesnetlere oturması hali	77
II.1.2.2.2	Elastik zemine oturan plağın dört kenarı üzerinde ankastre mesnede oturması hali	80
II.1.2.2.3	Elastik zemine oturan plağın üç kenarı üzerinde ankastre mesnede , bir Kenarı üzerinde de sabit mesnede oturması hali	82
II.1.2.2.4	Elastik zemine oturan plağın komşu iki kenarı üzerinde ankastre mesnede, diğer iki kenarı üzerinde de sabit mesnede oturması hali	84
II.1.2.2.5	Elastik zemine oturan plağın karşılıklı iki kenarı üzerinde ankastre mesnede, diğer iki kenarı üzerinde de sabit mesnede oturması hali	86
II.1.2.2.6	Elastik zemine oturan plağın bir kenarı üzerinde ankastre mesnede, diğer üç kenarı üzerinde de sabit mesnede oturması hali	88
II.1.2.3	Bilgisayar programları	90
II.2	Elastik Zemine Oturan Sistemlerin Sonlu Elemanlar Metodu(SEM) ile çözümü	98
II.2.1	Sonlu Elemanlar Metodu	98
II.2.2	SEM'in matematiksel prensipleri	100
II.2.3	Sürekliliğin ayrıştırılması	103
II.2.4	Eleman Rijitlik Matrisinin hesabı	104
II.2.5	Uygun Başlangıç Fonksiyonlarının seçimi	106
II.2.6	Levha şeklindeki taşıyıcı sistemler	109
II.2.6.1	Levha teorisine bakış	109
II.2.6.2	Programa genel bakış	111
II.2.6.3	12 serbestlik derecesi ile Üçgen levha eleman	113
II.2.6.4	Gerilmelerin hesaplanması	117
II.2.6.5	SEM'in bilgisayar ortamında çözümü	123
II.2.6.6	Veri giriş ve çıkışlarının açıklanması	125
II.2.7	Plak şeklindeki taşıyıcı sistemler	127
II.2.7.1	Plak teorisine giriş	127
II.2.7.2	Programa genel bakış	130
II.2.7.3	Dikdörtgen plak	133
II.2.7.4	Üçgen plak	138
II.2.7.5	Kesit Tesirlerinin hesabı	141
III.	SONUÇLAR	154
	KAYNAKLAR	155
	ÖZGEÇMİŞ	156

SİMGE LİSTESİ

a, b	: X , Y doğrultusundaki plak boyutları
E_s	: Zemin Elastisite Modülü
$[k]^{(N)}$	: Kiriş Rijitlik Matrisi
K	: Zemin Katsayısı
M_t	: Burulma Momenti
M	: Eğilme Momenti
Q	: Kesit Kuvveti
N	: Normal Kuvvet
σ	: İç Kuvvet
τ	: Kayma Gerilmesi
E	: Elastisite Modülü
G	: Kayma Modülü
G_t	: Kirişin Burulma Rijitliği
EI	: Kirişin Eğilme Rijitliği
$T^{(N)}$	: Dönüşüm Matrisi
μ	: Poisson (Enine genleşme) Katsayısı
I	: Atalet Momenti
I_t	: Burulma Atalet Momenti
l, l_x, l_y	: Açıklık boyları
m, n	: Pozitif tamsayılar
α, β, γ	: Açılar
λ	: Sonlu farklar ağı genişliği
M_A, M_B	: Ankastre Uç Momentleri
C_s	: Yay Sabiti
C_T	: Yay Dönme Sabiti
X, Y, Z	: Kartezyen Koodinatlar
$w(x)$	: Tabanın Çökme Değeri
$s(x)$	: Taban Basıncı
Φ	: Şekil Fonksiyonu
ε	: Şekil Değiştirme Vektörü
δ	: Düğüm Deformasyonları
ν	: X eksenine etrafındaki Dönme
φ	: Y eksenine etrafındaki Dönme
θ	: Düğüm Noktası Dönmesi
$[d]$	: Deplasman Matrisi
$[k]$	: Birim Deplasman Matrisi
$[S]$	: Sistem Rijitlik Matrisi

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans Öğrenimim boyunca , gerek tez konusunda ve gerekse de diğer konularda yardımlarını benden esirgemeyen başta Hocam Prof. Dr. Sinan ÇAĞDAŞ olmak üzere tüm Mekanik Mukavemet Kürsüsü Öğretim Üyelerine teşekkürü borç bilirim. Ayrıca benim bugünlere gelmemde hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan Aileme sevgi ve saygılarımı sunarım.

İstanbul , Eylül 1998

İnşaat Mühendisi
Adnan ÇORUK

ÖZET

Bu tezin konusu olarak seçilen “Elastik Zemine Oturan Çubuk ve Plak Sistemlerin Çözümü” hakkında yapılan çalışmada konu ile ilgili teorik ve uygulamalı bilgi verilmesi düşünülmüştür.

Bu inceleme yapılırken konu “Matris Deplasman Metodu” ve “Nümerik Metodlarla Çözüm” olmak üzere iki ana bölümde toplanılmıştır.

İlk bölümde Elastik Zemine Oturan Kiriş ve Izgara gibi çubuk sistemlere değinilmiş; Geckeler, Jelinek , Avramiou ve Avradiomus tarafından geliştirilen formüller Matris Deplasman Metodunda kullanılarak çözüme ulaşılmıştır. Bu sistemlerin çözümünde verilen bilgisayar programlarından faydalanılmış, bu programların kullanımı ile ilgili açıklayıcı bilgiler ve örnekler sunulmuştur.

İkinci bölümde ise Levha , Plak gibi İki Boyutlu Taşıyıcı Sistemlerin çözümünde Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar Metodu kullanılarak bu metodlara ait bilgi verilmeye çalışılmıştır. Bu bölümde de ilk bölümde olduğu gibi çözüm için bilgisayar programları verilmiş ve örnekler sunulmuştur.

Bu bilgisayar proramlarının hazırlanılmasında , bu metodların matris formunda düzenlenmiş oluşu büyük kolaylıklar sağlamıştır. Bu sayede oluşturulan bilgisayar programları ile en kısa zamanda en doğru değerler elde edilebilmiştir.

ABSTRACT

It has been thought to give the theoretical and applied informations related with the “Solutions of the Bars and Plates on the Elastic Base”, which selected as a subject of this thesis.

At the preparing stage of this thesis the subject examined in two main parts “ Matrix Method of Deplacement” and “Solutions with Numerik Methods”

In the first part, the Bar Systems on the Elastic Base was mentioned; the formulas developed by Geckeler, Jelinek, Avrimiou and Avradiomus were used to reach the solutions. The developed computer programs were used to solve these systems , some detailed informations and exampels related with the using of these programs had been pretended in this thesis.

In the second part, “Solution of the Plate Systems” were given some informations about these methods by using Finite Differences and Finite Element Methods.

For solution, some computer programs were developed and they presented by exampels in this part also as in the first part.

As preparing of this computer programs, it provided easiness by arranging of matrix form of these methods. By mean of these type arranged computer programs, the most correct values could be obtained in a shortest time.

I.ELASTİK ZEMİNE OTURAN ÇUBUK SİSTEMLERİN MATRİS DEPLASMAN METODU İLE ÇÖZÜMÜ

I.1.Matris Deplasman Metodu

I.1.1.Giriş ve genel tanımlar

Matris Deplasman Metodu, bilinen Açı Metodunun [19] bilgisayar ortamında hesaplanabilmesini sağlayan matris şeklinde yazılmış bir formudur. Bu kısımda, sistemin şekil değişimine yol açan kesit tesirlerinden normal kuvvetlerin kesit tesiri dikkate alınmaksızın sürekli bir kiriş örnek olarak alınmıştır. Taşıyıcı sistem sonlu sayıda kiriş elemanlarına ayrılarak idealize edilmiştir. Bu amaçla dikkate alınacak “Yedek Sistem” düğüm noktasına bağlı olan veya bağlı olduğu farz edilen sonlu sayıda kiriş elemanlarından oluşmaktadır(şekil 3.7.c). Aynı Açı Metodunda olduğu gibi $\bar{d}$ düğüm dönmeleri ve deplasmanları, kiriş uçlarındaki kesit tesirleri ile ilgili olan şekil değiştirme ve dönme büyüklüğü olarak alınır. Aranılan $\bar{X}, \bar{Z}$ koordinat sistemindeki düğüm deplasmanları düğüm noktasının denge şartlarından elde edilmiştir.

$$\bar{K} \cdot \bar{d} = \bar{p}$$

Burada (1.1)

$$\bar{p} = [\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \dots \bar{p}_n]^T$$
(1.2)

şeklinde düğüm noktasına etkiyen ve dış yüklerden oluşan bir sütun matristir.

(1.1) deki düğüm deplasmanlarını gösteren $\bar{d}$ sütun matrisi ise:

$$\bar{d} = [\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3 \dots \bar{d}_n]^T$$
(1.3)

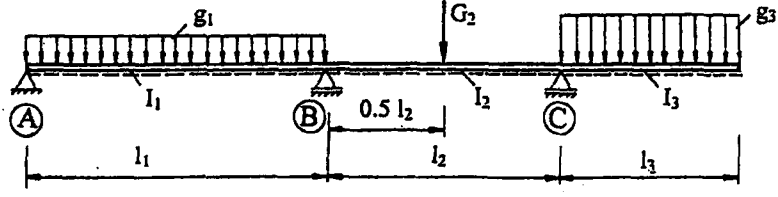
şeklindedir.

İndisler yedek sistemin düğüm noktası hareketlerini göstermektedir.

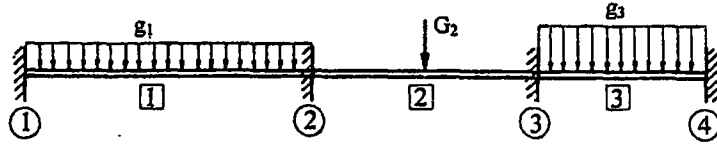
(1.4)

$$K = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \dots 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \dots 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \dots K_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & K_{n3} & K_{nn} \end{vmatrix}$$

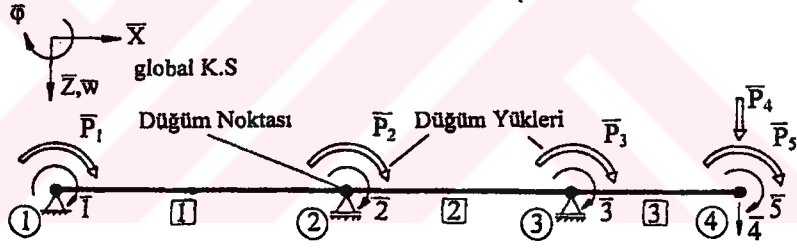
Denklem (1.1)de kirişin Sistem Rijitlik Matrisi gösterilmiştir.



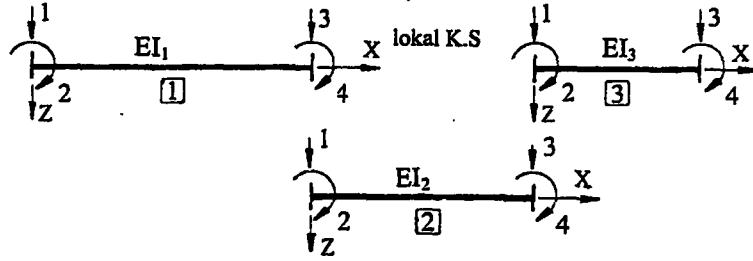
a) Taşıyıcı Sistem



b) Kinematik Belirlenmiş Sistem



c) Yedek Sistem



d) Lokal koordinat sisteminde sonlu kiriş elemanları

Şekil 1.1 Sürekli kirişin sonlu elemanlara ayrılması

Matris Deplasman Metodunun asıl amacı:

- A) Tekil Eleman Rijitlik Matrislerinden Sistem Rijitlik Matrisinin elde edilmesi
- B) Düğüm noktasına etkiyen kuvvetlerin bulunmasıdır.

$$\bar{d} = \bar{K}^{-1} \bar{p} \quad (1.5)$$

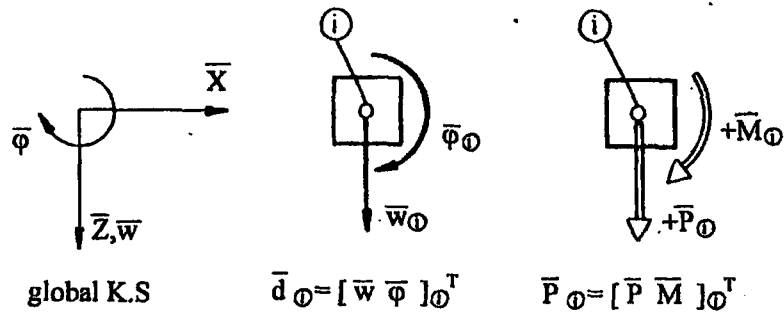
Matris Deplasman Metodunun temel denklemi tüm düğüm noktalarının iç ve dış kuvvetlerinin denge şartlarından veya Toplam Potansiyel Enerjinin Minimumu prensibinden bulunabilir. Matris Deplasman Metodunda çözüm yöntemi şu aşamalardan oluşmaktadır:

- Taşıyıcı sistemin sonlu elemanlara ayrılması
- Düğüm deplasmanların numaralanması(1.3)
- Düğüm yüklerinin hesaplanması(1.2)
- Tekil Eleman Rijitlik Matrislerinin bulunması
- Sistem Rijitlik Matrislerinin hesaplanması(1.4)
- Şekil değiştirmelerin hesaplanması
- Kesit tesirlerin ve çubuk uç kuvvetlerinin hesaplanması

I.1.2.Yedek Sistem

Matris Deplasman Metodunun hesaplanmasında birinci adım taşıyıcı sistemin, herbirine etkidiği kuvvet ve deplasman durumları belli olan sonlu elemanlara ayrılmasıdır. Yedek Sistem bu sonlu kiriş elemanlarının birleştirilmesi sonucu elde edilir. Sonlu kiriş elemanlarında EI Eğilme Rijitliği sabit olup, her iki ucu düğüm noktaları ile sınırlanmıştır. İkinci adımda düğüm noktaları dış yüklerin sebep olacağı dönme veya ötelenme şeklindeki deformasyonlardan etkilenmeyecek şekilde sabit tutulur(Şekil 1.b.). Yüklerin düğüm noktalarına değil de kirişe etkidiği durumda ankastre uç kuvvetleri geçerli olacaktır. Bu kuvvetlerin ters işaretlisi Yedek Sistemde düğüm kuvveti olarak alınacaktır. Daha öncede belirttiğimiz gibi düğüm deplasman büyüklükleri, (1.1) temel denkleminde ve (1.3)sütun matrisindeki indisler, mevcut düğüm deplasmanlarını göstermek üzere verilmiştir. Yedek Sistemin $\bar{d}$ düğüm noktası hareketleri $\bar{X}, \bar{Z}$ koordinat sisteminde gösterilir. Bu global sistemdeki her büyüklük üzeri çizgili olarak tanımlanır, düğüm noktaları soldan sağa numaralanır. Burada Sistem Rijitlik Matrisinin band genişliği küçük olacaktır. Bu sistemin çözümü için aşağıdaki işaret kuralı geçerlidir:

- Düğüm deplasmanları ve kuvvetleri eğer yönleri global kordinat sistemlerinin eksenleri doğrultusunda ise pozitifdir.
- Düğüm dönme açısı ve momenti saat ibresi yönünde ise pozitifdir.



Şekil 1.2 Düğüm deplasman ve kuvvetlerinin pozitif yönleri

$$[k]^{(N)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = [EI]^{(N)} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{-12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{-6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ \frac{-12}{l^3} & \frac{-6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{-6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{-6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

(1.6) Rijitlik Matrisi denkleminin elemanları değişik enerji metodları ile de belirlenebilirler. Virtüel İş prensibine göre [1]:

$$k_{ii} = \int_0^l \Phi_i (EI) \Phi_i \, dx = k_{ij} \dots \dots (i = 1,2,3,4); (j = 1,2,3,4) \quad (1.7)$$

Burada $\Phi_i(x)$ ve $\Phi_j(x)$ Şekil Değiştirme Fonksiyonlarıdır. Eğilme etkisine maruz bir kiriş elemanının Şekil Değiştirme Fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) &= w_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \Phi_2(\xi) &= w_2(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ \Phi_3(\xi) &= w_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \Phi_4(\xi) &= w_4(\xi) = -\xi^2 + \xi^3 \\ \xi &= \frac{x}{l} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Virtüel İş ve Şekil Fonksiyonları yardımıyla düğüm noktaların indirekt etkiyen dış yükler düğüm noktalarına indirgenebilir[1]. Düğüm noktası yükleri aşağıdaki denklemden

$$P_{ij} \cdot 1 = \int_0^l p_z(x) \cdot \Phi_j \cdot dx$$

bulunur.

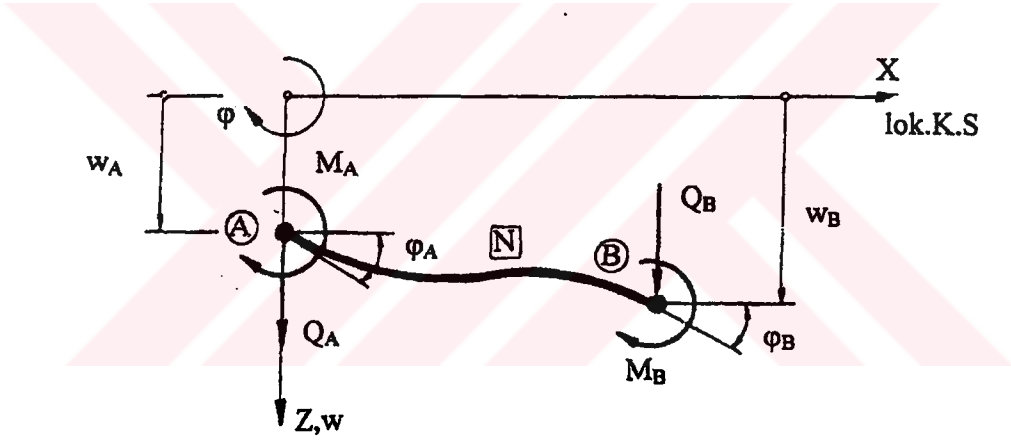
(1.9)

(1.6)denklemini simetriktir ve X,Y koordinat sisteminde hesaplanır.Buna göre $d^{(N)}$ eleman düğüm deplasman büyüklükleri ve $s^{(N)}$ kiriş uç kesit tesir kuvvetleri analog sırada toplanabilir.

$$d^{(N)} = \begin{bmatrix} d_1 = w_A \\ d_2 = \varphi_A \\ d_3 = w_B \\ d_4 = \varphi_B \end{bmatrix}^{(N)} \quad \text{ve} \quad s^{(N)} = \begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_B \\ M_B \end{bmatrix}^{(N)}$$

(1.10)

Daha önceki bölümde açıklanan pozitif işaret kuralı burada da geçerlidir.



Şekil 1.4 Pozitif düğüm deplasmanları ve kesit tesir değerleri

1.1.4.Yedek Sistem Rijitlik Matrisinin bulunması

Bir problemin Matris Deplasman Metodu ile çözümlenebilmesi için yedek sistemin $\bar{K}$ Sistem Rijitlik Matrisin bulunabilmesi gerekir. $\bar{K}$ Sistem Rijitlik Matrisi tekil elemanların $\bar{k}$ rijitlik matrislerinden hesaplanacaktır. Biz burada lokal ve global eksenleri paralel ve aynı yönde olan sistemi ele alacağız.Bunun için

a) Sınır ve ara şartlarının belirlenmesi ile ilgili ön çalışma

Lokal Eleman Rijitlik Matrisi tekildir(inversi yoktur). Fakat sınır ve ara şartların matrisleri tekil değildir. $\bar{k}_{ij}$ Rijitlik Matrisinin $\bar{K}$ Sistem Rijitlik Matrisindeki yeri ij indis numaraları ile belirlenmiştir.($i \neq 1, j \neq j$). İşlemlerin yapılabilmesi için tablolar yardımıyla lokal numaralar global numaralara dönüştürülür.Aşağıdaki tabloda:

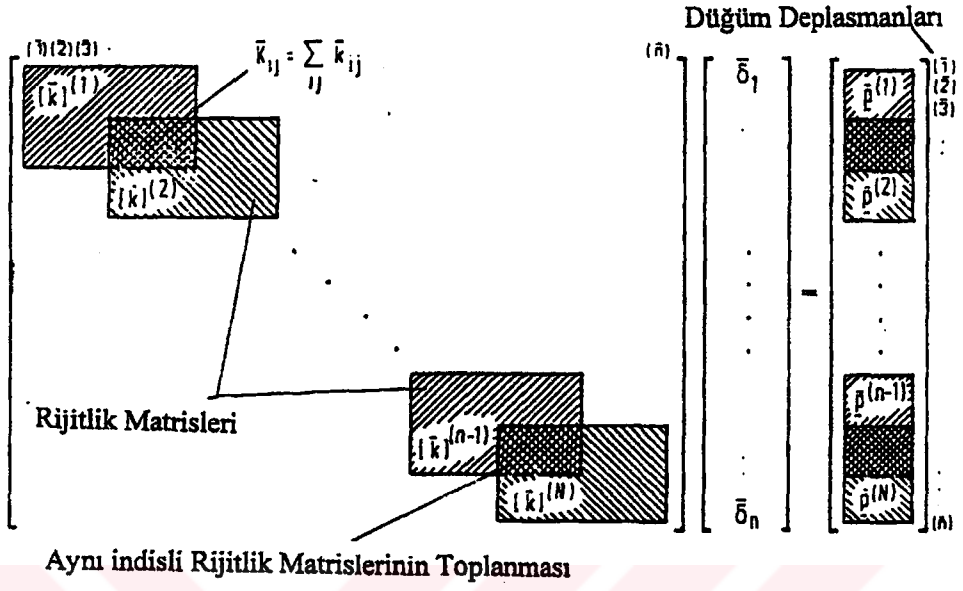
N ELEMANI	1	2	3	4	LOKAL NUMARA
1	0	1	0	2	GLOB. NUMARA
2	0	2	0	3	GLOB. NUMARA
3	0	3	4	5	GLOB. NUMARA

Lokal serbestlik derecelerin global serbestlik derecelerine döndürülmesi ile elde edilen matriste eğer herhangi bir satır veya sütunda 0 değeri varsa o satır veya sütun silinir. Böylece aynı indisli rijitliklerin toplanması ile aranan $\bar{K}$ değeri elde edilir.Bu işlem aşağıdaki şekilde formüle edilmiştir:

$$\bar{K}_{ii} = \sum_{ii} \bar{k}_{ii}^{(N)} \quad \text{ve} \quad \bar{K}_{ij} = \sum_{ij} \bar{k}_{ij}^{(N)}$$

(1.11)

Artık (1.1)da verilen denklem çözülebilir hale gelmiştir.



Şekil 1.5. Temel denklemin oluşturulması

b) Sınır ve ara şartların yerleştirilmesi ile ilgili çalışma

Bu yolla yapılacak çözümde düğüm noktasındaki elemanın sahip olduğu serbestlik derecesi(bizde iki) bir kenara bırakılmıştır. Lokal koordinat sisteminden global koordinat sistemine dönüşüm yapılırken aynen yukarıdaki gibi $\bar{0}$ değeri dikkate alınmaz(Bu değer matriste olmamalıdır). Böylece oluşan rijitlik matrisi K^* olarak tanımlanır. Bu matris tekildir. Bu matrisin invers matrisinin bulunabilmesi için global deplasman büyüklükleri içeren satır ve sütunlara 0 değeri verilir. Daha sonra ana diagonal elemanı için 1 değeri elde edilir. Bu durumda eleman yük vektörü 0 değerini almalıdır.

c)Düzenleme Matrisi ile hesap

Elemanların $\bar{k}$ matrislerinin biraraya toplanmasıyla oluşan $\bar{K}$ Sistem Rijitlik Matrisi elemanın $\bar{K}$ diagonal hypmatrisinin simetrik transformasyon ve $[\bar{a}]$ tranformasyon matrisi yardımıyla bulunabilir.Hesaplanan bu matrisin ana diogonalinde tekil $[\bar{k}]^{(n)}$ matrisleri mevcuttur.

$$\bar{K} = [\bar{a}]^T [\bar{K}] [\bar{a}] \quad (1.12)$$

Yani elemanın süreklilik şartları yerine sınır şartları ile çalışılmıştır.Bunu takiben eğer sistemde rijit gövde hareketleri mevcutsa $\bar{K}$ matrisi de tekil bir matris olur.Yedek sistemin süreklilik ve sınır şartları Düzenleme Matrisi kullanılarak dikkate alınır.

$$[\bar{K}] = \begin{vmatrix} [\bar{k}]^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\bar{k}]^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & [\bar{k}]^{(3)} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [\bar{k}]^{(R)} \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

Bu elemanları 0 veya 1 değerlerini alan $[\bar{a}]$ Düzenleme Matrisi (Boole Matrisi) ile yedek sistemdeki bazı düğüm noktası deplasmanları sayısı azaltılırken aynı zamanda $\bar{k}$ tekil rijitlik matrislerinden $\bar{K}$ Sistem Rijitlik Matrisi elde edilmiş olur.

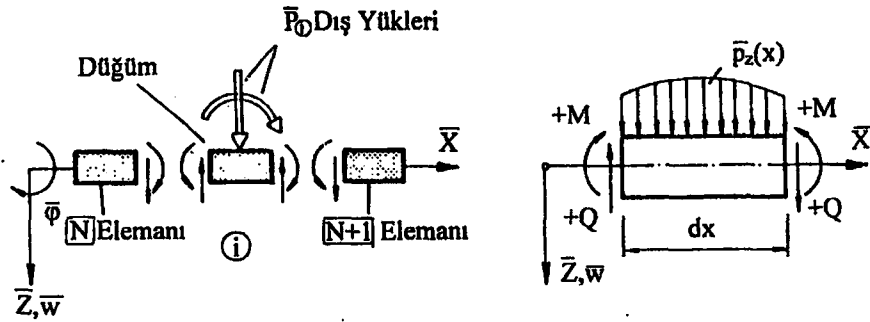
I.1.5.Kesit tesirlerinin bulunması

Denklem (1.1) i daha önce verilen metoda göre incelersek Yedek Sistemin $\bar{X}, \bar{Z}$ global koordinat sistemindeki $\bar{d}$ düğüm deplasman büyüklüklerini elde ederiz. Yukarıda değinilen konuların dikkate alınmasıyla lokal ve global serbestlik dereceleri arasındaki ilişkiyle $\bar{d}$ çubuk uç deplasmanları $\bar{X}, \bar{Z}$ koordinat sisteminde elde edilir. Tekil elemanların düğüm noktası deplasmanları ile aynı zamanda çubuk uç kesit tesirleri de elde edilir.

$$s^{(N)} = \begin{Bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_B \\ M_B \end{Bmatrix}^{(N)} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix}^{(N)} \cdot \begin{Bmatrix} w_A = d_1 \\ \varphi_A = d_2 \\ w_B = d_3 \\ \varphi_B = d_4 \end{Bmatrix}^{(N)} \quad (1.14)$$

Burada $s^{(N)}$, σ ve τ değerlerinin hesaplanabileceği kesit tesirleri vektörüdür. Düğüm noktaları arasına yüklenilmiş elemanın kesit tesirleri ile Kinematik Belirlenmiş Sistemin kesit tesirleri benzerlik gösterir.

Burada aşağıdaki tabloda gösterilen işaret kuralı geçerlidir.



Şekil 1.6. Düğüm yükleri ve kesit tesirleri

I.2.Elastik Zemine Oturan Kirişin Matris Deplasman Metodu ile Çözümü

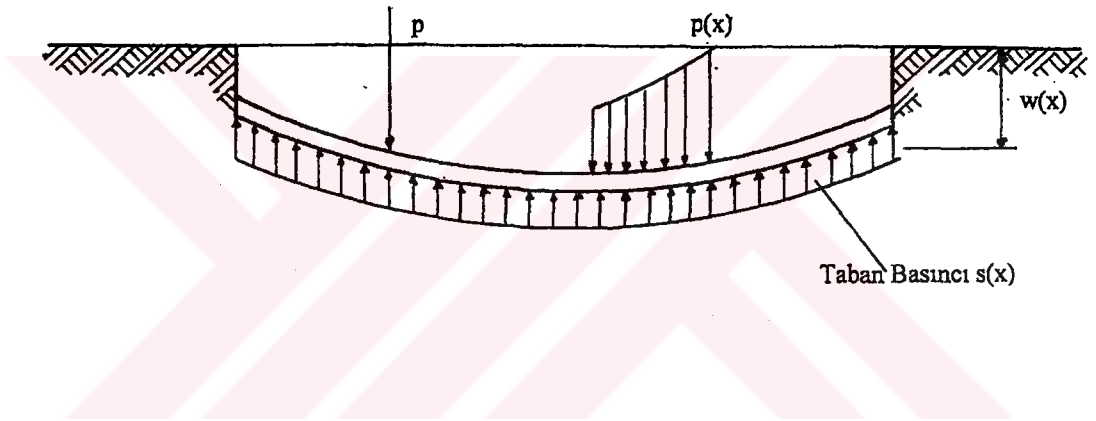
I.2.1.Giriş

Temel kirişleri pratikte elastik ortama oturan bir sistem şeklinde düşünülür ve hesaplanır. Böyle bir kiriş elastik ortamdaki bir sürekli kirişin sınır şartlarına sahiptir(mesnet çökmeleri önemsenmeyecek kadar küçüktür). Yapılan hesaplarda kirişin $w(x)$ çökme değerleri ile $s(x)$ taban basıncı arasında doğru bir orantı olduğu kabul edilir[21].

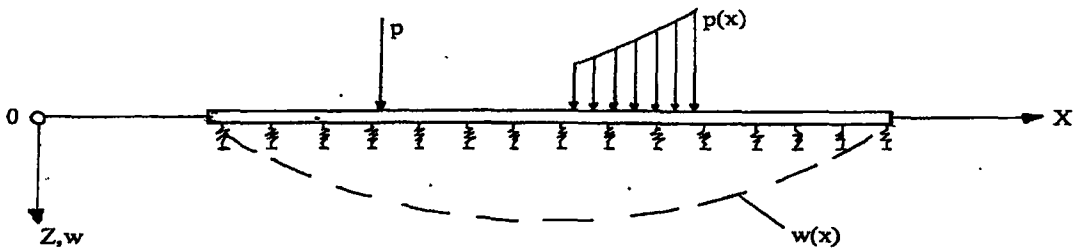
$$s(x)=K \cdot w(x)$$

Burada $K[\text{kN/m}^3]$ Zemin katsayısını ifade etmektedir. Zemin katsayısı ile kiriş boyutunun çarpılması bize Zemin Elastisite modülünü $E_s[\text{kN/m}^2]$ verir. K Zemin katsayısının belirlenmesi bilindiği üzere zemin mekaniğinin bir konusudur. Ayrıca zeminin elastik yay şeklinde düşünüldüğünde basınç gerilmesi mi çekme gerilmesi mi aldığı da bir sorudur. Çünkü kirişin zemin gerilmelerinden dolayı yükselmesi de mümkün olabilmektedir.

Bütün bu bilgiler ışığında kiriş tabanına gelen çökme ile orantılı hesap metodu tam olarak tüm zemin çeşitlerindeki özellikleri yansıtmasa da bir çok zemin çeşitlerinde gerçekteki çökme değerlerine uygunluk göstermektedir.



a) Zeminin şekil değişimi



b)Basitleştirilmiş model

Şekil 1.7. Temel kirişi

Bu problemde çökmelere ait diferansiyel denklem 4.mertebeden olmaktadır. Öte yandan kirişin ağırlığı, kirişin zeminden yükselmesini de bir ölçüde engellemiş olur. Bu metoddaki en büyük hata kayma mukavemetinden oluşan etkinin yok kabul edilmesidir. Bütün bu eksiklere rağmen bu metod temel hesaplarında sıkça kullanılmaktadır. Hesaplarda K zemin katsayısının DIN Standartlarına göre ortalaması alınmış değeri (en büyük ve en küçük K değerleri alınarak) kullanılır. Yine de güvende kalmak için zemin basıncı hesaplanırken K_{max} ; Eğilme momenti hesaplanırken K_{min} değerleri kullanılır[22].

Ayrıca bu klasik teorisinin yanında elastik zemine oturan kirişler için Geckeler'in Kabuklar için Yaklaşık Eğilme Teorisi de kullanılabilir.

Bu çalışma da verilecek olan bilgisayar programı ile elastik zemine oturan sistemlerin çözümü yapıp , kirişin şekil değişimi,kesit tesirleri ve taban basıncı bulunabilecektir.

1.2.2.Hesap esasları

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0 \quad (1.15)$$

Bu metoddaki temel kirişi, etkiyen yüklerin tatbik noktalarında,sistem kesitinin değişerek sürekliliğin bozulduğu noktalarda ... bölümlere ayrılarak hesap yapılmaktadır. Bu noktalar arasındaki kısımlarda zemin katsayısı değerlerinin ve rijitlik değerlerinin aynı olduğu varsayılır. Kirişin Rijitlik Matrisi $[k]^{(N)}$ Elastik zemine oturan kirişin diferansiyel eşitliğinden bulunur.

$$[k]^{(N)} = \frac{2EI\lambda}{\ell(\sin^2 \lambda - \sinh^2 \lambda)} \begin{bmatrix} a_2 & -a_4 & a_6 & -a_5 \\ -a_4 & a_1 & a_5 & a_3 \\ a_6 & a_5 & a_2 & a_4 \\ -a_5 & a_3 & a_4 & a_1 \end{bmatrix}^{(N)} \quad (1.16)$$

Burada

$$\lambda = \ell.\beta = \ell.\sqrt{\frac{Kb}{4EI}}, K = \text{Zemin katsayısı} \quad (1.17)$$

Ve

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sin \lambda . \cos \lambda - \sinh \lambda . \cosh \lambda \\
a_2 &= -2(\lambda / \ell)^2 (\sin \lambda . \cos \lambda + \sinh \lambda . \cosh \lambda) \\
a_3 &= \sinh \lambda . \cos \lambda - \cosh \lambda . \sin \lambda \\
a_4 &= (\lambda / \ell)(\sin^2 \lambda + \sinh^2 \lambda) \\
a_5 &= 2(\lambda / \ell)(\sin \lambda . \sinh \lambda) \\
a_6 &= 2(\lambda / \ell)^2 (\sinh \lambda . \cos \lambda + \cosh \lambda . \sin \lambda)
\end{aligned}$$

(1.18)

Bu metotta da dış yükleri düğüm noktalarına indirgeriz. Dış yükler düşey doğrultudaki kuvvetlerden ve momentlerden oluşur. Burada dış kuvvetler için positif yön Z-eksenin yönüdür, dış momenlerin pozitif yönü de saat yönünde alınacaktır.

Ahrens ve Winselmann Zemin Katsayısı Metodunu zeminin kayma mukavemetini de göz önüne alarak geliştirmişlerdir. Bu yöntemle zeminin çökmesi ile kirişin şekil değiştirmesi arasındaki ilişkinin birbirine eşitliği de sağlanmış olmaktadır[25]. Çökme değerleri Jelinek formülleri ile bulunur.

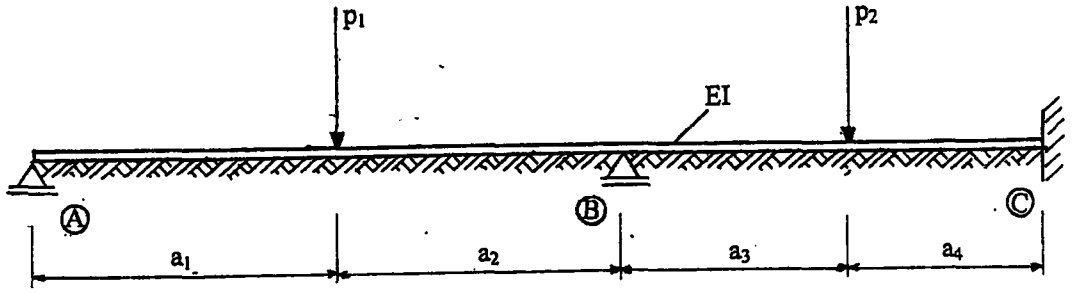
1.2.3. Bilgisayar programı ile çözülecek sisteme ait verilerin hazırlanması ve tanımı

Bilgisayar programında veri olacak bilgilerde boyut homojenliğine dikkat etmek gerekir. Özellikle kullanılan yükler için [kN] ve uzunluk için [m] birimleri alınabilir. Ayrıca Zemin Elastisite Modulu E_s [kN/m²]ve Zemin Katsayısı K [kN/m³] olmalıdır. Sisteme ait düğüm noktaları(genelde kuvvetin etki ettiği noktalarda), ayrıca boyu uzun olan bölgeler mümkün olduğu kadar küçük mesafelere bölünmelidir. Aralık sayısı en fazla 30 olmalıdır. Sonlu giriş elemanları soldan sağa doğru numaralanır ve bunlar arasındaki mesafeler belirlenir.(Şekil 1.8.b)

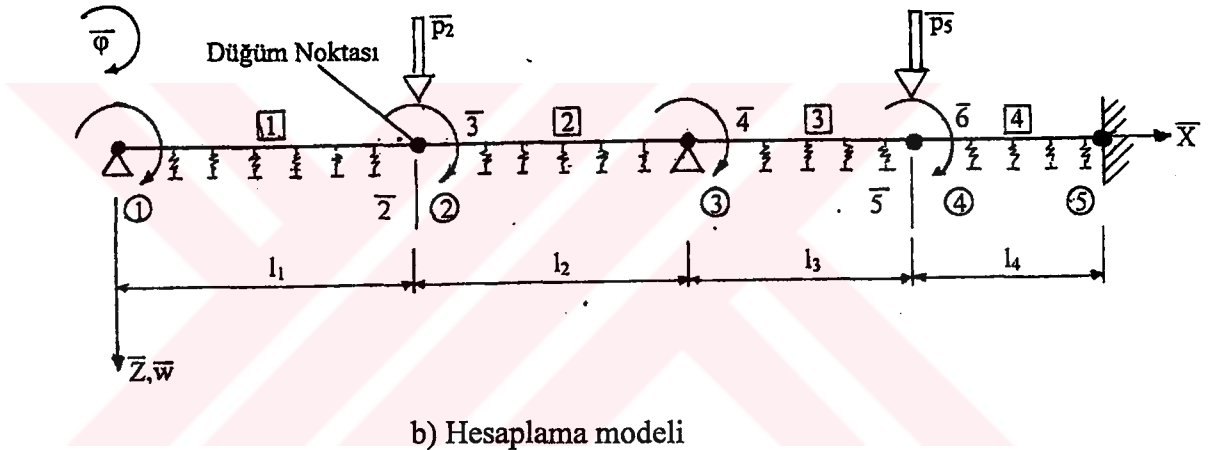
Bu programda referans sistemi olarak $\bar{X}, \bar{Z}$ kartezyen koordinat sistemi kullanılmaktadır. Referans sisteminin orijini olarak girişin başlangıç noktası alınmalıdır. Yatay $\bar{X}$ eksen girişin eksenine ile çakışacak şekilde alınır. $\bar{Z}$ eksenine ise başlangıç noktasından aşağı yönde seçilir.

Yayıllı yüklerin elastik zemine oturan girişe etki ettiği hallerde bu yayıllı kuvvetlere eşdeğer bileşke kuvvet düğüm noktalarına indirgenir.

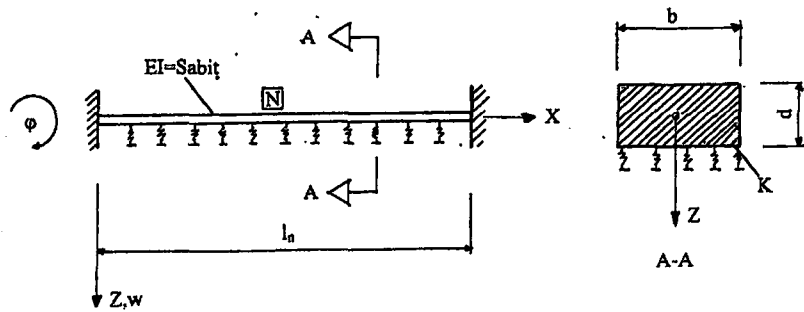
Kirişin iki tarafı ankastre olduğu düşünülerek yapılan Matris Deplasman Metodu ile girişin mesnet reaksiyonları hesaplanır. Hesaplanan mesnet reaksiyonlarının ters işaretli olanları bize aranan düğüm noktası kuvvetlerini verecektir.



a) Taşıyıcı sistem ve dış yükler

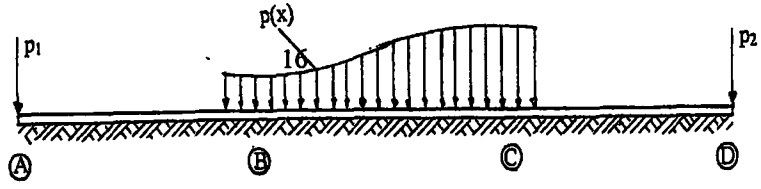


b) Hesaplama modeli

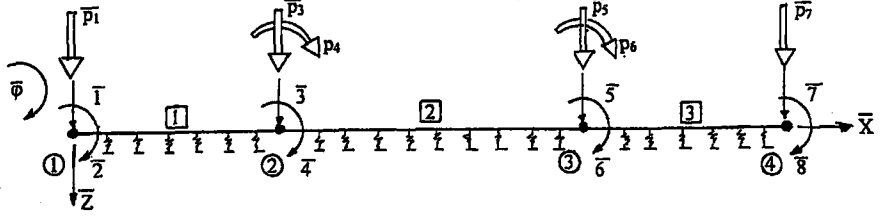


c) Elastik ortamdaki giriş

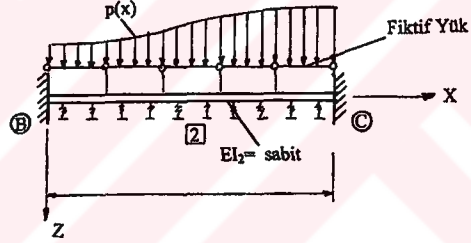
Şekil 1.8.Elastik zemine oturan sürekli temel



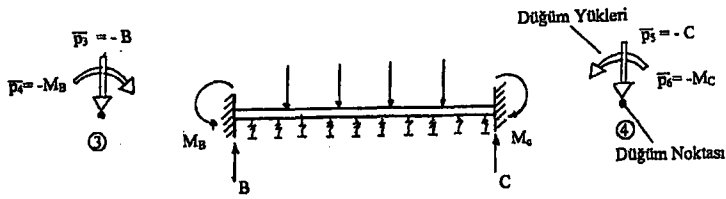
a) Taşıyıcı sistem ve dış yükler



b) Hesaplama modeli



c) Elastik ortamdaki kiriş



d) Eşit yükleme

Şekil 1.9 Elastik zemine oturan kiriş

Bu programda veriler ekrana dialog formunda yansımaktadır. Bunu tabloda da görmek mümkündür. Bu dialog formuna göre girilecek veriler aşağıda gösterildiği gibidir:

Sistemin bölüm sayısına göre her bölüm için boy, kesit yüksekliği ve genişliği , atalet momenti ve zemin katsayısı girilecektir.

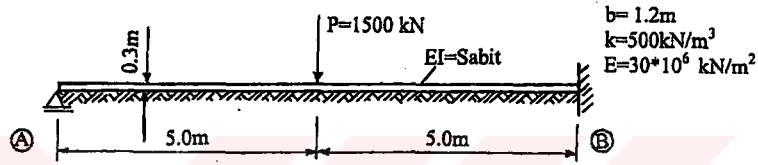
Mesnet sayısı en fazla 10 olmalıdır. Bu sayıdaki mesnetler için mesnetler verilmiş olan numaralar girilerek her mesnetin özelliğine göre deplasman engellemeleri belirtilmelidir.

Yüklemeye verilerinin girilmesi menüden "0" seçilmesiyle yapılabilecektir.

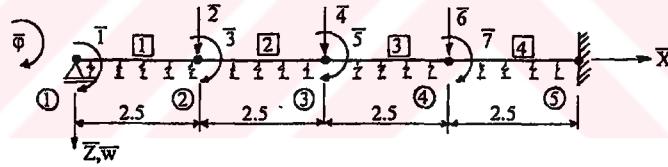
Dış yükler için pozitif yön X ve Z eksenleri olduğu gözönünde bulundurulmalıdır.

Program sonunda alınacak çıktılarda, her düğüm noktasındaki w çökme değerleri Q kesit tesirleri ve s taban basınç değerleri elde edilebilecektir.

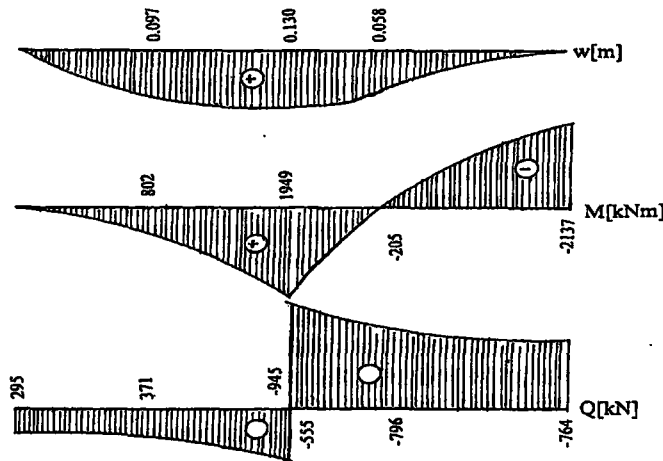
Program menüsünden "2" secilerek yeni yük hali girilebilir; "3" secilerek veri kontrolü yapılabilir ve "4" seçilerek de printer çıkışı alınabilir. Örnek:



a) Taşıyıcı sistem ve dış yükler



b) Hesaplama modeli



ÖRNEK

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞ

DOSYA NO(EN FAZLA 4 RAKAM) : XXXX
 VERİLER EKRANA(0) DİSKETE (1) GİRİLMİŞTİR : 0
 UZAKLIK SAYISI(MAX.40) : 4
 MESNET SAYISI(MAX.10) : 2
 KİRİŞİN ELASTİSİTE MODULU $E_s(kN/m^2)$: $3 \cdot 10^7$

SİSTEM VERİLERİNİN GİRİLMESİ

KESİT DEĞERLERİ					ZEMİN KAT.
UZAKLIK	L(m)	D(m)	B(m)	I (m ⁴)	K(kN/m ³)
1	2.500	0.300	1.200	0.003	500.000
2	2.500	0.300	1.200	0.003	500.000
3	2.500	0.300	1.200	0.003	500.000
4	2.500	0.300	1.200	0.003	500.000

MESNET DURUMLARININ GİRİLMESİ

NOKTA	DİKEY BAĞLI(Y/N)	ANKASTRE(Y/N)
1	J	N
5	J	J

(1) NOLU YÜKLEME İÇİN YÜK DEĞERLERİNİN GİRİLMESİ

NOKTA	X(m)	P(kN)	M(kNm)
3	5.000	1,500.000	0,000

KESİT TESİRLERİ VE ŞEKİL DEĞİŞTİRMELER

NOKTA	W(m)	PHI(-)	M(kNm)	QL(kN)	QR(kN)
1	0	0.043	0	0	294.856
2	0.097	0.031	802.127	371.380	371.380
3	0.130	- 0.010	1,948.835	554.589	- 945.412
4	0.058	- 0.036	- 205.056	- 796.451	- 796.451
5	0	0	- 2,137.339	- 764.451	0

MESNET REAKSİYONLARI

NOKTA	X(m)	P(kN)	M(kNm)
1	0	294.856	0
5	10.000	764.451	2,137.339

BİLGİSAYAR MENÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞ

DOSYA NO(EN FAZLA 4 RAKAM) :
 VERİLER EKRANA(0) DİSKETE (1) GİRİLMİŞTİR :
 AÇIKLIK SAYISI(MAX.40) :
 MESNET SAYISI(MAX.10) :
 KİRİŞİN ELASTİSİTE MODULU $E_s(kN/m^2)$:

SİSTEM VERİLERİNİN GİRİLMESİ

UZAKLIK	KESİT DEĞERLERİ			ZEMİN KATSAYISI
	<u>L(m)</u>	<u>D(m)</u>	<u>B(m)</u>	<u>K(kN/m³)</u>
1	****	****	****	****
2	****	****	****	****
3	****	****	****	****

MESNET DURUMLARININ GİRİLMESİ

NOKTA	<u>DÜŞEY DEP. ENGELLEME</u>	<u>DÖNME ENGELLEMESİ</u>
	<u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>
*	*	*
*	*	*

(1) NOLU YÜKLEME İÇİN YÜK DEĞERLERİNİN GİRİLMESİ

<u>NOKTA</u>	<u>X(m)</u>	<u>P(kN)</u>	<u>M(kNm)</u>
1	****	****	****
2	****	****	****
3	****	****	****

SİSTEM VERİLERİNİN KONTROLÜ

<u>UZAKLIK</u>	<u>L(m)</u>	<u>D(m)</u>	<u>B(m)</u>	<u>K(kN/m³)</u>
1	****	****	****	****
2	****	****	****	****
3	****	****	****	****

MESNET DURUMLARININ GİRİLMESİ

<u>NOKTA</u>	<u>DÜŞEY DEP. ENGELLEME</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>
*	*	*
*	*	*

(1) NOLU YÜKLEME İÇİN YÜK DEĞERLERİNİN KONTROLÜ

<u>NOKTA</u>	<u>X(m)</u>	<u>P(kN)</u>	<u>M(kNm)</u>
1	****	****	****
2	****	****	****
3	****	****	****

VERİLER BİR DAHA GÖZDEN GEÇİRİLMELİ Mİ?(EVET=Y;HAYIR=N)
 VERİLER DİSTETE KAYDEDİLMELİ Mİ?
 VERİLER 'B:BETTxxxx.DAT' DOSYASINA KAYDEDİLECEKTİR!!!

ŞEKİL DEĞİŞTİRME(W,PHI)-KESİT BÜYÜKLÜKLERİ(M,QL,QR)-ZEMİN B.(S)

<u>NOKTA</u>	<u>W(m)</u>	<u>PHI(-)</u>	<u>M(kNm)</u>	<u>QL(kN)</u>	<u>QR(kN)</u>	<u>S(kN/m²)</u>
1	****	****	****	****	****	****
2	****	****	****	****	****	****
3	****	****	****	****	****	****

MESNET KUVVETLERİ-EĞİLME MOMENTİ)

<u>NOKTA</u>	<u>A(kN)</u>	<u>M(kNm)</u>
*	****	****
*	****	****

PROGRAMI BİTİRME	0
YENİ SİSTEM	1
YENİ YÜK HALİ	2
SONUÇ KONTROL	3
ÇIKTI ALINMASI	4
LÜTFEN BİR RAKAM SEÇİNİZ	*

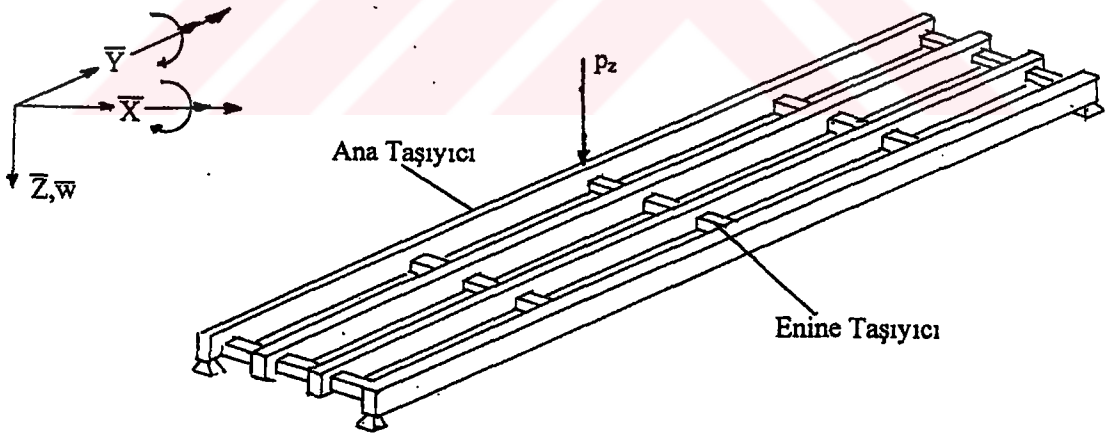
I.3.Elastik Zemine Oturan Izgara Sistemlerin Matris Deplasman Yöntemi ile Hesabı

I.3.1.Izgara Sistemler hakkında bilgi

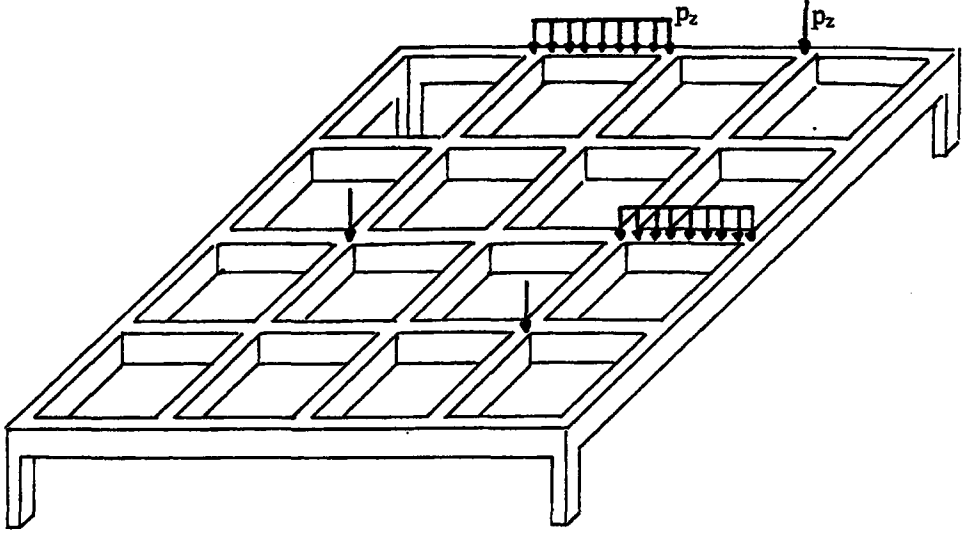
I.3.1.1 Giriş ve genel tanımlar

Taşıyıcı Izgara Sistem $\bar{X}, \bar{Y}$ düzleminde birbirini kesen birçok kirişin bir araya gelmesinden oluşur. Bu kirişlerin birbirini kestiği düğüm noktaları, çökme ve $\bar{X}, \bar{Y}$ eksenleri etrafında dönme yapabilecek serbestliklere sahiptir. Izgara Sistemine etki eden yükler $\bar{X}, \bar{Y}$ düzlemine dik olacak şekildedir. (Şekil 1.11) Buna göre böyle bir Izgara Sistemde M Eğilme Momenti , Q Kesit Kuvveti ve M_t Burulma Momenti ortaya çıkar.

Köprü inşaatında, ana taşıyıcı sistemlerin eğilme yükünü azaltmak amacıyla enine taşıyıcılar kullanılarak ızgara sistem oluşturulur(Şekil 1.11.a). Yüksek yapılarda ise genelde üç veya dört kenarından mesnetlenmiş taşıyıcı ızgaralar kullanılır (Şekil 1.11.b)



a) Köprü kirişleri



b) Belli bir alanın ızgara taşıyıcı sistemle kapatılması

Şekil 1.11. Yüksek yapı ve köprü yapılarında ızgara sistemler

Bu amaçla hazırlanan bilgisayar programında Izgara Sistemin, her elemanının eğik açılı olarak düzenlenmesi hali dikkate alınarak analiz yapılmaktadır. Buradaki hesap yöntemi de Matris Deplasman Metoduna dayanmaktadır. Önümüzdeki program düğüm noktalarının

$$\bar{\delta}_i = [\bar{w} \ \bar{\theta} \ \bar{\varphi}] T_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (1.19)$$

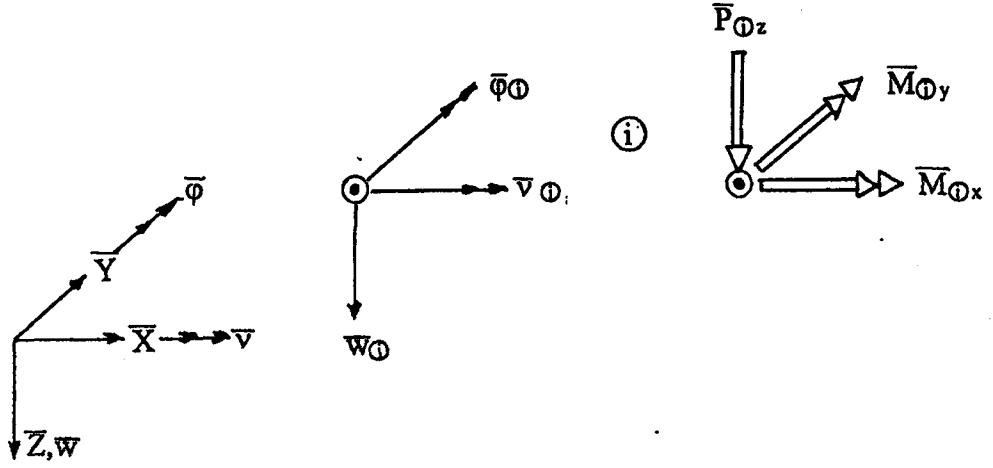
ızgara düzlemine dik doğrultudaki deplasmanlar Z eksenine göre alınır.

Denklem (1.19) da

$\bar{v}$ $\bar{X}$ -ekseni etrafındaki dönme

$\bar{\varphi}$ $\bar{Y}$ -ekseni etrafındaki dönme

Deformasyonlar için geçerli ön işaret kuralı Şekil 1.12 de gösterilmiştir.



a) i noktasındaki deformasyonlar için Glob.koor. sist. göre (+)yön b) Düğüm yükleri

Şekil 1.12 İşaret kuralı

Seçilen herhangi bir $[N]$ elemanın çubuk eksenine göre $(X,Y,Z)^{(N)}$ lokal koordinat sistemindeki çubuk uçlarındaki kesit tesirleri:

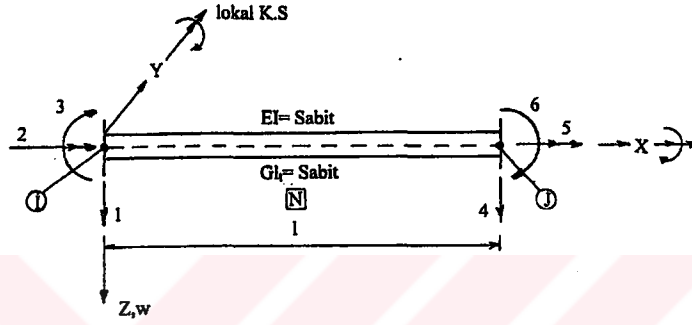
$$s_i^{(N)} = \begin{bmatrix} Q \\ M_t \\ M \end{bmatrix}_i^{(N)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, M-1) \quad (1.20)$$

$$(N = 1, 2, 3, \dots, M)$$

veya

$$s_i^{(N)} = \begin{bmatrix} Q \\ M_t \\ M \end{bmatrix}_i^{(N)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (N = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (1.21)$$

şeklindedir.



Şekil 1.13 Taşıyıcı ızgara elemanı

Yüklenme, düğüm noktalarına etki eden tekil kuvvetlerden veya momentlerden (Şekil 1.17.b) ve

$$\bar{P}_1 = [\bar{P}_z \quad \bar{M}_x \quad \bar{M}_y]_1 \quad (1.22)$$

eleman düzeyinde $p_z(x)$ uniform yayılı sıra yüklerinden oluşur (Şekil 1.11). Diğer çeşit yükler hesaplama tekniklerine uygun şekilde dikkate alınabilir. Ayrıca taşıyıcı elemanlarda gerektiği durumlarda arada kısmi noktalar düğüm noktaları olarak alınarak bu noktalardaki Eğilme momenti, Kesme kuvveti ve Burulma momenti değerleri ek olarak hesaplanabilir. Bu kısmi noktaların durumu lokal koordinat X eksenindeki x aralığı ile ilgili elemanın başlangıç düğümündeki orijin ile belirtilir. Bu durumda ön işaret kuralı Şekil 1.13 e göre tanımlanır. Bilgisayar programında 64 KB'e uygun olarak, düğüm noktalarının sayısı 50 değerini geçmemelidir. Ayrıca Taşıyıcı Izgara Elemanlarının sayısı da maksimum 80 olmalıdır. Daha büyük sistemlerde Alt Sistem Metodu uygulanır. Daha fazla hafıza kapasitesine sahip olduğunda, boyut ile ilgili terimler kaynak programında değiştirilmelidir.

I.3.1.2. Hesaplamanın ana prensipleri

Taşıyıcı Izgaraların hesaplanması Matris Deplasman Metodu ile yapılır. Taşıyıcı Izgara birbirine düğüm noktaları ile bağlantılı tekil elemanlara ayrılır. Taşıyıcı Izgaralarda bir araya toplanmış elemanlar düğüm noktalarını oluşturur. Eğer tekil kuvvetler bu düğüm noktalarına tesir ediyorsa o zaman alt bölünmeye devam etmek gereklidir. Taşıyıcı Izgaranın geometrisi global koordinat sistemi X,Y,Z deki her düğüm noktasının “i” koordinatları x_i ve y_i vasıtasıyla belirtilir. Her düğüm noktası ve her eleman numaralanacaktır. Burada anlamına uygun olarak daha önce de açıklanan kaideler geçerlidir.

Bir elemanın (Şekil 1.13) başlangıç düğümü “i” ve son düğümü “j” numaraları ile tanımlanır. Her ikisinin dizi sırası X ekseninin positif yönünü verir. “i” Başlangıç düğümünün konumu lokal koordinat sistemi X,Y,Z nin orijinini belirler. Bir Taşıyıcı Izgara Elemanının Rijitlik Matrisi şöyledir :

$$[k]^{(N)} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{t^3} & 0 & 6 \frac{EI}{t^2} & -12 \frac{EI}{t^3} & 0 & 6 \frac{EI}{t^2} \\ & \frac{GI_t}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{\ell} & 0 \\ & & 4 \frac{EI}{\ell} & -6 \frac{EI}{t^3} & 0 & 2 \frac{EI}{t} \\ & & & 12 \frac{EI}{t^3} & 0 & -6 \frac{EI}{t^2} \\ & & & & \frac{EI}{t} & 0 \\ \text{simetrik} & & & & & 4 \frac{EI}{t} \end{bmatrix}$$

(1.23)

Bu durumda GI_t kirişin Burulma Rijitliğini göstermektedir[19.20]. Ayrıca denklem (1.23) burulma ve eğilmeye ait terimlere ayrılmıştır.

Eğer lokal koordinat sisteminin X ve Y eksenleri global sisteme paralel değilse; bu halde bu eksenlere paralel X' , Y' durumuna dönüştürülmelidir. Bunun için gerekli Dönüşüm Matrisi şöyledir:

$$T^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}^{(N)} \quad (1.24)$$

burada

$$s = \sin \alpha \text{ ve } c = \cos \alpha$$

Dönüşüm bağlantısı [1]

$$[k']^{(N)} = (T[k]T^T)^{(N)} \quad (1.25)$$

X',Y',Z' koordinat sistemindeki Sistem Rijitlik Matrisini verir (Şekil 1.14)

$$[k']^{(N)} = \begin{bmatrix} 12 \frac{F_1}{\ell^2} & -6 \frac{F_1}{\ell} s & 6 \frac{F_1}{\ell} c & -12 \frac{F_1}{\ell^2} & -6 \frac{F_1}{\ell} s & -6 \frac{F_1}{\ell} s \\ & 4F_1 s^2 + F_2 c^2 & -(4F_1 - F_2)sc & 6 \frac{F_1}{\ell} s & 2F_1 s^2 - F_2 c^2 & (-2F_1 - F_2)sc \\ & & 4F_1 c^2 + F_2 s^2 & -6 \frac{F_1}{\ell} c & (-2F_1 - F_2)sc & 2F_1 c^2 - F_2 s^2 \\ & & & 12 \frac{F_1}{\ell^2} & 6 \frac{F_1}{\ell} s & -6 \frac{F_1}{\ell} c \\ & & & & 4F_1 s^2 + F_2 c^2 & -(4F_1 - F_2)sc \\ & & & & & 4F_1 c^2 + F_2 s^2 \end{bmatrix}^{(N)}$$

simetrik

(1.26)

I.3.1.3. Veri giriş ve çıkışının açıklanması

Veri girişi için gerekli ön çalışmalar

Daha önceki parargafta genel çubuk donanımlarının hesaplanmasında kapsamlı olarak yapılan açıklamalar analogudur. Burada kısaca

- a) Sistem şemasının resmi
- b) Düğüm noktalarının numaralanması
- c) Uygun birimlerin seçimini

hatırlatmak istiyoruz. Düğüm noktalarının numaralanmasında her taşıyıcı için düğüm farkı tutarının 15 değerini geçmemesi için özen gösterilmelidir. Aksi takdirde buna uygun bir hata bildirisi ekrana gelir. Zira $\bar{K}$ Sistem Rijitlik Matrisi içindeki bant genişliği boyutlaması aşılmış olacaktır.

Izgara sistemlerinde veri girişi şematik olarak gösterilen bilinen diyalog formunda yapılır. Daha önce bilgisayar programı ile analiz edilen sistemlerde sistem dataları disketten çağrılabilir. Aşağıdaki giriş talimatları bazı ilave açıklamalara ihtiyaç göstermektedir.

- Düğüm noktaları sayısı :

Düğüm noktalarının sayısı en fazla 50 olabilir.

- Mesnet noktalarının sayısı :

Mesnetlenmiş düğüm noktalarının maksimum için verilen sayısı 30 dur.

- Taşıyıcı eleman sayısı:

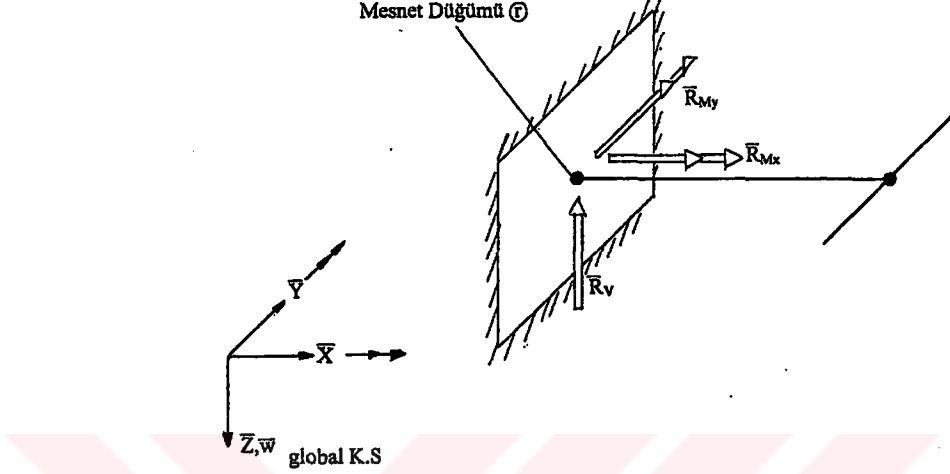
Taşıyıcı elemanların veya taşıyıcı ızgara elemanlarının sayısı 50 değerini aşmamalıdır.

- Eleman tiplerinin sayısı:

Değişik eleman tipi sayısı 20 olmalıdır. Aynı malzeme ve en kesit değerini taşıyan çubuk elemanları için ortak bir tip numarası düzenlemesi yapılabilir.

- Mesnetleme şartlarının veri girişi:

Düğüm noktalarının veri girişinden sonra her mesnet düğümü üç deformasyon bağlantısı ile (Şekil 1.15) ve ekranda gözüken sorular “J” (evet) veya “N” (hayır) ile cevaplanarak tanımlanabilir.



Şekil 1.15 Pozitif reaksiyon kuvvetleri

- Yüklü eleman sayısı :

Bu sayı, çubuk eksenleri $\bar{X}$ boyunca $p_z(x)$ uniform yayılı yüklere maruz olan tüm çubukları kapsar. Eğer yük $\bar{Z}$ - ekseninin yönünde ise (aşağıya doğru) pozitifdir. (Şekil 1.11.b)

- Yüklü düğümlerin sayısı:

Burada mevcut olan bütün düğüm noktalarının maksimum olarak toplam sayısı yerleştirilebilir. Düğüm yükleri için işaret kuralı şekil 1.12.b de gösterilmiştir.

- Çıkış Bilgileri:

Global koordinat sistemi $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ deki her (i) düğümü için $\bar{w}_i$ düğüm noktası deformasyonları ve $\bar{X}, \bar{Y}$ eksenine göre $\bar{v}_i, \bar{\phi}_i$ değerleri çıktı olarak elde edilir. Buna uygun ön işaret kuralı şekil 1.12.a'da gösterilmiştir. δ deformasyonları yanında $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ koordinat sistemindeki çubuk kesit tesirleri Q, M ve M_t de çıktı olarak alınır. (Şekil 1.13)

- Çubuklar için lokal kesit tesirleri :

Uniform yayılı yüke maruz bütün elemanlarda kesme kuvvet değişimi, linear ve eğilme momenti değişimi ikinci derece değişken olmaktadır.

Bazı hallerde çubuk uç kuvvetlerinin dışında bazı ara noktadaki değerlerde önem kazanabilir. Bu durumda 2 düğüm noktasının arası bazı bölümlere ayrılır.

Bölme noktalarının sayısı maksimum 20 olabilir.

20 bölüme kadar alt bölünmeler için buna uygun moment değişimi $M(x)$ kesme kuvvet değişimi $Q(x)$ ve burulma momentinin değişimi $M_t(x)$ tablo çıkışı şeklinde elde edilir. Bölme noktalarının konumu her defasındaki lokal koordinat eksenini $X^{(N)}$ nin x aralığı ile belirtilir.

- Mesnet reaksiyonları:

Mesnet düğümleri için mesnet tipine göre belirli reaksiyon kuvvetleri çıktı olarak alınır. Program, bu amaçla düğüm noktası belirterek aşağıdaki çıktıları verir.

$\overline{R}_v$: Düşey mesnet reaksiyon kuvveti

$\overline{RM}_x$: X eksenini etrafındaki dönme momenti,

$\overline{RM}_y$: Y eksenini etrafındaki dönme momenti.

Pozitif reaksiyon kuvvetleri Şekil 1.15 de gösterilmiştir.

Menüde seçim buna tanıtım rakamının girişi ile gerçekleştirilir. Örneğin tanıtım rakamı "3" seçilirse, bütün sonuçları içeren bir çıktı elde edilir.

BİLGİSAYAR MENÜSÜ

ELASTİK MESNETLENMİŞ IZGARALARIN HESABI

DOSYA NO(EN FAZLA 4 RAKAM) :
 EKRAN ÜZERİNDEN (0)VEYA DİSKETTEN (1)VERİ GİRİŞİ :
 PROBLEMİN İSMİ(MAX.40 İŞARET) :
 DÜĞÜM NOKTALARININ SAYISI :
 MESNET NOKTALARININ SAYISI :
 ELEMAN SAYISI :
 ELEMAN TİPLERİNİN SAYISI :

DÜĞÜM NOKTALARI VERİ GİRİŞLERİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>X-KOORDİNATI</u>	<u>Y-KOORDİNATI</u>
1	*	*
2	*	*
3	*	*

TAŞIYICININ TANIMLANMASI

<u>TİP</u>	<u>E-MODUL</u>	<u>G-MODUL</u>	<u>ATALET MOMENTİ</u>	<u>BURULMA MOMENTİ</u>
1	*	*	*	*
2	*	*	*	*
3	*	*	*	*

ELEMAN VERİLERİNİN GİRİLMESİ

<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM(I-J)</u>	<u>TİP</u>
1	*	*
2	*	*

MESNET DURUMLARININ GİRİLMESİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>DÜŞEY DEP. ENGELLEM</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>X- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>Y- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>
*	*	*	*
*	*	*	*

1 NOLU YÜKLEME DURUMU İÇİN

YÜKLENEN TAŞIYICI SAYISI :
YÜKLENİLEN DÜĞÜM SAYISI :

SABİT YÜKLER

MESNET	DÜĞÜM(I-J)	P
1	X-X	*
2	X-X	*
3	X-X	*

DÜĞÜM YÜKLERİ

DÜĞÜM	P _z	M _x	M _y
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*

GİRİŞ VERİLERİNİN KONTROLÜ

DÜĞÜM KOORDİNATLARI

DÜĞÜMLER	X-KOORDİNATI	Y-KOORDİNATI
1	*	*
2	*	*
3	*	*

DÜZELTME

GİRİŞ VERİLERİNİ KONTROLÜ

TİP	E-MODUL	G-MODUL	ATALET MOMENTİ	BURULMA MOMENTİ
1	*	*	*	*
2	*	*	*	*
3	*	*	*	*

DÜZELTME

GİRİŞ VERİLERİNİN KONTROLÜ

MEVCUT SİSTEM ŞARTLARI

<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM(I-J)</u>	<u>TİP</u>
1	*	*
2	*	*

DÜZELTME

GİRİŞ VERİLERİNİN KONTROLÜ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>DÜŞEY DEP. ENGELLEM</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>X- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>Y- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>
*	*	*	*
*	*	*	*

DÜZELTME

GİRİŞ VERİLERİNİN KONTROLÜ

YÜKLEME NO 1 İÇİN TAŞIYICI YÜKLERİ

<u>NO</u>	<u>ELEMAN</u>	<u>DÜĞÜM(I-J)</u>	<u>EŞİTYÜKLEME</u>
1	*	X-X	*****
2	*	X-X	*****
3	*	X-X	*****

DÜZELTME

GİRİŞ VERİLERİNİN KONTROLÜ

YÜKLEME NO 1 İÇİN DÜĞÜM YÜKLERİ

<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>P_z</u>	<u>M_x</u>	<u>M_y</u>
1	*	*****	*****	*****
2	*	*****	*****	*****
3	*	*****	*****	*****

DÜZELTME

BÜTÜN GİRİŞ VERİLERİNİN TEKRAR KONTROLÜ GEREKİYOR MU?(J/N)
 GİRİŞ VERİLERİ DİSKETTE SAKLANACAK MI? (J/N)
 GİRİŞ VERİLERİ FILE "B:ROSTxxxx.DAT" HAFIZAYA ALINACAKTIR

DÜĞÜM ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>W</u>	<u>W_x</u>	<u>W_y</u>
1	*****	*****	*****
2	*****	*****	*****
3	*****	*****	*****

DÜĞÜM KUVVETLERİ

<u>TAŞIYICI</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>EĞİLME MOM</u>	<u>KESME KUVVETİ</u>	<u>BURULMA MOMENTİ</u>
1	*	*****	*****	*****
2	*	*****	*****	*****
3	*	*****	*****	*****

TAŞIYICI ELEMANLARA ETKİYEN KUVVET BÜYÜKLÜKLERİ
 MAKSİMUM 20 NOKTADA İNCELENEBİLİR

<u>NOKTA</u>	<u>M(x)</u>	<u>Q(x)</u>	<u>M_T(x)</u>
1	*****	*****	*****
2	*****	*****	*****
3	*****	*****	*****

MESNET REAKSİYONLARI

<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>R_v</u>	<u>RM_x</u>	<u>RM_y</u>
1	*	***	***	***
2	*	***	***	***
3	*	***	***	***

PROGRAM BİTİRME :0
 YENİ MESNET HALİ :1
 YENİ YÜK DURUMU :2
 PRINTER'DAN ÇIKIŞ :3

BİR TANITIM RAKAMI SEÇİN :*

1.3.2.Elastik Mesnetlenmiş Taşıyıcı Izgaraların hesabı

1.3.2.1 Giriş ve genel bakış

Bu bölümde verilecek olan bilgisayar programı elastik mesnetlenmiş düzlem taşıyıcı Izgara Sistemlerinin hesaplanmasını sağlar. Bu durumda tekil çubuklar birbirlerine herhangi açılar ile bağlanmış olabilirler.

İnşaat mühendisliğinde elastik mesnetlenmiş taşıyıcı ızgaralar sık sık karşımıza çıkmaktadır. Eğer tekil temeller birbirine çok yakınsa veya girişim yapıyorsa iki ana yönden sürekli olan şerit temel yapılabilir. Bu yolla elastik mesnetlenmiş taşıyıcı ızgara oluşur. Ayrıca bütün yapı donanımının altında sürekli olarak geçen “Radye Plak” yaklaşık olarak elastik mesnet üstünde Taşıyıcı Izgara olarak hesaplanabilir

Elastik mesnetlenmiş bir Taşıyıcı Izgara aynı şekilde Matriş Deplasman Metoduna göre de hesaplanabilir. Bunun için ön şart mesnetlenmiş bir taşıyıcı ızgara elemanının buna uygun Rijitlik Matrisinin biliniyor olmasıdır. Bu bölümde verilecek olan bilgisayar programı $\bar{X}$, $\bar{Y}$, ve $\bar{Z}$ eksenleri ızgara düzlemine dik olan bir global koordinat sistemindeki dikdörtgen kesitli elemanlarla teşkil edilen ızgara sisteminin düğüm noktaları deformasyonlarını hesaplar. Izgara Sistemin modeli düğüm noktalarında etkiyen sabit yük ve momentler yanında, her bir elemanında uniform yayılı yükleri de içerebilir. Bütün yükler $\bar{X}$, $\bar{Y}$ düzlemine dik etki ederler. Düğüm noktalarının deformasyonları yanında her çubuk elemanının uçlarındaki kesit tesirleri de elde edilir. Tanımlamalar ve ön işaretler, bir önceki paragraftaki taşıyıcı ızgara hesaplamasında kullanılanlar ile aynıdır.

1.3.2.2.Hesaplama ana prensipleri

Yukarıda önceden belirttiğimiz gibi elastik mesnetlenmiş taşıyıcı ızgaraların hesaplanması Matris Deplasman Metoduna göre yapılır. Hesaplama sistemi geniş bir şekilde daha önceki bölümde de açıklanan Izgara Sistem hesaplaması ile aynıdır. Tek istisna, denklem de verilen rijitlik bağıntılarının yerine buna uygun Eleman Rijitlik Matrislerinin kullanılması zorunluluğudur. Bilgisayar programında kullanılan mesnetlenmiş sonlu Taşıyıcı Izgara Elemanlarının Rijitlik Matrisi Avradımıs ve Avramiou tarafından gerçekleştirilmiştir[26]. Şekil 1.16 da gösterilen dikdörtgen kesitli eleman için denklem (1.29) da tekrarlanan rijitlik bağıntıları elde edilir.

$$[k]^{(N)} = \begin{bmatrix} -2 \frac{\lambda}{\ell} (\sinh \lambda \cdot \cosh \lambda + \sin \lambda \cdot \cos \lambda) f_2 & 0 & -(\sin^2 \lambda + \sinh^2 \lambda) f_2 & -2 \frac{\lambda}{\ell} (\sinh \lambda \cdot \cosh \lambda + \sin \lambda \cdot \cos \lambda) f_2 & 0 & -2 \sinh \lambda \cdot \sin \lambda \cdot f_2 \\ 0 & \frac{f_3}{\tanh(\alpha \ell)} & 0 & 0 & -\frac{f_3}{\sinh(\alpha \ell)} & 0 \\ -(\sin^2 \lambda + \sinh^2 \lambda) f_2 & 0 & (\sin \lambda \cdot \cos \lambda - \sinh \lambda \cdot \cosh \lambda) f_1 & (2 \frac{\lambda}{\ell} \sinh \lambda \cdot \sin \lambda) f_1 & 0 & (\sinh \lambda \cdot \cos \lambda - \sin \lambda \cdot \cosh \lambda) f_1 \\ -2 \frac{\lambda}{\ell} (\sinh \lambda \cdot \cosh \lambda + \sin \lambda \cdot \cos \lambda) f_2 & 0 & (2 \frac{\lambda}{\ell} \sinh \lambda \cdot \sin \lambda) f_1 & -2 \frac{\lambda}{\ell} (\sinh \lambda \cdot \cosh \lambda + \sin \lambda \cdot \cos \lambda) f_2 & 0 & (\sin^2 \lambda + \sinh^2 \lambda) f_2 \\ 0 & -\frac{f_3}{\sinh(\alpha \ell)} & 0 & 0 & \frac{f_3}{\tanh(\alpha \ell)} & 0 \\ -2 \sinh \lambda \cdot \sin \lambda \cdot f_2 & 0 & (\sinh \lambda \cdot \cos \lambda - \sin \lambda \cdot \cosh \lambda) f_1 & (2 \frac{\lambda}{\ell} \sinh \lambda \cdot \sin \lambda) f_1 & 0 & (\sin \lambda \cdot \cosh \lambda - \sinh \lambda \cdot \cos \lambda) f_1 \end{bmatrix}$$

symmetrisch

(1.29)

Burada

$$f_1 = \frac{2El\lambda}{(\sin^2 \lambda - \sinh^2 \lambda)}, f_2 = f_1 \frac{\lambda}{\ell}, f_3 = \alpha \cdot Gl, \quad (1.30)$$

ve

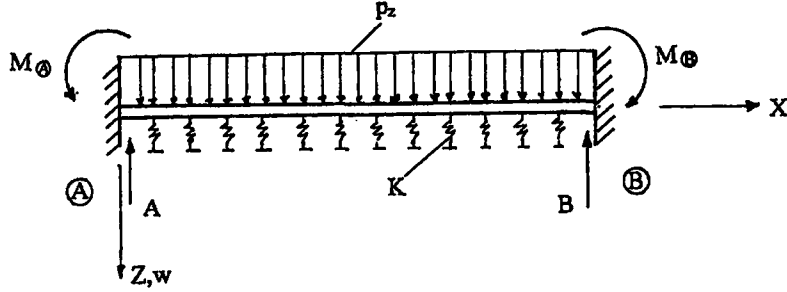
$$\lambda = \ell \sqrt{\frac{C_s}{4El}}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{C_t}{Gl_t}} \quad (1.31)$$

Bu durum Taşıyıcı Izgara elemanının elastik mesnetlenmesini içerdiği için Yay Sabiti C_s veya Yay Dönme Sabiti C_t için [26] ya göre aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$C_s = K \cdot b \text{ ve } C_t = \frac{K \cdot b^3}{12} \quad (1.32)$$

Burada

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{bK}{4EI}} \quad (1.38)$$



Şekil 1.17 Elastik zemin üzerinde kiriş

Eğer düğüm noktaları arasındaki taşıyıcı ızgara elemanları bir tekil yükü veya herhangi bir tarzdaki yayılı yük ile yüklenmiş ise, bu dış kuvvetlerin önce düğüm noktalarına indirgenmesi zorunludur. Bu amaçla ya [21] de verilen kullanıma hazır formüller veya daha önce açıklanan yöntem kullanılır.

I.3.2.3.Elastik mesnetlenmiş plakların hesaplanmasında yaklaşım yöntemi

Elastik mesnetlenmiş temel plaklarda simetrik yükler etkiyorsa, plak Yaklaşık Hesap Tarzında, birbirini dik kesen iki kiriş sistemi şeklinde hesaplanabilir. Dımitrov [29] bu yaklaşım yöntemini elastik mesnetlenmiş plaklara uygulamaktadır. Plakın her iki ana yönden elastik mesnetlenmiş uygun sayıda kiriş şeritlerine ayrılması elastik mesnetlenmiş plakların hesaplanmasında bir önceki ızgara sistem programı direkt olarak uygulanabilir. Daha önce de ele alınan yineleme yöntemi birbirini takip eden uygunluktaki mesnetleme rakamları ile radye temellere de genişletilebilir.[24]

Kafes Izgara Metodu [13,14] eşdeğer taşıyıcı ızgara sistemleri yardımı ile plak problemlerini yaklaşık olarak analiz etmek olanağını sağlamaktadır. Kafes Izgara Metodu plakın sürekliliğini yalnızca düğüm noktalarında birbirine bağlanmış sonlu sayıda kirişle değiştirir. Bu şekilde elde edilen yedek sistemin dış düğüm yükleri p altındaki deplasman

durumu , sürekliliğini deformasyonu ile tanımlanır. [14] nolu literatürde plağın kaydırma durumuna yeterli doğrulukta yaklaşan bir çok uygun çubuk modelleri bulabilir. Aranılan gerilme durumu ya farklılık yöntemi yardımı ile veya bitmiş eleman analizinde [12,14] olduğu gibi deplasmanlardan elde edilir. Eğer, elastik mesnetlenmiş taşıyıcı ızgaraların hesaplanmasındaki ilk adımlar uygun şekilde modifiye edildi ise, kafes ızgara metodu elastik mesnetlenmiş plaklara uygulanabilir.

1.3.2.4. Veri giriş ve çıkışlarının açıklanması

Giriş için gerekli ön çalışmalar daha önceki bölümde açıklanmıştır. Bu durumda ölçü birimleri [m] ve [kN] dir. Yeni sistemlerde giriş alışıldığı gibi ekran üzerinden diyalog formunda yapılır.

Fakat mevcut olan bir giriş verisine geri dönmek istenirse, o zaman gereken değerler veri disketinden çağrılır.

Aşağıdaki izahlar tablodaki bazı talimatları veya soruları açıklamaktadır:

- Düğüm noktalarının sayısı

Taşıyıcı ızgaranın tek tek elemanlarının arasında ki bağlantı noktalarının sayısı daha önceki paragrafta kesinleştirilen program ölçüsü ile maksimum 50 olmalıdır.

- Mesnet noktalarının sayısı

Mesnetlenmiş düğüm noktalarının maksimum için verilen sayısı 30 dur.

- Eleman sayısı

Taşıyıcı ızgara elemanlarının sayısı 60 değerini geçmemelidir.

- Eleman tiplerinin sayısı

Eşdeğer malzeme -enine kesit ve mesnetleme değerleri gösteren bir grup taşıyıcı için ortak numara düzenlenebilir. Farklı taşıyıcı tiplerinin en yüksek sayısı 20 yi geçmemelidir.

- Düğüm koordinatları:

Herhangi bir (i) düğüm noktasını $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ koordinatları için Şekil 1.12 de belirtilen global $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ koordinat sistemine göre girişi yapılır.

- Eleman Tipleri :

Herbir taşıyıcı eleman tipi için aşağıdaki bilgiler verilir:

Eleman Rijitlik Matrisinin (1.31) hesaplanması için kullanılacak zemin katsayısı çubuk genişliği ile çarpılarak $[kN/m^2]$ bulunacak değerdir.

- Eleman verileri

Hesaplama modelinin düğümleri, dizi sırasında Sistem Rijitlik Matrisinin bant genişliği dar olacak şekilde numaralanır. Herhangi bir $[N]$ elemanı “i” başlangıç düğümünün ve “j” son düğümünün numarası ile tanımlanır. Her iki düğüm numaraları arasındaki fark 15’i geçmemelidir. Aksi takdirde Sistem Rijitlik Matrisi içindeki bant genişliğinin boyutlanması yeterli olmayacağı için buna uygun hata bildirisi verir.

- Mesnetleme şartlarının girişi.

Düğüm numarasının girişinden sonra, her mesnet düğüm noktası için deformasyon durumuna bağlı olarak ekranda gözüken sorular “J” (evet), “N” (hayır) ile cevaplandırılır. Üç deformasyon bağlantısı (Şekil 1.16)te tanımlanmıştır.

- Yüklü düğümlerin sayısı:

Bu durumda tekil kuvvetlerin etkisi altında olan bütün düğüm noktaları burada belirtilir.

- Sabit yayılı yük:

Yüklü elemanlar önce eleman numaraları $[N]$ ile tanımlanır. (Sonra kontrol için bu elemanın uç noktaları gösterilir). Bundan sonra p_z uniform yayılı yük girişi yapılır. Bu yayılı yük pozitif $\bar{Z}$ eksenini yönünde ise, yük pozitif olarak alınacaktır. (Şekil 1.11b)

1 nolu yükleme için düğüm yükleri:

Önce yüklü düğüm numaraları tespit edilir. Bundan sonra düğüme tesir eden sabit yüklerin $\bar{P}_z$, $\bar{M}_x$, $\bar{M}_y$ bileşenlerinin girişi yapılır. Bu düğüm yükleri için işaret kuralı Şekil 1.12 b de açıkça gösterilmiştir. Mevcut olmayan yükler RETURN tuşunun bir defalık kullanımı ile atlanır.

Çıkış bilgisi olarak global, $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ koordinat sistemindeki $\bar{\delta}$ düğüm deformasyonları elde edilir. Buna uygun işaret kuralı Şekil 1.12a da gösterilmiştir.

Elastik Mesnetlenmiş Taşıyıcı Izgaranın her eleman uç noktalarındaki $\bar{\delta}$ deformasyonları yanında ayrıca bu noktalardaki çubuk kesit tesirleri Q , M ve M_t elde edilir. (Şekil 1.13) Mesnet düğümleri olarak gösterilen tüm düğümlerde reaksiyon kuvvetleri çıktı olarak alınır. Her mesnet düğüm noktasını belirterek

ÖRNEK

DÜĞÜM NOKTALARININ SAYISI : 17
 MESNET NOKTALARININ SAYISI : 21
 ELEMAN TİPLERİNİN SAYISI : 3

DÜĞÜM NOKTALARI VERİ GİRİŞLERİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>X-KOORDİNATI</u>	<u>Y-KOORDİNATI</u>
1	0	7.9000
2	0	10.7000
3	0	13.5000
4	0	16.3000
5	0	19.1000
6	4.9000	7.9000
7	4.9000	13.5000
8	4.9000	19.1000
9	10.5000	0
10	10.5000	7.9000
11	10.5000	13.5000
12	10.5000	19.1000
13	14.8500	19.1000
14	19.2000	0
15	19.2000	7.9000
16	19.2000	13.5000
17	19.2000	19.1000

TAŞIYICININ TANIMLANMASI

<u>TİP</u>	<u>E-MODUL</u>	<u>G-MODUL</u>	<u>B</u>	<u>D</u>	<u>SEHİM</u>
1	3.00E+07	3.00E+07	1.0000	0.5000	4.00E+04
2	3.00E+07	3.00E+07	0.8000	0.5000	4.00E+04
3	3.00E+07	3.00E+07	0.6000	0.5000	4.00E+04

TAŞIYICI ELEMANLARLA İLGİLİ VERİLERİNİN GİRİLMESİ

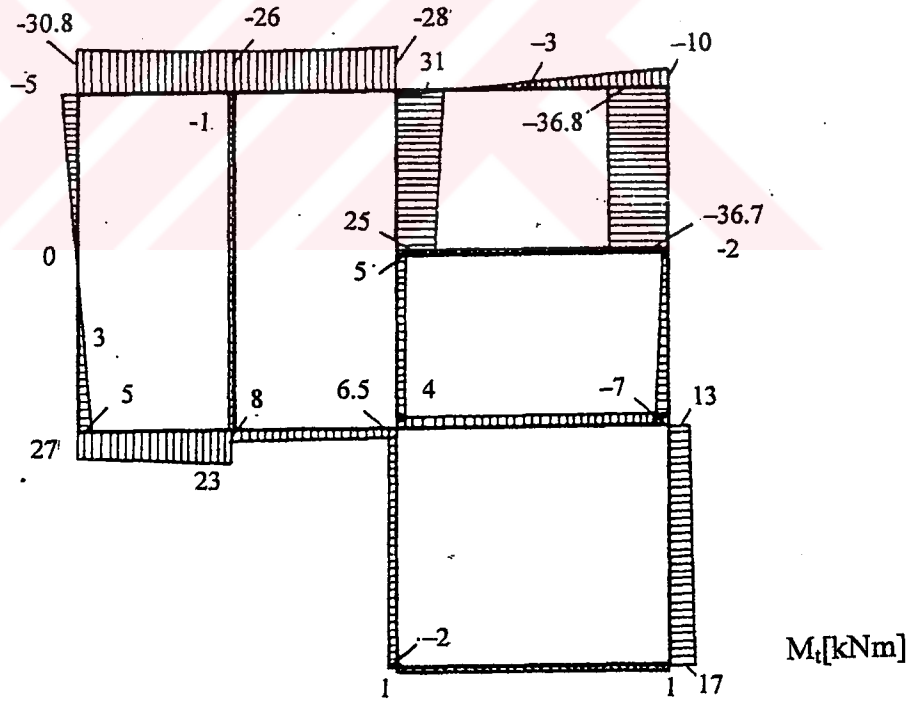
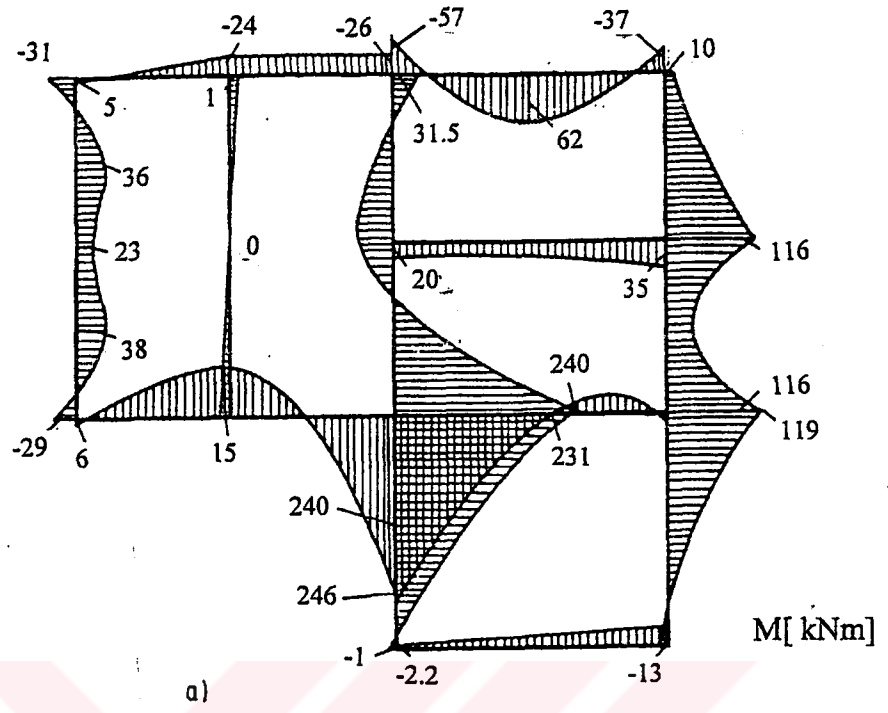
<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM(I-J)</u>	<u>TİP</u>
1	1-2	2
2	2-3	2
3	3-4	2
4	4-5	2
5	6-7	3
6	7-8	3
7	9-10	1
8	10-11	1
9	11-12	1
10	14-15	2
11	15-16	2
12	16-17	2
13	5-8	1
14	8-12	1
15	12-13	1
16	13-17	1
17	11-16	2
18	1-6	1
19	6-10	1
20	10-15	1
21	9-14	2

SABİT YÜKLER		
ELEMAN	DÜĞÜM(I-J)	P
1	1-2	100.0000
2	2-3	100.0000
3	3-4	100.0000
4	4-5	100.0000
15	12-13	125.0000
16	13-17	125.0000

DÜĞÜM YÜKLERİ			
DÜĞÜM	Pz	Mx	Mz
10	800.0000	0	0
15	320.0000	0	0
16	320.0000	0	0

DÜĞÜM	DÜŞEY YÜK	X-DÖNMESİ	Y-DÖNMESİ
1	0.0015	-0.0006	-0.0006
2	0.0029	-0.0003	-0.0006
3	0.0033	0	-0.0006
4	0.0029	0.0003	-0.0006
5	0.0015	0.0005	-0.0006
6	-0.0001	-0.0001	0.0001
7	0	0	0
8	-0.0002	0.0001	0
9	-0.0001	0	0
10	0.0021	0	0
11	-0.0001	0.0001	0.0001
12	0.0012	-0.0004	0.0006
13	0.0031	-0.0004	0
14	0	0	0
15	0.0015	-0.0001	0.0006
16	0.0015	0.0001	0.0005
17	0.0017	-0.0005	-0.0005

<u>TAŞIYICI</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>EĞİLME MOM</u>	<u>KESME KUVVETİ</u>	<u>BURULMA KUVVETİ</u>
1	1	- 28.6772	73.5028	5.9128
	2	37.7428	- 4.4824	2.9861
2	2	37.7428	- 4.4824	2.9861
	3	22.8727	- 0.1860	0.2565
3	3	22.8727	- 0.1860	0.0257
	4	36.4551	3.8995	- 2.4561
4	4	36.4551	3.8995	- 2.4561
	5	- 30.8274	- 72.9635	- 5.3309
5	6	15.1515	- 3.4419	- 1.5573
	7	0.0979	0.2148	- 1.3670
6	7	0.0979	0.2148	- 1.3670
	8	0.8823	- 4.1185	- 1.4284
7	9	- 0.9836	- 6.6093	- 2.1779
	10	231.4587	196.9122	- 1.5724
8	10	239.8006	- 199.1102	4.5003
	11	- 46.8021	1.9646	5.3469
9	11	- 45.3661	8.4469	24.9122
	12	31.4655	70.5287	31.4612
10	14	0.8147	- 6.6412	12.7657
	15	119.1424	107.7629	16.9007
11	15	116.1447	- 121.8462	- 6.8324
	16	116.1665	122.4433	- 1.8055
12	16	115.9210	- 124.3505	- 36.7107
	17	9.6422	85.4627	- 36.8526
13	5	5.3309	- 72.9635	- 30.8274
	8	- 24.3751	6.2815	- 25.8568
14	8	- 22.9467	2.1629	- 24.9744
	12	- 25.7587	45.9689	- 28.2131
15	12	- 57.2198	116.4973	3.2524
	13	62.0222	- 3.4897	- 2.8722
16	13	62.0222	- 3.4898	- 2.8722
	17	- 36.8526	- 85.4628	- 9.6422
17	11	19.5653	- 6.4822	- 1.4360
	16	34.9053	73.2062	- 0.2454
18	1	5.9128	- 73.5028	28.6772
	6	- 51.3672	- 2.5654	22.9568
19	6	- 52.9245	0.8765	7.8053
	10	239.7068	198.9917	6.4581
20	10	245.7795	- 204.9858	- 1.8838
	15	23.7331	90.3910	- 2.9976
21	9	- 2.1779	6.6093	0.9836
	14	- 12.0766	- 6.6412	0.8147



1.19 Örneğin moment diagramları

BİLGİSAYAR MENÜSÜ

ELASTİK MESNETLENMİŞ IZGARALARIN HESABI

DOSYA NO(EN FAZLA 4 RAKAM) :
 EKRAN ÜZERİNDEN (0)VEYA DİSKETTEN (1)VERİ GİRİŞİ :
 PROBLEMİN İSMİ(MAX.40 İŞARET) :
 DÜĞÜM NOKTALARININ SAYISI :
 MESNET NOKTALARININ SAYISI :
 ELEMAN SAYISI :
 ELEMAN TİPLERİNİN SAYISI :

DÜĞÜM NOKTALARI VERİ GİRİŞLERİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>X-KOORDİNATI</u>	<u>Y-KOORDİNATI</u>
1	*	*
2	*	*
3	*	*

TAŞIYICININ TANIMLANMASI

<u>TİP</u>	<u>E-MODUL</u>	<u>G-MODUL</u>	<u>ATALET MOMENTİ</u>	<u>BURULMA MOMENTİ</u>
1	*	*	*	*
2	*	*	*	*
3	*	*	*	*

ELEMAN VERİLERİNİN GİRİLMESİ

<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM(I-J)</u>	<u>TİP</u>
1	*	*
2	*	*

MESNET DURUMLARININ GİRİLMESİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>DÜŞEY DEP. ENGELLEM</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>X- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>Y- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>
*	*	*	*
*	*	*	*

1 NOLU YÜKLEME DURUMU İÇİN

YÜKLENEN TAŞIYICI SAYISI :
YÜKLENİLEN DÜĞÜM SAYISI :

SABİT YÜKLER

<u>MESNET</u>	<u>DÜĞÜM(I-J)</u>	<u>P</u>
1	X-X	*
2	X-X	*
3	X-X	*

DÜĞÜM YÜKLERİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>P_z</u>	<u>M_x</u>	<u>M_y</u>
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*

GİRİŞ VERİLERİNİN KONTROLÜ

DÜĞÜM KOORDİNATLARI

<u>DÜĞÜMLER</u>	<u>X-KOORDİNATI</u>	<u>Y-KOORDİNATI</u>
1	*	*
2	*	*
3	*	*

DÜZELTME

GİRİŞ VERİLERİNİ KONTROLÜ

<u>TİP</u>	<u>E-MODUL</u>	<u>G-MODUL</u>	<u>ATALET MOMENTİ</u>	<u>BURULMA MOMENTİ</u>
1	*	*	*	*
2	*	*	*	*
3	*	*	*	*

DÜZELTME

GİRİŞ VERİLERİNİN KONTROLÜ

MEVCUT SİSTEM ŞARTLARI

<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM(I-J)</u>	<u>TİP</u>
1	*	*
2	*	*

DÜZELTME

GİRİŞ VERİLERİNİN KONTROLÜ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>DÜŞEY DEP. ENGELLEM</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>X- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>Y- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>
*	*	*	*
*	*	*	*

DÜZELTME

GİRİŞ VERİLERİNİN KONTROLÜ

YÜKLEME NO 1 İÇİN TAŞIYICI YÜKLERİ

<u>NO</u>	<u>ELEMAN</u>	<u>DÜĞÜM(I-J)</u>	<u>EŞİTYÜKLEME)</u>
1	*	X-X	*****
2	*	X-X	*****
3	*	X-X	*****

DÜZELTME

GİRİŞ VERİLERİNİN KONTROLÜ

YÜKLEME NO 1 İÇİN DÜĞÜM YÜKLERİ

<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>P_z</u>	<u>M_x</u>	<u>M_y</u>
1	*	*****	*****	*****
2	*	*****	*****	*****
3	*	*****	*****	*****

DÜZELTME

BÜTÜN GİRİŞ VERİLERİNİN TEKRAR KONTROLÜ GEREKİYOR MU?(J/N)
 GİRİŞ VERİLERİ DİSKETTE SAKLANACAK MI? (J/N)
 GİRİŞ VERİLERİ FILE "B:ROSTxxxx.DAT" HAFIZAYA ALINACAKTIR

DÜĞÜM ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>W</u>	<u>W_x</u>	<u>W_y</u>
1	*****	*****	*****
2	*****	*****	*****
3	*****	*****	*****

DÜĞÜM KUVVETLERİ

<u>TAŞIYICI</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>EĞİLME MOM</u>	<u>KESME KUVVETİ</u>	<u>BURULMA MOMENTİ</u>
1	*	*****	*****	*****
2	*	*****	*****	*****
3	*	*****	*****	*****

TAŞIYICI ELEMANLARA ETKİYEN KUVVET BÜYÜKLÜKLERİ
 MAKSİMUM 20 NOKTADA İNCELENEBİLİR

<u>NOKTA</u>	<u>M(x)</u>	<u>Q(x)</u>	<u>M_T(x)</u>
1	*****	*****	*****
2	*****	*****	*****
3	*****	*****	*****

MESNET REAKSİYONLARI

<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>R_y</u>	<u>RM_x</u>	<u>RM_y</u>
1	*	***	***	***
2	*	***	***	***
3	*	***	***	***

PROGRAM BİTİRME :0
 YENİ MESNET HALİ :1
 YENİ YÜK DURUMU :2
 PRINTER'DAN ÇIKIŞ :3

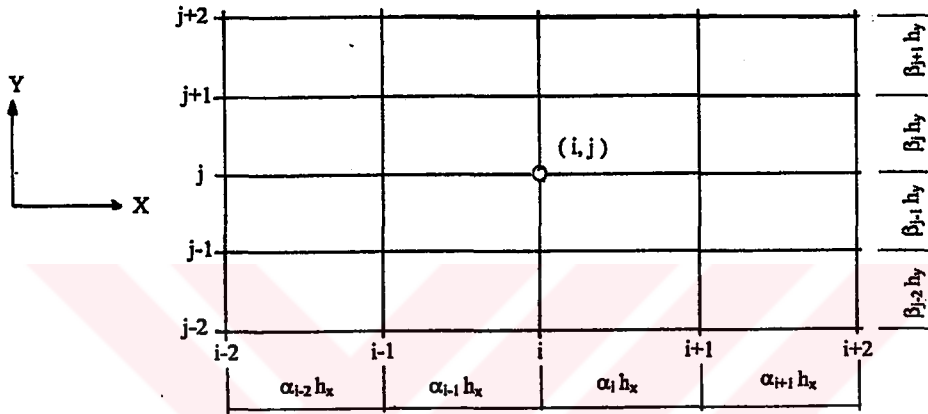
BİR TANITIM RAKAMI SEÇİN :*

II. ELASTİK ZEMİNE OTURAN SİSTEMLERİN NÜMERİK METODLARLA ÇÖZÜMÜ

II.1 Elastik Zemine Oturan Sistemlerin Sonlu Farklar Metodu İle Çözümü

II.1.1. İki değişkenli fonksiyonlarda sonlu fark ifadelerinin çıkartılması

Bu bölümde hem x 'e, hem de y 'ye bağlı bir $w(x,y)$ fonksiyonunun türevleri Sonlu Farklarla ifade edilecektir.



Şekil 2.1

$W(x,y)$ fonksiyonunun herhangi bir (i,j) noktasındaki türevlerini sonlu farklarla ifade edebilmek için, Şekil 2.1 de görüldüğü gibi, X ve Y eksenlerine paralel doğrular çizerek bir ağ teşkil edelim.

Y eksenine paralel doğruların aralıkları $\alpha_{i-2} h_x$, $\alpha_{i-1} h_x$, $\alpha_i h_x$, ve

X eksenine paralel doğruların aralıkları $\beta_{j-2} h_y$, $\beta_{j-1} h_y$, $\beta_j h_y$, olsun.

Özel hâl olarak aralıklar eşit olarak seçilirse, $\alpha_{i-2} = \alpha_{i-1} = \alpha_i = 1$ ve

$\beta_{j-2} = \beta_{j-1} = \beta_j = \dots = 1$ olacaktır.

Önce y 'yi sabit kabul edip, $w(x,y)$ fonksiyonunun x 'e göre kısmi türevleri bulunacaktır. Sonra da x 'i sabit kabul edip, aynı fonksiyonun y 'ye göre kısmi

türevleri bulunacaktır. Buna göre, herhangi bir (i,j) noktasındaki kısmi türevler şu şekilde bulunabilir:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i,j} \cong \left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)_{i,j} = \frac{w_{i-1,j} - w_{i+1,j}}{\alpha_{i-1} h_x + \alpha_i h_x}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i,j} \cong \left(\frac{\Delta w}{\Delta y}\right)_{i,j} = \frac{w_{i,j-1} - w_{i,j+1}}{\beta_{j+1} h_y + \beta_j h_y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i,j} \cong \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_{i,j} = \frac{(w_{i+1,j} - w_{i,j})/\alpha_i h_x - (w_{i,j} - w_{i-1,j})/\alpha_{i-1} h_x}{(\alpha_{i-1} h_x + \alpha_i h_x)/2}$$

$$= \frac{2}{h_x^2 \alpha_i \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)} [\alpha_i w_{i-1,j} - (\alpha_{i-1} + \alpha_i) w_{i,j} + \alpha_{i-1} w_{i+1,j}]$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i,j} \cong \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2}\right)_{i,j} = \frac{(w_{i,j+1} - w_{i,j})/\beta_j h_y - (w_{i,j} - w_{i,j-1})/\beta_{j-1} h_y}{(\beta_{j-1} h_y + \beta_j h_y)/2}$$

(2.1)

$$= \frac{2}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)} [\beta_j w_{i,j-1} - (\beta_{j-1} + \beta_j) w_{i,j} + \beta_{j-1} w_{i,j+1}]$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i,j} \cong \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta w}{\Delta y}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\Delta w}{\Delta y}\right)_{i-1,j} - \left(\frac{\Delta w}{\Delta y}\right)_{i+1,j}}{\alpha_{i-1} h_x + \alpha_i h_x}$$

$$= \frac{1}{(\alpha_{i-1} + \alpha_i)(\beta_{j-1} + \beta_j) h_x h_y} (w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1})$$

(2.1) ifadelerinden faydalanarak, herhangi bir (i,j) noktasındaki:

$$\nabla^2 w_{i,j} = \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_{i,j} + \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right)_{i,j}$$

değeri kolayca bulunabilir. Buradaki:

$$\nabla^2 = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2}{\Delta y^2}$$

değerine “Laplace Operatörü” denir.

$$\nabla^2 w_{i,j} = \left[\frac{2\alpha_i}{h_x^2 \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)} \right] \cdot w_{i-1,j} - \left[\frac{2(\alpha_{i-1} + \alpha_i)}{h_x^2 \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)} + \frac{2(\beta_{j-1} + \beta_j)}{h_y^2 \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)} \right] \cdot w_{i,j}$$

$$+ \left[\frac{2\alpha_{i-1}}{h_x^2 \alpha_i \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)} \right] \cdot w_{i+1,j} + \left[\frac{2\beta_j}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)} \right] \cdot w_{i,j-1} + \left[\frac{2\beta_{j-1}}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)} \right] \cdot w_{i,j+1}$$

(2.2)

(2.2) ifadesinde:

$$(F1)_{i-1,j} = \frac{2\alpha_i}{h_x^2 \alpha_i \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)}$$

$$(F0)_{i,j} = \frac{2(\alpha_{i-1} + \alpha_i)}{h_x^2 \alpha_i \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)} - \frac{2(\beta_{j-1} + \beta_j)}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)}$$

$$(F2)_{i+1,j} = \frac{2\alpha_{i-1}}{h_x^2 \alpha_i \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)}$$

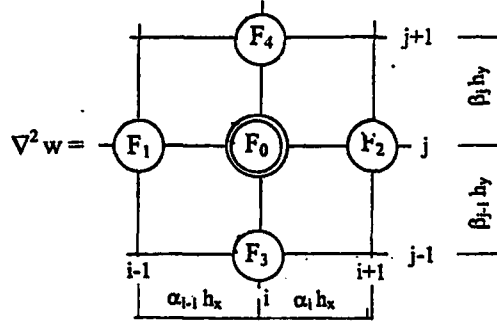
(2.3)

$$(F3)_{i,j-1} = \frac{2\beta_j}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)}$$

$$(F4)_{i,j+1} = \frac{2\beta_{j-1}}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)}$$

ile gösterilirse, (2.2) denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\nabla^2 w_{i,j} = (F1)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (F0)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F2)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (F3)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (F4)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1} \quad (2.4)$$



Şekil 2.2

(2.4) denklemini Şekil 2.2 de görüldüğü gibi, şematik olarak ifade edebiliriz. Bu şemaya göre, F0 molekülü (i,j) noktası ile çakıştırıldığında, F1 ile (i-1,j) noktasına ait w değeri, F2 ile (i+1,j) noktasına ait w değeri, F3 ile (i,j-1) noktasına ait w değeri ve F4 ile de (i,j+1) noktasına ait w değeri çarpılıp toplamı alınacaktır. Şimdi de:

$\nabla^4 w_{i,j} = \nabla^2 (\nabla^2 w)_{i,j}$ değerini bulalım. Şekil 2.2 deki şemayı tatbik edersek:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_{i,j} = & (F1)_{i-1,j} \cdot (\nabla^2 w)_{i-1,j} + (F0)_{i,j} \cdot (\nabla^2 w)_{i,j} + (F2)_{i+1,j} \cdot (\nabla^2 w)_{i+1,j} + (F3)_{i,j-1} \\ & \cdot (\nabla^2 w)_{i,j-1} + (F4)_{i,j+1} \cdot (\nabla^2 w)_{i,j+1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

(2.5) denklemindeki $\nabla^2 w$ değerlerini de, aynı şemaya göre yazarsak:

$$(\nabla^2 w)_{i-1,j} = (F1)_{i-2,j} \cdot w_{i-2,j} + (F0)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (F2)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F3)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + (F4)_{i-1,j+1} \cdot w_{i-1,j+1}$$

$$(\nabla^2 w)_{i,j} = (F1)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (F0)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F2)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (F3)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (F4)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1}$$

$$(\nabla^2 w)_{i+1,j} = (F1)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F0)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (F2)_{i+2,j} \cdot w_{i+2,j} + (F3)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + (F4)_{i+1,j+1} \cdot w_{i+1,j+1}$$

$$(\nabla^2 w)_{i,j-1} = (F1)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + (F0)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (F2)_{i+1,j-1} \cdot w_{i+1,j-1} + (F3)_{i,j-2} \cdot w_{i,j-2} + (F4)_{i,j} \cdot w_{i,j}$$

Bu değerler (2.5) de yerine koyulursa:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 w)_{i,j} = & [(F1)_{i-2,j} \cdot (F1)_{i-1,j}] w_{i-2,j} + (F1)_{i-1,j} \cdot [(F0)_{i,j} + (F0)_{i-1,j}] w_{i-1,j} + \\ & [(F0)_{i,j}^2 + (F1)_{i,j} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i,j} \cdot (F1)_{i-1,j} + (F4)_{i,j} \cdot (F3)_{i,j-1} + (F3)_{i,j} \cdot (F4)_{i,j+1}] w_{i,j} \\ & + (F2)_{i+1,j} [(F0)_{i,j} + (F0)_{i+1,j}] w_{i+1,j} [(F2)_{i+2,j} \cdot (F2)_{i+1,j}] w_{i+2,j} + [(F3)_{i,j-2} \cdot (F3)_{i,j-1}] w_{j-2} \\ & + (F3)_{i,j-1} [(F0)_{i,j} + (F0)_{i,j-1}] w_{i,j+1} + (F4)_{i,j+1} [(F0)_{i,j} + (F0)_{i,j+1}] w_{i,j+1} \\ & + [(F4)_{i,j+2} \cdot (F4)_{i,j+1}] w_{i,j+2} + [(F3)_{i+1,j-1} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i+1,j-1} \cdot (F3)_{i,j-1}] w_{i+1,j-1} \\ & + [(F4)_{i+1,j+1} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i+1,j+1}] w_{i+1,j+1} + [(F3)_{i-1,j-1} \cdot (F1)_{i-1,j} + (F1)_{i-1,j-1} \cdot (F3)_{i,j-1}] w_{i-1,j-1} \\ & + [(F4)_{i-1,j+1} \cdot (F1)_{i-1,j} + (F1)_{i-1,j+1} \cdot (F4)_{i,j+1}] w_{i-1,j+1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.6) denkleminde:

$$(S1)_{i-2,j} = (F1)_{i-2,j} \cdot (F1)_{i-1,j}$$

$$(S2)_{i-1,j} = (F1)_{i-1,j} \cdot [(F0)_{i,j} + (F0)_{i-1,j}]$$

$$(S3)_{i+1,j} = (F2)_{i+1,j} \cdot [(F0)_{i,j} + (F0)_{i+1,j}]$$

$$(S4)_{i+2,j} = (F2)_{i+2,j} \cdot (F2)_{i+1,j} \quad (2.7)$$

$$(S5)_{i,j-2} = (F3)_{i,j-2} \cdot (F3)_{i,j-1}$$

$$(S6)_{i,j-1} = (F3)_{i,j-1} \cdot [(F0)_{i,j} + (F0)_{i,j-1}]$$

$$(S7)_{i,j+1} = (F4)_{i,j+1} \cdot [(F0)_{i,j} + (F0)_{i,j+1}]$$

$$(S8)_{i,j+2} = (F4)_{i,j+2} \cdot (F4)_{i,j+1}$$

$$(S9)_{i+1,j-1} = (F3)_{i+1,j-1} \cdot (F2)_{i+1,j} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i+1,j-1} \cdot (F3)_{i,j-1}$$

$$(S10)_{i+1,j+1} = (F4)_{i+1,j+1} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i+1,j+1} \cdot (F4)_{i,j+1}$$

$$(S11)_{i-1,j-1} = (F3)_{i-1,j-1} \cdot (F1)_{i-1,j} + (F1)_{i-1,j-1} \cdot (F4)_{i,j-1}$$

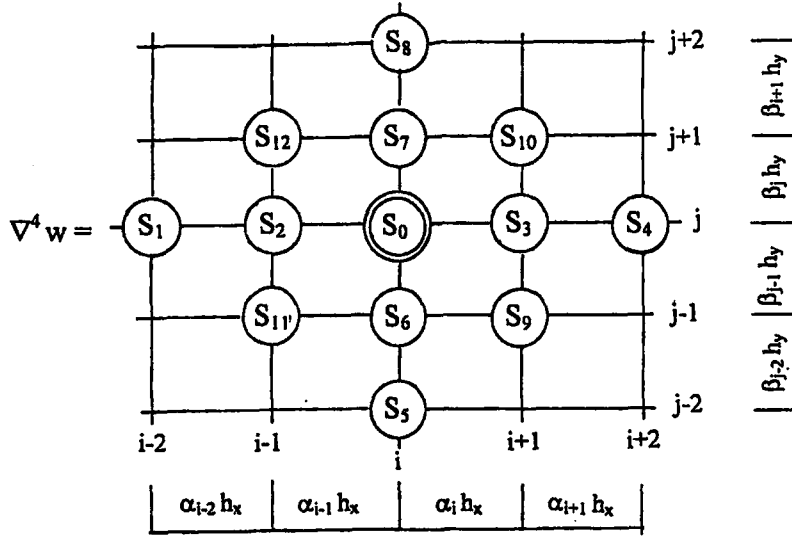
$$(S12)_{i-1,j-1} = (F4)_{i-1,j+1} \cdot (F1)_{i-1,j} + (F1)_{i-1,j+1} \cdot (F4)_{i,j+1}$$

ile gösterilirse, (2.6) denklemi şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} (\nabla^4 w)_{i,j} = & (S1)_{i-2,j} \cdot w_{i-2,j} + (S2)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (S0)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (S3)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (S4)_{i+2,j} \cdot w_{i+2,j} \\ & + (S5)_{i,j-2} \cdot w_{i,j-2} + (S6)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (S7)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1} + (S8)_{i,j+2} \cdot w_{i,j+2} + (S9)_{i+1,j-1} \cdot w_{i+1,j-1} \\ & + (S10)_{i+1,j+1} \cdot w_{i+1,j+1} + (S11)_{i-1,j-1} + (S12)_{i-1,j+1} \cdot w_{i-1,j+1} \end{aligned}$$

(2.8)

Bu denklemi Şekil 2.3 te görüldüğü gibi şematik olarak gösterebiliriz.



Şekil 2.3

Böylece, eşit olmayan aralıklar kullanılması halinde sonlu fark ifadeleri çıkartılmış oldu. Şimdi bazı özel durumları ele alalım.

a-) X doğrultusundaki bütün aralıklar h_x , Y doğrultusundaki bütün aralıklar h_y olsun. Bu durumda $\alpha_{i-2} = \alpha_{i-1} = \alpha_i = 1$ ve $\beta_{j-2} = \beta_{j-1} = \beta_j = \dots = 1$ olacaktır. Ayrıca, F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 ve $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots, S_{12}$ değerleri noktadan noktaya değişmeyecektir.

$\frac{h_x}{h_y} = \gamma$ ile gösterirsek ve (2.3), (2.7) ifadelerini dikkate alırsak:

$$F_1 = F_2 = \frac{2.1}{h_x^2 \cdot 1.1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{h_x^2} = \frac{1}{\gamma^2 h_y^2}$$

$$F_3 = F_4 = \frac{2.1}{h_y^2 \cdot 1.1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{h_y^2}$$

$$F_0 = -\frac{2.(1+1)}{h_x^2 \cdot 1.1 \cdot (1+1)} - \frac{2.(1+1)}{h_y^2 \cdot 1.1 \cdot (1+1)} = -\frac{2(1+\gamma^2)}{h_y^2 \cdot \gamma^2}$$

$$S1 = S4 = \frac{1}{\gamma^2 \cdot h_y^2} = \frac{1}{\gamma^4 \cdot h_y^4}$$

$$S2 = S3 = S6 = S7 = \frac{1}{\gamma^2 \cdot h_y^2} \left[-\frac{2(1+\gamma^2)}{h_y^2} - \frac{2(1+\gamma^2)}{h_y^2} \right] = -\frac{4(1+\gamma^2)}{\gamma^2 \cdot h_y^4}$$

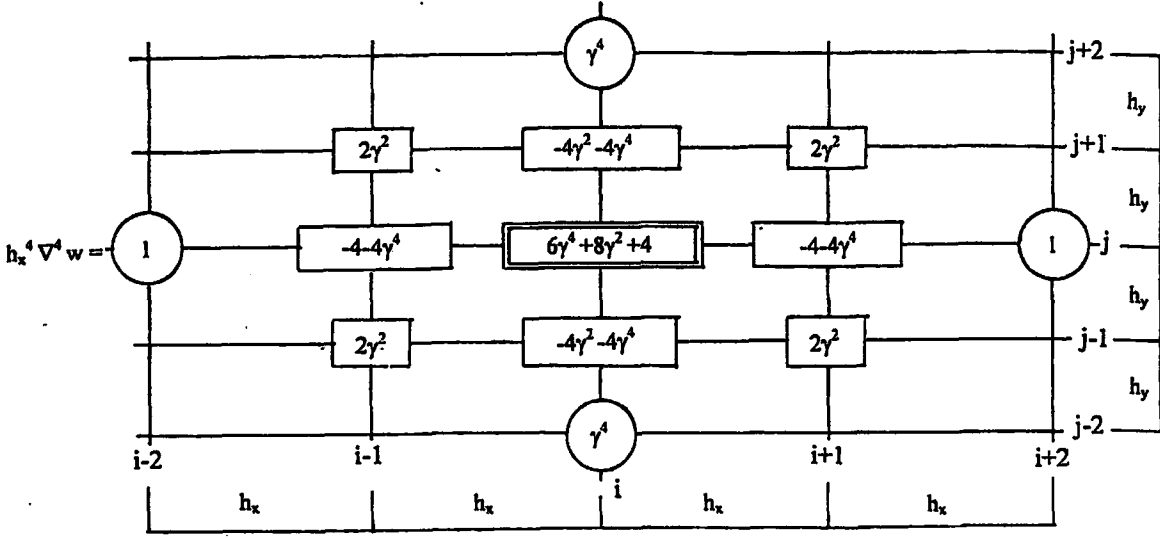
$$S5 = S8 = \frac{1}{h_y^2} \cdot \frac{1}{h_y^2} = \frac{1}{h_y^4}$$

(2.9)

$$S9 = S10 = S11 = S12 = \frac{1}{h_y^2} \cdot \frac{1}{\gamma^2 \cdot h_y^2} + \frac{1}{\gamma^2 h_y^2} = \frac{2}{\gamma^2 h_y^4}$$

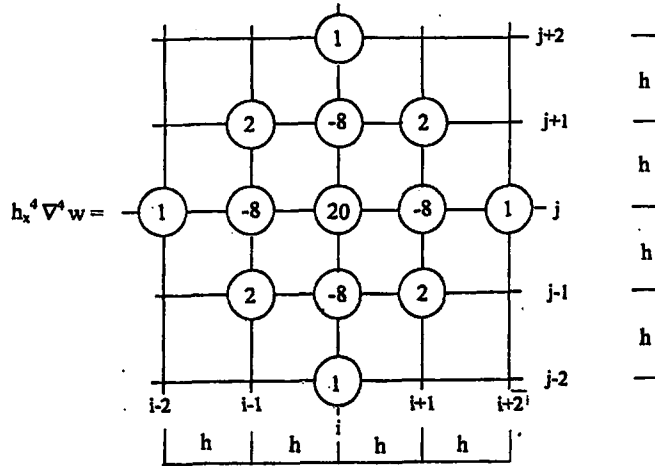
$$S0 = 4 \cdot \frac{(1+\gamma^2)^2}{\gamma^4 \cdot h_y^4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{\gamma^2 \cdot h_y^2} \cdot \frac{1}{\gamma^2 \cdot h_y^2} + \frac{1}{h_y^2} \cdot \frac{1}{h_y^2} \right) = \frac{6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6}{\gamma^4 \cdot h_y^4}$$

(2.9) daki değerler $\gamma^4 \cdot h_y^4 = h_x^4$ ile çarpılarak yerine koyulursa, Şekil 2.4 te görülen Şema elde edilir.



Şekil 2.4

b-) İkinci özel durum olarak, x ve y doğrultularındaki aralıkların birbirine eşit olması halini ele alalım. Bu durumda $h_x = h_y = h$ olacağından $\gamma = 1$ olur. Şekil 2.4 te $\gamma = 1$ alınırsa, Şekil 2.5 te görülen şema elde edilir.



Şekil 2.5

II.1.2. Dikdörtgen plaklarda klasik diferansiyel denklemin Sonlu Farklarla çözümü

Klasik teoride elastik zemine oturan plakların diferansiyel denklemi:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D}(g - c.w)$$

şeklindedir. Bu diferansiyel denklemde:

$w=w(x,y)$ Çökme Fonksiyonu

$g=g(x,y)$ Yayılı Yük Fonksiyonu

$c=c(x,y)$ Zemin Fonksiyonu

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{Plağın Eğilme Rijitliğidir.}$$

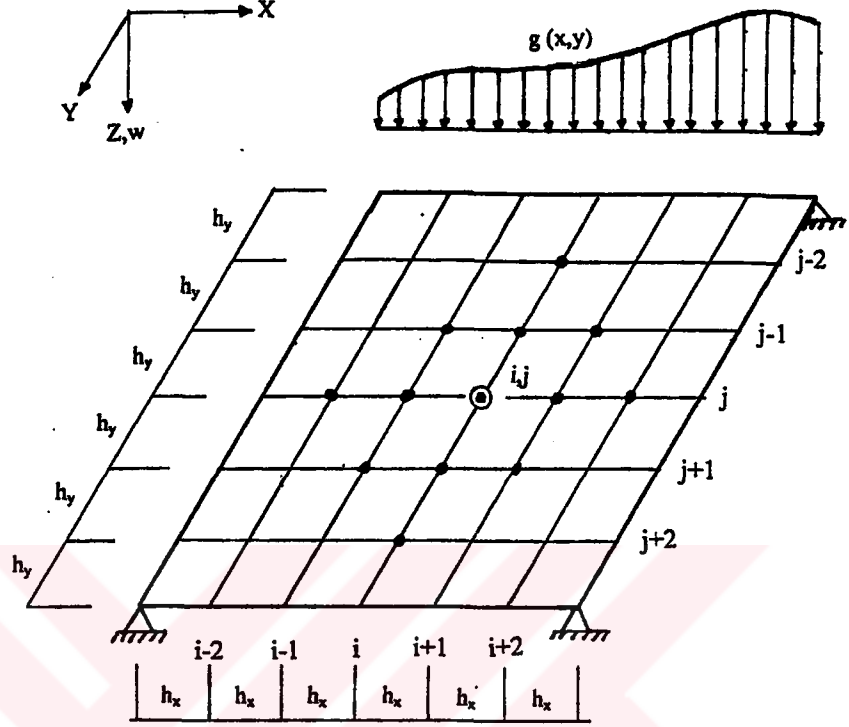
Bu diferansiyel denklemi, Şekil 2.6 da görülen plağın herhangi bir (i,j) noktası için yazarsak:

$$\nabla^4 w_{i,j} = \frac{g_{i,j}}{D} - k_{i,j}.w_{i,j} \quad h_x^4 . \nabla^4 . w_{i,j} = \frac{g_{i,j}}{D} . h_x^4 - (k_{i,j} . h_x^4) w_{i,j} \quad (2.10)$$

Burada:

$$\frac{C_{i,j}}{D} = k_{i,j} \quad \text{ile gösterilmiştir.}$$

(2.10) denklemindeki $\nabla^4.w_{i,j}$ değerini Şekil 2.3. teki şemadan faydalanıp yazarsak ve $k_{i,j}.w_{i,j}$ eşitliğin sol tarafına alırsak:



Şekil 2.6

$$\begin{aligned}
 & (S1)_{i-2,j} \cdot w_{i-2,j} + (S2)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} \dots \\
 & + [(S0)_{i,j} + k_{i,j}] w_{i,j} + (S3)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (S4)_{i+2,j} \cdot w_{i+2,j} + (S5)_{i,j-2} \cdot w_{i,j-2} + (S6)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (S7)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1} \\
 & + (S8)_{i,j+2} \cdot w_{i,j+2} + (S9)_{i+1,j-1} \cdot w_{i+1,j-1} + (S10)_{i+1,j+1} \cdot w_{i+1,j+1} + (S11)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (S12)_{i-1,j+1} \cdot w_{i-1,j+1} = g_{i,j} / D
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Şekil 2.6 da görüldüğü gibi, X ve Y eksenlerine paralel doğrular ağı çizilir. X eksenine dik doğruların aralıkları h_x ve Y eksenine dik doğruların aralıklarını h_y olarak alalım. Bu doğrular ağının her noktası için (2.11) denklemi yazılır. Bu şekilde elde edilecek denklem takımı çözülürse, doğrular ağının her noktasındaki w çökme değerleri bulunmuş olur. Bu çökme değerleri bulunduktan sonra bunlar, sonlu farklarla ifade edilen (2.12) kesit tesirleri

denklemlerinde yerine koyularak, bahis konusu noktalardaki kesit tesirleri elde edilmiş olur.

$$(M_x)_{i,j} = -D \left[\frac{\Delta^2 w}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{\Delta^2 w}{(\Delta y)^2} \right]_{i,j} = -D \left[\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h_x^2} + \nu \cdot \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_y^2} \right]$$

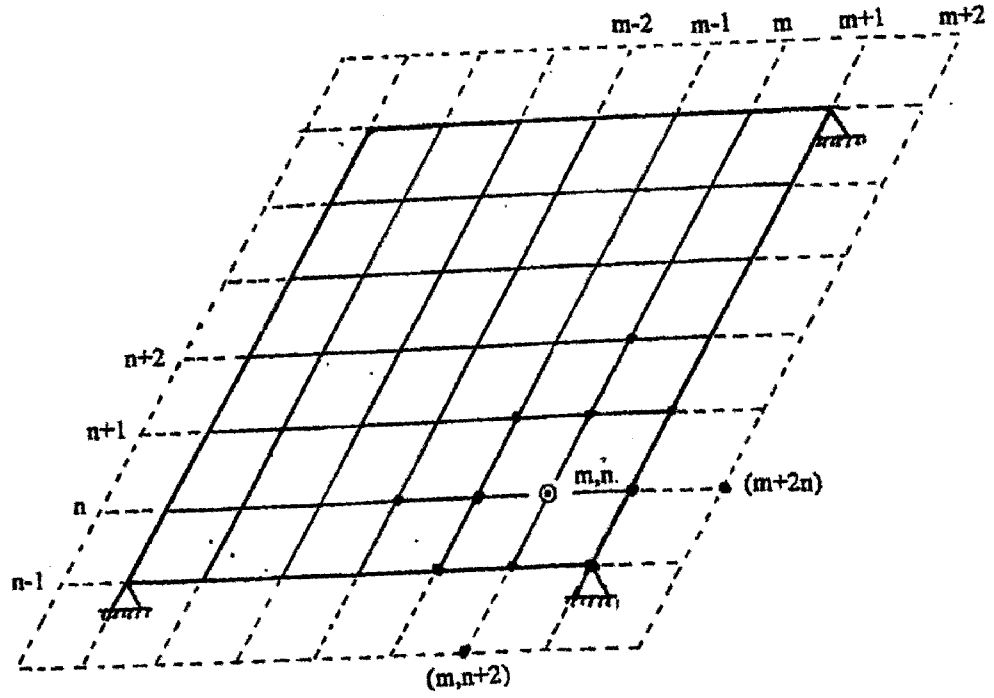
$$(M_y)_{i,j} = -D \left[\frac{\Delta^2 w}{(\Delta y)^2} + \nu \frac{\Delta^2 w}{(\Delta x)^2} \right]_{i,j} = -D \left[\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h_y^2} + \nu \cdot \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_x^2} \right]$$

$$(M_{xy})_{i,j} = -D(1-\nu) \left[\frac{\Delta}{\Delta x} + \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right) \right]_{i,j} = -\frac{D(1-\nu)}{4.h_x.h_y} [w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1}]$$

(2.12a-e)

$$(Q_x)_{i,j} = -D \frac{\Delta}{\Delta x} \left[\frac{\Delta^2 w}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{\Delta^2 w}{(\Delta y)^2} \right]_{i,j} = -\frac{D}{2.h_x} \left[\frac{w_{i-2,j} - 2w_{i-1,j} + 2w_{i+1,j}}{h_y^2} + \frac{w_{i-1,j-1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + 2w_{i,j+1} - w_{i+1,j+1}}{h_x^2} \right]$$

$$(Q_y)_{i,j} = -D \frac{\Delta}{\Delta y} \left[\frac{\Delta^2 w}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{\Delta^2 w}{(\Delta y)^2} \right]_{i,j} = -\frac{D}{2.h_y} \left[\frac{w_{i-2,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + 2w_{i,j+1} - w_{i+1,j+1}}{h_x^2} + \frac{w_{i,j-2} - 2w_{i,j-1} + 2w_{i,j+1} + w_{i,j+2}}{h_y^2} \right]$$

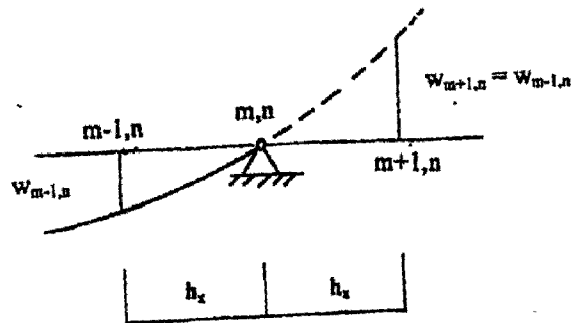


Şekil 2.7

Şekil 2.7 de görüldüğü gibi, plağın mesnedine yakın (m,n) noktası için (2.10) denklemi uygulanırken, fiktif bazı noktalar almak gerekecektir. Şekil 2.7 de $(m+2,n)$ ve $(m,n+2)$ noktaları gibi. Bunun için, bu fiktif noktalardaki w fonksiyonlarının tarif edilmesi gerekir. Fiktif noktalardaki w fonksiyonlarının belirlenmesi için, plağın sınır şartlarından faydalanılır.

II.1.2.1. Dikdörtgen plaklarda sınır şartlarının sonlu farklarla ifadesi

a) Plak sabit mesnede oturuyor ise Bu durumda mesnet üzerindeki her noktada çökme



Şekil 2.8

ve moment değerleri sıfır olacaktır

Yani:

$$W_{m,n} = 0$$

$$(M_x)_{m,n} = 0 \text{ olmalıdır.} \quad (2.13a-5)$$

(2.13) ifadesinden, $\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2}\right)_{m,n} = 0$ olarak bulunur. Buna göre, (2.13.b) ifadesini

(2.12.a) ya göre yazarsak:

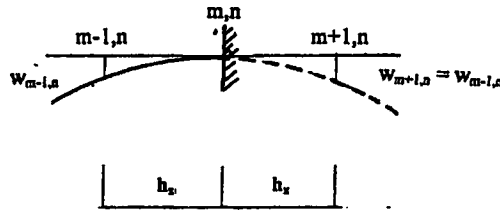
$$(M_x)_{m,n} = -D \left(\frac{\Delta w}{\Delta x^2} \right)_{m,n} = 0 \quad \text{veya} \quad -\frac{D}{h_x^2} (w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}) = 0$$

Burada $w_{m,n} = 0$ koyulursa:

$$w_{m-1,n} + w_{m+1,n} = 0 \text{ veya } w_{m+1,n} = -w_{m-1,n} \quad (2.14)$$

olarak elde edilir. Böylece, $(m+1,n)$ fiktif noktasındaki çökme değerinin, plağın $(m-1,n)$ noktasındaki çökme değerine ters işaretle eşit olduğu sonucu çıkmış olur.

b) Plak ankastre mesnede oturuyor ise



Şekil 2.9

Bu durumda ankastre mesnet üzerindeki her noktada çökme ve dönme değerleri sıfır olacaktır. Yani:

$$W_{m,n} = 0$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{m,n} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

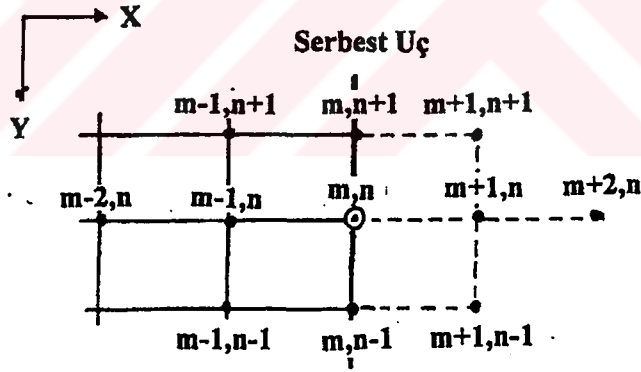
İkinci sınır şartını sonlu farklarla ifade edersek:

$$\frac{w_{m+1,n} - w_{m-1,n}}{2h_x} = 0 \text{ yazabiliriz. Buradan:}$$

$$w_{m+1,n} = w_{m-1,n} \quad (2.15)$$

bulunur ki, buna göre $(m+1,n)$ fiktif noktasındaki çökme değerinin, plağın $(m-1,n)$ noktasındaki çökme değerine eşit olduğu sonucu çıkar.

c) Plakta serbest uç bulunuyorsa



Şekil 2.10

Bu durumda, boş uçta her noktada moment ve kesme kuvveti sıfır olacaktır.

Yani:

$$(M_x)_{m,n} = 0$$

$$(Q_x)_{m,n} = 0$$

$$(M_x)_{m,n+1} = 0$$

$$(M_x)_{m,n-1} = 0$$

(2.16)

(2.16) ifadelerini, (2.12) ye göre yazarsak:

$$\frac{1}{h_x^2}(w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}) + \frac{\nu}{h_y^2}(w_{m,n-1} - 2w_{m,n} + w_{m,n+1}) = 0$$

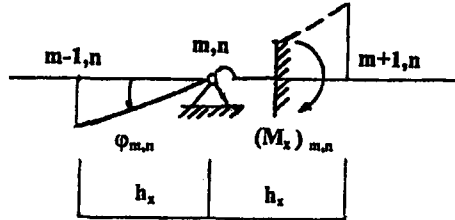
$$\frac{1}{h_x^2}(w_{m-2,n} - 2w_{m-1,n} + 2w_{m+1,n} - w_{m+2,n}) + \frac{1}{h_y^2}\left(\begin{matrix} w_{m-1,n-1} - 2w_{m-1,n} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + 2w_{m+1,n} \\ - w_{m+1,n+1} \end{matrix}\right) = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{h_x^2}(w_{m-1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m+1,n+1}) + \frac{\nu}{h_y^2}(w_{m,n} - 2w_{m,n+1} + w_{m,n+2}) = 0$$

$$\frac{1}{h_x^2}(w_{m-1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m+1,n-1}) + \frac{\nu}{h_y^2}(w_{m,n-2} - 2w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) = 0$$

Bu dört denklemden $(m+1,n)$, $(m+2,n)$, $(m+1,n-1)$, $(m+1,n+1)$ fiktif noktalarına ait çökme değerleri, plağın iç noktalarındaki çökme değerleri cinsinden bulunmuş olur.

d)Plak elastik olarak dönebilen ankastre mesnede oturuyor ise



Şekil 2.11

Elastik olarak dönebilen ankastre mesnette $w_{m,n} = 0$ ve ayrıca mesnette meydana gelecek $(M_x)_{m,n}$ momenti, $\varphi_{m,n}$ dönmesiyle orantılı olacaktır.

$$(M_x)_{m,n} = \rho \cdot \varphi_{m,n}$$

Burada, ρ mesnedin Dönme Rijitliğidir.

Buradan:

$$\varphi_{m,n} = \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{m,n} = -\frac{1}{\rho} \cdot (M_x)_{m,n} \quad \text{bulunur.} \quad \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} = 0 \quad \text{olduğu} \quad \text{dikkate}$$

alınarak, (2.12.a) denklemine göre:

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{m,n} = \frac{1}{\rho} \cdot D \cdot \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_{m,n} \quad \text{olarak elde edilir. Bu denklemi Sonlu Farklarla ifade}$$

edersek:

$$\frac{w_{m+1,n} - w_{m-1,n}}{2h_x} = \frac{D}{\rho} \cdot \frac{w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}}{h_x^2}$$

Buradan:

$$w_{m+1,n} = \frac{1 \mp \frac{2D}{\rho \cdot h_x}}{1 \pm \frac{2D}{\rho \cdot h_x}} \cdot w_{m-1,n} \quad (2.18)$$

$(m+1,n)$ fiktif noktasındaki çökme değeri, plağın $(m-1,n)$ noktasındaki çökme değeri cinsinden bulunmuş olur. (2.18) denkleminde:

$$\eta = \frac{1 \mp \frac{2D}{\rho \cdot h_x}}{1 \pm \frac{2D}{\rho \cdot h_x}} \quad \text{ile gösterilirse, bu denklemi:}$$

$$w_{m+1,n} = \eta \cdot w_{m-1,n} \quad (2.19)$$

şeklinde olacaktır.

Diğer taraftan mesnet kirişindeki Burulma Momenti $GJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$ olup, bu değer plağın $(M_x)_{m,n}$ Eğilme Momentine eşit olacaktır.

$$GJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{m,n} = (M_x)_{m,n} \quad \text{veya (2.12.a) denkleminde faydalanarak:}$$

$$GJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{m,n} = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{m,n} \quad (2.21)$$

yazabiliriz. (2.20) ve (2.21) denklemlerini sonlu fark ifadelerine göre yazarsak:

$$\begin{aligned} E.I \frac{w_{m-2,n} - 4w_{m-1,n} + 6w_{m,n} + w_{m+2,n}}{h_x^4} &= D \left[\frac{-w_{m-2,n} + 2w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+2,n}}{2h_x^3} \right] \\ &+ (2-\nu) \frac{1}{2h_x h_y} (-w_{m-1,n-1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n+1}) \\ GJ \left(\frac{w_{m-1,n-1} - w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n+1}}{4.h_x.h_y} \right) &= -D \left[\frac{w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}}{h_x^2} + \nu \cdot \frac{w_{m,n-1} - 2w_{m,n} + w_{m,n+1}}{h_y^2} \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\frac{E.I}{h_x^3} - \frac{D}{2h_x^2} = B1$$

$$+ B1 + \frac{D}{h_x^2} + \frac{D(2-\nu)}{h_y^2} = B2$$

$$B2 + 2B1 = B3$$

$$\frac{D(2-\nu)}{2h_y^2} = B4$$

$$\frac{G.J}{4.h_x.h_y} = B5$$

$$\frac{D}{h_x^2} = B6$$

$$\frac{\nu D}{h_y^2} = B7$$

ile gösterilirse, (2.22) denklemleri şu şekilde yazılabilir:

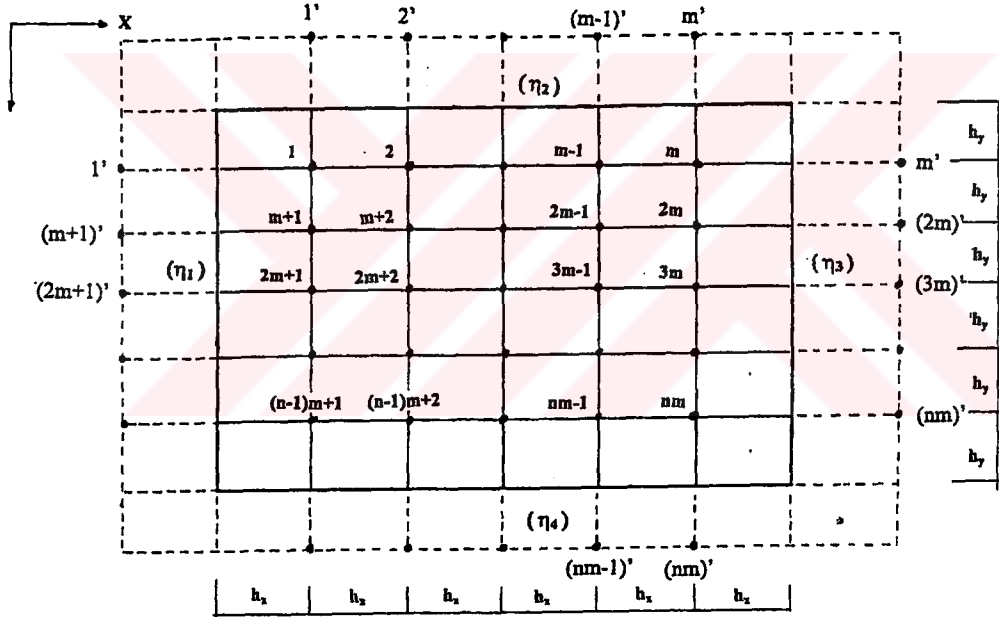
$$B1.w_{m-2,n} - B2.w_{m-1,n} + B3.w_{m+1,n} + B1.w_{m+2,n} + B4.w_{m-1,n-1} + B4.w_{m-1,n+1} - B4.w_{m+1,n-1} - B4.w_{m+1,n+1} = 0 \quad (2.23)$$

$$B5.w_{m-1,n-1} - B5.w_{m-1,n+1} + B6.w_{m-1,n} - B6.w_{m-1,n} - 2(B6+B7).w_{m,n} + B6.w_{m+1,n} + B7.w_{m,n-1} + B7.w_{m,n+1} + B5.w_{m+1,n+1} = 0$$

(2.23) denklemlerinde bilinmeyenler, fiktif noktalara ait $w_{m+1,n}$, $w_{m+2,n}$, $w_{m+1,n-1}$, $w_{m+1,n+1}$ çökme değerleridir. Mesnet kirişi üzerindeki her noktaya (2.23) denklemleri uygulanırsa, bir denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımının çözümünden, her fiktif noktaya ait çökme değeri iç noktalarındaki çökme değerleri cinsinden bulunabilir.

II.1.2.2. Elastik zemine oturan ve muhtelif sınır şartlarını haiz olan dikdörtgen plakların Sonlu Fark Denklemlerinin teşkili

Şekil 2.13 te görülen, dört kenarından herhangi bir tarzda mesnetlenmiş, elastik zemine oturan plağı ele alalım. Plağı x yönünde aralarındaki mesafe h_x olacak şekilde $m-1$ aralığa, y yönünde ise aralarındaki mesafe h_y olacak şekilde $n+1$ aralığa böldüğümüzü kabul edelim. Bu doğruların teşkil ettiği ağın noktalarını $1, 2, 3, \dots, m, \dots, 2m, \dots, mn$ ile gösterelim. Bu doğrular ağını plak dışında devam ettirerek $1', 2', 3', \dots, m', \dots, mn'$ fiktif noktalarını alalım. Bu fiktif noktalarındaki w çökmeleri, (2.19) ifadesine göre



Şekil 2.13

iç noktalardaki çökme değerlerinin η gibi bir katsayıyla çarpımına eşit olacaktır. plağın dört kenarının durumunu gösterecek katsayılar $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ olsun. (Örneğin plak, dört kenarından sabit mesnetlere oturuyorsa, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = -1$ olacaktır). Şimdi plağın her ağ noktası için (2.10) diferansiyel denklemini, Şekil 2.3 teki şemayı uygulayarak yazalım.

$$\begin{aligned} 1 \text{ noktas1: } & S1.\eta_1.w_1 + S2.0 + (S0+k_1).w_1 + S3.w_2 + S4.w_2 + S5.w_{2m+1} + S7.0 \\ & + S8.\eta_2.w_1 + S9.w_{m+2} + S10.0 + S11.0 + S12.0 = g_1 / D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ noktas1: } & S1.0 + S2.w_1 + (S0+k_2).w_2 + S3.w_3 + S4.w_4 + S5.w_{2m+2} + S6.w_{m+2} \\ & S7.0 + S8.\eta_2.w_2 + S9.w_{m+3} + S10.0 + S11.w_{m+1} + S12.0 = g_2 / D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ noktas1: } & S1.w_1 + S2.w_2 + (S0+k_3).w_3 + S3.w_4 + S4.w_5 + S5.w_{2m+3} + S6.w_{m+3} \\ & S7.0 + S8.\eta_2.w_3 + S9.w_{m+4} + S10.0 + S11.w_{m+2} + S12.0 = g_3 / D \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} m \text{ noktas1: } & S1.w_{m-2} + S2.w_{m-1} + (S0+k_m).w_m + S3.0 + S4.\eta_3.w_m + S5.w_{3m} \\ & S6.w_{2m} + S7.0 + S8.\eta_2.w_m + S9.0 + S10.0 + S11.w_{2m-1} \\ & + S12.0 = g_3 / D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m+1) \text{ noktas1: } & S1.w_{n+1}.\eta_1 + S2.0 + (S0+k_{m+1}).w_{m+1} + S3.w_{m+2} + S5.w_{3m+1} \\ & + S6.w_{2m+1} + S7.w_1 + S4 + S8.0 + S9.w_{2m+2} + S10.w_2 \\ & + S11.0 + S12.0 = g_{m+1} / D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m+2) \text{ noktas1: } & S1.0 + S2.w_{m+1} + (S0+k_{m+2}).w_{m+2} + S3.w_{m+3} + S4.w_{m+4} \\ & S5.w_{3m+2} + S6.w_{2m+2} + S7.w_2 + S8.0 + S9.w_{2m+3} + S10.w_3 \\ & S11.w_{2m+1} + S12.w_1 = g_{2m+1} / D \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} 2m \text{ noktas1: } & S1.w_{2m-2} + S2.w_{2m-1} + (S0+k_{2m}).w_{2m} + S3.0 + S4.\eta_3.w_{2m} \\ & S5.w_{4m} + S6.w_{7m} + S7.w_{2m} + S8.0 + S9.0 + S10.0 + S11.w_{3m-1} \\ & S12.w_{m-1} = g_{2m} / D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2m+1) \text{ noktas1: } & S1.\eta_1.w_{2m+1} + S2.0 + (S0+k_{2m+1}).w_{2m+1} + S3.w_{2m+3} + S5.w_{4m-1} \\ & + S6.w_{3m+1} + S7.w_{m+1} + S8.w_1 + S9.w_{3m+2} + S10.w_{m+2} + S11.0 \\ & + S12.0 = g_{2m+1} / D \end{aligned}$$

.....

$$(3m) \text{ noktası: } S1.w_{3m-2} + S2.w_{3m-1} + (S0+k_{3m}).w_{3m} + S3.0 + S4.\eta_3.w_{3m} \\ S5.w_{5m} + S6.w_{4m} + S7.w_{2m} + S8.0.w_m + S9.0 + S10.0 \\ + S11.w_{5m-1} + S12.w_{3m-1} = g_{3m} / D$$

.....

$$(nm) \text{ noktası: } S1.w_{nm-2} + S2.w_{nm-1} + (S0+k_{nm}).w_{nm} + S3.0 + S4.\eta_3.w_{nm} \\ S5.\eta_4.w_{nm} + S6.0 + S7.w_{(n-1)m} + S8.0.w_{(n-2)m} + S9.0 + S10.0 \\ + S11.0 + S12.w_{(n-1)m-1} = g_{nm} / D$$

Bu denklemleri düzenleyip yazarsak:

$$(S1.\eta_1 + S0 + S8.\eta_2 + k_1).w_1 + S3.w_2 + S4.w_3 + S6.w_{m+1} + S9.w_{m+2} \\ + S5.w_{2m+1} = g_1 / D$$

$$S2.w_1 + (S0 + S8.\eta_2 + k_2).w_2 + S3.w_3 + S4.w_4 + S11.w_{m+1} + S6.w_{m+2} \\ + S9.w_{m+3} + S5.w_{2m+2} = g_2 / D$$

$$S1.w_1 + S2.w_2 + (S0 + S8.\eta_2 + k_3).w_3 + S3.w_4 + S4.w_5 + S11.w_{m+2} + S6.w_{m+3} \\ + S9.w_{m+4} + S5.w_{2m+3} = g_3 / D$$

.....

$$S1.w_{m-2} + S2.w_{m-1} + (S0 + S4.\eta_3 + S8.\eta_2 + k_m).w_m + S11.w_{2m-1} + S6.w_{2m} \\ + S5.w_{3m} = g_m / D$$

$$S7.w_1 + S10.w_2 + (S0 + S1.\eta_1 + k_{m+1} + S3.w_{m+2} + S4.w_{m+3} + S6.w_{2m+1} \\ S9.w_{2m+2} + S5.w_{3m+1} = g_{m+1} / D$$

$$S12.w_1 + S7.w_2 + S10.w_3 + S2.w_{m+1} + (S0 + k_{m+2}).w_{m+2} + S3.w_{m+3} + S4.w_{m+4} \\ + S11.w_{2m+1} + S6.w_{2m+2} + S9.w_{2m+3} + S5.w_{3m+2} = g_{m+2} / D$$

$$S12.w_{m-1} + S7.w_m + S1.w_{2m-2} + S2.w_{2m-1} + (S0 + S4.\eta_3 + k_{2m}).w_{2m} + S11.w_{3m-1}$$

$$+ S6.w_{3m} + S5.w_{4m} = g_{2m} / D$$

$$S8.w_1 + S7.w_{m+1} + S10.w_{m+2} + (S0 + S1.\eta_1 + k_{2m+1}).w_{2m+1} + S3.w_{2m+2} \\ + S4.w_{2m+3} + S6.w_{3m+1} + S9.w_{3m+2} + S5.w_{4m+1} = g_{2m+1} / D$$

$$S8.w_m + S12.w_{2m-1} + S7.w_{2m} + S1.w_{3m-2} + S2.w_{3m-1} + (S0 + S4.\eta_3 + k_{3m}).w_{3m} \\ + S6.w_{4m} + S11.w_{5m-1} + S5.w_{5m} = g_{3m} / D$$

.....

$$S8.w_m + S12.w_{2m-1} + S7.w_{2m} + S1.w_{3m-2} + S2.w_{3m-1} \\ + (S0 + S4.\eta_3 + k_{3m}).w_{3m} + S6.w_{4m} + S11.w_{5m-1} + S5.w_{5m} = g_{3m} / D$$

$$S8.w_{(n-2)m} + S12.w_{(n-1)m-1} + S7.w_{(n-1)m} + S1.w_{nm-2} + S2.w_{nm-1} \\ + (S0 + S4.\eta_3 + S5.\eta_4 + k_{nm}).w_{nm} = g_{nm} / D$$

(2.24)

(2.24) denklemleri, n.m bilinmeyenli bir denklem takımı teşkil ederler. Bu denklem takımından bilinmeyen $w_1, w_2, w_3, \dots, w_m, \dots, w_{nm}$ çökme değerleri bulunabilir. (2.24) denklemlerini matris formunda yazalım.

$[A].[W] = [P]$ veya, her iki tarafı $[A]^{-1}$ ile çarparsak:

$$[W] = [A]^{-1}.[P]$$

Burada : $[W]$ Bilinmeyen çökme değerlerini gösteren Vektör

$[A]$ Katsayılar Matrisi

$[P]$ Yük Vektörü

$$[W] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w \\ w_3 \\ . \\ . \\ . \\ w_m \\ w_{m+1} \\ . \\ . \\ w_{nm} \end{bmatrix} \quad [P] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ . \\ . \\ . \\ g_m \\ g_{m+1} \\ . \\ . \\ g_{nm} \end{bmatrix}$$

A katsayılar matrisi (2.25) de verilmiştir.

A katsayılar matrisini, alt matrislerle ifade edebiliriz. Bu şekilde alt matrisler çalışmak bilgisayar programlaması bakımından kolaylık sağlar.

$$[A] = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & m & 2m & 3m & \dots & (n-1)m & nm & 1 \\ \hline & [A1] & [A3] & [A4] & [0] & [0] & [0] & m \\ & [A5] & [A2] & [A3] & [A4] & [0] & [0] & 2m \\ & [A6] & [A5] & [A2] & [A3] & [A4] & [0] & 3m \\ & [0] & [A6] & [A5] & [A2] & [A3] & [A4] & \dots \\ & [0] & [0] & [A6] & [A5] & [A2] & [A3] & (n-1)m \\ & [0] & [0] & [0] & [A6] & [A5] & [A7] & nm \end{array}$$

(2.26)

Burada [A1], [A2],.....[A7] alt matrislerdir. [0] ise sıfır matrisidir.

[illegible]

$$[A1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ S0 + \eta_1 S1 + \eta_2 S8 + k_1 & S3 & S4 & \dots & \dots \\ S2 & S0 + \eta_2 S8 + k_2 & S3 & \dots & \dots \\ S1 & S2 & \dots & \dots & S4 \\ \dots & \dots & \dots & S0 + \eta_2 S8 + k_{m-1} & S3 \\ \dots & \dots & S1 & S2 & S0 + \eta_2 S8 + \eta_3 S4 + k_m \end{bmatrix}$$

$$[A2] = \begin{bmatrix} m+1 & m+2 & \dots & 2m \\ S0 + \eta_1 S1 + k_{m+1} & S3 & S4 & \dots & \dots \\ S2 & S0 + k_{m+2} & S3 & \dots & \dots \\ S1 & S2 & \dots & \dots & S4 \\ \dots & \dots & \dots & S0 + k_{2m-1} & S3 \\ \dots & \dots & S1 & S2 & S0 + \eta_3 S4 + k_{2m} \end{bmatrix}$$

$$[A3] = \begin{bmatrix} S6 & S9 & \dots & \dots & \dots \\ S11 & S6 & S9 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & S11 & S6 & S9 \\ \dots & \dots & \dots & S11 & S6 \end{bmatrix}$$

$$[A4] = \begin{bmatrix} S5 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & S5 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & S5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & S5 \end{bmatrix}$$

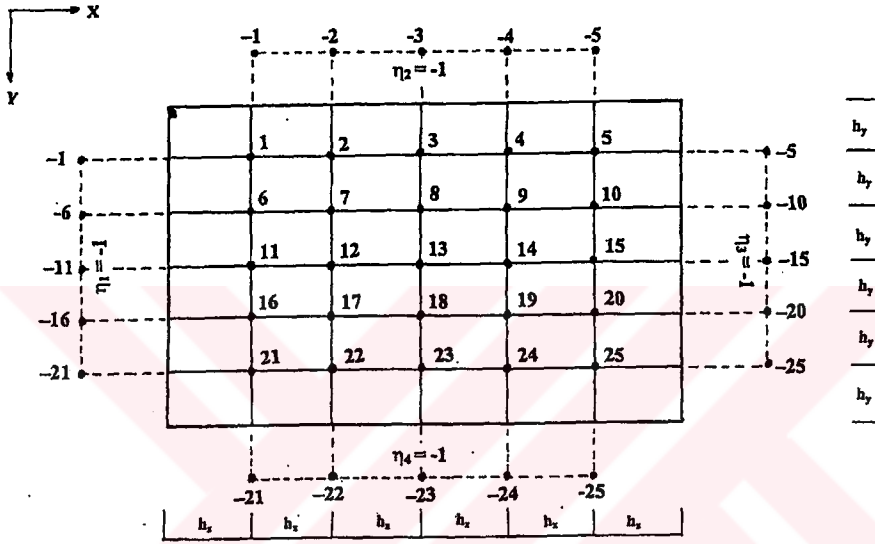
$$[A5] = \begin{bmatrix} S7 & S10 & \dots & \dots & \dots \\ S12 & S7 & S10 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & S12 & S7 & S10 \\ \dots & \dots & \dots & S12 & S7 \end{bmatrix}$$

$$[A6] = \begin{bmatrix} S8 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & S8 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & S8 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & S8 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} (n-1)(m+1) & (n-1)(m+2) & \dots & \dots & nm \\ S0 + \eta_1 S1 + \eta_2 S5 + k_{(n-1)(m+1)} & S3 & S4 & \dots & \dots \\ S2 & S0 + \eta_2 S5 + k_{(n-1)(m+2)} & S3 & \dots & \dots \\ S1 & S2 & \dots & \dots & S4 \\ \dots & \dots & \dots & S0 + \eta_2 S5 + k_{nm-1} & S3 \\ \dots & \dots & S1 & S2 & S0 + \eta_2 S5 + \eta_3 S5 + k_{nm} \end{bmatrix}$$

(2.27) de görülen matrisleri incelediğimizde, sınır şartlarının sadece [A1], [A2] ve [A7] matrislerine tesiri olduğunu görürüz. Bunların haricinde kalan alt matrisler ise sınır şartlarından bağımsızdır.

II.1.2.2.1. Elastik zemin üzerindeki dikdörtgen plağın dört kenarı üzerinde sabit mesnetlere oturması hâli



Şekil 2.14

Şekil 2.14 te görüldüğü gibi, plağı x ve y doğrultularında altı eşit parçaya bölelim. Bu durumda $m=n=5$ olacaktır. Plak dört tarafından sabit mesnetlere oturduğu için, plak dışında alınacak fiktif noktalardaki çökme değerleri (2.14) ifadesine göre, plağın iç noktalarına ait çökme değerlerinin ters işaretlisi olacaktır. Buna göre:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = -1 \text{ dir.}$$

Ayrıca Y eksenine paralel doğruların aralıkları h_x ve X eksenine paralel doğruların aralıkları h_y olarak seçildiğinden, Şekil 2.4 teki şemaya göre:

$$\begin{aligned}
S_0 &= 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 \\
S_1 &= S_4 = 1 \\
S_2 &= S_3 = -4 - 4\gamma^2 \\
S_5 &= S_8 = \gamma^4 \\
S_6 &= S_7 = -4\gamma^2 - 4\gamma^2
\end{aligned} \tag{2.28}$$

olacaktır. Bu değerleri kullanarak

$$\begin{aligned}
S_0 + S_1.\eta_1 + S_8.\eta_2 &= 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \\
S_0 + S_8.\eta_2 &= S_0 + S_5.\eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 \\
S_0 + S_8.\eta_2 + S_4.\eta_3 &= 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \\
S_0 + S_1.\eta_1 &= 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \\
S_0 + S_4.\eta_3 + S_5.\eta_4 &= 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5
\end{aligned} \tag{2.29}$$

olarak bulunur.

(2.28) ve (2.29) değerleri, (2.27) de verilen alt matrislerde yerine koyulursa:

[A1]=[A7]=

1	2	3	4	5	
$5\gamma^4+8\gamma^2+5+k_1.h_x^4$	$-4-4\gamma^2$	1			1
$-4-4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+5+6+k_2$	$-4-4\gamma^2$	1		2
1	$-4-4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_3$	$-4-4\gamma^2$		3
	1	$-4-4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_4$	$-4-4\gamma^2$	4
		1	$-4-4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+5+k_5$	5

[A2]=

6	7	8	9	10	
$6\gamma^4+8\gamma^2+5+k_6.h_x^4$	$-4-4\gamma^2$	1			6
$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_7$	$-4-4\gamma^2$	1		7
1	$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_8$	$-4-4\gamma^2$		8
	1	$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_9$	$-4-4\gamma^2$	9
		1	$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+5+k_{10}$	10

(2.30)

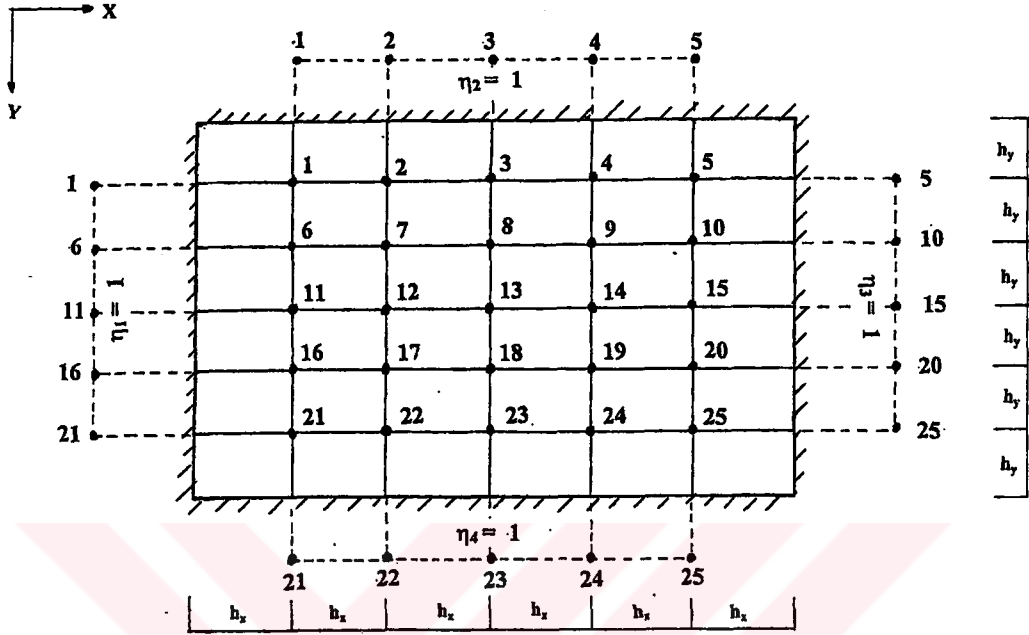
[A3]=[A5]=

6	7	8	9	10	
$-4\gamma^2-4\gamma^4$	$2\gamma^2$				1
$2\gamma^2$	$-4\gamma^2-4\gamma^4$	$2\gamma^2$			2
	$2\gamma^2$	$-4\gamma^2-4\gamma^4$	$2\gamma^2$		3
		$2\gamma^2$	$-4\gamma^2-4\gamma^4$	$2\gamma^2$	4
			$2\gamma^2$	$-4\gamma^2-4\gamma^4$	5

[A4]=[A6]=

11	12	13	14	15	
γ^4					1
	γ^4				2
		γ^4			3
			γ^4		4
				γ^4	5

II.1.2.2.2. Elastik zemine oturan plakın dört kenarı üzerinde ankastre mesnede oturması hâli



Şekil 2.15

Bu durumda, plak dışında alınacak fiktif noktalarındaki çökme değerleri iç noktalardaki çökme değerlerine eşit olacağından, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 1$ dir.

Buna göre, (2.28) değerlerinden faydalananarak:

$$\begin{aligned}
 S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_8 \cdot \eta_2 &= S_0 + S_4 \cdot \eta_3 + S_8 \cdot \eta_2 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \\
 S_0 + S_5 \cdot \eta_4 &= S_0 + S_8 \cdot \eta_2 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 \\
 S_0 + S_1 \cdot \eta_1 &= 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \\
 S_0 + S_4 \cdot \eta_3 + S_5 \cdot \eta_4 &= S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_5 \cdot \eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

olarak bulunur. Bu değerler (2.27) alt matrislerinde yerine koyulursa:

$$[A1] = [A7] =$$

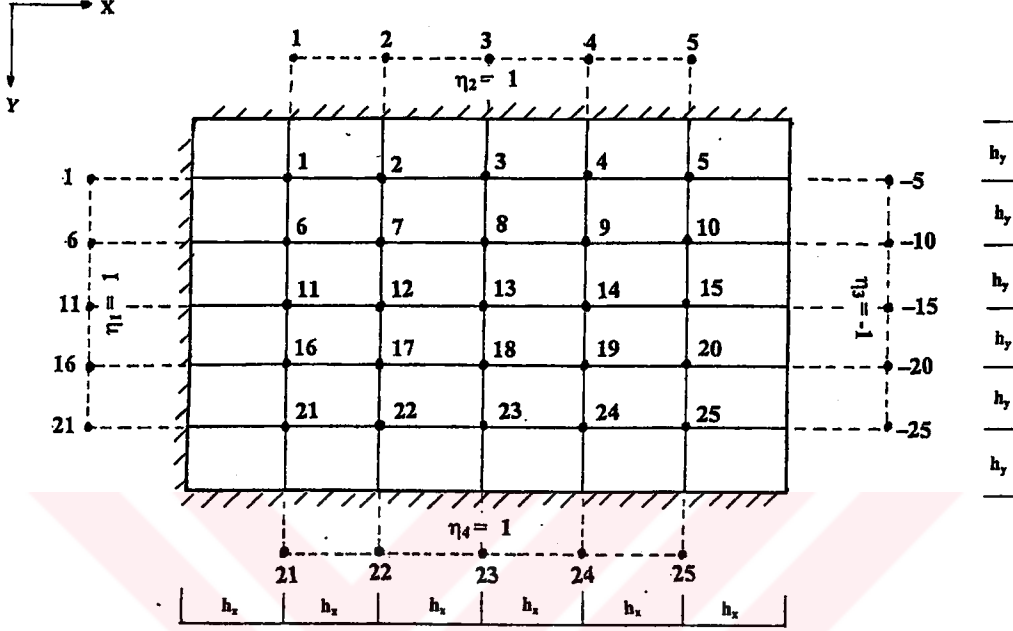
1	2	3	4	5	
$7\gamma^4+8\gamma^2+7+k_1$	$-4-4\gamma^2$	1			1
$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_2$	$-4-4\gamma^2$	1		2
1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_3$	$-4-4\gamma^2$	1	3
	1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_4$	$-4-4\gamma^2$	4
		1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_5$	5

$$[A2] =$$

6	7	8	9	10	
$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_6$	$-4-4\gamma^2$	1			6
$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_7$	$-4-4\gamma^2$	1		7
1	$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_8$	$-4-4\gamma^2$	1	8
	1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_9$	$-4-4\gamma^2$	9
		1	$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_{10}$	10

[A3], [A4], [A5], [A6] alt matrisleri, (2.30) daki alt matrislerle aynıdır.

II.1.2.2.3. Elastik zemine oturan plağın üç kenarı üzerinde ankastre mesnede, bir kenarı üzerinde de sabit mesnede oturması hâli



Şekil 2.16

Bu durumda $\eta_1 = \eta_2 = \eta_4 = +1$ ve $\eta_3 = -1$ alınmalıdır. Buna göre:

$$S_0 + S_1.\eta_1 + S_8.\eta_2 = S_0 + S_1.\eta_1 + S_5.\eta_1 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_4.\eta_3 + S_5.\eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_8.\eta_2 = S_0 + S_5.\eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 \quad (2.32)$$

$$S_0 + S_8.\eta_2 + S_4.\eta_3 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

$$S_0 + S_1.\eta_1 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

(2.32) değerleri, (2.27) alt matrislerinde yerine koyulursa:

$$[A1]=[A7]=$$

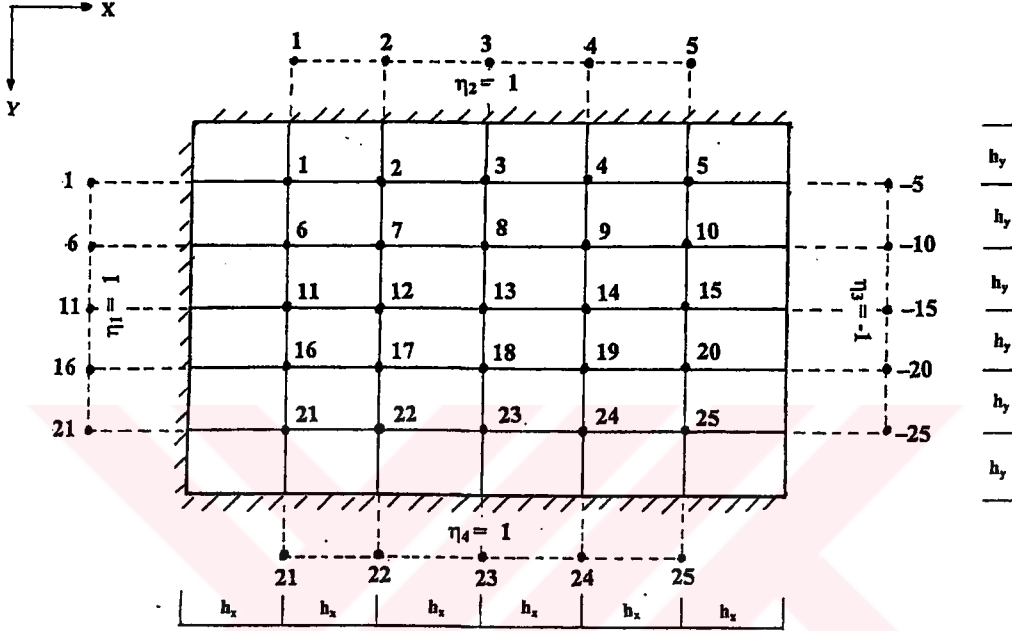
1	2	3	4	5	
$7\gamma^4+8\gamma^2+7+k_1$	$-4-4\gamma^2$	1			1
$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_2$	$-4-4\gamma^2$	1		2
1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_3$	$-4-4\gamma^2$	1	3
	1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_4$	$-4-4\gamma^2$	4
		1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_5$	5

$$[A2] =$$

6	7	8	9	10	
$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_6$	$-4-4\gamma^2$	1			6
$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_7$	$-4-4\gamma^2$	1		7
1	$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_8$	$-4-4\gamma^2$	1	8
	1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_9$	$-4-4\gamma^2$	9
		1	$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_{10}$	10

Diğer alt matrisler, (2.30) da verilen alt matrislerle aynıdır.

II.1.2.2.4. Elastik zemine oturan plağın komşu iki kenarı üzerinde ankastre mesnede, diğer iki kenarı üzerinde de sabit mesnede oturması hâli



Şekil 2.17

Bu durumda $\eta_1 = \eta_4 = +1$ ve $\eta_2 = \eta_3 = -1$ alınmalıdır. Bu değerlere göre:

$$S_0 + S_1.\eta_1 + S_8.\eta_2 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_8.\eta_2 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$S_0 + S_1.\eta_1 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_1.\eta_1 + S_5.\eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_5.\eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$S_0 + S_5.\eta_4 + S_4.\eta_3 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

$$S_0 + S_4.\eta_3 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \quad \text{olarak bulunur.}$$

(2.32) değerleri, (2.27) alt matrislerinde yerine koyulursa:

(2.33)

[A1]=

1	2	3	4	5	
$5\gamma^4+8\gamma^2+7+k_1$	$-4-4\gamma^2$	1			1
$-4-4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_2$	$-4-4\gamma^2$	1		2
1	$-4-4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_3$	$-4-4\gamma^2$	1	3
	1	$-4-4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_4$	$-4-4\gamma^2$	4
		1	$-4-4\gamma^2$	$5\gamma^4+8\gamma^2+6+k_5$	5

[A2] =

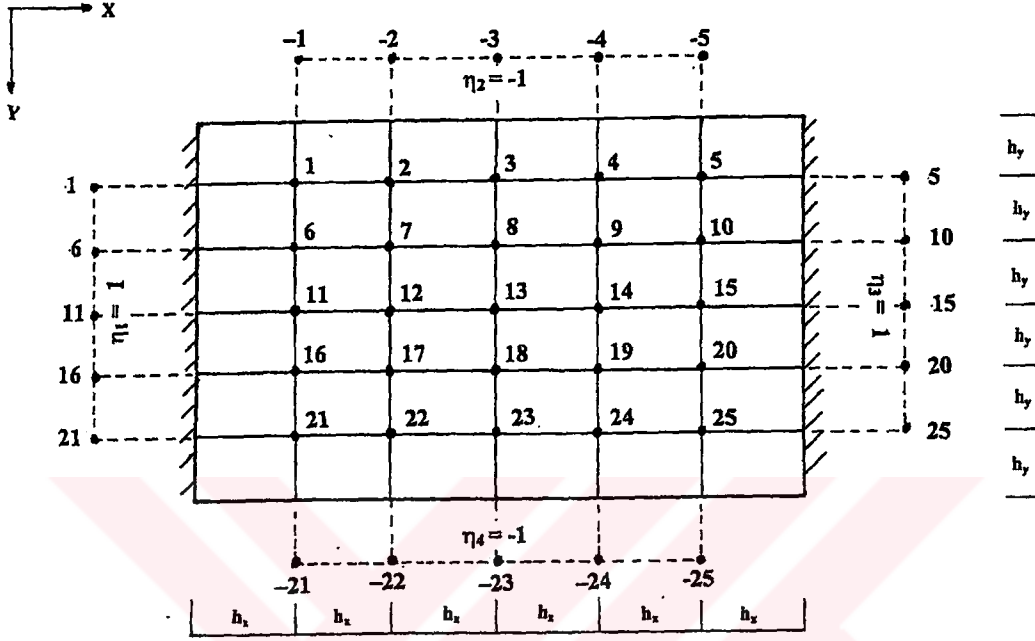
6	7	8	9	10	
$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_6$	$-4-4\gamma^2$	1			6
$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_7$	$-4-4\gamma^2$	1		7
1	$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_8$	$-4-4\gamma^2$	1	8
	1	$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+6+k_9$	$-4-4\gamma^2$	9
		1	$-4-4\gamma^2$	$6\gamma^4+8\gamma^2+7+k_{10}$	10

[A7] =

21	22	23	24	25	
$7\gamma^4+8\gamma^2+7+k_{21}$	$-4-4\gamma^2$	1			21
$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_{22}$	$-4-4\gamma^2$	1		22
1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_{23}$	$-4-4\gamma^2$	1	23
	1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+6+k_{24}$	$-4-4\gamma^2$	24
		1	$-4-4\gamma^2$	$7\gamma^4+8\gamma^2+7+k_{25}$	25

Diğer alt matrisler, (2.30) da verilen matrislerle aynıdır.

II.1.2.2.5. Elastik zemine oturan plağın karşılıklı iki kenarı üzerinde ankastre mesnede, diğer iki kenarı üzerinde de sabit mesnede oturması hâli



Şekil 2.18

Bu durumda $\eta_1 = \eta_3 = +1$ ve $\eta_2 = \eta_4 = -1$ alınmalıdır. Bu değerlere göre:

$$S_0 + S_1.\eta_1 + S_8.\eta_2 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_8.\eta_2 = S_0 + S_5.\eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$S_0 + S_8.\eta_2 + S_4.\eta_3 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_1.\eta_1 = S_0 + S_4.\eta_3 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_1.\eta_1 + S_5.\eta_4 = S_0 + S_5.\eta_4 + S_4.\eta_3 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \quad (2.34)$$

olarak elde edilir.

(2.34) değerleri, (2.27) alt matrislerinde yerine koyulursa:

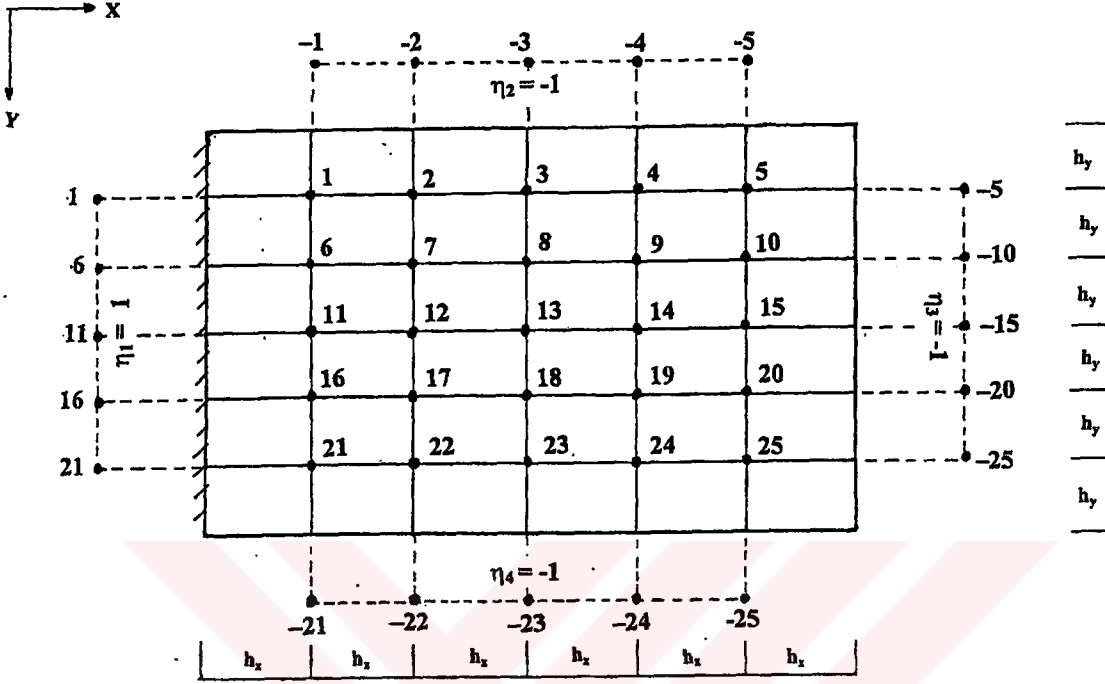
[A1]= [A7]

1	2	3	4	5	
$5 \gamma^4+8 \gamma^2+7+k_1$	$-4-4 \gamma^2$	1			1
$-4-4 \gamma^2$	$5 \gamma^4+8 \gamma^2+6+k_2$	$-4-4 \gamma^2$			2
	$-4-4 \gamma^2$	$5 \gamma^4+8 \gamma^2+6+k_3$	$-4-4 \gamma^2$		3
		$-4-4 \gamma^2$	$5 \gamma^4+8 \gamma^2+6+k_4$	$-4-4 \gamma^2$	4
			$-4-4 \gamma^2$	$5 \gamma^4+8 \gamma^2+6+k_5$	5

[A2] =

6	7	8	9	10	
$6 \gamma^4+8 \gamma^2+7+k_6$	$-4-4 \gamma^2$	1			6
$-4-4 \gamma^2$	$6 \gamma^4+8 \gamma^2+6+k_7$	$-4-4 \gamma^2$	1		7
1	$-4-4 \gamma^2$	$6 \gamma^4+8 \gamma^2+6+k_8$	$-4-4 \gamma^2$	1	8
	1	$-4-4 \gamma^2$	$6 \gamma^4+8 \gamma^2+6+k_9$	$-4-4 \gamma^2$	9
		1	$-4-4 \gamma^2$	$6 \gamma^4+8 \gamma^2+7+k_{10}$	10

II.1.2.2.6. Elastik zemine oturan plağın bir kenarı üzerinde ankastre mesnede diğer üç kenarı üzerinde sabit mesnede oturması hâli



Şekil 2.19

Bu durumda $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = -1$ ve $\eta_1 = +1$ alınmalıdır. Buna göre:

$$S_0 + S_8 \cdot \eta_2 = S_0 + S_5 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$S_0 + S_4 \cdot \eta_3 + S_8 \cdot \eta_2 = S_0 + S_4 \cdot \eta_3 + S_8 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_5 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_8 \cdot \eta_2 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \quad (2.35)$$

$$[A1] = [A7]$$

1	2	3	4	5	
$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_1$	$-4 - 4\gamma^2$	1			1
$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_2$	$-4 - 4\gamma^2$	1		2
1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_3$	$-4 - 4\gamma^2$	1	3
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_4$	$-4 - 4\gamma^2$	4
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_5$	5

$$[A2] =$$

6	7	8	9	10	
$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_6$	$-4 - 4\gamma^2$	1			6
$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_7$	$-4 - 4\gamma^2$	1		7
1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_8$	$-4 - 4\gamma^2$	1	8
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_9$	$-4 - 4\gamma^2$	9
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_{10}$	10

Diğer alt matrisler (2.30) da verilen matrislerle aynıdır.

Böylece her tip mesnet durumunda, [A] matrisinin teşkili için gerekli olan alt matrisler belirlenmiş oldu.

Şayet mesnetler elastik ankastre şeklinde ise, (2.18) ifadesine göre:

$$\eta = \frac{1 \mp \frac{2D}{\rho h}}{\frac{2D}{\rho h}}$$

olarak hesaplanıp, yerine koyulmalıdır.

II.1.2.3. Bilgisayar programları

Elastik zemine oturan ve her tip mesnetlenme şartını kapsayan plakların çözümü için bilgisayar programı verilmiştir. Program hazırlanırken en genel şekilde ele alınmıştır. (II.1.2.2.1), (II.1.2.2.2.),.....(II.1.2.2.6) bölümlerinde incelenen mesnet tiplerine ilaveten, elastik ankastre tipinde olan mesnet durumları da programa dahil edilmiştir. Ayrıca program, plak üzerinde alınacak doğrular ağındaki aralık sayısı istenildiği kadar alınabilecek tarzda tertip edilmiştir. Plağı her iki yönde kaç aralığa bölmek istiyorsak, bunu baştan tespit edip programa bilgi olarak vermek gerekir.

Program elastik zemine oturan plakların çözümünü yapabildiği gibi, elastik zemine oturmayan plaklar içinde, C zemin katsayısını sıfır almak suretiyle çözüm yapabilmektedir. Programda kullanılan rotasyonlar:

M	: x ve y eksenine paralel doğrular ağının, bir doğrusu üzerinde bulunan nokta sayısı
H_x	: x eksenine doğrultusundaki aralık mesafesi
H_y	: y eksenine doğrultusundaki aralık mesafesi
D	: Plağın eksenine doğrultusundaki aralık mesafesi
MI	: Plak üzerindeki doğrular ağının meydana getirdiği toplam Nokta sayısı ($MI=M,M$)
ALFA	: H_x / H_y oranı
IS	: Plağın mesnetlenme durumunu karakterize eden bir sayı

4 kenarından sabit mesnetlere oturan plakta $IS=1$

4 kenarından ankastre mesnetlere oturan plakta $IS=2$

3 kenarı ankastre, 1 kenarı sabit mesnede oturan plakta $IS=3$

2 komşu kenarı ankastre, 2 kenarı sabit mesnede oturan plakta $IS=4$

Karşılıklı 2 kenarı ankastre, diğer kenarları sabit mesnede oturan plakta
 $IS=5$

1 kenarı ankastre, 3 kenarı sabit mesnede oturan plakta $IS =6$

4 kenarı elastik ankastre mesnede oturan plakta $IS=7$

3 kenarı elastik ankastre mesnede, 1 kenarı sabit mesnede oturan plakta
 $IS=8$

2 komşu kenarı elastik ankastre, diğer kenarları sabit mesnede oturan
plakta $IS=9$

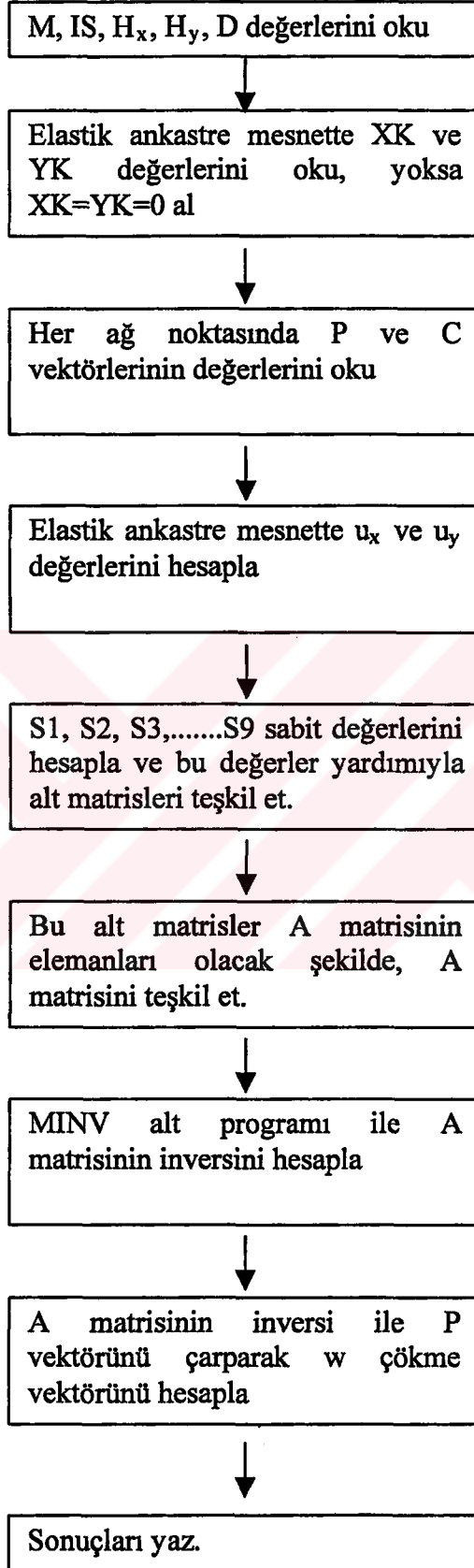
Karşılıklı 2 kenarı elastik ankastre, diğer kenarları sabit mesnede oturan
Plakta $IS=10$

1 kenarı elastik ankastre, diğer kenarları sabit mesnede oturan plakta
 $IS=11$

olarak programa verilecektir.

- XK** : X eksenine paralel Elastik Ankastre Mesnedin Dönme Rijitliği
YK : Y eksenine paralel Elastik Ankastre Mesnedin Dönme Rijitliği
P : Plak üzerindeki her ağ noktasında yayılı yükün değerlerini gösteren vektör
C : Plak üzerindeki her ağ noktasındaki Zemin Katsayısı / D değerlerini ($k_{i,j} = c_{i,j} / D$) gösteren bir vektör
A : Katsayılar Matrisi
W : Her ağ noktasındaki Çökme Değerlerini Gösteren bir Vektör

PROGRAM



Gerek bu programda, gerekse daha önceki programlarda kullanılan MINV alt programı diske kaydedilmiş olup, herhangi bir matrisin inversini almaktadır. Bu program ile, plak üzerindeki doğruların meydana getirdiği ağın her noktasındaki çökme değerleri bulunmaktadır. Bu çökme değerlerinden faydalanarak, bahis konusu noktalarındaki kesit tesirlerini hesaplamak için ayrı bir program hazırlanmıştır.

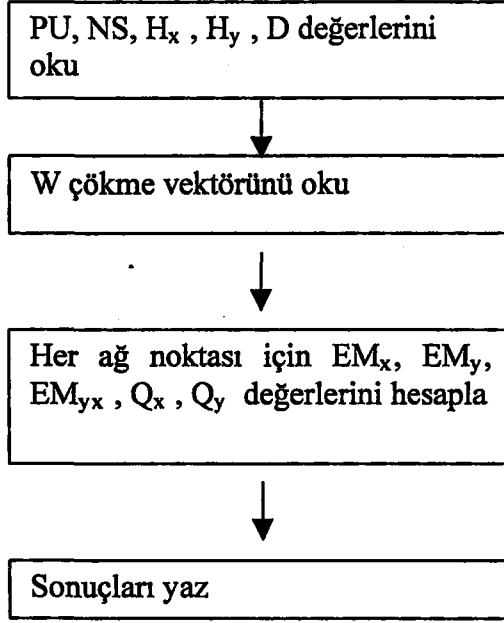
Bu iki programın tek bir program olarak tanzim edilmesi mümkündür. Ayrı olarak hazırlanmasının şu avantajı vardır:

Plak üzerindeki doğrular ağı sık olarak alınır, çok ağ noktası meydana gelecektir. Bu ağ noktalarındaki çökme değerleri program ile hesaplanırken, bilgisayar hafızasında oldukça geniş bir saha kaplayacaktır. Kesit tesirlerinin hesaplanması aynı programın içinde yapıldığı takdirde, bilgisayar hafıza kapasitesi yetmeyebilecektir. Bu sebeple bu iki program ayrı ayrı teşkil edilmiştir. Fakat, plak üzerindeki ağ noktalarının sayısı az ise, bu iki programı peşpeşe ekleyip tek bir programla neticeler elde edilebilir.

İkinci bilgisayar programında kullanılan notasyonlar, birinci programda kullanılan notasyonlarla aynıdır. İlaveten kullanılan notasyonlar şunlardır:

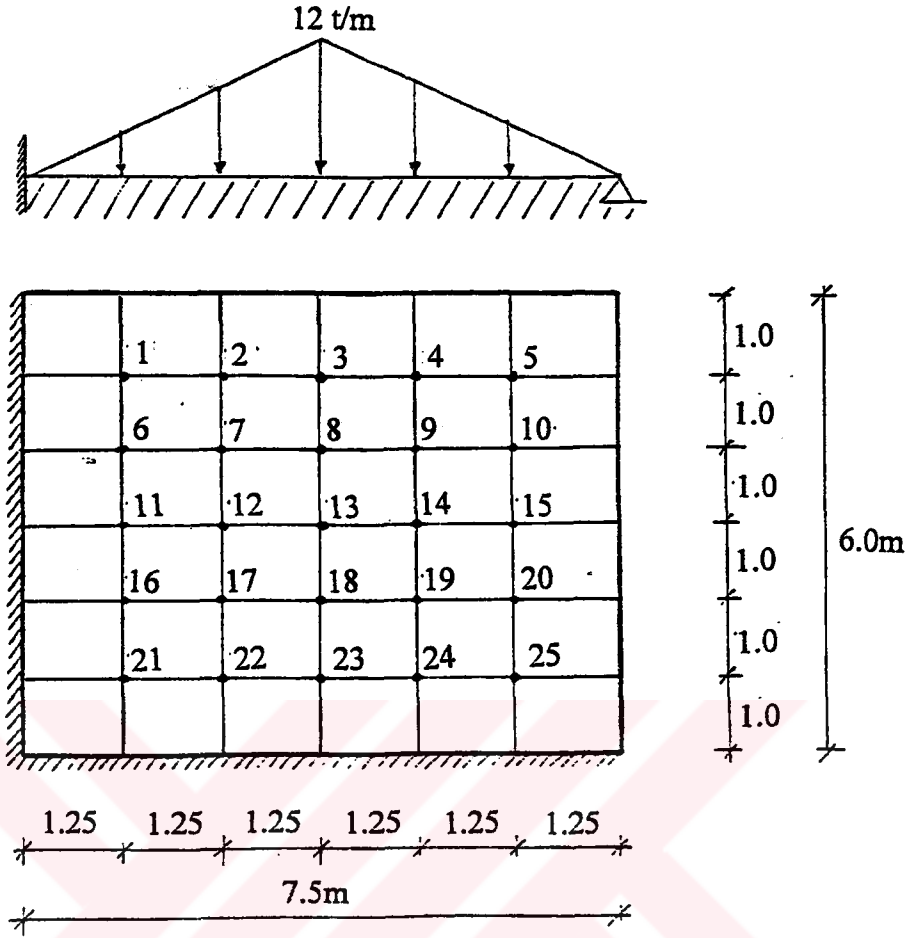
- PU : Poisson oranı
 NS : x veya y doğrultusundaki aralık sayısı ($NS=M+1$)
 EMX : Plak üzerindeki ağ noktalarındaki x doğrultusundaki eğilme momenti
 EMY : Plak üzerindeki ağ noktalarındaki y doğrultusundaki eğilme momenti
 EMXY: Plak üzerindeki ağ noktalarındaki burulma momenti
 QX : Plak üzerindeki ağ noktalarındaki x doğrultusundaki kesme kuvvetleri
 QY : Plak üzerindeki ağ noktalarındaki y doğrultusundaki kesme kuvvetleri

PROGRAM



ÖRNEK: Bu bölümün sonunda örnek olarak elastik zemine oturan iki komşu kenarı ankastre, diğer iki kenarı da sabit mesnet olan üçgen yayılı yüke maruz dikdörtgen plak çözülecektir.

Bir sırada bulunan nokta sayısı	M=5
Sınır şartlarını gösteren katsayı	IS=4
X doğrultusundaki aralık mesafesi	: $h_x = 1.25\text{m}$
Y doğrultusundaki aralık mesafesi	: $h_y = 1.00\text{m}$
Plagın Eğilme Rijitliği	: $D = 6.000 \text{ tm}$
Zemin Katsayısı / D	: $C = 2.0 \text{ (t/m}^2\text{) / (tm)}$



Şekil 2.20 Örnek(Elastik Zemine Oturan Plâgın Sonlu Farklarla Çözümü)

ÇÖZÜM

M=5
hx=1.250

IS=4
hy=1.000

D= 600.000

C=2.000

YÜK MATRİSİ

4.00000	8.00000	12.00000	8.00000	4.00000
4.00000	8.00000	12.00000	8.00000	4.00000
4.00000	8.00000	12.00000	8.00000	4.00000
4.00000	8.00000	12.00000	8.00000	4.00000
4.00000	8.00000	12.00000	8.00000	4.00000

SEHİM VEKTÖRÜ

0.003977540	0.008802760	0.001123837	0.008805470	0.003980890
0.005994880	0.013415200	0.017115300	0.013425610	0.006009330
0.006260360	0.014102980	0.018028300	0.014131760	0.006306870
0.005057160	0.011419710	0.014676620	0.011477500	0.005173730
0.002534080	0.005754730	0.007494910	0.005824460	0.002735120

MX MOMENTİ DEĞERLERİ

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
- 3.05475	- 0.12909	1.33747	2.40672	1.33777	-0.02760
- 4.60406	- 0.37183	1.82182	3.33506	1.82319	- 0.00001
- 4.80795	- 0.40604	1.84193	3.43094	1.84519	0.00000
- 3.88389	- 0.36901	1.49134	2.86288	1.49266	0.00000
- 1.94617	- 0.26254	0.57749	1.34106	0.56203	0.00000
0.00000	- 0.50782	-1.15324	-1.50198	- 1.16722	0.00000

MY MOMENTİ DEĞERLERİ

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
- 0.51014	1.21176	2.46743	3.52907	1.11736	- 0.00461
-0.76887	0.95970	2.59342	3.45225	0.94831	0.00000
-0.80292	0.77974	2.27371	3.06041	0.76106	0.00000
-0.64861	0.70821	1.98823	2.71203	0.71081	0.00000
-0.32501	-0.08742	0.14878	0.40663	0.15519	0.00000
0.00000	-3.04089	- 6.90567	- 8.99389	-3.28214	0.00000

MX Y MOMENTİ DEĞERLERİ

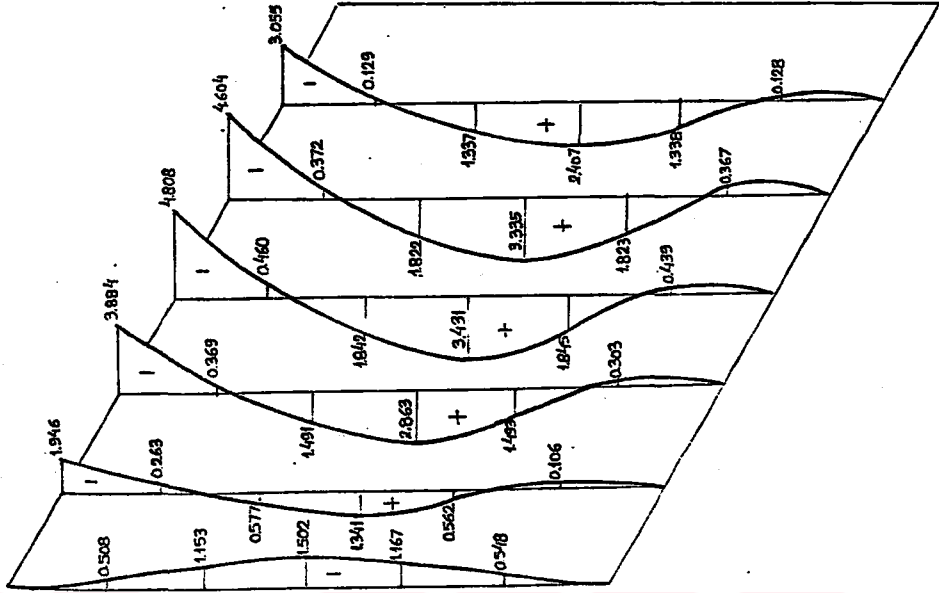
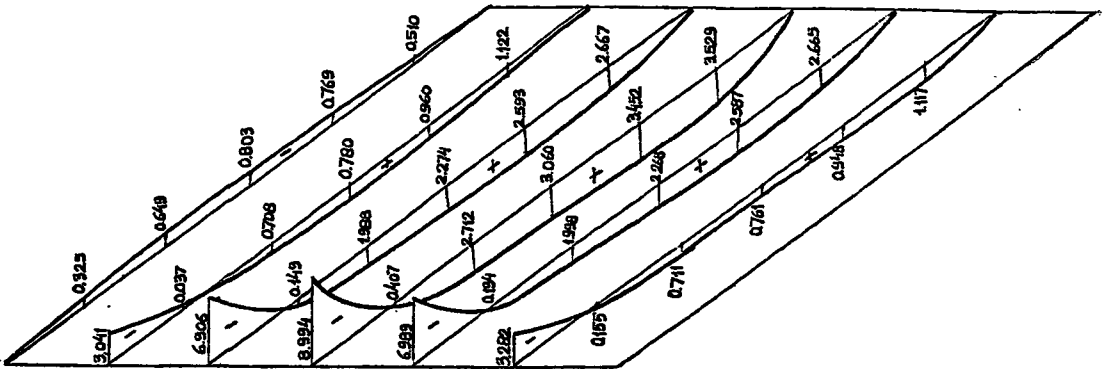
- 3.97590	- 1.75984	-1.45158	- 0.00054	1.45091	1.76038	1.18660
0.00000	-1.34098	-1.11159	- 0.00104	1.11015	1.34202	1.20138
0.00000	-0.52980	- 0.45053	- 0.00261	0.44621	0.53241	0.47219
0.00000	0.19946	0.15003	- 0.00473	-0.16024	-0.19473	-0.16705
0.00000	0.83448	0.68043	- 0.00408	-0.69588	-0.83039	-0.71406
0.00000	1.14151	0.96156	0.00577	-0.94990	-1.14729	-1.03433
-0.25330	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	- 0.27340

QX KESME KUVVETİ DEĞERLERİ

0.95460	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.93815
0.00000	2.59562	1.69430	-0.00087	-1.69555	-1.38288	-0.62141
0.00000	3.35499	2.12491	-0.00160	-2.12710	-1.51176	-0.41584
0.00001	3.33386	2.11551	-0.00078	-2.11477	-1.40989	-0.22039
0.00000	2.74621	1.79459	0.00392	-1.77111	- 1.19658	-0.27947
0.00000	1.02740	0.70185	0.01014	-0.58228	- 0.25908	- 0.03350
-0.60817	-2.76227	-2.38119	- 0.03347	2.28469	2.79574	1.96926

QX KESME KUVVETİ DEĞERLERİ

2.29106	-0.85061	-3.43180	-5.08637	-3.42960	-0.84750	0.77813
2.30203	-0.25187	-1.89170	-2.90801	-1.88970	0.24913	0.00000
0.87660	0.28847	- 0.04744	-0.23803	-0.04756	0.28600	-0.01380
-0.36008	0.10654	0.40088	0.51945	0.39397	0.07446	0.00000
-1.43089	0.26534	1.45217	2.03241	1.43851	0.11680	0.00000
-1.94194	1.66577	4.94366	6.88551	4.99040	1.81574	0.00000
0.48654	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.52514

b) M_x Moment diyagramıb) M_y Moment diyagramı

Şekil 2.21 Örneğin Moment diyagramları

II.2. Elastik Zemine Oturan Sistemlerin Sonlu Elemanlar Metodu(SEM) ile Çözümü

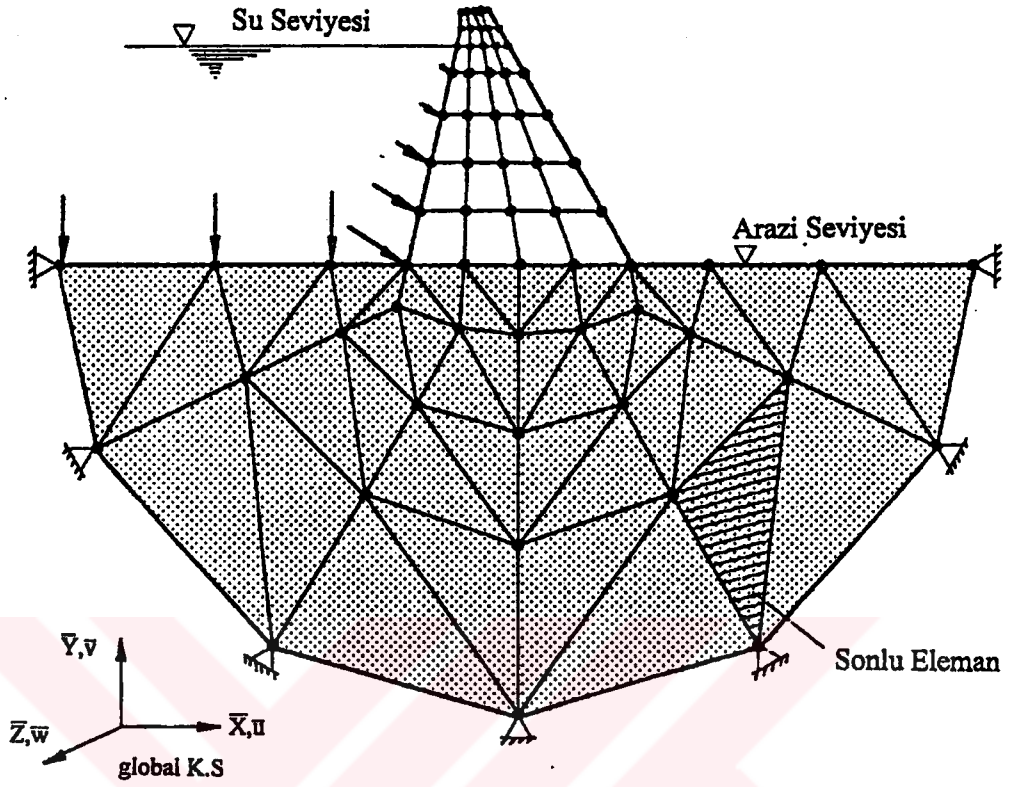
II.2.1. Sonlu Elemanlar Metodu

Bu bölümde açıklanan programları anlamına uygun yerleştirebilmek için, Sonlu Elemanlar Metodunun temel prensiplerini iyi kavramış olmak gerekmektedir. Burada işlenen SEM mühendislik yönünden daha önce açıklanan Matris Deplasman Metodunun direkt genişletilmiş şekli olarak algılanabilir. Bu metod matematiksel olarak Ritz yönteminin bir varyantı olarak kademelendirilecektir. Sonlu Eleman Metodunda hesaplanacak sistemin sürekliliği belli sayıda küçük elemanlara bölünerek sağlanır (Şekil 2.22a). Komşu sonlu elemanlar arasındaki ayırım çizgisinde aslında bir çok düğüm noktası yerleşiktir. Fakat sonlu elemanlarda, bunların yalnızca bir kaç düğüm noktasında komşu elemanlarla bağlandığı öngörülür. Kenar boyunca süreklilik Başlangıç Fonksiyonu ile sağlanmalıdır. Buna göre bu bölümde işlediğimiz SEM'in Deformasyon Metodundaki Süreklilik şartları, tamamıyla kinetik esaslıdır.

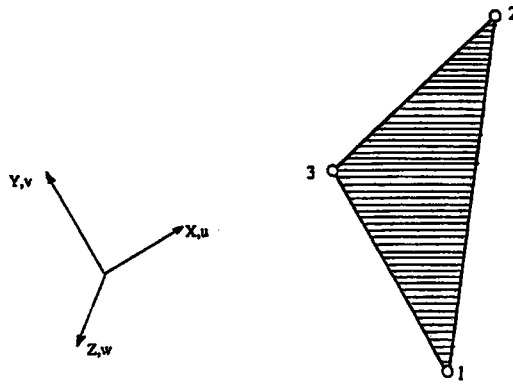
Denge şartları ise yalnızca düğüm noktalarında sağlanacaktır.

Sürekliliğin kinematik taşıyıcı davranışına uygun bir eşdeğer sistemle yaklaşım yapabilmek için, çok sayıda elemana bölünerek oluşturulan “Yedek Sistemin” sürekliliğin potansiyel enerjisine karşı bir noktada toplanabilir olması istenmektedir.

Önce sonlu bir levha elemanını inceleyelim. (Şekil 2.22b) Yukarıda belirtilen koşulu gerçekleştirebilmek için, bu elemanda basitleştirilmiş deformasyon durumlarını,deplasman fonksiyonlarını dikkate alarak sağlayabiliriz. Bu Başlangıç Fonksiyonlarının türü bir taraftan elemanın şekline bağlıdır. Diğer taraftan da bu varsayım, ele alınan düzlem taşıyıcı sistemlerinin (levha, plak, kabuk) kategorisini geniş çapta etkiler. Belirgin fiziksel nedenlerden dolayı seçilen “Başlangıç Fonksiyonları” sadece elemanın iç alanında devamlı değil aynı zamanda bir elemandan komşu elemana geçişte de ilave devamlılık şartlarını yerine getirmelidir. Aksi takdirde komşu elemanlar arasındaki deformasyonların gerekli sürekliliği sağlanamaz. Kinematik sınır şartlarının yerine getirilmesi yanında paragraf II.2.4 de ele alınan diğer koşullar da aranacaktır.



a) Yedek Sistem



b) Levha Elemanı

Şekil 2.22 Bir düzlem deformasyon durumunun SEM ile idealize edilmesi

II.2.2. SEM'in Matematiksel Prensipleri

II.2.1.SEM'in matematiksel temel prensipleri önceden de belirttiğimiz gibi Ritz yönteminin bir varyantı klasmanına sokulabilir. Buna göre linear elastik malzeme de süreklilik için deformasyonların bir çözüm fonksiyonu aranmaktadır ve bunlar verilen dış kuvvetler için toplam potansiyel enerjiyi minimum yapar.

Denklem (2.36.) da

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_I + \bar{\Pi}_a \quad (2.36)$$

bir global $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ koordinat sistemindeki toplam sistemin Şekil Değiştirme Enerjisi olup, $\bar{\Pi}_a$ aynı referans sistemindeki dış kuvvetlerin potansiyel enerjisini gösterir. Klasik Ritz yöntemine göre minimum koşulu şudur:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_n} \end{bmatrix} = \{0\}$$

(2.37)

Bu anlamda $a_1, a_2, \dots, a_n$ verilen geometrik sınır şartlarını yerine getiren global Deformasyon Fonksiyonlarının

$$\bar{\delta} = \bar{F}a \quad (2.38)$$

başlangıç parametrelerdir. Böylece yazılan (2.38) denklemleri ile parametre a nın hesaplanması için n adet denklem elde edilir. Uygun Başlangıç Fonksiyonlarını yalnızca en basit problemler için bulabileceğimizden dolayı, SEM de global başlangıç fonksiyonlarının yaklaşımı bölgesel olarak gerçekleştirilir. Bu amaçla verilen sistem elastik sürekli, belirli sayıda sonlu elemanlara bölünerek ayrık hale getirilir. (Şekil 2.22a) Her elemanda belirli koşullar yerine getirmesi gereken F_e Başlangıç Fonksiyonları seçilir. Sürekliliğin toplam potansiyeline, ayrık elemanların potansiyel enerjilerinin toplamı ile yaklaşım sağlanır.

$$\bar{\Pi} \approx \sum_{e=1}^N (\bar{\Pi}_i + \bar{\Pi}_a)_e^{(N)} \quad (2.39.)$$

Her elemanın deformasyon enerjisi, lokal X,Y,Z koordinat sisteminde aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\Pi_i^{(N)} = \frac{1}{2} \left(\int_V \epsilon^T \sigma \cdot dV \right)^{(N)} = \frac{1}{2} \left(\int_V \epsilon^T E \epsilon \cdot dV \right)^{(N)} \quad (2.40)$$

Buradaki E genel Hooke kanunun formunda verilmiş Elastikiyet Matrisi olarak tanımlanabilir. Ayrıca ϵ Şekil Değiştirme Vektörü Deformasyon Fonksiyonunun uygun Differansiyeli ve δ_e Düğüm Noktaları Deformasyonları yardımı ile ifade edilir.

$$\epsilon^{(N)} = (D \delta_e)^{(N)} \quad (2.41)$$

Denklem (2.41.) denklem (2.40.) a yerleştirilirse, ortaya çıkan

$$\Pi_i^{(N)} = \frac{1}{2} \left(\int_V \delta_e^T D^T E D \delta_e \cdot dV \right)^{(N)} = \frac{1}{2} (\delta_e^T k_e \delta_e)^{(N)} \quad (2.42)$$

burada

$$k_e^{(N)} = \left(\int_V D^T E D \cdot dV \right)^{(N)} \quad (2.43)$$

$\square$ inci Elemanın Rijitlik Matrisi olarak tanımlanır.

Global X,Y,Z referans sisteminde toplam potansiyel aşağıdaki formda ifade edilir:

Çünkü toplam
$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \bar{\delta}^T \left(\sum_{e=1}^n k_e^{(N)} \right) \bar{\delta} - \bar{\delta}^T \bar{p} \quad (2.44)$$

$$\bar{K} \sum_{e=1}^n \bar{k}_e^{(N)} \quad (2.45)$$

Eşdeğer Sistem Rijitlik Matrisini gösterdiği için Ritz yöntemi:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{\delta}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\delta}} \left(\frac{1}{2} \bar{\delta}^T \bar{K} \bar{\delta} - \bar{\delta}^T \bar{p} \right) = 0 \quad (2.46)$$

Sonlu Eleman Metodunun ana denklemini verir.

$$\bar{K} \bar{d} = \bar{p} \quad (2.47)$$

Buradan da aranılan düğüm deformasyonları elde edilir.

$$\bar{d} = \bar{K}^{-1} \bar{p} \quad (2.48)$$

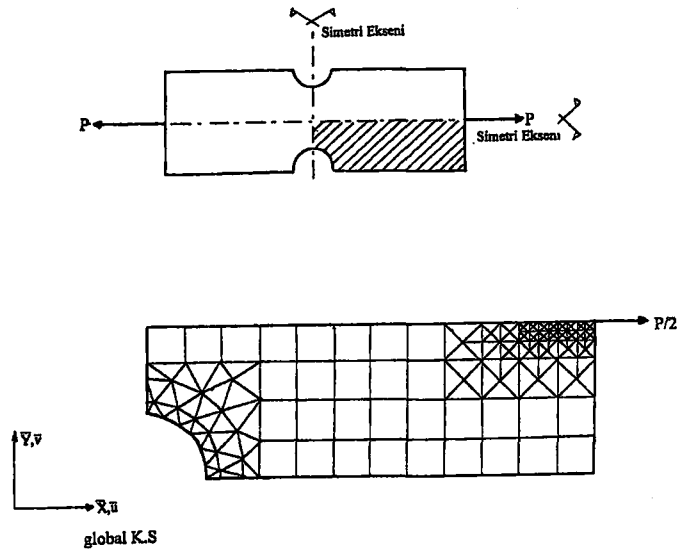
Denklemler (2.47) ve (2.48) Matris Deplasman Metodunun buna uygun denklemleri ile karşılaştırdığımızda çubuk sistemler için verilen bu metodu SEM'in alt basamağı olarak düşünebiliriz. Fakat aradaki önemli fark Matris Deplasman Metodu kesin çözümler verirken SEM'in çözümlerinin daima yaklaşık çözümleri göstermesidir. İkinci fark ise elemanlarla ilgilidir. Bir diğer deyişle SEM'in tek boyutlu çubuk elemanlar yerine iki veya üç boyutlu, sonlu elemanlarda kullanılabilmesidir.

II.2.3. Sürekliliğin ayrıştırılması

Matris Deplasman Metodunda düğüm noktalarının sıralanması genellikle tabii düğümlerle veya tekil yüklerin tatbik noktaları ile verilirken, SEM'de sürekliliğin ayrıştırılması bir çok faktöre bağlıdır. Bu sistemde sürekliliğin sonlu eleman alt bölümlerine bölünerek sağlanması yanında aşağıdaki kuralların da yerine getirilmesi tavsiye edilir.

a) Verilen sürekliliğe yaklaşım yaptırabilecek doğru eleman geometrisi ön koşulu altında, gerekli sayıda sonlu elemanların seçimi yapılmalıdır. Daha iyi sonuç alabilmek için bazı eleman tipleri kabaca yapılan bir alt bölünmede dahi aranılan deplasman durumunu veya gerilme değişimini daha iyi bir yaklaşıklıkla verebilirler. Bu programda hesaplamayı kolaylaştıran ve deformasyonları bir noktada toplama özelliği gösteren uygun eleman tipleri dikkate alınmıştır. Çözümde hesap zorluklarını önlemek için, üçgen elemanlarda çok küçük veya çok geniş açılar önlenmelidir. Dikdörtgen elemanlarda uzun kenarın kısa kenara oranı mümkün olduğunca 2 ye 1 oranını geçmemelidir. Buna göre her bir tek elemanın muntazam olarak şekillendirildiği bir bölünme tavsiye edilir.

b) Kritik gerilmeye maruz alanlarda , tekil kuvvetlerin yakınında veya büyük kavisli kenarlarda küçük elemanlı bir ağ oluşturulmalıdır. Buna karşılık problemleri olmayan alanlarda kaba bir bölünme yeterli olabilir. İnceden kaba bölmeye geçiş yavaş yavaş gerçekleştirilmelidir. (Şekil 2.21.)



Şekil 2.23. Çift simetri kullanımı ile bir levhanın eleman bölünmesi

II.2.4. Eleman Rijitlik Matrisinin hesabı

Tek boyutlu giriş elemanlarında [1] olduğu gibi iki boyutlu düzlem elemanlarının rijitlik ilişkileri aşağıdaki metodlardan birinin kullanılması ile tespit edilebilir.

- Virtüel İş prensibi
- Potansiyel Enerjinin Minimum Prensibi
- Tamamlayıcı Potansiyelin Minimum Prensibi
- CASTIGLIANO Çözümü
- Diğer varyasyon prensipleri
- Differansiyel denklemin klasik çözümü
- Rijitlik Matrisi Metodu

Çok sayıdaki bu yöntemlerden Virtüel İş Prensibi ve Potansiyel Enerjinin Minimum Prensibi en önemli olanlarıdır. Her iki methodda kendilerini nispeten basit uygulamaları ile belirtirler. Her ikisi de aynı sonuçları verdiği için burada yalnızca ikinci yöntem ele alınacaktır.

Bir $[N]$ elemanı için Deplasman Başlangıç Fonksiyonu matris formunda belirtilebilir.

$$F_e^{(N)} = (\Phi \delta_e)^{(N)} \quad (2.49.)$$

Burada

$$\Phi^{(N)} = [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \dots \Phi_n]^{(N)} \quad (2.50.)$$

Şekil Fonksiyon Matrisi anlamındadır. Ayrıca

$$\delta_e^{(N)} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ . \\ . \\ \delta_{n1} \end{bmatrix}_e^{(N)} \quad (2.51)$$

$F_e^{(N)}$ Deplasman Başlangıç Fonksiyonu genellikle

$$\varphi^{(N)} = [\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_n]^{(N)} \quad (2.52.)$$

genelleştirilmiş deplasmanlarla bağlantılı Deplasman fonksiyonlarının matrisi ile

$$\alpha^{(N)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}^{(N)} \quad (2.53)$$

ifade edilir.

$$F_e^{(N)} = (\varphi \cdot \alpha)^{(N)} \quad (2.49a)$$

Düğüm deplasmanları ve genelleştirilmiş deplasmanlar arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\delta_e^{(N)} = (A\alpha)^{(N)} \quad \text{ve} \quad \alpha^{(N)} = (A^{-1}\delta_e)^{(N)} \quad (2.54)$$

Burada A kare şeklinde tekil olmayan bir matristir. Denklem (2.52) de düğüm noktaları koordinatları yerleştirilerek bu deplasman fonksiyonlarının matrisi elde edilir:

$$\Phi^{(N)} = (\varphi \Lambda^{-1})^{(N)} \quad (2.55)$$

Genel deformasyon – deplasman ilişkisi şöyledir.

$$\varepsilon^{(N)} = (D \cdot \delta_e)^{(N)} \quad (2.56)$$

Bu anlamda D matrisi Φ Şekil Fonksiyon Matrisinin uygun diferansiyeli ile ifade edilir. İzotrop elastik bir malzeme için “Hooke Kanunu” matris formunda yazılabilir.

$$\sigma^{(N)} = (E\varepsilon)^{(N)} \quad (2.57)$$

Bununla $[N]$ inci elemanın elastik potansiyeli aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\Pi^{(N)}(\Pi_i \Pi_a)^{(N)} = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon^T \sigma \cdot dV)^{(N)} - (\delta_e^T p_e)^{(N)} = \left\{ \frac{1}{2} \delta_e^T \left(\int_V D^T E D \cdot dV \right) \delta_e - \delta_e^T p_e \right\}^{(N)} \quad (2.58)$$

Bu “Enerjinin Minimum Olması” koşulu

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} \right)^{(N)} = 0 \quad (2.59)$$

elemanda SEM’in ana denklemini verir.

$$k_e^{(N)} \delta_e = p_e^{(N)} \quad (2.60)$$

Burada

$$k_e^{(N)} = \left(\int_V D^T E D \cdot dV \right)^{(N)} = ((A^{-1})^T \int_V \Delta^T E \Delta dV) A^{-1})^{(N)} \quad (2.61)$$

Eleman Rijitlik Matrisini belirtir. Δ Matrisi deplasman fonksiyonlarının türevini gösterir.

(2.60) denklemindeki p_e Düğüm Yükleri Vektörüdür. Şayet elemanda ilave olarak üniform yayılı yükler varsa, o zaman bunlar düğüm noktalarına indirgenmelidir.

Virtüel İş denkleminden ortaya çıkan denklem aşağıdaki gibidir:

$$p_e = \int_A \Phi^T q \cdot dA \quad (2.62)$$

II.2.5. Uygun Başlangıç Fonksiyonlarının seçimi

Her eleman için lokal sınırlandırılmış, probleme uygun başlangıç fonksiyonları seçimi yapılır.(2.49) Bütün varyasyon metodlarında olduğu gibi, SEM ile elde edilebilen sonuçların doğruluğu, ayrıştırmanın uygun yapılmasının yanında önemli oranda Başlangıç Fonksiyonlarının seçimine bağlıdır. Buna göre Başlangıç Fonksiyonlarına büyük önem düşmektedir.

Deplasman Fonksiyonlarının seçimi için hiç bir kesin kural olmamasına rağmen, doğru çözüm gereği daima daha küçük bir alt bölme işlemi yapılarak bir noktaya toplama için (konvergens) yerine getirilmesi mutlaka gerekli olan şartlar yerleştirilir. Başlangıç fonksiyonları aşağıdaki şartları yerine getirir:

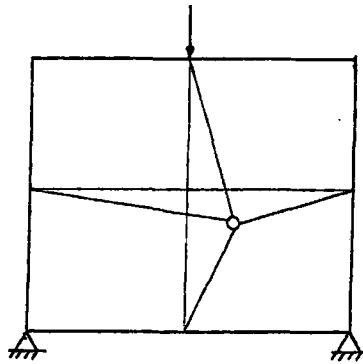
- Eleman alanında devamlılık,
- Probleme uygun deformasyon vektörlerinde ortaya çıkan türevlerin devamlılığı,
- Bir elemandan komşu elemana geçişte uygunluk,
- Sabit genleşmelerin şekillendirilmesi,
- Sabit gövde hareketlerinde değişimcilik,
- Koordinat değişimsizliği.

Başlangıç Fonksiyonunun türü, ele alınan probleme (levha, plak, kabuk) bağlı olup ayrıca elemanın formundan da etkilenmektedir.

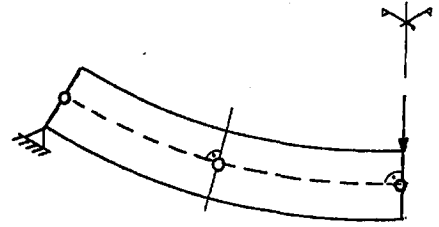
Yerine getirilmesi birbirine komşu elemanlar tarafından zorlanan geçici şartlar deplasmanların kenarlar boyunca birbirine uygun olmasını zorlar (Şekil 2.24a). Aksi takdirde malzemenin sürekliliği bozulur.

Eğilme etkisi altında bulunan elemanlarda bu uyum şartları daha kesindir. Çünkü orada ilk parsiyel türevlerin devamlılığı gerekmektedir.

(Şekil 2.24b) Bütün devamlılık şartlarını yerine getiren sonlu elemanlar uygun (konform) diye adlandırılır.



a) Levha (Yandan görünüş)



b) Plak (Kesit)

Şekil 2.24 Deplasman durumlarının kinematik uyumluluğu

II.2.6. Levha şeklindeki Taşıyıcı Sistemler

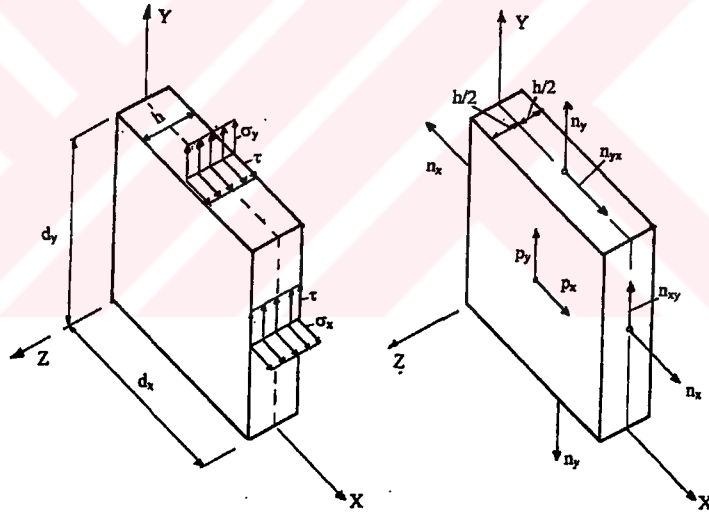
II.2.6.1. Levha teorisine bakış

Levha denince, orta yüzeyinde kuvvetler bulunan Düzlem Taşıyıcı Sistemler kavramı anlaşılır. Orta yüzeye dik olarak alınan levha kalınlığı h diğer boyutlara göre küçük olması nedeniyle orta yüzeye dik olan gerilmeler $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau$ eşit dağılmış gibi farz edilebilir. (Şekil 2.26a) Levhanın yan yüzeyinde kuvvet olmaması nedeniyle $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ alınabilir.

Kesit tesirleri

$$n_x = \sigma_x h \quad n_y = \sigma_y h \quad \text{ve} \quad n_{xy} = n_{yx} = \tau h \quad (2.64)$$

ve p_x, p_y yükleri orta yüzey boyunca etki ederler. (Şekil 2.26b)



a) Gerilmeler

b) Levhaya etkiyen kesit tesirleri

2.26 Levhaya etkiyen gerilme ve kesit tesirleri

Buna göre levhanın her bir noktasında meydana gelen kesit tesirlerini bulunur. Bu amaçla önce her noktadaki deplasmanlar u ve v hesaplanmalıdır. Deplasman durumu, bize aranan gerilme değerlerini verir. Elastik ve İzotrop Malzeme için kesit tesirleri ve deplasmanlar arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir. [39]

$$\begin{aligned}
n_x &= D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
n_y &= D \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
n_{xy} &= D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = n_{yx}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Burada

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

olarak Levhanın Rijitliğini gösterir. ν levha malzemesinin Poisson (Enine Genleşme Katsayısı) oranıdır. Kesit tesirleri [kN/m], [N/cm] birimlerinde olmalıdır.

Deplasmanlar için levhanın iki simultane differansiyel denklemi şöyledir:

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{2p_x}{D} &= 0 \\
(1+\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2p_y}{D} &= 0
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Denklemler (2.65) ve (2.66), X, Y koordinat sisteminde tanımlanan levhanın gerilmeleri (σ_x, σ_y, τ) verirler. Fakat takviyenin mümkün olduğunca asal gerilme eğrilerinin gidişine uygunluğunu sağlayabilmek için betonarme yapılarda asal gerilmeler (σ_1, σ_2) önemlidir. Gerilme trajektörleri asal gerilme yönünü gösteren eğriler olarak tanımlanır (Şekil 2.27) Bu eğriler bütün levha boyunca birbirine dik durumdadır. Asal gerilmeler ve onların doğrultuları:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \tag{2.67}$$

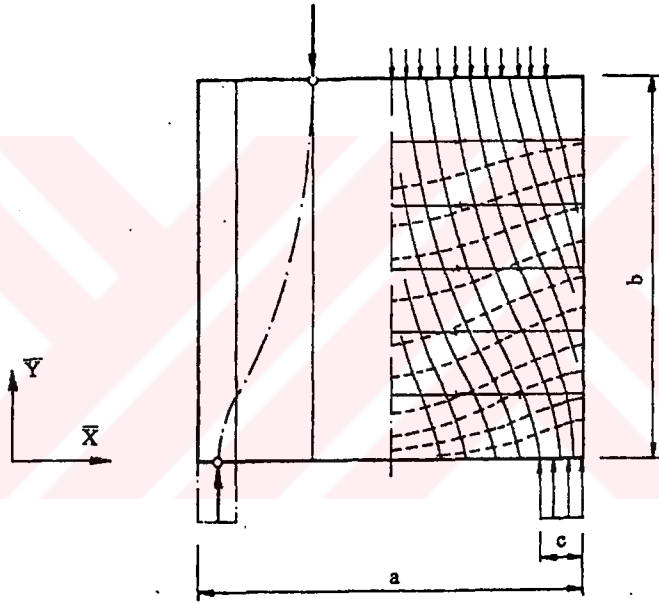
ve

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{2.68}$$

den tespit edilir. [39]

II.2.6.2. Programa genel bakış

Bu amaçla hazırlanan bilgisayar programı düğüm deplasmanları u, v ve elemanın ağırlık merkezindeki gerilmeleri veya global koordinat sistem X, Y deki ayrıklaştırılmış levha taşıyıcı sistemlerin ortalama düğüm gerilmelerini (σ_x, σ_y, τ) hesaplar. Ortalama düğüm gerilmeleri bir köşe düğümünde oluşan bütün düğüm gerilmelerinden bir ortalama değer alınarak tespit edilir. SEM hesaplaması, genel bir üçgen eleman için düğüm deplasmanları ikinci derece Başlangıç Fonksiyonları seçilerek ile yapılır. Bu eleman, eleman köşelerinde üç düğüm ve kenar ortalarında üç ilave düğüme sahiptir.

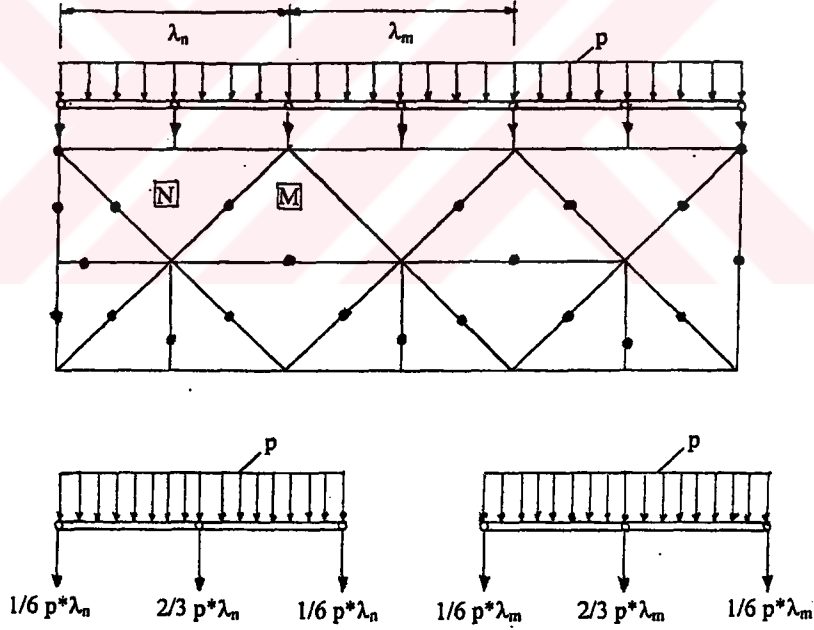


Şekil 2.27. Asal gerilme yörüngelerinin karakteristik gelişmesi

Isotrop levhaların sabit kalınlığa, enine genleşme sayısına ve E-Modülüne sahip olduğu kabul edilmektedir. Levhanın ayrıştırılması daha önce verilmiş olan esaslar dikkate alınarak gerçekleştirilir. Düğüm noktalarının veya elemanların numaralanması daha önceki bölümlerde açıklanmıştır.

Dış yükler p_{ix} veya p_{iy} düğüm noktası yüklerinden oluşur. Bir kenar boyunca etkiyen “Çizgisel Yayılı Yükler” Şekil 2.28’de görüldüğü gibi düğüm yükleri şeklinde dağıtılabilir. Genel Yayılı Yükler (2.62) denklemi yardımı ile düğüm noktalarına indirgenmelidir. Sonlu Elemanlar Metodu, yük şekillendirmesine karşı daha az hassas olduğu için, denklem (2.62) de basitleştirilmiş Φ Şekil Fonksiyonlarının uygulanmasına olanak verir. Eğer düğüm yük vektörleri pozitif global koordinat ekseninin yönünü gösteriyorsa, düğüm yükleri pozitif olarak kabul edilecektir.

Eğer deplasmanlar pozitif X veya Y eksen yönünde oluşuyorsa, düğüm deplasmanları u_i, v_i pozitifdir. Ayrıca çekme gerilmeleri σ_x veya σ_y olarak dikkate alınacaktır. Bu ön işaret kuralı ile τ kayma gerilmelerinin ön işareti de otomatik olarak tesbit edilmiş olur.



Şekil 2.28. Çizgisel yayılı yüklerinin düğüm noktalarına dağıtılması

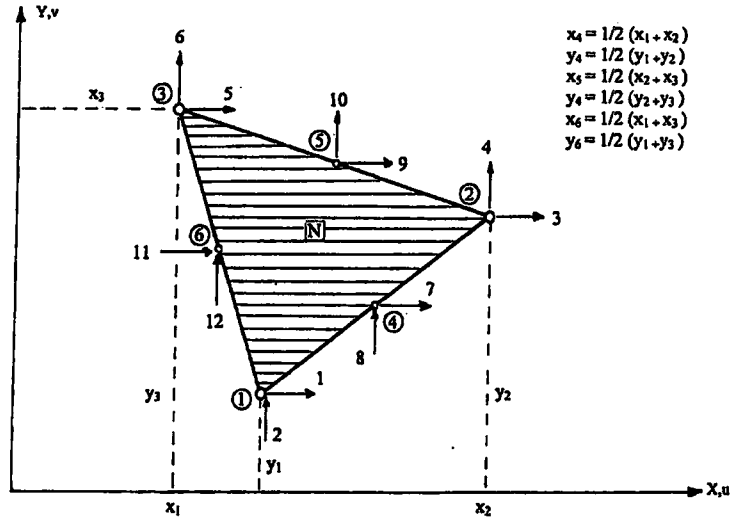
Bütün kesit tesirlerinin çıkışı yapıldıktan sonra program giriş ve çıkış verilerini dosya "SCHE xxxx PRT" e yazar ve alt menüye geri döner. Bu noktadan itibaren menüden "4" rakamı girilerek printer çıktısı alınır.

II.2.6.3. 12 serbestlik derecesi ile üçgen - levha eleman.

Şekil 2.29. köşe düğümleri 1,2,3 ile bir üçgen eleman bir kartezyen X, Y koordinat sisteminde gösterilmiştir. Düğüm deplasmanları için başlangıç fonksiyonu olarak ikinci derece polinom seçiyoruz.

$$F_i^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ . \\ . \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}^{(N)} = (\varphi\alpha)_i^{(N)} \quad (2.69)$$

(i = 1,2,...,6)



Şekil 2.29 6 Düğümlü üçgen levha

Şekil 2.29 6 düğümlü üçgen levha elemanda 12 serbest parametreyi sağlayabilmek için ilaveten ara düğüm noktaları “4”, “5”, “6” yı eleman kenarlarının ortasına yerleştiriyoruz.

Yalnızca köşe noktalarının koordinatlarını belirtmek yeterlidir. “4”, “5” ve “6” noktalarının koordinatları program tarafından tespit edilecektir. Başlangıç Fonksiyonu, kendini her üçgen kenarında bir ikinci derece fonksiyona indirgediği için, birbirine komşu elemanlar arasındaki deplasmanların devamlılığı sağlanmıştır.[12]

“Eleman Rijitlik Matrislerinin” hesaplanması için daha önce ele alınan hesap yöntemi kullanılacaktır. Serbest α parametreleri, x_i , y_i düğüm noktası koordinatları ve δ_e düğüm noktası deplasmanlarının yerleştirilmesi ile bulunur.

Bu şekilde ortaya çıkan

$$\begin{bmatrix}
 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\
 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}^{(N)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}^{(N)} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{12} \end{bmatrix}_e^{(N)} \quad (2.70)$$

veya kısaca

$$(\Lambda \alpha)^{(N)} = \delta_e^{(N)} \quad (2.71)$$

Buradan hareketle

$$\alpha^{(N)} = (\Lambda^{-1} \delta_e)^{(N)} \quad (2.72)$$

yazılabilir.

Bu ifadede “Şekil Fonksiyonu” (2.55) nin matrisi içini geçerli olan bağıntı:

$$\Phi^{(N)} = (\varphi \Lambda^{-1})^{(N)} \quad (2.73)$$

Aranılan “Eleman Rijitlik Matrisi” denklem (2.61) ya göre aşağıdaki formda bulunur:

$$[k_e]^{(N)} = ((\Lambda^{-1})^T \cdot \left(\int_V \Lambda^T E \Lambda \cdot dV \right) \Lambda^{-1})^{(N)} \quad (2.74)$$

Burada

$$E = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

düzlem gerilme durumu için Levhanın Elastisite Matrisidir. [14.30] Δ matrisi δ Deplasman Fonksiyonlarının uygun türevlerini oluşturarak elde edilebilir, her “i” düğüm noktası için yazılabilir:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \phi_i^{(N)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & 1 & 0 & 2xy & y & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.76)$$

Bu şekilde, Eleman Rijitlik Matrisi için (2.77) de verilen ifadeler elde edilir [40] .

(2.77) ifadesinde bulunan parametreler:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_3 - x_2 & a_2 &= x_1 - x_3 & a_3 &= x_2 - x_1 \\ b_1 &= y_2 - y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 \\ c &= (1 - \nu) / 2 \end{aligned} \quad (2.78)$$

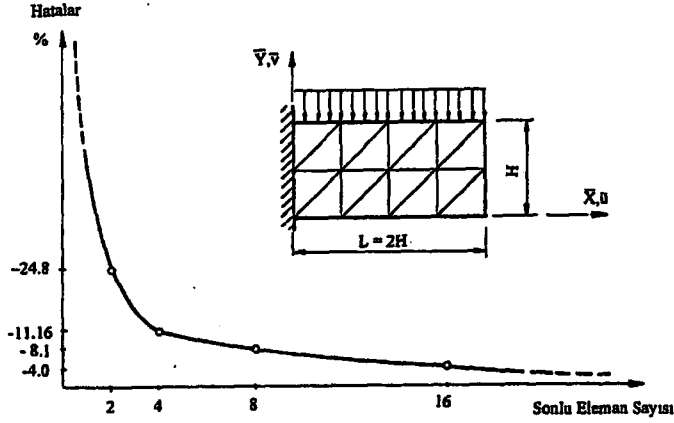
Ve $A = \frac{Eh}{12F(1 - \nu^2)}$ ile (2.79)

F: Üçgen elemanın alanı

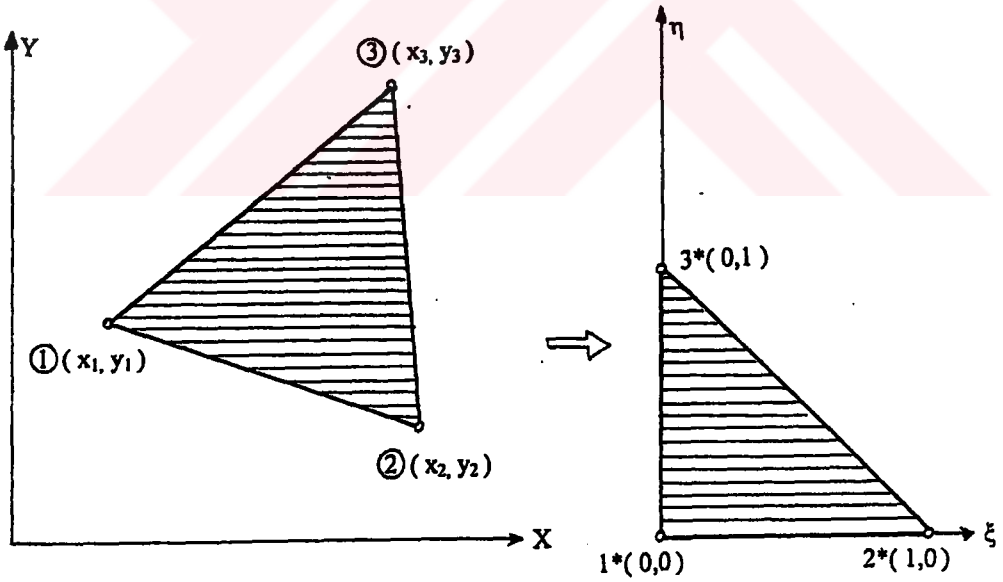
(2.77) ifadesinde belirgin olarak verilen rijitlik matrisi yüksek dereceli uygun bir levha elemanını tanıtır. Kendisinin bir noktaya toplama özelliği Şekil 2.31 de gösterilmiştir.

II.2.6.4. Gerilmelerin hesaplanması

Gerilmeler σ_x, σ_y, τ nin hesaplanmasını basitleştirmek için önce genel üçgen eleman, bir birim üçgen şeklinde tanımlanır. (Şekil 2.31) Bu dönüşüm şöyledir[12]:



Şekil 2.30 Üçgen levha elemanının bir noktaya toplama özellikleri



a) Üçgen

b) Birim üçgen

Şekil 2.31 Bir üçgenin birim üçgen haline getirilmesi

	1	2	3	4	5	6	
$[k_e]^{(N)}$	$8(b_2^2 - b_2 b_3 - b_3^2 - 8c(a_2^2 - a_2 a_3 - a_3^2))$						1
	$-4(b_1 b_3 - b_2 b_3 - b_3^2 - 2b_1 b_2 - 4c(a_1 a_3 - a_2 a_3 - a_3^2 - 2a_1 a_2))$	$8(b_1^2 - b_1 b_3 - b_3^2 - 8c(a_1^2 - a_1 a_3 - a_3^2))$					2
	$4(b_2 b_3 - c a_2 a_3)$	$-4(b_1 b_3 - c a_1 a_3)$	$3(b_3^2 - c a_3^2)$				3
	$-4(b_1 b_2 - b_2^2 - b_2 b_3 - 2b_1 b_3 - 4c(a_1 a_2 - a_2^2 - a_2 a_3 - 2a_1 a_3))$	$4(b_1^2 - b_1 b_2 - b_1 b_3 - 2b_2 b_3 - 4c(a_1^2 - a_1 a_2 - a_1 a_3 - 2a_2 a_3))$	0	$8(b_1^2 - b_1 b_2 - b_2^2 - 8c(a_1^2 - a_1 a_2 - a_2^2))$			4
	0	$-4(b_1 b_3 - c a_1 a_3)$	$-(b_1 b_3 - c a_1 a_3)$	$-4(b_1 b_2 - c a_1 a_2)$	$3(b_1^2 - c a_1^2)$		5
	$-4(b_2 b_3 - c a_2 a_3)$	0	$(b_2 b_3 - c a_2 a_3)$	$4(b_1 b_2 - c a_1 a_2)$	$(b_1 b_2 - c a_1 a_2)$	$3(b_2^2 - c a_2^2)$	6
	$4(v a_3 b_2 - c a_2 b_3)$	$-4(v a_3 b_1 - c a_1 b_3)$	$3a_3 b_3 (v \cdot c)$	0	$-(v a_3 b_1 - c a_1 b_3)$	$(v a_3 b_2 - c a_2 b_3)$	7
	$-4v(a_2 b_3 - a_2 b_2 - a_1 b_2 - 2a_1 b_3 - 4c(a_3 b_2 - a_2 b_2 - a_2 b_1 - 2a_3 b_1))$	$4v(a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_3 - 2a_2 b_3 - 4c(a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_3 b_1 - 2a_3 b_2))$	0	$4(2a_1 b_1 - 2a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1)(v \cdot c)$	$-4(v a_2 b_1 - c a_1 b_2)$	$4(v a_1 b_2 - c a_2 b_1)$	8
	0	$-4(v a_1 b_3 - c a_3 b_1)$	$-(v a_1 b_3 - c a_3 b_1)$	$-4(v a_1 b_2 - c a_2 b_1)$	$3a_1 b_1 (v \cdot c)$	$(v a_1 b_2 - c a_2 b_1)$	9
	$-4(v a_2 b_3 - c a_3 b_2)$	0	$(v a_2 b_3 - c a_3 b_2)$	$4(v a_2 b_1 - c a_1 b_2)$	$(v a_2 b_1 - c a_1 b_2)$	$3a_2 b_2 (v \cdot c)$	10
	$4(2a_2 b_2 - 2a_3 b_3 - a_2 b_3 - a_3 b_2)(v \cdot c)$	$-4v(a_2 b_3 - a_2 b_2 - a_3 b_1 - 2a_2 b_1 - 4c(a_3 b_3 - a_3 b_2 - a_1 b_3 - 2a_1 b_2))$	$4(v a_2 b_3 - c a_3 b_2)$	$-4v(a_3 b_2 - a_2 b_2 - a_2 b_1 - 2a_3 b_1 - 4c(a_2 b_3 - a_2 b_2 - a_1 b_2 - 2a_1 b_3))$	0	$-4(v a_3 b_2 - c a_2 b_3)$	11
	$-4v(a_1 b_3 - a_3 b_2 - a_3 b_3 - 2a_1 b_2 - 4c(a_3 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_3 - 2a_2 b_1))$	$4(2a_3 b_3 - 2a_1 b_1 - a_3 b_1 - a_1 b_3)(v \cdot c)$	$-4(v a_1 b_3 - c a_3 b_1)$	$4v(a_1 b_2 - a_3 b_1 - a_1 b_1 - 2a_3 b_2 - 4c(a_2 b_1 - a_1 b_3 - a_1 b_1 - 2a_2 b_3))$	$-4(v a_3 b_1 - c a_1 b_3)$	0	12

7	8	9	10	11	12	
$3(a_3^2 - cb_3^2)$						7
0	$8(a_1^2 - a_1 a_2 - a_2^2) - 8cb_1^2 - b_1 b_2 - b_2^2$					8
$-(a_1 a_3 - cb_1 b_3)$	$-4(a_1 a_2 - cb_1 b_2)$	$3(a_1^2 - cb_1^2)$				9
$(a_2 a_3 - cb_2 b_3)$	$4(a_1 a_2 - cb_1 b_2)$	$(a_1 a_2 - cb_1 b_2)$	$3(a_2^2 - cb_2^2)$			10
$4(a_2 a_3 - cb_2 b_3)$	$-4(a_1 a_2 - a_2 a_3 - a_3^2 - 2a_1 a_3) - 4c(b_1 b_2 - b_1 b_3 - b_3^2 - 2b_2 b_3)$	0	$-4(a_2 a_3 - cb_2 b_3)$	$8(a_2^2 - a_2 a_3 - a_3^2) - 8c(b_2^2 - b_2 b_3 - b_3^2)$		11
$-4(a_1 a_3 - cb_1 b_3)$	$4(a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_3^2 - 2a_2 a_3) - 4c(b_1 b_2 - b_1 b_3 - b_3^2 - 2b_2 b_3)$	$-4(a_1 a_3 - cb_1 b_3)$	0	$-4(a_1 a_3 - cb_1 b_3)$	$8(a_1^2 - a_1 a_3 - a_3^2) - 8c(b_1^2 - b_1 b_3 - b_3^2)$	12

symmetrisch

Açıklama :

(2.77)

Matris (2.77) $A = Eh / 12 F (1 - \nu^2)$ faktörü ile çarpılır.

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta$$

(2.80)

Bu linear dönüşüm nedeniyle denklem (2.65) de bulunan türevler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} = u_{,\xi} \xi_{,x} + u_{,\eta} \eta_{,x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v_{,y} = v_{,\xi} \xi_{,y} + v_{,\eta} \eta_{,y}$$

(2.81)

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_{,y} + v_{,x} = u_{,\xi} \xi_{,y} + u_{,\eta} \eta_{,y} + v_{,\xi} \xi_{,x} + v_{,\eta} \eta_{,x}$$

 $\xi_{,x}$ ve $\eta_{,x}$ türevleri denklem (2.80) in x veya y' ye göre diferansiyelinden elde edilir.

$$\begin{aligned}
1 &= (x_2 - x_1)\xi_{,x} + (x_3 - x_1)\eta_{,x} \\
0 &= (y_2 - y_1)\xi_{,x} + (y_3 - y_1)\eta_{,x} \\
0 &= (x_2 - x_1)\xi_{,y} + (x_3 - x_1)\eta_{,y} \\
1 &= (y_2 - y_1)\xi_{,y} + (y_3 - y_1)\eta_{,y}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\xi_{,x} &= \frac{y_3 - y_1}{l}, & \eta_{,x} &= \frac{y_2 - y_1}{l} \\
\xi_{,y} &= \frac{x_3 - x_1}{l}, & \eta_{,y} &= \frac{x_2 - x_1}{l}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

bu anlamda

$$I = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \tag{2.84}$$

Bu tanımlamaların yerleştirilmesi ile

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad \text{und} \quad y_{ij} = y_i - y_j \tag{2.85.}$$

elde edilen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= (y_{31} \cdot u_{,\xi} - y_{21} \cdot u_{,\eta}) / l \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= (-x_{31} \cdot v_{,\xi} + x_{21} \cdot v_{,\eta}) / l \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= (-x_{31} \cdot u_{,\xi} + x_{21} \cdot u_{,\eta} + y_{31} v_{,\xi} - y_{21} v_{,\eta}) / l
\end{aligned} \quad \text{olur.} \tag{2.86}$$

Deplasmanların Başlangıç Fonksiyonu şöyledir [12]:

$$\begin{aligned}
u(\xi, \eta) = & (1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2)\delta_1 + (-\xi + 2\xi^2)\delta_3 + \\
& + (-\eta + 2\eta^2)\delta_5 + (4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta)\delta_7 + 4\xi\eta^2 + 9 + \\
& + (4\eta - 4\xi\eta - 4\eta^2)\delta_{11}.
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Denklem (2.86) gerekli olan türevler :

ve

$$\begin{aligned}
u_{,\xi} = & (-3 + 4\xi + 4\eta)\delta_1 + (-1 + 4\xi)\delta_3 + (4 - 8\xi - 4\eta)\delta_7 \\
& + 4\eta\delta_9 - 4\eta^2\delta_{11}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned}
u_{,\eta} = & (-3 + 4\xi + 4\eta)\delta_1 + (-1 + 4\eta)\delta_5 - 4\xi\delta_7 \\
& + 4\xi\delta_9 + (4 - 4\xi - 8\eta)\delta_{11}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Deplasman Fonksiyonu $v(\eta, \xi)$ ve bunların türevleri $v_{,\xi}, v_{,\eta}$ için aynı ifadeleri, δ Fonksiyonunu 1 derece yükselterek elde edebiliriz.

Aranan gerilmeler

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
\tau &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{2.65a}$$

dan hesaplanır.

Denklemler (2.88) ve (2.89)ün değerlendirmesi, örneğin levha elemanının köşe noktalarında (Şekil 2.29) gerçekleştirilebilir.

$$\begin{aligned}
u_{,\xi} &= -3\delta_1 - \delta_3 + 4\delta_7 \\
u_{,\eta} &= -3\delta_1 - \delta_5 + 4\delta_{11} \\
\\
u_{,\xi} &= \delta_1 + 3\delta_3 - 4\delta_7 \\
u_{,\eta} &= \delta_1 - \delta_5 - 4\delta_7 + 4\delta_9 \\
\\
u_{,\xi} &= \delta_1 + \delta_3 - 4\delta_9 - 4\delta_{11} \\
u_{,\eta} &= \delta_1 - 3\delta_5 + 4\delta_{11}
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Her defasında i indeksinin 1 derece civarında yükseltilmesi ile $v_{,\xi}$, ve $v_{,\eta}$ için uygun değerler elde edilir. Komşu elemanların köşe noktalarındaki bu tarz hesaplanan gerilmeler değişik değerler alırlar ve buna uygun olarak da bu değerlerden bulunan gerilme eğrisi kademeli şekilde gelişir. Net bir gerilme değerine ulaşabilmek için, bilgisayar programında bu yerlerde bir düğüme iştirak eden tüm elemanların gerilme değerleri arasındaki ortalama alınmaktadır.

Ayrıca elemanın ağırlık merkezindeki deplasman fonksiyonlarının türevleri değerlendirilir ve

$$\begin{aligned}
u_{,\xi} &= \frac{1}{3}[(\delta_3 - \delta_1) + 4(\delta_9 - \delta_{11})] \\
u_{,\eta} &= \frac{1}{3}[(\delta_5 - \delta_1) + 4(\delta_9 - \delta_7)] \\
v_{,\xi} &= \frac{1}{3}[(\delta_4 - \delta_2) + 4(\delta_{10} - \delta_{12})] \\
v_{,\eta} &= \frac{1}{3}[(\delta_6 - \delta_2) + 4(\delta_{10} - \delta_8)]
\end{aligned} \tag{2.91}$$

bu işlemde bu yerlerdeki gerilmeleri de elde etmek için gerçekleştirilir.

II.2.6.5 SEM'in bilgisayar ortamında çözümü

Bu bölümde levhalar, plakların hesaplanması için açıklanacak program Sonlu Elemanlar Metoduna (kısaca SEM) dayanır. Programlamayı basitleştirmek ve zahmetli numaralama entegrasyonlarını önlemek için analitik formda mevcut olan Eleman Rijitlik Matrisleri kullanılmıştır. Bu bölümde kullanılan Sonlu Elemanlar Metodu ile sağlıklı bir netice elde edebilmek için, nispeten çok sayıda eleman seçilmelidir. Bu durum ise büyük hafıza kapasitesine ihtiyaç gösterir.

Mevcut veri hafıza alanını tam olarak değerlendirebilmek için, programlar dört bölüme bölünür. Herbir program bölümüne girişi yapılan veya hesaplanan veriler veri disketine kaydedilir ve takip eden programda tekrar okunur. Kullanıcı program bölümlerini ihtiyaca göre çağırabilir. Program bölümleri:

Bölüm 1 : Sistem verilerinin girişi ve veri giriş dosyasının tanzimi:

Kullanıcı hesaplama sistemine yön veren bütün interaktif verilerin girişini yapar. Bu veriler tekrar kontrol edilebilir ve düzeltilebilir. Eğer girişler doğru olarak sonuçlandırılırsa program bunları veri dosyası olarak yazar. Önceden mevcut bir giriş dosyası değiştirilebilir ve tekrar hafızaya alınabilir.

Bölüm 2 : Sistem Rijitlik Matrisinin kurulması ve denklem sisteminin çözülmesi:

Bu program bölümü menüden tanıtım rakamı "2" nin seçilmesinden sonra çalışır ve takiben dosya numarasının girilmesi ile otomatik olarak yani kullanıcının bir şey yapmasına gerek kalmaksızın çalışır ve işlemler tamamlandığında kendi kendine kapanır.

Bu bölümde girişi yapılan sınır şartları dikkate alınarak Sistem Rijitlik Matrisi $\bar{K}$ tanzim edilir ve denklem sistemi $\bar{K} * \bar{\delta} = \bar{p}$ çözülür. $\bar{\delta}$ deformasyon vektörü diskette hafızaya alınacaktır.

Bölüm 3 : Deformasyonların çıkışı ve kesit tesirlerinin hesaplanması:

Bu bölümde, hafızaya alınmış olan $\bar{d}$ Düğüm Noktaları Deformasyonlarını gösteren hafızaya alınmış çözüm vektörü ekranda çıkış olarak görülür. Ayrıca kesit tesirleri hesaplanarak aynı şekilde çıkışı görülür. Son aşamada program bütün veri girişi ve çıkışlarını içeren bir çıkış dosyası üretir.

Bölüm 4: Printer çıkışının düzenlenmesi:

Bölüm 3 te üretilen çıkış dosyasının bu konumda DIN A4 formatındaki çıkışı printerden alınır.

“Sonlu Eleman Düzlem Taşıyıcı Sistem Programı” bu tür sistemleri probleme uygun olarak çözmek ve elde edilen sonuçları mühendislik yönünden değerlendirebilmek için, kullanıcının “Sonlu Eleman Metodunda” yeterli bilgiye de sahip olduğu kabul edilmektedir. Bu tip düzlem taşıyıcıların analizi için gerekli özet açıklamalar ilerleyen sayfalarda yapılacaktır.



II.2.6.6. Veri giriş ve çıkışların açıklaması

Giriş için gerekli ön bilgiler şöyledir :

- Ölçü birimlerinin seçimi;
- Levha geometrisinin global koordinat sistemi X,Y de tespit edilmesi;
- Levhanın sonlu üçgen elemanlara alt bölünmesi;
- Elemanların ve düğüm noktalarının numaralanması;
- Düğüm noktası koordinatları x_i, y_i 'nin belirlenmesi;
- Düğüm yüklerinin bulunması.

Sistem geometrisinin girişinde bir hatayı önlemek için, ayrıştırılmış hesaplama modelinden ölçeğe sadık kalınarak bir resim hazırlanması tavsiye edilir.

Bu şekilde düğüm noktası koordinatları grafiksel olarak kontrol edilebilir. Global koordinat sisteminin orijini mümkün olduğunca dış sol düğüm noktasında bulunmalıdır. Düğüm noktalarının numaralanmasındaki dizi sırası K Sistem Rijitlik Matrisi de mümkün olabilen en küçük bant genişliği oluşacak şekilde seçilmelidir. Bu amaçla düğüm numaralanmasında ve çubuk sistemlerin hesaplanmasında genel olarak verilen yöntem burada da uygun olarak uygulanmalıdır.

Sistem verilerinin veya tekil yük durumlarının girişi direkt olarak yapılır. Buna uygun giriş diyalogu tabloda bir araya toplanmıştır. Yeni ayrıklaştırılmış sistemin girişini yapmak için veya o anda mevcut olan bir veriyi düzeltmek için menüden (Şekil 2.32) “1” nolu program bölümü seçilir. Giriş diyalogunun kendi başına geniş kapsamda açıklayıcı olmasına rağmen, bazı sorularda ilave yorumlara gerek vardır.

* Düğüm sayısı:

Maksimum için verilen düğüm noktası sayısı burada 130 dur.

Bir elemandaki düğüm farkı en fazla 24 olabilir.

* Mesnet düğümlerinin sayısı :

En az bir deplasmanın engellendiği düğümlerin sayısı 60 değerini geçemez.

Tekil üçgen elemanların sınırlandırma düğümleri bütün elemanlar için eleman indisleri oluşturulur. Bir elemanı tanımlayan bütün altı düğümün belirli bir dizi sırasında girişi yapılmalıdır. İlk üç düğüm köşe düğümleridir. Son üç düğüm kenarların orta düğümüdür. İlk iki köşe düğümünün arasındaki kenar düğümlerle başlayarak, saat dönüşünün yönünde dönüş yapılarak numaralanır. (Şekil 2.29)

* Sınır şartlarının girişi:

Her mesnet düğümünün numarası girilir ve yatay ve/veya dikey yönde bir deplasmanın olup olmadığı tespit edilir.

* Bütün giriş verilerinin tekrar kontrolü

Kontrol esnasında diğerleri yanında bütün elemanların sınırlandırma düğümleri değiştirilebilir.

Bu durum önceden kenar ortası düğümü olan bir düğümün köşe düğümü formu şeklinde gelişirse, bunu düzeltme girişlerinin bitişinden sonra yeni köşe düğüm koordinatlarının oluşturması takip eder. Bütün giriş bloklarının düzeltilmesinden sonra, kontrol işlemi bir numaranın girişi ile tamamlanır. Bundan sonra program giriş verilerini dosya SCHExxx.DAT” (Dosya numarası olarak) ya yazar ve program menüye döner.

“2” nolu program bölümüne şimdi start verilebilir. Bu bölüm giriş verilerinden “Sistem Rijitlik Matrisini” tanzim eder ve (2.47) denklem sistemini çözer.

Hesaplama işlemi esnasında hangi adımda çalışıldığına dair ekranda bilgi verilir. Sistemin büyüklüğüne göre 30 dakika kadar devam edebilen hesaplar bitirildikten sonra program (d) “Çözüm Vektörünü” diskete yazar ve ana menüye döner. Hesaplamayı devam ettirmek için “3” nolu program bölümü seçilir.

Çıkış bilgisi olarak elemanların ağırlık noktalarındaki eleman gerilimleri (σ_x , σ_y , τ) ve deplasmanları (u_i, v_i) elde edilir. Ayrıca köşe düğümlerindeki ortalama düğüm gerilmelerinin de çıkışları alınır. Bütün kesit tesirlerinin çıkışı yapıldıktan sonra program giriş ve çıkış verilerini dosya SCHE.. PRT ye yazar. Ana menüden tanıtım rakamı “4” girilmesi ile printer çıktısı elde edilir.

II.2.7. Plak şeklindeki taşıyıcı sistemler

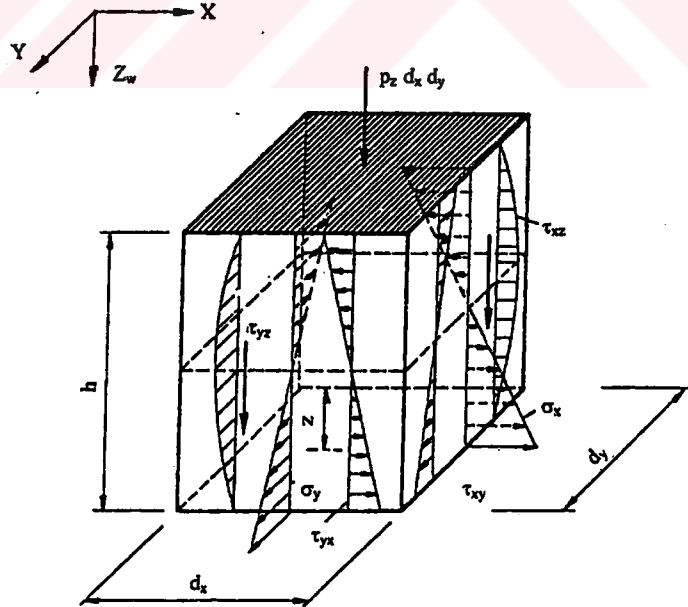
II.2.7.1. Plak teorisine giriş

Bu bölümde plak hesaplamasında kullanılacak Kırchoff Plak Teorisinin kısa özetini sunacağız. Plak deyince, dış yükleri kiriş gibi eğilme ile taşıyan düzlem taşıyıcı sistemler anlaşılır.

Yükleme yönünden, yükün plağın orta yüzeyine dik etki ettiği varsayılır. Plak her noktada plak kalınlığı h yi yarıya bölen orta yüzey ile idealize edilir. Plak geometrisi X, Y orta yüzeyinde alınan bir X, Y, Z kartezyen koordinat sistemi ile tespit edilir.

Plak Teorisinde, Kiriş Teorisindeki aynı ön şartlar ve varsayımlar kullanılır [19.20]. Malzeme yönünden, plak malzemesinin homojen ve izotrop olduğu ve Hooke kanuna uyduğu kabul edilir. Dış yükler ızgara sistemlerde olduğu gibi eğilme ve burulma momenti ve kesit kuvvetleri tarafından taşınır. Normal gerilmelerin değişiminin linear olduğu varsayılır.

Kayma gerilme değişimi parabol olarak ortaya çıkar (Şekil 2.32) Deformasyonlar orta yüzeyin $w(x,y)$ deplasmanları ile tanımlanır. Deplasmanlar h plak kalınlığı yanında küçük olmalıdır ($w < 0.3 h$). Gerilmeler (Şekil 2.32) Hooke kanununa göre elde edilir.



Şekil 2.32 Gerilme birleşenleri

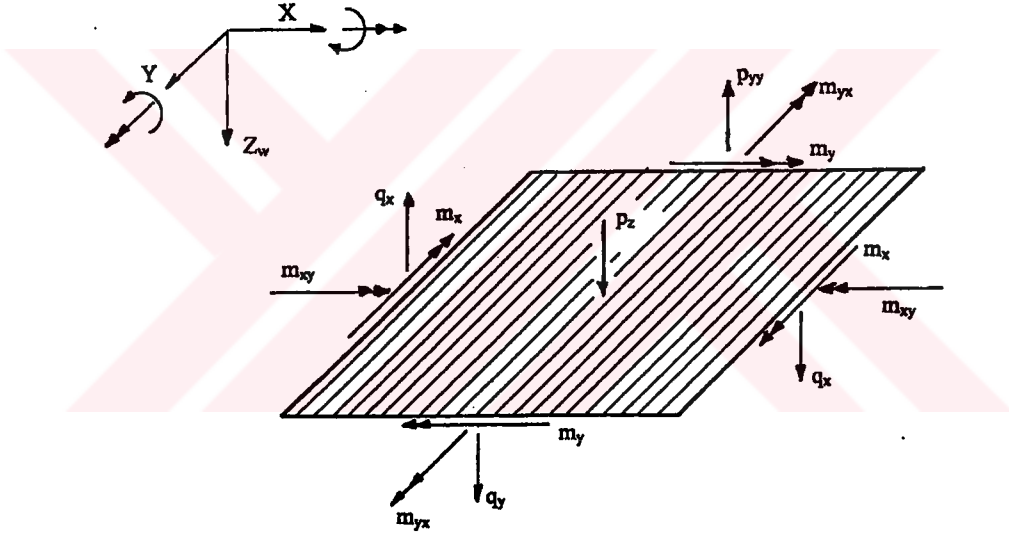
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \gamma_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

(2.92)

Plak Teorisinde, gerilme birleşenleri yerine birim uzunluğa gelen kesit tesirleri alınır. (Şekil 2.33) Gerilmelerin entegrasyonu ile bu kesit tesirleri hesaplanır.



Şekil 2.33 Kesit tesirleri

$$\begin{aligned}
m_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z \cdot dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
m_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z \cdot dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
m_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \cdot dz = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Burada (2.94)

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Kesme kuvvetleri q_x ve q_y için plağın moment denge şartları kullanılır. Buradan elde edilen

$$q_x = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad \text{ve} \quad q_y = -D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \tag{2.95}$$

Sonuç olarak diferensiyal denklem şu şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P_z(x, y)}{D} \tag{2.96}$$

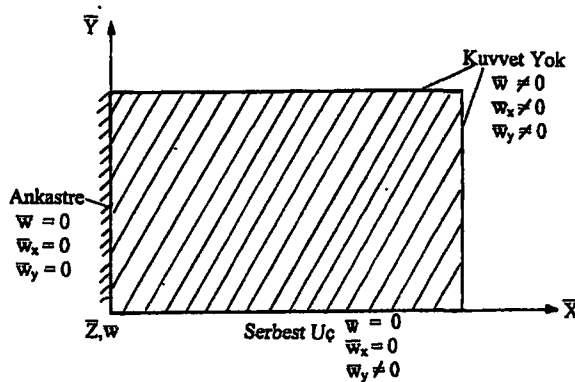
II.2.7.2. Programa genel bakış

Bu amaçla hazırlanan bilgisayar programı ayrıklaştırılmış plak taşıyıcı sistemlerin deformasyonlarını ve kesit tesirlerini hesaplamaya yararlar. Bilgisayar programında SEM hesaplamasının dört düğümlü bir dikdörtgen elemanı (12 serbestlik derecesi için dördüncü dereceden bir polinom hizmet verir) baz olarak alınır. Bu durum dik açı ile mesnetlendirilmiş plakların hesaplanması için kullanılmalıdır. Eğer plağın orta yüzeyi herhangi bir formda ise, 9 serbestlik derecesi ile genel bir üçgen eleman kullanan program devreye sokulur. Bu durumda Başlangıç Fonksiyonu olarak üçüncü dereceden polinom seçilir.

Ayrıklaştırılmış yedek sistemin geometrisi global referans sistemi X,Y,Z deki düğüm noktaları x_i, y_i nin koordinatları ile açıklanır. Bu konumda X,Y düzlemi orta yüzey ile çakışır. Herbir düğüm ve elemanlara daha sonra yük durumlarının veya neticelerin belirtilmesi için kullanılacak numaralar verilir. Düğüm ve elemanların numaralanması temelde herhangi bir şekilde olabilirse de, daha önce açıklanan kaidelerin yerine getirilmesi iyi olur. Maksimum düğüm noktası sayısı 120'yi aşmamalıdır. Bu konumda E Elastikiyet Modülü, ν Enine Genleşme Sayısı ve plak kalınlığı h değişik değerler alabilirler.

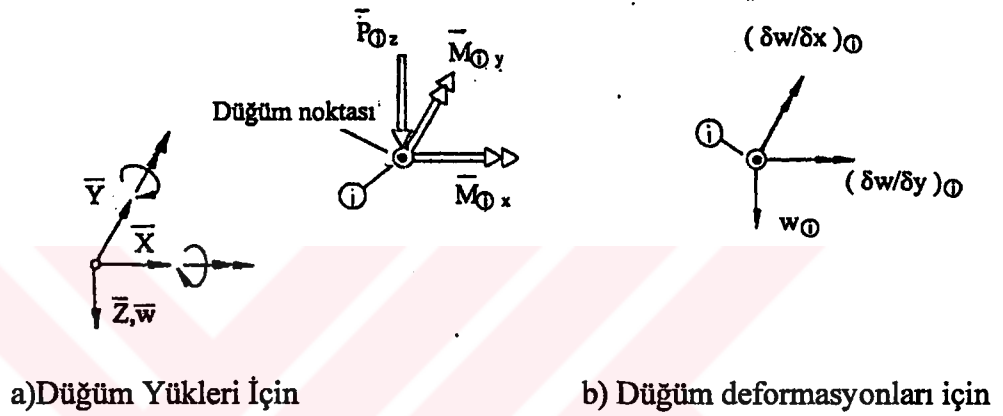
Daha büyük sistemlerde amaca uygun olarak alt bölme metodu kullanılır [1].

Ele alınan plak elemanlarındaki deformasyonlar sınır şartları da dikkate alınarak X,Y global koordinat eksenleri etrafındaki dönme veya Z eksenini doğrultusundaki deplasmanlara dayandırılır. (Şekil 2.32)



Şekil 2.34. Geometrik sınır şartları

Elemandaki yüklemeler tekil ve sabit kuvvet veya momentler şeklinde olabildiği gibi uniform dağılılı yükleri de içerebilir. Elemanda uniform olmayan yük tipleri de dikkate alınabilir. Ayrıca bu tip yükler düğüm noktalarına (statik eşdeğerlikte alınarak) indirgenebilir. Virtüel İş Prensibine göre uygulanan denklem (2.62) basitleştirilmiş şekil fonksiyonları ile oldukça iyi neticeler verir. Şekil 2.35 de dış düğüm yükleri için işaret kuralı gösterilmektedir:



Şekil 2.35 İşaret kuralı

Çıkış bilgisi olarak aşağıdaki düğüm deformasyonları elde edilir:

w : Z ekseninde deplasman

w_x : Y Ekseninde dönme (x-yönünde parsiyel türev)

w_y : X ekseninde dönme (y- yönünde parsiyel türev)

İşaret kuralı Şekil 2.34b deki açıklamaya uygundur.

Kesit tesirlerinin hesaplanması önce eleman tarzında gerçekleştirilir. Bunu takiben bütün elemanlarda ortak olan her düğüm için ortalama değer hesaplanır. Bu ortalama düğüm kesit tesirleri aşağıdaki birim uzunluğa gelen değerleri gösterir.

$m_{x(i)}$: Eğilme Momenti

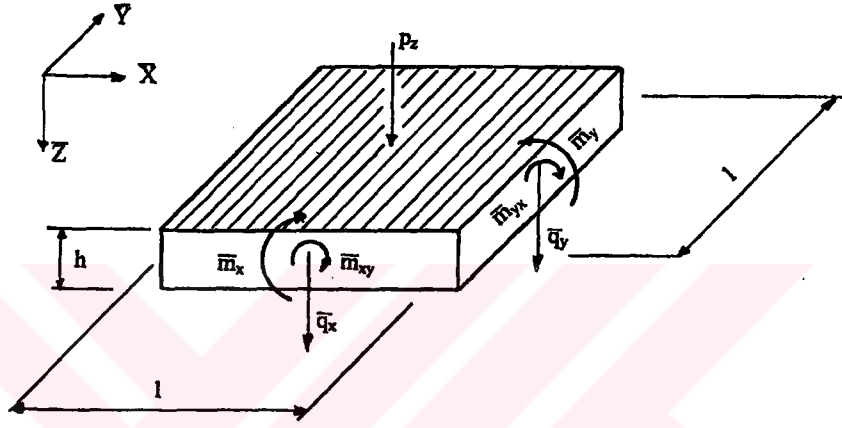
$m_{y(i)}$: Eğilme Momenti

$m_{xy(i)}$: Burulma Momenti = $m_{yx(i)}$

$q_{x(i)}$: Kesme kuvveti (normali X doğrultusunda olan kesit)

$q_{y(i)}$: Kesme kuvveti (normali Y doğrultusunda olan kesit)

Eğilme momenti değerlerindeki indis, momentin yarattığı gerilmenin global koordinat sistemindeki doğrultusunu belirtir (Denklem 2.92). Buna göre, bir $m_{x(i)}$ momenti y- eksenini etrafında ve bir $m_{y(i)}$ momenti x- eksenini etrafında etki eder. Pozitif momentler plağın alt tarafında çekme gerilmeleri yaratır (Şekil 2.35). Pozitif kesit tesirleri Şekil 2.36 da gösterilmiştir.

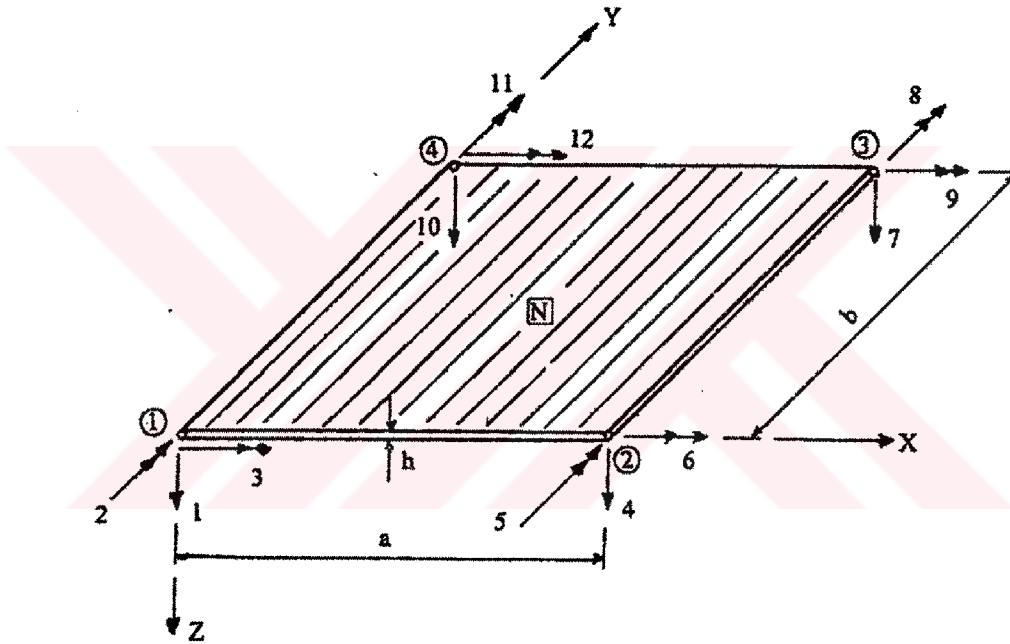


Şekil 2.36 Pozitif kesit tesirleri

II.2.7.3. Dikdörtgen plak

Şekil 2.37 de basit olarak şekillendirilen dikdörtgen plak 12 serbestlik derecesine sahiptir. Deplasman başlangıç fonksiyonu olarak Zienkiewicz [41,43,44] aşağıdaki polinom'u kullanmıştır.

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (2.97)$$



Şekil 2.37 Dikdörtgen plak

Deplasman fonksiyonu Pascal üçgeninin üçüncü dereceye kadar olan terimlerin alınmasıyla elde edilir.

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & x & & y & & \\ & x^2 & & xy & & y^2 & \\ x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\ & x^3y & & & xy^3 & & \end{matrix} \quad (2.98)$$

Deplasman başlangıç fonksiyonunun (2.97) parsiyel türevler alınarak θ_x , θ_y dönme değerleri bulunur.

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} = -\alpha_3 - \alpha_5 x - 2\alpha_6 y - \alpha_8 x^2 - 2\alpha_9 xy - 3\alpha_{10} y^2 - \alpha_m x^3 - 3\alpha_{12} xy^2 \quad (2.99)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad (2.100)$$

Buna göre Düğüm Deplasmanları için Başlangıç Fonksiyonları şöyledir:

$$F_i^{(N)} = \begin{bmatrix} w \\ \theta_y \\ \theta_x \end{bmatrix}_i^{(N)} = \begin{bmatrix} \text{Denklem.(2.97)} \\ \text{Denklem.(2.100)} \\ \text{Denklem.(2.99)} \end{bmatrix}_i^{(N)} = (\varphi\alpha)_i^{(N)} \quad (i = 1,2,3,4) \quad (2.101)$$

Aranılan α sabiti düğüm noktası koordinatları $x_{(i)}$ ve $y_{(i)}$ nin denklem (2.101) ya yerleştirilmesi ile tespit edilir.

Denklem (2.54) de

$$\delta_e^{(N)} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \dots & x_1 y_1^3 \\ \delta_2 & 0 & 1 & 0 & 2x_1 & \dots & y_1^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{12} & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & -3x_4 y_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}^{(N)} = (A\alpha)^{(N)} \quad (2.102)$$

Buradan

$$\alpha^{(N)} = (A^{-1}\delta_e)^{(N)} \quad (2.103)$$

(2.55) denlemi ile Deplasman Fonksiyonları Matrisi elde edilir.

$$\Phi^{(N)} = (\varphi \Lambda^{-1})^{(N)} = \begin{bmatrix} -1 + \xi\eta + (3-2\xi)\xi^2(1-\eta) + (1-\xi)(3-2\eta)\eta^2 \\ -\xi(1-\xi)^2(1-\eta)a \\ -(1-\xi)\eta(1-\eta)^2b \\ -(3-2\xi)\xi^2(1-\eta) - \xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ (1-\xi)\xi^2(1-\eta)^2b \\ -\xi\eta(1-\eta)^2b \\ -(3-2\xi)\xi^2\eta + \xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ (1-\xi)\xi^2\eta a \\ \xi(1-\eta)\eta^2b \\ -(1-\xi)(3-2\eta)\eta^2 - \xi(1-\xi)(1-2\xi)\eta \\ -\xi(1-\xi)^2\eta a \\ (1-\xi)(1-\eta)\eta^2b \end{bmatrix}^{(N)} \quad (2.104)$$

Burada

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (2.105)$$

(2.61) denkleminde Eleman Rijitlik Matrisi $k_e^{(N)}$ elde edilir.

Bu durumda bu matrisin bir elemanı:

$$k_{ij} = D \iint_A \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dA = k_{ij} \quad (2.106)$$

gösterilir.

Her k_{ij} elemanı için integrasyonun gerçekleştirilmesi ile (2.107) de görüldüğü gibi $k_e^{(N)}$ elde edilir:

$$k_e^{(N)} = \frac{Eh^3}{180(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ F & H & G & L & N & -M & O & Q & -P & I & K & J \\ & V & +Z & -N & X & \phi & -Q & \gamma & \phi & K & W & \phi \\ & & R & -M & \phi & T & P & \phi & U & -J & \phi & S \\ & & & F & -H & G & I & -K & J & O & -Q & -P \\ & & & & V & -Z & -K & W & \phi & Q & \gamma & \phi \\ & & & & & R & -J & \phi & S & P & \phi & U \\ & & & & & & F & -H & -G & L & -N & M \\ & & & & & & & V & Z & N & X & \phi \\ & & & & & & & & R & M & \phi & T \\ & & & & & & & & & F & H & -G \\ & & & & & & & & & & V & -Z \\ & & & & & & & & & & & R \end{bmatrix}^{(N)}$$

simetrik

(2.107)

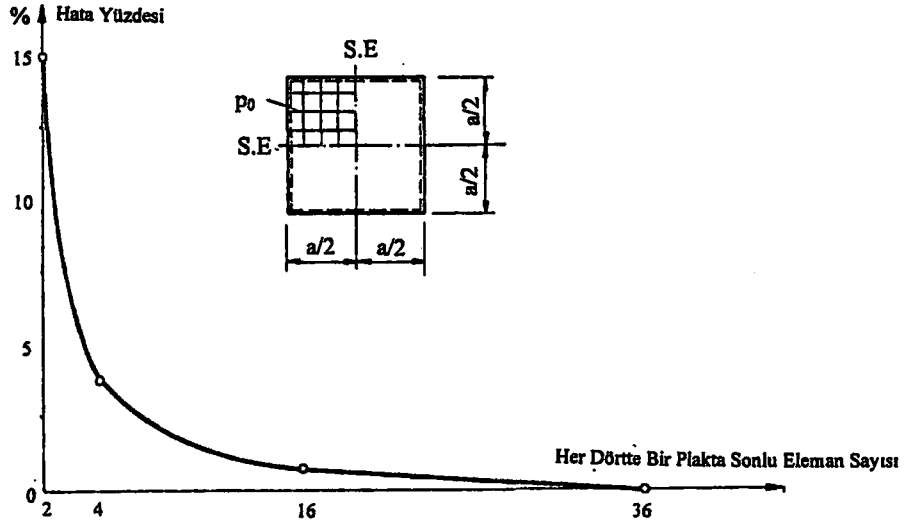
Bu matristeki katsayılar şöyledir:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{42 - 12v + 60p^2 + 60p^{-2}}{a \cdot b} & P &= \frac{-15p + 3 \cdot (1 - v) \cdot p^{-1}}{b} \\
G &= \frac{30p + 3p^{-1} + 12v \cdot p^{-1}}{b} & Q &= \frac{15p^{-1} - 3 \cdot (1 - v) \cdot p}{a} \\
H &= \frac{30p^{-1} + 3p + 12v \cdot p}{a} & R &= 20p + 4 \cdot (1 - v) \cdot p^{-1} \\
I &= \frac{-42 + 12v - 60p^2 + 30p^{-2}}{a \cdot b} & S &= 10p - (1 - v) \cdot p^{-1} \\
J &= \frac{30p + 3 \cdot (1 - v) \cdot p^{-1}}{b} & T &= 10p - 4 \cdot (1 - v) \cdot p^{-1} \\
K &= \frac{15p^{-1} - 3p - 12v \cdot p}{a} & U &= 5p + (1 - v) \cdot p^{-1} \\
L &= \frac{-42 + 12v - 60p^2 + 30p^2}{a \cdot b} & W &= 10p^{-1} - 4 \cdot (1 - v) \cdot p \\
M &= \frac{-15p + 3p^{-1} + 12vp^{-1}}{b} & X &= 10p^{-1} - (1 - v) \cdot p \\
N &= \frac{30p^{-1} + 3 \cdot (1 - v) \cdot p}{a} & Y &= 5p^{-1} + (1 - v) \cdot p \\
O &= \frac{42 - 12v - 30p^2 - 30p^{-2}}{a \cdot b} & Z &= 15 \cdot v
\end{aligned}$$

(2.108)

Burada $p = a/b$ veya $p_i = b/a$ olarak gösterilmiştir.

Şekil 2.38 den de görüldüğü gibi bir dikdörtgen plak elemanın bir noktaya toplama davranışı çok iyidir.



Şekil 2.38 Dikdörtgen plak elemanının bir noktaya toplama davranışı.

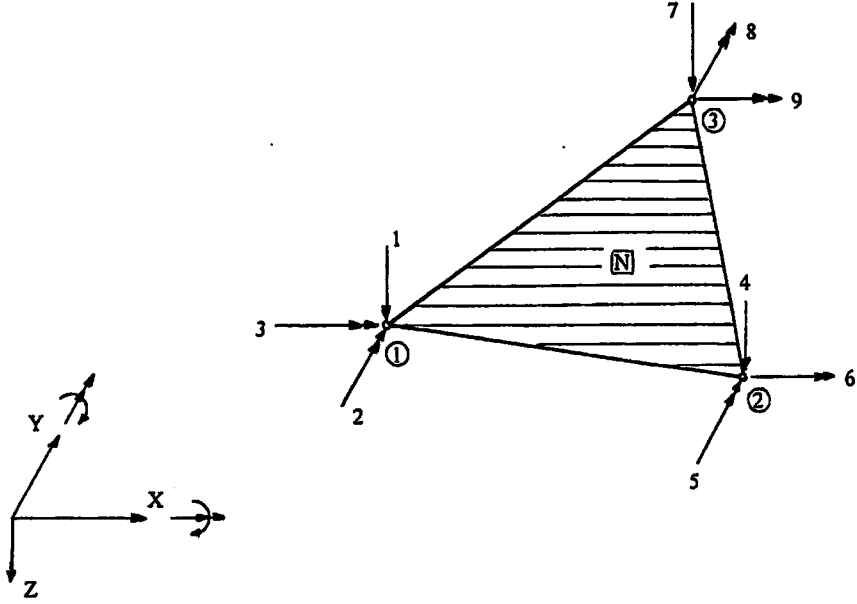
II.2.7.4. Üçgen Plak

Dikdörtgen plak elemanları ile herhangi bir kenarda kademeli yaklaşım yapılabilmesine rağmen, dikdörtgen plak elemanlarının uygulanma olanakları, özellikle dik açılı kenara sahip plaklarla sınırlı kalmaktadır .

Herhangi bir biçimdeki plaklarda üçgen elemanların uygulanması amaca daha uygun düşmektedir. Şekil 5.26 de üç düğüm noktalı ve 9 serbestlik dereceli basit bir üçgen eleman çizilmiştir. Deplasman Başlangıç Fonksiyonu Pascal üçgeninin yardımı ile

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & x & & y & \\
 & x^2 & & xy & & y^2 & \\
 x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3
 \end{array}
 \quad (2.109)$$

önce dolu bir polinom seçilir.



Şekil 2.39 Üçgen plak

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 \quad (2.110)$$

Her (i) düğüm noktasında yalnızca üç serbestlik derecesine alınarak:

$$\delta_i^{(N)} = \begin{bmatrix} w \\ \theta_y \\ \theta_x \end{bmatrix}_i^{(N)} = \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}_i^{(N)} \quad (i = 1,2,3) \quad (2.111)$$

hesaplanabilir. Bazeley, Zienkiewicz ve onlarla birlikte olan yazarlar [45] ye bazı belirli matematiksel düşünceler nedeniyle α_2 için 0,5 değerini vererek serbest parametrelerin sayısını (2.110) denkleminde 10 dan 9 a indirdiler. Ayrıca üçgen elemanın bir birim üçgenin üstüne kopyalanmasında (Şekil 2.40) gerekli entegrasyonun gerçekleştirilmesinde faydalı olacaktır. Bu şekilde Başlangıç Fonksiyonu için aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$w(\xi, \eta) = \alpha_1 + 05\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 \quad (2.112)$$

Bu şekilde azaltılmış serbet parametre sayısı serbestlik derecesi ile uygun olduğundan

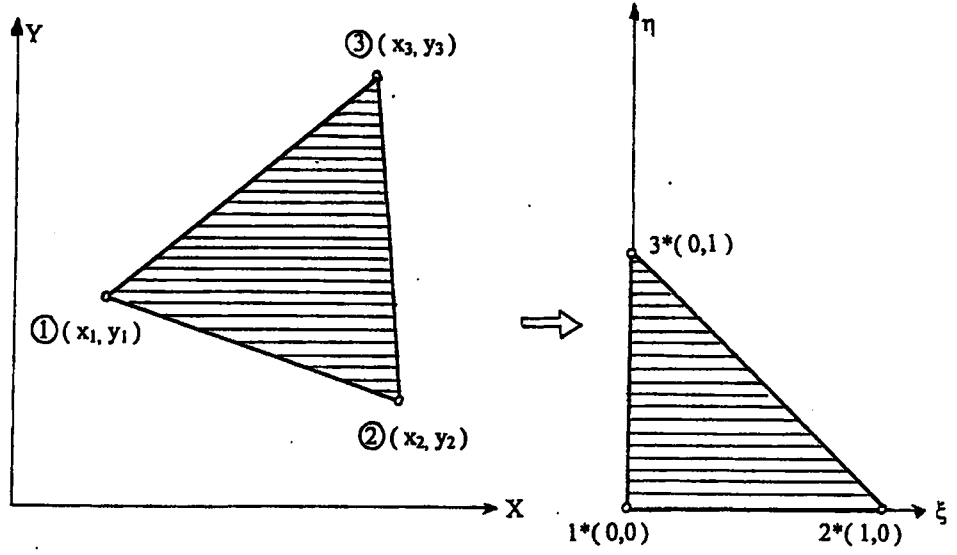
$$\delta_e^{(N)} = (\Lambda\alpha)^{(N)} \quad \alpha^{(N)} = (\Lambda^{-1}\delta_e)^{(N)}$$

bağıntıların düzenlenmesinde (2.54) denkleminde göre bir sorun çıkmaz. Denklem (2.55) den Şekil Fonksiyon Matrisi

$$\Phi^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 - 4\xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 4\xi^2\eta + 4\xi\eta^2 + 2n^3 \\ \xi - 2\xi^2 - \frac{3}{2}\xi\eta + \xi^3 + \frac{3}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\xi\eta^2 \\ n - \frac{3}{2}\xi\eta - 2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{3}{2}\xi\eta^2 + \eta^3 \\ 3\xi^2 + 2\xi\eta - 2\xi^3 - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^2 \\ -\xi^2 - \xi\eta + \xi^3 + \xi^2\eta + \xi\eta^2 \\ \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{2}\xi^2\eta - \frac{1}{2}\xi\eta^2 \\ 2\xi\eta + 3\xi^2 - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^2 - 2\eta^3 \\ \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\xi\eta^2 \\ -\xi\eta - \eta^2 + \xi^2\eta + \xi\eta^2 + \eta^3 \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

bulunur.

Eleman Rijitlik Matrisi $k_e^{(N)}$ alışılagen tarzda (2.106) elde edilir.



Şekil 2.40 Bir üçgenin birim üçgen haline getirilmesi

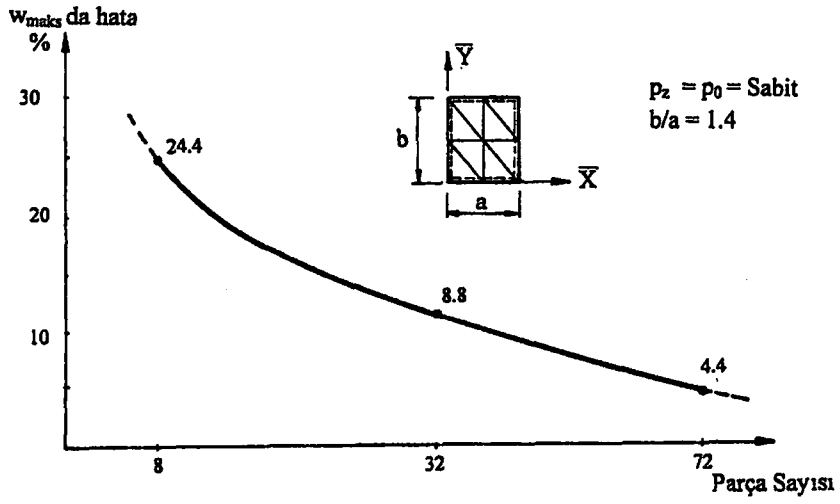
Bu basit üçgen plak elemanın bir noktaya toplama özellikleri, dikdörtgen elemaninkiler kadar iyi olmasa da yeterince küçük alt bölümüne ile kullanılabilir neticeler elde edilir. Plagın sonlu elemanlara alt bölünmesinde bütün üçgen kenarları üç doğrultuya paralel olmalıdır [46]

II.2.7.5. Kesit tesirlerinin hesaplanması

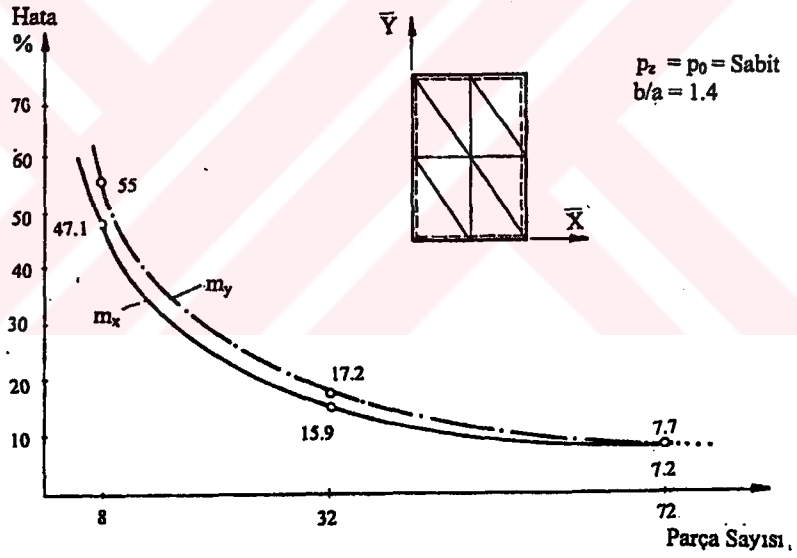
Eğilme ve burulma momentlerin tespiti için genel bağıntılar denklem (2.93) de verilmiştir. Burada kesit momentleri $\delta_e^{(N)}$ düğüm noktası deplasmanlarından Şekil Fonksiyonları yardımı ile hesaplanacaktır. Düğüm için verilen

$$m_i^{(N)} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix}_i^{(N)} = [S_1 S_2 S_3 S_4] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}_e^{(N)} = S^{(N)} \delta_e^{(N)} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.114)$$

bu durumda



a) Simetriden faydalanmaksızın



b) Maks eğilme momentinin bir noktaya toplama eğrisi

Şekil 2.41 Üçgen plak elemanının bir noktaya toplama özellikleri

$$S_i = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta^T \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta^T \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \theta^T \end{bmatrix}_i^{(N)} \quad (i = 1,2,3,4) \quad (2.115)$$

Bu matrisin açık formu [41,44] denklem (2.106) da verilmiştir.

Kesme kuvvetleri q_x ve q_y nin hesaplanmasında benzer tarzda hareket edilir. Bu amaçla (2.95) denklemi kullanılır.

(i) Düğüm noktası için kesme kuvvetleri matrisi şöyledir:

$$q_i^{(N)} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}_i^{(N)} = [Q_1 Q_2 Q_3 Q_4] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}_i^{(N)} \quad (i = 1,2,3,4) \quad (2.116)$$

bu durumda

$$Q_i = -D \begin{bmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x^3} & \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3}{\partial y^3} & \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^T \\ \theta^T \end{bmatrix}_i^{(N)} \quad (i = 1,2,3,4) \quad (2.117)$$

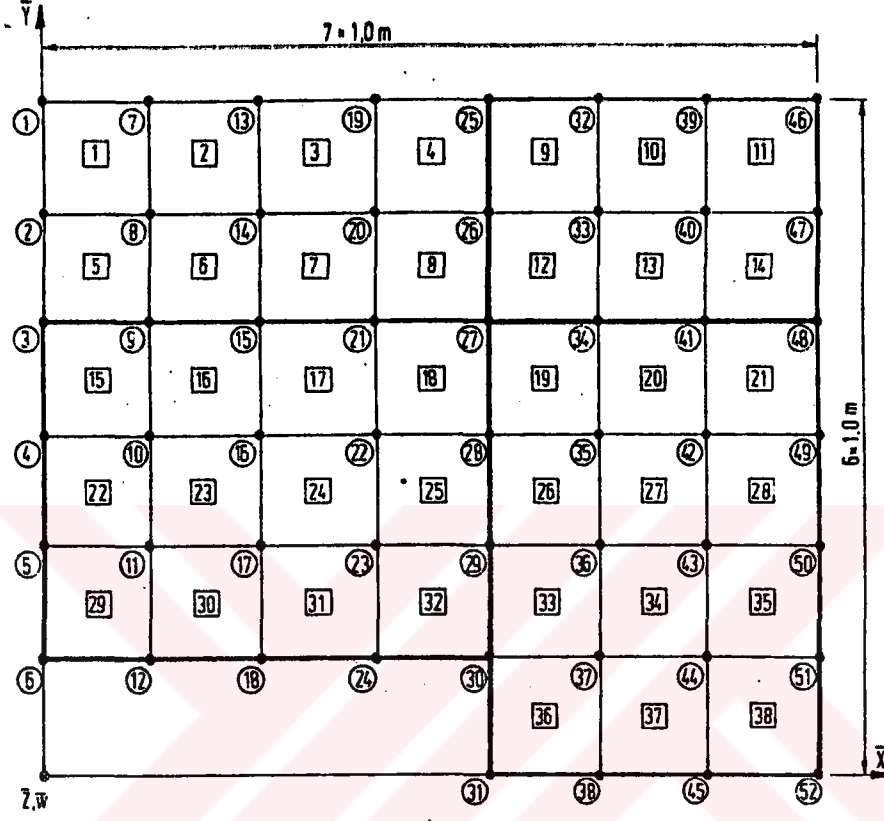
N inci eleman için kesme kuvvetlerinin hesaplanması:

$$q^{(N)} = (Q \delta_e)^{(N)} \quad (2.118)$$

ile yapılabilir.

ÖRNEK:

Şekil 2.42 de verilmiş olan Plâğı Sonlu Elemanlar Metodu ile çözünüz.



Şekil 2.42 Betonarme Dikdörtgen Plâğın sonlu elemana ayrılması

ÇÖZÜM

ELEMAN SAYISI	38
DÜĞÜM SAYISI	52
MESNET DÜĞÜMLERİ SAYISI	30

MALZEME BİLGİLERİ

TİP NO	E-MODUL	LEVHA KALINLIĞI	ENİNE GENLEŞME KATSAYISI
1	3.00E+07	0.16	0.3

DÜĞÜM KOORDİNLARI

<u>DÜĞÜM</u>	<u>X-KOORDİNATI</u>	<u>Y-KOORDİNATI</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>X-KOORDİNATI</u>	<u>Y-KOORDİNATI</u>
1	0	6	27	4	4
2	0	5	28	4	3
3	0	4	29	4	2
4	0	3	30	4	1
5	0	2	31	4	0
6	0	1	32	5	6
7	1	6	33	5	5
8	1	5	34	5	4
9	1	4	35	5	3
10	1	3	36	5	2
11	1	2	37	5	1
12	1	1	38	5	0
13	2	6	39	6	6
14	2	5	40	6	5
15	2	4	41	6	4
16	2	3	42	6	3
17	2	2	43	6	2
18	2	1	44	6	1
19	3	6	45	6	0
20	3	5	46	7	6
21	3	4	47	7	5
22	3	3	48	7	4
23	3	2	49	7	3
24	3	1	50	7	2
25	4	6	51	7	1
26	4	5	52	7	0

SINIRLAMA DÜĞÜMLERİ

<u>ELEMAN</u>	<u>1.DÜĞÜM</u>	<u>2.DÜĞÜM</u>	<u>3.DÜĞÜM</u>	<u>4.DÜĞÜM</u>	<u>TİP</u>
1	2	8	7	1	1
2	8	14	13	7	1
3	14	20	19	13	1
4	20	26	25	19	1
5	3	9	8	2	1
6	9	15	14	8	1
7	15	21	20	14	1
8	21	27	26	20	1
9	26	33	32	25	1
10	33	40	39	32	1
11	40	47	46	39	1
12	27	34	33	26	1
13	34	41	40	33	1
14	41	48	47	40	1
15	4	10	9	3	1
16	10	16	15	9	1
17	16	22	21	15	1
18	22	28	27	21	1
19	28	35	34	27	1
20	35	42	41	34	1
21	42	49	48	41	1
22	5	11	10	4	1
23	11	17	16	10	1
24	17	23	22	16	1
25	23	29	28	22	1
26	29	36	35	28	1
27	36	43	42	35	1
28	43	50	49	42	1
29	6	12	11	5	1
30	12	18	17	11	1
31	18	24	23	17	1
32	24	30	29	23	1
33	30	37	36	29	1
34	37	44	43	36	1
35	44	51	50	43	1
36	31	38	37	30	1
37	38	45	44	37	1
38	45	52	51	44	1

MESNET VERİLERİNİN GİRİŞİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>DÖŞEY DEP. ENGELLEME</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>X- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>Y- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>
3	J	J	J
4	J	N	J
5	J	N	J
6	J	J	J
9	J	J	N
15	J	J	N
21	J	J	N
12	J	J	N
18	J	J	N
24	J	J	N
25	J	J	J
26	J	N	J
27	J	J	J
28	J	N	J
29	J	N	J
30	J	J	J
31	J	J	J
32	J	J	N
39	J	J	N
46	J	J	J
47	J	N	J
34	J	J	N
41	J	J	N
48	J	J	J
49	J	N	J
50	J	N	J
51	J	N	J
38	J	J	N
45	J	J	N
52	J	J	J
52	J	J	J

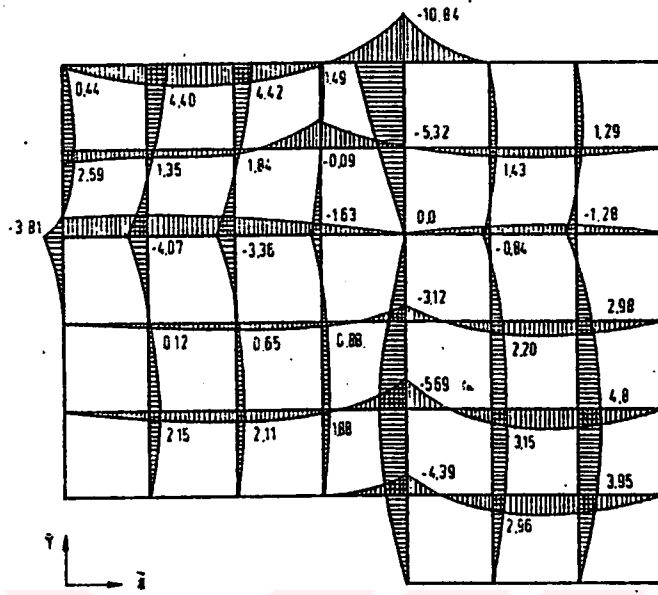
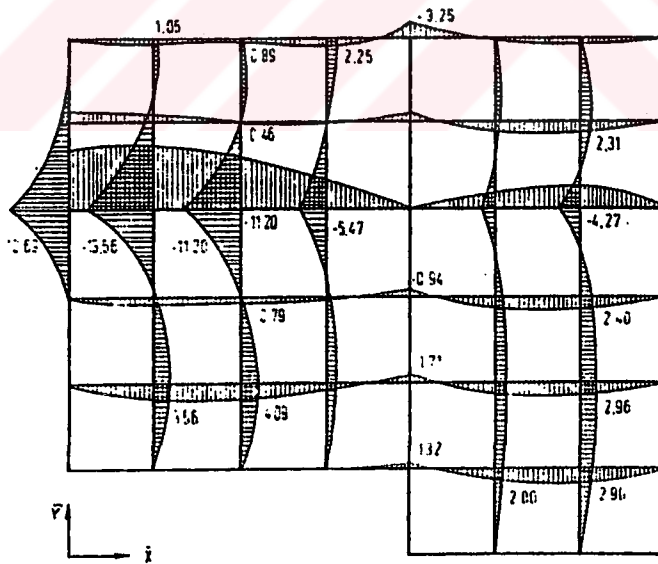
ELEMAN YÜKLERİ

<u>ELEMAN</u>	<u>YÜK</u>	<u>ELEMAN</u>	<u>YÜK</u>
1	11	20	8.75
2	11	21	8.75
3	11	22	8.75
4	11	23	8.75
5	11	24	8.75
6	11	25	8.75
7	11	26	8.75
8	11	27	8.75
9	8.75	28	8.75
10	8.75	29	8.75
11	8.75	30	8.75
12	8.75	31	8.75
13	8.75	32	8.75
14	8.75	33	8.75
15	8.75	34	8.75
16	8.75	35	8.75
17	8.75	36	8.75
18	8.75	37	8.75
19	8.75	38	8.75

BULUNAN MOMENT DEĞERLERİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>MX</u>	<u>MY</u>	<u>MXY</u>
1	0.4113	0.7998	-1.6366
2	2.59	-1.3491	-0.7751
3	-3.8059	-12.6864	3.6005
4	0.9492	0.2848	-1.5386
5	0.6239	0.1872	0.1713
6	0	0	1.7398
7	4.4013	1.0475	-1.7337
8	1.3518	-1.6735	-1.5086
9	-4.0672	-13.5573	1.094
10	0.1201	1.5781	-0.7062
11	2.1508	3.5583	0.0639
12	0.205	0.6835	0.8455
13	4.4215	0.8897	-3.5864
14	1.839	0.4616	-2.846
15	-3.3593	-11.1977	-1.1383
16	0.6544	0.7907	0.3389

17	2.1147	4.0868	0.0132
18	0.1697	0.5658	-0.2384
19	1.4893	2.2483	-3.9818
20	-0.0868	0.278	-3.7023
21	-1.634	-5.4468	-1.2223
22	0.8784	0.6545	0.8729
23	1.8782	2.1588	-0.1769
24	0.2569	0.8563	-1.1789
25	-10.843	-3.2529	1.4515
26	-5.229	-1.5687	-0.1029
27	0	0	-0.9303
28	-3.1222	-0.9367	-0.2394
29	-5.686	-1.7058	0.2396
30	-4.388	-1.3164	0.3391
31	0	0	0.3285
32	0.259	0.8634	-0.6604
33	1.4282	1.0888	0.1232
34	-0.8354	-2.7848	-0.2232
35	2.1968	1.813	-0.912
36	3.1508	2.227	-0.1876
37	2.9608	2.006	0.7887
38	0.2385	0.795	1.4819
39	0.1847	0.6157	0.1682
40	1.2929	2.3105	-0.0998
41	-1.2798	-4.266	0.2748
42	2.9837	2.4043	0.5661
43	4.8031	2.9581	0.0668
44	3.9497	2.9042	-0.4663
45	0.197	0.6565	-0.8512
46	0	0	0.9168
47	0.828	0.2484	-0.2465
48	0	0	0.5648
49	0.8018	0.2405	1.6027
50	0.562	0.1686	0.2274
51	0.6937	0.2081	-1.362
52	0	0	-2.5011

a) Örneğin M_x diyagramıb) Örneğin M_y diyagramı

Şekil 2.43 Sonlu Elemanlar Metodu ile Çözülen Plâğin moment diyagramları

BİLGİSAYAR MENÜSÜ

SONLU ELEMENLARIN HESAPLANMASI İÇİN PROGRAM

DOSYA NO(EN FAZLA 4 RAKAM) :
 YENİ VERİ GİRİŞİ(0) VEYA MEVCUT VERİLERİ DEĞİŞTİRME(1)? :
 PROBLEMİN ADI(MAX.40) :
 ELEMAN SAYISI :
 DÜĞÜM SAYISI :
 MESNET DÜĞÜMLERİ SAYISI :
 E-MODUL :
 ENİNE GENLEŞME SAYISI :
 LEVHA KALINLIĞI :

PLAK ELEMENLARIN SINIR DÜĞÜMLERİ

<u>ELEMAN</u>	<u>1.DÜĞÜM</u>	<u>2.DÜĞÜM</u>	<u>3.DÜĞÜM</u>	<u>4.DÜĞÜM</u>	<u>5.DÜĞÜM</u>	<u>6.DÜĞÜM</u>
1	*	*	*	*	*	*
2	*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	*	*

KÖŞE DÜĞÜM KOORDİNATLARI GİRİŞİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>X-KOORDİNATI</u>	<u>Y-KOORDİNATI</u>
*	*	*
*	*	*
*	*	*

SINIR ŞARTLARININ GİRİŞİ

<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>X- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>Y- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>
1	*	*	*
2	*	*	*

YÜKLEME VERİLERİNİN GİRİŞİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>YATAY YÜK</u>	<u>DİK YÜK</u>
*	*	*
*	*	*
*	*	*

BÜTÜN VERİ GİRİŞLERİNİN TEKRAR KONTROLU GEREKİYOR MU?(J/N)

VERİ GİRİŞLERİNİN KONTROLU

SINIRLAMA DÜĞÜMLERİ

<u>ELEMAN</u>	<u>1.DÜĞÜM</u>	<u>2.DÜĞÜM</u>	<u>3.DÜĞÜM</u>	<u>4.DÜĞÜM</u>	<u>5.DÜĞÜM</u>	<u>6.DÜĞÜM</u>
1	*	*	*	*	*	*
2	*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	*	*

DÜZELTME

VERİ GİRİŞLERİNİN KONTROLU

KÖŞE DÜĞÜM KOORDİNATLARI

<u>DÜĞÜM</u>	<u>X-KOORDİNATI</u>	<u>Y-KOORDİNATI</u>
**	*	*
**	*	*
**	*	*

DÜZELTME

VERİ GİRİŞLERİNİN KONTROLU

<u>NO</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>X- DÖNME ENGELLEMESİ</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>	<u>Y- DÖNME ENGELLEMES</u> <u>(VARSA"J" YOKSA"N")</u>
1	*	*	*
2	*	*	*

DÜZELTME

VERİ GİRİŞLERİNİN KONTROLU

YÜKLEME VERİLERİ

YÜKLENMİŞ DÜĞÜMLERİN YENİ SAYISI(J/N)?N

<u>NO:</u>	<u>DÜĞÜM</u>	<u>YAT.YÜK</u>	<u>DİK YÜK</u>
1	*	*	*
2	*	*	*
3	*	*	*

GİRİŞ VERİLERİ TEKRAR KONTROL EDİLMELİ Mİ?(J/N)
GİRİŞ VERİLERİ "B:SCHExxxx.DAT"İSİMLİ DOSYADA KAYDEDİLECEKTİR!

PROGRAMIN 2. BÖLÜMÜ:SİSTEMİ ORTAYA KOYAR VE ÇÖZER
SİPARİŞ NO:
SİSTEM RİJİTLİK DEĞERİ ORTAYA KONUR!
LİNEAR SİSTEM ÇÖZÜLÜR!

PROGRAMIN 3.BÖLÜMÜ:ŞEKİL DEĞİŞ. VE KUVVET BÜYÜK. BULUR!
SİPARİŞ NO:

DÜĞÜM ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>U</u>	<u>V</u>
1	*	*
2	*	*
3	*	*

ELEMAN GERİLMELERİ

<u>ELEMAN</u>	<u>SIGMA-X</u>	<u>SIGMA-Y</u>	<u>TAU-XY</u>
1	*****	*****	*****
2	*****	*****	*****
3	*****	*****	*****

KÖŞE NOKTALARINDAKİ ORTALAMA DÜĞÜM GERİLMELERİ

<u>DÜĞÜM</u>	<u>SIGMA-X</u>	<u>SIGMA-Y</u>	<u>TAU-XY</u>
1	*****	*****	*****
2	*****	*****	*****
3	*****	*****	*****

LÜTFEN MENÜDE GÖZÜKEN 4 NOLU TANIMLAYICI RAKAMI SEÇİNİZ

SONUÇ

Yapılan bu çalışmada “Elastik Zemin Oturan Çubuk ve Plak Sistemler” incelenmiştir. Bu inceleme yapılırken iki ana metoda başvurulmuştur. Bu metodlar Matris Deplasman Metodu ve Nümerik Metodlardır.

Matris Deplasman metodu ile Nümerik Metodları karşılaştırdığımızda çubuk sistemler için verilen bu metodun özellikle Sonlu Elemanlar Metodunun bir alt basamağı olarak görebiliriz. Fakat aradaki en önemli iki fark, Matris Deplasman Metodu kesin sonuçlar verirken Nümerik Metodların yaklaşık sonuçlar vermesi ve Matris Deplasman metodu çubuk elemanlarda (tek boyutlu sistemlerde) kullanılırken Nümerik Metodların iki veya üç boyutlu elemanlarda kullanılabilesidir. Nümerik Metotlardaki yaklaşıklık , hesaplanan sistemdeki eleman sayısını artırarak ve uygun bir ayrıklaştırılmış sistem oluşturarak hemen hemen gerçek değerler mertebesine kadar indirilebilmiştir. Ayrıca görülmüştür ki SEM ve Sonlu Farklar Metodu teorik olarak çözümü imkansız olan bir çok problemi çok kolay çözülebilir bir hale getirmiştir.

Bu tezde gerek Matris Deplasman Metodunun ve gerekse de Nümerik Metodların kullanımında bilgisayar programlarından faydalanılmıştır. Bu sayede çözümü oldukça zaman alan Taşıyıcı Izgara Tipindeki Sürekli Temeller gibi bir çok örnek çok kısa bir zamanda çözülebilmıştır. Bu bilgisayar programlarının hazırlanmasında bu çözümlerin matris formunda oluşu önemlidir.

Artık kullanılan bilgisayar programları, önceki yıllarda çok yaklaşık değerler alınarak yapılan işlemlerin yerini almıştır. Bu sayede en doğru sonuç, en hızlı şekilde bulunabilmektedir. Bu bilgisayar programları ile teoriler pratik hale getirilerek kullanıma sunulmuştur.

KAYNAKLAR

Arıman, T., Elastik Zemin Oturan Kalın Plaklar

Berktaş, İ. (1992), Plak Teorisi ve Uygulamaları Küçük Sehimli İnce Plaklar , Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları (237)

Borg, S.F., Foundation of Engineering Elasticity

Çakıroğlu, A. (1992) , Yapı Sistemlerin Hesabı için Matris Metodları ve Elektronik Hesap Makinası Programları Cilt II

Girkman, K., Flachentragwerke

Habibullah, A. (1995) ,SAFE Slab Analysis by the Finite Element Method, CSI Inc.

Heteny , Beams on Elastic Foundation

Keskinel , F., Elastik Zemin Oturan İki İstikametteki Müttemadi Sistemlerin Tesir Sayıları ile Çözümü

Keskinel, F., Elastik Zemin Oturan Sonlu Kirişler

Prescott, Applied Elasticity

Szilar, R. , (1974), Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, INC.

Timoshenko and Woinomsky-Krieger, Theory of Plates and Shells

Wang, P.C. , Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi : 06.05.1972

Doğum Yeri : İstanbul

Lise : 1983-1990 İstanbul Erkek Lisesi

Lisans : 1990-1994 Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği

İhtisas : 1994-1995 İstanbul Üniversitesi İşletme İktisadi Enstitüsü
İşletme İhtisası Bölümü

Yüksek Lisans : 1995-1998 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bil. Enst.
İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

Çalıştığı Kurumlar : 1994-1995 Turin İnşaat Ltd.
1995-1996 Yıldız İnşaat Ltd.
1996- Türk Demirdöküm Fabrikaları A.Ş.