



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Elastik Zor. Çi. İnce Plak. Stab. ve Serb Tık. Son. Elem. Met. İle Hes.

Yüksek Lisans Tezi

AYDIN ADIGÜZEL

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC) : R 150

422

Kayıt No .1254

Geldiği Yer .Fen Bilimleri Enst.

Tarih .05.03.2002

Fiyat .740.000 TL

Fatura No :x

Ayniyat No :1/1

Ek :x

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

ÇİZELGE LİSTESİ

ÖNSÖZ

ÖZET

ABSTRACT

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

vi-38

ELASTİK ZEMİNE OTURAN İNCE PLAKLARIN
STABİLİTESİNİN ve SERBEST TİTREŞİMİNİN SONLU
ELEMENLAR METODU İLE HESABI

İnş.Müh. Aydın ADIGÜZEL

FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Türkan KÖKSAL

Doç.Dr. Zeynep ÖZTÜRK

İSTANBUL, 2001

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	i
ŞEKİL LİSTESİ.....	ii
ÇİZELGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Sonlu Elemanlar Metodu.....	1
1.2 İnce Plakların Tanımı ve Yapılan kabuller.....	3
1.2.1 Varsayımlar.....	4
1.2.1.1 Geometrik Yönden.....	4
1.2.1.2 Malzeme Yönünden.....	4
1.2.1.3 Hesapları Basitleştirme Yönünden.....	4
1.2.2 Diferansiyel Geometri.....	5
1.2.3 Gerilme-Deformasyon Bileşenleri Arasındaki Bağlantılar.....	7
1.2.4 Gerilme-Deplasman Bileşenleri Arasındaki Bağlantılar.....	8
2. POTANSİYEL ENERJİ PRENSİBİ.....	9
2.1 Toplam Potansiyel Enerji Denklemi.....	9
2.2 Minimum Potansiyel Enerji Kriteri.....	10
2.2.1 Mambran Şekil Değiştirme Enerjisinin İkinci Varyasyonu.....	11
2.2.2 Eğilme Şekil Değiştirme Enerjisinin İkinci Varyasyonu.....	12
2.2.3 Dış Kuvvetlerin İşinin İkinci Varyasyonu.....	13
2.2.4 Elastik Zeminin Toplam Potansiyel Enerji Denklemine Etkisi.....	13
2.2.5 Toplam Potansiyel Enerjinin İkinci Varyasyonu.....	14
3. İNCE PLAKLARIN SONLU ELEMENLARI İLE STABİLİTE HESABI.....	16
3.1 Sonlu Elemanlar Metodunun Adımları.....	16
3.2 Bağ Matrisinin Bulunması.....	16
3.2.1 Bağ Matrisinin İnversi.....	18
3.3 Şekil Fonksiyonlarının Bulunması.....	18
3.4 Eleman Rijitlik Matrisinin Oluşturulması.....	19
3.5 Eleman Zemin Etki Matrisinin Oluşturulması.....	20
3.6 Eleman Gometrik Yük Matrisinin Oluşturulması.....	23
3.6.1 Mambran Kesit Tesirleri.....	23
3.7 Elemandan Sisteme Geçiş.....	25

4.	DİNAMİK DIŞ ETKİLER HALİNDE SONLU ELEMANLAR METODUNUN UYGULANMASI.....	27
4.1	Açıklama.....	27
4.2	Sönümsüz Serbest Titreşim.....	28
4.2.1	Eleman Rijitlik Matrisi.....	29
4.2.2	Eleman Zemin Etki Matrisi.....	29
4.2.3	Eleman Kütle Matrisi.....	29
4.2.4	Sisteme Geçiş.....	29
5.	AÇIKLAMALI ÖRNEK.....	32
6.	SONUÇLAR ve ÖNERİLER	36
	KAYNAKLAR.....	37
	ÖZGEÇMİŞ.....	38

SİMGE LİSTESİ

a	Sonlu elemana bölünmüş plağın x doğrultusundaki boyu
b	Sonlu elemana bölünmüş plağın y doğrultusundaki boyu
c_i	Zeminin i elemanına etkiyen yatak katsayısı
c	Zemin yatak katsayısı
P_x/P_y	.x veya y doğrultusunda stabilite yükü
E	Elastisite modülü
G	Kayma modülü
h	Plakta yüksekliği
L_x	Plağın x doğrultusundaki boyu
L_y	Plağın y doğrultusundaki boyu
u, v, w	Yer değiştirmeler
U	İç kuvvetlerin potansiyel enerjisi
U_b	Eğilme şekil değiştirme enerjisi
U_m	Membran şekil değiştirme enerjisi
V	Toplam potansiyel enerji
W	Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Birim deformasyon bileşenleri
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normal gerilme bileşenleri
θ_x	x doğrultusundaki dönme
θ_y	y doğrultusundaki dönme
γ_{xy}	Kayma deformasyonu
δ	Varyasyon sembolü
ν	Poisson oranı
τ_{xy}	Kayma gerilmesi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1 Plak Koordinat Eksenleri ve Deplasmanlar.....	3
Şekil 2.1 Deformasyondan Önce ve Sonra Plak Elemanı	6
Şekil 3.1 Dikdörtgen Plak Elemanı ve Deplasmanların Gösterimi	16
Şekil 3.2 Plakta Mambran Tesirlerinin Gösterimi.....	22
Şekil 5.1 Sistemin Gösterimi.....	32
Şekil 5.2 Sistemin Yükleme Durumu	32
Şekil 5.3 Sistemin Deplasman Parametreleri.....	33
Şekil 5.4 Eleman Deplasman parametreleri	33

Çizelge4.1 Eleman Kütle Matrisi.....	31
Çizelge5.1 Sistemin Oluşturulması.....	33

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge3.1 Bağ Matrisi.....	17
Çizelge3.2 Bağ Matrisinin İnversi.....	18
Çizelge3.3 Şekil Fonksiyonlarının Matrisi.....	19
Çizelge3.4 F Türev Matrisinin Transpozese.....	20
Çizelge3.5 Eleman Rijitlik Matrisi.....	21
Çizelge3.6 Eleman Zemin Etki Matrisi.....	22
Çizelge3.7 Eleman Geometrik Yük Matrisi.....	26
Çizelge4.1 Eleman Kütle Matrisi.....	31
Çizelge5.1 Sistemin Oluşturulması.....	34

ÖZET

Plaklarda dış yükler orta düzlemin içinde etkiyorsa stabilite problemleri önem kazanır. Bu tür taşıyıcı elemanlara levha denir.

Günümüzde plaklar; Bina döşemelerinde, betonarme yüksek yapı temellerinde, elastik zemine oturan yapı temellerinde, su depolarında, betonarme istinat duvarlarında, ankrajlı betonarme perdelerde, limanlarda, stok sahalarında, hava limanlarında, baca temellerinde, silo temellerinde ve köprülerde kullanılan taşıyıcı elemanlardır.

Zemin etkilerine maruz olmayan plakların stabilitesi için bir hayli çözüm elde edilmiş ve bu çözümler tablo ve abaklar halinde pratik olarak kullanılacak hale getirilmiştir.

Bu çalışmada, dikdörtgen sonlu elemanlar için çıkarılmış şekil fonksiyonlarını kullanarak elastik zemine oturan ince plakların stabilite ve sönümlü serbest titreşiminin çözümü yapılmıştır.

Zemin etkileri yatak katsayısı ile göz önüne alınmış ve eleman zemin etki matrisi adı altında tablo halinde verilmiştir. Konunun sonunda zemin yatak katsayısı sıfırdan başlayarak artırılarak P_k yük değişimi ve periyodu hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sonlu elemanlar, ince plaklar, elastik zemin, stabilite, serbest titreşim

ABSTRACT

This research examines the rectangular plates external loads that act on towards central plane of plate operate plate like metal plate ground place for storing beds is elastic.

As the metal plate ground place for storing beds increases, Critical load (P_k) decreases. In the example, at the end of the thesis, metal plate ground place for storing beds starts up from zero (0) and increases. In addition, P_k loads change against the metal plate ground place for storing beds.

Keywords: Finite elements, thin plates, elastic ground, stability, free vibration

1. GİRİŞ

Elastik zemine oturan sistemlerin teorik hesabı oldukça komplike bir konudur. Bu tip sistemlerin diferansiyel denklemlerinin çözümü ancak bazı kabullerin yapılması ile gerçekleşmektedir. Bu kabullerin hemen hepsi sisteme mesnet teşkil eden zeminle ilgilidir. Zeminin elastik özelliklerinin tam belli olmaması ve plastik deformasyon yapma ihtimalinin bulunması, diferansiyel denklemin çözümünü daima bir ölçüde sınırlar. Stabilite problemlerinde sistemlerin denge durumları; kararlı, farksız, kararsız diye sınıflandırılan üç değişik durumda olabilir. Bu denge durumlarından farksız denge durumu hiç istenmeyen bir durumdur. Çünkü; kararsız denge durumu büyük yer ve şekli değiştirmelere sebep olduğundan eleman veya sistemlerin kırılma, eğilme ve kopma durumları ortaya çıkabilir. Plâğin kenar kuvvetleri belirli bir değere ulaştığında denge değeri karalı olmaktan çıkabilir. Bu durumda plak kritik değeriyle kendi stabilite değerine ulaşır. Kritik yüklemenin aşılması halinde ise; düzlem plâğin dengesi bozulur ve labil hale gelir, yani burkulur. Bu haldeki kritik yük burkulma yüküdür. Plaklar taşıma kabiliyetini tam olarak kaybetmeden evvel önemli bir kuvvet artması taşıyabilir. Kritik üstü olan bölgesinin ince plaklarda pratik önemi mevcuttur. Kesit kalınlığı sistem boyutlarına göre çok küçük olan ince plaklarda narinlik söz konusudur. Narinliğin artması büyük deplasmanlara sebep olacağından I. Mertebe teorisi yerine II. Mertebe teorisi ile hesap yapılır.

Yapılan bu çalışmada elastik zemine oturan ince plakların stabilitesi ve serbest titreşim hesabı yapılmıştır. Çözüm yöntemi olarak sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Bu bölümde sonlu elemanlar metodunun özellikleri ile plakların tanımı ve yapılan kabuller anlatılmıştır.

Günümüzde plaklar; bina döşemelerinde, betonarme yüksek yapı temellerinde, elastik zemine oturan yapı temellerinde, su depolarında, limanlarda, stok sahalarında, baca ve silo temellerinde ve köprülerde kullanılan taşıyıcı elemanlardır.

1.1 Sonlu Elemanlar Metodu

Sürekli bir sistemi kendi şekline ve sınır şartlarına uygun olarak sonlu sayıda elemanlara ayrılarak; elde edilen elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonun dan sonra bu elemanların birleştirilmesi ile sisteme geçilir. Elemanın boyutları küçüldükçe hata oranı azalmaktadır, fakat çözüm süresi uzamaktadır. Sistemi oluşturan elemanların herbirine sonlu elemanlar denir ve birleştikleri köşe noktaları da düğüm noktası olarak adlandırılır.

Sonlu elemanlar metodunda gerçek sonuçlara yakınsanma hızının artması için en önemli etken deplasman parametrelerine karşılık gelen bilinmeyen deplasman fonksiyonlarının doğru tayin edilmesidir. Deplasman fonksiyonlarının seçiminde yakınsaklık kriteri diye bilinen bazı özelliklerin sağlanması gerekir. Deplasman fonksiyonları seçilirken uyulacak kurallar şunlardır.

1. Seçilen deplasman fonksiyonları eleman içinde ve kenarları boyunca süreklilik şartını sağlamalıdır.
2. Rijit çisim hareketinden dolayı gerilme ve şekil değiştirme olmamalı, sabit deformasyon şartını sağlamalıdır.
3. Deplasman fonksiyonları eleman içinde sürekli olmalıdır. Eleman boyutu küçültülerek gerilme yayılımı sabite yakın hale getirilmelidir.
4. Koordinat eksenini değiştirince çözüm farklı olmamalıdır. Bunun için deplasman fonksiyonları ya tam polinom ya da tabii koordinatların fonksiyonu şeklinde olmalıdır.
5. İç ve dış kuvvetlerin işindeki türevlerde de süreklilik olmalıdır.
6. Deplasman fonksiyonları düğüm noktası deplasmanlarının lineer bir fonksiyonu olmalıdır.

Sonlu elemanlar metodunda sürekli sistem ayrık sistem haline aşağıdaki gibi getirilir.

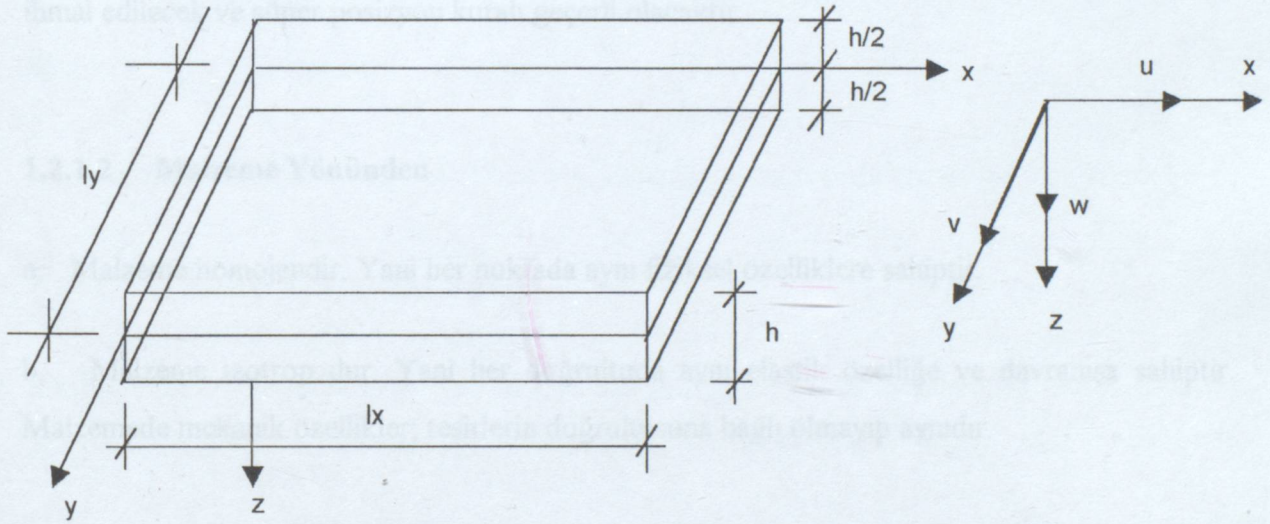
1. Sürekli ortam hayali çizgilerle veya yüzeylerle ayrık şekle getirilir.
2. Elemanların düğüm noktaları ile birbirine bağlı olduğu farz edilir. Düğüm noktalarının deplasmanları veya bunların türevleri (dönme gibi) problemin bilinmeyen parametreleri olarak seçilir.
3. Deplasman fonksiyonları, birim deplasman durumlarının lineer bir kombinasyonudur.
4. Kuvvetler düğüm noktalarına uygulanır.

Sonlu elemanlar metodunun uygulanabilmesi için tamlik ve uyumluluk şartının sağlanmış olması gerekir.

Tamlık Şartı; Eleman ne kadar küçük olursa olsun fonksiyonun kendisi ve maksimum türevin elde edilme şartına denir. Tamlık şartı sağlanamıyorsa fonksiyonun başına entegralde geçen türev mertebesini sağlayacak büyüklükte bir polinom terimi konmalıdır.

Uygunluk Şartı; Herhangi bir noktada maksimum türev mertebesinin en az bir düşük mertebesinin sürekli olması şartına denir

1.2 İnce plakların Tanımı ve Yapılan Kabuller



Şekil 1.1 Plak, Koordinat Eksenleri ve Deplasmanlar

Dış yükler orta düzleme dik ise plak çalışması söz konusudur. Yani orta düzlemin eğilmesi ile birlikte elastik yüzey oluşmaktadır. Bu tür taşıyıcılara ince plak denir. Betonarme döşemler plak cinsinden taşıyıcılardır.

Dış yükler orta düzlemin içinde etkiliyorsa bir levha çalışması söz konusudur. Levhalar stabilite problemleri önem kazanır.

1.2.1 Varsayımlar

1.2.1.1 Plak Geometrik Yönden

- a. Plak kalınlığı diğer boyutların yanında çok küçüktür.

$$h \ll I_x, I_y$$

- b. Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlemdir.

- c. Yükler orta düzleme diktir.

- d. Sehimler (çökmeler) plak kalınlığının yanında çok küçüktür.

$$w \ll h$$

Bu kabuller sonunda denge denklemleri ve geometrik uygunluk şartlarında ikinci mertebe etkiler ihmal edilecek ve süper pozisyon kuralı geçerli olacaktır.

1.2.1.2 Malzeme Yönünden

- a. Malzeme homojendir. Yani her noktada aynı fiziksel özelliklere sahiptir.

- b. Malzeme izotrop dur. Yani her doğrultuda aynı elastik özelliğe ve davranışa sahiptir. Malzemede mekanik özellikler; tesirlerin doğrultusuna bağlı olmayıp aynıdır.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x}; \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y}; \quad E_x = E_y = E \quad (1.1)$$

- c. Malzeme belirli sınırlar içinde Hooke Kanunu'na uyan Lineer-elastik bir malzemedir.

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad (1.2)$$

1.2.1.3 Hesapları Basitleştirmesi Yönünden

- a. Deformasyondan önce orta düzlemin herhangi bir noktasının normali, deformasyondan gelen elastik yüzeyin o noktadaki normali olarak kalır. Yani deformasyondan önce orta düzlemin herhangi bir noktadaki normali üzerinde bulunan herhangi bir nokta, deformasyondan sonrada

elastik yüzeyin o noktadaki yüzeyin normali üzerinde bulunur. Bu çubuk sistemlerdeki Bernoulli—Navier hipotezine karşılık gelen Kirchhoff—Love hipotezidir.

b. Plak orta düzlemine dik doğrultudaki σ_z normal gerilmeleri yok sayılabilecek kadar küçüktür. Gerçekte plakta üç doğrultuda (uzay) gerilme durumu söz konusudur. Fakat Döşemenin herhangi bir (x_0, y_0) noktasında σ_z 'in h yüksekliğince değişimi incelenirse

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \sigma(x_0, y_0, z) & z = -h/2 \text{ için } \sigma_z &= -p \\ & & z = +h/2 \text{ için } \sigma_z &= 0\end{aligned}\quad (1.3)$$

p birim alana gelen yüküdür. $P=1,0 \text{ t/m}^2$ olsa $\sigma_z = -0,10 \text{ kg/cm}^2$ olur. Uygulamadan bilinir ki σ_x, σ_y değerleri $50—100 \text{ kg/cm}^2$ arasında değişir. Bu durumda σ_z değeri σ_x, σ_y yanında çok küçüktür ve $\sigma_z = 0$ alınabilir.

c. Yukarıdaki varsayıma bağlı olarak $\varepsilon_z \approx 0$ alınabilir. Çünkü elastisite teorisinden bilinir ki:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \sigma_z = 0 \quad \mu = 0,10 - 0,15 \quad (1.4)$$

Bu durumda z doğrultusundaki boy değişimleri yok sayılabilecek kadar küçük olur. Demek ki deformasyon sırasında plak kalınlığının değişmediği kabul ediliyor. $w=w(x,y)$ olur.

1. Kesitin orta düzleminde deformasyon yoktur. Birim boy ve açı değerleri

$$\begin{aligned}(\varepsilon_x)_{z=0} &\approx 0 & (\varepsilon_y)_{z=0} &\approx 0 & (\gamma_{xy})_{z=0} &\approx 0 \\ (u)_{z=0} &\approx 0 & (v)_{z=0} &\approx 0 & (w)_{z=0} &\neq 0\end{aligned}\quad (1.4.1)$$

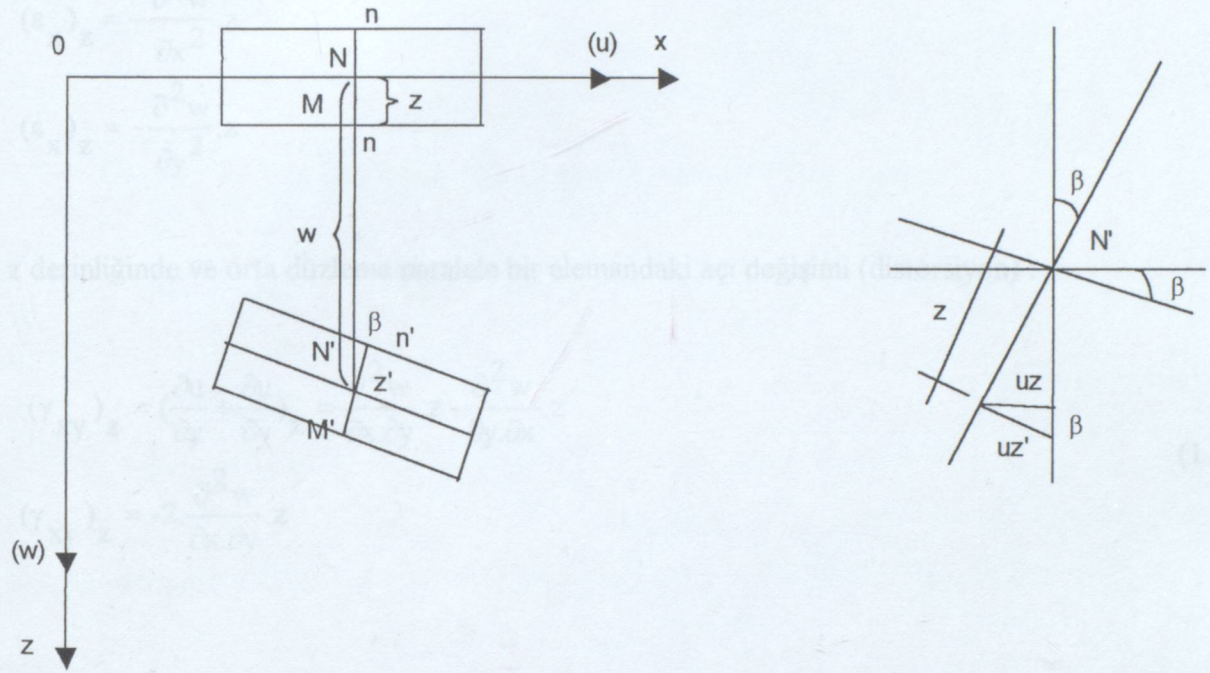
Plak probleminde ilk adım, plağa etkiyen yükler ile bunu sonucu olan deformasyonlar arasındaki diferansiyel bağıntının çıkartılmasıdır.

1.2.2 Diferansiyel Geometri

Bu bölümde, diferansiyel geometri yardımıyla, deformasyon (şekil değiştirme) bileşenleri ile, deplasman (yer değiştirme) bileşenleri arasındaki bağıntılar çıkartılacaktır.

z derinliğinde birim boy değişimi

Bir plağın deformasyondan evvel ve deformasyondan sonra y sabit düzlemi ile keselim



Şekil 2.1 Deformasyondan Önce ve Sonra Plak Elemanı

Plağın x doğrultusundaki eğimi $\tan \beta \approx \beta \approx \frac{\partial w}{\partial x}$ olacaktır. Şekilden $\tan \beta = \frac{u_z'}{z}$

$$u_z = u_z' \cdot \cos \beta \quad \beta \text{ çok küçük olduğundan} \quad \cos \beta \approx 1; \quad u_z = u_z'$$

$$u_z, \quad u' \text{ nun (+) yönüne ters yönde olduğu için} \quad u_z = -\frac{\partial w}{\partial x} \cdot z$$

$$u_z = -\frac{\partial w}{\partial x} \cdot z \quad (1.5)$$

Benzer şekilde :

$$v_z = -\frac{\partial w}{\partial y} \cdot z \quad (1.6)$$

.z derinliğinde birim boy değişimi :

$$(\epsilon_x)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z \quad (1.7)$$

$$(\epsilon_x)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z$$

$$(\epsilon_x)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z$$

z derinliğinde ve orta düzleme paralel bir elemandaki açı değişimi (distorsiyon) :

$$(\gamma_{xy})_z = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)_z = \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \cdot z - \frac{\partial^2 w}{\partial y \cdot \partial x} \cdot z \quad (1.8)$$

$$(\gamma_{xy})_z = -2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \cdot z$$

1.2.3 Gerilme Deformasyon Bileşenleri Arasındaki Bağlılıklar

$\sigma_z \approx 0$, $\epsilon_z \approx 0$ alındığına göre

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \mu \sigma_y \right)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \mu \sigma_x \right) \quad (1.9)-(1.10)-(1.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

Bağıntıları elastisite teorisinden bilinir.

Burada $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$ Bu bağıntılardan gerilmeler seçilirse :

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x)_z &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y)_z \\
 (\sigma_y)_z &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x)_z \\
 (\tau_{xy})_z &= G(\gamma_{xy})_z
 \end{aligned} \tag{1.12)-(1-13)-(1-14)}$$

1.2.4 Gerilme ile Yer Değiştirme Bileşenleri Arasındaki Bağıntılar

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x)_z &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(-z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 (\sigma_y)_z &= -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{1-15}$$

Benzer şekilde :

$$\begin{aligned}
 (\sigma_y)_z &= -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 (\tau_{xy})_z &= -\frac{E \cdot z}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}
 \end{aligned} \tag{1.16)-(1-17)}$$

Görüldüğü gibi gerilmeler z'e lineer olarak bağlıdır. Demek ki kesit yüksekliğince gerilmeler lineer olarak değişmektedir.

2. POTANSİYEL ENERJİ PRENSİBİ

Geometrik açıdan lineer ve lineer olmayan sistemlere uygulanabilen toplam potansiyel enerji, fiziksel açıdan yalnızca lineer Sistemlere uygulanabilir.

Kesit kalınlıkları sistem boyutlarına göre çok küçük olması halinde yapının narinliği söz konusu olur. Narinliğin artması büyük deplasmanlara sebep olacağından; birinci mertebe teorisi yerine, ikinci mertebe teorisiyle hesap gerekmektedir. Dolayısıyla sistemin stabilite hesabı büyük önem kazanmaktadır. Stabilite hesabında denge konumu bellidir. Denge durumunun kararlı olup olmadığı araştırılır ve kararlı denge konumunu oluşturulan şartlar incelenir.

Kabuller

1. Denge denklemleri şekil değiştirmiş sistem üzerinde yazıldığı için elastik stabilite lineer olmayan bir teodir. Yük –Deplasman arasında artık bir orantılılık bulunmaz. Bu nedenle etkiyen dış yüklerin aralarındaki oran sabit kalacak şekilde arttıkları kabul edilir.
2. Sistem lineer olmadığından süper pozisyon prensibi, Betti karşılıklı teoremi geçerli değildir.
3. Mambran kesit tesirlerinin büyük değerler aldığı göz önüne alınarak, yalnızca bunların [No] ikinci mertebe etkileri hesaba katılacak, eğilme ve burulma momentlerinin ikinci mertebe etkileri ihmal edilecektir.

2.1 Toplam Potansiyel Enerji Denklemi

$$V=U.W \quad (2.1)$$

2.2 Minimum Potansiyel Enerji Kriteri

Deplasmandaki artımlar ve toplam potansiyel enerjinin varyasyonları aşağıdaki gibidir.

$$u = u_0 + u_1$$

$$v = v_0 + v_1$$

$$w = w_0 + w_1$$

(2-2)

$(u_0, v_0, w_0) \rightarrow$ Denge konumuna karşı gelen deplasmanlar

$(u_1, v_1, w_1) \rightarrow$ 2. Konumu elde etmek için verilen sonsuz küçük artımlar

$(u, v, w) \rightarrow$ 2. Konuma karşı gelen deplasmanlar

o halde toplam potansiyel enerji şöyle olur.

$$V(u, v, w) = V(u_0 + u_1, v_0 + v_1, w_0 + w_1) \rightarrow \text{2. Konumdaki toplam potansiyel enerji} \quad (2-3)$$

$$V(u_0, v_0, w_0) \rightarrow \text{1. Konumdaki toplam potansiyel enerji} \quad (2-4)$$

$$\Delta V(u, v, w) = V(u_0 + u_1, v_0 + v_1, w_0 + w_1) - V(u_0, v_0, w_0) \rightarrow \text{Potansiyel enerjideki değişim}$$

Potansiyel enerjideki değişimi seriye açarsak,

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots \quad (2-5)$$

$$\delta V : \text{Potansiyel enerjinin 1. varyasyonu (Denge Denklemlerini verir)} \quad (2-6)$$

$$\frac{1}{2!} \delta^2 V : \text{Potansiyel enerjinin 2. varyasyonu (Stabilite Denklemlerini verir)} \quad (2-7)$$

2.2.1 Mambran Şekil Değiştirme Enerjisinin İkinci Varyasyonu

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_x^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4\end{aligned}\quad (2-8)$$

$w_0 \equiv 0$ için ε_x 'in değeri şöyledir;

$$\frac{1}{2!} \delta^2 (\varepsilon_x^2) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \quad (2.9)$$

Benzer olarak

$$\frac{1}{2!} \delta^2 (\varepsilon_y^2) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2!} \delta^2 (\varepsilon_x \varepsilon_y) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{2!} \delta^2 (\gamma_{xy}^2) = \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \quad (2.12)$$

Sonuç olarak mambran şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonu

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!} \delta^2 U_m &= \frac{C}{2} \iint \left\{ \left(\delta \varepsilon_x \right)^2 + \left(\delta \varepsilon_y \right)^2 + 2\nu \left(\delta \varepsilon_x \right) \left(\delta \varepsilon_y \right) + \frac{1-\nu}{2} \left(\delta \gamma_{xy} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left[\left(\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0} \right) \left(\delta^2 \varepsilon_x \right) + \left(\varepsilon_{y0} + \nu \varepsilon_{x0} \right) \left(\delta^2 \varepsilon_y \right) + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy0} \left(\delta^2 \gamma_{xy} \right) \right] \right\} dx dy\end{aligned}\quad (2.13)$$

2.2.2 Eğilme Şekil Değiştirme Enerjisinin İkinci Varyasyonu

$$\begin{aligned}
 k_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 (k_x)^2 &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \\
 \frac{1}{2} \delta^2 (k_x)^2 &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Benzer olarak

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \delta^2 (k_y)^2 &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\
 \frac{1}{2} \delta^2 (k_x k_y) &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 \frac{1}{2} \delta^2 (k_{xy}^2) &= 4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.15)-(2.16)-(2.17)$$

$$\frac{1}{2!} \delta^2 U_b = \frac{D}{2} \iint \left[(\delta k_x)^2 + (\delta k_y)^2 + 2\nu (\delta k_x) (\delta k_y) + 2(1-\nu) (\delta k_{xy})^2 \right] dx dy \tag{2.18}$$

Bu son şekle göre şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonunu yazalım.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2!} \delta^2 U &= \frac{C}{2} \iint (\epsilon_{x1}^2 + \epsilon_{y1}^2 + 2\nu \epsilon_{x1} \epsilon_{y1} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy1}^2) dx dy \\
 &\quad \frac{1}{2} \iint (N_{xo} \beta_{x1}^2 + N_{yo} \beta_{y1}^2 + 2N_{xyo} \beta_{x1} \beta_{y1}) dx dy \\
 &\quad \frac{D}{2} \iint \left[k_{x1}^2 + k_{y1}^2 + 2\nu k_{x1} k_{y1} + 2(1-\nu) k_{xy1}^2 \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Bu denklemdeki deformasyon= deplasman münasebetleri aşağıdaki gibidir.

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad k_{y1} = \frac{\partial v_1}{r \partial y} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \quad (2-20)$$

$$\varepsilon_{y1} = \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{w_1}{r} \quad 2k_{xy1} = \frac{\partial v_1}{r \partial x} - \frac{2 \partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \quad (2-21)$$

$$\gamma_{xy1} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad \beta_{x1} = -\frac{\partial w_1}{\partial x} \quad (2-22)$$

$$k_{x1} = -\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad \beta_{y1} = \frac{v_1}{r} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \quad (2-23)$$

Buradaki N_{x0} , N_{y0} ve N_{xy0} değerleri mambran denge denklemlerinden elde edilen mambran kuvvetleridir.

$$\begin{aligned} N_{x0} &= C(\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0}) \\ N_{y0} &= C(\varepsilon_{y0} + \nu \varepsilon_{x0}) \\ N_{xy0} &= C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy0} \end{aligned} \quad (2-24)-(2-25)-(2-26)$$

2.2.3 Dış Kuvvetlerinin İşinin İkinci Varyasyonu

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Omega = 0 \quad \text{dır.} \quad (2-27)$$

2.2.4 Elastik Zeminin Toplam Potansiyel Enerji Denklemine Etkisi

Zeminin elastikliğinden dolayı yay modelinde olduğu gibi hangi kuvvetlerin (yüklerin) meydana geleceği ifade edebiliriz.

Elastik zemin terimi $p_f = -cw$ şeklinde yazılabilir.

$$U_f = -\frac{1}{2} \iint p_f w dx dy \quad U_f = \frac{c}{2} \iint w^2 dx dy \quad (2.28)$$

Elastik zemine oturan bir plağın şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonu ise aşağıdaki şekilde olur.

$$\frac{1}{2!} \delta^2 U_f = \frac{c}{2} \iint w^2 dx dy \quad (2.29)$$

2.2.5 Toplam Potansiyel Enerjinin İkinci Varyasyonu

$$\delta^2 V = \delta^2 U_m + \delta^2 U_b + \delta^2 U_f$$

$$\delta^2 V = 0 \text{ ise sistem farksız}$$

$$\delta^2 V < 0 \text{ ise sistem kararsız}$$

$$\delta^2 V > 0 \text{ ise sistem kararlı.}$$

Matris formunda yazarsak

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \frac{1}{2} \iint [\epsilon]^T [D] [\epsilon] dx dy + \frac{1}{2} \iint [\beta]^T [N_0] [\beta] dx dy + \frac{1}{2} c \iint (w)^2 dx dy \quad (2.30)$$

Açık şekilde yazalım.

3. İNCE PLAKLARI SONLU ELEMENLER METODU İLE STABİLİTE KESABİ

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \delta^2 V = \frac{1}{2} \iint \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{matrix} \right\}^T \left[\begin{matrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{matrix} \right] dx dy \\
 + \frac{1}{2} \iint \left\{ \begin{matrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\nu}{r} - \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix} \right\}^T \left[\begin{matrix} N_{xo} & N_{xyo} \\ N_{xyo} & N_{yo} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\nu}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} \end{matrix} \right\} dx dy
 \end{aligned} \quad (2.31)$$

3.2. Bağ Matrisinin Oluşturulması

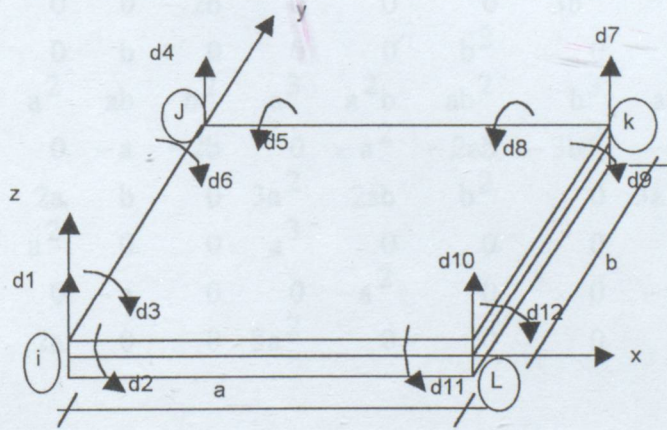
Şekil 1.1. Dikdörtgen Plak Elemanı ve Deplasmanları Gösterimi

3. İNCE PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE STABİLİTE HESABI

3.1. Sonlu Elemanlar Metodunun Adımları

1. Sistem elemanlara bölünür ve her ucundaki deplasmanlar tayin edilir.
2. Deplasman fonksiyonları seçilir.
3. Şekil fonksiyonları tayin edilir.
4. Şekil fonksiyonları türevlerinden faydalanarak eleman rijitlik matrisi hesaplanır.
5. Eğer sürekli ortam elastik zemine oturuyorsa zemin etki matrisi hesaplanır.
6. Geometrik yük matrisi hesaplanır.
7. Elemanlar sistemde birleştirilerek sisteme geçilir.
8. Sınır şartları tayin edilir.
9. Kritik stabilite yükü tayin edilir. (Pk)

3.2 Bağ Matrisinin Oluşturulması



Şekil 3.1 Dikdörtgen Plak Elemanı ve Deplasmanların Gösterimi

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{b}{a}$$

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}$$

Deplasman fonksiyonlarının seçimi

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (3-1)$$

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} = -a_3 - a_5y - 2a_6y - a_8x^2 - 2a_9xy - 3a_{10}y^2 - a_{11}x^3 - 3a_{12}xy^2 \quad (3-2)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = a_2 + 2a_4x + a_5y + 3a_7x^2 + 2a_8xy + a_9y^2 + 3a_{11}x^2y + a_{12}y^3 \quad (3-3)$$

Koordinat değerleri,

1(0,0), 2(a,0), 3(a,b), 4(0,b)

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^2 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Çizelge 3.1 Bağ Matrisi

3.2.1 Bağ Matrisinin İncersi

$$[B] = [A]^{-1}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{a^2} & 0 & -\frac{2}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{ab} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{ab} & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & -\frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{3}{b^2} & \frac{2}{b} & 0 & \frac{3}{b^2} & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{a^3} & 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{a^3} & 0 & \frac{1}{a^2} \\ \frac{3}{a^2b} & 0 & \frac{2}{ab} & -\frac{2}{a^2b} & 0 & -\frac{2}{ab} & \frac{3}{a^2b} & 0 & -\frac{1}{ab} & -\frac{3}{a^2b} & 0 & \frac{1}{ab} \\ \frac{3}{ab^2} & -\frac{2}{ab} & 0 & -\frac{3}{ab^2} & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{3}{ab^2} & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{3}{ab^2} & \frac{2}{ab} & 0 \\ \frac{2}{b^3} & -\frac{1}{b^2} & 0 & -\frac{2}{b^3} & -\frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{a^3b} & 0 & -\frac{1}{a^2b} & \frac{2}{a^3b} & 0 & \frac{1}{a^2b} & -\frac{2}{a^3b} & 0 & \frac{1}{a^2b} & \frac{2}{a^3b} & 0 & -\frac{1}{a^2b} \\ -\frac{2}{ab^3} & \frac{1}{ab^3} & 0 & \frac{2}{ab^3} & \frac{1}{ab^2} & 0 & -\frac{2}{ab^3} & -\frac{1}{ab^2} & 0 & \frac{2}{ab^3} & -\frac{1}{ab^3} & 0 \end{bmatrix}$$

Çizelge 3.2 Bağ Matrisinin İncersi

3.3 Şekil Fonksiyonlarının Bulunması

$$[N] = \begin{bmatrix} 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3 \end{bmatrix} [B] \{d\} \quad (3-4)$$

$$[N]^T = \begin{bmatrix} 1 - \xi\eta - (2 - 3\xi)(1 - \eta) - (1 - \xi)(3 - 2\eta)\eta^2 \\ - (1 - \xi)\eta(1 - \eta)^2 b \\ \xi(1 - \xi)^2(1 - \eta)a \\ (1 - \xi)(3 - 2\eta)\eta^2 + \xi(1 - \xi)(1 - 2\xi)\eta \\ (1 - \xi)(1 - \eta)\eta^2 b \\ \xi(1 - \xi)^2 \eta a \\ (3 - 2\xi)\xi^2 \eta - \xi\eta(1 - \eta)(1 - 2\eta) \\ \xi(1 - \eta)\eta^2 b \\ - (1 - \xi)\xi^2 \eta a \\ (3 - 2\xi)\xi^2(1 - \eta) + \xi\eta(1 - \eta)(1 - 2\eta) \\ \xi\eta(1 - \eta)^2 b \\ - (1 - \xi)\xi^2(1 - \eta)a \end{bmatrix}$$

Çizelge 3.3 Şekil Fonksiyonlarının Matrisi

a. Eleman Rijitlik Matrisinin Oluşturulması

$$[K_e] = \int_0^a \int_0^b \{ \epsilon \}^T [D] \{ \epsilon \} dx dy \quad (3-5)$$

$$\{ \epsilon \} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \{ \epsilon \} = [F][B]\{d\} \quad (3-6)$$

$$[K_e] = \int_0^a \int_0^b [F]^T [B]^T [D] [B] [F] \{d\} dx dy \quad (3-7)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} N_{1xx} & N_{2xx} & \dots & N_{12xx} \\ N_{1yy} & N_{2yy} & \dots & N_{12yy} \\ 2N_{1xy} & 2N_{2xy} & \dots & 2N_{12xy} \end{bmatrix}$$

$$[F]^T = \begin{bmatrix} (1-2\xi)(1-\eta)\frac{6}{a^2} & (1-\xi)(1-2\eta)\frac{6}{b^2} & [-1+6\xi(1-\xi)+6(1-\eta)]\frac{2}{ab} \\ 0 & -(1-\xi)(2-3\eta)\frac{2}{b} & \left(1-4\eta+3\eta^2\right)\frac{2}{a} \\ (2-3\xi)(1-\eta)\frac{2}{a} & 0 & -\left(1-4\eta+3\eta^2\right)\frac{2}{b} \\ (1-2\xi)\eta\frac{6}{a^2} & -(1-\xi)(1-2\eta)\frac{6}{b^2} & [-1+6\xi(1-\xi)+6(1-\eta)]\frac{2}{ab} \\ 0 & -(1-\xi)(1-3\eta)\frac{2}{b} & -\eta(2-3\eta)\frac{2}{a} \\ (2-3\xi)\eta\frac{2}{a} & 0 & \left(1-4\xi+3\xi^2\right)\frac{2}{b} \\ -(1-2\xi)\eta\frac{6}{a^2} & -\xi(1-2\eta)\frac{6}{b^2} & [-1+6\xi(1-\xi)+6(1-\eta)]\frac{2}{ab} \\ 0 & -\xi(1-3\eta)\frac{2}{b} & \eta(2-3\eta)\frac{2}{a} \\ (1-3\xi)\eta\frac{2}{a} & 0 & -\xi(2-3\xi)\frac{2}{b} \\ -(1-2\xi)(1-\eta)\frac{6}{a^2} & \xi(1-\eta)\frac{6}{b^2} & [-1+6\xi(1-\xi)+6(1-\eta)]\frac{2}{ab} \\ 0 & -\xi(2-3\eta)\frac{2}{b} & -\left(1-4\eta+3\eta^2\right)\frac{2}{a} \\ (1-3\eta)(1-\eta)\frac{2}{a} & 0 & \xi(2-3\xi)\frac{2}{b} \end{bmatrix}$$

Çizelge 3.4 [F] Matrisinin Transpozesi

3.5 Eleman Zemin Etki Matrisinin Oluşturulması

Zemin etki matrisine elastik yataklanma matrisi de denir, Zemin etki matrisini toplam potansiyel enerji denkleminin üçüncü terimi verir. Aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$[S_e] = c \int_0^a \int_0^b [N]^T [N] dx dy \quad (3-8)$$

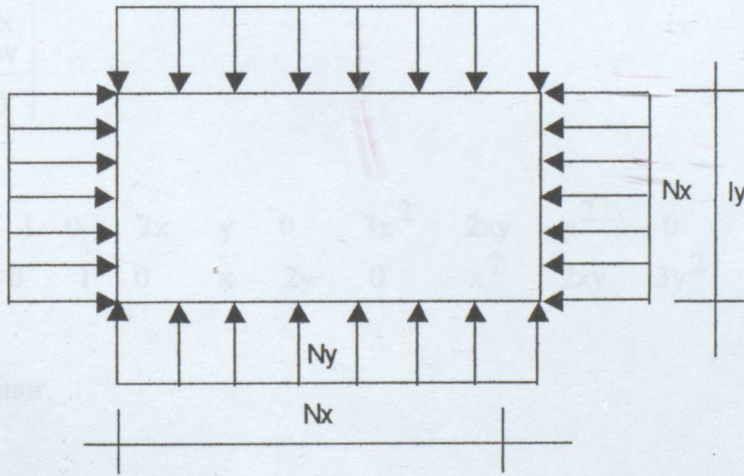
$$[N] = [\phi(x, y)][B] \quad (3-9)$$

$$[S_e] = c \int_0^a \int_0^b [\phi(x,y)]^T [B]^T [\phi(x,y)] [B] dx dy \quad (3-10)$$

Elastik zeminin etkisi yatak katsayısına ve elemanın oturma yüzeyine bağlı olarak değişmektedir. Eleman rijitlik matrisi ile zemin etki matrisinin birim analizi yapılırsa ikisinin de birbirine eşit olduğu görülür. Bu da bize iki matrisin birbiri ile toplanabileceği sonucunu verir.

3.6. Eleman Geometrik Yük Matrisinin Oluşturulması

3.6.1 Mambran Kesit Tesirleri



Şekil 3.2 Plakta Membran Tesirlerinin Gösterimi

$$\begin{aligned} N_{x0} &= -N_x, & N_{y0} &= -N_y \\ N_{x0} &= -\frac{P_x}{l_x}, & N_{y0} &= -\frac{P_x}{l_x}, & N_{xy0} &= 0 \end{aligned} \quad (3-11)$$

$$\frac{P_x}{l_x} = R \frac{P_x}{l_y}, \quad R = 1, 2, 3, \dots \quad (3-12)$$

$$N_{x0} = -RN_{y0} \quad \text{olur.}$$

$$[N_e] = \int_0^a \int_0^b [B]^T [G]^T [N_0] [G] [B] dx dy \quad (3-13)$$

$$[N_0] = \begin{bmatrix} N_{x0} & N_{xy0} \\ N_{xy0} & N_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{x0} & 0 \\ 0 & N_{y0} \end{bmatrix}$$

$$[N_0] = \begin{bmatrix} -\frac{p_x}{l_y} & 0 \\ 0 & -\frac{p_x}{l_y} \end{bmatrix} \quad \text{olur.}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & -y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3.7 Sisteme Geçiş

$$([K] + \lambda[N] + [S])\{D_s\} = 0$$

$[K] \rightarrow$ Sistem Rijtlik Matrisi

$[N] \rightarrow$ Sistem Geometrik YükMatrisi

$[S] \rightarrow$ Sistem Zemin Etki Matrisi

$\{D_s\} \rightarrow$ Sınır Şartları

Sınır şartları denklemde yerine konup katsayılar determinantı sıfıra eşitlenerek P_{kr} yük bulunur. Sisteme geçişi ve konuyu örnek üzerinde açıklayalım.

4. DİNAMİK DIŞ ETKİLER HALİNDE SONLU ELEMANLAR METODUNUN UYGULANMASI

4.1 Açıklama

İnşaat mühendisliği açısından; deprem darbe kuvvetleri, makine titreşimlerinden oluşan kuvvetler, ani patlamalardan oluşan kuvvetlerin hepsi dinamik yüklenmelere sebep olmaktadır. Bu kuvvetlerin sisteme etkisinin hesaplanması için çeşitli dinamik analiz yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biride Sonlu elemanlar yöntemi ile dinamik dış etkilerin incelenmesidir. Bu yöntem uygulanırken sistemin iki tip yükün etkisi altında kaldığı düşünülebilir. Bu yükler; harekete neden olan dış yük ile, hareketin ivme artışına karşı duran atalet kuvvetidir. Yapı özellikleri ve etkiyen kuvvetler göz önünde bulundurularak titreşim etkisinde kalan sistemin mekanik bir yay-kütle modeli oluşturulur. Modeldeki kütlelere ait titreşim denklemleri kurularak çözüme ulaşılır. Şu özelliklere dikkat edilmesi gerekir.

1. Bu model oluşturulurken yayılı kütleler düğüm noktalarında toplanacaktır.
2. Eleman boyutlarının büyük olması halinde gerçek sonuca ulaşabilmek için nokta kütle sayısı artırılacaktır.
3. Eleman üzerinde mümkün olduğu kadar yayılı kütle halinde yaklaşım yapılacaktır.
4. Yüzeysel kütlelerden doğan atalet kuvvetlerinin ortalama yüzeye indirgendiği kabulü yapılacaktır.
5. Dönme bileşenlerine bağlı olarak ayrıca yüzeysel yayılı momentler oluşmayacaktır.
6. Zamana bağlı şekil değiştirme, ortalama yüzeyin yer değiştirmeleri cinsinden belirlendiğinden yayılı atalet kuvvetleri yalnız yer değiştirme bileşenlerine bağlı olacaktır.
7. Sisteme etki eden atalet kuvvetleri, sönüm etkileri ve yay kuvvetleri ile beraber dış kuvvetler denge halinde olmalıdır.

8. Eğer sönümsüz durum ve elastik zeminin etkisi söz konusu edilip sistem idealleştirilmiş ise sistemin elastik zemin üzerinde denge durumundan ayrılmadan titreşim yaptığı kabul edilecektir.

En genel haliyle bilindiği gibi eleman üzerindeki sönüm tesirleri, elastik zeminin etkisi, birim alana gelen kütle yoğunluğunun etkisi, eleman rijitliği, zamana bağlı sıcaklık değişimleri ve zamana bağlı dış yük etkisi düşünülerek virtüel iş teoremi uygulandığında ve sonuçları matris formunda düzenliğinde aşağıdaki modelleme elde edilir.

$$\left[k_e \right] \{d(t)\} + \left[c_e \right] \{d'(t)\} + \left[m_e \right] \{d''(t)\} + \left[s_e \right] \{d(t)\} = \{q_e(t)\}_0 + \{q_e(t)\}_T \quad (4-1)$$

4.2 Sönümsüz Serbest Titreşim

Sönümsüz serbest titreşimde elastik yataklanma etkisi söz konusu ise zamana bağlı dış yük, sönüm ve zamana bağlı sıcaklık değişimi sıfır olduğundan denklem aşağıdaki şekli alır.

$$\left[k_e \right] \{d(t)\} + \left[m_e \right] \{d''(t)\} + \left[s_e \right] \{d(t)\} = 0$$

Eleman üzerinde tasarlanan bu modelden sisteme geçiş yapılırsa

$$\left[K \right] \{d(t)\} + \left[M \right] \{d''(t)\} + \left[S \right] \{d(t)\} = 0 \text{ Halini alır. Burada } \{d\} = \{d^-\} \sin(wt + \theta)$$

burada $\{d^-\}$ ifadesi kütlelerin ötelenme genlikleridir. Bu ifadenin türevlerini zamana göre alarak sistemdeki yerine koyarsak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\{d\}' = w \{d^-\} \cos(wt + \theta) \quad (4-2)$$

$$\{d\}'' = -w^2 \{d^-\} \sin(wt + \theta) \quad (4-3)$$

Yukarıdaki ifadeler denklemde yerine koyup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\left([K] + [S] - \omega^2 [M] \right) \left\{ \begin{Bmatrix} d^- \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \theta) \right\} = 0 \quad \{d^1\} = 0 \text{ olduğundan} \quad (4-4)$$

$$\left([K] + [S] - \omega^2 [M] \right) \{d^-\} = 0 \quad \text{homojen denklem takımı elde edilir.} \quad (4-5)$$

$$\left([K] + [S] - \omega^2 [M] \right) = 0 \quad (4-6)$$

Bu determinanta frekans determinantı denir. Frekans determinantını sıfır yapan ω değerlerine özel frekans denir. $\left([K] + [S] - \omega^2 [M] \right) [D] = 0$ denkleminde $[D] \neq 0$ olmayacağından, $\left([K] + [S] - \omega^2 [M] \right) = 0$ ifadesini sıfır yapan ω^2 değerleri aranacaktır. Elastik zeminde sönümsüz serbest titreşim yapan sistemin frekans determinantını oluşturan sistem rijitlik matrisi $[K]$, elastik zemin etki matrisi $[S]$, sistem kütle matrisi $[M]$ değerlerinin önceden saptanması gerekir.

4.2.1 Eleman Rijitlik Matrisi

Eleman rijitlik matrisi stabilite hesabındaki gibi hesaplanır.

4.2.2 Eleman Zemin Etki Matrisi

Eleman zemin etki matrisi stabilite hesabındaki gibi hesaplanır.

4.2.3 Eleman Kütle Matrisi

$[m_e] = \rho \int [N]^T [N] dx dy$ ifadesiyle hesaplanır.

4.2.4 Sisteme Geçiş

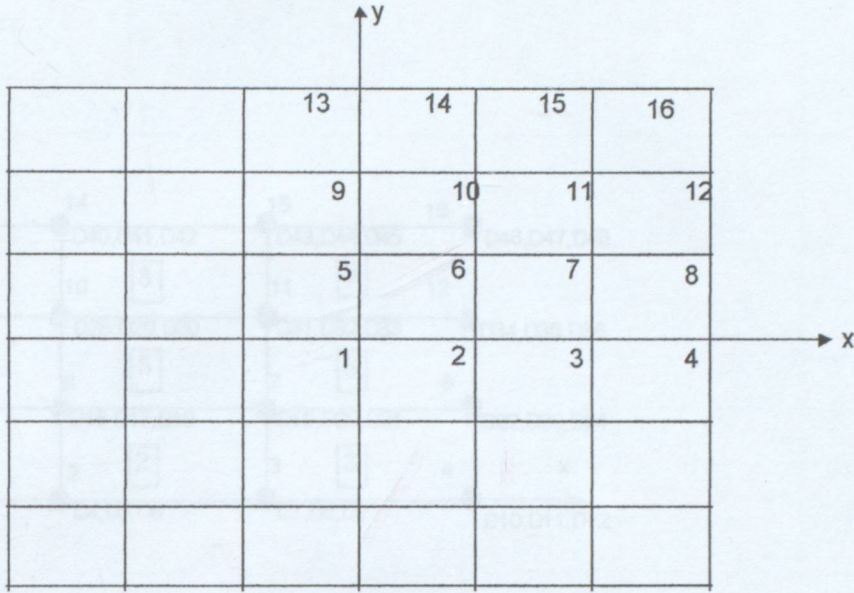
$$\left([K] + [S] - \omega^2 [M] \right) = 0$$

Biriktirme metodu ile sisteme giciş yapılır. Sınır şartları denklemde yerine koyarak ω özel açısıl frekans değeri hesaplanır. Sisteme geçişi ve konuyu örnek üzerinde açıklayalım.

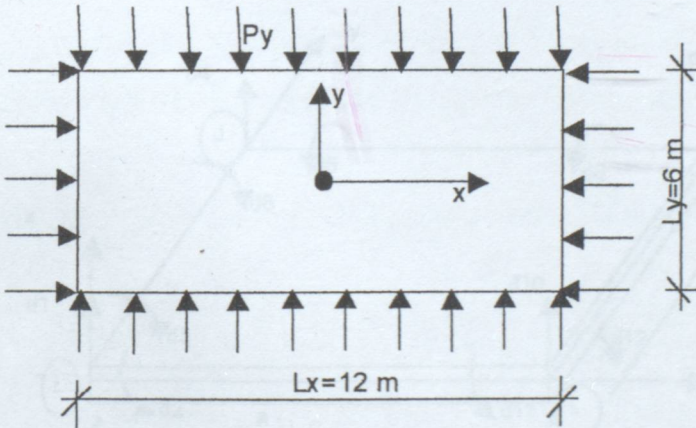
pab

[illegible]

5. AÇIKLAMALI ÖRNEK



Şekil 5.1 Sistemin Gösterimi



Şekil 5.2 Sistemin Yükleme Durumu

Kenar uzunlukları $L_x=12$ m, $L_y=6$ m olan her iki doğrultuda basit mesnetli uniform bir plağın P_x ve P_y stabilize yüklerini bulalım.

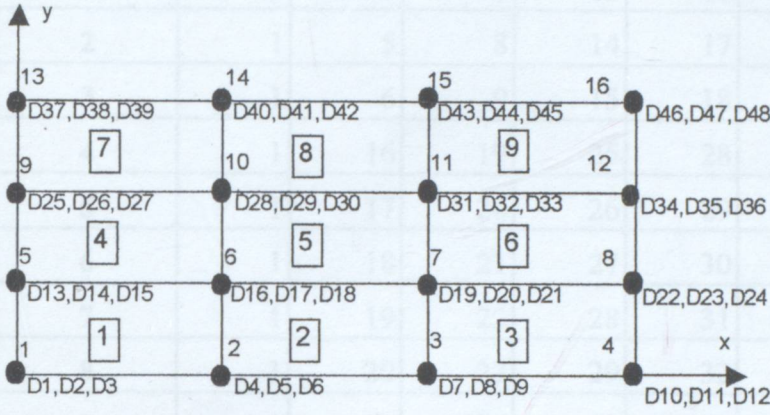
Verilenler:

$$d=0,20 \text{ m}$$

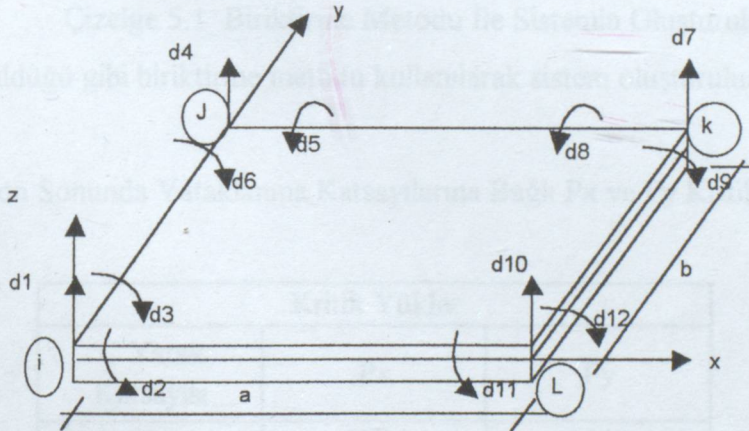
$$E=21E7 \text{ kn/m}^2$$

$$\nu=0,15$$

İki doğrultuda simetriden faydalanarak çözüm yapalım. Dolayısıyla plağın dörtte birini 9eşit parçaya bölelim.



Şekil 5.3 Sistemin Elemanlara Bölünüşü ve Deplasman Parametreleri



Şekil 5.4 Eleman Deplasman Parametreleri

- Çizelgeler kullanılarak eleman rijitlik matrisi oluşturulur.
- Çizelgeler kullanılarak eleman zemin etki matrisi oluşturulur
- Çizelgeler kullanılarak eleman geometrik yük matrisi oluşturulur

Eleman Deplasman Parametrele ri	Sistem Deplasman Parametreleri								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	4	7	13	16	19	25	28	31
2	1	5	8	14	17	20	26	29	32
3	1	6	9	15	18	21	27	30	33
4	1	16	19	25	28	31	37	40	43
5	1	17	20	26	29	32	38	41	44
6	1	18	21	27	30	33	39	42	45
7	1	19	22	28	31	34	40	43	46
8	1	20	23	29	32	35	41	44	47
9	1	21	24	30	33	36	42	45	48
10	1	7	10	16	19	22	28	31	34
11	1	8	11	17	20	23	29	32	35
12	1	9	12	18	21	24	30	33	36

Çizelge 5.1 Biriktirme Metodu İle Sistemin Oluşturulması

Tabloda görüldüğü gibi biriktirme metodu kullanılarak sistem oluşturulur.

a. 6. İterasyon Sonunda Yataklanma Katsayılarına Bağlı Px ve Py Kritik Yükleri

Kritik Yükler		
C Yatak Katsayısı	Px	Py
500	1276	2552
1000	1266	2532
2000	1247	2494
4000	1200	2400
7500	1145	2290
8000	1136	2272

Not: R=1 Alındı

b. 6. İterasyon Sonunda Plağın Salınım Periyodunun Hesabı

$$r=25 \text{ KN/m}^3$$

$$w^3=1285.73$$

$$T=1/2(2p/w^2)=0,6989 \text{ sn olarak elde edilir.}$$

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, sonlu elemanlar metodu kullanılarak elastik zemine oturan ince plakların stabilite ve serbest titreşim hesabı yapılmıştır.

Sonlu elemanlar metoduyla yapılan çözümler diğer metotlarla yapılan hesaplara göre daha gerçekçidir. Sonlu elemanlar metodunda eleman boyutu küçüldükçe daha gerçekçi sonuç elde edilir. Yapılan örnekte zemin yataklanma katsayısı arttıkça kritik yük değeri azalmaktadır.

İnan M. (1996) "Elastik Çubukların Genel Teorisi", İ.T.Ü., İstanbul

Köksal T. (1995) "Sonlu Elemanlar Metodu", Y.T.Ü., İstanbul

Szifard H. (1974) "Theory of Analysis of Plates Practice-Hall, INC.

Timoshenko S. (1950) "Theory of Plates and Shells MC Grow-Hill Book Company, INC

KAYNAKLAR

Berktaş İ. (1992) "Plak Teorisi ve Uygulamaları", Y.T.Ü, İstanbul

Çakıroğlu A, Özden E, Özmen G (1992), "Yapı Sistemlerinin Hesabı İçin Matris Metotları ve Elektronik Hesap Makinası Programları", Cilt 2., 2. Baskı, İ.T.Ü , İstanbul

Girkmann K., Çeviren: Tameroğlu S. (1991) "Yüzeyel Taşıyıcı Sistemler", İ.T.Ü, İstanbul

İnan M.(1996) "Elastik Çubukların Genel Teorisi", İ.T.Ü, İstanbul

Köksal T. (1995) "Sonlu Elemanlar Metodu", Y.T.Ü, İstanbul

Szilar R. (1974) "Theory of Analysis of Plates Prentice-Hall, "INC.,

Timoshenko S. (1980) "Theory of Plates and Shells MC Grow-Hill Book Compny, INC

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	23.07.1976	
Doğum Yeri	KARS	
Lise	1990-1993	Mehmet Akif Ersoy Lisesi
Lisans	1993-1997	Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1997-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Yapı Anabilim Dalı
Çalıştığı Kurumlar	1997-1998	Esem İnşaat San. Tic ve Ltd. Şti.
	1998	Bimtaş Aş.

