

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN NERVÜRLÜ İNCE
PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE
EĞİLME HESABI**

106279

İnşaat Müh. Anıl Devrim KÜTÜKOĞLU

**F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Türkan KÖKSAL

Türkan

Prof. Dr. Türkan Köksal
Türkan

Prof. Dr. Faruk Yüksel
F. Yüksel

Doc. Dr. Turgut Öztürk
Turgut

İSTANBUL, 2001

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

İÇİNDEKİLER

	sayfa
SEMBOL LİSTESİ	i
ŞEKİL LİSTESİ	ii
ÇİZELGE LİSTESİ	iii
TEŞEKKÜR	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi	2
2. ELASTİSİTE BAĞINTILARI	6
3. İNCE PLAK TEORİSİ	8
3.1 Tanım	8
3.2 Varsayımlar	8
3.3 Diferansiyel Geometri	9
3.4 Gerilmelerle Yer Değiştirme Bileşenleri Arasındaki Bağlılıklar	10
3.5 Plak Elemanının Dengesi ve Plak Diferansiyel Denklemi	11
4. SONLU ELEMEN FORMÜLASYONU	14
4.1 Giriş	14
4.2 Sonlu Eleman Şeklinin Seçimi	14
4.3 Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi	15
4.4 Şekil Fonksiyonlarının Hesabı	17
4.5 Şekil Değiştirme – Yer Değiştirme Bağlılıkları	19
4.6 Kesit Tesirleri – Yer Değiştirme Bağlılıkları	21
4.7 Toplam Potansiyel Enerji	23
4.8 Eleman Rijitlik Matrisinin Bulunuşu	26
4.9 Eleman Zemin Etki Matrisi	30
4.10 Eleman Dış Yük Matrisi	35
4.11 Sisteme Geçiş	36
4.12 Sınır Şartları	38
4.13 Kesit Tesirlerinin Bulunması	39
5. SAYISAL ÖRNEK	42
6. SONUÇLAR	81
KAYNAKLAR	82
ÖZGEÇMİŞ	83

SEMBOL LİSTESİ

$a(m)$	: Sonlu elemanın x doğrultusu boyutu
$A_i(m^2)$	: Nervür alanı (x ve y yönünde)
$b(m)$	: Sonlu elemanın y doğrultusu boyutu
$c(kN/m^3)$	: Zemin yatak katsayısı
C_{ij}	: Rijitlik parametreleri
d_i	: Eleman düğüm noktası deplasman parametreleri
D	: Plak eğilme rijitliği
D_i	: Sistem düğüm noktası deplasman parametreleri
D_x, D_y, D_t	: Plak eğilme rijitliğine nervür etkileri
$e_i(m)$	: Nervür eksantrisitesi
$E(kN/m^2)$	: Elastisite modülü
$G(kN/m^2)$	: Kayma modülü
$I(m^4)$	: Atalet momenti
J	: Jakopyen matrisi
k_i	: Eleman rijitlik matrisi
K_i	: Sistem rijitlik matrisi
$l_x(m)$	: Plakın x yönündeki boyutu
$l_y(m)$	: Plakın y yönündeki boyutu
$M_x, M_y(kN/m)$	: x ve y yönündeki eğilme momentleri
$M_{xy}(kN/m)$	: Burulma momenti
N_i	: Şekil fonksiyonları
θ_x, θ_y	: x ve y doğrultusundaki dönme
P, p	: Tekil ve yüzeysel yük
q	: Çizgisel yük
$Q_x, Q_y(kN)$	: Kesme kuvvetleri
s_e	: Elastik zemin etki matrisi
$t(m)$	: Plak kalınlığı
u, v, w	: Yer değiştirmeler
U	: İç kuvvetlerin işi
W	: Dış kuvvetlerin işi
$V(kN/m)$	: Toplam potansiyel enerji
x, y, z	: Global koordinatlar
∂	: Kısmi türev sembolü
δ	: Varyasyon sembolü
ξ, η	: Yerel koordinatlar
γ_{xy}	: Kayma deformasyonu
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z(kN/m^2)$	: Normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}(kN/m^2)$	: Kayma gerilmesi
μ	: Poisson oranı
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	: Global koordinatlarda birim şekil değiştirmeler
ΔN_i	: Şekil fonksiyonlarının ikinci türevleri

ŞEKİL LİSTESİ

	sayfa
Şekil 1.1 Gerçek ve temsili plak	3
Şekil 2.1 ABCD dikdörtgen elemanın şekil değiştirmesi	6
Şekil 3.1 Plak ve koordinat sistemi	8
Şekil 3.2 Deformasyondan önce ve sonra plak elemanın şekil değiştirmesi	9
Şekil 3.3 Diferansiyel plak elemanın dengesi	12
Şekil 4.1 Dikdörtgen elemanda deplasman bileşenleri	15
Şekil 4.2 Plak elemanında gerilmeler	21
Şekil 4.3 Yayılı yükle yüklü basit kirişteki deplasmanlar	23
Şekil 4.4 Y yönü nervürleri	27
Şekil 4.5 Zeminin kaymadan önceki ve sonraki durumu (Pasternak modeli)	31
Şekil 4.6 Elemanter zemin elemanı	32
Şekil 4.7 Eleman ve sistem deplasman parametreleri	36
Şekil 5.1 Radye temel ve kesitleri	42
Şekil 5.2 Eleman ve sistem deplasman parametreleri	42
Şekil 5.3 $c = 80000 \text{ kN/m}^3$ için deplasman ve moment diyagramları	69
Şekil 5.4 Değişen zemin yatak katsayıları için deplasman ve moment diyagramları ...	76

ÇİZELGE LİSTESİ

	sayfa
Çizelge 4.1	[A] Bağ matrisi 16
Çizelge 4.2	[A] Bağ matrisinin inversi 17
Çizelge 4.3	Şekil fonksiyonlarının 2. türevleri 20
Çizelge 4.4a	Zemin etki matrisi 33
Çizelge 4.4b	Zemin etki matrisi 33
Çizelge 4.4c	Zemin etki matrisi 34
Çizelge 4.5	Sisteme geçiş deplasman parametreleri 36
Çizelge 5.1	[k] (eleman rijitlik matrisi) 44
Çizelge 5.2	[s _e] (zemin etki matrisi) 45
Çizelge 5.3	[k _{pe}] = [k]+[s _e] (sonuç eleman rijitlik matrisi) 45
Çizelge 5.4	Eleman ve sistem deplasman parametreleri 46
Çizelge 5.5	Sistem rijitlik matrisi terimleri 47
Çizelge 5.6a	1.eleman için çevirme matrisi 55
Çizelge 5.6b	2.eleman için çevirme matrisi 55
Çizelge 5.6c	3.eleman için çevirme matrisi 55
Çizelge 5.6d	4.eleman için çevirme matrisi 56
Çizelge 5.6e	5.eleman için çevirme matrisi 56
Çizelge 5.6f	6.eleman için çevirme matrisi 56
Çizelge 5.6g	7.eleman için çevirme matrisi 57
Çizelge 5.6h	8.eleman için çevirme matrisi 57
Çizelge 5.6i	9.eleman için çevirme matrisi 57
Çizelge 5.7	Sistem rijitlik matrisi değerleri (kN/m) 58
Çizelge 5.8	Sistem yük matrisi değerleri (kN) 65
Çizelge 5.9	Sistem deplasman parametreleri 65
Çizelge 5.10a	$\xi=0, \eta=0$ için $[m]^T$ değerleri 66
Çizelge 5.10b	$\xi=0, \eta=1$ için $[m]^T$ değerleri 66
Çizelge 5.10c	$\xi=1, \eta=1$ için $[m]^T$ değerleri 66
Çizelge 5.10d	$\xi=1, \eta=0$ için $[m]^T$ değerleri 66
Çizelge 5.11	Eleman köşe noktaları yaklaşık kesit tesirleri (kNm) 67
Çizelge 5.12	Sonuç kesit tesirleri (kN/m) 68
Çizelge 5.13	$c = 50000 \text{ kN/m}^3$ için sistem deplasman parametreleri 74
Çizelge 5.14	$c = 50000 \text{ kN/m}^3$ için sonuç kesit tesirleri (kNm) 74
Çizelge 5.15	$c = 110000 \text{ kN/m}^3$ için sistem deplasman parametreleri 75
Çizelge 5.16	$c = 110000 \text{ kN/m}^3$ için sonuç kesit tesirleri (kNm) 75

TEŞEKKÜR

4 yıllık yüksek öğrenimim ve 2 yıllık yüksek lisans öğrenimim boyunca derslerine girmiş olduğum tüm hocalarıma ve ayrıca tez çalışmamın hazırlanmasında, göstermiş olduğu yardım ve yönlendirmelerden dolayı Sayın hocam, Prof. Dr. Türkan Köksal'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Anıl Devrim Kütükoğlu



ÖZET

Bu çalışmada, elastik zemin üzerine oturan, her iki doğrultuda nervürlü, ince plak için eğilme hesabı incelenmiştir. Çözüm yöntemi olarak yaklaşık çözüm metotlarından 'Karışık Sonlu Eleman Yöntemi' kullanılmıştır. Oluşturulan sonlu eleman ağında dikdörtgen sonlu eleman şekli seçilmiştir. Elastik zeminin plağa etkisinde kayma modülleri sıfır alınarak 'Winkler Zemin Modellemesi' seçilmiştir. Bu elastik zemin etkisi gözönüne alınmazsa çıkartılan formülasyon asmolen döşeme, gemi gövdesi gibi nervürlü sistemlerin hesabında da kullanılabilir.

Uygulamada elastik zemin üzerinde nervürlü ince plak olarak yalnızca radye temel düşünülebileceği için dış yük olarak tekil yükler gözönüne alınmıştır. Sayısal örnek olarak incelenen radye temelde simetriden yararlanılarak 16 düğüm noktası, $16 \times 3 = 48$ serbestlik derecesi alınmıştır. Örnekte yalnızca yatak katsayısı değiştirilerek üç farklı durum için sonuç kesit tesirlerine ve çökmelere ait diyagramlar çizilmiştir.



ABSTRACT

In this study the bending calculation for thin plate, which is seated on the elastic soil, ribbed on both directions, has been examined. As a matter of solution method, the 'Mixed Finite Element Method' which is one of the approximated solution methods has been used. Within the element web assessed with finite element the rectangular finite element form was selected. The 'Winkler Soil Modelization' was selected having taken the sliding modules zero under the impact of the elastic soil on the plate. If the impact of this elastic soil would be disregarded, the result formulation rendered may be applied in the calculation of the ribbed systems such as; block flooring, ship body as well.

In consideration to the application, since only foundation raft could be thought of as ribbed thin plate on the elastic soil, the single footing loads are taken into the consideration as the off-center loads. 16 panel point, $16 \times 3 = 48$ unrestraint degree was taken having the advantage of the symmetry at single footing which was examined as a numerical sample. With the sample diagrams belonging to the result section effects and slumps are drawn for 3 different state having only changed the coefficient for bedding with the sample.



1. GİRİŞ

Yapısal analizin amacı, yapının yıkılmaya karşı belirli ve uygun bir güvenlik katsayısına sahip olmasını sağlamaktır. Taşıyıcı sistemin kendisinden beklenen fonksiyonu yerine getirmesi için, göçme durumuna karşı öngörülen bir uzaklıkta kalmasının yanı sıra işletme yükleri altında şekil ve yer değiştirme büyüklüklerinin ve betonarmenin kendi özelliğinden gelen çatlakların belirli sınırlar altında kalması istenir.

Yapısal analizin bu amacına ulaşabilmesi için;

- a) kullanılan inşaat malzemesi için uygun emniyet gerilmeleri seçmek,
- b) yapı elemanlarının boyutlandırılmasına yönetmeliklerle sınırlamalar getirmek durumunda kalınmıştır.

1900' lerde başlayan devrede kullanma yüklemesi altında malzemeler için belirlenecek emniyet gerilmelerinin aşılmaması esas alınarak boyutlama yapılmıştır. Elastik Hesap Yöntemi olarak bilinen bu yöntem, günümüze kadar, homojen (her noktada aynı fiziksel özelliklere sahip), izotrop (her doğrultuda aynı davranışı gösteren) ve lineer elastik malzemenin yük altındaki davranışının mukavemet bilim dalında esasen belirlenmiş olmasından gelen kolaylıkla kullanılmıştır.

Bilindiği gibi, elastisite teorisini kullanarak, Lagrange (1816), küçük sehimli ince plakların elastik yüzeyini ifade eden:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (1.1)$$

diferansiyel denklemini bulmuştur. Bu denklemin sınır şartlarını da sağlayan çözümü, şekil değiştirmiş olmuş plak elastik yüzeyini belirleyen $w = f(x,y)$ ifadesidir. Çökme (w) belirlendikten sonra diferansiyel plak elamanlarında denge denklemleri yazılarak, çökmelerle momentler arasındaki bağıntılar bulunabilir:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.3)$$

$$M_{xy} = -D (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.4)$$

Böylece; şekli, sınır şartları ve üzerindeki yük belirli olan bir plak denklemini çözme işi (1.1)'deki diferansiyel denklemin çözümüne indirgenmiştir.

Lagrange'ın bu diferansiyel denkleminin çözümü için çeşitli metotlar geliştirildi. Navier (1820), dört kenarından serbestçe mesnetlenmiş dikdörtgen plakların çift trigonometrik serilerle çözümünü ortaya koydu. Daha sonra bu çözümden, diğer mesnetlenme biçimindeki plakların çözümünde de yararlanılarak aşağıdaki metotlar geliştirildi:

- a) Diferansiyel denklemin çift ve tek Fourier serilerinin integrasyonu ile çözüm metotları (Navier, Levy vb.)
- b) Varyasyonlar hesabı (Ritz, Galerkin vb.)
- c) Nümerik metotlar (Sonlu elemanlar, sonlu farklar vb.)

Yukarıdaki plak diferansiyel denklemini çözüm metotlarından konumuzla ilgili olan Sonlu Elemanlar Yöntemi'ni inceleyeceğiz.

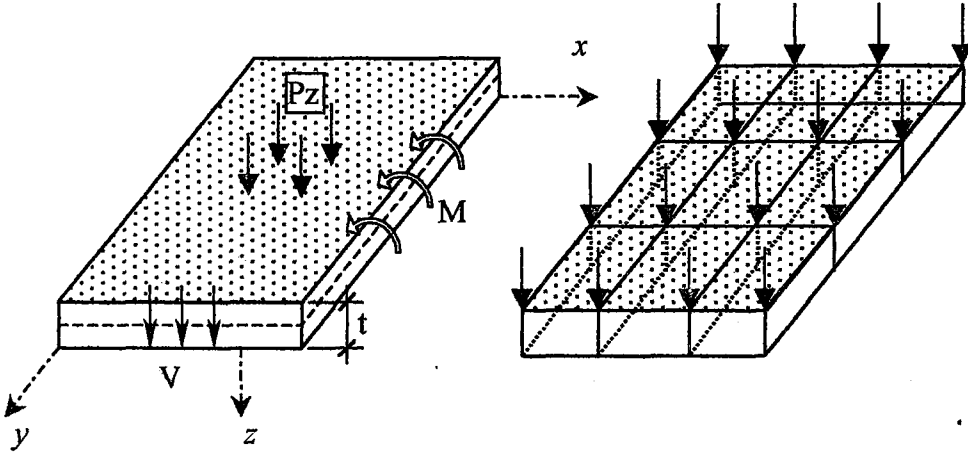
1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi bir yaklaşık sayısal çözüm yöntemidir. Bu yöntemde, sürekli bir sistemi problemin karakterine uygun, yani kendi şeklini ve sınır şartlarını göz önüne alarak sonlu sayıda yüzey veya çizgiye ayırırız. Birbirlerine sadece düğüm noktalarından bağlı ve karşılıklı etkileşimi sadece bu düğüm noktaları yardımıyla birbirlerine ileten sonlu sayıdaki bu parçacıklara 'sonlu eleman' ismi verilir. Gerçekte sonlu elemanlar yönteminin mantığı, oluşturulan bu sonlu elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonu ve sonra bu elemanların tekrar birleştirilmesi şeklindedir. Bunun sonucu olarak mesnet şartları, bölge sınırlarının düzgün olmayışı ve dış yüklerin özel koşulları kolayca göz önüne alınabilir.

Bunun gibi önemli etkileri göz önüne alması ve günümüzde bilgisayar teknolojisinin gelişmesi açısından, matematik güçlükler sebebiyle analitik çözümü zor olan bir çok problemi sonlu elemanlar yöntemiyle çözümlemek çok kolaydır. Bu özelliğinden dolayı günümüzde yapı mühendisliği, zemin mekaniği, hidrolik, ısı transferi gibi bir çok alanda sonlu elemanlar yöntemi kullanılmaktadır.

Sürekli sistem sonlu sayıda elemana ayrıldığında gerçek plağın elastik sürekliliği yerini, sadece düğüm noktalarında birbiriyle bağlantılı farklı elemanları içeren temsili yapıya

bırakır (Şekil 1.1).



Şekil 1.1 Gerçek ve temsili plak

Şekil 1.1'den de görüldüğü üzere gerçek plak, arakesiti düz veya eğri hatlı olarak, sınırlandırılan bütün malzeme özellikleri orijinal plağın aynı olacak şekilde plak elemanlarına ayrılır. Bu sonlu elemanların geometrik şekli olarak trapez, üçgen, dikdörtgen veya daha değişik şekiller kullanılabilir. Ancak dikdörtgen sonlu elemanların çözümü daha basittir ve plak sistemler için daha yaklaşık sonuçlar vermektedir.

Gerçek plaktaki yer değiştirmeler ve gerilmeler, yaklaşık olarak düğüm noktası yer değiştirmeleri ve gerilmeleri olarak hesaplanabilir. Bu ilişkinin sağlanması, eleman içindeki ve komşu elemanların her noktasındaki yer değiştirme uyumunun sağlanması ile gerçekleşir. Buna göre, sonlu eleman ağı genişletilip, eleman boyutları küçültülürse sonlu elemanların düğüm noktalarındaki yer değiştirme bileşenleri gerçek değerlere daha yaklaşıacaktır.

Elde edilen sonlu eleman üzerine uzayda yüzey, düzlemde eğrisel bir çizgi oturtularak uygun bir yer değiştirme fonksiyonu seçilir. Bu fonksiyon yardımı ile düğüm noktası deplasmanları ifade edilir. Bu deplasman parametreleri; deplasman bileşenleri, dönmeler ve burulma eğriliği gibi deplasman vektörlerini içerir. Eğilme hesaplarında bu deplasman parametrelerinin bulunması, gerçek sistemin deplasman yüzeyinin ve kesit tesirlerinin bulunması için yeterlidir. Stabilité hesabında ise, denge konumunu sağlayan kritik yükün bulunması için deplasman parametrelerine göre kurulan denklem takımının katsayılar determinantı sıfıra eşitlenir.

Düğüm noktalarındaki değişkenler açısından sonlu elemanlar yöntemini 3'e ayırabiliriz. Bunlar deplasmanların değişken olduğu "deplasman modeli", gerilmelerin değişken olduğu "denge metodu" ve her ikisinin de değişken olduğu "karışık metot"tur.

Sonlu sayıda oluşturduğumuz elemanların her birinin bireysel olarak toplam potansiyel enerjilerinin toplamından oluşan plağın toplam potansiyel enerjisi, düğüm noktaları dengede olduğunda sabit bir değere sahiptir. Bu sabit değer sistem gerçek denge konumundayken minimumdur. Eğer her bir sonlu elemanın şekil değiştirme bileşeni, komşu elemanların arakesitinde tamamen yer değiştirmelerin uyumunu sağlayacak şekilde seçilirse toplam potansiyel enerjiyi minimum yapan en iyi konum bulunmuş demektir. Buna göre sonlu elemanlar yönteminin genel yaklaşım kriteri; sonlu elemanlardan oluşan hayali sistemin toplam potansiyel enerjisi, elemanların sayısı sonsuz olarak arttırıldığında asıl plağın potansiyel enerjisine yaklaşmaktadır.

Yani kısaca; sonlu elemanlar yönteminde gerçek sonuçlara yakınsama hızının artması için en önemli etken, elemanlarda deplasman parametrelerinin birim değerlerine karşılık gelen seçilmiş deplasman fonksiyonlarının uygunluğudur.

Seçilen fonksiyon yardımı ile düğüm noktası deplasmanları ifade edildikten sonra, malzeme özelliklerinden ve başlangıç şekil değiştirmelerinden yararlanılarak gerilme durumu ortaya konulur. Elemana etki eden bu kuvvetlerin düğüm noktalarına yığıldığı farz edilir. Bu kuvvetlerin dış yükler ve sınır gerilmeleri ile dengesi göz önüne alınarak eleman rijitlik matrisleri oluşturulur.

Gerçek sisteme etkileyen dış yükler ise düğüm noktaları üzerine alınarak düğüm etki vektörü yani, eleman yük matrisi oluşturulur. Eleman rijitlik ve yük matrisleri oluşturulduktan sonra, biriktirme metodu veya çevirme matrisleri yardımıyla sisteme geçilerek sisteme ait rijitlik ve yük matrisleri oluşturulur.

Elde edilen denklem takımına mesnet şartları konur. Mesnetlerde sıfır olduğu bilinen deplasman parametrelerine ait satır ve sütunlar silinip, denklem takımı küçültülür. Eğer mesnet çökmesi varsa bu çökmeler düğüm noktaları deplasman parametrelerinin alacağı değerlerle belirlenir. Katsayılar matrisinde bu deplasman parametrelerine karşı gelen yatay satırlar silinir, sütunlar ise aynı değerlerle çarpılarak ilave terimler olarak sisteme eklenir.

Denklem takımı çözülerek düğüm noktası deplasman parametreleri bulunduktan sonra her

elemanda bilinen deplasmanlar yardımıyla gerilmeler (kesit tesirleri) çıkartılır. Aynı düğüm noktasında birleşen elemanların her birinden hesaplanan kesit tesirleri farklı olacağından, bu değerlerin ortalaması alınarak nümerik olarak kesit tesirleri bulunur.

Görüldüğü gibi eğilme hesabında düğüm noktalarının deplasman parametrelerinden yararlanarak kesit tesirlerine ulaşıyoruz. Yalnız problemin çözümünün elde edilebilmesi için tamlık ve uygunluk şartının sağlanmış olması gerekmektedir.

Tamlık şartı; eleman ne kadar küçük olursa olsun fonksiyonun kendisi ve maksimum türevinin elde edilebilme şartına denir. Yani deplasman fonksiyonları eleman içinde sürekli olmalıdır ve eleman boyutu küçültüldüğünde gerilme yayılımı sabit bir değere yaklaşmalıdır. Tamlık şartı sağlanamazsa fonksiyonun başına öyle bir polinom terimi eklenmelidir ki, integralde geçen türev mertebesi sağlansın.

Uygunluk şartı; herhangi bir noktada maksimum türev mertebesinin en az bir düşük derecesinin sürekli olması şartıdır.

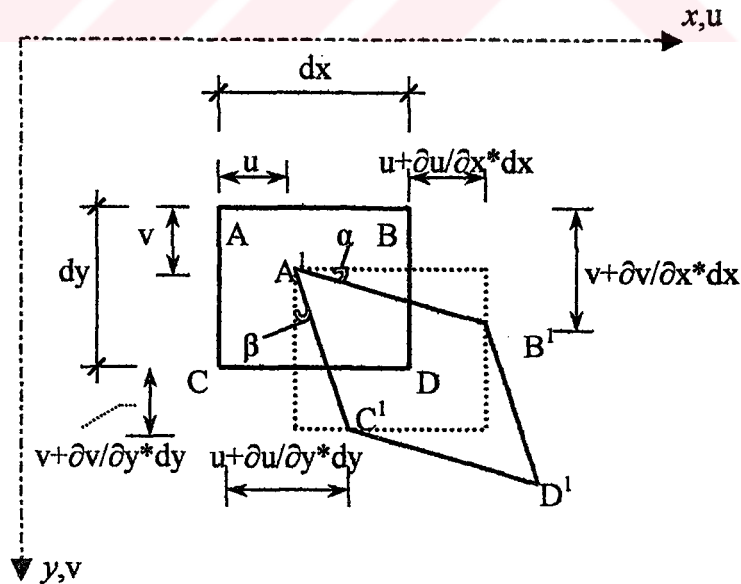
2. ELASTİSİTE BAĞINTILARI

Bölüm 1’de bahsettiğimiz gibi düğüm noktasındaki deplasman parametrelerinin bulunması eğilme hesabında plak kesit tesirlerinin bulunması için yeterlidir. Kesit tesirlerini bulabilmek için ise gerilmelerle, deformasyonlar (şekil değiştirmeler) arasındaki bağıntıları bilmemiz gerekmektedir.

Elastisite bağıntıları, elemanın malzemesi ile bu malzemenin dış etkiler altında tepki ve davranışlarını açıklar. Yani elastisite teorisi, elastik cisimde kuvvetlerin, yer değiştirmelerin, gerilmelerin ve şekil değiştirmelerin birbiriyle olan ilişkisini ortaya koyar.

Elastisite teorisi bu ilişkileri ortaya koyarken bir takım kabullere gider; incelenen malzeme lineer-elastiktir (yani gerilmelerle şekil değiştirmelerin ilişkisi doğrusaldır), malzeme homojen izotoptur (malzemenin mekanik özellikleri, E ve μ her doğrultuda aynıdır).

Elastisite teorisine göre bir cismin şekil değiştirmesi, bu cisme ait noktaların u, v, w yer değiştirmeler bileşenleri ile tariflenebilir. $A(x, y, z)$ noktasında meydana gelen yer değiştirmeler u, v, w ise buna komşu olan bir noktadaki yer değiştirmeler yalnızca diferansiyel kadar fark eder; $B(x+dx, y+dy, z+dz)$ noktası için $u \rightarrow u+du$, $v \rightarrow v+dv$, $w \rightarrow w+dw$.



Şekil 2.1 ABCD dikdörtgen elemanın şekil değiştirmesi

Şekil 2.1’de gösterilen yer değiştirme vektörleri bileşenlerinden faydalanarak aşağıdaki bağıntıları elde ederiz;

$$\varepsilon_x = A^1 B^1 - AB / AB \approx [(dx + \partial u / \partial x * dx) - dx] / dx = \partial u / \partial x \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_y = A^1 C^1 - AC / AC \approx [(dy + \partial v / \partial y * dy) - dy] / dy = \partial v / \partial y \quad (2.2)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx (\partial y / \partial x * dx / dx + \partial u / \partial y * dy / dy) = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y \quad (2.3)$$

$\varepsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ içinde aynı şekilde denklemler oluşturularak hesap yapılabilir.

Hooke Kanunu gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin birbirlerine şekil değiştirme bileşenleriyle bağlı olduğunu tanımlar. Hooke Kanunu'na göre gerilmelerin oluşturduğu şekil değiştirmeler, gerilmeyle doğru orantılı olacak şekilde E gibi bir sabit sayıyla orantılıdır;

$$\varepsilon = \sigma / E \quad (2.4)$$

Enine büzülmeyle, gerilme arasında ise E sabitinin yanında bir de μ sabitiyle tanımlanan bir doğrusallık vardır;

$$\varepsilon_q = -\mu \sigma / E \quad (2.5)$$

Bu denklemlerdeki E sabitine "Elastisite Modülü", μ sabitine ise "Poisson Oranı" ismi verilir.

Benzer düşünme tarzıyla kayma gerilmesi (τ) ile kayma şekil değiştirmesi (γ) arasında da bir sabitle doğrusallık kurulabilir;

$$\gamma = \tau / G \quad (2.6)$$

Buradaki G sabitine ise "Kayma Modülü" ismi verilir ve elastisite modülüyle;

$$G = E / 2 (1 + \mu) \quad (2.7)$$

gibi bir eşitliği vardır.

Hooke kanunu lineer bağıntılar kurduğuna göre farklı tesirleri bir araya getirerek süperpozisyon yapabiliriz. Buna göre normal gerilmeler ile şekil değiştirmeler arasında aşağıdaki gibi bir denklem yazılabilir;

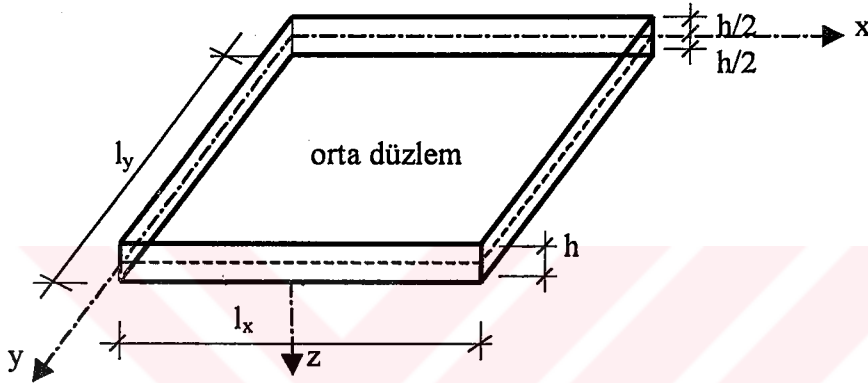
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] / E \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] / E \\ \varepsilon_z &= [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] / E \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. İNCE PLAK TEORİSİ

3.1 Tanım

Taşıyıcı sistemleri genel olarak üç grupta toplayabiliriz; doğrusal taşıyıcı sistemler (çubuk sistemler), yüzeysel taşıyıcı sistemler, uzay taşıyıcı sistemler.

Yüzeysel taşıyıcı sistemler içerisinde tanımlanan plaklar, kalınlığı diğer boyutlarına göre çok küçük olan ve orta düzlemine dik olarak yüklenmiş sistemlerdir.



Şekil 3.1 Plak ve koordinat sistemi

Belli başlı plak tipleri şunlardır;

- 1) Reissner plağı: Kalınlıktan doğan kayma şekil değiştirmeleri sabit bir değer olarak hesaba katılır (nispeten kalın plak).
- 2) Kármán plağı: İnce plak teorisine girer, çökmeler kalınlığa göre bir merteye büyüktür.
- 3) Kirchhoff plağı: İnce plak teorisine girer, çökmeler kalınlığa göre küçüktür.

Bu çalışmada Kirchhoff plağına göre sonlu eleman formülasyonu oluşturulacaktır.

3.2 Varsayımlar

İnce plak teorisinde eğilmenin tariflenebilmesi için, plak geometrisi yönünden, plak malzemesi yönünden ve plak denklemlerindeki bazı büyüklükler yönünden birtakım kabuller yapılmıştır;

a) Plak geometrisinde yapılan varsayımlar:

1. Plağın kalınlığı diğer iki boyutunun yanında çok küçüktür; $t \ll l_x, l_y$
2. Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlem oluşturur.
3. Plağın taşıdığı yükler orta düzlemine diktir.

4. Sehimler (çökmeler) plak kalınlığı yanında çok küçüktür; $w \ll t$

b) Plak malzemesi yönünden yapılan varsayımlar:

1. Malzeme homojendir (her noktada aynı fiziksel özellikleri gösterir).

2. Malzeme izotropdur (her doğrultuda aynı davranışı gösterir).

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E_x \quad \varepsilon_y = \sigma_y / E_y \quad E_x = E_y = E$$

3. Malzeme belirli sınırlar içinde Hooke kanununa uyan lineer-elastik bir malzemedir.

$$\varepsilon = \sigma / E \quad \gamma = \tau / G \quad k = 1 / E$$

b) Hesapları basitleştirme yönünden yapılan varsayımlar:

1. Deformasyondan önce orta düzlemin herhangi bir noktasının normali, deformasyondan sonra meydana gelen elastik yüzeyin aynı noktadaki normali olarak kalır.

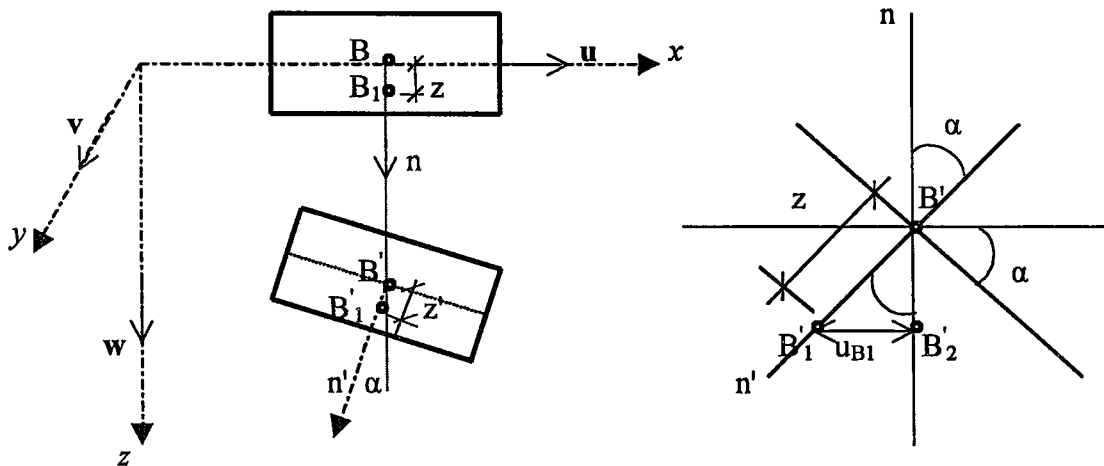
2. Plak orta düzlemine dik doğrultudaki σ_z normal gerilmeleri σ_x ve σ_y yanında yok sayılabilecek kadar küçüktür.

3. 2 nolu varsayıma bağlı olarak, elastisite teorisinden bilinen $\varepsilon_z = 1/E[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$ denkleminde $\varepsilon_z \approx 0$ alınabilir.

4. Kesitin orta düzleminde şekil değiştirme yoktur.

3.3 Diferansiyel Geometri

Bir plağı, deformasyondan (şekil değiştirme) önce ve deformasyondan sonra $y = \text{sabit}$ düzlemiyle keselim:



Şekil 3.2 Deformasyondan önce ve sonra plak elemanın şekli değişimi

Deformasyondan sonra Şekil 3.2'den de görüldüğü gibi, B noktası B' noktasına gelecek, B1 noktası B'1 konumunu alacaktır. α açısı çok küçük olduğu için $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$.

B noktası x ve y doğrultusunda deplasman yapmadığı için $u_B = v_B = 0$

$$|BB_1| = |B'B_1'| = z$$

$$|B'_1B_2| = |B'B_2| \tan \alpha$$

$$|B'B_2| = z \cos \alpha \approx z \text{ olduğuna göre;}$$

$$|B'_1B_2| = z \tan \alpha = z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$u_{B1} = u_B - z \frac{\partial w}{\partial x} = 0 - z \frac{\partial w}{\partial x} = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.1)$$

y doğrultusundaki deplasman içinde, benzer şekilde;

$$v_{B1} = v_B - z \frac{\partial w}{\partial y} = 0 - z \frac{\partial w}{\partial y} = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.2)$$

z derinliğinde birim boy değişimi ise şu şekildedir:

$$\begin{aligned} (\epsilon_x)_z &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_z = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} * z \\ (\epsilon_x)_z &= \frac{- \partial^2 w}{\partial x^2} * z \end{aligned} \quad (3.3.a)$$

$$(\epsilon_y)_z = \frac{- \partial^2 w}{\partial y^2} * z \quad (3.3.b)$$

z derinliğine bağlı olarak açı değişimi;

$$(\gamma_{xy})_z = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_z = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.4)$$

3.4 Gerilmelerle Yer Değiştirme Bileşenleri Arasındaki Bağlılıklar

Bölüm 2'de normal gerilmeler ile şekil değiştirmeler arasındaki bağıntıları tanımlamıştık;

$$\epsilon_x = [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] / E$$

$$\epsilon_y = [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] / E$$

$$\epsilon_z = [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] / E$$

İnce plak teorisine göre $\sigma_z \approx 0$ ve $\epsilon_z \approx 0$ olduğuna göre;

$$\epsilon_x = (1/E) (\sigma_x - \mu \sigma_y) \quad (3.5)$$

$$\epsilon_y = (1/E) (\sigma_y - \mu \sigma_x) \quad (3.6)$$

$$\gamma_{xy} = (1/G) \tau_{xy} \quad (3.7)$$

Bu denklemlerden gerilmeleri çekersek;

$$(\sigma_x)_z = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y)_z \quad (3.8)$$

$$(\sigma_y)_z = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x)_z \quad (3.9)$$

$$(\tau_{xy})_z = G (\gamma_{xy})_z \quad (3.10)$$

(3.8), (3.9) ve (3.10) denklemlerinin içine (3.3.a), (3.3.b) ve (3.4) denklemlerini yazarsak;

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_z &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ (\sigma_x)_z &= \frac{-E.z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Benzer şekilde;

$$(\sigma_y)_z = \frac{-E.z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.12)$$

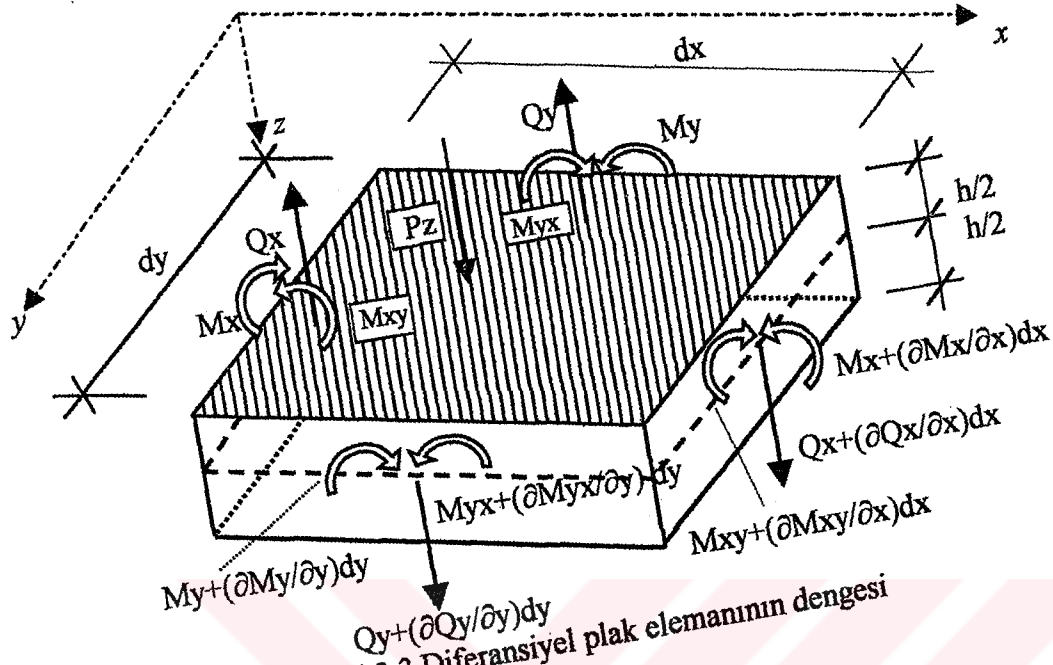
$$(\tau_{xy})_z = \frac{-E.z}{1+\mu} * \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.13)$$

3.5 Plak Elemanının Dengesi ve Plak Diferansiyel Denklemi

Şekil, sınır şartları ve üzerindeki yük belirli olan bir plağın analizini incelerken, sonlu elemanlar yönteminin asıl amacı Lagrange'ın ortaya koyduğu diferansiyel denklemin çözümü olduğuna göre, diferansiyel denklemin nasıl çıkartıldığını inceleyelim.

$P_z(x,y)$ yükünün etkisi altındaki bir plakta 6 temel denge denkleminden $\Sigma P_z = 0$, $\Sigma M_z = 0$, $\Sigma M_y = 0$ denklemleri kullanılarak plağın dengesi yazılabilir.

Plakların davranışında etkili olan kesit tesirleri; M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} , Q_x , Q_y olacağına göre diferansiyel bir elemanın serbest yüzeyine etki eden kesit tesirlerini Şekil 3.3'de gösterelim:



Şekil 3.3 Diferansiyel plak elemanın dengesi

Şekil 3.3'e göre $\Sigma P_z = 0$ dengesini yazarsak;

$$P_z dx dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -P_z \quad (3.15)$$

$\Sigma M_z = 0$ dengesini yazarsak;

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy dx - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx dx/2 - P_z dx dy dx/2 = 0 \quad (3.16)$$

3.derece terimler ihmal edilirse;

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (3.17)$$

Aynı şekilde $\Sigma M_y = 0$ dengesini yazarsak;

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (3.18)$$

Yukarıdaki (3.17) ve (3.18) denklemlerinin içine, yine diferansiyel eleman dengesi yardımıyla çıkartılabilen (1.2), (1.3) ve (1.4) bağıntıları yerleştirilirse, Q_x , Q_y 'nin w (çökme) cinsinden değerleri bulunabilir;

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) - D(1-\mu) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial^2 y \partial x} \right) \quad (3.19)$$

Aynı şekilde;

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial^2 x \partial y} \right) \quad (3.20)$$

Q_x ve Q_y 'nin (3.19) ve (3.20)'de bulunan değerleri (3.15)'de yerine yazılırsa P dış yükü ile deformasyonlar arasındaki diferansiyel denklem bulunmuş olur;

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) - D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) = -P_z \quad (3.21)$$

Gerekli sadeleştirmeleri yaparsak Lagrange (1816)'ın ortaya koyduğu plak diferansiyel denklemini oluştururuz;

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P_z}{D} \quad (3.22)$$

4. SONLU ELEMEN FORMÜLASYONU

4.1 Giriş

Sonlu elemanlar yöntemi, yapısal analizde matris-yer değiştirme metodunun geliştirilmiş şeklidir. Plakların analizinde sistem sonlu sayıda düzlemsel elemana ayrılır. Sistemi oluşturan bu elemanlara sonlu eleman denir ve birleştikleri köşe noktaları da düğüm noktası olarak adlandırılır. Sonlu eleman şeklinin, sürekli ortam şekline benzer olması düğüm noktalarının gerçek sistem üzerinde köşe noktalarına ve ayrıntılı incelenmek istenen diğer noktaların üzerine denk gelmesi yönünden avantajlıdır.

Ayrıca sistem üzerine etkiyen dış yüklerin, hayali çizgilerle oluşturduğumuz düğüm noktalarının üzerine gelmesi gerekmektedir. Çünkü sonlu eleman yüzeyinin şekil değiştirmesi, düğüm noktalarının deplasman parametrelerine göre ifade edilir. Yani dış yükler deplasman parametreleri; deplasman bileşenleri, dönmeler ve burulma eğriliği gibi deplasman vektörleriyle birlikte sonlu eleman formülasyonuna katılır.

Eğilme hesabında düğüm noktalarındaki deplasman parametrelerinin değerleri bulunmaya çalışılır. Böylece sistemin deplasman yüzeyi ve her düğüm noktasındaki iç kuvvetler bulunmuş olur.

4.2 Sonlu Eleman Şeklinin Seçimi

İncelememiz gereken sürekli plak, malzeme özellikleri orijinal plağın aynı olacak şekilde, düz veya eğri arakesitlerle hayali parçalara ayrılır. Plak şekilleri üçgen, kare, dikdörtgen, trapez veya değişik geometrik şekiller olabileceği için sonlu elemanlarımızda buna uyan şekillerden seçilebilir. Ancak düzgün ve simetrik elemanların, düzgün olmayan ve sivri kenarlı sonlu elemanlardan daha iyi sonuçlar verdiği unutulmamalıdır.

Bu çalışmada plak elemanı olarak dikdörtgen eleman incelenecektir. Elemanın her köşesinde bir deplasman bileşeni, ikide dönme olmak üzere 3 tane deplasman parametresi alınmıştır.

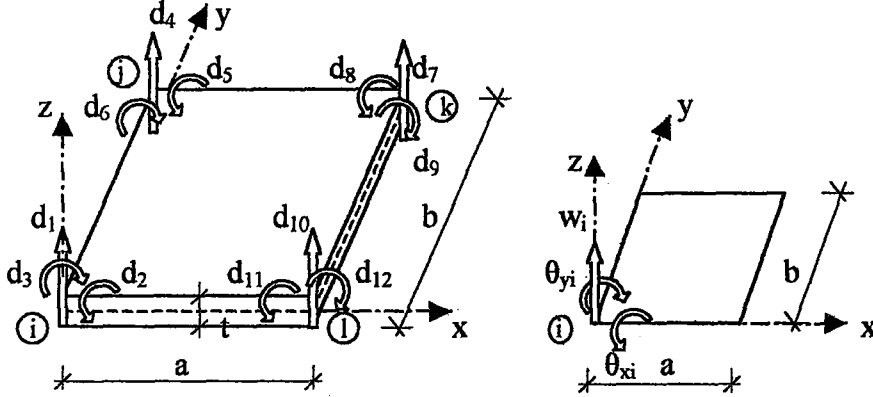
Bu halde elemanın (i) düğüm noktasındaki deplasman parametreleri;

$$\{d\}_i^T = [w, \theta_x, \theta_y]_i \text{ dir.} \quad (4.1)$$

Burada w; z eksenine doğrultusundaki öteleme, θ_x ; x eksenine etrafındaki dönme, θ_y ; y eksenine etrafındaki dönmedir. Böylece her bir elemanda toplam 12 tane serbestlik derecesi tarif

edilmiştir. Dikdörtgen plak elemanındaki deplasmanlar Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Seçilen dikdörtgen elemanın düğüm noktalarındaki deplasman parametreleri şöyledir;

$$\{d\}^T = [w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}, w_k, \theta_{xk}, \theta_{yk}, w_l, \theta_{xl}, \theta_{yl}] \quad (4.2)$$



Şekil 4.1 Dikdörtgen elemanda deplasman bileşenleri

4.3 Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi

Gerçek plak içersinde oluşturduğumuz sonlu elemanların yer değiştirme bileşenlerini düğüm noktalarına taşıyabilmek amacıyla, koordinatlara uygun şekilde deplasman fonksiyonları seçilir. Deplasman fonksiyonları, rijit cisim hareketi ve sabit deformasyon şartını sağlayacak şekilde, ya polinomlardan faydalanılarak yada tabii koordinatların fonksiyonu şeklinde oluşturulur.

Genellikle hesap kolaylığı bakımından polinomlardan yararlanılır. Polinomlar geometrik uygunluğu iyi sağladığı gibi türev ve integral işlemlerinde kolaylık sağlar. Geometrik uygunluğu sağlamak için seçilecek polinomun terim sayısının, sonlu elemandaki toplam deplasman sayısına eşit olması gerekir. Buna göre bir elemanda deplasman parametresi sayısı ne kadar çoğalırsa seçilecek polinomun katsayısı o kadar yükselecek ve çözümdeki idealleştirme hataları o kadar azalacaktır. Buna karşılık bilinmeyen sayısı artacak ve problemin çözüm süresi artacaktır. Bu sebepten, sonlu eleman büyüklüğünün seçiminde ve her elemandaki deplasman parametreleri sayısında iyi bir denge kurulmalıdır.

Çalışmamızda kullandığımız dikdörtgen sonlu eleman için seçilen deplasman fonksiyonu şu şekildedir:

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3 \quad (4.3)$$

Buradaki 'a' bilinmeyen katsayılarını {a}, düğüm noktası deplasmanlarını {d} ile gösterirsek bu iki matrisin arasında şöyle bir bağıntı yazabiliriz;

$$\{d\} = [A] \{a\} \quad (4.4)$$

Bu iki matris arasındaki bağı verecek olan $[A]$ matrisi, elemanın deplasman fonksiyonlarında ve onların türevleri ile elde edilebilen diğer deplasman bileşenlerinde, düğüm noktası koordinatlarının yerine yazılmasıyla elde edilir;

Deplasman fonksiyonu ve türevleri;

$$\begin{aligned} w &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3 \\ \partial w / \partial y &= \theta_x = a_3 + a_5 x + 2a_6 y + a_8 x^2 + 2a_9 xy + 3a_{10} y^2 + a_{11} x^3 + 3a_{12} xy^2 \\ -\partial w / \partial x &= \theta_y = -a_2 - 2a_4 x - a_5 y - 3a_7 x^2 - 2a_8 xy - a_9 y^2 - 3a_{11} x^2 y - a_{12} y^3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dikdörtgen elemanın düğüm noktası koordinatları: $i(0,0)$, $j(0,b)$, $k(a,b)$, $l(a,0)$

Bu koordinatlar (4.5)'de yerine konularak oluşturulan $[A]$, (Çizelge 4.1)'de gösterilmiştir;

Çizelge 4.1 $[A]$ Bağ matrisi

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & (-b) & 0 & 0 & 0 & (-b^2) & 0 & 0 & (-b^3) \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2 b & ab^2 & b^3 & a^3 b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & (-2a) & (-b) & 0 & (-3a^2) & (-2ab) & (-b^2) & 0 & (-3a^2 b) & (-b^3) \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & (-2a) & 0 & 0 & (-3a^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[A]$ bağ matrisi bu şekilde hesaplandıktan sonra (4.4)'de bilinmeyen olarak yalnız $\{d\}$ deplasman parametreleri kalır. $\{a\}$ polinom katsayıları, $\{d\}$ deplasman parametreleri cinsinden hesaplanır;

$$\{d\} = [A] \{a\}$$

$$\{a\} = [A]^{-1} \{d\} \quad (4.6)$$

$$\{B\} = [A]^{-1} \text{ dersek} \quad (4.7)$$

$$\{a\} = [B] \{d\} \quad (4.8)$$

4.4 Şekil Fonksiyonlarının Hesabı

(4.3)'de seçtiğimiz deplasman fonksiyonu şu şekildeydi;

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3y + a_{12} xy^3$$

Bu ifade x ve y' ye bağlı olduğuna göre, (4.9)'daki gibi gösterebiliriz;

$$w = [\Phi(x,y)] \{a\} \quad (4.9)$$

(4.8) eşitliğini (4.9)'da yerine koyalım;

$$w = [\Phi(x,y)] [B] \{d\} \quad (4.10)$$

Burada $[\Phi(x,y)] [B]$ terimi deplasman fonksiyonunda, sonlu elemanın geometrik şekliyle ilgili olan terimdir ve şekil fonksiyonu olarak adlandırılır. Çalışmamızda şekil fonksiyonlarını 'N' ile göstereceğiz. Sonlu eleman için deplasman parametresi sayısı kadar şekil fonksiyonu elde edilir. Öyle ki, bir düğüm noktasında d_1, d_2, d_3 deplasman parametrelerine karşılık gelen N_1, N_2, N_3 şekil fonksiyonları tanımlanır.

Şekil fonksiyonları, eleman şekli ve boyutu değişmediği sürece her eleman için aynıdır. Boyutları a,b olan dikdörtgen sonlu eleman için N_1 şekil fonksiyonunu çıkartalım;

$$[N] = [\Phi(x,y)] [B] \text{ idi,} \quad (4.11)$$

(4.7)'ye göre $[A]$ 'nın inversini alırsak;

Çizelge 4.2 $[A]$ Bağ matrisinin inversi

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/a^2 & 0 & -2/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/ab & 1/a & -1/b & 1/ab & 0 & 1/b & -1/ab & 0 & 0 & 1/ab & -1/a & 0 \\ -3/b^2 & 2/b & 0 & 3/b^2 & 1/b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/a^3 & 0 & 1/a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/a^3 & 0 & 0 \\ 3/a^2b & 0 & 2/ab & -2/a^2b & 0 & -2/ab & 3/a^2b & 0 & -1/ab & -3/a^2b & 0 & 1/ab \\ 3/ab^2 & -2/ab & 0 & -3/ab^2 & -1/ab & 0 & 3/ab^2 & 1/ab & 0 & -3/ab^2 & 2/ab & 0 \\ 2/b^3 & -1/b^2 & 0 & -2/b^3 & -1/b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/a^3b & 0 & -1/a^2b & 2/a^3b & 0 & 1/a^2b & -2/a^3b & 0 & 1/a^2b & 2/a^3b & 0 & -1/a^2b \\ -2/ab^3 & 1/ab^2 & 0 & 2/ab^3 & 1/ab^2 & 0 & -2/ab^3 & -1/ab^2 & 0 & 2/ab^3 & -1/ab^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi(x,y)] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, y^3, x^3y, xy^3] \quad (4.12)$$

(4.11) denkleminde $[\Phi(x,y)]$ 'nin yukarıdaki değeri yerine yazılırsa, $[N]$ şekil fonksiyonları bulunur;

Boyutsuz çalışmak için $x/a = \xi$, $y/b = \eta$ diyelim:

(1) düğüm noktasında, $\xi=0$, $\eta=0$ için;

$$N_1 = 1 - \xi\eta - (3-2\xi)\xi^2(1-\eta) - (1-\xi)(3-2\eta)\eta^2$$

$$N_2 = (1-\xi)\eta(1-\eta)^2 b$$

$$N_3 = -\xi(1-\xi)^2(1-\eta)a$$

(2) düğüm noktasında, $\xi=0$, $\eta=1$ için;

$$N_4 = (1-\xi) - (3-2\eta)\eta^2 + \xi(1-\xi)(1-2\xi)\eta$$

$$N_5 = -(1-\xi)(1-\eta)\eta^2 b$$

$$N_6 = -\xi(1-\xi)^2\eta a$$

(3) düğüm noktasında, $\xi=1$, $\eta=1$ için;

$$N_7 = (3-2\xi)\xi^2\eta - \xi\eta(1-\eta)(1-2\eta)$$

$$N_8 = -\xi(1-\eta)\eta^2 b$$

$$N_9 = (1-\xi)\xi^2\eta a$$

(4) düğüm noktasında, $\xi=1$, $\eta=0$ için;

$$N_{10} = (3-2\xi)\xi^2(1-\eta) + \xi\eta(1-\eta)(1-2\eta)$$

$$N_{11} = \xi\eta(1-\eta)^2 b$$

$$N_{12} = (1-\xi)\xi^2(1-\eta)a \quad (4.13)$$

Yukarıda dikdörtgen sonlu eleman için hesaplanan şekil fonksiyonları, eleman şekli ve boyutu değişmediği sürece her elemanda aynıdır. Herhangi bir sonlu elemanın içinde veya sınırları üzerinde bir noktanın deplasman vektörü $\{u\}$ olsun;

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix} = [\Phi(x,y)] \{a\} \quad (4.14)$$

(4.8) denklemindeki $\{a\}$, (4.14)'de yerine yazılırsa;

$$\{u\} = [\Phi(x,y)] [B] \{d\} \quad (4.15)$$

(4.11)'e göre $[N] = [\Phi(x,y)] [B]$ olduğuna göre, $\{u\}$ vektörü şu hali alır;

$$\{u\} = [N] \{d\} \quad (4.16)$$

Deplasman vektörünü, şekil fonksiyonları cinsinden tanımladıktan sonra şekil değiştirme- yer değiştirme bağıntılarını yazabiliriz.

4.5 Şekil Değiştirme – Yer Değiştirme Bağlılıları

İnce plak için lineer şekil değiştirme – yer değiştirme bağıntısı şöyledir;

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

(4.17)'yi matris notasyonu ile yazarsak;

$$\{\varepsilon\} = [\Delta]\{u\} \quad (4.18)$$

(4.16)'daki $\{u\}$ değeri yerine yazılırsa,

$$\{\varepsilon\} = [\Delta][N]\{d\} = [\Delta N]\{d\} \quad (4.19)$$

Burada $[\Delta N]$ şekil fonksiyonlarının x 'e, y 'ye ve xy 'ye göre ikinci türevlerinden oluşan matristir ve şu şekilde hesaplanır:

$$[\Delta N] = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} [N_i] \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} [N_i] \\ -\frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} [N_i] \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} -N_{1,xx} & -N_{2,xx} & \dots & -N_{12,xx} \\ -N_{1,yy} & -N_{1,yy} & \dots & -N_{12,yy} \\ -2N_{1,xy} & -2N_{2,xy} & \dots & -2N_{12,xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ d_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

(4.13)'de boyutsuz çalışmak için şekil fonksiyonlarını ξ ve η cinsinden hesaplamıştık, şimdi x 'e, y 'ye ve xy 'ye göre türev alma işlemlerini kolaylaştırmak için Jacobi Transformasyonu'nu kullanacağız,

Jacobi Transformasyonu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$\xi = x/a$, $\eta = y/b$ olduğuna göre,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Buna göre örnek olarak N_1 şekil fonksiyonunun ikinci türevleri;

$$\begin{aligned} -N_{1,xx} &= \frac{-\partial^2 N_1}{\partial x^2} = \frac{-1}{a^2} \frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi^2} = (1-2\xi)(1-\eta) \frac{6}{a^2} \\ -N_{1,yy} &= \frac{-\partial^2 N_1}{\partial y^2} = \frac{-1}{b^2} \frac{\partial^2 N_1}{\partial \eta^2} = (1-\xi)(1-2\eta) \frac{6}{b^2} \\ -2N_{1,xy} &= \frac{-2\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{-2}{ab} \frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi \partial \eta} = [1-6\xi(1-\xi)-6\eta(1-\eta)] \frac{2}{ab} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aynı şekilde tüm şekil fonksiyonlarının ikinci türevleri hesaplanarak Çizelge 4.3'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.3 Şekil fonksiyonlarının 2.türevleri

$$[\Delta N]^T = \begin{bmatrix} (1-2\xi)(1-\eta)(6/a^2) & (1-\xi)(1-2\eta)(6/b^2) & [1-6\xi(1-\xi)-6\eta(1-\eta)](2/ab) \\ 0 & (1-\xi)(2-3\eta)(2/b) & (1-3\xi)(1-\eta)(2/a) \\ -(2-3\xi)(1-\eta)(2/a) & 0 & -(1-3\xi)(1-\xi)(2/b) \\ (1-2\xi)\eta(6/a^2) & -(1-\xi)(1-2\eta)(6/b^2) & [-1+6\xi(1-\xi)+6\eta(1-\eta)](2/ab) \\ 0 & (1-\xi)(1-3\eta)(2/b) & -\eta(2-3\eta)(2/a) \\ -(2-3\xi)\eta(2/a) & 0 & (1-3\xi)(1-\xi)(2/b) \\ -(1-2\xi)\eta(6/a^2) & -\xi(1-2\eta)(6/b^2) & [1-6\xi(1-\xi)-6\eta(1-\eta)](2/ab) \\ 0 & \xi(1-3\eta)(2/b) & \eta(2-3\eta)(2/a) \\ -(1-3\xi)\eta(2/a) & 0 & -\xi(2-3\xi)(2/b) \\ -(1-2\xi)(1-\eta)(6/a^2) & \xi(1-2\eta)(6/b^2) & [-1+6\xi(1-\xi)+6\eta(1-\eta)](2/ab) \\ 0 & \xi(2-3\eta)(2/b) & -(1-3\eta)(1-\eta)(2/a) \\ -(1-3\xi)(1-\eta)(2/a) & 0 & \xi(2-3\xi)(2/b) \end{bmatrix}$$

Burada ilk sütun terimleri x'e göre türev, ikinci sütun y'ye göre, üçüncü sütun ise xy'ye göre alınan türevleri ifade etmektedir.

4.6 Kesit Tesirleri – Yer Değiştirme Bağlıları

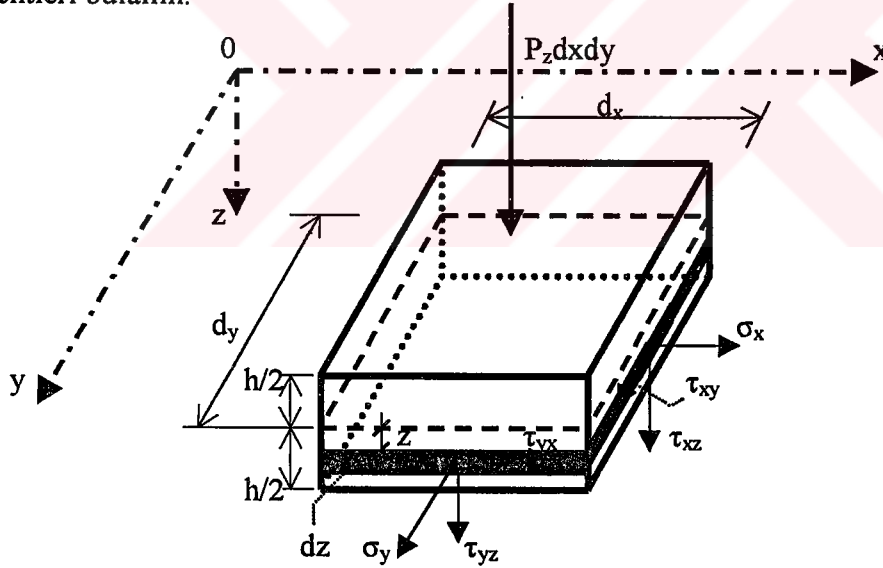
Bölüm 3.5'de gerilmelerle yer değiştirme bileşenleri arasındaki bağlantıları çıkarmıştık;

$$(\sigma_x)_z = \frac{-E.z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$(\sigma_y)_z = \frac{-E.z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$(\tau_{xy})_z = \frac{-E.z}{1+\mu} * \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Bağıntılardan da görüldüğü gibi gerilmeler kesit yüksekliğince lineer olarak değişmektedir. Kesit tesirleri ile şekil değiştirmeler arasındaki bağlantılar için gerilmelerin bileşkesi olarak momentleri bulalım.



Şekil 4.2 Plak elemanında gerilmeler

Şekil 4.2'de görülen gerilme bileşenlerini birim boyda etki eden momentler cinsinde yazabiliriz;

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dy dz = dy \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -\frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$M_x = - \frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{h^3}{12} = \frac{-E h^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.26)$$

Benzer şekilde,

$$M_y = - \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4.27)$$

$$M_{xy} = - \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} (1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.28)$$

Denklemlerdeki $1 \cdot h^3 / 12$ ifadesi plak atalet momentinin birim genişlik için olan değeridir.

Buna göre;

$$\sigma_x = (M_x / I) z \quad \sigma_y = (M_y / I) z \quad \tau_{xy} = (M_{xy} / I) z \quad (4.29)$$

D (plağın eğilme rijitliği) = $EI / (1-\mu^2)$ olarak tanımlanırsa,

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.30.a)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4.30.b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.31)$$

Böylece kesit tesirleri ile yer değiştirmeler arasındaki bağıntıları çıkarmış olduk. Şimdi bu denklemleri matris formunda yazalım;

Malzeme homojen izotrop ise [D] elastisite matrisi:

$$[D] = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

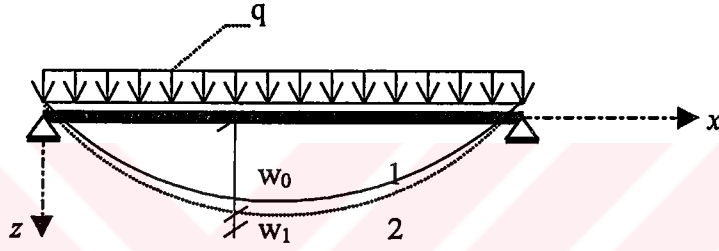
$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{-\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{-2 \partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

4.7 Toplam Potansiyel Enerji

Toplam potansiyel enerji prensibi geometrik açıdan lineer veya unlineer sistemlere uygulanabilir. Ancak malzeme açısından yani fiziksel açıdan yalnız lineer sistemlere uygulanabilir.

Çalışmamızın konusunu oluşturan eğilme problemi, toplam potansiyel enerjinin birinci varyasyonu prensibine dayanır.

Toplam potansiyel enerji, lineer veya unlineer sistemin hakiki denge konumunda bir maksimum veya minimum değerden geçer. Böylece eğilme problemimiz, belirli bir integral ifadeyi ekstrem yapan bu konumun bulunmasına indirgenmiş olur.



Şekil 4.3 Yayılı yüküyle yüklü basit kirişteki deplasman

Şekil 4.3’de görülen q yayılı yüküyle yüklü basit kirişin boyu L olsun; toplam potansiyel enerji, iç kuvvetlerin potansiyel enerjisi ile dış kuvvetlerin potansiyel enerjilerinin toplamına eşittir:

$$V = U + W \quad (4.34)$$

Kesme kuvvetlerini ihmal ederek iç kuvvetlerin potansiyel enerjisini yazarsak;

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

M momentini w deplasmanı cinsinden, $M = -EIw''$ şeklinde yazabileceğimize göre;

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L (w'')^2 dx \quad (4.35)$$

Aynı şekilde dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi;

$$W = - \int_0^L qw dx$$

(4.34)’ e göre toplam potansiyel enerji,

$$V = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (w'')^2 - qw \right] dx \quad (4.36)$$

Şekil 4.4'de görüldüğü gibi (1) gerçek denge durumuna çok yakın ikinci bir denge durumu daha alalım (2). Burada w_1 ikinci denge durumunu yaratmak için verilen sonsuz küçük artırımdır. Buna göre deplasmandaki artırımlar ve toplam potansiyel enerjinin varyasyonları aşağıdaki gibidir;

$$u = u_0 + u_1$$

$$v = v_0 + v_1$$

$$w = w_0 + w_1$$

(u_0, v_0, w_0) , denge konumuna karşı gelen deplasmanları,

(u_1, v_1, w_1) , 2. konumu elde etmek için verilen artırımlar,

(u, v, w) , 2. konuma karşı gelen deplasmanlar.

Buna göre toplam potansiyel enerji şu şekildedir:

$V(u, v, w) = V(u_0 + u_1, v_0 + v_1, w_0 + w_1) \rightarrow$ 2. konumdaki toplam potansiyel enerji.

$V(u_0, v_0, w_0) \rightarrow$ 1. durumdaki toplam potansiyel enerji.

$\Delta V = V(u_0 + u_1, v_0 + v_1, w_0 + w_1) - V(u_0, v_0, w_0) \rightarrow$ toplam potansiyel enerjideki değişim.

Potansiyel enerjideki değişimi seriye açarsak,

$$\Delta V = \delta V + (1/2!) \delta^2 V + (1/3!) \delta^3 V + (1/4!) \delta^4 V \dots \dots \dots \quad (4.37)$$

(4.37) denklemindeki ilk terim denge denklemini veren potansiyel enerjinin 1.varyasyonu ile ilgilidir. 2.terim ise stabilite denklemlerini veren potansiyel enerjinin 2.varyasyonudur.

Çalışmamızda eğilme hesabı yapacağımıza göre δV (potansiyel enerjinin 1.varyasyonu)'u kullanacağız.

İç kuvvetlerin virtüel işini δU , dış kuvvetlerin işinide δW ile gösterelim. Tabii durum için gerçek yükleme, i birim durumu ise virtüel yer değiştirme ve virtüel şekil değiştirme durumu olarak alınırsa;

$$\delta U = \int_V \{ \delta \epsilon \}^T \sigma dV \quad (4.38)$$

$$\{ \sigma \} = [D] (\{ \epsilon \} - \{ \epsilon_0 \}) + \{ \sigma_0 \} - \alpha \Delta t \{ D_T \} \quad (4.39)$$

$[D]$: malzemenin elastisite matrisi

$\{ \epsilon_0 \}$: başlangıç şekil değiştirmesi

$\{ \sigma_0 \}$: başlangıç gerilmesi

α : genleşme katsayısı

Δt : sıcaklık değişmesi

$\{D_T\}$: sıcaklık elastisite matrisi

(4.39) denklemini (4.38)'de yerine yazarsak;

$$\delta U = \int_V \{\delta \epsilon\}_i^T [D] \{\epsilon\} dV - \int_V \{\delta \epsilon\}_i^T [D] \{\epsilon_0\} dV + \int_V \{\delta \epsilon\}_i^T \{\sigma_0\} dV - \int_V \{\delta \epsilon\}_i^T \alpha \Delta t \{D_T\} dV \quad (4.40)$$

Aynı şekilde,

u : Deplasmanı

X : kütleli kuvveti

p : yüzeysel yükü

q : çizgisel yükü

P : tekil yükü

c : elastik yataklanma katsayısını göstermek üzere dış kuvvetlerin virtüel işi;

$$\delta W = \int_V \{\delta u\}_i^T \{X\} dV + \int_F \{\delta u\}_i^T \{p\} dF + \int_S \{\delta u\}_i^T \{q\} ds + \{d\}^T P - \int_F c \{\delta w\}_i^T \{w\} dF \quad (4.41)$$

u (deplasman) ve ϵ (şekil değiştirme)'nin, sırasıyla (4.16) ve (4.19)'da çıkartılan değerlerine göre;

$$\delta u = [N] \{\delta d\} \quad (4.42)$$

$$\delta \epsilon = [\Delta N] \{\delta d\} \quad (4.43)$$

(4.42) ve (4.43) denklemlerini sırasıyla (4.40) ve (4.41)'de yerlerine yazıp, iç kuvvetlerle dış kuvvetlerin eşitliğini gösterirsek;

$$\begin{aligned} & \{\delta d\}^T \left[\int_V [\Delta N]^T [D] [\Delta N] dV \right] \{d\} + \{\delta d\}^T \left[\int_V [\Delta N]^T \sigma_0 dV \right] - \{\delta d\}^T \left[\int_V [\Delta N]^T [D] \{\epsilon_0\} dV \right] \\ & - \{\delta d\}^T \left[\alpha \Delta t \int_V [\Delta N]^T [D_T] dV \right] = \{\delta d\}^T \{P\} + \{\delta d\}^T \left[\int_S [N]^T \{q\} ds \right] + \{\delta d\}^T \left[\int_F [N]^T \{p\} dF \right] \\ & + \{\delta d\}^T \left[\int_V [N]^T \{X\} dV \right] - \{\delta d\}^T \left[c \int_F [N(w)]^T [N(w)] dF \right] \{d\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

(4.44)'ü matris formda yazarsak;

$$[k_e] \{d\} + [s_e] \{d\} = P + \{q_e\}_q + \{q_e\}_p + \{q_e\}_x + \{q_e\}_{\sigma_0} + \{q_e\}_{\epsilon_0} + \{q_e\}_T \quad (4.45)$$

Burada,

$\{d\}$: eleman deplasman parametreleri

$\{q_e\}_T, \{q_e\}_{\epsilon_0}, \{q_e\}_{\sigma_0}, \{q_e\}_x, \{q_e\}_p, \{q_e\}_q$: elemana etkiyen sıcaklık değişimi, şekil değiştirmeleri, başlangıç gerilmeleri, kütleli yük, yüzeysel yük, çizgisel yük ile ilgili terimler.

P : elemana etkiyen tekil yük

$$[k_e] = \int_V [\Delta N]^T [D] [\Delta N] dV : \text{eleman rijitlik matrisi} \quad (4.46)$$

$$[s_e] = c \int_F [N(w)]^T [N(w)] dF : \text{eleman elastik yataklanma matrisi} \quad (4.47)$$

Şimdi sırasıyla, elastik zemine oturan, nervürlü plak için $[k_e]$ eleman rijitlik matrisini ve $[s_e]$ elastik yataklanma matrisini bulalım.

4.8 Eleman Rijitlik Matrisinin Bulunuşu

(4.46)'da bulunan eleman rijitlik matrisi dengede olan herhangi bir cisim için genel bir ifadedir. Bu ifadeyi, plaklar yüzeysel taşıyıcı sistemler olduğu için şu şekilde yazabiliriz;

$$[k_e] = \iint [\Delta N]^T [D] [\Delta N] dx dy \quad (4.48)$$

Boyutsuz çalışmak için $\xi=(x/a)$ $\eta=(y/a)$ değişimi yaparsak;

$$|J| = \begin{vmatrix} (\partial x / \partial \xi) & (\partial x / \partial \eta) \\ (\partial y / \partial \xi) & (\partial y / \partial \eta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \end{vmatrix}$$

$$dx dy = a.b.d\xi d\eta$$

$$[k_e] = ab \int_0^1 \int_0^1 [\Delta N]^T [D] [\Delta N] d\xi d\eta \quad (4.49)$$

Yukarıdaki denklemde $[\Delta N]$ değerlerini biliyoruz. Nervürlü plak için sonlu eleman formülasyonunu çıkartmak istiyoruz. Şekil fonksiyonları plağın tipine değil, plak elemanının şekline bağlı olduğu için $[\Delta N]$ için Çizelge 4.3'de dikdörtgen eleman için bulduğumuz değerleri kullanabiliriz.

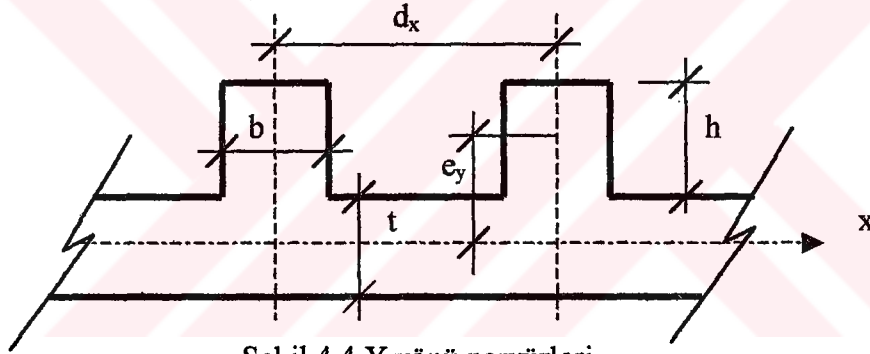
$[D]$ elastisite matrisi değerleri ise nervürlü plak için, (4.32)'de bulunan değerinden farklıdır. Nervürlü plakların elastisite matrisinde, nervür etkilerini de göz önüne almak için, (4.32)'deki değerleri de içine alan C_{ij} rijitlik parametreleri kullanılır. Bu rijitlik parametreleri nervür etkisinin deneylerle araştırılması sonucu bulunabildiği gibi, plak ve nervürlerin E ve μ elastisite sabitlerine bağlı olarak da hesaplanabilir.

Nervürlerin tek yönde olmasına, nervürlerin çift yönde olmasına, plak ve nervürün aynı malzemeden yapılıp yapılmadığına, nervürlerin plak ortalama yüzeyine göre simetrik olup olmamasına göre değişen C_{ij} rijitlik parametrelerini matris formunda şu şekilde yazalım;

$$[D] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Çalışmamızda örnek olarak çözümleyeceğimiz sistemde çift yönde nervür, plak ve nervürler aynı malzemeden, nervürler plak ortalama yüzeyine göre simetrik olmadığı için C_{ij} rijitlik parametrelerinin değerleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= D + \frac{E(I_x + e_x^2 A_x)}{d_x} \\
 C_{12} &= C_{21} = \mu D \\
 C_{13} &= C_{31} = 0 \\
 C_{22} &= D + \frac{E(I_y + e_y^2 A_y)}{d_y} \\
 C_{23} &= C_{32} = 0 \\
 C_{33} &= (1-\mu)D + \frac{1}{2} \left(\frac{GJ_x}{d_x} + \frac{GJ_y}{d_y} \right)
 \end{aligned} \tag{4.50}$$



Şekil 4.4 Y yönü nervürleri

Burada,

$$A_i (\text{nervür alanı}) = b_i h_i$$

$$I_i (\text{nervür atalet momenti}) = (1/12) b_i h_i^3$$

$$J_i = \min(1/3) b_i h_i^3 \quad (b_i \text{ ve } h_i \text{ den hangisi küçükse o alınır})$$

$$e_i = (1/2) (h_i + t)$$

(4.59)'daki C_{ij} rijitlik parametrelerini şu şekilde yazalım;

$$C_{11} = D + D_x \quad C_{12} = \mu D \quad C_{22} = D + D_y \quad C_{33} = (1-\mu)D + D_1$$

O halde gerçek elastisite matrisimiz;

$$[D] = \begin{bmatrix} D + D_x & \mu D & 0 \\ \mu D & D + D_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)D + D_1 \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

Problemin şekline göre rijitlik parametreleri yukardaki gibi hesaplanıp, nervürlü plak için $[D]$ elastisite matrisi oluşturulduktan sonra (4.49)'a göre;

$$[k_e] = ab \int_0^1 \int_0^1 [\Delta N]^T [D] [\Delta N] d\xi d\eta$$

$[\Delta N]$ 'in Çizelge 4.3'deki değerleri, $[D]$ 'nin (4.51)'de hesaplanan değerleri alınarak, 0-1 arasında çift katlı integralleri sonucunda eleman rijitlik matrisin terimleri bulunur:

$$k_{1,1} = 4b/a^3 (D + D_x) + 2vD/ab + 4a/b^3 (D + D_y) + 5.6/ab [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,2} = -vD/a - 2a/b^2 (D + D_y) - 0.4/a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,3} = 2b/a^2 (D + D_x) + vD/b + 0.4/b [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,4} = -4b/a^3 (D + D_x) - 2vD/ab + 2a/b^3 (D + D_y) - 5.6/ab [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,5} = vD/a - a/b^2 (D + D_y) + 0.4/a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,6} = 2b/a^2 (D + D_x) + 0.4/b [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,7} = -2b/a^3 (D + D_x) + 2vD/ab - 2a/b^3 (D + D_y) + 5.6/ab [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,8} = -a/b^2 (D + D_y) + 0.4/a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,9} = b/a^2 (D + D_x) - 0.4/b [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,10} = 2b/a^3 (D + D_x) - 2vD/ab - 4a/b^3 (D + D_y) - 5.6/ab [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,11} = -2a/b^2 (D + D_y) - 0.4/a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{1,12} = b/a^2 (D + D_x) - vD/b - 0.4/b [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{2,2} = 4a/3b (D + D_y) + 8b/15a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{2,3} = -vD$$

$$k_{2,4} = vD/a - a/b^2 (D + D_y) + 0.4/a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{2,5} = 4a/6b (D + D_y) - 8b/15a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{2,6} = 0$$

$$k_{2,7} = a/b^2 (D + D_y) - 0.4/a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{2,8} = a/3b (D + D_y) + 2b/15a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{2,9} = 0$$

$$k_{2,10} = 2a/b^2 (D + D_y) + 0.4/a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{2,11} = 2a/3b (D + D_y) - 2b/15a [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{2,12} = 0$$

$$k_{3,3} = 4b/3a (D + D_x) + 8a/15b [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{3,4} = -2b/a^2 (D + D_x) - 0.4/b [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{3,5} = 0$$

$$k_{3,6} = 2b/3a (D + D_x) - 2a/15b [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{3,7} = -b/a^2 (D + D_x) + 0.4/b [(1-v)D/2 + D_1]$$

$$k_{3,8} = 0$$

$$k_{3,9} = b / 3a (D + D_x) + 2a / 15b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{3,10} = b / a^2 (D + D_x) - \nu D / b - 0.4 / b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{3,11} = 0$$

$$k_{3,12} = 2b / 3a (D + D_x) - 8a / 15b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{4,4} = 4b / a^3 (D + D_x) + 2\nu D / ab + 4a / b^3 (D + D_y) + 5.6 / ab [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{4,5} = -\nu D / a - 2a / b^2 (D + D_y) - 0.4 / a [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{4,6} = -2b / a^2 (D + D_x) - \nu D / b - 0.4 / b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{4,7} = 2b / a^3 (D + D_x) - 2\nu D / ab - 4a / b^3 (D + D_y) - 5.6 / ab [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{4,8} = -2a / b^2 (D + D_y) - 0.4 / a [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{4,9} = -b / a^2 (D + D_x) + \nu D / b + 0.4 / b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{4,10} = -2b / a^3 (D + D_x) + 2\nu D / ab - 2a / b^3 (D + D_y) + 5.6 / ab [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{4,11} = -a / b^2 (D + D_y) + 0.4 / a [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{4,12} = -b / a^2 (D + D_x) + 0.4 / b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{5,5} = 4a / 3b (D + D_y) + 4.8b / 9a [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{5,6} = \nu D$$

$$k_{5,7} = 2a / b^2 (D + D_y) + 0.4 / a [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{5,8} = 2a / 3b (D + D_y) - 2b / 15a [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{5,9} = 0$$

$$k_{5,10} = a / b^2 (D + D_y) - 0.4 / a [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{5,11} = a / 3b (D + D_y) + 2b / 15a [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{5,12} = 0$$

$$k_{6,6} = 4b / 3a (D + D_x) + 8a / 15b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{6,7} = -b / a^2 (D + D_x) + \nu D / b + 0.4 / b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{6,8} = 0$$

$$k_{6,9} = 2b / 3a (D + D_x) - 8a / 15b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{6,10} = b / a^2 (D + D_x) - 0.4 / b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{6,11} = 0$$

$$k_{6,12} = b / 3a (D + D_x) + 2a / 15b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{7,7} = 4b / a^3 (D + D_x) + 2\nu D / ab + 4a / b^3 (D + D_y) + 5.6 / ab [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{7,8} = \nu D / a + 2a / b^2 (D + D_y) + 0.4 / a [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{7,9} = -2b / a^2 (D + D_x) - \nu D / b - 0.4 / b [(1-\nu)D / 2 + D_1]$$

$$k_{7,10} = -4b / a^3 (D + D_x) - 2vD / ab + 2a / b^3 (D + D_y) - 5.6 / ab [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{7,11} = -vD / a + a / b^2 (D + D_y) - 0.4 / a [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{7,12} = -2b / a^2 (D + D_x) - 0.4 / b [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{8,8} = 4a / 3b (D + D_y) + 8b / 15a [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{8,9} = -vD$$

$$k_{8,10} = -vD / a + a / b^2 (D + D_y) - 0.4 / a [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{8,11} = 2a / 3b (D + D_y) - 8b / 15a [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{8,12} = 0$$

$$k_{9,9} = 4b / 3a (D + D_x) + 8a / 15b [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{9,10} = 2b / a^2 (D + D_x) + 0.4 / b [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{9,11} = 0$$

$$k_{9,12} = 2b / 3a (D + D_x) - 2a / 15b [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{10,10} = 4b / a^3 (D + D_x) + 2vD / ab + 4a / b^3 (D + D_y) + 5.6 / ab [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{10,11} = vD / a + 2a / b^2 (D + D_y) + 0.4 / a [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{10,12} = 2b / a^2 (D + D_x) + vD / b + 0.4 / b [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{11,11} = 4a / 3b (D + D_y) + 8b / 15a [(1-v)D / 2 + D_1]$$

$$k_{11,12} = vD$$

$$k_{12,12} = 4b / 3a (D + D_x) + 8a / 15b [(1-v)D / 2 + D_1]$$

4.9 Eleman Zemin Etki Matrisi

Toplam potansiyel enerji bölümünde δW dış kuvvetlerin virtüel işinde, zeminin plak elemanına uyguladığı dış etkiyi yani elastik yataklanma matrisini genel durum için çıkarmıştık;

$$[s_e] = c \int_F [N(w)]^T [N(w)] dF$$

Elastik yataklanma matrisi (eleman zemin etki matrisi) yukarıdaki formülden de anlaşılacağı üzere şekli fonksiyonları matrisinin transpozesi ile kendisinin çarpılıp, yüzey integralleri alındıktan sonra c (zemin yatak katsayısı) ile çarpılması sonucu bulunur;

$$[s_e] = c \iint [N]^T [N] dx dy \quad (4.52)$$

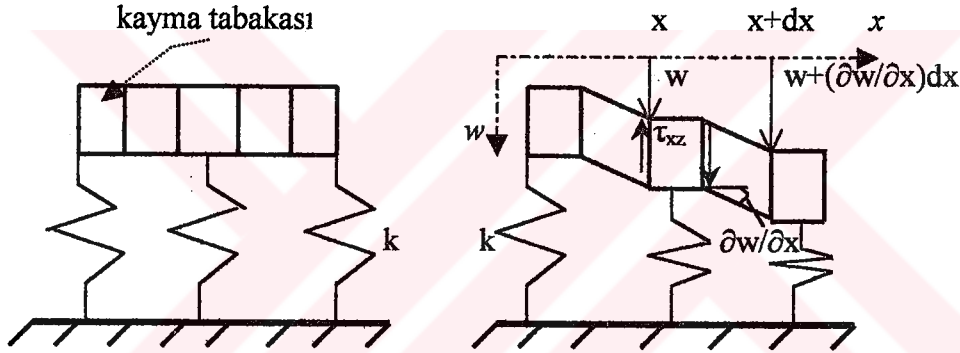
Şimdi bu sonuca nasıl ulaştığımızı daha ayrıntılı bir şekilde inceleyelim.

Üzerinde yük bulunan bir plak, beton yol veya radye temelde olduğu gibi elastik zemin üzerine oturmuş olabilir. Böyle bir zeminin plağa yapacağı dış etkinin açıklanabilmesi için

çeşitli zemin modelleri geliştirilmiştir. Bunlardan en sık kullanılanları Winkler ve Pasternak (1954) zemin modelleridir.

Elastik zemine oturan bir plağın eğilmesinin incelenmesinde, herhangi bir noktadaki elastik zemin etkisinin, bu noktadaki w çökmesi ile orantılı olduğu düşünülür. Winkler zemin modellemesinde zemin reaksiyonunun, yaylar şeklinde doğrusal olarak plağa iletildiği varsayılır. Pasternak modeli ise, Winkler tipi modellemeye kullanılan yay elemanlarının yanına zeminin kayma etkisini de gözetmeyi amaçlar. Yani yay elemanları arasında kayma etkisini de tanımlayan bir etkileşimin olduğu mekanik modelleme yapılır.

Bu mekanik modelleme, kayma tabakası olarak adlandırabileceğimiz, yayların uçları bağlı, sıkıştırılamayan ve sadece kesme etkisi altında şekil değişimi yapan, düşey elemanlar yardımı ile kurulmuştur.



Şekil 4.5 Zeminin kaymadan önceki ve sonraki durumu(Pasternak modeli)

Yük- çökme bağıntısını çıkarmak için kayma tabakasında diferansiyel alan elemanı alalım (Şekil 4.5). G_x ve G_y sırasıyla zeminin x ve y yönündeki kayma modülleri olmak üzere;

$$\tau_{xz} = G_x \gamma_{xz} = G_x (\partial w / \partial x)$$

$$\tau_{yz} = G_y \gamma_{yz} = G_y (\partial w / \partial y)$$

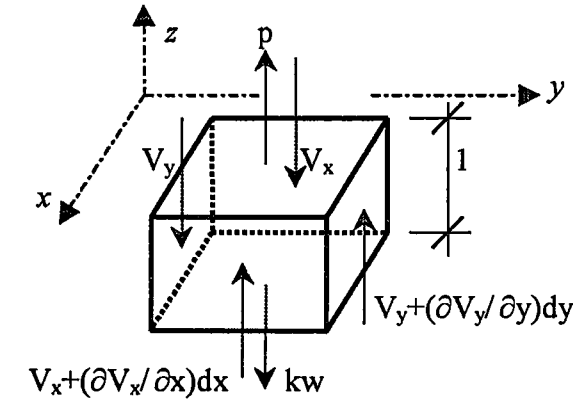
(4.53)

Kayma tabakasının birim boyuna etki eden kesme kuvveti;

$$V_x = \int_0^1 \tau_{xz} dz = G_x (\partial w / \partial x)$$

$$V_y = \int_0^1 \tau_{yz} dz = G_y (\partial w / \partial y)$$

(4.54)



Şekil 4.6 Elemanter zemin elemanı

Şekil 4.6'daki elemanter elemandan yararlanarak düşey denge denklemini yazalım;

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + p - kw = 0 \quad (4.55)$$

Zeminin plağa uygulayacağı tepki kuvveti (p)' yi çekersek;

$$p = kw - G_x w_{,xx} - G_y w_{,yy}$$

Eğer zemin homojen ise $G_x = G_y = G$ şeklinde ifade edilebilir. Kayma tabakasını göz önüne almazsak (Winkler modeli), $G_x = G_y = 0$ olur.

Buna göre elastik zemine oturan bir plakta kuvvet-yer değiştirme ifadesini şu şekilde yazabiliriz;

$$p_f = -cw \quad (4.56)$$

Burada c, k yay katsayısına karşılık gelen elastik yataklanma katsayısıdır. Zeminin cinsine göre değişen yatak katsayısının plak elemanı yüzeyinde sabit olduğu kabul edilir. Şekil 4.6'dan da görüldüğü üzere elastik yatak tepkileri yalnız yüzey normali doğrultusundadır. Çalışmamızda çözümleyeceğimiz örneğin elastik zemine oturan radye temel olması açısından, böyle bir temelin şekil değiştirme enerjisini şu şekilde yazabiliriz:

$$U_f = (-1/2) \iint p_f w \, dx dy \quad (4.57)$$

Şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonu;

$$\frac{1}{2!} \delta^2 U_f = \frac{c}{2} \iint (w)^2 \, dx dy \quad (4.58)$$

$\{w\} = [N] \{d\}$ olduğunu bildiğimize göre,

$$\frac{1}{2!} \delta^2 U_f = \frac{c}{2} \{d\}^T \iint [N]^T [N] \, dx dy \{d\} \quad (4.59)$$

Görüldüğü gibi stabilite denklemlerini veren ikinci varyasyona göre elastik zeminle ilgili bu terimlere s_e dersek, (4.52)'de yazdığımız denklemini elde etmiş olduk;

$$[s_e] = c \iint [N]^T [N] dx dy$$

Lokal koordinatlara çevirirsek;

$$\xi = x/a, \eta = y/b \text{ idi,}$$

$$[s_e] = c \iint [N]^T [N] dx dy = c \int_0^1 \int_0^1 [N]^T [N] |J| d\xi d\eta \text{ olur.}$$

$$|J| = ab \text{ olduğuna göre,}$$

$$[s_e] = c.a.b \int_0^1 \int_0^1 [N]^T [N] d\xi d\eta \quad (4.60)$$

Şekil fonksiyonları belli olduğuna göre zemin etki matrisi yukarıdaki gibi hesaplanıp, Çizelge (4.4)'de verilmiştir;

Çizelge 4.4a Zemin etki matrisi (her terim c.a.b ile çarpılır).

	1	2	3	4	5	6
1	0,137064					
2	0,0182936 b	$3,1746.10^{-3} b^2$				
3	-0,0182936 a	-0,0025 ab	$3,1746.10^{-3} a^2$			
4	0,0486508	0,010873 b	$-7,89685.10^{-3} a$	0,137064		
5	-0,010873 b	$-2,38095.10^{-3} b^2$	$1,66667.10^{-3} ba$	0,0182937 b	$3,17461.10^{-3} b^2$	
6	$-7,8968.10^{-3} a$	$-1,66667.10^{-3} ba$	$1,58729.10^{-3} a^2$	0,0182937 a	$2,49999.10^{-3} ba$	$0,0031746.a^2$

Çizelge 4.4b Zemin etki matrisi (her terim c.a.b ile çarpılır).

	1	2	3	4	5	6
7	0,0156349	$4,60317.10^{-3} b$	$-4,60316.10^{-3} a$	0,0486408	$-7,89684.10^{-3} b$	-0,010873 a
8	$-4,60316.10^{-3} b$	$-1,19048.10^{-3} b^2$	0,0011111 ab	-0,0078968 b	$1,58729.10^{-3} b^2$	$1,66667.10^{-3} ba$
9	$4,60316.10^{-3} a$	0,0011111 ab	$-1,19048.10^{-3} a^2$	0,010873 a	$-1,66667.10^{-3} ba$	$-2,38095.10^{-3} a^2$
10	0,0486509	$7,89685.10^{-3} b$	-0,01873 a	0,0156349	$-4,60316.10^{-3} b$	$-4,60315.10^{-3} a$
11	$7,89682.10^{-3} b$	$1,58729.10^{-3} b^2$	$-1,66668.10^{-3} ba$	0,0046031 b	$-1,19048.10^{-3} b^2$	$-1,11111.10^{-3} ab$
12	0,010873 a	$1,66668.10^{-3} ba$	$-2,38095.10^{-3} a^2$	0,0046031 a	-0,0011111.ab	$-1,19048.10^{-3} a^2$

Çizelge 4.4c Zemin etki matrisi (her terim c.a.b ile çarpılır).

	7	8	9	10	11	12
7	0,137064					
8	-0,0182936 b	$3,1746 \cdot 10^{-3} b^2$				
9	0,0182936 a	-0,0025 ba	$3,17461 \cdot 10^{-3} a^2$			
10	0,0486508	-0,010873 b	$7,89685 \cdot 10^{-3} a$	0,137064		
11	0,010873 b	$-2,38095 \cdot 10^{-3} b^2$	$1,66667 \cdot 10^{-3} ab$	0,0182937 b	$3,17461 \cdot 10^{-3} b^2$	
12	$7,89685 \cdot 10^{-3} a$	$-1,6667 \cdot 10^{-3} ab$	$1,58729 \cdot 10^{-3} a^2$	0,0182937 a	$2,49999 \cdot 10^{-3} ab$	$0,0031746 a^2$

Çizelge 4.4'deki eleman zemin etki matrisi değerlerinin nasıl bulunduğunu daha iyi açıklamak üzere örnek olarak $[s_e]_{9,9}$ terimini elle çözelim;

(4.60)'a göre;

$$[s_e]_{9,9} = c.a.b \int_0^1 \int_0^1 [N]_9^T [N]_9 d\xi d\eta$$

(4.13)'e göre, $N_9 = (1-\xi) \xi^2 \eta a$ olduğuna göre,

$$[s_e]_{9,9} = c.a.b \int_0^1 \int_0^1 [(1-\xi) \xi^2 \eta a] [(1-\xi) \xi^2 \eta a] d\xi d\eta$$

$$= c.a.b.a^2 \int_0^1 \int_0^1 [\xi^4 \eta^2 - \xi^5 \eta^2 - \xi^5 \eta^2 + \xi^6 \eta^2] d\xi d\eta$$

$$= c.b.a^3 \left\| \frac{1}{5} \frac{1}{3} \xi^5 \eta^3 - \frac{2}{6} \frac{1}{3} \xi^6 \eta^3 + \frac{1}{7} \frac{1}{3} \xi^7 \eta^3 \right\|_{00}^{11}$$

$$= c.b.a^3 \left| \frac{1}{15} - \frac{2}{18} + \frac{1}{21} \right| = c.b.a^3 | 0.0031746 |$$

Çizelge 4.4'deki değerler bu şekilde bulunmuştur. Eleman zemin etki matrisi, zeminin elemana yaptığı etkiyi gösterdiğine göre, gerçek eleman rijitlik matrisi Bölüm 4.8'de nervürlü plak için bulduğumuz eleman rijitlik matrisiyle Bölüm 4.9'da bulduğumuz eleman zemin etki matrisinin toplanması sonucunda bulunur. Yani, elastik zemine oturan, nervürlü plak için eleman rijitlik matrisi;

$$[k_{pe}] = [k] + [s_e] \quad (4.61)$$

$$[k_{pe}] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,12} \\ k_{2,1} & & & \\ \vdots & & & \\ k_{12,1} & k_{12,2} & \dots & k_{12,12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{e1,1} & s_{e1,2} & \dots & s_{e1,12} \\ s_{e2,1} & & & \\ \vdots & & & \\ s_{e12,1} & s_{e12,2} & \dots & s_{e12,12} \end{bmatrix}$$

4.10 Eleman Dış Yük Matrisi

Sonlu elemanlar yöntemiyle eğilme hesabı yaparken, genellikle plağın üzerinde etki eden kuvvet olarak ya tekil yük, ya yüzeysel yük, yada her ikisi vardır. Çalışmamızda elastik zemin etkisi olduğuna göre, nervürlü plağımızı radye temel olarak düşünürsek bizim için tekil yük etkisi söz konusudur. Ancak önce yüzeysel (yayılı) yük etkisini de inceleyelim.

Bölüm 4.7’de iç ve dış kuvvetlerin eşitliğinde (4.44), yüzeysel yük etkisini şu şekilde tanımlamıştık;

$$\{q_e\}_p = \int_F [N]^T \{p\} dF$$

Burada p yüzeysel yükün değeridir. F yüzeyi gösterdiğine göre;

$$\{q_e\}_p = \iint [N]^T \{p\} dx dy \quad (4.62)$$

Boyutsuz çalışırsak;

$$\{q_e\}_p = ab \int_0^1 \int_0^1 [N_1, N_2, \dots, N_{12}]^T \{p\} d\xi d\eta \quad (4.63)$$

$$\{q_e\}_p = pab \int_0^1 \int_0^1 \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_{12} \end{Bmatrix} d\xi d\eta = \begin{Bmatrix} q_{e1} \\ q_{e2} \\ \vdots \\ q_{e12} \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

(4.64)’deki integral işlemleri gerçekleştirilirse;

$$\begin{aligned} q_{e1} &= p.a.b(1/4) & q_{e2} &= p.a.b^2(1/24) & q_{e3} &= -p.a^2.b(1/24) & q_{e4} &= p.a.b(1/4) \\ q_{e5} &= -p.a.b^2(1/24) & q_{e6} &= -p.a^2.b(1/24) & q_{e7} &= p.a.b(1/4) & q_{e8} &= -p.a.b^2(1/24) \\ q_{e9} &= p.a^2.b(1/24) & q_{e10} &= p.a.b(1/4) & q_{e11} &= p.a.b(1/24) & q_{e12} &= p.a^2.b(1/24) \end{aligned} \quad (4.65)$$

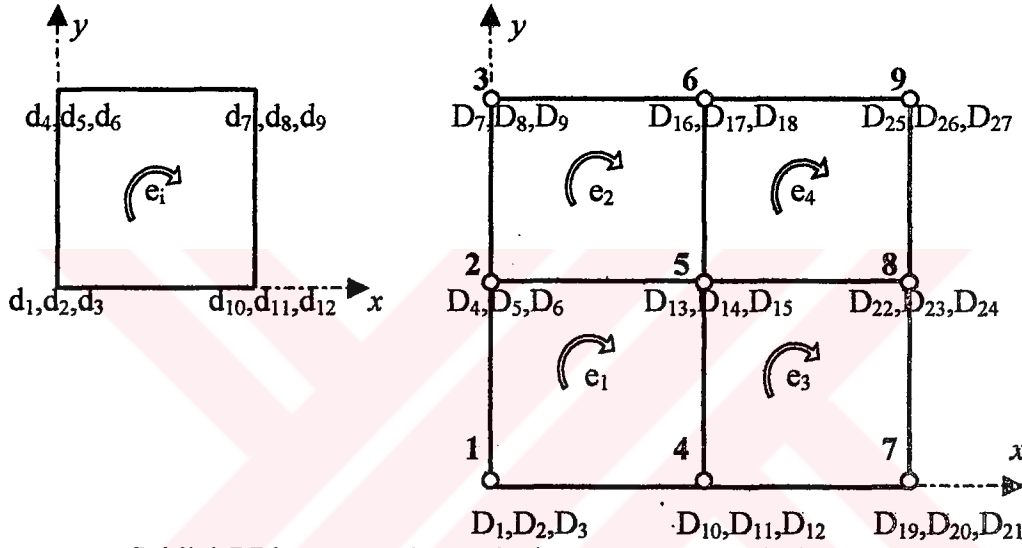
Tekil yük etkisinde ise (4.44)’de görüldüğü gibi, eleman yük matrisinde direkt olarak yükün değeri yazılır. Bir (i) noktasında üç adet deplasman parametresi tanımlamıştık; $[w, \theta_x, \theta_y]_i$. Buna göre tekil yük hangi düğüm noktasına etki ediyorsa, o düğüm noktasındaki ilgili deplasman parametresine karşılık gelen satıra değeri yazılarak, eleman yük matrisi oluşturulur.

Örneğin plağın üzerinde yalnızca 1 düğüm noktasında 100 kN luk tekil yük ve x doğrultusunda 20 kNm lik moment etkisi olsun. Eleman yük matrisi;

$$\{q_e\}_p = \begin{Bmatrix} 100 \\ 20 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

4.11 Sisteme Geçiş

Şimdiye kadar gerçek plağı sonlu sayıda elemana ayırarak, bu elemanlarla ilgili matrisleri bulmuş olduk; (eleman rijitlik matrisi, eleman yük matrisi). Elamandan gerçek sisteme geçmek için, yani sistemin rijitlik matrisini ve sistemin yük matrisini bulmak için çevirme matrisleri yada biriktirme metodu kullanılır. Düğüm noktası sayısı az ise biriktirme metodu daha kısa sonuç verirken, düğüm noktası sayısı fazla ise çevirme matrisleriyle sisteme geçmek daha kolaydır. Örnek olarak 4 adet sonlu elemana ayrılmış plakta sisteme biriktirme metoduyla geçişi gösterelim:



Şekil 4.7 Eleman ve sistem deplasman parametreleri

Şekil 4.7’de görülen D_i ’ ler sistem deplasman parametrelerini göstermektedir. Sisteme geçmek için, yukarıdaki şekle göre, her eleman için eleman deplasman parametrelerine karşılık gelen sistem deplasman parametrelerini yerleştirelim (Çizelge 4.5).

Çizelge 4.5 Sisteme geçiş deplasman parametreleri

Eleman deplasman parametresi	Sistem deplasman parametresi			
	I	II	III	IV
d_1	D_1	D_4	D_{10}	D_{13}
d_2	D_2	D_5	D_{11}	D_{14}
d_3	D_3	D_6	D_{12}	D_{15}
d_4	D_4	D_7	D_{13}	D_{16}
d_5	D_5	D_8	D_{14}	D_{17}
d_6	D_6	D_9	D_{15}	D_{18}
d_7	D_{13}	D_{16}	D_{22}	D_{25}
d_8	D_{14}	D_{17}	D_{23}	D_{26}
d_9	D_{15}	D_{18}	D_{24}	D_{27}
d_{10}	D_{10}	D_{13}	D_{19}	D_{22}
d_{11}	D_{11}	D_{14}	D_{20}	D_{23}
d_{12}	D_{12}	D_{15}	D_{21}	D_{24}

Plak basit mesnet üzerindeyse, mesnet noktalarında çökmenin olmadığı kabul edilir. Ankastre mesnet varsa, çökmeler (w) ile x ve y yönündeki dönmeler (θ_x, θ_y) sıfır kabul edilir. Plak x eksenine göre simetrik ise θ_x , y eksenine göre simetrikse θ_y , hem x hemde y eksenine göre simetrikse θ_x ve θ_y sıfır kabul edilir.

Sınır şartının sıfır olduğu terim D_i ise $K_{i,i}$ yerine 1 yazılır ve (i) satır ve sütunundaki diğer tüm terimlerin yerine de 0 yazılır. Q_i teriminin yerine de 0 yazılarak sınır şartları ifade edilerek bir çok işlem azaltması yapılır.

Elastik çöken ve dönen mesnetlerde ise, pratik olarak, (i) noktasında elastik çöken veya dönen mesnet varsa $K_{i,i} = K_{i,i} + c$ şeklinde ifade edilir.

Çalışmamızda plak elastik zemine oturduğu için, zeminin elastikiyetinden dolayı plağın her noktasında deplasmanlar meydana gelir. Bu yüzden mesnet şartlarının varlığı otomatikman ortadan kalkar.

4.13 Kesit Tesirlerinin Bulunması

$[Q] = [K] [D_s]$ denkleminde sınır şartları konulduktan sonra denklem çözülür ve sisteme ait düğüm noktaları deplasman parametreleri hesaplanır. (4.33)'den gerilmenin değerini biliyoruz;

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$$

$[D]$ değerini (4.51)'deki şekliyle yazarsak;

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D + D_x & \mu D & 0 \\ \mu D & D + D_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)D + D_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{-\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} D + D_x & \mu D & 0 \\ \mu D & D + D_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)D + D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{1,xx} & -N_{2,xx} & \dots & -N_{12,xx} \\ -N_{1,yy} & -N_{2,yy} & \dots & -N_{12,yy} \\ -2N_{1,xy} & -2N_{2,xy} & \dots & -2N_{12,xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{27} \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

(4.70)'deki denklemde ilk iki matrisin çarpımına $[m]$ kütle matrisi adı verilir. O halde gerilme denklemi aşağıdaki hali alır;

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [m] \{D_s\} \quad (4.71)$$

(4.71)'deki [m] değerlerinin çarpılmış hali aşağıda verilmiştir:

$$m_{1,1} = -(D + D_x) N_{1,xx} - \mu D N_{1,yy} = (D + D_x)(6/a^2)(1-2\xi)(1-\eta) + \mu D(6/b^2)(1-\xi)(1-2\eta)$$

$$m_{1,2} = -(D + D_x) N_{2,xx} - \mu D N_{2,yy} = \mu D(2/b)(1-\xi)(2-3\eta)$$

$$m_{1,3} = -(D + D_x) N_{3,xx} - \mu D N_{3,yy} = -(D + D_x)(2/a)(2-3\xi)(1-\eta)$$

$$m_{1,4} = -(D + D_x) N_{4,xx} - \mu D N_{4,yy} = (D + D_x)(6/a^2)(1-2\xi)\eta - \mu D(6/b^2)(1-\xi)(1-2\eta)$$

$$m_{1,5} = -(D + D_x) N_{5,xx} - \mu D N_{5,yy} = \mu D(2/b)(1-\xi)(1-3\eta)$$

$$m_{1,6} = -(D + D_x) N_{6,xx} - \mu D N_{6,yy} = -(D + D_x)(2/a)(2-3\xi)\eta$$

$$m_{1,7} = -(D + D_x) N_{7,xx} - \mu D N_{7,yy} = -(D + D_x)(6/a^2)(1-2\xi)\eta - \mu D(6/b^2)\xi(1-2\eta)$$

$$m_{1,8} = -(D + D_x) N_{8,xx} - \mu D N_{8,yy} = \mu D(2/b)\xi(1-3\eta)$$

$$m_{1,9} = -(D + D_x) N_{9,xx} - \mu D N_{9,yy} = -(D + D_x)(2/a)(1-3\xi)\eta$$

$$m_{1,10} = -(D + D_x) N_{10,xx} - \mu D N_{10,yy} = -(D + D_x)(6/a^2)(1-2\xi)(1-\eta) + \mu D(6/b^2)\xi(1-2\eta)$$

$$m_{1,11} = -(D + D_x) N_{11,xx} - \mu D N_{11,yy} = \mu D(2/b)\xi(2-3\eta)$$

$$m_{1,12} = -(D + D_x) N_{12,xx} - \mu D N_{12,yy} = -(D + D_x)(2/a)(1-3\xi)(1-\eta)$$

$$m_{2,1} = -\mu D N_{1,xx} - (D + D_y) N_{1,yy} = \mu D(6/a^2)(1-2\xi)(1-\eta) + (D + D_y)(6/b^2)(1-\xi)(1-2\eta)$$

$$m_{2,2} = -\mu D N_{2,xx} - (D + D_y) N_{2,yy} = (D + D_y)(2/b)(1-\xi)(2-3\eta)$$

$$m_{2,3} = -\mu D N_{3,xx} - (D + D_y) N_{3,yy} = -\mu D(2/a)(2-3\xi)(1-\eta)$$

$$m_{2,4} = -\mu D N_{4,xx} - (D + D_y) N_{4,yy} = \mu D(6/a^2)(1-2\xi)\eta - (D + D_y)(6/b^2)(1-\xi)(1-2\eta)$$

$$m_{2,5} = -\mu D N_{5,xx} - (D + D_y) N_{5,yy} = (D + D_y)(2/b)(1-\xi)(1-3\eta)$$

$$m_{2,6} = -\mu D N_{6,xx} - (D + D_y) N_{6,yy} = -\mu D(2/a)(2-3\xi)\eta$$

$$m_{2,7} = -\mu D N_{7,xx} - (D + D_y) N_{7,yy} = -\mu D(6/a^2)(1-2\xi)\eta - (D + D_y)(6/b^2)\xi(1-2\eta)$$

$$m_{2,8} = -\mu D N_{8,xx} - (D + D_y) N_{8,yy} = (D + D_y)(2/b)\xi(1-3\eta)$$

$$m_{2,9} = -\mu D N_{9,xx} - (D + D_y) N_{9,yy} = -\mu D(2/a)(1-3\xi)\eta$$

$$m_{2,10} = -\mu D N_{10,xx} - (D + D_y) N_{10,yy} = -\mu D(6/a^2)(1-2\xi)(1-\eta) + (D + D_y)(6/b^2)\xi(1-2\eta)$$

$$m_{2,11} = -\mu D N_{11,xx} - (D + D_y) N_{11,yy} = (D + D_y)(2/b)\xi(2-3\eta)$$

$$m_{2,12} = -\mu D N_{12,xx} - (D + D_y) N_{12,yy} = -\mu D(2/a)(1-3\xi)(1-\eta)$$

$$m_{3,1} = -2[(1-\mu)D + D_1] N_{1,xy} = [(1-\mu)D + D_1](2/ab)[1-6\xi(1-\xi)-6\eta(1-\eta)]$$

$$m_{3,2} = -2[(1-\mu)D + D_1] N_{2,xy} = [(1-\mu)D + D_1](2/a)(1-3\eta)(1-\eta)$$

$$m_{3,3} = -2[(1-\mu)D + D_1] N_{3,xy} = -[(1-\mu)D + D_1](2/b)(1-3\xi)(1-\xi)$$

$$m_{3,4} = -2[(1-\mu)D + D_1] N_{4,xy} = [(1-\mu)D + D_1](2/ab)[-1+6\xi(1-\xi)+6\eta(1-\eta)]$$

$$m_{3,5} = -2[(1-\mu)D + D_1] N_{5,xy} = -[(1-\mu)D + D_1](2/a)(2-3\eta)\eta$$

$$m_{3,6} = -2[(1-\mu)D + D_1] N_{6,xy} = [(1-\mu)D + D_1](2/b)(1-3\xi)(1-\xi)$$

$$m_{3,7} = -2[(1-\mu)D + D_1] N_{7,xy} = [(1-\mu)D + D_1](2/ab)[1-6\xi(1-\xi)-6\eta(1-\eta)]$$

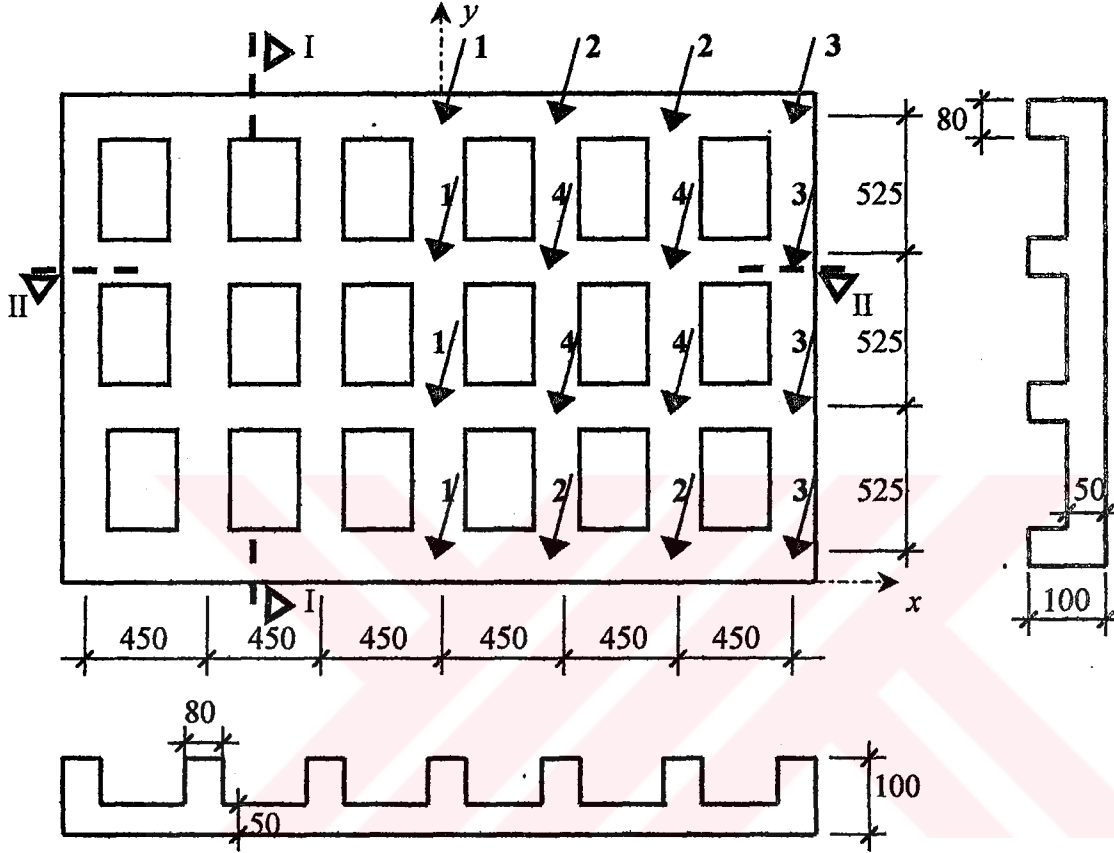
$$\begin{aligned}
m_{3,8} &= -2[(1-\mu)D + D_1] N_{8,xy} = [(1-\mu)D + D_1] (2/a)(2-3\eta)\eta \\
m_{3,9} &= -2[(1-\mu)D + D_1] N_{9,xy} = -[(1-\mu)D + D_1] (2/b)(2-3\xi)\xi \\
m_{3,10} &= -2[(1-\mu)D + D_1] N_{10,xy} = [(1-\mu)D + D_1] (2/ab) [-1+6\xi(1-\xi)+6\eta(1-\eta)] \\
m_{3,11} &= -2[(1-\mu)D + D_1] N_{11,xy} = -[(1-\mu)D + D_1] (2/a)(1-3\eta)(1-\eta) \\
m_{3,12} &= -2[(1-\mu)D + D_1] N_{12,xy} = [(1-\mu)D + D_1] (2/b)(2-3\xi)\xi
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Nervürlü plak için $[D]$ elastisite matrisindeki D_x , D_y , D_1 terimlerinin değerleri problemin cinsine göre daha önce nümerik olarak bulunacağına göre (4.72)'deki kütle matrisi değerleri de ξ ve η 'e değerler vererek nümerik olarak bulunabilir.

(4.71)'deki denklemde elemanların her bir köşesi için ξ ve η 'nin değerleri $[m]$ matrisinde yazılarak $\{\sigma\}$ gerilme matrisi nümerik olarak bulunur. Aynı düğüm noktasında birleşen elemanların her birinden hesaplanan kesit tesirleri farklıdır. Bu değerlerin ortalaması alınarak o düğüm noktasının kesit tesirleri bulunmuş olur.

5. SAYISAL ÖRNEK

Elastik zemine oturan, nervürlü, ince plağın eğilme hesabını çıkardığımız sonlu eleman formülasyonuna göre çözümleyelim. Bunun için Şekil 5.1'deki örneği inceleyelim:

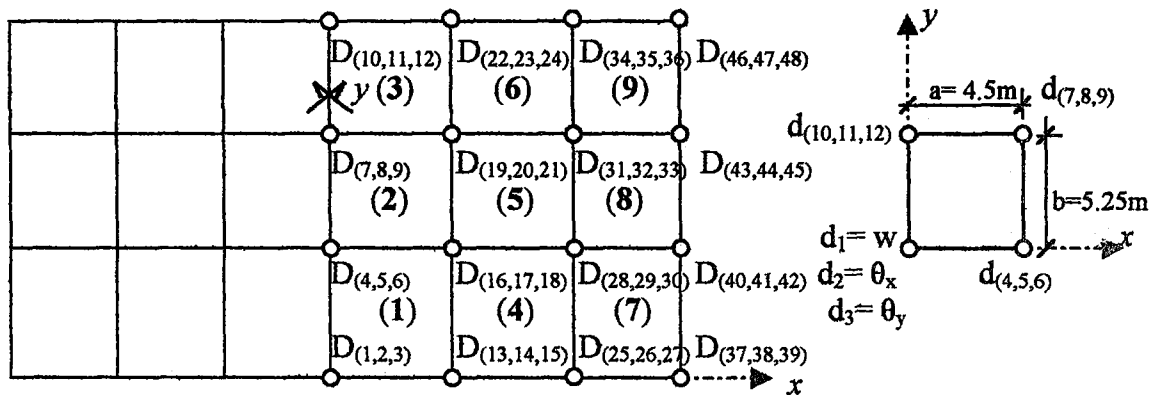


Şekil 5.1 Radye temel ve kesitleri

$\mu = 0.15$ $c(\text{elastik yatak katsayısı}) = 80000 \text{ kN/m}^3$ $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$

Yukarıdaki radye temele 4 farklı kolon yükü etkimektedir; 1 nolu kolonlardan 4110kN, 2 nolu kolonlardan 3160kN, 3 nolu kolonlardan 2485kN ve 4 nolu kolonlardan 4620kN.

Eleman deplasman parametreleri ve sistem deplasman parametrelerini gösterelim:



Şekil 5.2 Eleman ve sistem deplasman parametreleri

$a = 4.5\text{m}$, $b = 5.25\text{m}$ değerlerine göre Bölüm 4.8'de çıkardığımız eleman rijitlik değerlerini yazalım. Ancak daha önce eleman rijitlik değerlerinin içinde yer alan D ve nervür etkisiyle ilgili D_x , D_y , D_1 terimlerinin değerlerini bulmamız gerekli.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad D_x = \frac{E(I_x + e_x^2 A_x)}{d_x} \quad D_y = \frac{E(I_y + e_y^2 A_y)}{d_y} \quad D_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{GJ_x}{d_x} + \frac{GJ_y}{d_y} \right)$$

$$A_i (\text{nervür alanı}) = b_i h_i$$

$$I_i (\text{nervür atalet momenti}) = (1/12) b_i h_i^3$$

$$J_i = \min(1/3) b_i h_i^3$$

$$e_i = (1/2) (h_i + t)$$

$$G = E/2(1+\mu)$$

olduğunu bildiğimize göre;

$$A_x = A_y = 0,8 * 0,5 = 0,4\text{m}^2$$

$$I_x = I_y = (1/12) * 0,8 * 0,5^3 = 8,33.10^{-3} \text{ m}^4$$

$$J_x = J_y = (1/3) * 0,8 * 0,5^3 = 33.10^{-3} \text{ m}^4$$

$$e_x = e_y = (1/2) * (0,5 + 0,5) = 0,5 \text{ m}$$

$$G = 2,1.10^7 / 2(1+0,15) = 913,04.10^4 \text{ kN/m}^2$$

$$d_x = 4,5\text{m}$$

$$d_y = 5,25\text{m}$$

Bu değerlere göre;

$$D_x = \frac{2,1.10^7 * (8,33.10^{-3} + 0,5^2 * 0,4)}{4,5} = 50,5540.10^4 \text{ kNm}$$

$$D_y = \frac{2,1.10^7 * (8,33.10^{-3} + 0,5^2 * 0,4)}{5,25} = 43,320.10^4 \text{ kNm}$$

$$D_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{913,04.10^4 * 33.10^{-3}}{4,5} + \frac{913,04.10^4 * 33.10^{-3}}{5,25} \right) = 6,2173.10^4 \text{ kNm}$$

$$D = \frac{2,1.10^7 * 0,5^3}{12 * (1-0,15^2)} = 22,379.10^4 \text{ kNm}$$

Bulunan bu değerler Bölüm 4.8'de gösterilen eleman rijitlik matrisinde yerine yazılırsa, Çizelge 5.1'de gösterilen eleman rijitlik matrisi değerleri elde edilir;

Çizelge 5.1 [k] (eleman rijitlik matrisi)

$k_{1,1}=$	289924,6	$k_{2,10}=$	228508,1	$k_{4,11}=$	-93282,9	$k_{7,9}=$	-396549
$k_{1,2}=$	-235968	$k_{2,11}=$	350956,5	$k_{4,12}=$	-177102	$k_{7,10}=$	-167338
$k_{1,3}=$	396548,6	$k_{2,12}=$	0	$k_{5,5}=$	848711,2	$k_{7,11}=$	85823,23
$k_{1,4}=$	-167338	$k_{3,3}=$	1206414	$k_{5,6}=$	33568,5	$k_{7,12}=$	-390155
$k_{1,5}=$	-85823,2	$k_{3,4}=$	-390155	$k_{5,7}=$	228508,1	$k_{8,8}=$	848711,2
$k_{1,6}=$	390154,6	$k_{3,5}=$	0	$k_{5,8}=$	350956,5	$k_{8,9}=$	-33568,5
$k_{1,7}=$	-84776,5	$k_{3,6}=$	549281,4	$k_{5,9}=$	0	$k_{8,10}=$	85823,23
$k_{1,8}=$	-93282,9	$k_{3,7}=$	-177102	$k_{5,10}=$	93282,9	$k_{8,11}=$	277557,4
$k_{1,9}=$	177102	$k_{3,8}=$	0	$k_{5,11}=$	212177,8	$k_{8,12}=$	0
$k_{1,10}=$	-37810,5	$k_{3,9}=$	301603,6	$k_{5,12}=$	0	$k_{9,9}=$	1206414
$k_{1,11}=$	-228508	$k_{3,10}=$	170708	$k_{6,6}=$	1206414	$k_{9,10}=$	96021,55
$k_{1,12}=$	170708	$k_{3,11}=$	0	$k_{6,7}=$	-170708	$k_{9,11}=$	0
$k_{2,2}=$	848711,2	$k_{3,12}=$	495355,5	$k_{6,8}=$	0	$k_{9,12}=$	549281,4
$k_{2,3}=$	-33568,5	$k_{4,4}=$	289924,6	$k_{6,9}=$	495355,5	$k_{10,10}=$	289924,6
$k_{2,4}=$	-85823,2	$k_{4,5}=$	-235968	$k_{6,10}=$	177102	$k_{10,11}=$	235967,8
$k_{2,5}=$	277557,4	$k_{4,6}=$	-396549	$k_{6,11}=$	0	$k_{10,12}=$	396548,6
$k_{2,6}=$	0	$k_{4,7}=$	-37810,5	$k_{6,12}=$	301603,6	$k_{11,11}=$	848711,2
$k_{2,7}=$	93282,9	$k_{4,8}=$	-228508	$k_{7,7}=$	289924,6	$k_{11,12}=$	33568,5
$k_{2,8}=$	212177,8	$k_{4,9}=$	-170708	$k_{7,8}=$	235967,8	$k_{12,12}=$	1206414
$k_{2,9}=$	0	$k_{4,10}=$	-84776,5				

Bulduğumuz bu eleman rijitlik matrisi elastik zemin etkisi olmaksızın nervürlü plak için geçerlidir. (4.69)'dan da hatırlayacağımız gibi elastik zemin etkisini de eleman rijitlik matrisine katan denklem:

$$[k_{pe}] = [k] + [s_e]$$

olduğuna göre, elastik zemin etki matrisini çıkartalım. Çizelge 4.4'de a,b ve c'ye bağlı olarak verilen gerekli değerleri yerlerine yazarsak Çizelge 5.2'de gösterilen eleman zemin etki matrisi değerlerini elde ederiz;

Çizelge 5.2 $[s_e]$ (zemin etki matrisi)

$s_{e1,1} =$	259051	$s_{e2,10} =$	107887,3	$s_{e4,11} =$	-45674,9	$s_{e7,9} =$	155587,1
$s_{e1,2} =$	181518,2	$s_{e2,11} =$	-124031	$s_{e4,12} =$	-39149,8	$s_{e7,10} =$	91931,11
$s_{e1,3} =$	-155587	$s_{e2,12} =$	-74418,9	$s_{e5,5} =$	165375,4	$s_{e7,11} =$	-78356,4
$s_{e1,4} =$	91950,2	$s_{e3,3} =$	121499,9	$s_{e5,6} =$	111627,7	$s_{e7,12} =$	-92474,9
$s_{e1,5} =$	78356,2	$s_{e3,4} =$	-159299	$s_{e5,7} =$	107887,3	$s_{e8,8} =$	165374,8
$s_{e1,6} =$	92474,87	$s_{e3,5} =$	-74418,9	$s_{e5,8} =$	-124031	$s_{e8,9} =$	-111628
$s_{e1,7} =$	29549,96	$s_{e3,6} =$	-91124,9	$s_{e5,9} =$	74418,9	$s_{e8,10} =$	-78356
$s_{e1,8} =$	-45674,95	$s_{e3,7} =$	-39149,9	$s_{e5,10} =$	45674,26	$s_{e8,11} =$	82686,9
$s_{e1,9} =$	39149,88	$s_{e3,8} =$	49607,54	$s_{e5,11} =$	-62015,8	$s_{e8,12} =$	74418,9
$s_{e1,10} =$	91950,01	$s_{e3,9} =$	-45562,6	$s_{e5,12} =$	-49612	$s_{e9,9} =$	121500,3
$s_{e1,11} =$	-107887	$s_{e3,10} =$	-67162,7	$s_{e6,6} =$	121499,9	$s_{e9,10} =$	92474,87
$s_{e1,12} =$	-67162,3	$s_{e3,11} =$	74418,9	$s_{e6,7} =$	67162,71	$s_{e9,11} =$	-74420,2
$s_{e2,2} =$	165374,8	$s_{e3,12} =$	60749,56	$s_{e6,8} =$	-74420,2	$s_{e9,12} =$	-91124,9
$s_{e2,3} =$	-111628	$s_{e4,4} =$	259051	$s_{e6,9} =$	60749,56	$s_{e10,10} =$	259051
$s_{e2,4} =$	78356,49	$s_{e4,5} =$	181519,2	$s_{e6,10} =$	39149,37	$s_{e10,11} =$	181519,2
$s_{e2,5} =$	82686,9	$s_{e4,6} =$	155587,9	$s_{e6,11} =$	-49607,5	$s_{e10,12} =$	155587,9
$s_{e2,6} =$	74419,35	$s_{e4,7} =$	91950,01	$s_{e6,12} =$	-45562,6	$s_{e11,11} =$	165375,4
$s_{e2,7} =$	45674,95	$s_{e4,8} =$	-107887	$s_{e7,7} =$	259051	$s_{e11,12} =$	111623,7
$s_{e2,8} =$	-62015,8	$s_{e4,9} =$	67162,71	$s_{e7,8} =$	-181518	$s_{e12,12} =$	121499,9
$s_{e2,9} =$	49607,54	$s_{e4,10} =$	29549,96				

Çizelge 5.3'de elastik zemin etkisini de göz önüne alan toplam eleman rijitlik matrisi değerleri verilmiştir;

Çizelge 5.3 $[k_{pe}] = [k] + [s_e]$ (sonuç eleman rijitlik matrisi)

$k_{pe1,1} =$	548975,60	$k_{pe2,10} =$	336395,42	$k_{pe4,11} =$	-138957,80	$k_{pe7,9} =$	-240961,53
$k_{pe1,2} =$	-54449,59	$k_{pe2,11} =$	226925,50	$k_{pe4,12} =$	-216251,83	$k_{pe7,10} =$	-75406,44
$k_{pe1,3} =$	240961,63	$k_{pe2,12} =$	-74418,90	$k_{pe5,5} =$	1014086,56	$k_{pe7,11} =$	7466,83
$k_{pe1,4} =$	-75387,35	$k_{pe3,3} =$	1327914,38	$k_{pe5,6} =$	145196,20	$k_{pe7,12} =$	-482629,53
$k_{pe1,5} =$	-7467,03	$k_{pe3,4} =$	-549453,63	$k_{pe5,7} =$	336395,42	$k_{pe8,8} =$	1014085,96
$k_{pe1,6} =$	482629,50	$k_{pe3,5} =$	-74418,90	$k_{pe5,8} =$	226925,50	$k_{pe8,9} =$	-145196,50
$k_{pe1,7} =$	-55226,56	$k_{pe3,6} =$	458156,48	$k_{pe5,9} =$	74418,90	$k_{pe8,10} =$	7467,23
$k_{pe1,8} =$	-138957,85	$k_{pe3,7} =$	-216251,93	$k_{pe5,10} =$	138957,16	$k_{pe8,11} =$	360244,31
$k_{pe1,9} =$	216251,91	$k_{pe3,8} =$	49607,54	$k_{pe5,11} =$	150161,99	$k_{pe8,12} =$	74418,90
$k_{pe1,10} =$	54139,48	$k_{pe3,9} =$	256041,02	$k_{pe5,12} =$	-49612,00	$k_{pe9,9} =$	1327914,78
$k_{pe1,11} =$	-336395,12	$k_{pe3,10} =$	103545,33	$k_{pe6,6} =$	1327914,38	$k_{pe9,10} =$	188496,42
$k_{pe1,12} =$	103545,73	$k_{pe3,11} =$	74418,90	$k_{pe6,7} =$	-103545,32	$k_{pe9,11} =$	-74420,20
$k_{pe2,2} =$	1014085,96	$k_{pe3,12} =$	556105,08	$k_{pe6,8} =$	-74420,20	$k_{pe9,12} =$	458156,48
$k_{pe2,3} =$	-145196,50	$k_{pe4,4} =$	548975,60	$k_{pe6,9} =$	556105,08	$k_{pe10,10} =$	548975,60
$k_{pe2,4} =$	-7466,74	$k_{pe4,5} =$	-54448,59	$k_{pe6,10} =$	216251,40	$k_{pe10,11} =$	417486,99
$k_{pe2,5} =$	360244,31	$k_{pe4,6} =$	-240960,73	$k_{pe6,11} =$	-49607,50	$k_{pe10,12} =$	552136,53
$k_{pe2,6} =$	74419,35	$k_{pe4,7} =$	54139,48	$k_{pe6,12} =$	256041,02	$k_{pe11,11} =$	1014086,56
$k_{pe2,7} =$	138957,85	$k_{pe4,8} =$	-336395,12	$k_{pe7,7} =$	548975,60	$k_{pe11,12} =$	145192,20
$k_{pe2,8} =$	150161,99	$k_{pe4,9} =$	-103545,32	$k_{pe7,8} =$	54449,79	$k_{pe12,12} =$	1327914,38
$k_{pe2,9} =$	49607,54	$k_{pe4,10} =$	-55226,56				

Elastik zemin etkisini de göz önüne alarak eleman rijitlik matrisini oluşturduktan sonra şimdi eleman dış yük matrisini oluşturalım. Sisteme yüzeysel yük etkimediği için, kolonlarla temele iletilen normal kuvvetler direkt olarak yük matrisinde yerlerine yazılır;

$$\{q_e\}^T = \begin{bmatrix} 4110 & 0 & 0 & 4110 & 0 & 0 & 4110 & 0 & 0 & 4110 & 0 & 0 & 3160 & 0 & 0 \\ 4620 & 0 & 0 & 4620 & 0 & 0 & 3160 & 0 & 0 & 3160 & 0 & 0 & 4620 & 0 & 0 \\ 4620 & 0 & 0 & 3160 & 0 & 0 & 2485 & 0 & 0 & 2485 & 0 & 0 & 2485 & 0 & 0 \\ 2485 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eleman dış yük matrisini oluşturduktan sonra sisteme geçebiliriz. sisteme biriktirme yöntemi veya çevirme matrisleriyle geçebiliriz. Örnek olması açısından ikisini de gösterelim.

Çizelge 5.4 Eleman ve sistem deplasman parametreleri

eleman deplasman parametresi	sistem deplasman parametresi								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_1	D_1	D_4	D_7	D_{13}	D_{16}	D_{19}	D_{25}	D_{28}	D_{31}
d_2	D_2	D_5	D_8	D_{14}	D_{17}	D_{20}	D_{26}	D_{29}	D_{32}
d_3	D_3	D_6	D_9	D_{15}	D_{18}	D_{21}	D_{27}	D_{30}	D_{33}
d_4	D_{13}	D_{16}	D_{19}	D_{25}	D_{28}	D_{31}	D_{37}	D_{40}	D_{43}
d_5	D_{14}	D_{17}	D_{20}	D_{26}	D_{29}	D_{32}	D_{38}	D_{41}	D_{44}
d_6	D_{15}	D_{18}	D_{21}	D_{27}	D_{30}	D_{33}	D_{39}	D_{42}	D_{45}
d_7	D_{16}	D_{19}	D_{22}	D_{28}	D_{31}	D_{34}	D_{40}	D_{43}	D_{46}
d_8	D_{17}	D_{20}	D_{23}	D_{29}	D_{32}	D_{35}	D_{41}	D_{44}	D_{47}
d_9	D_{18}	D_{21}	D_{24}	D_{30}	D_{33}	D_{36}	D_{42}	D_{45}	D_{48}
d_{10}	D_4	D_7	D_{10}	D_{16}	D_{19}	D_{22}	D_{28}	D_{31}	D_{34}
d_{11}	D_5	D_8	D_{11}	D_{17}	D_{20}	D_{23}	D_{29}	D_{32}	D_{35}
d_{12}	D_6	D_9	D_{12}	D_{18}	D_{21}	D_{24}	D_{30}	D_{33}	D_{36}

Bölüm 4.11'de gösterildiği gibi biriktirme metoduyla sisteme geçerse, sistem rijitlik matrisinin terimleri Çizelge 5.5'de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi düğüm noktası sayısı fazla sistemlerde biriktirme metodu hayli uzun zaman alır. Bu yüzden düğüm noktası sayısı, dolayısıyla sistem deplasman parametresi sayısı fazla olan sistemlerin çözümünde sisteme çevirme matrisleriyle geçmek daha avantajlıdır.

Çizelge 5.5 Sistem rijitlik matrisi terimleri

$K_{1,1} = k_{1,1}^1$	$K_{1,43} = 0$	$K_{2,38} = 0$	$K_{3,34} = 0$
$K_{1,2} = k_{1,2}^1$	$K_{1,44} = 0$	$K_{2,39} = 0$	$K_{3,35} = 0$
$K_{1,3} = k_{1,3}^1$	$K_{1,45} = 0$	$K_{2,40} = 0$	$K_{3,36} = 0$
$K_{1,4} = k_{1,10}^1$	$K_{1,46} = 0$	$K_{2,41} = 0$	$K_{3,37} = 0$
$K_{1,5} = k_{1,11}^1$	$K_{1,47} = 0$	$K_{2,42} = 0$	$K_{3,38} = 0$
$K_{1,6} = k_{1,12}^1$	$K_{1,48} = 0$	$K_{2,43} = 0$	$K_{3,39} = 0$
$K_{1,7} = 0$	$K_{2,2} = k_{2,2}^1$	$K_{2,44} = 0$	$K_{3,40} = 0$
$K_{1,8} = 0$	$K_{2,3} = k_{2,3}^1$	$K_{2,45} = 0$	$K_{3,41} = 0$
$K_{1,9} = 0$	$K_{2,4} = k_{2,10}^1$	$K_{2,46} = 0$	$K_{3,42} = 0$
$K_{1,10} = 0$	$K_{2,5} = k_{2,11}^1$	$K_{2,47} = 0$	$K_{3,43} = 0$
$K_{1,11} = 0$	$K_{2,6} = k_{2,12}^1$	$K_{2,48} = 0$	$K_{3,44} = 0$
$K_{1,12} = 0$	$K_{2,7} = 0$	$K_{3,3} = k_{3,3}^1$	$K_{3,45} = 0$
$K_{1,13} = k_{1,4}^1$	$K_{2,8} = 0$	$K_{3,4} = k_{3,10}^1$	$K_{3,46} = 0$
$K_{1,14} = k_{1,5}^1$	$K_{2,9} = 0$	$K_{3,5} = k_{3,11}^1$	$K_{3,47} = 0$
$K_{1,15} = k_{1,6}^1$	$K_{2,10} = 0$	$K_{3,6} = k_{3,12}^1$	$K_{3,48} = 0$
$K_{1,16} = k_{1,7}^1$	$K_{2,11} = 0$	$K_{3,7} = 0$	$K_{4,4} = k_{10,10}^1 + k_{1,1}^2$
$K_{1,17} = k_{1,8}^1$	$K_{2,12} = 0$	$K_{3,8} = 0$	$K_{4,5} = k_{10,11}^1 + k_{1,2}^2$
$K_{1,18} = k_{1,9}^1$	$K_{2,13} = k_{2,4}^1$	$K_{3,9} = 0$	$K_{4,6} = k_{10,12}^1 + k_{1,3}^2$
$K_{1,19} = 0$	$K_{2,14} = k_{2,5}^1$	$K_{3,10} = 0$	$K_{4,7} = k_{1,10}^2$
$K_{1,20} = 0$	$K_{2,15} = k_{2,6}^1$	$K_{3,11} = 0$	$K_{4,8} = k_{1,11}^2$
$K_{1,21} = 0$	$K_{2,16} = k_{2,7}^1$	$K_{3,12} = 0$	$K_{4,9} = k_{1,12}^2$
$K_{1,22} = 0$	$K_{2,17} = k_{2,8}^1$	$K_{3,13} = k_{3,4}^1$	$K_{4,10} = 0$
$K_{1,23} = 0$	$K_{2,18} = k_{2,9}^1$	$K_{3,14} = k_{3,5}^1$	$K_{4,11} = 0$
$K_{1,24} = 0$	$K_{2,19} = 0$	$K_{3,15} = k_{3,6}^1$	$K_{4,12} = 0$
$K_{1,25} = 0$	$K_{2,20} = 0$	$K_{3,16} = k_{3,7}^1$	$K_{4,13} = k_{10,4}^1$
$K_{1,26} = 0$	$K_{2,21} = 0$	$K_{3,17} = k_{3,8}^1$	$K_{4,14} = k_{10,5}^1$
$K_{1,27} = 0$	$K_{2,22} = 0$	$K_{3,18} = k_{3,9}^1$	$K_{4,15} = k_{10,6}^1$
$K_{1,28} = 0$	$K_{2,23} = 0$	$K_{3,19} = 0$	$K_{4,16} = k_{10,7}^1 + k_{1,4}^2$
$K_{1,29} = 0$	$K_{2,24} = 0$	$K_{3,20} = 0$	$K_{4,17} = k_{10,8}^1 + k_{1,5}^2$
$K_{1,30} = 0$	$K_{2,25} = 0$	$K_{3,21} = 0$	$K_{4,18} = k_{4,9}^1 + k_{1,6}^2$
$K_{1,31} = 0$	$K_{2,26} = 0$	$K_{3,22} = 0$	$K_{4,19} = k_{1,7}^2$
$K_{1,32} = 0$	$K_{2,27} = 0$	$K_{3,23} = 0$	$K_{4,20} = k_{1,8}^2$
$K_{1,33} = 0$	$K_{2,28} = 0$	$K_{3,24} = 0$	$K_{4,21} = k_{1,9}^2$
$K_{1,34} = 0$	$K_{2,29} = 0$	$K_{3,25} = 0$	$K_{4,22} = 0$
$K_{1,35} = 0$	$K_{2,30} = 0$	$K_{3,26} = 0$	$K_{4,23} = 0$
$K_{1,36} = 0$	$K_{2,31} = 0$	$K_{3,27} = 0$	$K_{4,24} = 0$
$K_{1,37} = 0$	$K_{2,32} = 0$	$K_{3,28} = 0$	$K_{4,25} = 0$
$K_{1,38} = 0$	$K_{2,33} = 0$	$K_{3,29} = 0$	$K_{4,26} = 0$
$K_{1,39} = 0$	$K_{2,34} = 0$	$K_{3,30} = 0$	$K_{4,27} = 0$
$K_{1,40} = 0$	$K_{2,35} = 0$	$K_{3,31} = 0$	$K_{4,28} = 0$
$K_{1,41} = 0$	$K_{2,36} = 0$	$K_{3,32} = 0$	$K_{4,29} = 0$
$K_{1,42} = 0$	$K_{2,37} = 0$	$K_{3,33} = 0$	$K_{4,30} = 0$

Çizelge 5.5 Sistem rijitlik matrisi terimleri

$K_{4,31} = 0$	$K_{5,29} = 0$	$K_{6,28} = 0$	$K_{7,28} = 0$
$K_{4,32} = 0$	$K_{5,30} = 0$	$K_{6,29} = 0$	$K_{7,29} = 0$
$K_{4,33} = 0$	$K_{5,31} = 0$	$K_{6,30} = 0$	$K_{7,30} = 0$
$K_{4,34} = 0$	$K_{5,32} = 0$	$K_{6,31} = 0$	$K_{7,31} = 0$
$K_{4,35} = 0$	$K_{5,33} = 0$	$K_{6,32} = 0$	$K_{7,32} = 0$
$K_{4,36} = 0$	$K_{5,34} = 0$	$K_{6,33} = 0$	$K_{7,33} = 0$
$K_{4,37} = 0$	$K_{5,35} = 0$	$K_{6,34} = 0$	$K_{7,34} = 0$
$K_{4,38} = 0$	$K_{5,36} = 0$	$K_{6,35} = 0$	$K_{7,35} = 0$
$K_{4,39} = 0$	$K_{5,37} = 0$	$K_{6,36} = 0$	$K_{7,36} = 0$
$K_{4,40} = 0$	$K_{5,38} = 0$	$K_{6,37} = 0$	$K_{7,37} = 0$
$K_{4,41} = 0$	$K_{5,39} = 0$	$K_{6,38} = 0$	$K_{7,38} = 0$
$K_{4,42} = 0$	$K_{5,40} = 0$	$K_{6,39} = 0$	$K_{7,39} = 0$
$K_{4,43} = 0$	$K_{5,41} = 0$	$K_{6,40} = 0$	$K_{7,40} = 0$
$K_{4,44} = 0$	$K_{5,42} = 0$	$K_{6,41} = 0$	$K_{7,41} = 0$
$K_{4,45} = 0$	$K_{5,43} = 0$	$K_{6,42} = 0$	$K_{7,42} = 0$
$K_{4,46} = 0$	$K_{5,44} = 0$	$K_{6,43} = 0$	$K_{7,43} = 0$
$K_{4,47} = 0$	$K_{5,45} = 0$	$K_{6,44} = 0$	$K_{7,44} = 0$
$K_{4,48} = 0$	$K_{5,46} = 0$	$K_{6,45} = 0$	$K_{7,45} = 0$
$K_{5,5} = k^1_{11,11} + k^2_{2,2}$	$K_{5,47} = 0$	$K_{6,46} = 0$	$K_{7,46} = 0$
$K_{5,6} = k^1_{11,12} + k^2_{2,3}$	$K_{5,48} = 0$	$K_{6,47} = 0$	$K_{7,47} = 0$
$K_{5,7} = k^2_{2,10}$	$K_{6,6} = k^1_{12,12} + k^2_{3,3}$	$K_{6,48} = 0$	$K_{7,48} = 0$
$K_{5,8} = k^2_{2,11}$	$K_{6,7} = k^2_{3,10}$	$K_{7,7} = k^2_{10,10} + k^3_{1,1}$	$K_{8,8} = k^2_{11,11} + k^3_{2,2}$
$K_{5,9} = k^2_{2,12}$	$K_{6,8} = k^2_{3,11}$	$K_{7,8} = k^2_{10,11} + k^3_{1,2}$	$K_{8,9} = k^2_{11,12} + k^3_{2,3}$
$K_{5,10} = 0$	$K_{6,9} = k^2_{3,12}$	$K_{7,9} = k^2_{10,12} + k^3_{1,3}$	$K_{8,10} = k^3_{2,10}$
$K_{5,11} = 0$	$K_{6,10} = 0$	$K_{7,10} = k^3_{1,10}$	$K_{8,11} = k^3_{2,11}$
$K_{5,12} = 0$	$K_{6,11} = 0$	$K_{7,11} = k^3_{1,11}$	$K_{8,12} = k^3_{2,12}$
$K_{5,13} = k^1_{11,4}$	$K_{6,12} = 0$	$K_{7,12} = k^3_{1,12}$	$K_{8,13} = 0$
$K_{5,14} = k^1_{11,5}$	$K_{6,13} = k^1_{12,4}$	$K_{7,13} = 0$	$K_{8,14} = 0$
$K_{5,15} = k^1_{11,6}$	$K_{6,14} = k^1_{12,5}$	$K_{7,14} = 0$	$K_{8,15} = 0$
$K_{5,16} = k^1_{11,7} + k^2_{2,4}$	$K_{6,15} = k^1_{12,6}$	$K_{7,15} = 0$	$K_{8,16} = k^2_{11,4}$
$K_{5,17} = k^1_{11,8} + k^2_{2,5}$	$K_{6,16} = k^1_{12,7} + k^2_{3,4}$	$K_{7,16} = k^2_{10,4}$	$K_{8,17} = k^2_{11,5}$
$K_{5,18} = k^1_{11,9} + k^2_{2,6}$	$K_{6,17} = k^1_{12,8} + k^2_{3,5}$	$K_{7,17} = k^2_{10,5}$	$K_{8,18} = k^2_{11,6}$
$K_{5,19} = k^2_{2,7}$	$K_{6,18} = k^1_{12,9} + k^2_{3,6}$	$K_{7,18} = k^2_{10,6}$	$K_{8,19} = k^2_{11,7} + k^3_{2,4}$
$K_{5,20} = k^2_{2,8}$	$K_{6,19} = k^2_{3,7}$	$K_{7,19} = k^2_{10,7} + k^3_{1,4}$	$K_{8,20} = k^2_{11,8} + k^3_{2,5}$
$K_{5,21} = k^2_{2,9}$	$K_{6,20} = k^2_{3,8}$	$K_{7,20} = k^2_{10,8} + k^3_{1,5}$	$K_{8,21} = k^2_{11,9} + k^3_{2,6}$
$K_{5,22} = 0$	$K_{6,21} = k^2_{3,9}$	$K_{7,21} = k^2_{10,9} + k^3_{1,6}$	$K_{8,22} = k^3_{2,7}$
$K_{5,23} = 0$	$K_{6,22} = 0$	$K_{7,22} = k^3_{1,7}$	$K_{8,23} = k^3_{2,8}$
$K_{5,24} = 0$	$K_{6,23} = 0$	$K_{7,23} = k^3_{1,8}$	$K_{8,24} = k^3_{2,9}$
$K_{5,25} = 0$	$K_{6,24} = 0$	$K_{7,24} = k^3_{1,9}$	$K_{8,25} = 0$
$K_{5,26} = 0$	$K_{6,25} = 0$	$K_{7,25} = 0$	$K_{8,26} = 0$
$K_{5,27} = 0$	$K_{6,26} = 0$	$K_{7,26} = 0$	$K_{8,27} = 0$
$K_{5,28} = 0$	$K_{6,27} = 0$	$K_{7,27} = 0$	$K_{8,28} = 0$

Çizelge 5.5 Sistem rijitlik matrisi terimleri

$K_{8,29} = 0$	$K_{9,31} = 0$	$K_{10,34} = 0$	$K_{11,38} = 0$
$K_{8,30} = 0$	$K_{9,32} = 0$	$K_{10,35} = 0$	$K_{11,39} = 0$
$K_{8,31} = 0$	$K_{9,33} = 0$	$K_{10,36} = 0$	$K_{11,40} = 0$
$K_{8,32} = 0$	$K_{9,34} = 0$	$K_{10,37} = 0$	$K_{11,41} = 0$
$K_{8,33} = 0$	$K_{9,35} = 0$	$K_{10,38} = 0$	$K_{11,42} = 0$
$K_{8,34} = 0$	$K_{9,36} = 0$	$K_{10,39} = 0$	$K_{11,43} = 0$
$K_{8,35} = 0$	$K_{9,37} = 0$	$K_{10,40} = 0$	$K_{11,44} = 0$
$K_{8,36} = 0$	$K_{9,38} = 0$	$K_{10,41} = 0$	$K_{11,45} = 0$
$K_{8,37} = 0$	$K_{9,39} = 0$	$K_{10,42} = 0$	$K_{11,46} = 0$
$K_{8,38} = 0$	$K_{9,40} = 0$	$K_{10,43} = 0$	$K_{11,47} = 0$
$K_{8,39} = 0$	$K_{9,41} = 0$	$K_{10,44} = 0$	$K_{11,48} = 0$
$K_{8,40} = 0$	$K_{9,42} = 0$	$K_{10,45} = 0$	$K_{12,12} = k^3_{12,12}$
$K_{8,41} = 0$	$K_{9,43} = 0$	$K_{10,46} = 0$	$K_{12,13} = 0$
$K_{8,42} = 0$	$K_{9,44} = 0$	$K_{10,47} = 0$	$K_{12,14} = 0$
$K_{8,43} = 0$	$K_{9,45} = 0$	$K_{10,48} = 0$	$K_{12,15} = 0$
$K_{8,44} = 0$	$K_{9,46} = 0$	$K_{11,11} = k^3_{11,11}$	$K_{12,16} = 0$
$K_{8,45} = 0$	$K_{9,47} = 0$	$K_{11,12} = k^3_{11,12}$	$K_{12,17} = 0$
$K_{8,46} = 0$	$K_{9,48} = 0$	$K_{11,13} = 0$	$K_{12,18} = 0$
$K_{8,47} = 0$	$K_{10,10} = k^3_{10,10}$	$K_{11,14} = 0$	$K_{12,19} = k^3_{12,4}$
$K_{8,48} = 0$	$K_{10,11} = k^3_{10,11}$	$K_{11,15} = 0$	$K_{12,20} = k^3_{12,5}$
$K_{9,9} = k^2_{12,12} + k^3_{3,3}$	$K_{10,12} = k^3_{10,12}$	$K_{11,16} = 0$	$K_{12,21} = k^3_{12,6}$
$K_{9,10} = k^3_{3,10}$	$K_{10,13} = 0$	$K_{11,17} = 0$	$K_{12,22} = k^3_{12,7}$
$K_{9,11} = k^3_{3,11}$	$K_{10,14} = 0$	$K_{11,18} = 0$	$K_{12,23} = k^3_{12,8}$
$K_{9,12} = k^3_{3,12}$	$K_{10,15} = 0$	$K_{11,19} = k^3_{11,4}$	$K_{12,24} = k^3_{12,9}$
$K_{9,13} = 0$	$K_{10,16} = 0$	$K_{11,20} = k^3_{11,5}$	$K_{12,25} = 0$
$K_{9,14} = 0$	$K_{10,17} = 0$	$K_{11,21} = k^3_{11,6}$	$K_{12,26} = 0$
$K_{9,15} = 0$	$K_{10,18} = 0$	$K_{11,22} = k^3_{11,7}$	$K_{12,27} = 0$
$K_{9,16} = k^2_{12,4}$	$K_{10,19} = k^3_{10,4}$	$K_{11,23} = k^3_{11,8}$	$K_{12,28} = 0$
$K_{9,17} = k^2_{12,5}$	$K_{10,20} = k^3_{10,5}$	$K_{11,24} = k^3_{11,9}$	$K_{12,29} = 0$
$K_{9,18} = k^2_{12,6}$	$K_{10,21} = k^3_{10,6}$	$K_{11,25} = 0$	$K_{12,30} = 0$
$K_{9,19} = k^2_{12,7}$	$K_{10,22} = k^3_{10,7}$	$K_{11,26} = 0$	$K_{12,31} = 0$
$K_{9,20} = k^2_{12,8} + k^3_{3,5}$	$K_{10,23} = k^3_{10,8}$	$K_{11,27} = 0$	$K_{12,32} = 0$
$K_{9,21} = k^2_{12,9} + k^3_{3,6}$	$K_{10,24} = k^3_{10,9}$	$K_{11,28} = 0$	$K_{12,33} = 0$
$K_{9,22} = k^3_{3,7}$	$K_{10,25} = 0$	$K_{11,29} = 0$	$K_{12,34} = 0$
$K_{9,23} = k^3_{3,8}$	$K_{10,26} = 0$	$K_{11,30} = 0$	$K_{12,35} = 0$
$K_{9,24} = k^3_{3,9}$	$K_{10,27} = 0$	$K_{11,31} = 0$	$K_{12,36} = 0$
$K_{9,25} = 0$	$K_{10,28} = 0$	$K_{11,32} = 0$	$K_{12,37} = 0$
$K_{9,26} = 0$	$K_{10,29} = 0$	$K_{11,33} = 0$	$K_{12,38} = 0$
$K_{9,27} = 0$	$K_{10,30} = 0$	$K_{11,34} = 0$	$K_{12,39} = 0$
$K_{9,28} = 0$	$K_{10,31} = 0$	$K_{11,35} = 0$	$K_{12,40} = 0$
$K_{9,29} = 0$	$K_{10,32} = 0$	$K_{11,36} = 0$	$K_{12,41} = 0$
$K_{9,30} = 0$	$K_{10,33} = 0$	$K_{11,37} = 0$	$K_{12,42} = 0$

Çizelge 5.5 Sistem rijitlik matrisi terimleri

$K_{12,43} = 0$	$K_{14,14} = k_{5,5}^1 + k_{2,2}^4$	$K_{15,22} = 0$	$K_{16,31} = k_{1,7}^5$
$K_{12,44} = 0$	$K_{14,15} = k_{5,6}^1 + k_{2,3}^4$	$K_{15,23} = 0$	$K_{16,32} = k_{1,8}^5$
$K_{12,45} = 0$	$K_{14,16} = k_{5,7}^1 + k_{2,10}^4$	$K_{15,24} = 0$	$K_{16,33} = k_{1,9}^5$
$K_{12,46} = 0$	$K_{14,17} = k_{5,8}^1 + k_{2,11}^4$	$K_{15,25} = k_{3,4}^4$	$K_{16,34} = 0$
$K_{12,47} = 0$	$K_{14,18} = k_{5,9}^1 + k_{2,12}^4$	$K_{15,26} = k_{3,5}^4$	$K_{16,35} = 0$
$K_{12,48} = 0$	$K_{14,19} = 0$	$K_{15,27} = k_{3,6}^4$	$K_{16,36} = 0$
$K_{13,13} = k_{4,4}^1 + k_{1,1}^4$	$K_{14,20} = 0$	$K_{15,28} = k_{3,7}^4$	$K_{16,37} = 0$
$K_{13,14} = k_{4,5}^1 + k_{1,2}^4$	$K_{14,21} = 0$	$K_{15,29} = k_{3,8}^4$	$K_{16,38} = 0$
$K_{13,15} = k_{4,6}^1 + k_{1,3}^4$	$K_{14,22} = 0$	$K_{15,30} = k_{3,9}^4$	$K_{16,39} = 0$
$K_{13,16} = k_{4,7}^1 + k_{1,10}^4$	$K_{14,23} = 0$	$K_{15,31} = 0$	$K_{16,40} = 0$
$K_{13,17} = k_{4,8}^1 + k_{1,11}^4$	$K_{14,24} = 0$	$K_{15,32} = 0$	$K_{16,41} = 0$
$K_{13,18} = k_{4,9}^1 + k_{1,12}^4$	$K_{14,25} = k_{2,4}^4$	$K_{15,33} = 0$	$K_{16,42} = 0$
$K_{13,19} = 0$	$K_{14,26} = k_{2,5}^4$	$K_{15,34} = 0$	$K_{16,43} = 0$
$K_{13,20} = 0$	$K_{14,27} = k_{2,6}^4$	$K_{15,35} = 0$	$K_{16,44} = 0$
$K_{13,21} = 0$	$K_{14,28} = k_{2,7}^4$	$K_{15,36} = 0$	$K_{16,45} = 0$
$K_{13,22} = 0$	$K_{14,29} = k_{2,8}^4$	$K_{15,37} = 0$	$K_{16,46} = 0$
$K_{13,23} = 0$	$K_{14,30} = k_{2,9}^4$	$K_{15,38} = 0$	$K_{16,47} = 0$
$K_{13,24} = 0$	$K_{14,31} = 0$	$K_{15,39} = 0$	$K_{16,48} = 0$
$K_{13,25} = k_{1,4}^4$	$K_{14,32} = 0$	$K_{15,40} = 0$	$K_{17,17} = k_{8,8}^1 + k_{5,5}^2 + k_{2,2}^3 + k_{11,11}^4$
$K_{13,26} = k_{1,5}^4$	$K_{14,33} = 0$	$K_{15,41} = 0$	$K_{17,18} = k_{8,9}^1 + k_{5,6}^2 + k_{2,3}^3 + k_{11,12}^4$
$K_{13,27} = k_{1,6}^4$	$K_{14,34} = 0$	$K_{15,42} = 0$	$K_{17,19} = k_{5,7}^2 + k_{2,10}^3$
$K_{13,28} = k_{1,7}^4$	$K_{14,35} = 0$	$K_{15,43} = 0$	$K_{17,20} = k_{5,8}^2 + k_{2,11}^3$
$K_{13,29} = k_{1,8}^4$	$K_{14,36} = 0$	$K_{15,44} = 0$	$K_{17,21} = k_{5,9}^2 + k_{2,12}^3$
$K_{13,30} = k_{1,9}^4$	$K_{14,37} = 0$	$K_{15,45} = 0$	$K_{17,22} = 0$
$K_{13,31} = 0$	$K_{14,38} = 0$	$K_{15,46} = 0$	$K_{17,23} = 0$
$K_{13,32} = 0$	$K_{14,39} = 0$	$K_{15,47} = 0$	$K_{17,24} = 0$
$K_{13,33} = 0$	$K_{14,40} = 0$	$K_{15,48} = 0$	$K_{17,25} = k_{11,4}^4$
$K_{13,34} = 0$	$K_{14,41} = 0$	$K_{16,16} = k_{7,7}^1 + k_{4,4}^2 + k_{1,1}^3 + k_{10,10}^4$	$K_{17,26} = k_{11,5}^4$
$K_{13,35} = 0$	$K_{14,42} = 0$	$K_{16,17} = k_{7,8}^1 + k_{4,5}^2 + k_{1,2}^3 + k_{10,11}^4$	$K_{17,27} = k_{11,6}^4$
$K_{13,36} = 0$	$K_{14,43} = 0$	$K_{16,18} = k_{7,9}^1 + k_{4,6}^2 + k_{1,3}^3 + k_{10,12}^4$	$K_{17,28} = k_{2,4}^3 + k_{11,7}^4$
$K_{13,37} = 0$	$K_{14,44} = 0$	$K_{16,19} = k_{4,7}^2 + k_{1,10}^3$	$K_{17,29} = k_{2,5}^3 + k_{11,8}^4$
$K_{13,38} = 0$	$K_{14,45} = 0$	$K_{16,20} = k_{4,8}^2 + k_{1,11}^3$	$K_{17,30} = k_{2,6}^3 + k_{11,9}^4$
$K_{13,39} = 0$	$K_{14,46} = 0$	$K_{16,21} = k_{4,9}^2 + k_{1,12}^3$	$K_{17,31} = k_{2,7}^3$
$K_{13,40} = 0$	$K_{14,47} = 0$	$K_{16,22} = 0$	$K_{17,32} = k_{2,8}^3$
$K_{13,41} = 0$	$K_{14,48} = 0$	$K_{16,23} = 0$	$K_{17,33} = k_{2,9}^3$
$K_{13,42} = 0$	$K_{15,15} = k_{6,6}^1 + k_{3,3}^4$	$K_{16,24} = 0$	$K_{17,34} = 0$
$K_{13,43} = 0$	$K_{15,16} = k_{6,7}^1 + k_{3,10}^4$	$K_{16,25} = k_{10,4}^4$	$K_{17,35} = 0$
$K_{13,44} = 0$	$K_{15,17} = k_{6,8}^1 + k_{3,11}^4$	$K_{16,26} = k_{10,5}^4$	$K_{17,36} = 0$
$K_{13,45} = 0$	$K_{15,18} = k_{6,9}^1 + k_{3,12}^4$	$K_{16,27} = k_{10,6}^4$	$K_{17,37} = 0$
$K_{13,46} = 0$	$K_{15,19} = 0$	$K_{16,28} = k_{1,4}^3 + k_{10,7}^4$	$K_{17,38} = 0$
$K_{13,47} = 0$	$K_{15,20} = 0$	$K_{16,29} = k_{1,5}^3 + k_{10,8}^4$	$K_{17,39} = 0$
$K_{13,48} = 0$	$K_{15,21} = 0$	$K_{16,30} = k_{1,6}^3 + k_{10,9}^4$	$K_{17,40} = 0$

Çizelge 5.5 Sistem rijitlik matrisi terimleri

$K_{17,41} = 0$	$K_{19,22} = k_{4,7}^3 + k_{1,10}^6$	$K_{20,35} = k_{2,8}^6$
$K_{17,42} = 0$	$K_{19,23} = k_{4,8}^3 + k_{1,11}^6$	$K_{20,36} = k_{2,9}^6$
$K_{17,43} = 0$	$K_{19,24} = k_{4,9}^3 + k_{1,12}^6$	$K_{20,37} = 0$
$K_{17,44} = 0$	$K_{19,25} = 0$	$K_{20,38} = 0$
$K_{17,45} = 0$	$K_{19,26} = 0$	$K_{20,39} = 0$
$K_{17,46} = 0$	$K_{19,27} = 0$	$K_{20,40} = 0$
$K_{17,47} = 0$	$K_{19,28} = k_{10,4}^5$	$K_{20,41} = 0$
$K_{17,48} = 0$	$K_{19,29} = k_{10,5}^5$	$K_{20,42} = 0$
$K_{18,18} = k_{9,9}^1 + k_{6,6}^2 + k_{3,3}^5 + k_{12,12}^4$	$K_{19,30} = k_{10,6}^5$	$K_{20,43} = 0$
$K_{18,19} = k_{6,7}^2 + k_{3,10}^5$	$K_{19,31} = k_{10,7}^5 + k_{1,4}^6$	$K_{20,44} = 0$
$K_{18,20} = k_{6,8}^2 + k_{3,11}^5$	$K_{19,32} = k_{10,8}^5 + k_{1,5}^6$	$K_{20,45} = 0$
$K_{18,21} = k_{6,9}^2 + k_{3,12}^5$	$K_{19,33} = k_{10,9}^5 + k_{1,6}^6$	$K_{20,46} = 0$
$K_{18,22} = 0$	$K_{19,34} = k_{1,7}^6$	$K_{20,47} = 0$
$K_{18,23} = 0$	$K_{19,35} = k_{1,8}^6$	$K_{20,48} = 0$
$K_{18,24} = 0$	$K_{19,36} = k_{1,9}^6$	$K_{21,21} = k_{9,9}^2 + k_{6,6}^3 + k_{12,12}^5 + k_{3,3}^4$
$K_{18,25} = k_{12,4}^4$	$K_{19,37} = 0$	$K_{21,22} = k_{6,7}^3 + k_{3,10}^6$
$K_{18,26} = k_{12,5}^4$	$K_{19,38} = 0$	$K_{21,23} = k_{6,8}^3 + k_{3,11}^6$
$K_{18,27} = k_{12,6}^4$	$K_{19,39} = 0$	$K_{21,24} = k_{6,9}^3 + k_{3,12}^6$
$K_{18,28} = k_{3,4}^5 + k_{12,7}^4$	$K_{19,40} = 0$	$K_{21,25} = 0$
$K_{18,29} = k_{3,5}^5 + k_{12,8}^4$	$K_{19,41} = 0$	$K_{21,26} = 0$
$K_{18,30} = k_{3,6}^5 + k_{12,9}^4$	$K_{19,42} = 0$	$K_{21,27} = 0$
$K_{18,31} = k_{3,7}^5$	$K_{19,43} = 0$	$K_{21,28} = k_{12,4}^5$
$K_{18,32} = k_{3,8}^5$	$K_{19,44} = 0$	$K_{21,29} = k_{12,5}^5$
$K_{18,33} = k_{3,9}^5$	$K_{19,45} = 0$	$K_{21,30} = k_{12,6}^5$
$K_{18,34} = 0$	$K_{19,46} = 0$	$K_{21,31} = k_{12,7}^5 + k_{3,4}^6$
$K_{18,35} = 0$	$K_{19,47} = 0$	$K_{21,32} = k_{12,8}^5 + k_{3,5}^6$
$K_{18,36} = 0$	$K_{19,48} = 0$	$K_{21,33} = k_{12,9}^5 + k_{3,6}^6$
$K_{18,37} = 0$	$K_{20,20} = k_{8,8}^2 + k_{5,5}^3 + k_{11,11}^5 + k_{2,2}^6$	$K_{21,34} = k_{3,7}^6$
$K_{18,38} = 0$	$K_{20,21} = k_{8,9}^2 + k_{5,6}^3 + k_{11,12}^5 + k_{2,3}^6$	$K_{21,35} = k_{3,8}^6$
$K_{18,39} = 0$	$K_{20,22} = k_{5,7}^3 + k_{2,10}^6$	$K_{21,36} = k_{3,9}^6$
$K_{18,40} = 0$	$K_{20,23} = k_{5,8}^3 + k_{2,11}^6$	$K_{21,37} = 0$
$K_{18,41} = 0$	$K_{20,24} = k_{5,9}^3 + k_{2,12}^6$	$K_{21,38} = 0$
$K_{18,42} = 0$	$K_{20,25} = 0$	$K_{21,39} = 0$
$K_{18,43} = 0$	$K_{20,26} = 0$	$K_{21,40} = 0$
$K_{18,44} = 0$	$K_{20,27} = 0$	$K_{21,41} = 0$
$K_{18,45} = 0$	$K_{20,28} = k_{11,4}^5$	$K_{21,42} = 0$
$K_{18,46} = 0$	$K_{20,29} = k_{11,5}^5$	$K_{21,43} = 0$
$K_{18,47} = 0$	$K_{20,30} = k_{11,6}^5$	$K_{21,44} = 0$
$K_{18,48} = 0$	$K_{20,31} = k_{11,7}^5 + k_{2,4}^6$	$K_{21,45} = 0$
$K_{19,19} = k_{7,7}^2 + k_{4,4}^3 + k_{10,10}^5 + k_{1,1}^6$	$K_{20,32} = k_{11,8}^5 + k_{2,5}^6$	$K_{21,46} = 0$
$K_{19,20} = k_{7,8}^2 + k_{4,5}^3 + k_{10,11}^5 + k_{1,2}^6$	$K_{20,33} = k_{11,9}^5 + k_{2,6}^6$	$K_{21,47} = 0$
$K_{19,21} = k_{7,9}^2 + k_{4,6}^3 + k_{10,12}^5 + k_{1,3}^6$	$K_{20,34} = k_{2,7}^6$	$K_{21,48} = 0$

Çizelge 5.5 Sistem rijitlik matrisi terimleri

$K_{22,22} = K_{7,7}^3 + k_{10,10}^6$	$K_{23,38} = 0$	$K_{25,31} = 0$
$K_{22,23} = k_{7,8}^3 + k_{10,11}^6$	$K_{23,39} = 0$	$K_{25,32} = 0$
$K_{22,24} = k_{7,9}^3 + k_{10,12}^6$	$K_{23,40} = 0$	$K_{25,33} = 0$
$K_{22,25} = 0$	$K_{23,41} = 0$	$K_{25,34} = 0$
$K_{22,26} = 0$	$K_{23,42} = 0$	$K_{25,35} = 0$
$K_{22,27} = 0$	$K_{23,43} = 0$	$K_{25,36} = 0$
$K_{22,28} = 0$	$K_{23,44} = 0$	$K_{25,37} = k_{1,4}^7$
$K_{22,29} = 0$	$K_{23,45} = 0$	$K_{25,38} = k_{1,5}^7$
$K_{22,30} = 0$	$K_{23,46} = 0$	$K_{25,39} = k_{1,6}^7$
$K_{22,31} = k_{10,4}^6$	$K_{23,47} = 0$	$K_{25,40} = k_{1,7}^7$
$K_{22,32} = k_{10,5}^6$	$K_{23,48} = 0$	$K_{25,41} = k_{1,8}^7$
$K_{22,33} = k_{10,6}^6$	$K_{24,24} = k_{9,9}^3 + k_{12,12}^6$	$K_{25,42} = k_{1,9}^7$
$K_{22,34} = k_{10,7}^6$	$K_{24,25} = 0$	$K_{25,43} = 0$
$K_{22,35} = k_{10,8}^6$	$K_{24,26} = 0$	$K_{25,44} = 0$
$K_{22,36} = k_{10,9}^6$	$K_{24,27} = 0$	$K_{25,45} = 0$
$K_{22,37} = 0$	$K_{24,28} = 0$	$K_{25,46} = 0$
$K_{22,38} = 0$	$K_{24,29} = 0$	$K_{25,47} = 0$
$K_{22,39} = 0$	$K_{24,30} = 0$	$K_{25,48} = 0$
$K_{22,40} = 0$	$K_{24,31} = k_{12,4}^6$	$K_{26,26} = k_{5,5}^4 + k_{2,2}^7$
$K_{22,41} = 0$	$K_{24,32} = k_{12,5}^6$	$K_{26,27} = k_{5,6}^4 + k_{2,3}^7$
$K_{22,42} = 0$	$K_{24,33} = k_{12,6}^6$	$K_{26,28} = k_{5,7}^4 + k_{2,10}^7$
$K_{22,43} = 0$	$K_{24,34} = k_{12,7}^6$	$K_{26,29} = k_{5,8}^4 + k_{2,11}^7$
$K_{22,44} = 0$	$K_{24,35} = k_{12,8}^6$	$K_{26,30} = k_{5,9}^4 + k_{2,12}^7$
$K_{22,45} = 0$	$K_{24,36} = k_{12,9}^6$	$K_{26,31} = 0$
$K_{22,46} = 0$	$K_{24,37} = 0$	$K_{26,32} = 0$
$K_{22,47} = 0$	$K_{24,38} = 0$	$K_{26,33} = 0$
$K_{22,48} = 0$	$K_{24,39} = 0$	$K_{26,34} = 0$
$K_{23,23} = k_{8,8}^3 + k_{11,11}^6$	$K_{24,40} = 0$	$K_{26,35} = 0$
$K_{23,24} = k_{8,9}^3 + k_{11,12}^6$	$K_{24,41} = 0$	$K_{26,36} = 0$
$K_{23,25} = 0$	$K_{24,42} = 0$	$K_{26,37} = k_{2,4}^7$
$K_{23,26} = 0$	$K_{24,43} = 0$	$K_{26,38} = k_{2,5}^7$
$K_{23,27} = 0$	$K_{24,44} = 0$	$K_{26,39} = k_{2,6}^7$
$K_{23,28} = 0$	$K_{24,45} = 0$	$K_{26,40} = k_{2,7}^7$
$K_{23,29} = 0$	$K_{24,46} = 0$	$K_{26,41} = k_{2,8}^7$
$K_{23,30} = 0$	$K_{24,47} = 0$	$K_{26,42} = k_{2,9}^7$
$K_{23,31} = k_{11,4}^6$	$K_{24,48} = 0$	$K_{26,43} = 0$
$K_{23,32} = k_{11,5}^6$	$K_{25,25} = k_{4,4}^4 + k_{1,1}^7$	$K_{26,44} = 0$
$K_{23,33} = k_{11,6}^6$	$K_{25,26} = k_{4,5}^4 + k_{1,2}^7$	$K_{26,45} = 0$
$K_{23,34} = k_{11,7}^6$	$K_{25,27} = k_{4,6}^4 + k_{1,3}^7$	$K_{26,46} = 0$
$K_{23,35} = k_{11,8}^6$	$K_{25,28} = k_{4,7}^4 + k_{1,10}^7$	$K_{26,47} = 0$
$K_{23,36} = k_{11,9}^6$	$K_{25,29} = k_{4,8}^4 + k_{1,11}^7$	$K_{26,48} = 0$
$K_{23,37} = 0$	$K_{25,30} = k_{4,9}^4 + k_{1,12}^7$	$K_{27,27} = k_{6,6}^4 + k_{3,3}^7$

Çizelge 5.5 Sistem rijitlik matrisi terimleri

$K_{27,28} = k_{6,7}^4 + k_{3,10}^7$	$K_{29,29} = k_{8,8}^4 + k_{5,5}^5 + k_{11,11}^7 + k_{2,2}^8$	$K_{31,34} = K_{4,7}^6 + k_{1,10}^9$
$K_{27,29} = k_{6,8}^4 + k_{3,11}^7$	$K_{29,30} = k_{8,9}^4 + k_{5,6}^5 + k_{11,12}^7 + k_{2,3}^8$	$K_{31,35} = K_{4,8}^6 + k_{1,11}^9$
$K_{27,30} = k_{6,9}^4 + k_{3,12}^7$	$K_{29,31} = k_{5,7}^5 + k_{2,10}^8$	$K_{31,36} = K_{4,9}^6 + k_{1,12}^9$
$K_{27,31} = 0$	$K_{29,32} = k_{5,8}^5 + k_{2,11}^8$	$K_{31,37} = 0$
$K_{27,32} = 0$	$K_{29,33} = k_{5,9}^5 + k_{2,12}^8$	$K_{31,38} = 0$
$K_{27,33} = 0$	$K_{29,34} = 0$	$K_{31,39} = 0$
$K_{27,34} = 0$	$K_{29,35} = 0$	$K_{31,40} = k_{10,4}^8$
$K_{27,35} = 0$	$K_{29,36} = 0$	$K_{31,41} = k_{10,5}^8$
$K_{27,36} = 0$	$K_{29,37} = k_{11,4}^7$	$K_{31,42} = k_{10,6}^8$
$K_{27,37} = K_{3,4}^7$	$K_{29,38} = k_{11,5}^7$	$K_{31,43} = K_{10,7}^8 + k_{1,14}^9$
$K_{27,38} = K_{3,5}^7$	$K_{29,39} = k_{11,6}^7$	$K_{31,44} = K_{10,8}^8 + k_{1,15}^9$
$K_{27,39} = K_{3,6}^7$	$K_{29,40} = k_{11,7}^7 + k_{2,4}^8$	$K_{31,45} = K_{10,9}^8 + k_{1,16}^9$
$K_{27,40} = K_{3,7}^7$	$K_{29,41} = k_{11,8}^7 + k_{2,5}^8$	$K_{31,46} = k_{1,17}^9$
$K_{27,41} = K_{3,8}^7$	$K_{29,42} = k_{11,9}^7 + k_{2,6}^8$	$K_{31,47} = k_{1,18}^9$
$K_{27,42} = K_{3,9}^7$	$K_{29,43} = K_{2,7}^8$	$K_{31,48} = k_{1,19}^9$
$K_{27,43} = 0$	$K_{29,44} = K_{2,8}^8$	$K_{32,32} = k_{8,8}^4 + k_{5,5}^5 + k_{11,11}^7 + k_{2,2}^8$
$K_{27,44} = 0$	$K_{29,45} = K_{2,9}^8$	$K_{32,33} = k_{8,9}^4 + k_{5,6}^5 + k_{11,12}^7 + k_{2,3}^8$
$K_{27,45} = 0$	$K_{29,46} = 0$	$K_{32,34} = K_{5,7}^5 + k_{2,10}^8$
$K_{27,46} = 0$	$K_{29,47} = 0$	$K_{32,35} = K_{5,8}^5 + k_{2,11}^8$
$K_{27,47} = 0$	$K_{29,48} = 0$	$K_{32,36} = K_{5,9}^5 + k_{2,12}^8$
$K_{27,48} = 0$	$K_{30,30} = k_{9,9}^4 + k_{6,6}^5 + k_{12,12}^7 + k_{3,3}^8$	$K_{32,37} = 0$
$K_{28,28} = k_{7,7}^4 + k_{4,4}^5 + k_{10,10}^7 + k_{1,1}^8$	$K_{30,31} = k_{6,7}^5 + k_{3,10}^8$	$K_{32,38} = 0$
$K_{28,29} = k_{7,8}^4 + k_{4,5}^5 + k_{10,11}^7 + k_{1,2}^8$	$K_{30,32} = k_{6,8}^5 + k_{3,11}^8$	$K_{32,39} = 0$
$K_{28,30} = k_{7,9}^4 + k_{4,6}^5 + k_{10,12}^7 + k_{1,3}^8$	$K_{30,33} = k_{6,9}^5 + k_{3,12}^8$	$K_{32,40} = k_{11,4}^8$
$K_{28,31} = k_{4,7}^5 + k_{1,10}^8$	$K_{30,34} = 0$	$K_{32,41} = k_{11,5}^8$
$K_{28,32} = k_{4,8}^5 + k_{1,11}^8$	$K_{30,35} = 0$	$K_{32,42} = k_{11,6}^8$
$K_{28,33} = k_{4,9}^5 + k_{1,12}^8$	$K_{30,36} = 0$	$K_{32,43} = k_{11,7}^8 + k_{2,4}^9$
$K_{28,34} = 0$	$K_{30,37} = k_{12,4}^7$	$K_{32,44} = k_{11,8}^8 + k_{2,5}^9$
$K_{28,35} = 0$	$K_{30,38} = k_{12,5}^7$	$K_{32,45} = k_{11,9}^8 + k_{2,6}^9$
$K_{28,36} = 0$	$K_{30,39} = k_{12,6}^7$	$K_{32,46} = k_{2,7}^9$
$K_{28,37} = k_{10,4}^7$	$K_{30,40} = k_{12,7}^7 + k_{3,4}^8$	$K_{32,47} = k_{2,8}^9$
$K_{28,38} = k_{10,5}^7$	$K_{30,41} = k_{12,8}^7 + k_{3,5}^8$	$K_{32,48} = k_{2,9}^9$
$K_{28,39} = k_{10,6}^7$	$K_{30,42} = k_{12,9}^7 + k_{3,6}^8$	$K_{33,33} = k_{9,9}^4 + k_{6,6}^5 + k_{12,12}^7 + k_{3,3}^8$
$K_{28,40} = k_{10,7}^7 + k_{1,4}^8$	$K_{30,43} = K_{3,7}^8$	$K_{33,34} = k_{6,7}^6 + k_{3,10}^9$
$K_{28,41} = k_{10,8}^7 + k_{1,5}^8$	$K_{30,44} = K_{3,8}^8$	$K_{33,35} = k_{6,7}^6 + k_{3,11}^9$
$K_{28,42} = k_{10,9}^7 + k_{1,6}^8$	$K_{30,45} = K_{3,9}^8$	$K_{33,36} = k_{6,7}^6 + k_{3,12}^9$
$K_{28,43} = k_{1,7}^8$	$K_{30,46} = 0$	$K_{33,37} = 0$
$K_{28,44} = k_{1,8}^8$	$K_{30,47} = 0$	$K_{33,38} = 0$
$K_{28,45} = k_{1,9}^8$	$K_{30,48} = 0$	$K_{33,39} = 0$
$K_{28,46} = 0$	$K_{31,31} = k_{7,7}^5 + k_{4,4}^6 + k_{10,10}^7 + k_{1,1}^9$	$K_{33,40} = k_{12,4}^8$
$K_{28,47} = 0$	$K_{31,32} = k_{7,8}^5 + k_{4,5}^6 + k_{10,11}^7 + k_{1,2}^9$	$K_{33,41} = k_{12,5}^8$
$K_{28,48} = 0$	$K_{31,33} = k_{7,9}^5 + k_{4,6}^6 + k_{10,12}^7 + k_{1,3}^9$	$K_{33,42} = k_{12,6}^8$

Çizelge 5.5 Sistem rijitlik matrisi terimleri

$K_{33,43} = k_{12,7}^8 + k_{3,4}^9$	$K_{38,43} = k_{12,4}^9$	$K_{40,43} = k_{4,7}^8$
$K_{33,44} = k_{12,8}^8 + k_{3,5}^9$	$K_{38,44} = k_{12,5}^9$	$K_{40,44} = k_{4,8}^8$
$K_{33,45} = k_{12,9}^8 + k_{3,6}^9$	$K_{38,45} = k_{12,6}^9$	$K_{40,45} = k_{4,9}^8$
$K_{33,46} = k_{3,7}^9$	$K_{38,46} = k_{12,7}^9$	$K_{40,46} = 0$
$K_{33,47} = k_{3,8}^9$	$K_{38,47} = k_{12,8}^9$	$K_{40,47} = 0$
$K_{33,48} = k_{3,9}^9$	$K_{38,48} = k_{12,9}^9$	$K_{40,48} = 0$
$K_{34,34} = k_{7,7}^6 + k_{10,10}^9$	$K_{37,37} = k_{4,4}^7$	$K_{41,41} = k_{8,8}^7 + k_{5,5}^8$
$K_{34,35} = k_{7,8}^6 + k_{10,11}^9$	$K_{37,38} = k_{4,5}^7$	$K_{41,42} = k_{8,9}^7 + k_{5,6}^8$
$K_{34,36} = k_{7,9}^6 + k_{10,12}^9$	$K_{37,39} = k_{4,6}^7$	$K_{41,43} = k_{5,7}^8$
$K_{34,37} = 0$	$K_{37,40} = k_{4,7}^7$	$K_{41,44} = k_{5,8}^8$
$K_{34,38} = 0$	$K_{37,41} = k_{4,8}^7$	$K_{41,45} = k_{5,9}^8$
$K_{34,39} = 0$	$K_{37,42} = k_{4,9}^7$	$K_{41,46} = 0$
$K_{34,40} = 0$	$K_{37,43} = 0$	$K_{41,47} = 0$
$K_{34,41} = 0$	$K_{37,44} = 0$	$K_{41,48} = 0$
$K_{34,42} = 0$	$K_{37,45} = 0$	$K_{42,42} = k_{9,9}^7 + k_{6,6}^8$
$K_{34,43} = k_{10,4}^9$	$K_{37,46} = 0$	$K_{42,43} = k_{6,7}^8$
$K_{34,44} = k_{10,5}^9$	$K_{37,47} = 0$	$K_{42,44} = k_{6,8}^8$
$K_{34,45} = k_{10,6}^9$	$K_{37,48} = 0$	$K_{42,45} = k_{6,9}^8$
$K_{34,46} = k_{10,7}^9$	$K_{38,38} = k_{5,5}^7$	$K_{42,46} = 0$
$K_{34,47} = k_{10,8}^9$	$K_{38,39} = k_{5,6}^7$	$K_{42,47} = 0$
$K_{34,48} = k_{10,9}^9$	$K_{38,40} = k_{5,7}^7$	$K_{42,48} = 0$
$K_{35,35} = k_{8,8}^6 + k_{11,11}^9$	$K_{38,41} = k_{5,8}^7$	$K_{43,43} = k_{7,7}^8 + k_{4,4}^9$
$K_{35,36} = k_{8,9}^6 + k_{11,12}^9$	$K_{38,42} = k_{5,9}^7$	$K_{43,44} = k_{7,8}^8 + k_{4,5}^9$
$K_{35,37} = 0$	$K_{38,43} = 0$	$K_{43,45} = k_{7,9}^8 + k_{4,6}^9$
$K_{35,38} = 0$	$K_{38,44} = 0$	$K_{43,46} = k_{4,7}^9$
$K_{35,39} = 0$	$K_{38,45} = 0$	$K_{43,47} = k_{4,8}^9$
$K_{35,40} = 0$	$K_{38,46} = 0$	$K_{43,48} = k_{4,9}^9$
$K_{35,41} = 0$	$K_{38,47} = 0$	$K_{44,44} = k_{8,8}^8 + k_{5,5}^9$
$K_{35,42} = 0$	$K_{38,48} = 0$	$K_{44,45} = k_{8,9}^8 + k_{5,6}^9$
$K_{35,43} = k_{11,4}^9$	$K_{39,39} = k_{6,6}^7$	$K_{44,46} = k_{5,7}^9$
$K_{35,44} = k_{11,5}^9$	$K_{39,40} = k_{6,7}^7$	$K_{44,47} = k_{5,8}^9$
$K_{35,45} = k_{11,6}^9$	$K_{39,41} = k_{6,8}^7$	$K_{44,48} = k_{5,9}^9$
$K_{35,46} = k_{11,7}^9$	$K_{39,42} = k_{6,9}^7$	$K_{45,45} = k_{9,9}^8 + k_{6,6}^9$
$K_{35,47} = k_{11,8}^9$	$K_{39,43} = 0$	$K_{45,46} = k_{6,7}^9$
$K_{35,48} = k_{11,9}^9$	$K_{39,44} = 0$	$K_{45,47} = k_{6,8}^9$
$K_{36,36} = k_{9,9}^6 + k_{12,12}^9$	$K_{39,45} = 0$	$K_{45,48} = k_{6,9}^9$
$K_{36,37} = 0$	$K_{39,46} = 0$	$K_{46,46} = k_{7,7}^9$
$K_{36,38} = 0$	$K_{39,47} = 0$	$K_{46,47} = k_{7,8}^9$
$K_{36,39} = 0$	$K_{39,48} = 0$	$K_{46,48} = k_{7,9}^9$
$K_{36,40} = 0$	$K_{40,40} = k_{7,7}^7 + k_{4,4}^8$	$K_{47,47} = k_{8,8}^9$
$K_{36,41} = 0$	$K_{40,41} = k_{7,8}^7 + k_{4,5}^8$	$K_{47,48} = k_{8,9}^9$
$K_{36,42} = 0$	$K_{40,42} = k_{7,9}^7 + k_{4,6}^8$	$K_{48,48} = k_{9,9}^9$

Çevirme matrisleriyle de aynı sonuçlara ulaşınız. Çizelge 5.6'da her eleman için oluşturulan çevirme matrisleri verilmiştir.

Çizelge 5.6a 1.eleman için çevirme matrisi

[illegible]

Çizelge 5.6b 2.eleman için çevirme matrisi

[illegible]

Çizelge 5.6c 3.eleman için çevirme matrisi

[illegible]

Çizelge 5.6g 7.eleman için çevirme matrisi

[illegible]

Çizelge 5.6h 8.eleman için çevirme matrisi

[illegible]

Çizelge 5.6i 9.eleman için çevirme matrisi

[illegible]

Her eleman için ayrı ayrı bulunan bu çevirme matrisleri yardımıyla sistem rijitlik matrisini oluşturalım. (4.66)'da çevirme matrisleriyle sistem rijitlik matrisinin bulunuşunu göstermiştik;

$$[K] = \sum_{i=1}^n [C_{ei}]^T [k_{pe}] [C_{ei}]$$

Çizelge 5.7’de her elemanın ayrı ayrı sistem rijitlik matrisine katkı değerleri bulunarak, bunların toplamından oluşan sistem rijitlik matrisi gösterilmiştir;

Çizelge 5.7 Sistem rijitlik matrisi değerleri (kN/m)

K _{1,1}	=	548975,6	K _{1,39}	=	0	K _{2,30}	=	0	K _{3,22}	=	0
K _{1,2}	=	-54449,6	K _{1,40}	=	0	K _{2,31}	=	0	K _{3,23}	=	0
K _{1,3}	=	240961,6	K _{1,41}	=	0	K _{2,32}	=	0	K _{3,24}	=	0
K _{1,4}	=	54139,48	K _{1,42}	=	0	K _{2,33}	=	0	K _{3,25}	=	0
K _{1,5}	=	-336395	K _{1,43}	=	0	K _{2,34}	=	0	K _{3,26}	=	0
K _{1,6}	=	103545,7	K _{1,44}	=	0	K _{2,35}	=	0	K _{3,27}	=	0
K _{1,7}	=	0	K _{1,45}	=	0	K _{2,36}	=	0	K _{3,28}	=	0
K _{1,8}	=	0	K _{1,46}	=	0	K _{2,37}	=	0	K _{3,29}	=	0
K _{1,9}	=	0	K _{1,47}	=	0	K _{2,38}	=	0	K _{3,30}	=	0
K _{1,10}	=	0	K _{1,48}	=	0	K _{2,39}	=	0	K _{3,31}	=	0
K _{1,11}	=	0	K _{2,2}	=	1014086	K _{2,40}	=	0	K _{3,32}	=	0
K _{1,12}	=	0	K _{2,3}	=	-145197	K _{2,41}	=	0	K _{3,33}	=	0
K _{1,13}	=	-75387,3	K _{2,4}	=	336395,4	K _{2,42}	=	0	K _{3,34}	=	0
K _{1,14}	=	-7467,03	K _{2,5}	=	226925,5	K _{2,43}	=	0	K _{3,35}	=	0
K _{1,15}	=	482629,5	K _{2,6}	=	-74418,9	K _{2,44}	=	0	K _{3,36}	=	0
K _{1,16}	=	-55226,6	K _{2,7}	=	0	K _{2,45}	=	0	K _{3,37}	=	0
K _{1,17}	=	-138958	K _{2,8}	=	0	K _{2,46}	=	0	K _{3,38}	=	0
K _{1,18}	=	216251,9	K _{2,9}	=	0	K _{2,47}	=	0	K _{3,39}	=	0
K _{1,19}	=	0	K _{2,10}	=	0	K _{2,48}	=	0	K _{3,40}	=	0
K _{1,20}	=	0	K _{2,11}	=	0	K _{3,3}	=	1327914	K _{3,41}	=	0
K _{1,21}	=	0	K _{2,12}	=	0	K _{3,4}	=	103545,3	K _{3,42}	=	0
K _{1,22}	=	0	K _{2,13}	=	-7466,74	K _{3,5}	=	74418,9	K _{3,43}	=	0
K _{1,23}	=	0	K _{2,14}	=	360244,3	K _{3,6}	=	556105,1	K _{3,44}	=	0
K _{1,24}	=	0	K _{2,15}	=	74419,35	K _{3,7}	=	0	K _{3,45}	=	0
K _{1,25}	=	0	K _{2,16}	=	138957,8	K _{3,8}	=	0	K _{3,46}	=	0
K _{1,26}	=	0	K _{2,17}	=	150162	K _{3,9}	=	0	K _{3,47}	=	0
K _{1,27}	=	0	K _{2,18}	=	49607,54	K _{3,10}	=	0	K _{3,48}	=	0
K _{1,28}	=	0	K _{2,19}	=	0	K _{3,11}	=	0	K _{4,4}	=	1097951
K _{1,29}	=	0	K _{2,20}	=	0	K _{3,12}	=	0	K _{4,5}	=	363037,4
K _{1,30}	=	0	K _{2,21}	=	0	K _{3,13}	=	-549454	K _{4,6}	=	793098,2
K _{1,31}	=	0	K _{2,22}	=	0	K _{3,14}	=	-74418,9	K _{4,7}	=	54139,48
K _{1,32}	=	0	K _{2,23}	=	0	K _{3,15}	=	458156,5	K _{4,8}	=	-336395
K _{1,33}	=	0	K _{2,24}	=	0	K _{3,16}	=	-216252	K _{4,9}	=	103545,7
K _{1,34}	=	0	K _{2,25}	=	0	K _{3,17}	=	49607,54	K _{4,10}	=	0
K _{1,35}	=	0	K _{2,26}	=	0	K _{3,18}	=	256041	K _{4,11}	=	0
K _{1,36}	=	0	K _{2,27}	=	0	K _{3,19}	=	0	K _{4,12}	=	0
K _{1,37}	=	0	K _{2,28}	=	0	K _{3,20}	=	0	K _{4,13}	=	-55226,6
K _{1,38}	=	0	K _{2,29}	=	0	K _{3,21}	=	0	K _{4,14}	=	138957,2

Çizelge 5.7 Sistem rijitlik matrisi değerleri(kN/m)

K _{4,15}	=	216251,4	K _{5,15}	=	-49607,5	K _{6,16}	=	-1032083	K _{7,18}	=	216251,4
K _{4,16}	=	-150794	K _{5,16}	=	0,09	K _{6,17}	=	0	K _{7,19}	=	-150794
K _{4,17}	=	0,2	K _{5,17}	=	720488,6	K _{6,18}	=	916313	K _{7,20}	=	0,2
K _{4,18}	=	671125,9	K _{5,18}	=	-0,85	K _{6,19}	=	-216252	K _{7,21}	=	671125,9
K _{4,19}	=	-55226,6	K _{5,19}	=	138957,8	K _{6,20}	=	49607,54	K _{7,22}	=	-55226,6
K _{4,20}	=	-138958	K _{5,20}	=	150162	K _{6,21}	=	256041	K _{7,23}	=	-138958
K _{4,21}	=	216251,9	K _{5,21}	=	49607,54	K _{6,22}	=	0	K _{7,24}	=	216251,9
K _{4,22}	=	0	K _{5,22}	=	0	K _{6,23}	=	0	K _{7,25}	=	0
K _{4,23}	=	0	K _{5,23}	=	0	K _{6,24}	=	0	K _{7,26}	=	0
K _{4,24}	=	0	K _{5,24}	=	0	K _{6,25}	=	0	K _{7,27}	=	0
K _{4,25}	=	0	K _{5,25}	=	0	K _{6,26}	=	0	K _{7,28}	=	0
K _{4,26}	=	0	K _{5,26}	=	0	K _{6,27}	=	0	K _{7,29}	=	0
K _{4,27}	=	0	K _{5,27}	=	0	K _{6,28}	=	0	K _{7,30}	=	0
K _{4,28}	=	0	K _{5,28}	=	0	K _{6,29}	=	0	K _{7,31}	=	0
K _{4,29}	=	0	K _{5,29}	=	0	K _{6,30}	=	0	K _{7,32}	=	0
K _{4,30}	=	0	K _{5,30}	=	0	K _{6,31}	=	0	K _{7,33}	=	0
K _{4,31}	=	0	K _{5,31}	=	0	K _{6,32}	=	0	K _{7,34}	=	0
K _{4,32}	=	0	K _{5,32}	=	0	K _{6,33}	=	0	K _{7,35}	=	0
K _{4,33}	=	0	K _{5,33}	=	0	K _{6,34}	=	0	K _{7,36}	=	0
K _{4,34}	=	0	K _{5,34}	=	0	K _{6,35}	=	0	K _{7,37}	=	0
K _{4,35}	=	0	K _{5,35}	=	0	K _{6,36}	=	0	K _{7,38}	=	0
K _{4,36}	=	0	K _{5,36}	=	0	K _{6,37}	=	0	K _{7,39}	=	0
K _{4,37}	=	0	K _{5,37}	=	0	K _{6,38}	=	0	K _{7,40}	=	0
K _{4,38}	=	0	K _{5,38}	=	0	K _{6,39}	=	0	K _{7,41}	=	0
K _{4,39}	=	0	K _{5,39}	=	0	K _{6,40}	=	0	K _{7,42}	=	0
K _{4,40}	=	0	K _{5,40}	=	0	K _{6,41}	=	0	K _{7,43}	=	0
K _{4,41}	=	0	K _{5,41}	=	0	K _{6,42}	=	0	K _{7,44}	=	0
K _{4,42}	=	0	K _{5,42}	=	0	K _{6,43}	=	0	K _{7,45}	=	0
K _{4,43}	=	0	K _{5,43}	=	0	K _{6,44}	=	0	K _{7,46}	=	0
K _{4,44}	=	0	K _{5,44}	=	0	K _{6,45}	=	0	K _{7,47}	=	0
K _{4,45}	=	0	K _{5,45}	=	0	K _{6,46}	=	0	K _{7,48}	=	0
K _{4,46}	=	0	K _{5,46}	=	0	K _{6,47}	=	0	K _{8,8}	=	2028173
K _{4,47}	=	0	K _{5,47}	=	0	K _{6,48}	=	0	K _{8,9}	=	-4,3
K _{4,48}	=	0	K _{5,48}	=	0	K _{7,7}	=	1097951	K _{8,10}	=	336395,4
K _{5,5}	=	2028173	K _{6,6}	=	2655829	K _{7,8}	=	363037,4	K _{8,11}	=	226925,5
K _{5,6}	=	-4,3	K _{6,7}	=	103545,3	K _{7,9}	=	793098,2	K _{8,12}	=	-74418,9
K _{5,7}	=	336395,4	K _{6,8}	=	74418,9	K _{7,10}	=	54139,48	K _{8,13}	=	0
K _{5,8}	=	226925,5	K _{6,9}	=	556105,1	K _{7,11}	=	-336395	K _{8,14}	=	0
K _{5,9}	=	-74418,9	K _{6,10}	=	0	K _{7,12}	=	103545,7	K _{8,15}	=	0
K _{5,10}	=	0	K _{6,11}	=	0	K _{7,13}	=	0	K _{8,16}	=	-138958
K _{5,11}	=	0	K _{6,12}	=	0	K _{7,14}	=	0	K _{8,17}	=	150162
K _{5,12}	=	0	K _{6,13}	=	-216252	K _{7,15}	=	0	K _{8,18}	=	-49607,5
K _{5,13}	=	-138958	K _{6,14}	=	-49612	K _{7,16}	=	-55226,6	K _{8,19}	=	0,09
K _{5,14}	=	150162	K _{6,15}	=	256041	K _{7,17}	=	138957,2	K _{8,20}	=	720488,6

Çizelge 5.7 Sistem rijitlik matrisi değerleri(kN/m)

K _{8,21}	=	-0,85	K _{9,25}	=	0	K _{10,30}	=	0	K _{11,36}	=	0
K _{8,22}	=	138957,8	K _{9,26}	=	0	K _{10,31}	=	0	K _{11,37}	=	0
K _{8,23}	=	150162	K _{9,27}	=	0	K _{10,32}	=	0	K _{11,38}	=	0
K _{8,24}	=	49607,54	K _{9,28}	=	0	K _{10,33}	=	0	K _{11,39}	=	0
K _{8,25}	=	0	K _{9,29}	=	0	K _{10,34}	=	0	K _{11,40}	=	0
K _{8,26}	=	0	K _{9,30}	=	0	K _{10,35}	=	0	K _{11,41}	=	0
K _{8,27}	=	0	K _{9,31}	=	0	K _{10,36}	=	0	K _{11,42}	=	0
K _{8,28}	=	0	K _{9,32}	=	0	K _{10,37}	=	0	K _{11,43}	=	0
K _{8,29}	=	0	K _{9,33}	=	0	K _{10,38}	=	0	K _{11,44}	=	0
K _{8,30}	=	0	K _{9,34}	=	0	K _{10,39}	=	0	K _{11,45}	=	0
K _{8,31}	=	0	K _{9,35}	=	0	K _{10,40}	=	0	K _{11,46}	=	0
K _{8,32}	=	0	K _{9,36}	=	0	K _{10,41}	=	0	K _{11,47}	=	0
K _{8,33}	=	0	K _{9,37}	=	0	K _{10,42}	=	0	K _{11,48}	=	0
K _{8,34}	=	0	K _{9,38}	=	0	K _{10,43}	=	0	K _{12,12}	=	1327914
K _{8,35}	=	0	K _{9,39}	=	0	K _{10,44}	=	0	K _{12,13}	=	0
K _{8,36}	=	0	K _{9,40}	=	0	K _{10,45}	=	0	K _{12,14}	=	0
K _{8,37}	=	0	K _{9,41}	=	0	K _{10,46}	=	0	K _{12,15}	=	0
K _{8,38}	=	0	K _{9,42}	=	0	K _{10,47}	=	0	K _{12,16}	=	0
K _{8,39}	=	0	K _{9,43}	=	0	K _{10,48}	=	0	K _{12,17}	=	0
K _{8,40}	=	0	K _{9,44}	=	0	K _{11,11}	=	1014087	K _{12,18}	=	0
K _{8,41}	=	0	K _{9,45}	=	0	K _{11,12}	=	145192,2	K _{12,19}	=	-216252
K _{8,42}	=	0	K _{9,46}	=	0	K _{11,13}	=	0	K _{12,20}	=	-49612
K _{8,43}	=	0	K _{9,47}	=	0	K _{11,14}	=	0	K _{12,21}	=	256041
K _{8,44}	=	0	K _{9,48}	=	0	K _{11,15}	=	0	K _{12,22}	=	-482630
K _{8,45}	=	0	K _{10,10}	=	548975,6	K _{11,16}	=	0	K _{12,23}	=	74418,9
K _{8,46}	=	0	K _{10,11}	=	417487	K _{11,17}	=	0	K _{12,24}	=	458156,5
K _{8,47}	=	0	K _{10,12}	=	552136,5	K _{11,18}	=	0	K _{12,25}	=	0
K _{8,48}	=	0	K _{10,13}	=	0	K _{11,19}	=	-138958	K _{12,26}	=	0
K _{9,9}	=	2655829	K _{10,14}	=	0	K _{11,20}	=	150162	K _{12,27}	=	0
K _{9,10}	=	103545,3	K _{10,15}	=	0	K _{11,21}	=	-49607,5	K _{12,28}	=	0
K _{9,11}	=	74418,9	K _{10,16}	=	0	K _{11,22}	=	7466,829	K _{12,29}	=	0
K _{9,12}	=	556105,1	K _{10,17}	=	0	K _{11,23}	=	360244,3	K _{12,30}	=	0
K _{9,13}	=	0	K _{10,18}	=	0	K _{11,24}	=	-74420,2	K _{12,31}	=	0
K _{9,14}	=	0	K _{10,19}	=	-55226,6	K _{11,25}	=	0	K _{12,32}	=	0
K _{9,15}	=	0	K _{10,20}	=	138957,2	K _{11,26}	=	0	K _{12,33}	=	0
K _{9,16}	=	-216252	K _{10,21}	=	216251,4	K _{11,27}	=	0	K _{12,34}	=	0
K _{9,17}	=	-49612	K _{10,22}	=	-75406,4	K _{11,28}	=	0	K _{12,35}	=	0
K _{9,18}	=	256041	K _{10,23}	=	7467,229	K _{11,29}	=	0	K _{12,36}	=	0
K _{9,19}	=	-1032083	K _{10,24}	=	188496,4	K _{11,30}	=	0	K _{12,37}	=	0
K _{9,20}	=	0	K _{10,25}	=	0	K _{11,31}	=	0	K _{12,38}	=	0
K _{9,21}	=	916313	K _{10,26}	=	0	K _{11,32}	=	0	K _{12,39}	=	0
K _{9,22}	=	-216252	K _{10,27}	=	0	K _{11,33}	=	0	K _{12,40}	=	0
K _{9,23}	=	49607,54	K _{10,28}	=	0	K _{11,34}	=	0	K _{12,41}	=	0
K _{9,24}	=	256041	K _{10,29}	=	0	K _{11,35}	=	0	K _{12,42}	=	0

Çizelge 5.7 Sistem rijitlik matrisi değerleri(kN/m)

K _{12,43}	=	0	K _{14,16}	=	672790,8	K _{15,26}	=	-74418,9	K _{16,37}	=	0
K _{12,44}	=	0	K _{14,17}	=	453851	K _{15,27}	=	458156,5	K _{16,38}	=	0
K _{12,45}	=	0	K _{14,18}	=	0	K _{15,28}	=	-216252	K _{16,39}	=	0
K _{12,46}	=	0	K _{14,19}	=	0	K _{15,29}	=	49607,54	K _{16,40}	=	0
K _{12,47}	=	0	K _{14,20}	=	0	K _{15,30}	=	256041	K _{16,41}	=	0
K _{12,48}	=	0	K _{14,21}	=	0	K _{15,31}	=	0	K _{16,42}	=	0
K _{13,13}	=	1097951	K _{14,22}	=	0	K _{15,32}	=	0	K _{16,43}	=	0
K _{13,14}	=	-108898	K _{14,23}	=	0	K _{15,33}	=	0	K _{16,44}	=	0
K _{13,15}	=	0,9	K _{14,24}	=	0	K _{15,34}	=	0	K _{16,45}	=	0
K _{13,16}	=	108279	K _{14,25}	=	-7466,74	K _{15,35}	=	0	K _{16,46}	=	0
K _{13,17}	=	-672790	K _{14,26}	=	360244,3	K _{15,36}	=	0	K _{16,47}	=	0
K _{13,18}	=	0,41	K _{14,27}	=	74419,35	K _{15,37}	=	0	K _{16,48}	=	0
K _{13,19}	=	0	K _{14,28}	=	138957,8	K _{15,38}	=	0	K _{17,17}	=	4056345
K _{13,20}	=	0	K _{14,29}	=	150162	K _{15,39}	=	0	K _{17,18}	=	-4,6
K _{13,21}	=	0	K _{14,30}	=	49607,54	K _{15,40}	=	0	K _{17,19}	=	672790,8
K _{13,22}	=	0	K _{14,31}	=	0	K _{15,41}	=	0	K _{17,20}	=	453851
K _{13,23}	=	0	K _{14,32}	=	0	K _{15,42}	=	0	K _{17,21}	=	0
K _{13,24}	=	0	K _{14,33}	=	0	K _{15,43}	=	0	K _{17,22}	=	0
K _{13,25}	=	-75387,3	K _{14,34}	=	0	K _{15,44}	=	0	K _{17,23}	=	0
K _{13,26}	=	-7467,03	K _{14,35}	=	0	K _{15,45}	=	0	K _{17,24}	=	0
K _{13,27}	=	482629,5	K _{14,36}	=	0	K _{15,46}	=	0	K _{17,25}	=	-138958
K _{13,28}	=	-55226,6	K _{14,37}	=	0	K _{15,47}	=	0	K _{17,26}	=	150162
K _{13,29}	=	-138958	K _{14,38}	=	0	K _{15,48}	=	0	K _{17,27}	=	-49607,5
K _{13,30}	=	216251,9	K _{14,39}	=	0	K _{16,16}	=	2195902	K _{17,28}	=	0,09
K _{13,31}	=	0	K _{14,40}	=	0	K _{16,17}	=	363038,6	K _{17,29}	=	720488,6
K _{13,32}	=	0	K _{14,41}	=	0	K _{16,18}	=	311175,9	K _{17,30}	=	-0,85
K _{13,33}	=	0	K _{14,42}	=	0	K _{16,19}	=	108279	K _{17,31}	=	138957,8
K _{13,34}	=	0	K _{14,43}	=	0	K _{16,20}	=	-672790	K _{17,32}	=	150162
K _{13,35}	=	0	K _{14,44}	=	0	K _{16,21}	=	0,41	K _{17,33}	=	49607,54
K _{13,36}	=	0	K _{14,45}	=	0	K _{16,22}	=	0	K _{17,34}	=	0
K _{13,37}	=	0	K _{14,46}	=	0	K _{16,23}	=	0	K _{17,35}	=	0
K _{13,38}	=	0	K _{14,47}	=	0	K _{16,24}	=	0	K _{17,36}	=	0
K _{13,39}	=	0	K _{14,48}	=	0	K _{16,25}	=	-55226,6	K _{17,37}	=	0
K _{13,40}	=	0	K _{15,15}	=	2655829	K _{16,26}	=	138957,2	K _{17,38}	=	0
K _{13,41}	=	0	K _{15,16}	=	0,01	K _{16,27}	=	216251,4	K _{17,39}	=	0
K _{13,42}	=	0	K _{15,17}	=	-1,3	K _{16,28}	=	-150794	K _{17,40}	=	0
K _{13,43}	=	0	K _{15,18}	=	1112210	K _{16,29}	=	0,2	K _{17,41}	=	0
K _{13,44}	=	0	K _{15,19}	=	0	K _{16,30}	=	671125,9	K _{17,42}	=	0
K _{13,45}	=	0	K _{15,20}	=	0	K _{16,31}	=	-55226,6	K _{17,43}	=	0
K _{13,46}	=	0	K _{15,21}	=	0	K _{16,32}	=	-138958	K _{17,44}	=	0
K _{13,47}	=	0	K _{15,22}	=	0	K _{16,33}	=	216251,9	K _{17,45}	=	0
K _{13,48}	=	0	K _{15,23}	=	0	K _{16,34}	=	0	K _{17,46}	=	0
K _{14,14}	=	2028173	K _{15,24}	=	0	K _{16,35}	=	0	K _{17,47}	=	0
K _{14,15}	=	-0,3	K _{15,25}	=	-549454	K _{16,36}	=	0	K _{17,48}	=	0

Çizelge 5.7 Sistem rijitlik matrisi değerleri(kN/m)

K _{18,18}	=	5311658	K _{19,32}	=	0,2	K _{20,47}	=	0	K _{22,36}	=	188496,4
K _{18,19}	=	0,01	K _{19,33}	=	671125,9	K _{20,48}	=	0	K _{22,37}	=	0
K _{18,20}	=	-1,3	K _{19,34}	=	-55226,6	K _{21,21}	=	5311658	K _{22,38}	=	0
K _{18,21}	=	1112210	K _{19,35}	=	-138958	K _{21,22}	=	0,01	K _{22,39}	=	0
K _{18,22}	=	0	K _{19,36}	=	216251,9	K _{21,23}	=	-1,3	K _{22,40}	=	0
K _{18,23}	=	0	K _{19,37}	=	0	K _{21,24}	=	1112210	K _{22,41}	=	0
K _{18,24}	=	0	K _{19,38}	=	0	K _{21,25}	=	0	K _{22,42}	=	0
K _{18,25}	=	-216252	K _{19,39}	=	0	K _{21,26}	=	0	K _{22,43}	=	0
K _{18,26}	=	-49612	K _{19,40}	=	0	K _{21,27}	=	0	K _{22,44}	=	0
K _{18,27}	=	256041	K _{19,41}	=	0	K _{21,28}	=	-216252	K _{22,45}	=	0
K _{18,28}	=	-1032083	K _{19,42}	=	0	K _{21,29}	=	-49612	K _{22,46}	=	0
K _{18,29}	=	0	K _{19,43}	=	0	K _{21,30}	=	256041	K _{22,47}	=	0
K _{18,30}	=	916313	K _{19,44}	=	0	K _{21,31}	=	-1032083	K _{22,48}	=	0
K _{18,31}	=	-216252	K _{19,45}	=	0	K _{21,32}	=	0	K _{23,23}	=	2028173
K _{18,32}	=	49607,54	K _{19,46}	=	0	K _{21,33}	=	916313	K _{23,24}	=	-4,3
K _{18,33}	=	256041	K _{19,47}	=	0	K _{21,34}	=	-216252	K _{23,25}	=	0
K _{18,34}	=	0	K _{19,48}	=	0	K _{21,35}	=	49607,54	K _{23,26}	=	0
K _{18,35}	=	0	K _{20,20}	=	4056345	K _{21,36}	=	256041	K _{23,27}	=	0
K _{18,36}	=	0	K _{20,21}	=	-4,6	K _{21,37}	=	0	K _{23,28}	=	0
K _{18,37}	=	0	K _{20,22}	=	672790,8	K _{21,38}	=	0	K _{23,29}	=	0
K _{18,38}	=	0	K _{20,23}	=	453851	K _{21,39}	=	0	K _{23,30}	=	0
K _{18,39}	=	0	K _{20,24}	=	0	K _{21,40}	=	0	K _{23,31}	=	-138958
K _{18,40}	=	0	K _{20,25}	=	0	K _{21,41}	=	0	K _{23,32}	=	150162
K _{18,41}	=	0	K _{20,26}	=	0	K _{21,42}	=	0	K _{23,33}	=	-49607,5
K _{18,42}	=	0	K _{20,27}	=	0	K _{21,43}	=	0	K _{23,34}	=	7466,829
K _{18,43}	=	0	K _{20,28}	=	-138958	K _{21,44}	=	0	K _{23,35}	=	360244,3
K _{18,44}	=	0	K _{20,29}	=	150162	K _{21,45}	=	0	K _{23,36}	=	-74420,2
K _{18,45}	=	0	K _{20,30}	=	-49607,5	K _{21,46}	=	0	K _{23,37}	=	0
K _{18,46}	=	0	K _{20,31}	=	0,09	K _{21,47}	=	0	K _{23,38}	=	0
K _{18,47}	=	0	K _{20,32}	=	720488,6	K _{21,48}	=	0	K _{23,39}	=	0
K _{18,48}	=	0	K _{20,33}	=	-0,85	K _{22,22}	=	1097951	K _{23,40}	=	0
K _{19,19}	=	2195902	K _{20,34}	=	138957,8	K _{22,23}	=	471936,8	K _{23,41}	=	0
K _{19,20}	=	363038,6	K _{20,35}	=	150162	K _{22,24}	=	311175	K _{23,42}	=	0
K _{19,21}	=	311175,9	K _{20,36}	=	49607,54	K _{22,25}	=	0	K _{23,43}	=	0
K _{19,22}	=	108279	K _{20,37}	=	0	K _{22,26}	=	0	K _{23,44}	=	0
K _{19,23}	=	-672790	K _{20,38}	=	0	K _{22,27}	=	0	K _{23,45}	=	0
K _{19,24}	=	0,41	K _{20,39}	=	0	K _{22,28}	=	0	K _{23,46}	=	0
K _{19,25}	=	0	K _{20,40}	=	0	K _{22,29}	=	0	K _{23,47}	=	0
K _{19,26}	=	0	K _{20,41}	=	0	K _{22,30}	=	0	K _{23,48}	=	0
K _{19,27}	=	0	K _{20,42}	=	0	K _{22,31}	=	-55226,6	K _{24,24}	=	2655829
K _{19,28}	=	-55226,6	K _{20,43}	=	0	K _{22,32}	=	138957,2	K _{24,25}	=	0
K _{19,29}	=	138957,2	K _{20,44}	=	0	K _{22,33}	=	216251,4	K _{24,26}	=	0
K _{19,30}	=	216251,4	K _{20,45}	=	0	K _{22,34}	=	-75406,4	K _{24,27}	=	0
K _{19,31}	=	-150794	K _{20,46}	=	0	K _{22,35}	=	7467,229	K _{24,28}	=	0

Çizelge 5.7 Sistem rijitlik matrisi değerleri(kN/m)

K _{24,29}	=	0	K _{26,26}	=	2028173	K _{27,48}	=	0	K _{30,32}	=	-1,3
K _{24,30}	=	0	K _{26,27}	=	-0,3	K _{28,28}	=	2195902	K _{30,33}	=	1112210
K _{24,31}	=	-216252	K _{26,28}	=	672790,8	K _{28,29}	=	363038,6	K _{30,34}	=	0
K _{24,32}	=	-49612	K _{26,29}	=	453851	K _{28,30}	=	311175,9	K _{30,35}	=	0
K _{24,33}	=	256041	K _{26,30}	=	0	K _{28,31}	=	108279	K _{30,36}	=	0
K _{24,34}	=	-482630	K _{26,31}	=	0	K _{28,32}	=	-672790	K _{30,37}	=	-216252
K _{24,35}	=	74418,9	K _{26,32}	=	0	K _{28,33}	=	0,41	K _{30,38}	=	-49612
K _{24,36}	=	458156,5	K _{26,33}	=	0	K _{28,34}	=	0	K _{30,39}	=	256041
K _{24,37}	=	0	K _{26,34}	=	0	K _{28,35}	=	0	K _{30,40}	=	-1032083
K _{24,38}	=	0	K _{26,35}	=	0	K _{28,36}	=	0	K _{30,41}	=	0
K _{24,39}	=	0	K _{26,36}	=	0	K _{28,37}	=	-55226,6	K _{30,42}	=	916313
K _{24,40}	=	0	K _{26,37}	=	-7466,74	K _{28,38}	=	138957,2	K _{30,43}	=	-216252
K _{24,41}	=	0	K _{26,38}	=	360244,3	K _{28,39}	=	216251,4	K _{30,44}	=	49607,54
K _{24,42}	=	0	K _{26,39}	=	74419,35	K _{28,40}	=	-150794	K _{30,45}	=	256041
K _{24,43}	=	0	K _{26,40}	=	138957,8	K _{28,41}	=	0,2	K _{30,46}	=	0
K _{24,44}	=	0	K _{26,41}	=	150162	K _{28,42}	=	671125,9	K _{30,47}	=	0
K _{24,45}	=	0	K _{26,42}	=	49607,54	K _{28,43}	=	-55226,6	K _{30,48}	=	0
K _{24,46}	=	0	K _{26,43}	=	0	K _{28,44}	=	-138958	K _{31,31}	=	2195902
K _{24,47}	=	0	K _{26,44}	=	0	K _{28,45}	=	216251,9	K _{31,32}	=	363038,6
K _{24,48}	=	0	K _{26,45}	=	0	K _{28,46}	=	0	K _{31,33}	=	311175,9
K _{25,25}	=	1097951	K _{26,46}	=	0	K _{28,47}	=	0	K _{31,34}	=	108279
K _{25,26}	=	-108898	K _{26,47}	=	0	K _{28,48}	=	0	K _{31,35}	=	-672790
K _{25,27}	=	0,9	K _{26,48}	=	0	K _{29,29}	=	4056345	K _{31,36}	=	0,41
K _{25,28}	=	108279	K _{27,27}	=	2655829	K _{29,30}	=	-4,6	K _{31,37}	=	0
K _{25,29}	=	-672790	K _{27,28}	=	0,01	K _{29,31}	=	672790,8	K _{31,38}	=	0
K _{25,30}	=	0,41	K _{27,29}	=	-1,3	K _{29,32}	=	453851	K _{31,39}	=	0
K _{25,31}	=	0	K _{27,30}	=	1112210	K _{29,33}	=	0	K _{31,40}	=	-55226,6
K _{25,32}	=	0	K _{27,31}	=	0	K _{29,34}	=	0	K _{31,41}	=	138957,2
K _{25,33}	=	0	K _{27,32}	=	0	K _{29,35}	=	0	K _{31,42}	=	216251,4
K _{25,34}	=	0	K _{27,33}	=	0	K _{29,36}	=	0	K _{31,43}	=	-150794
K _{25,35}	=	0	K _{27,34}	=	0	K _{29,37}	=	-138958	K _{31,44}	=	0,2
K _{25,36}	=	0	K _{27,35}	=	0	K _{29,38}	=	150162	K _{31,45}	=	671125,9
K _{25,37}	=	-75387,3	K _{27,36}	=	0	K _{29,39}	=	-49607,5	K _{31,46}	=	-55226,6
K _{25,38}	=	-7467,03	K _{27,37}	=	-549454	K _{29,40}	=	0,09	K _{31,47}	=	-138958
K _{25,39}	=	482629,5	K _{27,38}	=	-74418,9	K _{29,41}	=	720488,6	K _{31,48}	=	216251,9
K _{25,40}	=	-55226,6	K _{27,39}	=	458156,5	K _{29,42}	=	-0,85	K _{32,32}	=	4056345
K _{25,41}	=	-138958	K _{27,40}	=	-216252	K _{29,43}	=	138957,8	K _{32,33}	=	-4,6
K _{25,42}	=	216251,9	K _{27,41}	=	49607,54	K _{29,44}	=	150162	K _{32,34}	=	672790,8
K _{25,43}	=	0	K _{27,42}	=	256041	K _{29,45}	=	49607,54	K _{32,35}	=	453851
K _{25,44}	=	0	K _{27,43}	=	0	K _{29,46}	=	0	K _{32,36}	=	0
K _{25,45}	=	0	K _{27,44}	=	0	K _{29,47}	=	0	K _{32,37}	=	0
K _{25,46}	=	0	K _{27,45}	=	0	K _{29,48}	=	0	K _{32,38}	=	0
K _{25,47}	=	0	K _{27,46}	=	0	K _{30,30}	=	5311658	K _{32,39}	=	0
K _{25,48}	=	0	K _{27,47}	=	0	K _{30,31}	=	0,01	K _{32,40}	=	-138958

Çizelge 5.7 Sistem rijitlik matrisi değerleri(kN/m)

K _{32,41}	=	150162	K _{35,40}	=	0	K _{38,48}	=	0	K _{44,47}	=	226925,5
K _{32,42}	=	-49607,5	K _{35,41}	=	0	K _{39,39}	=	1327914	K _{44,48}	=	74418,9
K _{32,43}	=	0,09	K _{35,42}	=	0	K _{39,40}	=	-103545	K _{45,45}	=	2655829
K _{32,44}	=	720488,6	K _{35,43}	=	-138958	K _{39,41}	=	-74420,2	K _{45,46}	=	-103545
K _{32,45}	=	-0,85	K _{35,44}	=	150162	K _{39,42}	=	556105,1	K _{45,47}	=	-74420,2
K _{32,46}	=	138957,8	K _{35,45}	=	-49607,5	K _{39,43}	=	0	K _{45,48}	=	556105,1
K _{32,47}	=	150162	K _{35,46}	=	7466,829	K _{39,44}	=	0	K _{46,46}	=	548975,6
K _{32,48}	=	49607,54	K _{35,47}	=	360244,3	K _{39,45}	=	0	K _{46,47}	=	54449,79
K _{33,33}	=	5311658	K _{35,48}	=	-74420,2	K _{39,46}	=	0	K _{46,48}	=	-240962
K _{33,34}	=	0,01	K _{36,36}	=	2655829	K _{39,47}	=	0	K _{47,47}	=	1014086
K _{33,35}	=	-1,3	K _{36,37}	=	0	K _{39,48}	=	0	K _{47,48}	=	-145197
K _{33,36}	=	1112210	K _{36,38}	=	0	K _{40,40}	=	1097951	K _{48,48}	=	1327915
K _{33,37}	=	0	K _{36,39}	=	0	K _{40,41}	=	1,2			
K _{33,38}	=	0	K _{36,40}	=	0	K _{40,42}	=	-481922			
K _{33,39}	=	0	K _{36,41}	=	0	K _{40,43}	=	54139,48			
K _{33,40}	=	-216252	K _{36,42}	=	0	K _{40,44}	=	-336395			
K _{33,41}	=	-49612	K _{36,43}	=	-216252	K _{40,45}	=	-103545			
K _{33,42}	=	256041	K _{36,44}	=	-49612	K _{40,46}	=	0			
K _{33,43}	=	-1032083	K _{36,45}	=	256041	K _{40,47}	=	0			
K _{33,44}	=	0	K _{36,46}	=	-482630	K _{40,48}	=	0			
K _{33,45}	=	916313	K _{36,47}	=	74418,9	K _{41,41}	=	2028173			
K _{33,46}	=	-216252	K _{36,48}	=	458156,5	K _{41,42}	=	-0,3			
K _{33,47}	=	49607,54	K _{37,37}	=	548975,6	K _{41,43}	=	336395,4			
K _{33,48}	=	256041	K _{37,38}	=	-54448,6	K _{41,44}	=	226925,5			
K _{34,34}	=	1097951	K _{37,39}	=	-240961	K _{41,45}	=	74418,9			
K _{34,35}	=	471936,8	K _{37,40}	=	54139,48	K _{41,46}	=	0			
K _{34,36}	=	311175	K _{37,41}	=	-336395	K _{41,47}	=	0			
K _{34,37}	=	0	K _{37,42}	=	-103545	K _{41,48}	=	0			
K _{34,38}	=	0	K _{37,43}	=	0	K _{42,42}	=	2655829			
K _{34,39}	=	0	K _{37,44}	=	0	K _{42,43}	=	-103545			
K _{34,40}	=	0	K _{37,45}	=	0	K _{42,44}	=	-74420,2			
K _{34,41}	=	0	K _{37,46}	=	0	K _{42,45}	=	556105,1			
K _{34,42}	=	0	K _{37,47}	=	0	K _{42,46}	=	0			
K _{34,43}	=	-55226,6	K _{37,48}	=	0	K _{42,47}	=	0			
K _{34,44}	=	138957,2	K _{38,38}	=	1014087	K _{42,48}	=	0			
K _{34,45}	=	216251,4	K _{38,39}	=	145196,2	K _{43,43}	=	1097951			
K _{34,46}	=	-75406,4	K _{38,40}	=	336395,4	K _{43,44}	=	1,2			
K _{34,47}	=	7467,229	K _{38,41}	=	226925,5	K _{43,45}	=	-481922			
K _{34,48}	=	188496,4	K _{38,42}	=	74418,9	K _{43,46}	=	54139,48			
K _{35,35}	=	2028173	K _{38,43}	=	0	K _{43,47}	=	-336395			
K _{35,36}	=	-4,3	K _{38,44}	=	0	K _{43,48}	=	-103545			
K _{35,37}	=	0	K _{38,45}	=	0	K _{44,44}	=	2028173			
K _{35,38}	=	0	K _{38,46}	=	0	K _{44,45}	=	-0,3			
K _{35,39}	=	0	K _{38,47}	=	0	K _{44,46}	=	336395,4			

Sistem dış yük matrisi için, düğüm noktalarına etki eden tekil yükler direkt olarak yazılır. Ancak 1, 2, 3, 4 nolu düğüm noktaları y eksenine göre simetrik olduğu için buradaki tekil yük değerlerinin yarısı alınır. sistem dış yük matrisinin değerleri Çizelge 5.8’de gösterilmiştir:

Çizelge 5.8 Sistem yük matrisi değerleri (kN)

$Q_{1,1}=2055$	$Q_{13,1}=3160$	$Q_{25,1}=3160$	$Q_{37,1}=2485$
$Q_{2,1}=0$	$Q_{14,1}=0$	$Q_{26,1}=0$	$Q_{38,1}=0$
$Q_{3,1}=0$	$Q_{15,1}=0$	$Q_{27,1}=0$	$Q_{39,1}=0$
$Q_{4,1}=2055$	$Q_{16,1}=4620$	$Q_{28,1}=4620$	$Q_{40,1}=2485$
$Q_{5,1}=0$	$Q_{17,1}=0$	$Q_{29,1}=0$	$Q_{41,1}=0$
$Q_{6,1}=0$	$Q_{18,1}=0$	$Q_{30,1}=0$	$Q_{42,1}=0$
$Q_{7,1}=2055$	$Q_{19,1}=4620$	$Q_{31,1}=4620$	$Q_{43,1}=2485$
$Q_{8,1}=0$	$Q_{20,1}=0$	$Q_{32,1}=0$	$Q_{44,1}=0$
$Q_{9,1}=0$	$Q_{21,1}=0$	$Q_{33,1}=0$	$Q_{45,1}=0$
$Q_{10,1}=2055$	$Q_{22,1}=3160$	$Q_{34,1}=3160$	$Q_{46,1}=2485$
$Q_{11,1}=0$	$Q_{23,1}=0$	$Q_{35,1}=0$	$Q_{47,1}=0$
$Q_{12,1}=0$	$Q_{24,1}=0$	$Q_{36,1}=0$	$Q_{48,1}=0$

Sistem rijitlik ve yük matrislerini bulduktan sonra sınır şartlarını yazalım;

$D_3, D_6, D_9, D_{12} = \theta_y = 0$ (y eksenine göre simetrik)

48x48 lik sistem rijitlik matrisinde 3, 6, 9, 12 nolu satır ve sütunları silerek sistem rijitlik matrisini 44x44 lük hale getirdikten sonra (4.68)’deki sistem denkleminiz;

$$[Q] = [K] [D_s]$$

olduğuna göre sistem deplasman parametreleri şu değerleri alır (Çizelge 5.9);

Çizelge 5.9 Sistem deplasman parametreleri

$D_1=0,004485$	$D_{16}=0,002433$	$D_{27}=0,000805$	$D_{38}=-0,000613$
$D_2=-0,000525$	$D_{17}=0,000183$	$D_{28}=0,002844$	$D_{39}=-0,000537$
$D_4=0,001942$	$D_{18}=0,000137$	$D_{29}=0,000123$	$D_{40}=0,002550$
$D_5=0,000309$	$D_{19}=0,002536$	$D_{30}=0,000044$	$D_{41}=0,000836$
$D_7=0,001869$	$D_{20}=-0,000433$	$D_{31}=0,002845$	$D_{42}=-0,000332$
$D_8=-0,000896$	$D_{21}=0,000067$	$D_{32}=-0,000512$	$D_{43}=0,002615$
$D_{10}=0,006311$	$D_{22}=0,003687$	$D_{33}=0,000123$	$D_{44}=-0,000718$
$D_{11}=-0,001669$	$D_{23}=0,000726$	$D_{34}=0,003631$	$D_{45}=-0,000565$
$D_{13}=0,003167$	$D_{24}=-0,000288$	$D_{35}=0,000318$	$D_{46}=0,006023$
$D_{14}=-0,000790$	$D_{25}=0,003843$	$D_{36}=0,000341$	$D_{47}=0,001045$
$D_{15}=-0,000153$	$D_{26}=-0,000873$	$D_{37}=0,006084$	$D_{48}=0,000605$

Kesit tesirlerini hesaplamadan önce $\{m\}$ kütle matrisinin değerlerini bulmamız gerekli. (4.72)’de çıkardığımız kütle matrisi yardımıyla ξ ve η ’e eleman köşe koordinatları yazılarak elde edilen $\{m\}$ değerleri Çizelge 5.10’da gösterilmiştir;

Çizelge 5.10a $\xi=0, \eta=0$ için $[m]^T$ değerleri

4577391	4143351	504789
134274	2627960	504789
-2917320	-134274	-504789
-201411	-3941940	-504789
67137	1313980	0
0	0	504789
0	0	504789
0	0	0
0	0	0
-4375980	-201411	-504789
0	0	-504789
-1458660	-67137	0

Çizelge 5.10b $\xi=0, \eta=1$ için $[m]^T$ değerleri

-201411	-3941940	504789
-67137	-1313980	0
0	0	-504789
4577391	4143351	-504789
-134274	-2627960	504789
-2917320	-134274	504789
-4375980	-201411	504789
0	0	-504789
-1458660	-67137	0
0	0	-504789
0	0	0
0	0	0

Çizelge 5.10c $\xi=1, \eta=1$ için $[m]^T$ değerleri

0	0	504789
0	0	0
0	0	0
-4375980	-201411	-504789
0	0	504789
1458660	67137	0
4577391	4143351	504789
-134274	-2627960	-504789
2917320	134274	504789
-201411	-3941940	-504789
-67137	-1313980	0
0	0	-504789

Çizelge 5.10d $\xi=1, \eta=0$ için $[m]^T$ değerleri

-4375980	-201411	504789
0	0	504789
1458660	67137	0
0	0	-504789
0	0	0
0	0	0
-201411	-3941940	504789
67137	1313980	0
0	0	504789
4577391	2627960	-504789
134274	2627960	-504789
2917320	134274	-504789

(4.71)'de kesit tesirlerini $[m]$ (kütle matrisi) ve $\{D_s\}$ (sistem deplasman parametreleri) cinsinden şu şekilde yazmıştık;

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [m] \{D_s\}$$

Sistemimizde 9 adet sonlu eleman bulunduğuna göre her eleman için kendisine ait sistem deplasman parametreleri kullanılarak, elemanın her köşesi için M_x , M_y , M_{xy} kesit tesirlerinin değerleri bulunur (Çizelge 5.11).

Çizelge 5.11 Eleman köşe noktaları yaklaşık kesit tesirleri (kNm)

Eleman No	$\xi=0, \eta=0$ için			$\xi=0, \eta=1$ için		
	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}
1	11270,04	3289,94	414,94	3334,35	-2270,37	344,77
2	274,33	-868,29	766,27	-894,55	1004,92	468,95
3	-19721,82	-6447,55	-1237,24	-4559,48	4723,02	-2212,49
4	3157,64	-5728,76	-141,34	2265,39	6087,17	-152,95
5	-998,08	-1021,24	212,52	-258,18	1042,07	222,11
6	-4966,87	-3250,21	-741,03	-4135,70	2934,81	-574,95
7	1349,24	-11843,40	-2459,84	18107,87	12398,11	-2688,51
8	-180,30	2566,29	163,05	1328,53	-3448,10	626,95
9	-4366,38	-1580,03	557,29	-14063,08	1001,83	86,32

Eleman No	$\xi=1, \eta=1$ için			$\xi=1, \eta=0$ için		
	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}
1	-2981,90	908,84	491,16	-11173,23	-1395,18	561,33
2	1098,66	4983,45	433,61	-603,17	-5567,58	730,93
3	3780,36	-9860,87	-2391,69	19791,24	7806,20	-1416,44
4	-3015,04	915,18	-683,48	-3085,42	-1117,31	-671,87
5	587,44	3152,20	297,32	691,27	-2989,78	287,73
6	4511,02	-1798,04	-285,71	4424,41	2744,14	-451,79
7	-17396,29	-4309,94	-2200,88	-2937,16	2439,40	-1972,21
8	-1763,66	1567,92	469,45	356,76	-1362,64	5,55
9	16174,28	6994,77	566,88	4244,82	-7007,97	1037,85

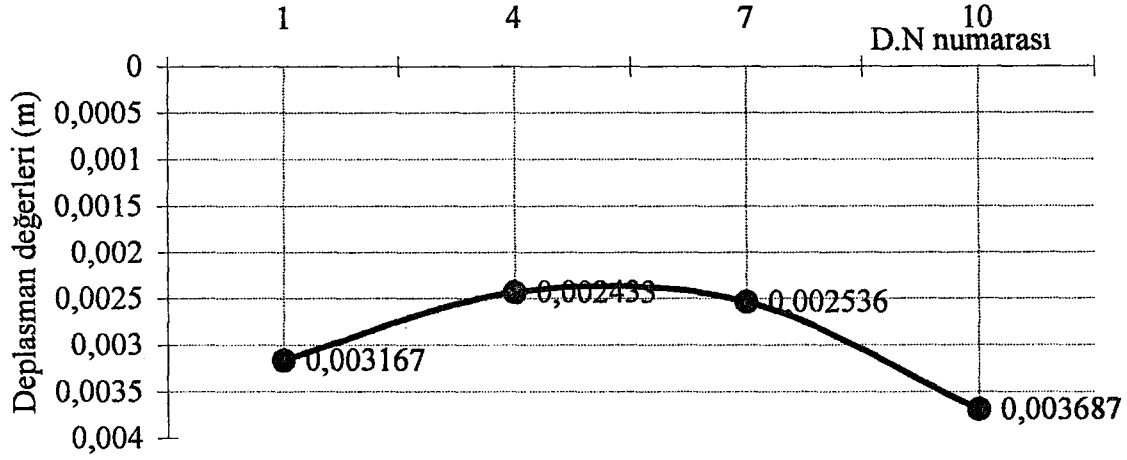
Aynı noktada farklı değerler veren kesit tesirlerinin geometrik ortalaması alınarak hesaplanan gerçek kesit tesirleri Çizelge 5.12’de gösterilmiştir;

Çizelge 5.12 Sonuç kesit tesirleri (kNm)

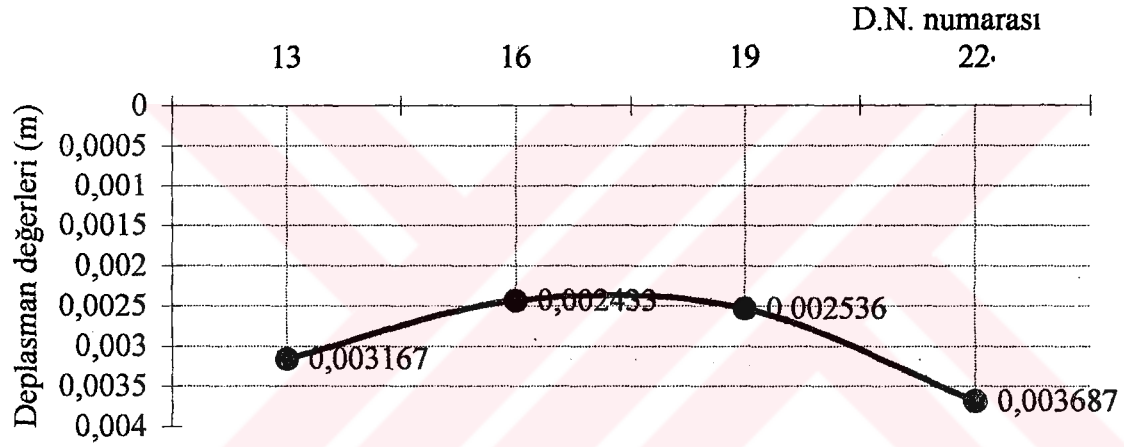
	Düğüm noktası numarası							
	1	2	3	4	5	6	7	8
M_x	11270	1804,34	-10308	-4559,5	-4007,8	-579,44	3916,21	-177,67
M_y	3289,94	-1569,3	-2721,3	4723,02	-3561,97	101,80	2645,38	-3463,03
M_{xy}	414,94	555,52	-384,14	2212,5	209,99	320,41	-375,44	-1483,32

	Düğüm noktası numarası							
	9	10	11	12	13	14	15	16
M_x	-868,09	3900,95	493,50	-4776,03	-2937,16	-8519,77	1240,58	16174,28
M_y	-6480,36	3222,45	217,05	-398,10	2439,40	-2836,29	-2720,02	6994,77
M_{xy}	-1565,86	-730,30	257,44	-99,70	-1972,21	-1097,66	753,65	566,88

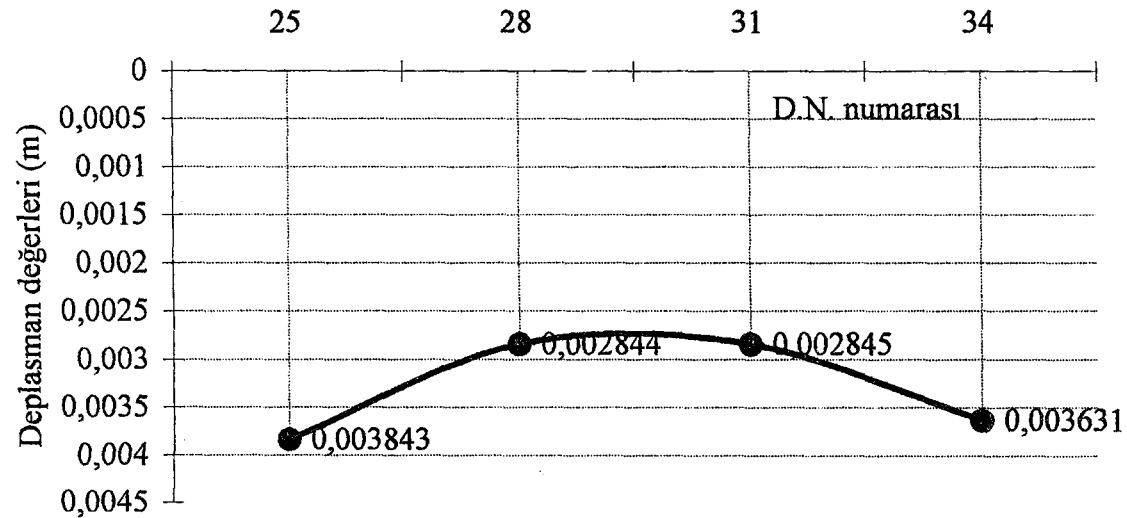
Çizelge 5.12’de gösterilen kesit tesirlerine ve Çizelge 5.9’da gösterilen sistem deplasman değerlerine göre deplasman ve kesit tesiri diyagramları çizilmiştir (Şekil 5.3);



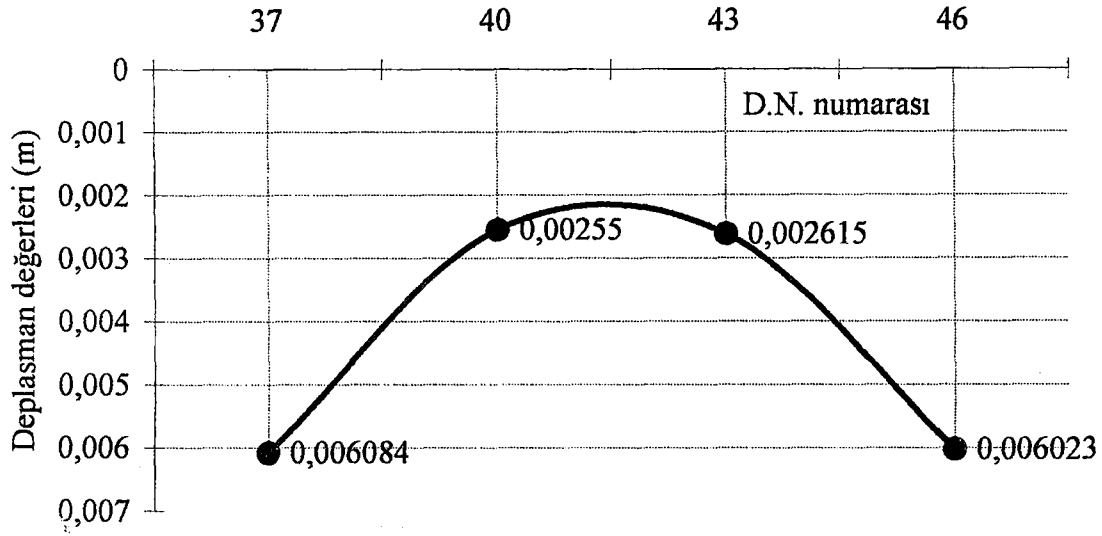
Şekil 5.3a Deplasman (w) diyagramı



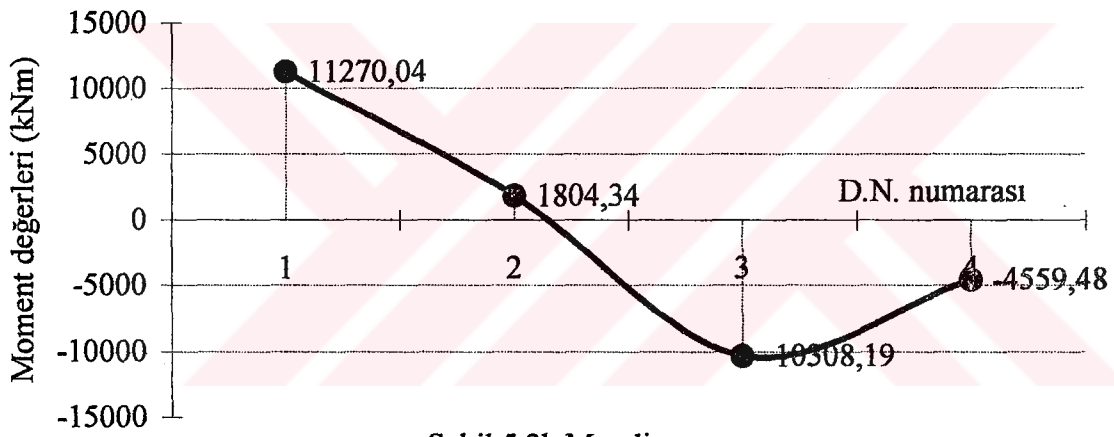
Şekil 5.3a Deplasman (w) diyagramı



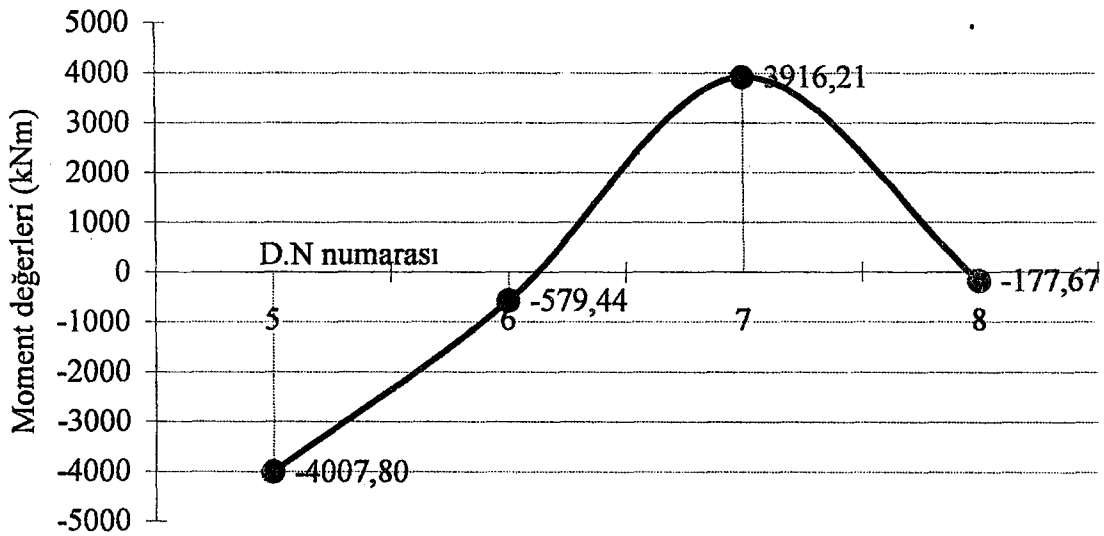
Şekil 5.3a Deplasman (w) diyagramı



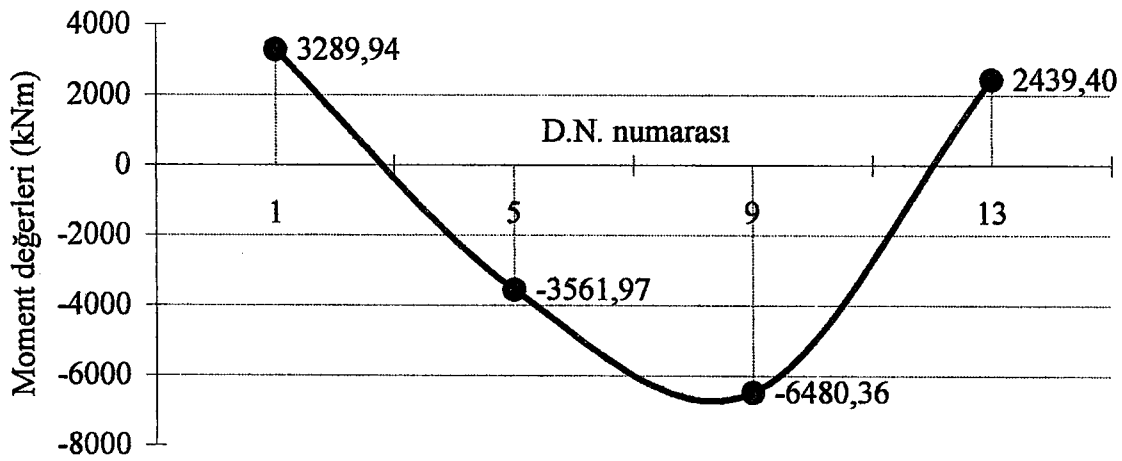
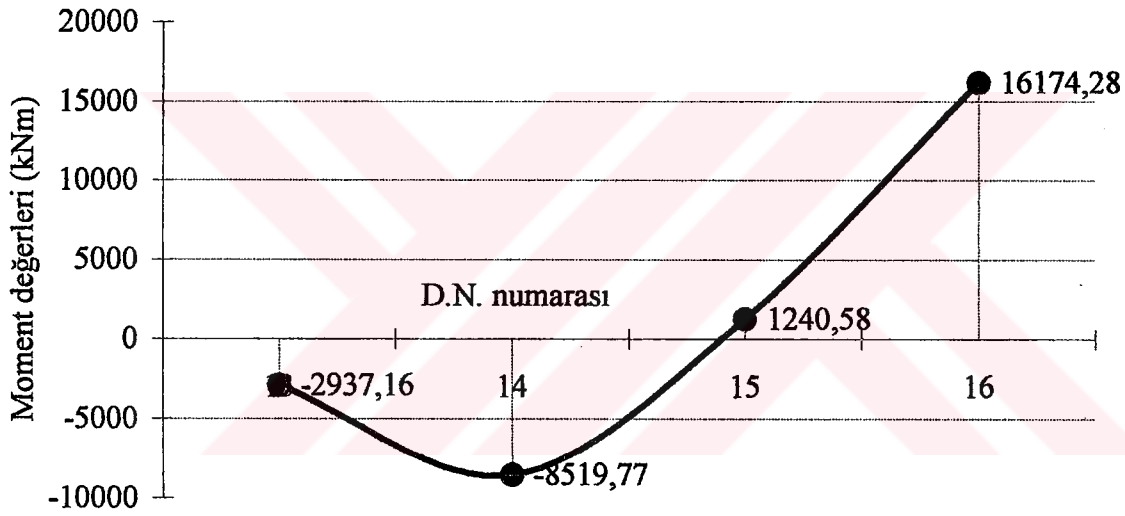
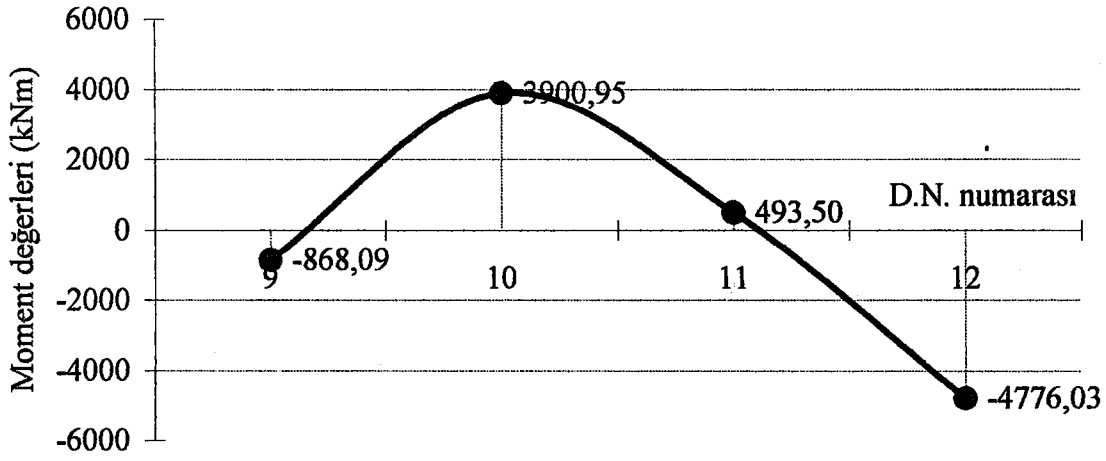
Şekil 5.3a Deplasman (w) diyagramı

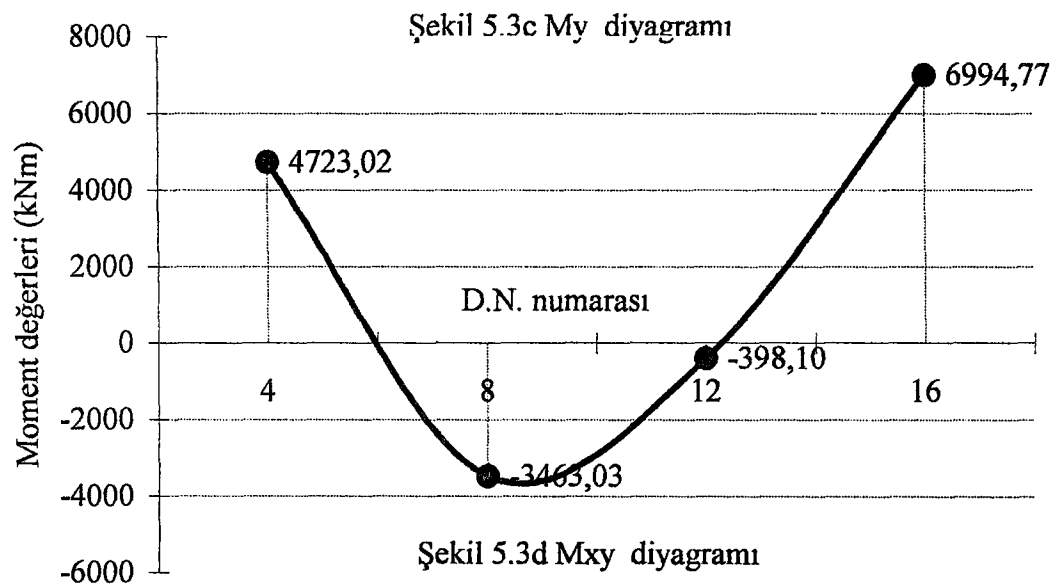
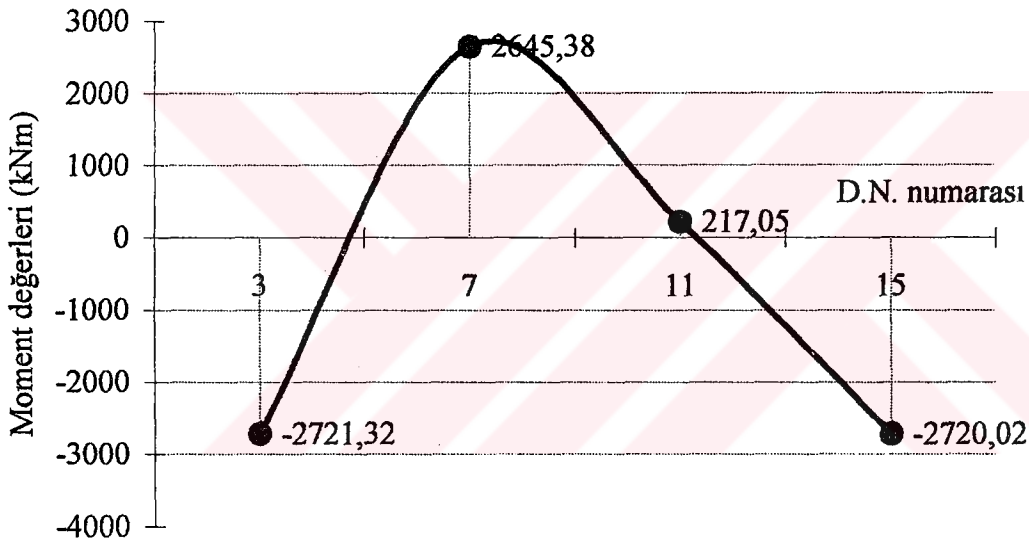
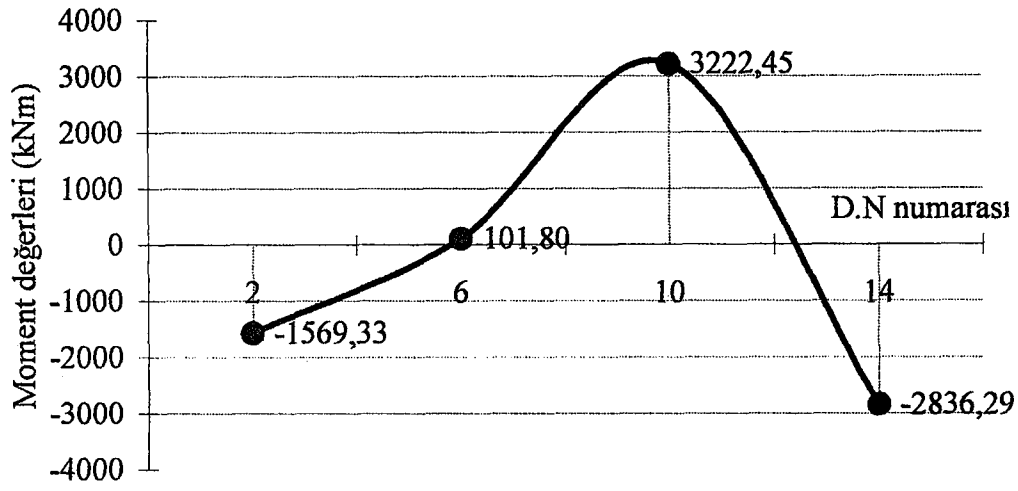


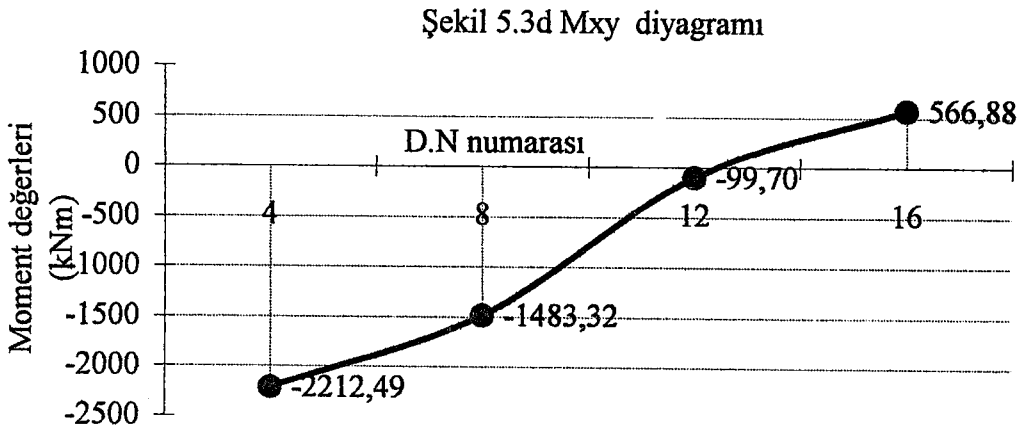
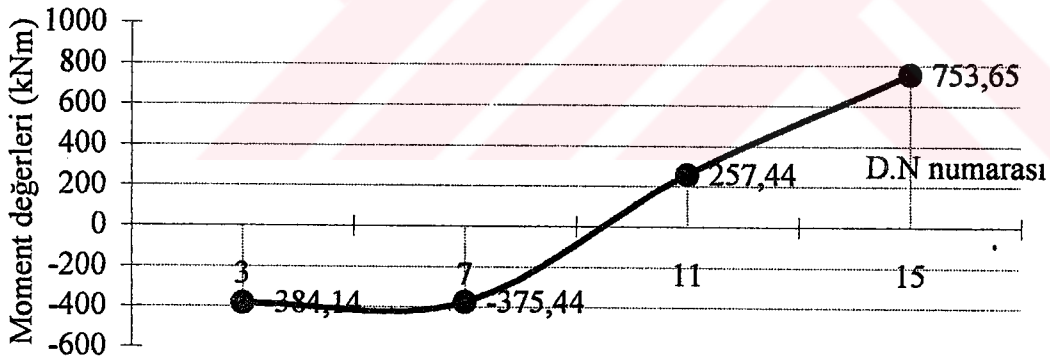
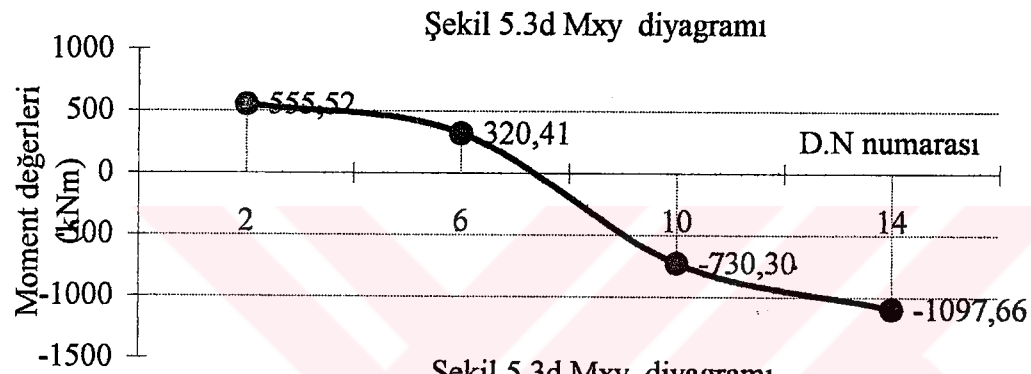
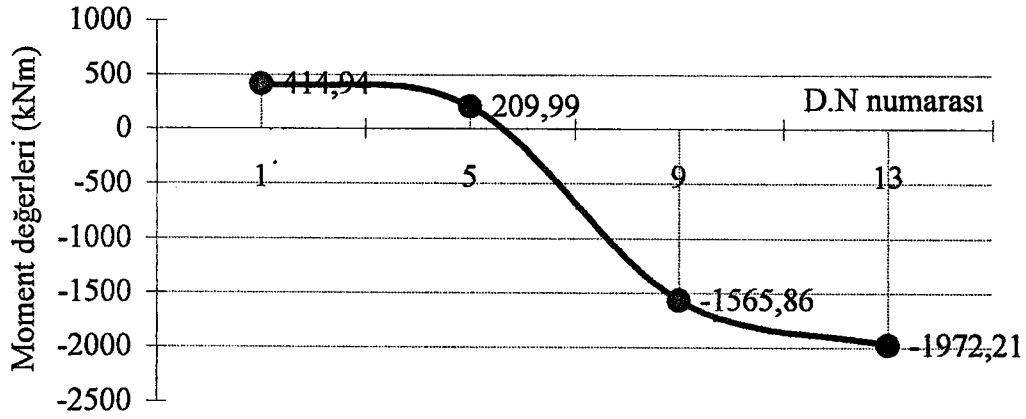
Şekil 5.3b Mx diyagramı



Şekil 5.3b Mx diyagramı







Aynı problemi sadece zemin yatak katsayısı c 'yi değiştirerek yeniden çözersek sistem deplasman değerleri ve sonuç kesit tesirleri şu şekilde değişmektedir;

$c = 50000 \text{ kN/m}^3$ için;

Çizelge 5.13 $c = 50000 \text{ kN/m}^3$ için sistem deplasman parametreleri

$D_1 = 0,006453$	$D_{16} = 0,003808$	$D_{27} = 0,000851$	$D_{38} = -0,000511$
$D_2 = -0,000373$	$D_{17} = 0,000294$	$D_{28} = 0,004361$	$D_{39} = -0,000489$
$D_4 = 0,003231$	$D_{18} = 0,000227$	$D_{29} = 0,000251$	$D_{40} = 0,004299$
$D_5 = 0,000396$	$D_{19} = 0,003941$	$D_{30} = 0,000163$	$D_{41} = 0,000977$
$D_7 = 0,003218$	$D_{20} = -0,000570$	$D_{31} = 0,004389$	$D_{42} = -0,000143$
$D_8 = -0,001020$	$D_{21} = 0,000091$	$D_{32} = -0,000687$	$D_{43} = 0,004455$
$D_{10} = 0,008374$	$D_{22} = 0,005868$	$D_{33} = 0,000202$	$D_{44} = -0,001003$
$D_{11} = -0,001586$	$D_{23} = 0,000552$	$D_{34} = 0,006063$	$D_{45} = -0,000522$
$D_{13} = 0,004947$	$D_{24} = 0,000008$	$D_{35} = 0,000210$	$D_{46} = 0,009362$
$D_{14} = -0,000756$	$D_{25} = 0,005809$	$D_{36} = 0,000561$	$D_{47} = 0,000930$
$D_{15} = -0,000211$	$D_{26} = -0,000823$	$D_{37} = 0,008498$	$D_{48} = 0,001310$

Çizelge 5.14 $c = 50000 \text{ kN/m}^3$ için sonuç kesit tesirleri (kNm)

	Düğüm noktası numarası							
	1	2	3	4	5	6	7	8
M_x	14303,55	2551,30	-12103,92	-8421,79	-4603,00	-608,78	3649,81	-196,42
M_y	4611,73	-2031,26	-3198,95	5286,17	-3858,57	16,65	2433,61	-2463,94
M_{xy}	556,94	658,98	-336,53	-2150,16	314,09	414,80	-258,53	-1358,39

	Düğüm noktası numarası							
	9	10	11	12	13	14	15	16
M_x	-877,42	4074,51	309,53	-6218,76	-4508,08	-9444,78	3914,25	25060,02
M_y	-7277,58	3224,59	-296,78	1354,73	1976,91	-3690,91	3526,94	11414,17
M_{xy}	-1662,89	-680,82	446,34	-5,50	-2085,01	-1060,57	1128,16	1034,17

$c = 110000 \text{ kN/m}^3$ için;

Çizelge 5.15 $c = 110000 \text{ kN/m}^3$ için sistem deplasman parametreleri

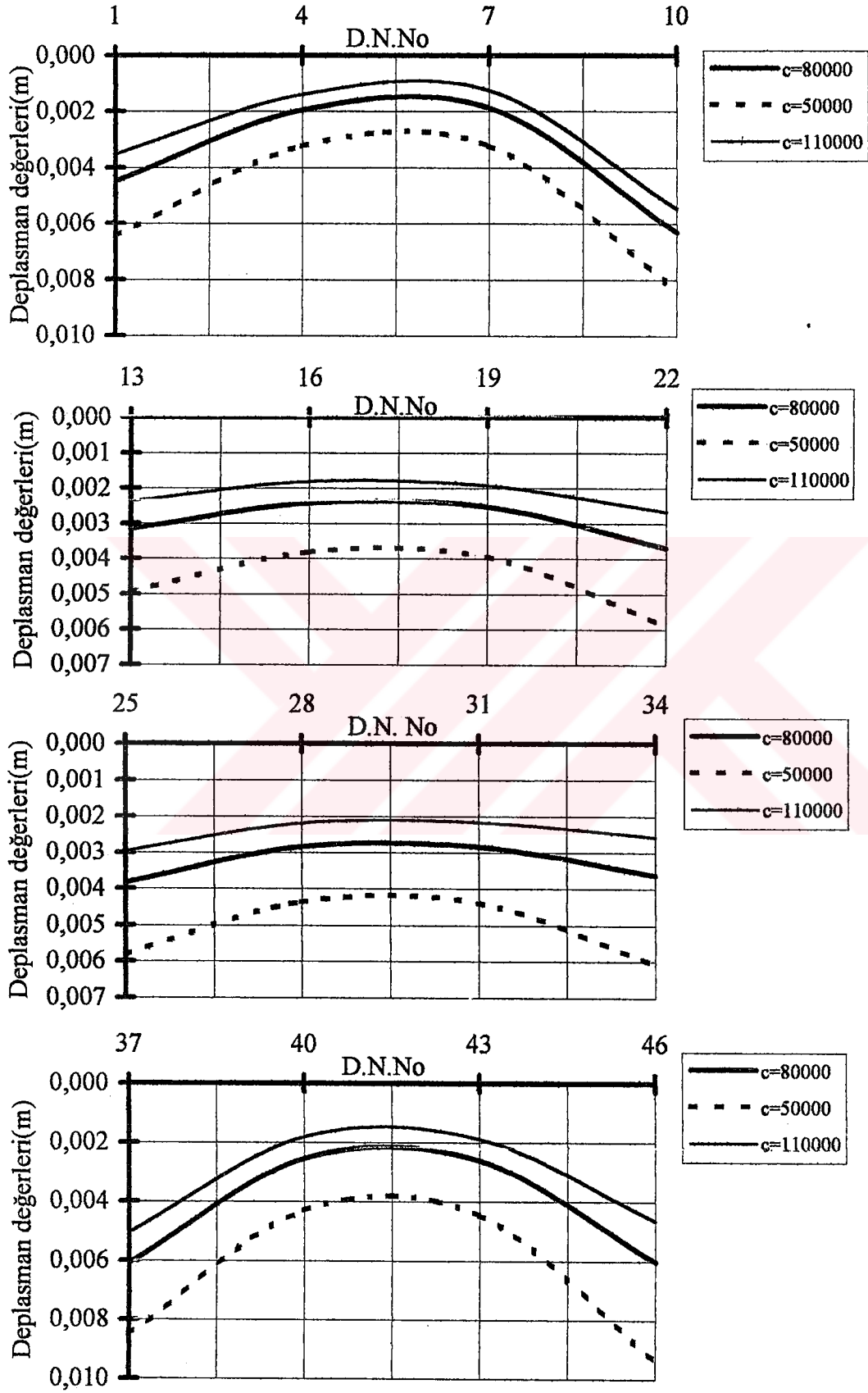
$D_1 = 0,003517$	$D_{16} = 0,001812$	$D_{27} = 0,000798$	$D_{38} = -0,000634$
$D_2 = -0,000683$	$D_{17} = 0,000110$	$D_{28} = 0,002185$	$D_{39} = -0,000569$
$D_4 = 0,001388$	$D_{18} = 0,000101$	$D_{29} = 0,000037$	$D_{40} = 0,001810$
$D_5 = 0,000230$	$D_{19} = 0,001919$	$D_{30} = -0,000019$	$D_{41} = 0,000759$
$D_7 = 0,001243$	$D_{20} = -0,000366$	$D_{31} = 0,002153$	$D_{42} = -0,000399$
$D_8 = -0,000870$	$D_{21} = 0,000054$	$D_{32} = -0,000434$	$D_{43} = 0,001884$
$D_{10} = 0,005458$	$D_{22} = 0,002674$	$D_{33} = 0,000093$	$D_{44} = -0,000566$
$D_{11} = -0,001850$	$D_{23} = 0,000844$	$D_{34} = 0,002582$	$D_{45} = -0,000560$
$D_{13} = 0,002371$	$D_{24} = -0,000438$	$D_{35} = 0,000333$	$D_{46} = 0,004630$
$D_{14} = -0,000813$	$D_{25} = 0,002967$	$D_{36} = 0,000259$	$D_{47} = 0,001080$
$D_{15} = -0,000108$	$D_{26} = -0,000992$	$D_{37} = 0,005033$	$D_{48} = 0,000317$

Çizelge 5.16 $c = 110000 \text{ kN/m}^3$ için sonuç kesit tesirleri (kNm)

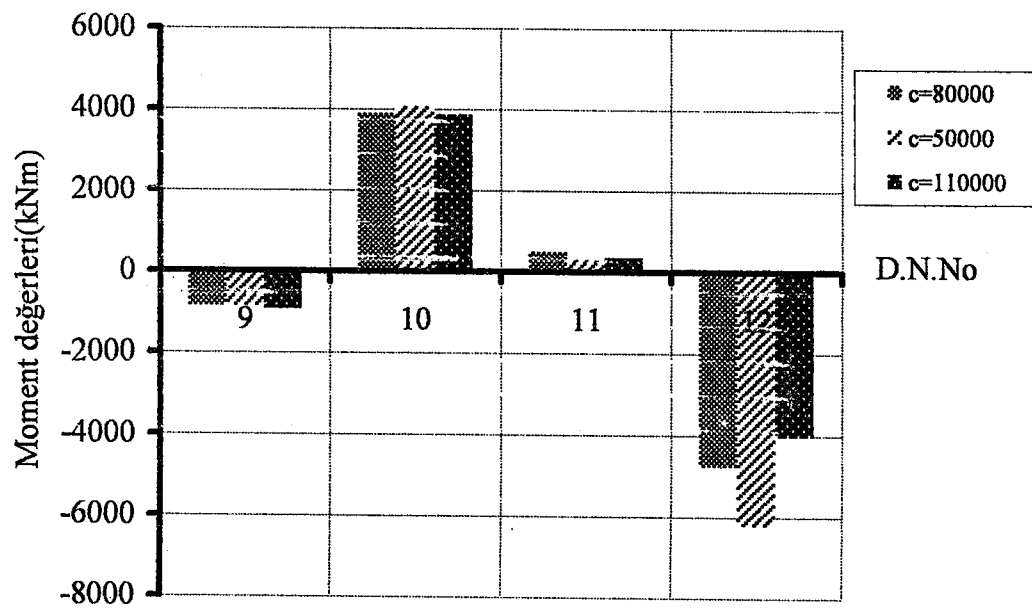
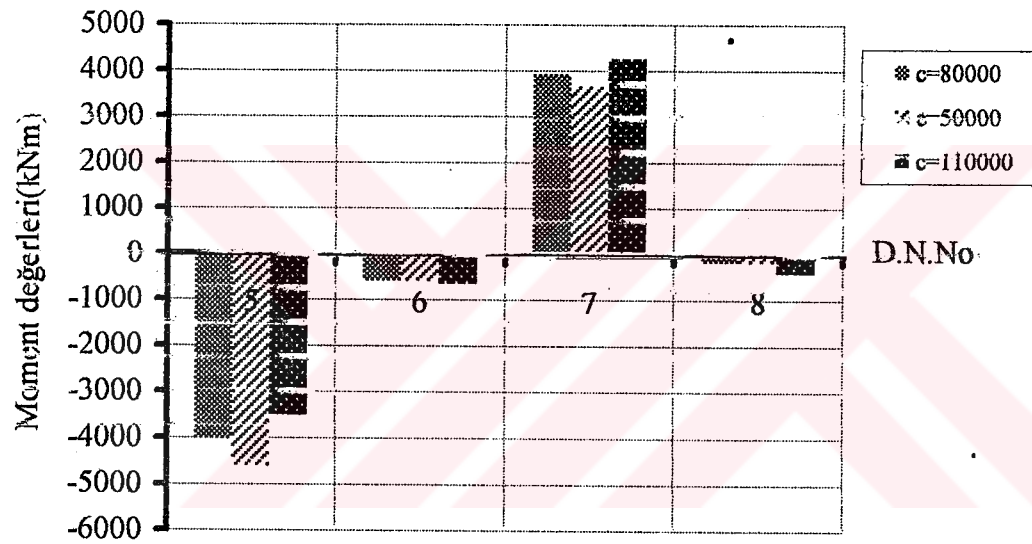
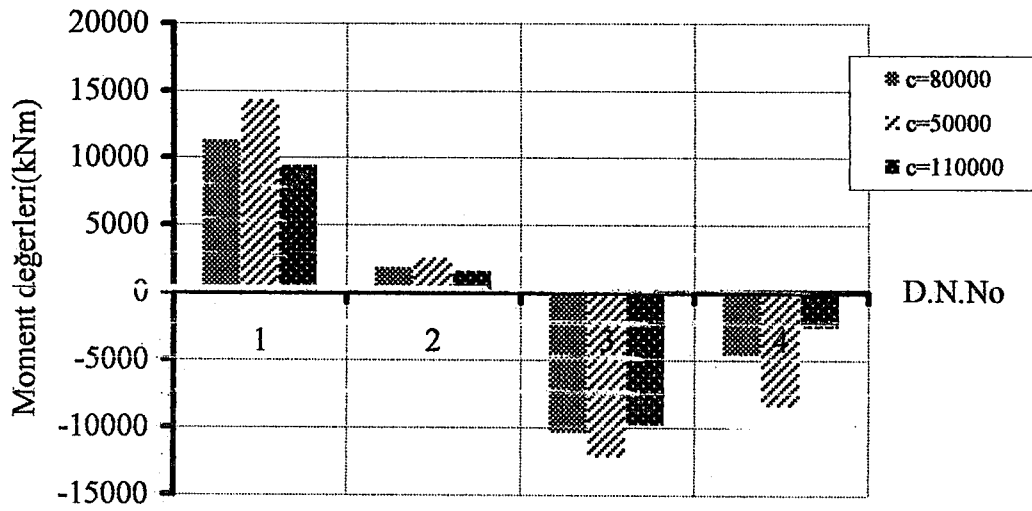
	Düğüm noktası numarası							
	1	2	3	4	5	6	7	8
M_x	9402,26	1561,98	-9755,01	-2574,74	-3523,07	-659,27	4252,38	-422,34
M_y	2082,26	-1129,76	-2618,93	4641,59	-3511,79	104,67	2381,29	-4117,98
M_{xy}	277,22	502,86	-402,99	-2330,16	131,24	255,52	-431,78	-1555,24

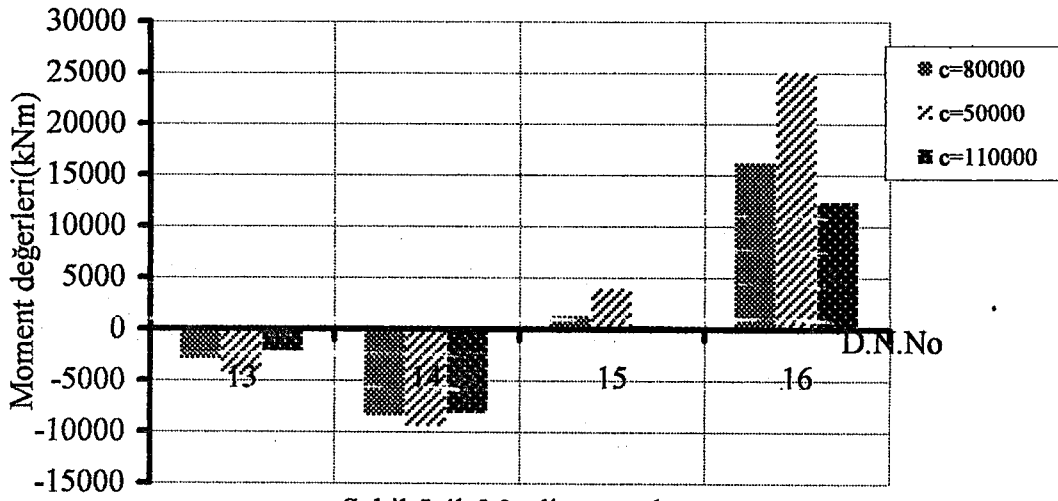
	Düğüm noktası numarası							
	9	10	11	12	13	14	15	16
M_x	-918,81	3875,65	348,95	-4071,66	-2180,82	-8107,45	316,78	12366,91
M_y	-6385,77	3286,37	318,60	-859,68	2466,68	-2541,37	-2370,87	5356,31
M_{xy}	-1540,11	-757,24	186,87	-94,90	-1943,59	-1082,54	602,12	367,79

$c=50000 \text{ kN/m}^3$ ve $c=110000 \text{ kN/m}^3$ için bulunan bu deplasman parametresi değerleri ve kesit tesiri değerlerini daha önce $c=80000 \text{ kN/m}^3$ değeri için çizdiğimiz deplasman ve kesit tesiri diyagramlarına yerleştirirsek, zemin yatak katsayısı c 'nin değişimiyle deplasman (çökme) ve oluşan momentlerdeki değişimin nasıl olduğunu daha iyi gözlemleyebiliriz (Şekil 5.4).

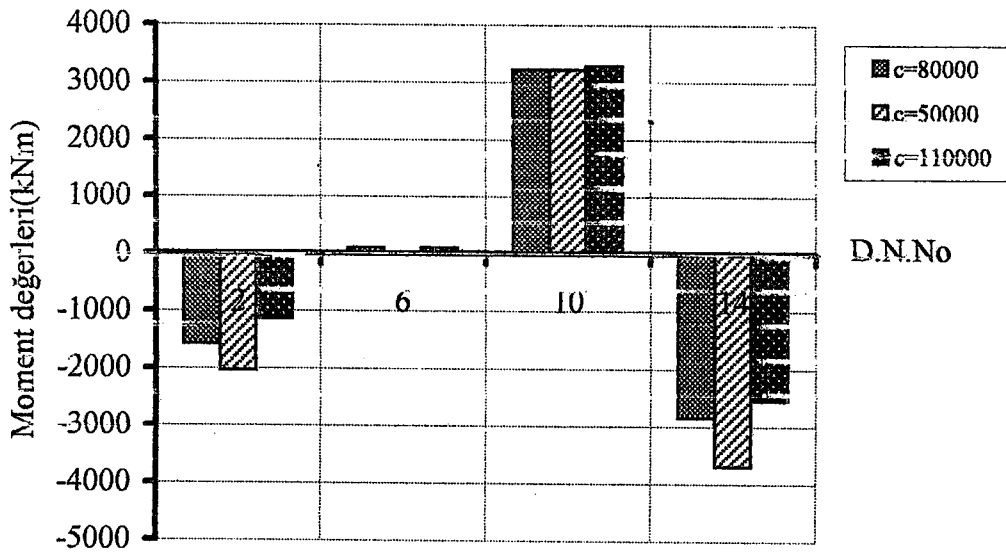
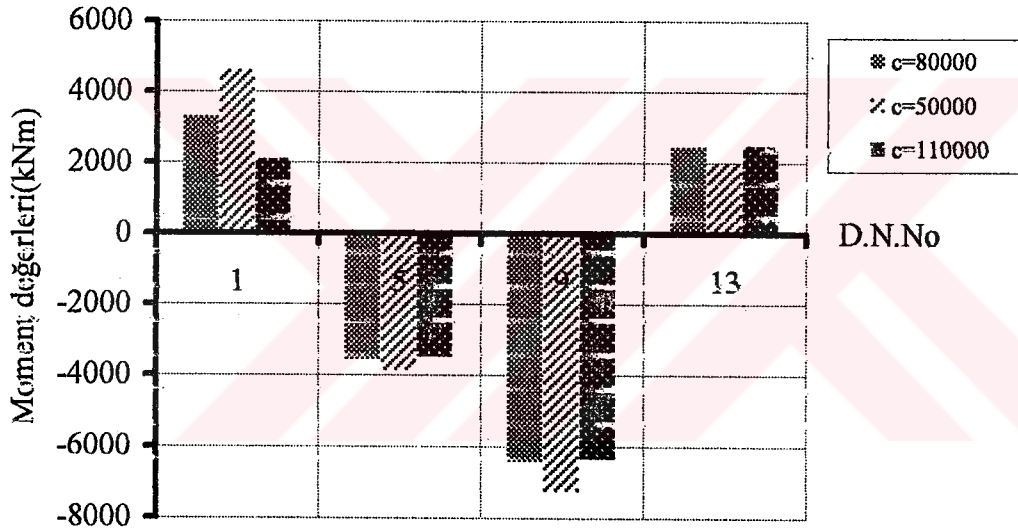


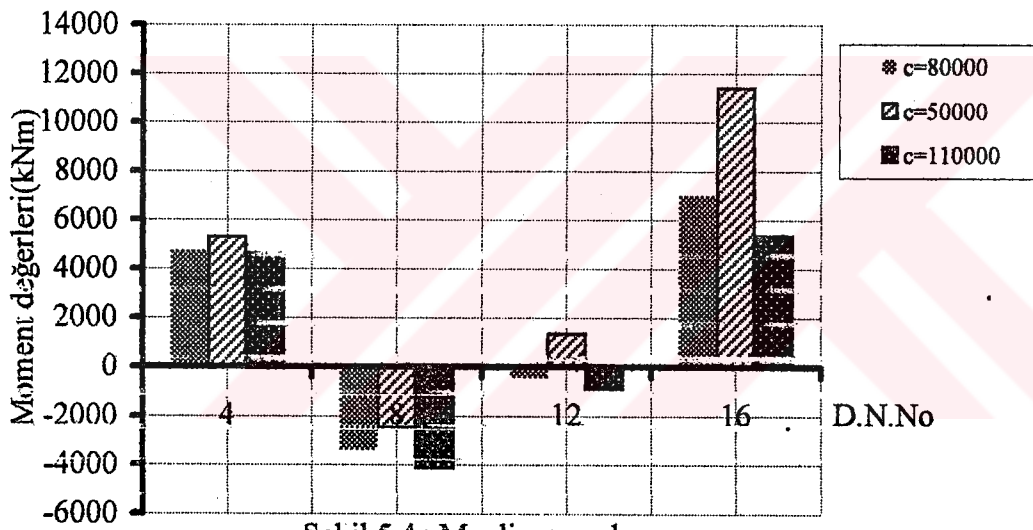
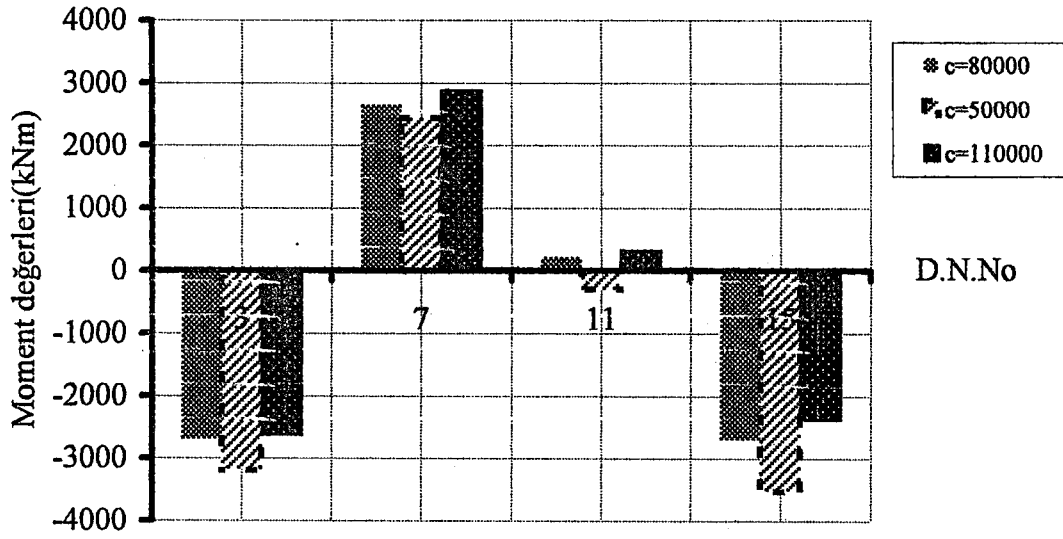
Şekil 5.4a Deplasman diyagramları



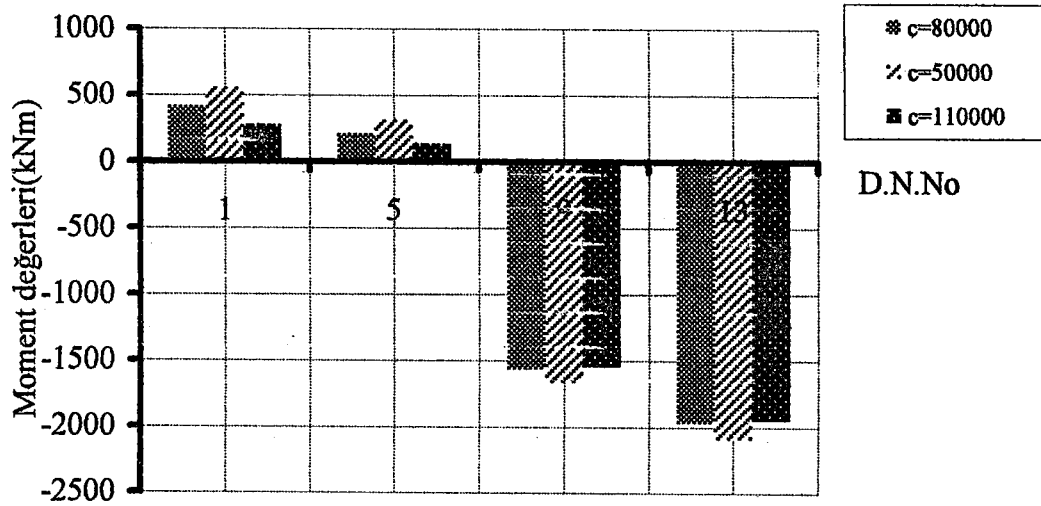


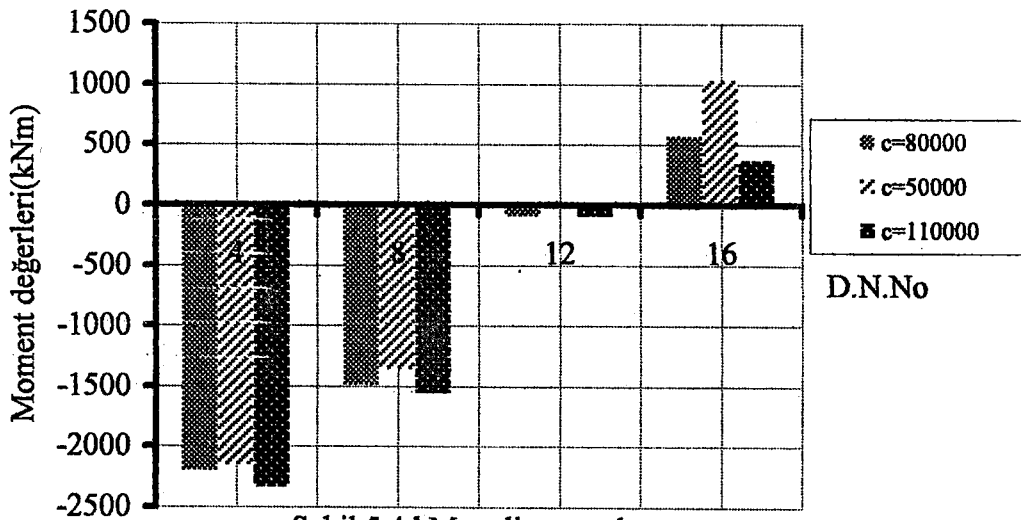
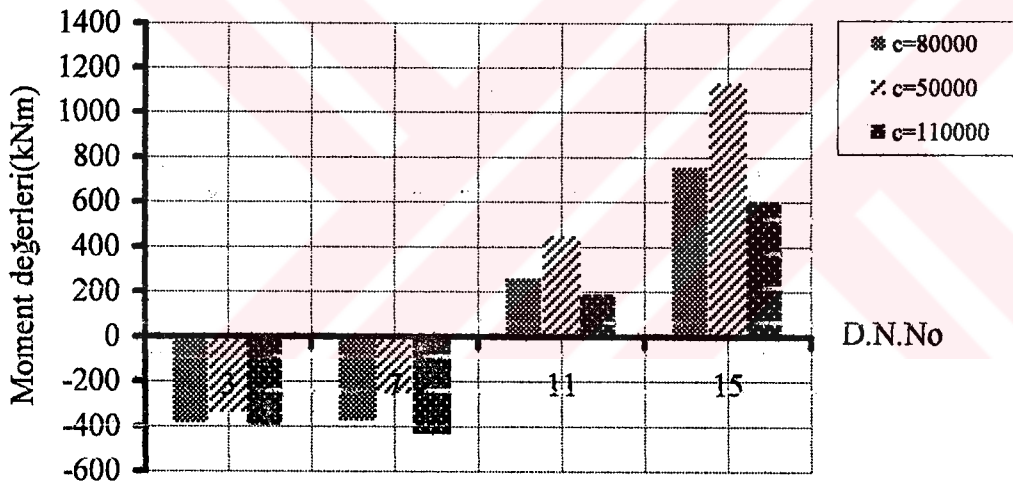
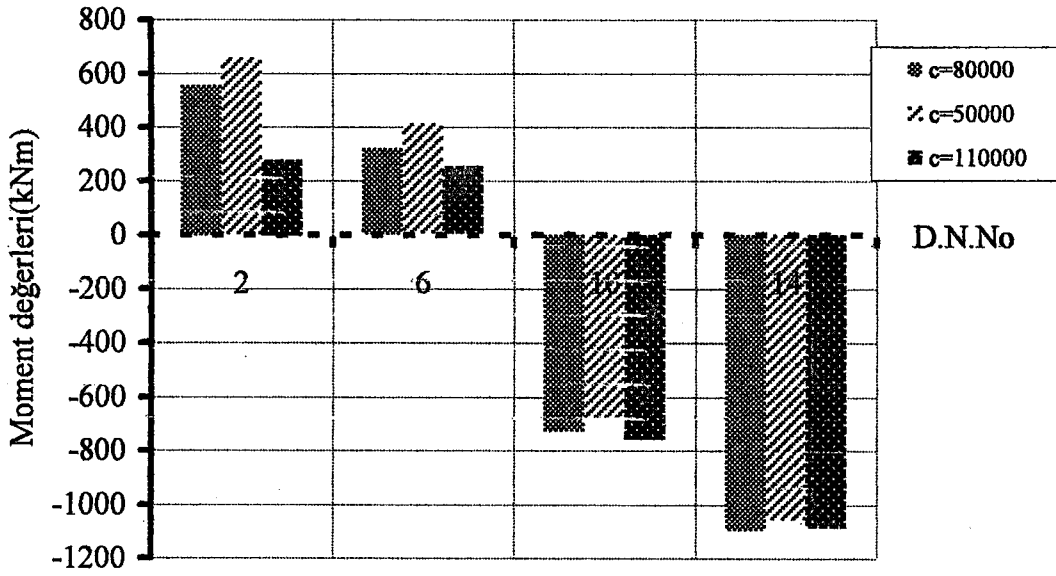
Şekil 5.4b Mx diyagramları





Şekil 5.4c My diyagramları





Şekil 5.4d Mxy diyagramları

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elastik zemine oturan, nervürlü, ince plaklar için fonksiyonel elde edilmiştir. Bu fonksiyonel dinamik ve geometrik sınır koşulları ile birlikte elde edilmiş ve hareket noktası klasik enerji ifadesidir.

Elde edilen fonksiyonelde düğüm noktası değişkenleri olarak yer değiştirmeler ve gerilmeler alınmıştır. Dolayısıyla bu fonksiyonel karışık sonlu eleman formülasyonuna uygundur.

İnceleme konumuz olan nervürlü plak etkisi, fonksiyonelde genel plak çözümünden farklı olarak yalnızca elastisite matrisi $[D]$ 'nin değerinde, dolayısıyla eleman rijitlik matrisinde ortaya çıkmaktadır.

Çökme ve momentler fonksiyonelin içinde değişken olarak bulunduğu için ve sınır şartları probleme en son aşamada katıldığı için farklı sınır şartları için kolaylıkla yeni çökme ve moment değerlerine ulaşmak mümkündür.

Örnek olarak incelenen sistemde zemin yatak katsayısı % 37.5 oranında azaltılıp, çoğaltıldığında ($c=50000 \text{ kN/m}^3$ ve $c=110000 \text{ kN/m}^3$), çökmelerin ortalama olarak sırasıyla %56 oranında arttığı ve %25 oranında azaldığı görülmüştür (Şekil 5.4).

KAYNAKLAR

- Aşılıoğlu, M., (1988), Elastik Zemine Oturan Sürekli Temeller, Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Berktaş, İ., (1988), Betonarme Plaklarda Kırılma Çizgileri Teorisi ve Uygulamalar, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul
- Berktaş, İ.,(1992), Plak Teorisi ve Uygulamaları, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul.
- Çaloğlu, M.,(1995), Elastik Zemine Oturan İnce Plakların Stabilitésinin Sonlu Elemanlar Metodu İle Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul
- Gülal, E.,(1999), Elastik Zemine Oturan Tabakalı Kompozit Plakların Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Stabilité Analizi, Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Köksal, T.,(1995), Sonlu Elemanlar Metodu, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul.
- Önol, R.,(1998), Elastik Zemine Oturan İnce Plakların Karışık Sonlu Elemanlar Metoduyla Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Özden, K.,(1975), İnce Plaklar Teorisine Kısa Bir Bakış, İTÜ İnşaat Fakültesi, İstanbul
- Reddy, J.N., (1984), Energy and Variational Methods In Applied Mechanics (With An Introduction to The Finite Element Method), Wiley, New York
- Szilar, R.,(1974), Theory of Analysis of Plates, Prentice Hall Inc.,USA.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	19.02.1976	
Doğum yeri	Kayseri	
Lise	1991-1994	Kayseri Nuh Mehmet Küçükçalık Anadolu Lisesi
Lisans	1994-1998	Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1999- 2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Yapı Programı
Çalıştığı kurumlar	1998-1999 1999-2000	Kariyer İnşaat Ltd. Şti. M.T.K. Projecilik.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMENTASYON MERKEZİ