

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EĞRİSEL MALZEME YAPISINA SAHİP KOMPOZİT ŞERİT-PLAKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ

İnşaat Müh. Filiz AYDOĞDU

**F.B.E İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMAN TAYYİN MERKEZİ**

Tez Danışmanı : Y. Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ

Prof. Dr. Mehmet H. Omurtak

Prof. Dr. Turgut Keleş

İSTANBUL, 2002

128732

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. EĞRİSEL MALZEME YAPISINA SAHİP KOMPOZİT MALZEMELER MEKANİĞİNİN SÜREKLİLİK TEORİSİ	8
2.1 Süreklilik Teorileri Hakkında Bazı Ön Bilgiler.....	8
2.2 Gerekli Gösterimler ve Kabuller.....	10
2.3 Elastisite Bağlıntıları.....	11
3. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN GELİŞTİRİLMİŞ PLAK TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE PLAKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİM DENKLEMLERİ	18
4. GALERKİN YÖNTEMİ İLE EĞRİSEL MALZEME YAPISINA SAHİP KOMPOZİT ŞERİT-PLAKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİM DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ.....	26
5. SONUÇLAR.....	34
KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	66

SİMGE LİSTESİ

A_{ij}^0	Plak malzemesinde hiçbir eğriselliğin olmadığı ideal durumdaki malzeme sabitleri
c	Yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığın x_1 eksenindeki başlangıç noktası
d	Yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığın x_1 eksenindeki bitiş noktası
d'	Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış cismin kapsadığı alanın en küçük boyutu
E	Elastisite modülü
G_{ij}^0	Plak malzemesinde hiçbir eğriselliğin olmadığı ideal durumdaki malzeme sabitleri
h	Şerit-plak kalınlığı
h'	Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış cisimde takviyenin en küçük boyutu
H'	Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış cisimde malzeme yapısındaki eğilmenin genliğinin boyutu
$J(x_2)$	Şerit-plağın ox_1 eksenine dik kesitindeki kayma şekil değiştirmesinin ortalama değerinin plak kalınlığı boyunca değişimini gösteren fonksiyon
l_1	Şerit-plağın x_1 doğrultusundaki açıklığı
l_{ij}	Doğrultman kosinüsleri
M_{11}, M_{22}	Eğilme momentleri
M_{12}	Burulma momenti
N_{12}	Normali x_1 olan kesite etkiyen x_2 doğrultusundaki kesme kuvvetinin ortalama değeri
n_j	Ele alınan malzemenin normal birim vektörünün bileşenleri
$P(x_1, t)$	Şerit-plağa $-x_2$ yönünde etkiyen düzgün yayılı yük
S	Ele alınan malzemenin yüzeyi
t	Zaman parametresi
T_{11}	Normali x_1 olan kesite etkiyen x_1 doğrultusundaki normal kuvvetin ortalama değeri
$T_i(S)$	Kompozit malzeme yüzeyi sınırındaki gerilmeler
$U_i(S)$	Kompozit malzeme yüzeyi sınırındaki yerdeğiştirmeler
U_i	Plağın x_i eksenini doğrultusundaki yerdeğiştirmesi
$U(x_1, x_2)$	Plak orta yüzeyinin x_1 eksenini doğrultusundaki yerdeğiştirmesi
$U^0(x_1, t)$	Şerit-plak orta yüzeyinin x_1 eksenini doğrultusundaki yerdeğiştirmesi
V	S yüzeyi ile sınırlanan malzemenin hacmi
$V(x_1, x_2)$	Plak orta yüzeyinin x_2 eksenini doğrultusundaki yerdeğiştirmesi
$W(x_1, x_2)$	Plak orta yüzeyinin x_3 eksenini doğrultusundaki yerdeğiştirmesi
$W(x_1, t)$	Şerit-plak orta yüzeyinin x_2 eksenini doğrultusundaki yerdeğiştirmesi
x_1, x_2, x_3	Koordinat eksenleri
ΔH	Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış cisimde alınan yeterince ince ve eğrisel yapıda olan levhanın kalınlığı
δ	Yerel eğriselliğin en büyük olduğu yer
δ_{ij}, δ_i^j	Kronecker deltası
ε	Eğriselliğin mertebesini karakterize eden parametre
$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$	Şekil değiştirme bileşenleri
$\phi(x_1, t)$	Şerit-plağın ox_1 eksenine dik kesitindeki kayma şekildeğiştirmesini ifade eden fonksiyon
η	Hacim oranı
λ	Lamé sabiti
μ	Lamé sabiti
μ_{ijkl}	Kompozit malzemenin normalize edilmiş elastisite sabitleri
ν	Poisson oranı

ν	Poisson oranı
ω, ϖ	Zorlanmış titreşim frekansı
ω_*	Doğal titreşim frekansı
ρ	Plâğın özgül kütlesi
σ_{ij}	Normali x_i olan kesite etkiyen x_j doğrultusundaki gerilme bileşeni
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	ox_1, ox_2 ve ox_3 yönündeki birim vektörler
$\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$	$o'x'_1, o'x'_2$ ve $o'x'_3$ yönündeki birim vektörler
Λ_1, Λ_3	Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış cisimde eğilme şeklinin ox_1 ve ox_3 eksenine yönündeki yarım dalgasının uzunluğu
ψ_1	x_1 eksenine dik olan kesitteki kayma şekildeğiştirmesi
ψ_2	x_2 eksenine dik olan kesitteki kayma şekildeğiştirmesi



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış cismin x_1, x_3 =sb. kesitleri	10
Şekil 2.2 Plak-kiriş malzemesi yapısındaki yerel eğriselliğin geometrisi	17
Şekil 3.1 Kenarlarından serbest mesnetli sonsuz uzun plak	18
Şekil 3.2 Düzgün yayılı yük altındaki şerit-plak	22
Şekil 5.1 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.3$, $\omega_1^2=1.1233$, $c=0.30$, $d=0.70$, $\delta=0.50$ için 1.mod diyagramı	37
Şekil 5.2 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.3$, $\omega^2=0.18$, $c=0.30$, $d=0.70$, $\delta=0.50$ için moment diyagramı	37
Şekil 5.3 $E_2/E_1=100$, $\omega^2=0.20$, $c=0.20$, $d=0.70$, $\delta=0.45$, $\varepsilon=0.00$ ve $\varepsilon=0.70$ için moment diyagramı	42
Şekil 5.4 $E_2/E_1=100$, $\omega^2=0.20$, $c=0.20$, $d=0.70$, $\delta=0.45$, $\varepsilon=0.00$ ve $\varepsilon=0.70$ için kesme kuvveti diyagramı	42
Şekil 5.5 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.2$, $\omega^2=0.20$, $c=0.20$, $d=0.70$, $\delta=0.45$ için moment diyagramı	43
Şekil 5.6 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.2$, $\omega^2=0.20$, $c=0.20$, $d=0.70$, $\delta=0.45$ için kesme kuvveti diyagramı	43
Şekil 5.7 $E_2/E_1=100$, $\omega^2=1.90$, $c=0.1$, $d=0.3$, $\delta=0.20$, $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.7$ için moment diyagramı	44
Şekil 5.8 $E_2/E_1=100$, $\omega^2=1.90$, $c=0.10$, $d=0.3$, $\delta=0.2$, $\varepsilon=0.00$ ve $\varepsilon=0.70$ için kesme kuvveti diyagramı	44
Şekil 5.9 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.2$, $\omega^2=1.50$, $c=0.10$, $d=0.30$, $\delta=0.2$ için moment diyagramı	45
Şekil 5.10 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.2$, $\omega^2=1.50$, $c=0.10$, $d=0.30$, $\delta=0.2$ için kesme kuvveti diyagramı	45
Şekil 5.11 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=0.20$, $c=0.30$, $d=0.9$, $\delta=0.6$ için moment diyagramı	46
Şekil 5.12 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=0.20$, $c=0.30$, $d=0.9$, $\delta=0.6$ için kesme kuvveti diyagramı	46
Şekil 5.13 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=0.06$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı	47
Şekil 5.14 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=0.06$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için kesme kuvveti diyagramı	47
Şekil 5.15 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\omega^2=0.20$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.6$ için moment diyagramı	48
Şekil 5.16 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\omega^2=0.20$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.6$ için kesme kuvveti diyagramı	48
Şekil 5.17 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $\omega^2=0.06$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı	49
Şekil 5.18 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $\omega^2=0.06$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için kesme kuvveti diyagramı	49
Şekil 5.19 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=1.9$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı	50
Şekil 5.20 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=1.9$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı	50
Şekil 5.21 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=0.80$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı	51
Şekil 5.22 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=0.80$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı	51
Şekil 5.23 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\omega^2=1.40$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı	52
Şekil 5.24 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\omega^2=1.4$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı	52

Şekil 5.25 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=0.70$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı.	53
Şekil 5.26 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=0.70$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı.	53
Şekil 5.27 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=1.9$, $c=0.10$, $d=0.6$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı.	54
Şekil 5.28 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=1.9$, $c=0.10$, $d=0.6$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı.	54
Şekil 5.29 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=1.9$, $c=0.10$, $d=0.60$, $\delta=0.15$ için moment diyagramı.	55
Şekil 5.30 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=1.9$, $c=0.10$, $d=0.60$, $\delta=0.15$ için kesme kuvveti diyagramı.	55
Şekil 5.31 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.10$, $d=0.6$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı.	56
Şekil 5.32 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.10$, $d=0.6$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı.	56
Şekil 5.33 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.10$, $d=0.6$, $\delta=0.15$ için moment diyagramı.	57
Şekil 5.34 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.10$, $d=0.6$, $\delta=0.15$ için kesme kuvveti diyagramı.	57
Şekil 5.35 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=1.90$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.	58
Şekil 5.36 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=1.40$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.	58
Şekil 5.37 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=1.90$, $c=0.50$, $d=0.70$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.	59
Şekil 5.38 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=1.40$, $c=0.50$, $d=0.70$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.	59
Şekil 5.39 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.10$, $d=0.70$, $\delta=0.40$ için moment diyagramı.	60
Şekil 5.40 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=0.70$, $c=0.10$, $d=0.70$, $\delta=0.40$ için moment diyagramı.	60
Şekil 5.41 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.30$, $d=0.50$, $\delta=0.40$ için moment diyagramı.	61
Şekil 5.42 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=0.70$, $c=0.30$, $d=0.50$, $\delta=0.40$ için moment diyagramı.	61
Şekil 5.43 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=11.50$, $c=0.10$, $d=0.8$, $\delta=0.2$ için moment diyagramı.	62
Şekil 5.44 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=11.5$, $c=0.10$, $d=0.8$, $\delta=0.2$ için kesme kuvveti diyagramı.	62
Şekil 5.45 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=11.5$, $c=0.10$, $d=0.8$, $\delta=0.45$ için moment diyagramı.	63
Şekil 5.46 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=11.5$, $c=0.10$, $d=0.8$, $\delta=0.45$ için kesme kuvveti diyagramı.	63

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca, gerek tez konusunda gerekse diğer konularda yardımlarını esirgemeyen başta Hocam Sayın Y. Doç. Dr. Zafer Kütüğ ve İnşaat Mühendisliği Mekanik Kürsüsü öğretim üyelerine teşekkür ederim.



ÖZET

Bu çalışmada, eğrisel malzeme yapısına sahip kenarlarından basit mesnetli kompozit şerit-plağın zorlanmış titreşim denklemleri Akbarov ve Guz süreklilik teorisi çerçevesinde üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri kullanılarak üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak titreşim denklemleri ve bunlara ait uygun sınır koşulları çıkartılmıştır. Düzgün yayılı yük etkisindeki şerit-plağın zorlanmış titreşim denklemlerinin çözümünde Galerkin Yönteminden yararlanılmıştır.

Araştırmalarda şerit-plağın zorlanmış titreşim denklemlerinden yararlanarak şerit-plağın serbest (doğal) titreşim frekansları elde edilmeye çalışılmıştır. Sayısal sonuçların elde edilmesi için Fortran 77'de hazırlanan programlar kullanılmıştır. Elde edilen değerler literatürdekilerle karşılaştırılmıştır.

Araştırmalarda şerit-plağın malzeme yapısındaki yerel eğriselliğin plağın moment ve kesme kuvvetine etkisi incelenmiştir. Levhalı kompozit malzemelerden meydana gelen şerit-plağın moment ve kesme kuvveti değerleri hazırlanan programlarla elde edilmiş ve diyagramları çizilmiştir.

Yapılan incelemelerde moment ve kesme kuvveti diyagramlarında, eğriselliğin genliği olan ε parametresinin yüksek değerlerinde ($\varepsilon=0.70$) yerel eğriselliğin olduğu aralıkta bir bozukluk meydana geldiği görülmüştür. Ancak ε parametresinin düşük değerlerinde ($\varepsilon=0.10$) yerel eğriselliğin etkisinin bir bozukluğa neden olmadığı görülmüştür. Bunun dışında levhaların elastisite modüllerinin oranı ve yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralık değiştirilerek diyagramlarda yerel eğriselliğin etkisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eğrisellik , kompozit malzeme, doğal titreşim, zorlanmış titreşim, plak teorileri.

ABSTRACT

In this study, forced vibration equations of the simply supported composite plate-strip having curved material structure were obtained in the framework of Akbarov and Guz continuum theory by using third order refined plate theory. The exact motion equations of theory of elasticity were used to derive third order refined equations of motion and their appropriate boundary conditions. Galerkin Method was used in the solution of the forced vibration equations of the plate-strip subjected to an uniformly distributed load.

In this investigation, natural vibration frequencies of the plate-strip were tried to be obtained by using its forced vibration equations. Computer codes prepared in the programming language Fortran-77 were used to get the numerical results.

The effects of the local curvings in the plate-strip material structure on the moment and shear force were studied. The numerical results of the moment and shear force of the plate-strip made of laminated composite materials were obtained by the prepared computer codes and then their diagrams were plotted.

Defects in the moment and shear force diagrams of the plate-strip where the local curvings exist, were examined in the high values ($\epsilon=0.70$) of the parameter ϵ which is the amplitude of the local curvings. However, it was seen that local curvings had little effect in the small values ($\epsilon=0.10$) of the parameter ϵ and no change was examined in the diagrams. Furthermore the effect of the local curvings on the diagrams was studied by changing the value of the elasticity modulus ratio of the laminates and the place of the local curvings.

Keywords: Curved structure, composite material, natural vibration , forced vibration, plate theories.

1. GİRİŞ

Kompozit malzemeler mekaniği problemlerinin araştırılması, Akbarov ve Guz (1992), Akbarov vd. (1995) kaynaklarında belirtildiği gibi iki gruba ayrılmaktadır. Birinci grup araştırmalar, güçlendiricilerin eğriliklerinin normalize edilmiş mekanik özelliklere olan etkisini göz önüne alan süreklilik teorisi çerçevesinde yapılmıştır. Güçlendirici liflerin veya levhaların eğriliklerinin, boyutu eğrilik boyutundan çok büyük olan alanlarda, gerilme veya şekildeğiştirme dağılımlarına etkisinin araştırılmasında bu süreklilik teorileri yararlı olabilirler. Bu gruptaki araştırmalar Bazhant (1968); Tarnopolsky ve Rose (1969); Manisfileld ve Puslow (1974); Bolotin ve Novichkov (1980); Vanin (1985) tarafından yapılmıştır. Akbarov (1995) çalışması da, periyodik eğrisel yapıya sahip levhalı kompozit malzemelerin normalize edilmiş doğrusal olmayan mekanik özelliklerinin bulunduğu bu gruptaki araştırmalardan biridir.

İkinci gruba ait araştırmalarda kompozit malzemenin yapısında olan eğriliklerin gerilme ve şekildeğiştirme dağılımlarına etkisinde, boyutları eğrilik boyutunda ve daha düşük oranda olan alanlarda göz önüne alınabilecek yöntemler teklif edilmiştir. Bu araştırmalar parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde hem sürekli ortamlar mekaniğinin kesin denklemleri kullanılarak hem de Akbarov ve Guz (1991)'un makalesinde verilmiş süreklilik teorisi kullanılarak yapılmıştır. Bu süreklilik teorisi, kompozit malzeme yapısındaki eğriliklerin her türü (2 boyutta periyodik, yerel eğrilikli) için uygulanabilir.

Akbarov ve Guz (1992)'un makalesinde parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılan araştırmaların geniş özeti verilmiştir. Bu özette, yapılan araştırmalarda kullanılan yöntemlerde incelenen uygun sınırdeğer problemlerinin çözümünün belirli bir duruma kadar analitik olarak elde edildiği, ancak yorumlanabilecek sayısal sonuçlara bilgisayarların yardımı ile ulaşılabildiği görülmektedir. Çeşitli araştırmalarda ise, lokal eğrilikli yapıya sahip, biri diğerini tekrarlayan çok katlı levhalardan oluşmuş levhalı kompozitte gerilme dağılımı parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir.

Parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde yapılan araştırmaların büyük çoğunluğunda, ele alınan malzemenin sonsuz boyutlu alanı kapsadığı ve malzeme yapısındaki eğilmelerin periyodik olduğu kabul edilmiştir. Bu kabuller incelenen problemlerin matematiksel açıdan kolay çözülmesini önlemiştir. Eğrisel yapıya sahip çok katlı ve levhalı kompozit malzemeden

hazırlanmış yapı elemanlarının mekaniği ile ilgili problemlerin parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde incelenmesinde matematiksel açıdan birçok zorluklar ortaya çıkar. Bu nedenle, eğrisel yapıya sahip çok katlı kompozit malzemeler mekaniğinin sonlu alanlar ile ilişkin problemlerinin daha kesin olan süreklilik teorisi (Akbarov ve Guz ,1991) ile çözülmesi gereklidir.

Akbarov ve Guz (1991) Süreklilik Teorisine göre, eğrisel yapıya sahip parçalı-homojen malzeme; anizotrop, sürekli-homojen olmayan malzeme şeklinde ele alınabilir. Bu nedenle süreklilik teorisinin denklemleri, değişken katsayılı diferansiyel denklemler olur. Akbarov ve Guz (1991)'un makalesinde, bu denklemlere karşı gelen sınır değer problemlerinin çözülmesi için küçük parametreler yöntemi teklif edilir. Küçük parametre olarak eğilme genliğinin eğilmenin başka parametrelere oranı kabul edilir. Değişken katsayılı diferansiyel denklemler takımına karşı gelen sınırdeğer problemlerinin çözümü, küçük parametrenin serisi şeklinde aranır. Böylece bu denklemler takımı için yapılacak sınırdeğer problemlerinin çözümü sabit katsayılı homojen olmayan, kısmi türevli diferansiyel denklemler takımına ait sınırdeğer problemler serisinin çözümü haline getirilir.

Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin bazı iki ve üç boyutlu sınır değer problemleri, Akbarov ve Guz süreklilik teorisi çerçevesinde Akbarov ve Yahnioğlu (1995) ve Yahnioğlu (1995,1996a;1996b) çalışmalarında sonlu elemanlar yöntemiyle araştırılmıştır. Bu çalışmalarda, elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri kullanılmış ve hem geometrik hem de fiziksel doğrusal problemler ele alınmıştır. Bu incelemelerde, statik durumlar göz önüne alınmış olup malzeme yapısında olan eğriliklerin bu malzemedan yapılmış yapı elemanlarındaki gerilme ve şekildeğiştirme dağılımına etkisi araştırılmıştır. Akbarov ve Yahnioğlu'nun söz konusu çalışmalarda ele alınan statik problemlere karşı gelen dinamik problemlerin elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri çerçevesinde incelenmesinde sayısal yöntemler yardımıyla bile çok büyük zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, eğrisel malzeme yapısına sahip kompozit kiriş ve plak tipli yapı elemanlarının zorlanmış titreşim problemleri bazı geliştirilmiş plak teorileri çerçevesinde incelenmelidir. Kütüğ (1998), çalışmasında, plak-kiriş ve plakların doğal titreşim ve burkulma problemlerini Akbarov ve Guz süreklilik teorisi çerçevesinde üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi ile incelemiştir. Bu tezde ise üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi plak-kiriş zorlanmış titreşimlerinin incelenmesinde kullanılmıştır.

Son olarak, Akbarov ve Guz (2000) kitabında eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin mekaniği ile ilgili tüm makalelerinin ve çalışmalarının toplandığını belirtelim.

Şimdi, geliştirilmiş plak teorilerini özetlemeye çalışalım. 1940'lı yılların başlarında kompozit malzemelerin uygulanması ve bu malzemelerden yapılmış plak ve kabuk şeklindeki yapı elemanlarının statik ve dinamik hesaplamalarında klasik Kirchhoff-Love hipotezleri geçersiz veya çok yaklaşık olduğundan bu tür problemler için yeni hipotezlerin geliştirilmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır. Klasik hipotezlerde plak malzemelerinin kayma modülleri sonsuzdur. Kompozit (anizotrop) plaklarda ise kayma etkileri ihmal edilemediğinden klasik hipotezler kompozit malzemedan yapılmış plaklar için geçersizdir. Bu kayma etkilerinden dolayı geliştirilmiş plak teorilerine çoğu zaman kayma şekildeğiştirmeli plak teorileri de denilir. Geliştirilmiş plak teorilerinin ortaya konmasında esas amaç, genellikle, elastisite teorisinin 3-boyutlu (2-boyutlu) problemlerinin 2-boyutlu (1-boyutlu) problemlere indirgenmesidir. Bu durumda aranan büyüklüklerin boyutlardan birine göre (plak kalınlığını gösteren boyuta göre) yayılımı hipotez şeklinde kabul edilir. Gerilme veya yerdeğiştirmenin plak kalınlığı boyunca yayılımının hipotez şeklinde kabul edilmesine bağlı olarak plak teorileri gerilme esaslı teoriler ve yerdeğiştirme esaslı teoriler olmak üzere iki gruba ayrılır.

Reissner (1944,1945,1947), araştırmalarında gerilme esaslı ve enine kayma şekildeğiştirmesinin göz önüne alındığı plak teorisini ortaya konmuştur. Birinci grup teorilere giren bu plak teorisine göre Ox_1x_2 düzlemindeki bir plakta M_{11} , M_{22} , M_{12} momentlerinden ortaya çıkan, sırasıyla, σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} gerilmeleri plak kalınlığı boyunca doğrusal olarak değişmektedir. Bunun dışında M_{11} , M_{22} , M_{12} eğilme ve burulma momentleri x_1 ve x_2 'e bağımlı fonksiyonlardır. Bu nedenle plağın orta düzleminde σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} gerilmeleri sıfırdır. Plaktaki σ_{13} , σ_{23} ve σ_{33} gerilmelerinin plak kalınlığı boyunca değişimi, elastisite teorisinin 3 boyutlu denge denklemlerinin 0'dan x_3 'e kadar,yani, plak kalınlığı boyunca integrasyonundan elde edilir. Böylece iki değişkene bağlı denge denklemleri ve sınır koşulları 3-boyutlu elastisite teorisinin varyasyonel prensiplerinden veya n.inci mertebeden momentlerinin bulunması yoluyla elde edilerek 3-boyutlu problem 2-boyutlu problem haline indirgenmiş olur. Daha sonraları Goldenveiser (1958) Reissner'in plak teorisini geliştirmiş ve plaktaki σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} gerilmelerinin plak kalınlığı boyunca doğrusal olarak değil keyfi $f(x_3)$ fonksiyonu şeklinde değiştiğini kabul etmiştir.

İkinci gruba giren yerdeğiştirme esaslı geliştirilmiş plak teorileri ile ilgili çalışmalardan ilkini 1890'da Basset yapmış ve yerdeğiştirmeleri plak kalınlığı boyunca olan x_3 koordinatının bir kuvvet serisi şeklinde ifade etmiştir. Bu durumda x_3 'ün sıfıncı mertebesinin katsayısı plağın orta düzleminin yerdeğiştirmelerini göstermektedir. Daha yüksek mertebelerin katsayıları ise x_1 ve x_2 koordinatlarının fonksiyonları olup bulunması öngörülmektedir. Böylece Basset'in

bahsedilen kuvvet serisi ifadesi , kuvvet serisinden x_3 'ün kaçınıcı mertebesine kadarki terimlerinin göz önüne alınacağına bağlı olarak, farklı mertebelerde plak teorileri teklif etmektedir. Basset'in ifadesini, örneğin U_1 yerdeğiştirmesi için,

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = U(x_1, x_2) + \sum_{n=1}^N x_3^n \psi_1^{(n)}(x_1, x_2) \quad (1.1)$$

biçiminde gösterilebilir; (1.1)'de $\psi_1^{(n)}(x_1, x_2)$ fonksiyonları $U_1(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonunun $x_3 = 0$ civarında x_3 'e göre Taylor serisine açılımının katsayıları olup,

$$\psi_1^{(n)}(x_1, x_2) = \left. \frac{d^n U_1}{dx_3^n} \right|_{x_3=0} ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bunlardan yola çıkarak Hildebrand vd. (1949)'da birinci mertebeden olan yerdeğiştirme esaslı geliştirilmiş plak teorisi teklif etmiştir. Bu teoriye göre yerdeğiştirmeler,

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, x_3) &= U(x_1, x_2) + x_3 \psi_1(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2, x_3) &= V(x_1, x_2) + x_3 \psi_2(x_1, x_2) \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &= W(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

biçimindedir. Yerdeğiştirmelerin bu ifadeleri kullanılarak, genel potansiyel enerjinin minimumluğu prensibinden U , V , W , ψ_1 , ψ_2 bilinmeyen fonksiyonları için alan denklemleri ve bunlara karşı gelen sınır koşulları elde edilir. Yerdeğiştirmelerin (1.3)'de verilen denklemleriyle ifade edilen plak teorisine Reissner-Mindlin teorisi denir. Eğer $\psi_1 = -\partial W / \partial x_1$, $\psi_2 = -\partial W / \partial x_2$ şeklinde kabul edilirse, Reissner-Mindlin teorisi klasik Kirchhoff-Love hipotezine dönüşmüş olur. Reissner-Mindlin teorisi, Kirchhoff-Love teorisinin aksine, şekildeğiştirmeden önce plak orta yüzeyine dik olan normalin şekildeğiştirmeden sonra dik olmaması durumunu göz önüne alırken, aynı normalin doğrusallığı Kirchhoff-Love teorisinde olduğu gibi şekildeğiştirmeden sonra da değişmemektedir. Dolayısıyla Reissner-Mindlin plak teorisi geliştirilmiş ve birinci mertebeden olan en basit plak teorisidir.

Daha sonraları yüksek mertebeden olan yerdeğiştirme esaslı plak teorileri önerilmiştir. Örneğin, Reddy'nin (1984)'te verdiği geliştirilmiş yerdeğiştirme esaslı üçüncü mertebeden olan plak teorisinde, yerdeğiştirmelerin x_3 koordinatına bağımlılığı aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$\begin{aligned}
U_1(x_1, x_2, x_3) &= U(x_1, x_2) + x_3 \left[\psi_1 - \alpha \frac{4}{3} \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \left(\psi_1 + \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) \right] \\
U_2(x_1, x_2, x_3) &= V(x_1, x_2) + x_3 \left[\psi_2 - \alpha \frac{4}{3} \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \left(\psi_2 + \frac{\partial W}{\partial x_2} \right) \right] \\
U_3(x_1, x_2, x_3) &= W(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Burada U , V , W , ψ_1 ve ψ_2 genelleştirilmiş yerdeğiştirmeler olup, x_1 , x_2 'nin fonksiyonlarıdır. Reissner-Mindlin teorisinde olduğu gibi burada da ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonları sırasıyla x_1 ve x_2 eksenlerine dik olan kesitlerin dönmesini göstermektedir. Buradaki h plak kalınlığını gösterirken, α ise (1.4) denklemlerinin genelleştirilmesi amacını taşıyan bir parametredir. Bu durumda (1.4) ifadeleri, $\alpha = 0$ ve $\psi_1 = -\partial W / \partial x_1$, $\psi_2 = -\partial W / \partial x_2$ olması halinde Kirchhoff-Love hipotezine, sadece $\alpha = 0$ olduğunda Reissner-Mindlin teorisine, $\alpha = 1$ olduğunda ise Reddy teorisine karşı gelmektedir.

Literatürde buraya kadar verilen teorilerin dışında birçok geliştirilmiş plak teorileri kullanılmaktadır. Bu teoriler arasındaki en önemli fark x_3 koordinatının katsayılarının hepsinin farklı fonksiyonlardan meydana gelmesidir. Dolayısıyla aynı mertebeden bir plak teorisindeki serbestlik derecesinin (bilinmeyen fonksiyonların) sayısı artabilmektedir. Örnek olarak Lo vd. (1977a, 1977b)'de verilen plak teorisi gösterilebilir. Bu teoriye göre plak yerdeğiştirmeleri

$$\begin{aligned}
U_1(x_1, x_2, x_3) &= U^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_1(x_1, x_2) + x_3^2 \xi_1(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_1(x_1, x_2) \\
U_2(x_1, x_2, x_3) &= V^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_2(x_1, x_2) + x_3^2 \xi_2(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_2(x_1, x_2) \\
W(x_1, x_2, x_3) &= W^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_3(x_1, x_2) + x_3^2 \xi_3(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu teori de (1.4) teorisi gibi üçüncü (x_3^3) mertebeden bir teori olmasına rağmen noktadaki genelleştirilmiş yerdeğiştirme sayısı 11'dir. Bu verilerle elde edilen plak denklemlerinde yüksek mertebeden olan momentler hareket denklemlerine girmektedirler. (1.3) ve (1.4)'de verilen geliştirilmiş plak teorilerinin Lo vd. (1977a, 1977b) teorisinin çok özel durumlarında elde edildiği görülmektedir.

Bunların dışında, gerilme esaslı plak teorileri kapsamında yerdeğiştirmelerin plak kalınlığı boyunca olan koordinata bağlı değişimini vererek yapılan plak teorileri de mevcuttur. Bu tür

teorilere örnek olarak tez kapsamında da kullanılan Kromm (1953,1955)'da teklif edilen plak teorileri gösterilebilir. Bu teoride, Reissner teorisinin Goldenveizer (1958) tarafından genelleştirilmiş biçiminin bir özel hali teklif edilmiş ve

$$\begin{aligned}
 U_1(x_1, x_2, x_3) &= U(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{3}{2} x_3 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x_3^2}{h^2} \right) \psi_1 \\
 U_2(x_1, x_2, x_3) &= V(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial W}{\partial x_2} + \frac{3}{2} x_3 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x_3^2}{h^2} \right) \psi_2 \\
 U_3(x_1, x_2, x_3) &= W(x_1, x_2)
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

yerdeğiştirme alanı ele alınmıştır. (1.6)'da U, V, W sadece x_1, x_2 'nin fonksiyonları olan genelleştirilmiş yerdeğiştirmelerdir. ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonları ise, sırasıyla, x_1 ve x_2 eksenlerine dik olan kesitlerdeki kayma şekildeğiştirmelerini göstermektedir.

Geliştirilmiş plak teorilerinin kompozit malzemeden yapılmış plaklara uygulanması iki şekilde yapılabilir. 1- Eğer kompozit plak normalize edilmiş mekanik özellikli anizotrop bir malzemeden yapılmış tek katlı bir plak gibi göz önüne alınırsa, bu durumda ele alınan geliştirilmiş plak teorileri kompozit plağın tümüne uygulanır. 2- Eğer kompozit plak, çok katlı, farklı özellikli levhalardan yapılmışsa ve kompozit plağın dinamik ve statik davranışlarında bu katların etkisinin daha hassas bir biçimde araştırılması gerekirse, ele alınan geliştirilmiş plak teorileri kompozit plağı oluşturan levhaların herbirine ayrı ayrı uygulanır.

Geliştirilmiş plak teorilerinin 1. ve 2. maddede belirtildiği gibi uygulanmalarına örnek verelim. Çok katlı levhalardan oluşmuş kompozit malzemeden yapılmış bir plağın eğilmesinde levhalar arasındaki gerilme veya kuvvetlerin incelenmesi gerekirse o zaman geliştirilmiş plak teorileri 2. maddede belirtildiği gibi uygulanır. Eğer çok katlı kompozit malzemeden yapılmış bir plağın karakteristiklerinin bir bütün olarak, örneğin doğal titreşim frekansı vs. nin belirtilmesi gerekirse bu durumda geliştirilmiş plak teorilerinin 1. maddede verildiği biçimde uygulanması mühendislik açısından ve teorik açıdan yeterli olmaktadır.

Bu açıklamaları göz önüne alarak bu tez çalışmasında geliştirilmiş plak teorileri 1. maddede belirtildiği gibi, kompozit plağın tümüne uygulanmıştır.

Bu araştırmada, Akbarov ve Guz (1991) süreklilik teorisi çerçevesinde üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi kullanılarak eğrisel malzeme yapısına sahip kompozit şerit-plağın zorlanmış titreşim probleminin denklemleri çıkartılmıştır. Şerit-plağın zorlanmış titreşim

probleminin denklemleri, elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu problemin denklemlerinin incelenmesinde Galerkin Yöntemi uygulanmıştır.

Bu çalışmada incelenen problemler, Fortran-77 programlama dili yardımıyla bilgisayarda uygulanabilecek programlara çevrilerek sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Tez kapsamında, düzgün yayılı yük etkisindeki şerit-plağın malzeme yapısında olan yerel eğriselliğinin ve yerinin şerit-plağın eğilme momenti ve kesme kuvvetine etkisinin incelenmesi yapılmış ve sonuçlar grafikler şeklinde verilerek elde edilen sonuçların yorumu yapılmıştır. Ayrıca, zorlanmış titreşim denklemlerinden yararlanarak şerit-plağın serbest (doğal) titreşim frekansları elde edilmeye çalışılmış, elde edilen değerler literatürdekilerle (Kütüğ,1996) karşılaştırılmıştır.



2. EĞRİSEL MALZEME YAPISINA SAHİP KOMPOZİT MALZEMELER MEKANİĞİNİN SÜREKLİLİK TEORİSİ

2.1 Süreklilik Teorileri Hakkında Bazı Ön Bilgiler

Kompozit malzemelerin çok çeşitli olmasından dolayı bu malzemelerin hepsine ait bir süreklilik teorisi yapılması imkansızdır. Bu nedenle kompozit malzemelerin statik yük altındaki lineer elastik davranışını göz önüne alan süreklilik teorilerini ele alalım. Kompozit malzemenin dağılmasına kadar, makroskopik durumunun ve her bileşeninin davranışının lineer elastik olduğunu kabul edelim.

Kompozit malzemeler mekaniği problemleri, kompozit malzemelerin mikro-mekaniği ve makro-mekaniği olmak üzere iki şekilde incelenir. Kompozit malzemelerin mikro-mekaniğinde, güçlendirici (takviye) ve matristen oluşmuş gerçek homojen olmayan malzemenin mekanik davranışı incelenir.

Kompozit malzemelerin belirli sınır koşulları çerçevesinde gerilme tensörünün ortalastırılmış bileşenleri ile şekildeğiştirme tensörünün ortalastırılmış bileşenlerini birbirine bağlayan normalize edilmiş mekanik özelliklerinin bulunması, kompozit malzemeler mekaniğinin en önemli problemlerinden biridir. Bahsedilen sınır koşulları iki çeşit olabilir:

Sınırdaki yerdeğiştirmeler verilebilir;

$$U_i(S) = \varepsilon_{ij}^0 x_j \quad (2.1)$$

veya sınırdaki gerilmeler verilebilir:

$$T_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (2.2)$$

(2.1)'de x_j , S yüzey noktalarının koordinatlarını; (2.2)'de n_j ise ele alınan malzemeyi sınırlayan bu yüzeyin normal birim vektörünün bileşenlerini gösterir. ε_{ij}^0 ve σ_{ij}^0 , sabit şekildeğiştirme ve gerilme bileşenleridir. Homojen cisimde, (2.1) sınır koşulu verilirse, şekildeğiştirmeler ε_{ij}^0 'a, (2.2) sınır koşulu verilirse, gerilmeler σ_{ij}^0 'a eşittir. Burada ele alınan cismin kapsadığı alanın basit bağımlı olduğu kabul edilmiştir. Eğer cisim homojen değilse ve (2.1) koşulları verilirse; ε_{ij}^0 bu cisimdeki hacme göre ortalastırılmış şekildeğiştirmelere, eğer (2.2) sınır koşulları verilirse, σ_{ij}^0 bu cisimdeki hacme göre ortalastırılmış gerilmelere eşittir. Bu değerler (2.3) ve (2.4) denklemlerinde ifade edilmiştir.

$$\int_V \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_S (U_i n_j + U_j n_i) dS \quad (2.3)$$

$$\int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_S (T_i x_j + T_j x_i) dS \quad (2.4)$$

(2.3) ve (2.4) eşitliklerinde V, S yüzeyi ile sınırlanan hacmi göstermektedir. (2.3) eşitliği, fazlar arasında homojen olmayan malzemenin bileşenlerini ayıran yüzeylerde yerdeğiştirmelerin sürekli olduğu durumlarda geçerlidir. (2.4) eşitliği ise gerilmelerin fazlar arasında sürekli olduğu durumlarda geçerlidir. (2.3) ve (2.4) eşitlikleri Gauss integral dönüşüm formülü kullanılarak ispatlanır:

(2.1) ve (2.3) denklemlerinden,

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (2.5)$$

(2.2) ve (2.4) denklemleri kullanılarak,

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (2.6)$$

elde edilir. (2.5)'in elde edilmesini inceleyelim:

(2.1) sınır koşulu ve Gauss integral dönüşüm formülü kullanılarak, (2.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon_{ij} dV &= \frac{1}{2} \int_S (U_i n_j + U_j n_i) dS = \frac{1}{2} \int_S (\varepsilon_{ik}^0 x_k n_j + \varepsilon_{jk}^0 x_k n_i) dS \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^0 \int_S x_k n_j dS + \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^0 \int_S x_k n_i dS = \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^0 \int_V \frac{\partial x_k}{\partial x_j} dV + \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^0 \int_V \frac{\partial x_k}{\partial x_i} dV \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^0 V \delta_j^k + \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^0 V \delta_i^k = \varepsilon_{ij}^0 V \\ \varepsilon_{ij}^0 &= \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \end{aligned} \quad (2.7)$$

bulunur. Aynı şekilde (2.2) ve (2.4) denklemleri kullanılarak (2.6) bulunur. Böylece (2.1) veya (2.2) sınır koşulları verilirse kompozit malzemenin normalize edilmiş μ_{ijkl} elastisite sabitleri

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \mu_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (2.8)$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad ; \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (2.9)$$

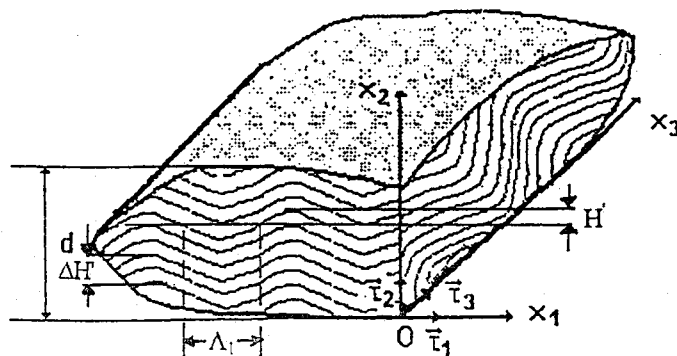
işaretlemelemleri kullanılmıştır.

Kompozit malzemelerin mikro-mekaniğinde kullanılan en önemli kavramlardan biri belirleyici eleman kavramıdır. Eğer (2.1) veya (2.2) sınır koşulları belirleyici eleman sınırında verilirse, o zaman elde edilen $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ve $\langle \epsilon_{ij} \rangle$ 'ler aynı sınır koşulları çerçevesinde bütün kompozit malzeme için elde edilen $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ve $\langle \epsilon_{ij} \rangle$ 'lere eşittirler. Dolayısıyla, belirleyici eleman için elde edilen μ_{ijkl} 'ler bütün kompozit malzeme için elde edilen μ_{ijkl} 'lere eşittirler.

Kompozit malzemelerin makro-mekaniği, yani; kompozit malzeme ve ondan hazırlanan yapı elemanlarının mekaniği, kompozit malzemelerin normalize edilmiş mekanik özellikleri belirlendikten sonra, (2.8) elastisite bağıntısı çerçevesinde incelenir. Kompozit malzemede gerilme ve şekildeğiştirme dağılımının araştırılması, boyutu belirleyici eleman boyutundan küçük alanlarda gerekirse, bu malzemelerin mikro-mekaniği kullanılır. Eğer kompozit malzemede gerilme ve şekildeğiştirme dağılımının araştırılması, boyutu belirleyici eleman boyutundan büyük alanlarda yeterli ise, bu durumda bu malzemenin makro-mekaniği kullanılır.

2.2 Gerekli Gösterimler ve Kabuller

Şekil 2.1’de güçlendirici lifleri (levhaları) x_1ox_3 düzleminde olan kompozit malzemeden hazırlanmış cismin yapısı gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış cismin x_1 , $x_3 = sb.$ kesitleri

h' , takviyenin en küçük boyutunu ; H' ise malzeme yapısındaki eğilmenin genliğinin boyutunu göstermektedir. $\Lambda_1(\Lambda_3)$, eğilme şeklinin $ox_1(ox_3)$ eksen yönündeki yarım dalgasının uzunluğu; d' , ele alınan malzemenin kapsadığı alanın en küçük boyutudur. Ele alınan malzemede yerel eğrisellik olduğu durumlarda Λ_1 ve Λ_3 'ün anlamları değişecektir.

Takviye malzemesindeki güçlendirici levhaların ox_2 eksen yönünde belirli bir periyot ile tekrarlandığını kabul edelim. Bunun dışında eğilmenin karakteri ise aşağıdaki eşitsizlikleri doğurur,

$$\Lambda_1 \ll d' \quad ; \quad \Lambda_3 \ll d' \quad ; \quad H' < \Lambda_1 \quad ; \quad H' < \Lambda_3 \quad (2.10)$$

(2.10)'da birinci ve ikinci eşitsizlikler, malzeme yapısındaki eğriselliklerin aynı malzemeden meydana gelen yapı elemanının en küçük boyutundan çok çok küçük olması gerektiğini göstermektedir. Bu koşulları sağlayan eğriselliklere küçük ölçekli eğrisellikler denir. (2.10)'da üçüncü ve dördüncü eşitsizlikler, eğilme genliğinin eğilmenin diğer boyutlarından küçük olması gerektiğini ifade etmektedir. Akbarov ve Guz (1991) yayınında (2.10)'daki üçüncü ve dördüncü eşitsizlikler

$$H' \ll \Lambda_1 \quad ; \quad H' \ll \Lambda_3 \quad (2.11)$$

biçiminde kabul edilmiştir. (2.11) eşitsizlikleri süreklilik teorisi ile problemlerin çözülmesinde Küçük Parametreler Yöntemi'nin kullanılabilmesini sağlamıştır. Ancak bu çalışmada Küçük Parametreler Yöntemi kullanılmadığından, (2.11)'deki eşitsizliklerin yerini (2.10)'daki üçüncü ve dördüncü eşitsizlikler almıştır.

Tezde sıkça indis notasyonları ve Kronecker deltası kullanılmıştır. Bir ifadede, iki indis tekrarlanıyorsa bu ifadede tekrarlanan indise alabileceği bütün değerler verilerek elde edilen bütün terimler toplanacaktır. Ancak bu durum altı çizilmiş indisler için geçerli değildir. Kronecker deltası ise $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$), $\delta_{ij} = 1$ ($i = j$) veya $\delta_i^j = 0$ ($i \neq j$), $\delta_i^j = 1$ ($i = j$) biçiminde uygulanır.

2.3 Elastisite Bağlıları

Bu bölümde, 2.2'de yapılan kabuller çerçevesinde eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin elastisite bağıntılarının çıkartılması incelenecektir. Bunun için ele alınan malzemeden $\Delta H'$ kalınlığında, yeterince ince ve eğrisel yapıda olan bir levha alalım. Bu levhanın orta yüzeyinin şeklinin, ele alınan malzeme yapısındaki eğriselliğin şekli ile aynı

olduğunu ve

$$h' \ll \Delta H' \quad ; \quad \Delta H' \ll \Lambda_1 \quad ; \quad \Delta H' \ll \Lambda_3 \quad (2.12)$$

eşitsizliklerinin sağlandığını kabul edelim. Söz konusu levhanın orta yüzeyinin her bir noktasına $o'x_1'x_2'x_3'$ kartezyen koordinat takımını bağlayalım (Şekil 2.1). Bu durumda $o'x_2'$ eksenini, aynı noktada orta yüzeye normal olan $\vec{e}_2'$ birim vektörü yönünde, ox_1' ve ox_3' eksenleri ise aynı noktada orta yüzeye teğet olan $\vec{e}_1'$ ve $\vec{e}_3'$ birim vektörleri yönünde yönlendirilmişlerdir. Malzeme yapısında eğilme olmadığı durumda $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ ve $\vec{e}_3'$ vektörleri şekil 2.1'de gösterilen $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ve $\vec{e}_3$ vektörleriyle aynı yönde olurlar.

(2.12)'deki birinci eşitsizliğe göre, ele alınan eğrisel yapıdaki levhanın, $\approx (\Delta H')^3$ hacmindeki kısmını $o'x_1'x_2'x_3'$ kartezyen koordinat takımında, asal simetri eksenleri $o'x_1'$, $o'x_2'$ ve $o'x_3'$ olan homojen (normalize edilmiş mekanik özellikli) ortotrop malzeme gibi ele alabiliriz. Bu nedenle $\Delta H'$ boyutunu, ele alınan kompozit malzemenin yapısında eğilmeler olmadığı durumda, belirleyici elemanın boyutu olarak almak zorunludur.

Böylece ele alınan eğrisel yapıya sahip olan levha, simetri eksenleri ($o'x_1'$, $o'x_2'$ ve $o'x_3'$) sürekli olarak değişen, eğrisel anizotrop malzeme gibi düşünülebilir. Ele alınan eğrisel yapıdaki levhanın herhangi bir noktada, $o'x_1'$, $o'x_2'$ ve $o'x_3'$ koordinat takımına göre, elastisite bağıntısı,

$$\sigma'_{ij} = \mu_{ij\alpha\beta}^{(0)} \varepsilon'_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

biçimindedir. Bu bağıntıda,

$$\mu_{ij\alpha\beta}^{(0)} = \delta_i^j \delta_{\alpha}^{\beta} A_{ij}^0 + (1 - \delta_i^j) (\delta_i^{\alpha} \delta_j^{\beta} + \delta_i^{\beta} \delta_j^{\alpha}) G_{ij}^0$$

$$A_{44}^0 = G_{13}^0 \quad , \quad A_{55}^0 = G_{23}^0 \quad , \quad A_{66}^0 = G_{12}^0 \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır. (2.14) ifadesindeki A_{ij}^0 ve G_{ij}^0 'lar ortotrop malzemelerin elastisite teorisinde kullanılan elastisite sabitleridir. Bazı kompozit malzemeler için A_{ij}^0 ve G_{ij}^0 'ların bulunması Yahnioğlu (1996a)'da verilmiştir. Seçilen eğrisel yapıdaki levhanın $\approx (\Delta H')^3$ hacmindeki kısmı asal simetri eksenleri $o'x_1'$, $o'x_2'$ ve $o'x_3'$ olan homojen ortotrop malzeme gibi ele alındığından elastisite sabitleri, kompozit malzemenin yapısında eğriliği olmadığı durumda, aynı malzemenin normalize edilmiş mekanik sabitleri gibi ele alınabilir. Bu nedenle (2.13) bağıntısındaki σ'_{ij} ve ε'_{ij} , $\approx (\Delta H')^3$ belirleyici eleman hacminde ortalatılmış gerilme

ve şekildeğiştirme tensörünün $o'x_1'x_2'x_3'$ koordinat takımındaki bileşenleri olurlar.

Seçilen eğrisel yapıdaki levhanın orta yüzeyinin $ox_1x_2x_3$ koordinat takımındaki denklemi

$$x_2 = F(x_1, x_3) = \mathcal{F}(x_1, x_3) \quad (2.15)$$

biçiminde olsun. (2.15)'de $f(x_1, x_3)$ fonksiyonu, (2.10)'daki üçüncü ve dördüncü eşitsizlikler göz önüne alınarak boyutsuz küçük $\varepsilon \in [0, 1)$ parametresi ile çarpılmıştır. $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun ve bu fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevlerinin sürekli fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. Bunun dışında, Akbarov ve Guz (1991) yayınında, süreklilik teorisinin problemlerinin çözülmesinde Küçük Parametreler Yöntemi'nin kullanılmasından dolayı $F(x_1, x_3)$ fonksiyonunun,

$$\left| \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| < 1 \quad ; \quad \left| \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| < 1 \quad (2.16)$$

koşullarını sağlaması gerektiği de belirtilmiştir.

Bu tez çalışmasında Küçük Parametreler Yöntemi kullanılmadığından, $F(x_1, x_3)$ fonksiyonunun (2.16) koşullarını sağlayıp sağlamaması dikkate alınmamıştır.

Şimdi, ele alınan kompozit malzemenin $ox_1x_2x_3$ koordinat takımındaki elastisite bağıntılarını elde etmeye çalışalım. Bunun için $o'x_i'$ ve ox_j eksenleri arasındaki açının kosinüslerini belirleyelim. (2.15) denklemini vektör olarak yazalım.

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + F(x_1, x_3) \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \quad (2.17)$$

(2.17)'den bilinen işlemler yolu ile aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$\begin{aligned} \vec{e}_1' &= \nu_1 \left(\vec{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1} \vec{e}_2 \right) \quad ; \quad \vec{e}_2' = -\nu_1 \nu_3 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \quad ; \quad \vec{e}_3' = \nu_3 \left(\vec{e}_3 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \vec{e}_2 \right) \\ \nu_1 &= \left(1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad ; \quad \nu_3 = \left(1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^2 \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$o'x_i'$ ve ox_j eksenleri arasındaki açıların kosinüsleri $l_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j$ ($i, j=1, 2, 3$) formülünün yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$l_{11} = \nu_1 \quad ; \quad l_{12} = \nu_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad ; \quad l_{13} = 0 \quad ; \quad l_{21} = -\nu_1 \nu_3 \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad ;$$

$$l_{22} = \nu_1 \nu_3 \quad ; \quad l_{23} = -\nu_1 \nu_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} \quad ; \quad l_{31} = 0 \quad ; \quad l_{32} = \nu_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} \quad ; \quad l_{33} = \nu_3 \quad (2.19)$$

Koordinat eksenleri döndürüldüğünde (Lekhnitskii,1963) elastisite sabitlerini ve diğer birçok kaynakta gösterilen dönüşüm formülleri kullanılarak,

$$\mu_{ij\alpha\beta}(x_1, x_3) = \mu_{nm\alpha\beta}^{(0)} l_{in} l_{jm} l_{\alpha s} l_{\beta p} \quad (i,j,n,m,s,p,\alpha,\beta=1,2,3) \quad (2.20)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, incelenen eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin $ox_1x_2x_3$ koordinat takımındaki elastisite bağıntıları

$$\sigma_{ij} = \mu_{ij\alpha\beta}(x_1, x_3) \epsilon_{\alpha\beta} \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir. (2.21) bağıntısında σ_{ij} ve $\epsilon_{\alpha\beta}$, boyutları $\approx(\Delta H')$ olan belirleyici elemandaki ortalastırılmış gerilme ve şekildeğiştirme tensörünün $ox_1x_2x_3$ eksen takımındaki bileşenleridir.

(2.21) bağıntısı, yapı parametreleri bu bölümde ifade edilen koşulları sağlayan, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin süreklilik teorisi olarak adlandırılır. Süreklilik teorisi, parçalı homojen malzemenin, sürekli-homojen olmayan anizotrop malzeme olarak ele alınmasını sağlar.

Süreklilik teorisinin (2.21) bağıntılarının ele alınmasında yapılan işlemlerde görüldüğü gibi şekildeğiştirme tensörünün bileşenleri ile yerdeğiştirme vektörü bileşenleri arasındaki bağıntıların lineer olup olmaması hiçbir koşula bağlanmamaktadır. Bu durum, sürekli ortamlar mekaniğinin geometrik ilişkilerinin hiçbir koşulla kısıtlanmadığını göstermektedir. Bu nedenle, ele alınan süreklilik teorisi hem geometrik lineer, hem de geometrik lineer olmayan problemler için geçerli sayılır.

Bu bağıntılar geometrik lineer problemlerde,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (i,j = 1,2,3) \quad (2.22)$$

geometrik lineer olmayan problemlerde ise,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j} \right) \quad (i,j,\alpha = 1,2,3) \quad (2.23)$$

şeklindedirler.

Bu çalışmada, kompozit malzeme yapısındaki eğilmelerin ox_1 eksenini yönünde olduğu kabul edilir. Bu nedenle (2.21) bağıntısındaki $\mu_{ij\alpha\beta}$ fonksiyonları x_1 koordinatına bağlıdır. $\mu_{ij\alpha\beta}^{(0)}$ değerleri, (2.14) ifadesindeki gibi verildiğinde, (2.21) bağıntısındaki $\mu_{ij\alpha\beta}(x_1)$ fonksiyonlarının sıfırdan farklı değerlerinin açık ifadeleri aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{aligned}
\mu_{1111} &= A_{11}^0 \phi_1^4(x_1) + 2(A_{12}^0 + 2G_{12}^0) \phi_1^2(x_1) \phi_2^2(x_1) + A_{22}^0 \phi_2^4(x_1) ; \\
\mu_{2222} &= A_{11}^0 \phi_2^4(x_1) + 2(A_{12}^0 + 2G_{12}^0) \phi_1^2(x_1) \phi_2^2(x_1) + A_{22}^0 \phi_1^4(x_1) ; \\
\mu_{3333} &= A_{33}^0 ; \quad \mu_{1313} = A_{44}^0 \phi_1^2(x_1) + A_{55}^0 \phi_2^2(x_1) ; \quad \mu_{2323} = A_{44}^0 \phi_2^2(x_1) + A_{55}^0 \phi_1^2(x_1) ; \\
\mu_{1212} &= (A_{11}^0 + A_{22}^0 - 2A_{12}^0 - 2A_{66}^0) \phi_1^2(x_1) \phi_2^2(x_1) + A_{66}^0 (\phi_1^4(x_1) + \phi_2^4(x_1)) ; \\
\mu_{1122} &= (A_{11}^0 + A_{22}^0 - 4A_{66}^0) \phi_1^2(x_1) \phi_2^2(x_1) + A_{12}^0 (\phi_1^4(x_1) + \phi_2^4(x_1)) ; \\
\mu_{1133} &= A_{13}^0 \phi_1^2(x_1) + A_{23}^0 \phi_2^2(x_1) ; \\
\mu_{1112} &= (A_{12}^0 - A_{11}^0 + 2A_{66}^0) \phi_1^3(x_1) \phi_2(x_1) + (A_{22}^0 - A_{12}^0 - 2A_{66}^0) \phi_1(x_1) \phi_2^3(x_1) ; \\
\mu_{2233} &= A_{23}^0 \phi_1^2(x_1) + A_{13}^0 \phi_2^2(x_1) ; \\
\mu_{2212} &= (A_{12}^0 - A_{11}^0 + 2A_{66}^0) \phi_1(x_1) \phi_2^3(x_1) + (A_{22}^0 - A_{12}^0 - 2A_{66}^0) \phi_1^3(x_1) \phi_2(x_1) ; \\
\mu_{3312} &= (A_{23}^0 - A_{13}^0) \phi_1(x_1) \phi_2(x_1) ; \quad \mu_{1323} = (A_{44}^0 - A_{55}^0) \phi_1(x_1) \phi_2(x_1) \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Bu denklemleri, yapılacak işlemleri kolaylaştırmak amacıyla aşağıdaki notasyonlarla ifade edelim:

$$\begin{aligned}
A_{11}(x_1) &= \mu_{1111}(x_1) ; \quad A_{22}(x_1) = \mu_{2222}(x_1) ; \quad A_{33}(x_1) = \mu_{3333}(x_1) ; \\
A_{44}(x_1) &= \mu_{1313}(x_1) ; \quad A_{55}(x_1) = \mu_{2323}(x_1) ; \quad A_{66}(x_1) = \mu_{1212}(x_1) ; \\
A_{12}(x_1) &= \mu_{1122}(x_1) ; \quad A_{13}(x_1) = \mu_{1133}(x_1) ; \quad A_{16}(x_1) = \mu_{1112}(x_1) ; \\
A_{23}(x_1) &= \mu_{2233}(x_1) ; \quad A_{26}(x_1) = \mu_{2212}(x_1) ; \quad A_{36}(x_1) = \mu_{3312}(x_1) ; \\
A_{45}(x_1) &= \mu_{1323}(x_1) \quad (2.25)
\end{aligned}$$

(2.24) denklemlerinde,

$$\phi_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{1+(a(x_1))^2}}, \quad \phi_2(x_1) = a(x_1)\phi_1(x_1), \quad a(x_1) = \varepsilon \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} \quad (2.26)$$

biçiminde fonksiyonlar olup $\varepsilon \cdot f(x_1) = F(x_1)$ plak malzemesinin yapısındaki eğriselliğin şeklini göstermektedir. ε ise eğriselliğin mertebesini gösteren bir parametredir. (2.24) denklemlerinde, plak malzemesinin herbiri homojen, izotrop ve birbirini tekrarlayan iki farklı malzemeden oluştuğunu varsayarak, $A_{11}^0, A_{12}^0, A_{22}^0, A_{66}^0$ terimleri plak malzemesinde hiçbir eğriselliğin olmadığı ideal durumdaki malzeme sabitleri olup,

$$\begin{aligned} A_{11}^0 &= \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2 + (\mu_1 + \eta_1) \eta_1 + (\mu_2 + \eta_2) \eta_2 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_1} \\ A_{12}^0 &= \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \eta_1 \eta_2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_1} \\ A_{22}^0 &= (\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{[(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)]^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_1} \\ A_{66}^0 &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

biçiminde belirlenir (Christensen, 1979). Burada 1 ve 2 indisleri malzemeleri göstermek üzere $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ ve μ_2 Lamé sabitleri; E_1, E_2 elastisite modülleri; ν_1, ν_2 Poisson oranları; η_1, η_2 kompozitteki malzeme bileşenlerinin hacim oranlarıdır.

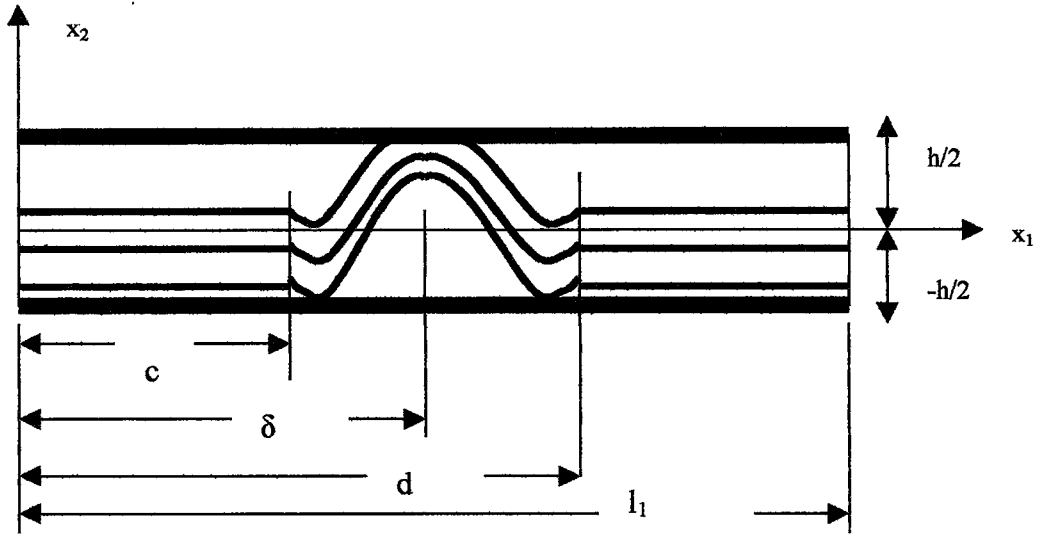
Yapısında eğrisellik olan plak malzemesinde (2.27) ifadeleri (2.26) ile birlikte (2.24)'de yerlerine konarak kompozit plağın malzeme sabitleri x_1 'in fonksiyonu olarak bulunurlar. Sayısal çözümü yapılan örnekte $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$ olarak alınmıştır. $\varepsilon \cdot f(x_1)$ fonksiyonu $x = x_1/l_1$ boyutsuzlaştırması yapılarak

$$\varepsilon f(x) = \begin{cases} \varepsilon \xi^3 (x-c)^2 (x-d)^2 \exp[-(\xi(x-\delta))^{2n}] \cos m\pi \xi (x-\delta) & x \in [c, d] \\ 0 & x \in [0, c) \cup (d, 1] \end{cases} \quad (2.28)$$

biçiminde seçilmiştir. Burada $[c, d]$ yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığı, δ ise Şekil 2.2'de görüldüğü gibi yerel eğriliğin en büyük olduğu yeri göstermektedir; ayrıca

$$\xi = \frac{l_1}{d-c} \quad (2.29)$$

biçimindedir.



Şekil 2.2 Plak-kiriş malzemesi yapısındaki yerel eğriselliğin geometrisi.

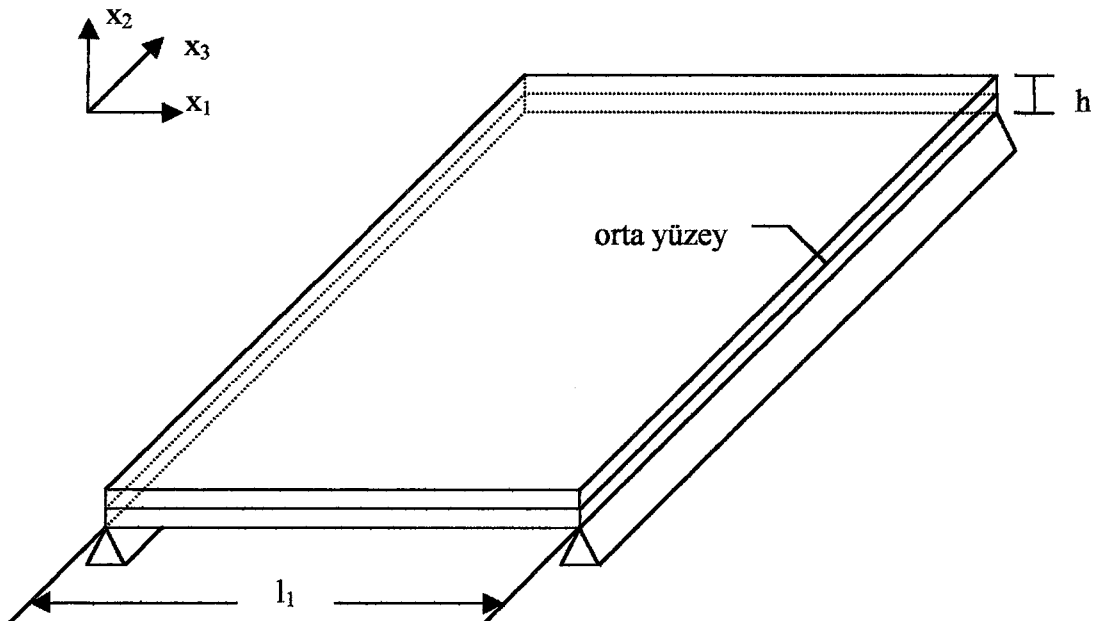
3. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN GELİŞTİRİLMİŞ PLAK TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE PLAKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİM DENKLEMLERİ

Bu bölümde, Kromm plak teorileri çerçevesinde plakların zorlanmış titreşim denklemleri elde edilecektir. Bundan böyle Kromm plak teorileri çerçevesinde elde edilen denklem ve sonuçlara üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorileri çerçevesinde elde edilen denklem ve sonuçlar denilecektir.

Kenarlarından serbest mesnetli sonsuz uzun plak, Şekil 3.1’de görüldüğü gibi

$$\left\{ 0 \leq x_1 \leq l_1 ; -\frac{h}{2} \leq x_2 \leq +\frac{h}{2} ; -\infty \leq x_3 \leq +\infty \right\} \quad (3.1)$$

bölgesini kapsamaktadır. Bu tip plaklarda, plağın x_3 doğrultusundaki boyutu x_1 doğrultusundakine nazaran çok büyük olmaktadır. Eğer bu plağa etki eden dış koşullar x_3 ’den bağımsız ise o zaman bu plaktaki gerilme ve yerdeğiştirmeler ve bunların sağladığı denklemler x_3 ’den bağımsız olmaktadır. Elastisite teorisinde yukarıdaki durumlar düzlem şekildeğiştirme durumları diye adlandırılır. Bu durumda x_3 yönündeki yerdeğiştirme sıfır kabul edilerek başka problem büyüklüklerinin x_3 ’den bağımsız olduğu varsayılır. Böylece, söylenenleri ele alınan probleme uyguladığımız zaman bakılan plak probleminin x_3 boyutu düşürülebildiğinden bu tip yapılara şerit-plak (plak-kiriş) denmektedir.



Şekil 3.1 Kenarlarından serbest mesnetli sonsuz uzun plak.

Plağın yerdeğiştirmeleri,

$$U_1 = U_1(x_1, x_2, t) \quad U_2 = U_2(x_1, x_2, t) \quad U_3 = 0 \quad (3.2)$$

biçiminde kabul edilmektedir. Kesin hareket denklemleri

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.3)$$

biçimindedir. Bu durumda

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ & & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ & & & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ & & & & A_{55} & A_{56} \\ & & & & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

bünye denklemleri, düzlem şekildeğiştirme durumunda aşağıdaki şekli alacaktır:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 2A_{16} & A_{12} \\ A_{16} & 2A_{66} & A_{26} \\ A_{12} & 2A_{26} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Burada,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2.) \quad (3.6)$$

(3.5) eşitliğinin sağındaki değişken malzeme parametreleri matrisinin elemanları, (2.24) ve (2.25) denklemlerinden hatırlanacağı gibi

$$A_{11} = A_{11}(x_1) = A_{11}^0 \phi_1^4 + 2(A_{12}^0 + 2A_{66}^0)(\phi_1 \phi_2)^2 + A_{22}^0 \phi_2^4, \quad ,$$

$$A_{16} = A_{16}(x_1) = -A_{11}^0 \phi_1^3 \phi_2 + (A_{12}^0 + 2A_{66}^0)(\phi_1^3 \phi_2 - \phi_1 \phi_2^3) + A_{22}^0 \phi_1 \phi_2^3, \quad ,$$

$$A_{66} = A_{66}(x_1) = (A_{11}^0 + A_{22}^0 - 2A_{12}^0)(\phi_1 \phi_2)^2 + A_{66}^0(\phi_1^2 - \phi_2^2)^2, \quad ,$$

$$A_{12} = A_{12}(x_1) = (A_{11}^0 + A_{22}^0 - 4A_{66}^0)(\phi_1 \phi_2)^2 + A_{12}^0(\phi_1^4 + \phi_2^4), \quad ,$$

$$A_{26} = A_{26}(x_1) = -A_{11}^0 \phi_1 \phi_2^3 - (A_{12}^0 + 2A_{66}^0)(\phi_1^3 \phi_2 - \phi_1 \phi_2^3) + A_{22}^0 \phi_1^3 \phi_2, \quad ,$$

$$A_{22}(x_1) = A_{22} = A_{11}^0 \phi_2^4 + 2(A_{12}^0 + 2A_{66}^0)(\phi_1 \phi_2)^2 + A_{22}^0 \phi_1^4 \quad (3.7)$$

biçimindedir. Bölüm 2.3'te belirtildiği gibi A_{11}^0 , A_{12}^0 , A_{22}^0 , A_{66}^0 göz önüne alınan plakta hiçbir eğriselliğin olmadığı ideal durumda kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik özellikleridir. Φ_1 ve Φ_2 fonksiyonları ise (2.26) ifadelerinde açıklandığı gibidir.

Plak kenarlarından serbestçe oturmaktadır. Bu durumda sınır şartları,

$$U_2 = 0, \quad \sigma_{11} = 0 \quad (x_1 = 0, l_1) \quad (3.8)$$

biçimindedir. Plagın üst ve alt yüzeylerinde ise

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0 \quad \left(x_2 = \pm \frac{h}{2}\right) \quad (3.9)$$

sınır koşulları geçerlidir.

Böylece ele alınan plagın zorlanmış titreşiminin elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri çerçevesinde incelenmesi (3.3)-(3.9) ve (2.26) denklemleriyle sağlanmış olur. Bu problemin incelenmesi matematiksel açıdan çok zordur. Bu nedenden dolayı ele alınan problemin incelenmesinde geliştirilmiş plak teorilerinin kullanılması gereği ortaya çıkmaktadır. Tez kapsamında ele alınan araştırmalarda geliştirilmiş plak teorisi olarak üçüncü mertebeden olan Kromm Teorisi kullanılmaktadır. Bu teoriye göre (3.2) yerdeğıştirmelerinin plak kalınlığı boyunca olan koordinata göre değışimi aşığıdaki şekilde verilir.

Kromm (1953,1955)'a göre plak yerdeğıştirmeleri

$$U_1(x_1, x_2, t) = U^0(x_1, t) - x_2 \frac{\partial W(x_1, t)}{\partial x_1} + J(x_2) \phi(x_1, t), \quad (3.10)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Burada $\phi(x_1, t)$, plagın Ox_1 eksenine dik kesitindeki kayma şekil değıştirmesinin ortalama değışimini ifade eden bir fonksiyondur. Ayrıca,

$$U^0(x_1, t) = U_1(x_1, 0, t), \quad W(x_1, t) = U_2(x_1, 0, t) \quad (3.11)$$

ifadeleri plak orta yüzeyinin yerdeğıştirmeleri, $\phi(x_1, t)$ 'in plak kalınlığı boyunca değışimini gösteren $J(x_2)$ ifadesi

$$J(x_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{4} x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right) \quad (3.12)$$

biçimindedir.

Şimdi,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_2 \quad (i=1) \quad (3.13)$$

ifadelerini göz önüne alarak (3.3) hareket denklemlerinin $-h/2$ ' den $+h/2$ ' ye kadar x_2 ' ye göre integrasyonu yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} U_1(x_1, x_2, t) dx_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} U_2(x_1, x_2, t) dx_2 - P(x_1, t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

plağın alt ve üst yüzeyleri için (3.9)'da verilen koşulları

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} dx_2 = \sigma_{i2} \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0 \quad (i=1,2) \quad (3.15)$$

(3.14)'de kullanılır ve

$$T_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_2, \quad (3.16)$$

$$N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_2 \quad (3.17)$$

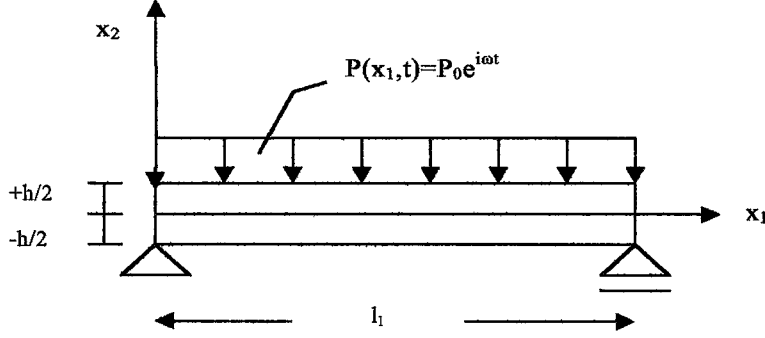
işaretlemeleri yapılırsa,

$$\frac{\partial T_{11}(x_1, t)}{\partial x_1} = h\rho \frac{\partial^2 U^0(x_1, t)}{\partial t^2}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial N_{12}(x_1, t)}{\partial x_1} = h\rho \frac{\partial^2 W(x_1, t)}{\partial t^2} - P(x_1, t) \quad (3.19)$$

elde edilir. Buradaki $T_{11}(x_1, t)$, $N_{12}(x_1, t)$ plaktaki iç kuvvetlerin ortalama değerleri olup birinci

indis kuvvetin etkidiği yüzeyin normalini ikinci indis ise kuvvetin yönünü göstermektedir. $P(x_1, t)$, şekil 3.2’de görüldüğü gibi şerit-plağa etki eden $-x_2$ yönündeki düzgün yayılı yükü göstermektedir.



Şekil 3.2 Düzgün yayılı yük altındaki şerit-plak.

(3.3) hareket denklemlerinin x_2 ile çarpımı yine $-h/2$ ’ den $+h/2$ ’ ye kadar x_2 ’ye göre entegre edilirse,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{11} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} x_2 dx_2 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 U_1(x_1, x_2, t) dx_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{12} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} x_2 dx_2 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 U_2(x_1, x_2, t) dx_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. Plak teorisinde genelde yapılan $\sigma_{22} = 0$ kabulüyle birlikte (3.20) denklemlerinin ikinci terimlerine bilinen kısmi integrasyon kuralı uygulanır ve plağın alt ve üst yüzeyleri için (3.9)’da verilen koşullar göz önünde tutulursa

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} x_2 dx_2 &= \sigma_{12} x_2 \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_2 = 0 \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} x_2 dx_2 &= \sigma_{22} x_2 \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

bulunur. Momentin ortalama değeri

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_2 dx_2 \quad (3.22)$$

biçiminde gösterilirse

$$\frac{\partial M_{11}(x_1, t)}{\partial x_1} - N_{12}(x_1, t) = -2\rho I_1(h) \frac{\partial^3 W(x_1, t)}{\partial x_1 \partial t^2} + \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi(x_1, t)}{\partial t^2} \quad (3.23)$$

elde edilir. Burada,

$$I_1(h) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dJ(x_2)}{dx_2} dx_2 = \frac{h^3}{24} \quad , \quad I_2(h) = \int_{-h/2}^{h/2} x_2 J(x_2) dx_2 = \frac{h^5}{240} \quad (3.24)$$

biçimindedir. (3.12) ve (3.10) ifadeleri (3.6)'da yerlerine konursa;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{\partial U^0}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + J(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial J(x_2)}{\partial x_2} \varphi + \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial J(x_2)}{\partial x_2} \varphi \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) denklemleri (3.5)'te yerlerine konursa;

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11} \varepsilon_{11} + 2A_{16} \varepsilon_{12} = A_{11} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + J(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + A_{16} \frac{\partial J(x_2)}{\partial x_2} \varphi \\ \sigma_{12} &= A_{16} \varepsilon_{11} + 2A_{66} \varepsilon_{12} = A_{16} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + J(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + A_{66} \frac{\partial J(x_2)}{\partial x_2} \varphi \\ \sigma_{22} &= A_{12} \varepsilon_{11} + 2A_{26} \varepsilon_{12} = A_{12} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + J(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + A_{26} \frac{\partial J(x_2)}{\partial x_2} \varphi \end{aligned} \quad (3.26)$$

biçiminde elde edilir. (3.26) denklemleri (3.16), (3.17) ve (3.22) ifadelerinde yerlerine konursa,

$$T_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[A_{11} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + J(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + A_{16} \frac{\partial J(x_2)}{\partial x_2} \varphi \right] dx_2 \quad (3.27)$$

$$N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[A_{16} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + J(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + A_{66} \frac{\partial J(x_2)}{\partial x_2} \varphi \right] dx_2 \quad (3.28)$$

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{11} dx_2 = \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \left[A_{11} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + J(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + A_{16} \frac{\partial J(x_2)}{\partial x_2} \varphi \right] dx_2 \quad (3.29)$$

elde edilir. Bu denklemler $-h/2$ 'den $+h/2$ 'ye kadar x_2 'ye göre entegre edilirse

$$T_{11} = A_{11} h \frac{\partial U^0}{\partial x_1} + A_{16} \varphi I_1(h) \quad (3.30)$$

$$N_{12} = A_{16} h \frac{\partial U^0}{\partial x_1} + A_{66} \varphi I_1(h) \quad (3.31)$$

$$M_{11} = -A_{11} \left[2I_1(h) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - I_2(h) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right] \quad (3.32)$$

elde edilir. Bu son ifadeler (3.18), (3.19) ve (3.23) yerlerine konursa;

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{11} h \frac{\partial U^0}{\partial x_1} + A_{16} \varphi I_1(h) \right] = \rho h \frac{\partial^2 U^0}{\partial t^2} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{16} h \frac{\partial U^0}{\partial x_1} + A_{66} \varphi I_1(h) \right] = \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - P(x_1, t) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{11} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \right] - \left(A_{16} h \frac{\partial U^0}{\partial x_1} + A_{66} \varphi I_1(h) \right) &= -2\rho I_1(h) \frac{\partial^3 W}{\partial x_1 \partial t^2} + \\ &+ \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

elde edilir. (3.33), (3.34) ve (3.35) denklemlerinde x_1 'e göre kısmi türevleri alınan ifadeler gerçekleştirildiğinde, yerdeğistirmeler cinsinden plak hareket denklemleri

$$A_{11} h \frac{\partial^2 U^0}{\partial x_1^2} + h \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial U^0}{\partial x_1} + I_1(h) A_{16} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + I_1(h) \varphi \frac{\partial A_{16}}{\partial x_1} = \rho h \frac{\partial^2 U^0}{\partial t^2} \quad (3.36)$$

$$A_{16} h \frac{\partial^2 U^0}{\partial x_1^2} + h \frac{\partial A_{16}}{\partial x_1} \frac{\partial U^0}{\partial x_1} + I_1(h) A_{66} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + I_1(h) \varphi \frac{\partial A_{66}}{\partial x_1} = \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - P(x_1, t) \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} -A_{11} \left(2I_1(h) \frac{\partial^3 W}{\partial x_1^3} - I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \right) - \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} \left(2I_1(h) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - I_2(h) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) - \\ -h A_{16} \frac{\partial U^0}{\partial x_1} - A_{66} I_1(h) \varphi = 2\rho I_1(h) \frac{\partial^3 W}{\partial x_1 \partial t^2} + \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

biçiminde elde edilir. (3.16) ve (3.22) işlemi plağın (3.8)'deki sınır şartlarına da uygulanırsa:

$$T_{11} = 0 \quad , \quad M_{11} = 0 \quad , \quad W = 0 \quad (x_1 = 0, l_1) \quad (3.39)$$

elde edilir.

Göz önüne alınan plağın zorlanmış titreşiminin zamana bağlı yerdeğiştirmeleri,

$$U^0(x_1, t) = X_U(x_1)e^{i\omega t} \quad , \quad W(x_1, t) = X_W(x_1)e^{i\omega t} \quad , \quad \varphi(x_1, t) = X_\varphi(x_1)e^{i\omega t} \quad (3.40)$$

şeklinde ifade edilebilir. Şerit-plağa $-x_2$ yönünde etkiyen düzgün yayılı yük,

$$P(x_1, t) = P_0 e^{i\omega t} \quad (3.41)$$

biçiminde yazılabilir; burada ω , ele alınan kompozit plağın zorlanmış titreşim frekansıdır. (3.40) ve (3.41) ifadeleri (3.36), (3.37) ve (3.38) hareket denklemlerinde yerlerine konursa;

$$A_{11}h \frac{d^2 X_U}{dx_1^2} + h \frac{dA_{11}}{dx_1} \frac{dX_U}{dx_1} + I_1(h)A_{16} \frac{dX_\varphi}{dx_1} + I_1(h)X_\varphi \frac{dA_{16}}{dx_1} = -\rho h \omega^2 X_U \quad (3.42)$$

$$A_{16}h \frac{d^2 X_U}{dx_1^2} + h \frac{dA_{16}}{dx_1} \frac{dX_U}{dx_1} + I_1(h)A_{66} \frac{dX_\varphi}{dx_1} + I_1(h)X_\varphi \frac{dA_{66}}{dx_1} = -\rho h \omega^2 X_W - P_0 \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} & -A_{11} \left(2I_1(h) \frac{d^3 X_W}{dx_1^3} - I_2(h) \frac{d^2 X_\varphi}{dx_1^2} \right) - \frac{dA_{11}}{dx_1} \left(2I_1(h) \frac{d^2 X_W}{dx_1^2} - I_2(h) \frac{dX_\varphi}{dx_1} \right) - \\ & -hA_{16} \frac{dX_U}{dx_1} - I_1(h)A_{66}X_\varphi = \rho \omega^2 \left(2I_1(h) \frac{dX_W}{dx_1} - I_2(h)X_\varphi \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

elde edilir. Ayrıca (3.40) ifadeleri, (3.30) ve (3.32) göz önünde tutularak, (3.39) sınır koşullarında yerlerine konursa,

$$\left[A_{11}h \frac{dX_U}{dx_1} + A_{16}I_1(h)X_\varphi \right]_{x_1=0, l_1} = 0 \quad (3.45)$$

$$\left[A_{11} \left(-2I_1(h) \frac{d^2 X_W}{dx_1^2} + I_2(h) \frac{dX_\varphi}{dx_1} \right) \right]_{x_1=0, l_1} = 0 \quad , \quad X_W|_{x_1=0, l_1} = 0 \quad (3.46)$$

elde edilir. Böylece göz önüne alınan plağın zorlanmış titreşim problemi (3.45) ve (3.46) sınır koşulları altında (3.42), (3.43) ve (3.44) problemlerinin çözümüne indirgenmiş olur.

4. GALERKİN YÖNTEMİ İLE EĞRİSEL MALZEME YAPISINA SAHİP KOMPOZİT ŞERİT-PLAKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİM DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Galerkin Yöntemini, (3.42)-(3.44) denklemleri ve (3.45)-(3.46) sınır koşulları çerçevesinde verilen problemlerin incelenmesi örneğinde açıklayalım.

(3.42)-(3.44) denklemlerinin değişken katsayılı diferansiyel denklemler olması nedeniyle ele alınan problemlerin matematiksel açıdan incelenmesi çok zorlaşır. Bu veya buna benzer durumlarda yaklaşık analitik çözümler elde edilmesine çalışılır. Bunun için (3.42)-(3.46) problemlerinin çözümünde Galerkin Yöntemi kullanılacaktır. Galerkin Yönteminin uygulanabilmesi için aranan fonksiyonların belli bir sınıf tam fonksiyonlarla ifade edilebilmesi ve bu tam fonksiyonlar sınıfını oluşturan her bir fonksiyonun aranan fonksiyonların sağladığı sınır koşullarını otomatik olarak sağlaması gerekmektedir. Dolayısıyla, (3.42)-(3.46) denklemlerinde X_w , X_U , X_φ fonksiyonlarının, (3.45) ve (3.46) koşullarını otomatik olarak sağlayan tam fonksiyonlarla ifade edilmeleri gerekir.

Bu durumda $X_U(x_1)$, $X_w(x_1)$, $X_\varphi(x_1)$ fonksiyonları

$$X_U = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{l_1} x_1, \quad X_w = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l_1} x_1, \quad X_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \frac{n\pi}{l_1} x_1 \quad (4.1)$$

biçiminde aranabilir. Fonksiyonlar bu şekilde seçildiğinde (3.46) sınır koşulları otomatik olarak sağlanırken (3.45) sağlanmaz. Bunun için (3.45) sınır koşulu ancak $A_{16}(x_1)$ fonksiyonu

$$A_{16}(0) = A_{16}(l_1) = 0 \quad (4.2)$$

yapılarak otomatik olarak sağlatılmış olunur. Böylece (3.7), (2.26) ve (3.45) dikkate alındığında plak malzemesinin yapısındaki eğriselliğin

$$a(x_1) \Big|_{x_1=0, l_1} = 0 \quad (4.3)$$

şartını sağlaması halinde ele alınan (3.42)-(3.46) probleminde elde edilen sonuçlar kesin olacaktır. Bu şart sağlanmadığında (3.45) sınır koşulu ancak yaklaşık sağlanabilir, dolayısıyla elde edilen sonuçlar da yaklaşık olacaktır.

(4.1) ifadeleri (3.42), (3.43) ve (3.44)'de yerlerine konursa (4.1) ifadelerindeki B_n , C_n , D_n bilinmeyen sabitleri için lineer, cebrik denklemler sistemi elde edilir. Bu denklemlerin

katsayılar determinantı sıfıra eşitlenirse şerit-plağa ait serbest titreşim frekansları elde edilmiş olunur.

Şimdi söylenenleri sırasıyla yazalım. İlk önce (4.1)'i (3.42), (3.43) ve (3.44)'da yerine koyarsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[-A_{11}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{11}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} + \rho \omega^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_1(h) \left[-A_{16}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} + \frac{dA_{16}(x_1)}{dx_1} \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = 0 \quad (4.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[-A_{16}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{16}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\rho h \omega^2 \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_1(h) \left[-A_{66}(x_1) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} + \frac{dA_{66}(x_1)}{dx_1} \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = -P_0 \quad (4.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[A_{16}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} C_n 2I_1(h) \left[A_{11}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^3 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} + \frac{dA_{11}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} - \rho \omega^2 \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_2(h) \left[-A_{11}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{11}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{I_1(h)}{I_2(h)} A_{66}(x_1) \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} + \rho \omega^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = 0 \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.4), (4.5) ve (4.6) denklemlerinde

$$\omega^2 = \frac{\rho \omega^2 l_1^2}{A_{22}^0} \quad (4.7)$$

boyutsuzlaştırması yapılırsa, bu denklemler

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[-\frac{A_{11}(x_1)}{A_{22}^0} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{d}{dx_1} \left(\frac{A_{11}(x_1)}{A_{22}^0} \right) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} + \left(\frac{\rho \omega^2 l_1^2}{A_{22}^0} \right) \frac{1}{l_1^2} \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_1(h) \left[-\frac{A_{16}(x_1)}{A_{22}^0} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} + \frac{d}{dx_1} \left(\frac{A_{16}(x_1)}{A_{22}^0} \right) \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[-\frac{A_{16}(x_1)}{A_{22}^0} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{d}{dx_1} \left(\frac{A_{16}(x_1)}{A_{22}^0} \right) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\left(\frac{\rho \omega^2 l_1^2}{A_{22}^0} \right) \frac{h}{l_1^2} \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_1(h) \left[-\frac{A_{66}(x_1)}{A_{22}^0} \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} + \frac{d}{dx_1} \left(\frac{A_{66}(x_1)}{A_{22}^0} \right) \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] \quad (4.9) \\
& = -\frac{P_0}{A_{22}^0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[\frac{A_{16}(x_1)}{A_{22}^0} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} C_n 2I_1(h) \left[\frac{A_{11}(x_1)}{A_{22}^0} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^3 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} + \frac{d}{dx_1} \left(\frac{A_{11}(x_1)}{A_{22}^0} \right) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\rho \omega^2 l_1^2}{A_{22}^0} \right) \frac{1}{l_1^2} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_2(h) \left[-\frac{A_{11}(x_1)}{A_{22}^0} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \right. \\
& \left. \frac{d}{dx_1} \left(\frac{A_{11}(x_1)}{A_{22}^0} \right) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{I_1(h)}{I_2(h)} \frac{A_{66}(x_1)}{A_{22}^0} \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} + \left(\frac{\rho \omega^2 l_1^2}{A_{22}^0} \right) \frac{1}{l_1^2} \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = 0 \quad (4.10)
\end{aligned}$$

haline gelir. (4.8), (4.9) ve (4.10) denklemlerinde

$$x = \frac{x_1}{l_1} \quad (4.11)$$

boyutsuzlaştırması yapılır ve

$$A'_{11}(x) = \frac{A_{11}(x_1)}{A_{22}^0}, \quad A'_{16}(x) = \frac{A_{16}(x_1)}{A_{22}^0}, \quad A'_{66}(x) = \frac{A_{66}(x_1)}{A_{22}^0}, \quad P'_0 = \frac{P_0}{A_{22}^0} \quad (4.12)$$

işaretlemeleri kabul edilirse

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{l_1} \left[-A'_{11}(x) (n\pi)^2 \cos n\pi x - n\pi \frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x + \varpi^2 \cos n\pi x \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi A'_{16}(x) \sin n\pi x + \frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos n\pi x \right] = 0 \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{l_1} \left(\frac{h}{l_1} \right) \left[- (n\pi)^2 A'_{16}(x) \cos n\pi x - n\pi \frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin n\pi x \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{l_1} \left(\frac{h}{l_1} \right) \left[\varpi^2 \sin n\pi x \right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^3 \left[- n\pi A'_{66}(x) \sin n\pi x + \frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos n\pi x \right] \\
& = -P'_0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{l_1} \left(\frac{h}{l_1} \right) \left[n\pi A'_{16}(x) \sin n\pi x \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{l_1} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^3 \left[(n\pi)^3 A'_{11}(x) \cos n\pi x + (n\pi)^2 \frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x - n\pi \varpi^2 \cos n\pi x \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} D_n l_1^2 \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^5 \left[- (n\pi)^2 A'_{11}(x) \cos n\pi x - n\pi \frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x - \right. \\
& \left. - 10 \left(\frac{h}{l_1} \right)^{-2} A'_{66}(x) \cos n\pi x + \varpi^2 \cos n\pi x \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.13) ifadesi $\cos m\pi x$, (4.14) ifadesi $\sin m\pi x$, (4.15) ifadesi de $\cos m\pi x$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[- (n\pi)^2 A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x - n\pi \frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x \cos m\pi x + \right. \\
& \left. \varpi^2 \cos n\pi x \cos m\pi x \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[- n\pi A'_{16}(x) \sin n\pi x \cos m\pi x + \right. \\
& \left. + \frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos n\pi x \cos m\pi x \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[- (n\pi)^2 A'_{16}(x) \cos n\pi x \sin m\pi x - n\pi \frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin n\pi x \sin m\pi x \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \left[\varpi^2 \sin n\pi x \sin m\pi x \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[- n\pi A'_{66}(x) \sin n\pi x \sin m\pi x + \frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos n\pi x \sin m\pi x \right] = \\
& - P'_0 \left(\frac{l_1}{h} \right) \sin m\pi x
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[n\pi A'_{16}(x) \sin n\pi x \cos m\pi x \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[(n\pi)^3 A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x + (n\pi)^2 \frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x \cos m\pi x - \right. \\
& \left. - n\pi \varpi^2 \cos n\pi x \cos m\pi x \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^4 \left[-(n\pi)^2 A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x - n\pi \frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x \cos m\pi x - \right. \\
& \left. - 10 \left(\frac{l_1}{h} \right)^2 A'_{66}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x + \varpi^2 \cos n\pi x \cos m\pi x \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

denklemleri elde edilir. (4.16), (4.17) ve (4.18) 0'dan 1'e kadar x'e göre entegre edilirse,

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx - n\pi \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x \cos m\pi x \right) dx \right. \\
& \left. + \varpi^2 \int_0^1 \cos n\pi x \cos m\pi x dx \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin n\pi x \cos m\pi x) dx \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos n\pi x \cos m\pi x \right) dx \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 \int_0^1 (A'_{16}(x) \cos n\pi x \sin m\pi x) dx - n\pi \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin n\pi x \sin m\pi x \right) dx \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \left[\varpi^2 \int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi \int_0^1 (A'_{66}(x) \sin n\pi x \sin m\pi x) dx + \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(\frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos n\pi x \sin m\pi x \right) dx \right] = -P'_0 \left(\frac{l_1}{h} \right) \int_0^1 \sin m\pi x dx
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[n\pi \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin n\pi x \cos m\pi x) dx \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[(n\pi)^3 \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx + \right. \\
& \left. + (n\pi)^2 \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x \cos m\pi x \right) dx - n\pi \omega^2 \int_0^1 \cos n\pi x \cos m\pi x dx \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^4 \left[-(n\pi)^2 \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx - \right. \\
& \left. - n\pi \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x \cos m\pi x \right) dx - 10 \left(\frac{l_1}{h} \right)^2 \int_0^1 (A'_{66}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx + \right. \\
& \left. \omega^2 \int_0^1 \cos n\pi x \cos m\pi x dx \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
AI_{1nm} &= \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx, & AI_{2nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x \cos m\pi x \right) dx \\
AI_{3nm} &= \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin n\pi x \cos m\pi x) dx, & AI_{4nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos n\pi x \cos m\pi x \right) dx \\
AI_{5nm} &= \int_0^1 (A'_{16}(x) \cos n\pi x \sin m\pi x) dx, & AI_{6nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin n\pi x \sin m\pi x \right) dx \\
AI_{7nm} &= \int_0^1 (A'_{66}(x) \sin n\pi x \sin m\pi x) dx, & AI_{8nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos n\pi x \sin m\pi x \right) dx \\
AI_{9nm} &= \int_0^1 (A'_{66}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx
\end{aligned} \tag{4.22}$$

biçiminde işaretlemeler kabul edilirse (4.19), (4.20) ve (4.21) denklemleri

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 AI_{1nm} - n\pi AI_{2nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \omega^2 \right] + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi AI_{3nm} + AI_{4nm} \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 AI_{5nm} - n\pi AI_{6nm} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \left[\frac{1}{2} \delta_{nm} \varpi^2 \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi AI_{7nm} + AI_{8nm} \right] = -P_0' \left(\frac{l_1}{h} \right) \left[-\frac{1}{m\pi} ((-1)^m - 1) \right] \quad (4.24)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[n\pi AI_{3nm} \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[(n\pi)^3 AI_{1nm} + (n\pi)^2 AI_{2nm} - n\pi \frac{1}{2} \delta_{nm} \varpi^2 \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^4 \left[-(n\pi)^2 AI_{1nm} - n\pi AI_{2nm} - 10 \left(\frac{l_1}{h} \right)^2 AI_{9nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \varpi^2 \right] = 0 \quad (4.25)$$

haline gelir. (4.23), (4.24) ve (4.25) denklemlerinde δ_{nm} Kronecker Deltası olup;

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (4.26)$$

biçimindedir.

(4.23), (4.24) ve (4.25) denklemler sistemi sonsuz sayıda denklem içermektedir. Bu nedenle bu denklemlerin katsayılar determinantının mertebesi de sonsuzdur. Galerkin Yönteminin tezde ele alınan problemlere uygulanması için sonsuz sayıdaki denklem ile uygun sonlu sayıdaki denklem değiştirilir.

(4.23), (4.24) ve (4.25) denklemlerindeki $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}$, $\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N$ ile değiştirilirse,

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 AI_{1nm} - n\pi AI_{2nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \varpi^2 \right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi AI_{3nm} + AI_{4nm} \right] = 0 \quad (4.27)$$

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 AI_{5nm} - n\pi AI_{6nm} \right] + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N C_{nm} \frac{1}{l_1} \left[\frac{1}{2} \delta_{nm} \varpi^2 \right] +$$

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi AI_{7nm} + AI_{8nm} \right] = -P_0' \left(\frac{l_1}{h} \right) \left[-\frac{1}{m\pi} ((-1)^m - 1) \right] \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N B_{nm} \frac{1}{l_1} [n\pi AI_{3nm}] + \\
& \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N C_{nm} \frac{1}{l_1} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[(n\pi)^3 AI_{1nm} + (n\pi)^2 AI_{2nm} - n\pi \frac{1}{2} \delta_{nm} \omega^2 \right] + \\
& \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N D_{nm} l_1^2 \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^4 \left[-(n\pi)^2 AI_{1nm} - n\pi AI_{2nm} - 10 \left(\frac{l_1}{h} \right)^2 AI_{9nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \omega^2 \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

denklemler sistemi elde edilir.

N=5 alınırsa (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemler sisteminden 15 denklem alınır. İlk önce bu 15 denklemin katsayılar determinantı sıfıra eşitlenip ω_*^2 (doğal titreşim frekansının karesi) değerleri bulunur. Daha sonra N=10 alınarak aynı işlem yapılarak ω_*^2 değerleri aranır. Daha sonra bu iki ω_*^2 değerleri karşılaştırılır. Eğer bu karşılaştırmada elde edilen ω_*^2 değerleri birbirlerine yeteri kadar yakınsa serbest titreşim frekanslarının aranması işlemi bitmiş kabul edilir.

5. SONUÇLAR

Galerkin Yönteminin malzeme yapısında eğrisellik bulunan şerit-plağın hareket denklemlerine nasıl uygulanacağı 4.Bölüm’de anlatıldı. Yapılan işlemler sonucunda (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemleri elde edilmiş, incelenen problemler, Fortran-77 programlama dili yardımıyla programlanmıştır. Bu programlarda yapılan hesaplamaları (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemleri üzerinde açıklayalım.

İlk önce (4.22) ile ifade edilen AI_{imm} ($i=1,2,...,9$) integral terimlerinin hesaplanması gerekmektedir. $A_{11}'(x)$, $A_{16}'(x)$, $A_{66}'(x)$ x 'in birer fonksiyonu olduğundan (4.22) integrallerinin hesaplanmasında zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle söz konusu integrallerin hesabında Gauss Noktaları Yöntemi kullanılmıştır. AI_{imm} integral terimlerindeki n ve m değerleri 1'den, (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemlerinde ele alınan terimlerin sayısı olan, N 'e kadar değişebilmektedir. Hesaplarda $N=10$ alınmaktadır. Gauss Noktaları Yönteminin uygulanmasında şerit-plak 10 aralığa bölünmekte ve her bir aralıkta 15 Gauss Noktası alınarak (4.22) integralleri hesaplanmaktadır. Elde edilen sayısal sonuçlar hazırlanan programda bir dosya oluşturularak bu dosyaya yerleştirilmektedir.

(4.22)'deki $A_{11}'(x)$, $A_{16}'(x)$, $A_{66}'(x)$ malzeme değişkenlerinin (3.7) ile verilen ifadelerindeki A_{11}^0 , A_{12}^0 , A_{22}^0 , A_{66}^0 normalize edilmiş elastisite sabitleri (2.27) denklemleri yardımıyla bulunur. Bölüm 2.3'ten hatırlanacağı üzere ele alınan şerit-plağın ox_2 eksenini yönünde biri diğerini tekrarlayan levhalardan oluşmuş kompozit malzemelerden meydana geldiği varsayılmaktadır. Bu levhaların malzemesinin izotrop ve homojen olduğu kabul edilir ve elastisite modülleri E_1 ve E_2 , Poisson oranları ν_1 ve ν_2 , Lamé sabitleri λ_1 , μ_1 ve λ_2 , μ_2 ; hacim oranları η_1 ve η_2 ile gösterilmektedir. Hesaplarda $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, $\eta_1 = \eta_2 = 0.50$ alınmaktadır.

Şerit-plak malzemesi yapısındaki yerel eğriselliğin, Bölüm 2.3'ten hatırlanacağı gibi $0 < c \leq x_1 \leq d < l_1$, $-h/2 \leq x_2 \leq +h/2$ bölgesinde olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda şerit plak malzemesi yapısındaki yerel eğriselliği gösteren $\varepsilon \cdot f(x_1)$ fonksiyonu $x=x_1/l_1$ boyutsuzlaştırılması yapılarak

$$\varepsilon f(x) = \begin{cases} \varepsilon \xi^3 (x-c)^2 (x-d)^2 \exp\left[-(\xi(x-\delta))^2\right] \cos m\pi\xi(x-\delta) & x \in [c, d] \\ 0 & x \in [0, c) \cup (d, 1] \end{cases} \quad (5.1)$$

biçiminde seçilebilir. (5.1) ifadesinde $[c, d]$ yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığı, δ yerel eğriselliğin en büyük olduğu yeri göstermektedir; ayrıca

$$\xi = \frac{l_1}{d-c} \quad (5.2)$$

biçimindedir.

Şerit-plak malzemesi yapısındaki eğriselliğin formu olan (5.1) eşitliği sınırlarda $\varepsilon \cdot f(0) = \varepsilon \cdot f(1) = 0$ değerlerini aldığından (4.1) yerdeğiştirme fonksiyonları (3.45) ve (3.46) sınır koşullarını otomatik olarak sağlarlar. Bu nedenle hesaplama sonunda elde edilen sonuçlar kesin olmaktadır.

AI_{inn} integral terimlerinin hesabından sonra Galerkin Yöntemi kullanılarak (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemlerindeki B_{nm}/l_1 , C_{nm}/l_1 , $D_{nm}l_1^2$ terimlerinin katsayılarından

$$[A]_{3N \times 3N} = \begin{bmatrix} b_{1nm} & c_{1nm} & d_{1nm} \\ b_{2nm} & c_{2nm} & d_{2nm} \\ b_{3nm} & c_{3nm} & d_{3nm} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

şeklinde $3N \times 3N$ boyutlu $[A]$ matrisi oluşturulmaktadır. Burada

$$b_{1nm} = \left[-(n\pi)^2 AI_{1nm} - n\pi AI_{2nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \omega^2 \right], \quad b_{2nm} = \left[-(n\pi)^2 AI_{5nm} - n\pi AI_{6nm} \right],$$

$$b_{3nm} = [n\pi AI_{3nm}], \quad c_{1nm} = [0], \quad c_{2nm} = \left[\frac{1}{2} \delta_{nm} \omega^2 \right],$$

$$c_{3nm} = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[(n\pi)^3 AI_{1nm} + (n\pi)^2 AI_{2nm} - n\pi \frac{1}{2} \delta_{nm} \omega^2 \right],$$

$$d_{1nm} = \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 [-n\pi AI_{3nm} + AI_{4nm}], \quad d_{2nm} = \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 [-n\pi AI_{7nm} + AI_{8nm}],$$

$$d_{3nm} = \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^4 \left[-(n\pi)^2 AI_{1nm} - n\pi AI_{2nm} - 10 \left(\frac{h}{l_1} \right)^{-2} AI_{9nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \omega^2 \right] \quad (5.4)$$

biçiminde (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemlerindeki, sırasıyla, B_{nm}/l_1 , C_{nm}/l_1 , $D_{nm}l_1^2$ terimlerinin katsayılarından oluşan $n \times m$ ($n=m=1,2,\dots,N$) boyutlu matrislerin terimlerinin ifadelerini göstermektedir. AI_{inn} integral terimlerinin sayısal değerlerini ve şerit plağın moment ile kesme kuvveti değerlerini bulmak amacıyla iki program hazırlanmıştır. Hazırlanan bu programların doğru sonuçlar verip vermediklerini kontrol etmek amacıyla

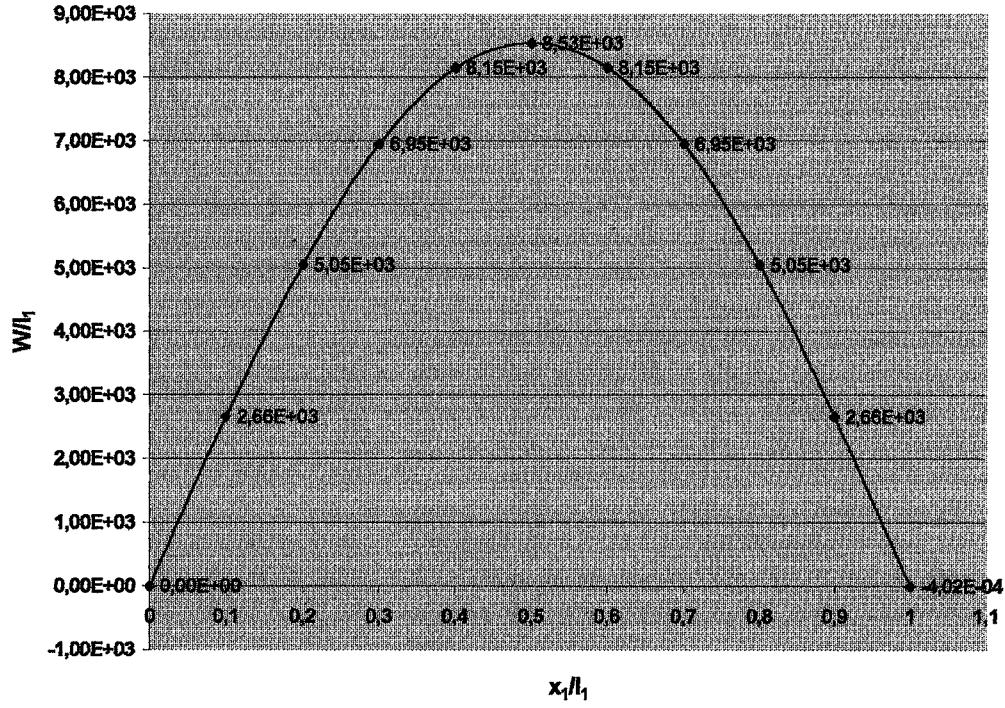
düzgün yayılı yük etkisindeki şerit-plakta rezonans olayının meydana gelip gelmediğine, yani; şerit plağın doğal titreşim frekansı ile zorlanmış titreşim frekansının birbirine eşit olduğu durumun oluşup oluşmadığına bakılır. Bilindiği gibi sistem rezonans durumuna geldiğinde sonsuz büyük yerdeğiştirmeler meydana gelmektedir. Bu düşünceden yola çıkarak (4.27), (4.28) ve (4.29) zorlanmış titreşim denklemlerinden yararlanarak, E_2/E_1 , ϵ , c , d ve δ 'nin belirli değerleri için yerdeğiştirmelerin sonsuz büyük olduğu ω_*^2 (doğal -serbest- titreşim frekansının karesi) değerleri elde edilmeye çalışılmıştır. Program içinde sıfıra çok çok yakın bir değerden başlayarak, ω_*^2 'ye küçük artımlar (0.0001) verilerek elde edilen değerler (5.4) ifadelerinde ω^2 yerine konularak yerdeğiştirmelerin sonsuz büyük olduğu durum aranır. Elde edilen ω_*^2 değerleri literatürdekilerle karşılaştırılmıştır. Bunun dışında (4.22) ifadelerinde verilen AI_{inn} integral terimlerinin sayısal sonuçlarının yerleştirildiği dosyalar, hazırlanan ikinci programda açılarak (4.22) integrallerinin sayısal değerleri (5.4) ifadelerinde yerlerine konur.

Yerdeğiştirmeleri bulmak için B_{nm} , C_{nm} , D_{nm} değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için hazırlanan ikinci programda (5.5)'de gösterildiği gibi (5.3) ifadesinin tersi, (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemlerinin sonuçlarıyla çarpılmaktadır.

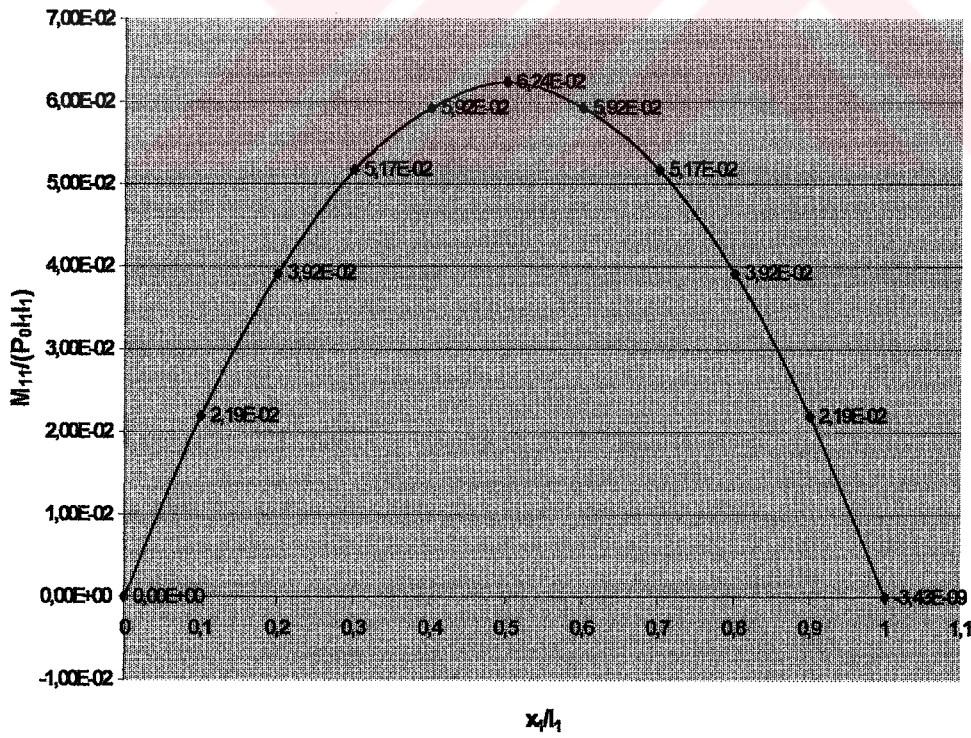
$$\begin{bmatrix} B_{nm} \\ C_{nm} \\ D_{nm} \end{bmatrix}_{3N \times 1} = \begin{bmatrix} b_{1nm} & c_{1nm} & d_{1nm} \\ b_{2nm} & c_{2nm} & d_{2nm} \\ b_{3nm} & c_{3nm} & d_{3nm} \end{bmatrix}_{3N \times 3N}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ C_M \\ 0 \end{bmatrix}_{3N \times 1} \quad (5.5)$$

Bulunan B_{nm} , C_{nm} , D_{nm} değerleri (4.1) fonksiyonlarında yerlerine konularak yerdeğiştirme değerleri elde edilmektedir.

Şimdi, eğrisel malzeme yapısına sahip düzgün yayılı yük etkisindeki kompozit şerit-plağın moment ve kesme kuvveti değerlerinin hazırlanan programda nasıl hesaplandığını ele alalım. (5.4) ifadelerindeki ω değerleri zorlanmış titreşim frekansı değerleridir. Bu zorlanmış titreşim frekansı değerleri, hazırlanan programların doğru sonuçlar verip vermediklerini kontrol etmek amacıyla belirli E_2/E_1 , ϵ , c , d ve δ değerleri için hesaplanmış olan yerdeğiştirmelerin sonsuz büyük olduğu ω_* frekanslarından çok küçük alınmıştır. Örnek olarak $E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.3$, $c=0.30$, $d=0.70$ ve $\delta=0.5$ değerleri için yerdeğiştirmelerin sonsuz büyük olduğu ω_1^2 (birinci modun frekansı) değeri saptanmış (Şekil 5.1) ve düzgün yayılı yük etkisindeki şerit-plağın momentinin değerini hesaplamak için seçilen ω^2 değeri, ω_1^2 'den çok küçük alınmıştır (Şekil 5.2). B_{nm} , C_{nm} ve D_{nm} değerleri (5.5) denklemden bulunduktan sonra programda kesme kuvveti ve moment değerleri sırasıyla (3.31) ve (3.32) denklemlerinden hesaplanabilmektedir.



Şekil 5.1 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.3$, $\omega_1^2=1.1233$, $c=0.30$, $d=0.70$, $\delta=0.50$ için 1.mod diyagramı.



Şekil 5.2 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.3$, $\omega^2=0.18$, $c=0.30$, $d=0.70$, $\delta=0.50$ için moment diyagramı.

Bu çalışmada, moment ve kesme kuvveti değerleri, E_2/E_1 , ε , ϖ^2 , c , d ve δ 'nin çeşitli değerleri için elde edilmektedir. Bu değerler moment ve kesme kuvveti diyagramlarında belirtilmektedir. Yerel eğriselliğin mevcut olduğu $[c,d]$ aralığı büyütülmekte ve küçültülmektedir. Yerel eğriselliğin en büyük olduğu yer, δ ise $[c,d]$ aralığının ortasında ve farklı yerlerinde alınmaktadır.

Şimdi, ele alınan düzgün yayılı yük etkisindeki basit mesnetli şerit plağın verilmiş olan moment ve kesme kuvveti diyagramlarını inceleyelim.

$E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.20$, $c=0.20$, $d=0.70$, $\delta=0.45$ değerleri için Şekil 5.3'de moment ve Şekil 5.4'de kesme kuvveti diyagramları verilmiştir. Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'da E_2/E_1 , ϖ^2 , c , d , δ değerleri Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'deki değerlere eşit, ancak $\varepsilon=0.2$ dir. Şekil 5.3'teki moment diyagramı incelendiğinde düzgün yayılı yük etkisindeki şerit-plak sisteminin simetrik olmasına rağmen moment diyagramının simetrik olmadığı ve yerel eğriselliğin mevcut olduğu $[c,d]$ aralığında yerel eğriselliğin etkisinden dolayı bir bozukluk olduğu görülmektedir. Bu bozukluk $\varepsilon=0.2$ olduğu Şekil 5.5'te azalmaktadır. Şekil 5.4'deki kesme kuvveti diyagramının ise anti-simetrik olması gerekirken yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralıkta bir bozukluk olduğu görülmektedir. Şekil 5.4 ve Şekil 5.6'daki kesme kuvveti diyagramlarının karşılaştırılmasından ε parametresinin değerinin azalmasıyla yerel eğriselliğin $[c,d]$ aralığındaki etkisinin de azaldığı görülmektedir.

Yerel eğriselliğin mevcut olduğu $[c,d]$ aralığında eğriselliğin genliği olan ε parametresinin değerinin azalmasıyla şerit-plağın moment ve kesme kuvveti diyagramlarında oluşan bozukluğun azaldığı Şekil 5.7 ve Şekil 5.9'daki moment diyagramları ile Şekil 5.8 ve Şekil 5.10'daki kesme kuvveti diyagramlarının karşılaştırılmasında da görülmektedir. Şekil 5.8 ve Şekil 5.10'daki kesme kuvveti diyagramları karşılaştırıldığında ε parametresinin değerinin azalmasıyla, yerel eğriselliğin olduğu aralıkta yerel eğriselliğin etkisiyle oluşan bozukluğun azaldığı oldukça belirgindir.

$E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$ olduğu Şekil 5.11'deki moment diyagramında $[0.30,0.90]$ aralığında oluşan bozukluğun, $E_2/E_1=20$ olduğu Şekil 5.13'deki moment diyagramında azaldığı görülmektedir. Şekil 5.12 ve Şekil 5.14'deki kesme kuvveti diyagramlarının karşılaştırılmasından da E_2/E_1 oranının azalmasıyla yerel eğriselliğin olduğu aralıkta oluşan bozukluğun da aynı şekilde azaldığı görülmektedir. $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\delta=0.60$ olduğu Şekil 5.15'teki moment diyagramında ε değerinin küçük olması nedeniyle $[0.30,0.90]$ aralığında yerel eğriselliğin etkisinin az olduğu ve $E_2/E_1=20$ olduğu Şekil 5.17'deki moment diyagramında yerel

eğriselliğin etkisinin değişmediği görülmektedir. $\epsilon=0.1$ olduğu Şekil 5.16 ve Şekil 5.18'deki kesme kuvveti diyagramlarının karşılaştırılmasından da aynı şekilde E_2/E_1 oranının azalmasıyla yerel eğriselliğin $[0.30,0.90]$ aralığındaki az olan etkisinin değişmediği görülmektedir.

Eğriselliğin mertebesini karakterize eden ϵ parametresinin yüksek değerlerinde ($\epsilon=0.7$) E_2/E_1 oranının değerinin azalmasıyla $[c,d]$ aralığında yerel eğriselliğin etkisiyle oluşan bozukluğun da azaldığı, Şekil 5.19 ile Şekil 5.21'deki moment diyagramlarının ve Şekil 5.20 ile Şekil 5.22'deki kesme kuvveti diyagramlarının karşılaştırılmasından görülmektedir. Ancak ϵ 'nin düşük değerlerinde ($\epsilon=0.1$) E_2/E_1 oranının değerinin azalmasıyla yerel eğriselliğin $[c,d]$ aralığındaki az olan etkisinin değişmediği Şekil 5.23 ile Şekil 5.25'deki moment diyagramlarının ve Şekil 5.24 ile Şekil 5.26'daki kesme kuvveti diyagramlarının karşılaştırılmasında görülmektedir.

$E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.7$ olduğu Şekil 5.27'deki moment diyagramında yerel eğriselliğin en büyük olduğu yer, $[0.10,0.60]$ aralığının ortasındadır (0.35). Şekil 5.29'daki moment diyagramında ise 0.15 noktasındadır. Bu iki moment diyagramının karşılaştırılmasından yerel eğriselliğin etkisiyle $[0.10,0.60]$ aralığında oluşan bozukluğun, $\delta=0.15$ olduğu Şekil 5.29'daki moment diyagramında azaldığı görülmektedir. Şekil 5.29'daki moment diyagramında 0.15 noktasında yerel eğriselliğin etkisindeki bozukluğun arttığı ve 0.60 noktasına doğru bu bozukluğun azaldığı görülmektedir. $E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.7$ olduğu Şekil 5.28'deki kesme kuvveti diyagramı ile Şekil 5.30'daki kesme kuvveti diyagramının karşılaştırılmasından $\delta=0.15$ olduğu Şekil 5.30'daki kesme kuvveti diyagramında yerel eğriselliğin $[c,d]$ aralığındaki etkisinin azaldığı görülmektedir. Şekil 5.30'daki kesme kuvveti diyagramında yerel eğriselliğin en büyük değerini aldığı 0.15'de yerel eğriselliğin etkisiyle oluşan bozukluğun arttığı ve 0.60 noktasına doğru bu bozukluğun azaldığı görülmektedir. Yerel eğriselliğin en büyük olduğu yer δ 'nin, $[c,d]$ aralığının kenarlarına yakın noktalarında olduğunda yerel eğriselliğin etkisiyle oluşan bozukluğun azaldığı $E_2/E_1=20$, $\epsilon=0.7$ olduğu Şekil 5.31 ile Şekil 5.33 moment diyagramları ve Şekil 5.32 ile Şekil 5.34 kesme kuvveti diyagramlarının karşılaştırılmasında da görülmektedir.

$\delta=0.60$, $E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.7$ olduğu Şekil 5.35'deki moment diyagramında $[0.30,0.90]$ aralığında yerel eğrisellikten dolayı oluşan bozukluğun, yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığın daraldığı ve $[0.50,0.70]$ olduğu Şekil 5.37'deki moment diyagramında arttığı görülmektedir. $\delta=0.60$, $E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.1$ olduğu Şekil 5.36'daki moment diyagramında

[0.30,0.90] aralığında yerel eğriselliğin etkisi görülmemektedir ve bu durum yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığın daraldığı ve [0.50,0.70] olduğu Şekil 5.38'deki moment diyagramında da değişmemektedir.

ε parametresinin yüksek değerlerinde ($\varepsilon=0.7$) yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığın daralmasıyla, bu aralıkta yerel eğriselliğin etkisiyle oluşan bozukluğun arttığı Şekil 5.39 ile Şekil 5.41'deki moment diyagramlarının karşılaştırılmasında görülmektedir. ε parametresinin düşük değerlerinde (0.1) yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralıkta yerel eğriselliğin etkisinin olmadığı ve yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığın daralmasıyla bu durumun değişmediği Şekil 5.40 ile Şekil 5.42'deki moment diyagramlarının karşılaştırılmasında görülmektedir.

$\delta=0.20$, $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $c=0.10$, $d=0.80$ değerleri için Şekil 5.43 ve Şekil 5.44'de sırasıyla moment ve kesme kuvveti diyagramları verilmiştir. Şekil 5.45 ve Şekil 5.46'da $\delta=0.45$ olup E_2/E_1 , ε , c , d değerleri Şekil 5.43 ve Şekil 5.44'deki değerlere eşittir. Şekil 5.44'deki kesme kuvveti diyagramında yerel eğriselliğin en büyük olduğu yer, yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığın kenarına yakın bir nokta olan 0.20'de olduğunda [0.10,0.80] aralığında yerel eğrisellikten dolayı oluşan bozukluğun 0.20 noktasında arttığı görülmektedir. Kompozit plaklarda kayma gerilmeleri ihmal edilemediğinden ve kesme kuvvetleri mesnetlerde daha büyük değerler aldığından, yerel eğriselliğin en büyük olduğu yer mesnetlere yakın olduğunda yerel eğriselliğin kesme kuvveti diyagramlarındaki etkisinin daha büyük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Şekil 5.44'deki kesme kuvveti diyagramında yerel eğriselliğin en büyük olduğu yerin 0.20 noktasında olmasının, bu noktaya yakın olan mesnetteki kesme kuvvetini arttırdığı görülmektedir. $\delta=0.45$ olduğu Şekil 5.46'daki kesme kuvveti diyagramında, iki mesnetteki kesme kuvveti değerleri arasındaki farkın ve [0.10,0.80] aralığında yerel eğriselliğin etkisiyle oluşan bozukluğun azaldığı görülmektedir. Şekil 5.43 ve Şekil 5.45'deki moment diyagramlarının karşılaştırılmasından $\delta=0.45$ olduğu Şekil 5.45'de yerel eğriselliğin etkisiyle oluşan bozukluğun azaldığı görülmektedir.

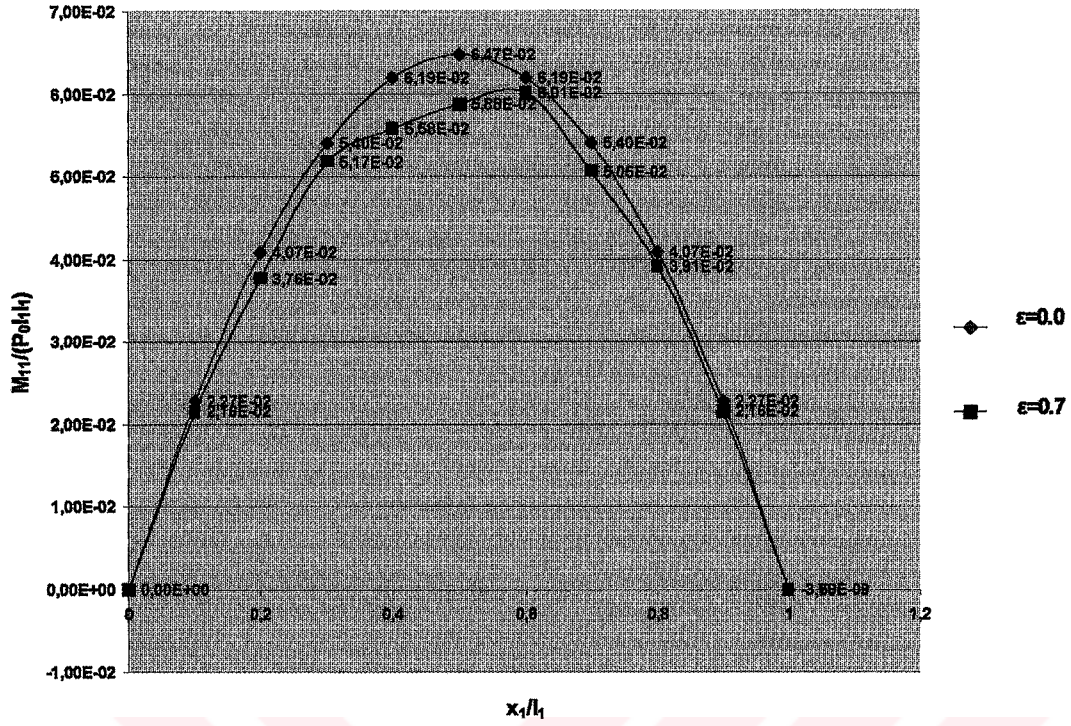
Sonuç olarak;

- a) Eğrisel malzeme yapısına sahip basit mesnetli kompozit şerit-plağın moment ve kesme kuvveti diyagramlarında, ε parametresinin yüksek değerlerinde ($\varepsilon=0.7$) yerel eğriselliğin mevcut olduğu [c,d] aralığında yerel eğriselliğin etkisiyle oluşan bozukluk, ε parametresinin düşük değerlerinde ($\varepsilon=0.1$) azalmaktadır.
- b) ε parametresinin yüksek değerlerinde, E_2/E_1 oranının artmasıyla, yerel eğriselliğin [c,d]

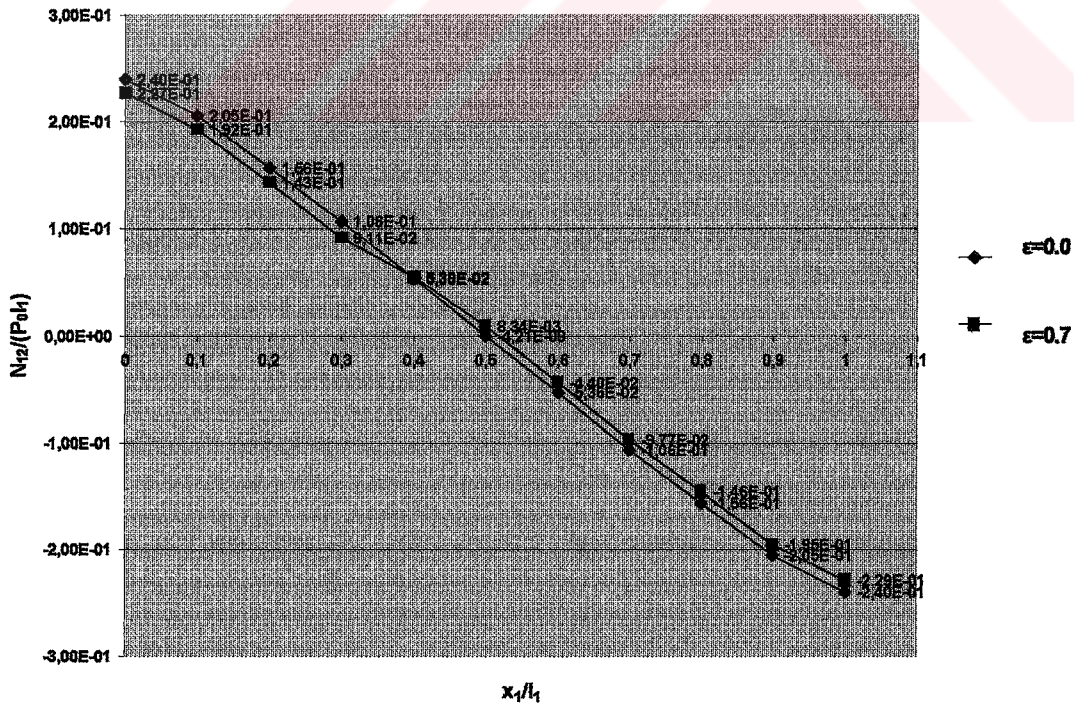
aralığındaki etkisiyle oluşan bozukluk da artmaktadır.

- c) Yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığın daralması, yerel eğriselliğin bu aralıktaki etkisini arttırmaktadır.
- d) Yerel eğriselliğin en büyük olduğu yerin $[c,d]$ aralığının kenarlarına yakın noktalarında olması yerel eğriselliğin bu noktalardaki etkisini arttırmaktadır.
- e) Kesme kuvvetleri mesnetlerde daha büyük değerler aldığından, yerel eğriselliğin en büyük olduğu yerin mesnetlere yakın olması yerel eğriselliğin etkisiyle kesme kuvveti diyagramlarında oluşan bozukluğun etkisini arttırmaktadır.

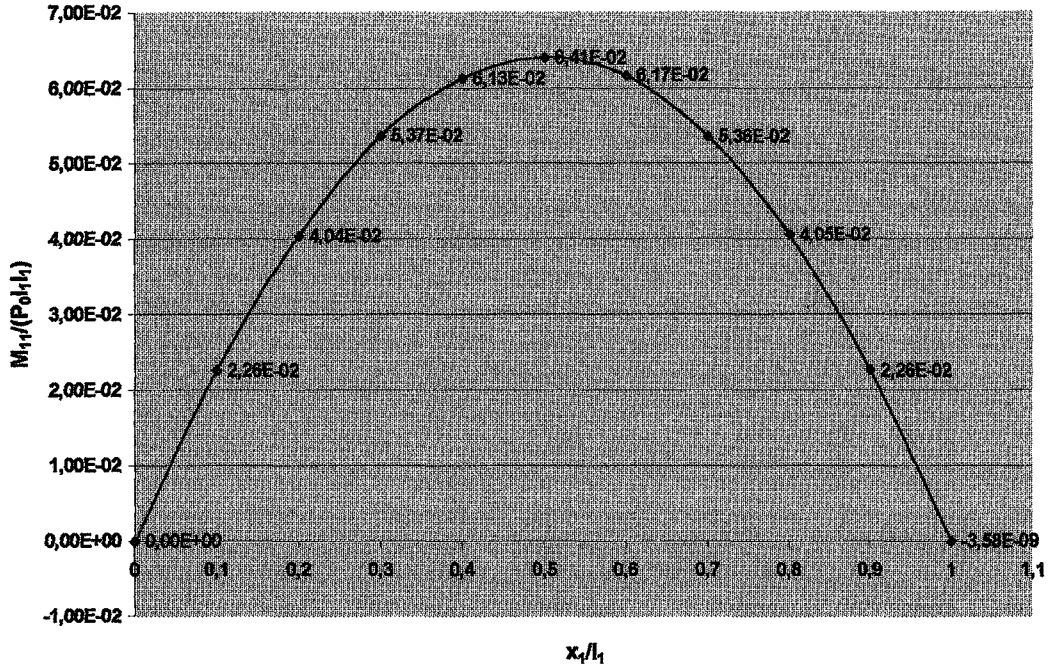




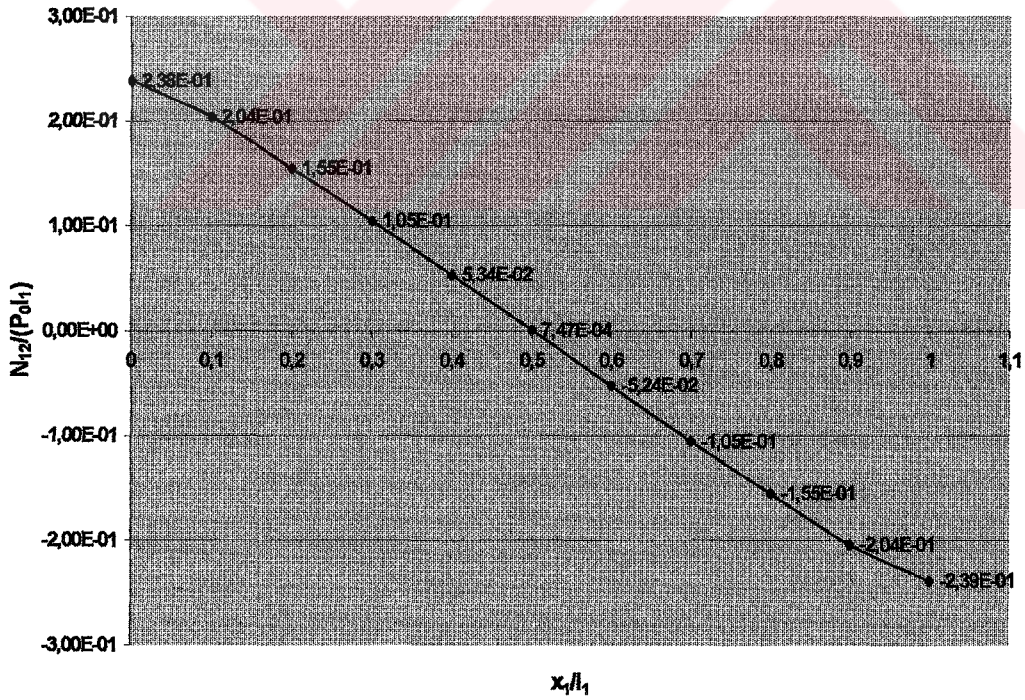
Şekil 5.3 $E_2/E_1=100$, $\varpi^2=0.20$, $c=0.20$, $d=0.70$, $\delta=0.45$, $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.7$ için moment diyagramı.



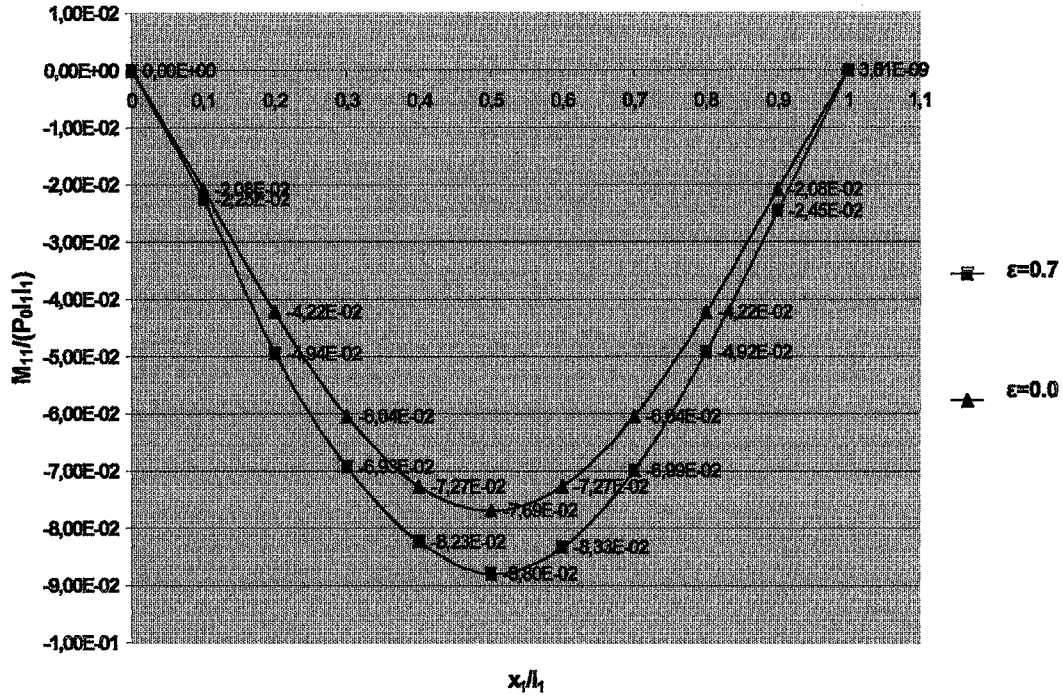
Şekil 5.4 $E_2/E_1=100$, $\varpi^2=0.20$, $c=0.20$, $d=0.70$, $\delta=0.45$, $\varepsilon=0.0$ ve $\varepsilon=0.7$ için kesme kuvveti diyagramı.



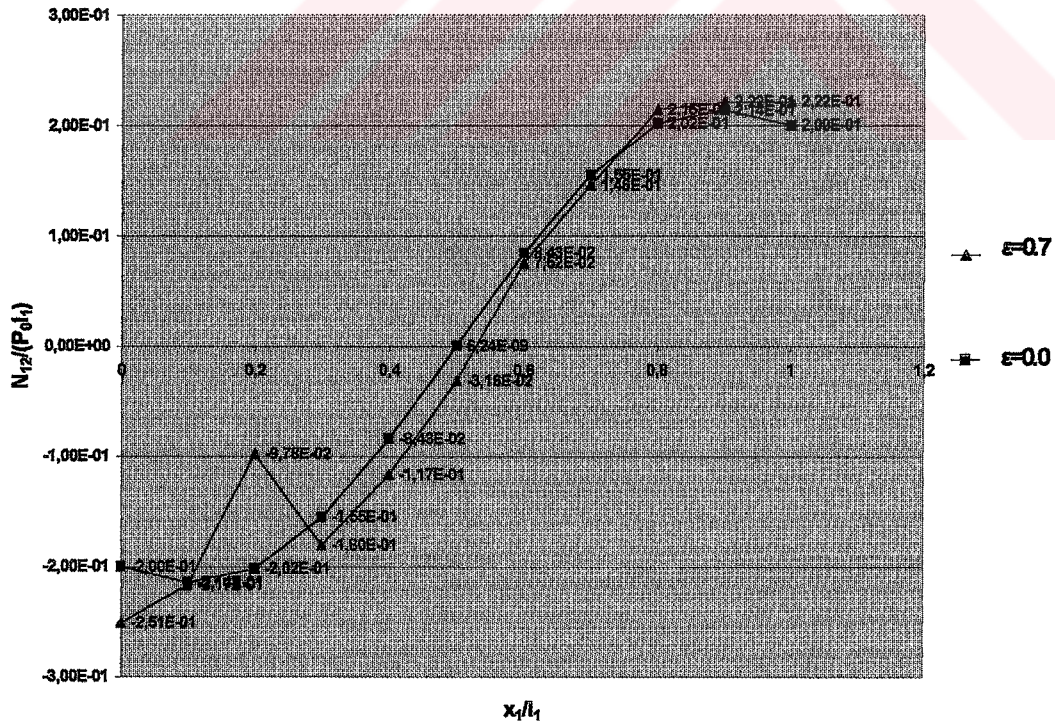
Şekil 5.5 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.2$, $\varpi^2=0.20$, $c=0.20$, $d=0.70$, $\delta=0.45$ için moment diyagramı.



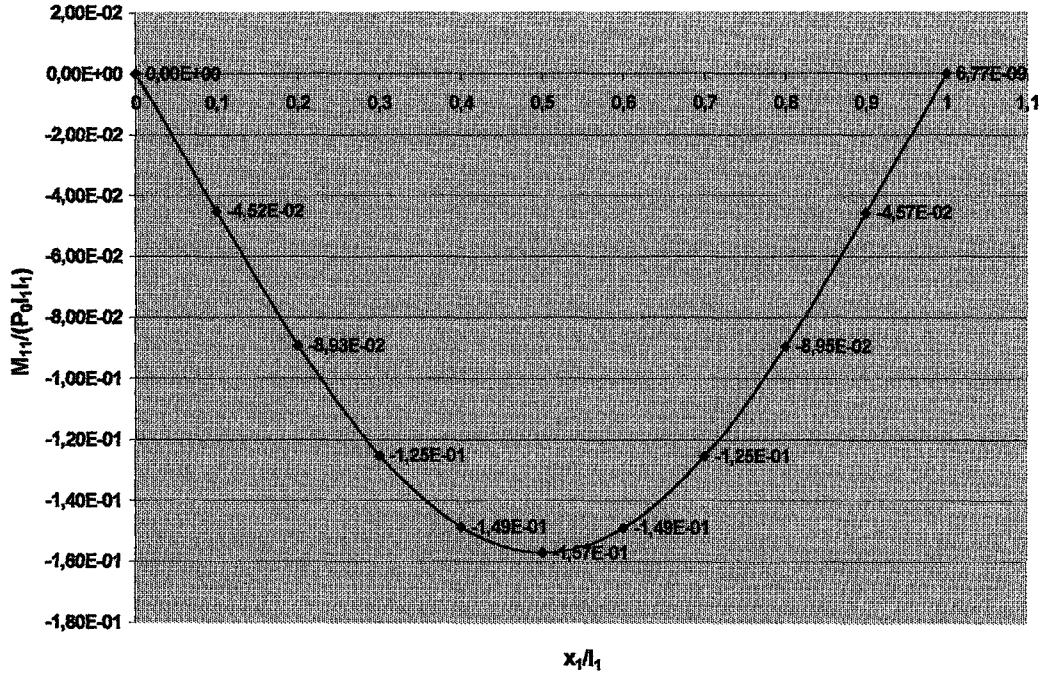
Şekil 5.6 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.2$, $\varpi^2=0.20$, $c=0.20$, $d=0.70$, $\delta=0.45$ için kesme kuvveti diyagramı.



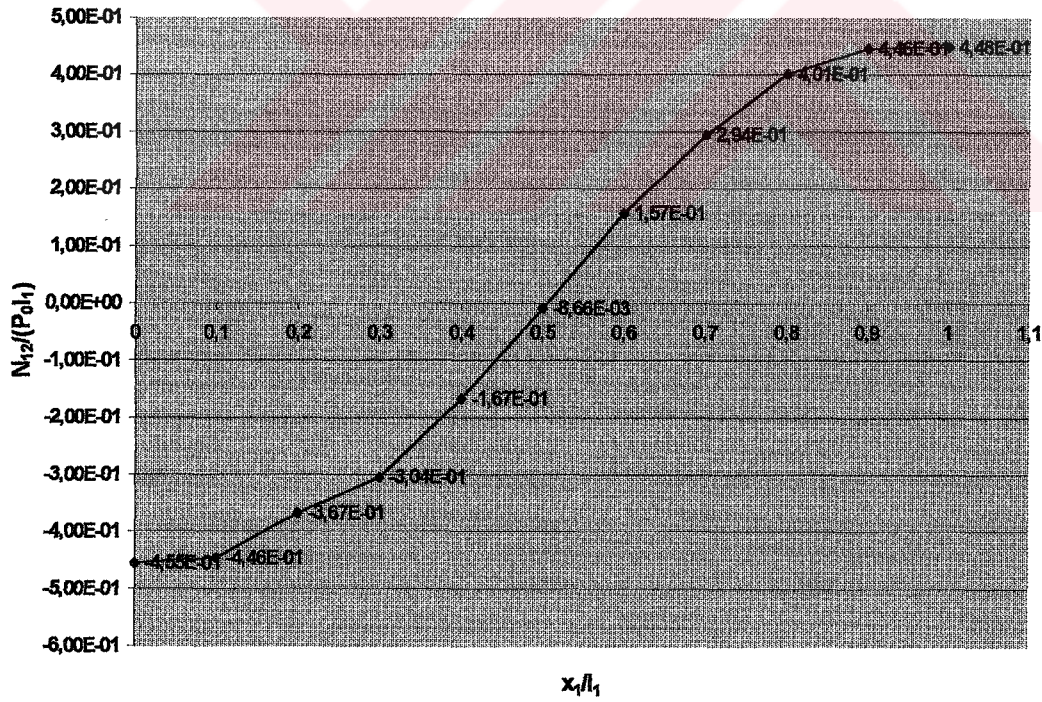
Şekil 5.7 $E_2/E_1=100$, $\varpi^2=1.90$, $c=0.10$, $d=0.30$, $\delta=0.20$, $\epsilon=0.0$ ve $\epsilon=0.7$ için moment diyagramı.



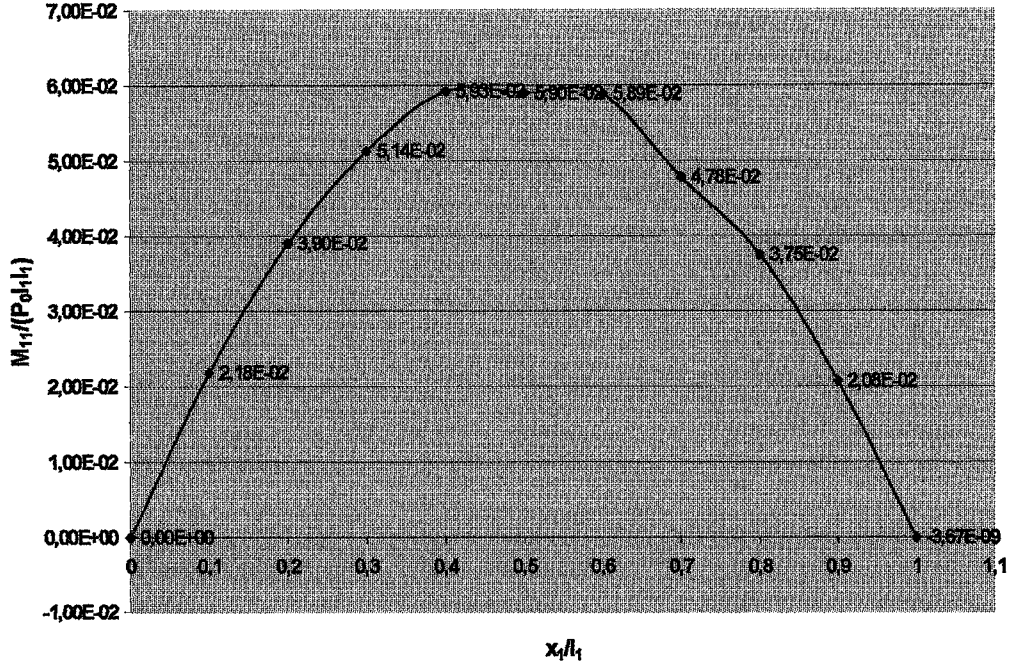
Şekil 5.8 $E_2/E_1=100$, $\varpi^2=1.90$, $c=0.10$, $d=0.30$, $\delta=0.20$, $\epsilon=0.0$ ve $\epsilon=0.7$ için kesme kuvveti diyagramı.



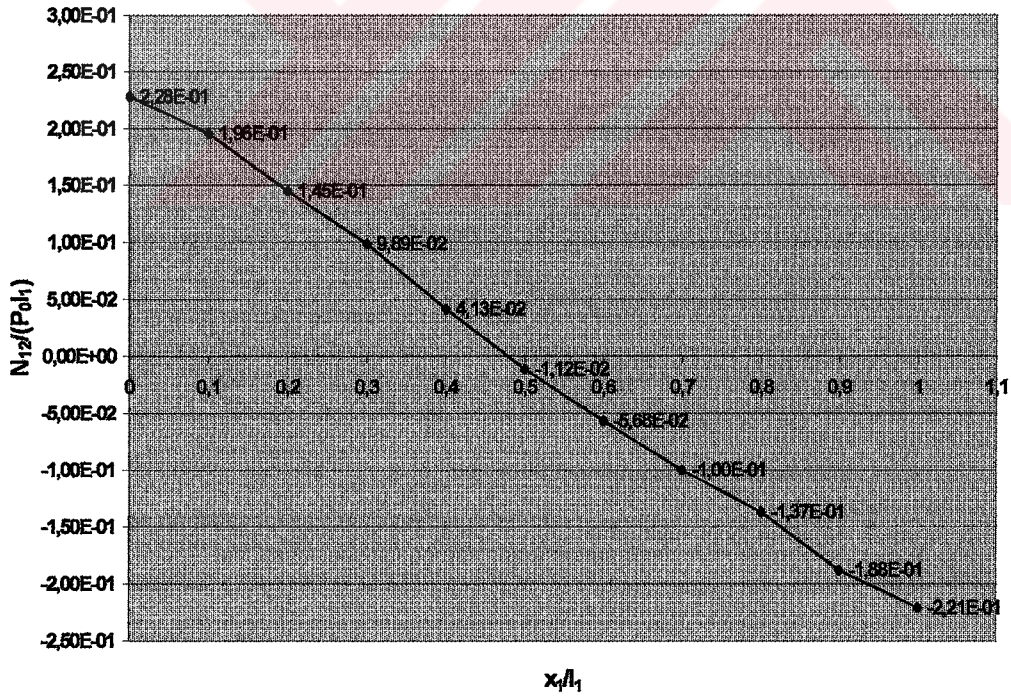
Şekil 5.9 $E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.2$, $\varpi^2=1.50$, $c=0.10$, $d=0.30$, $\delta=0.20$ için moment diyagramı.



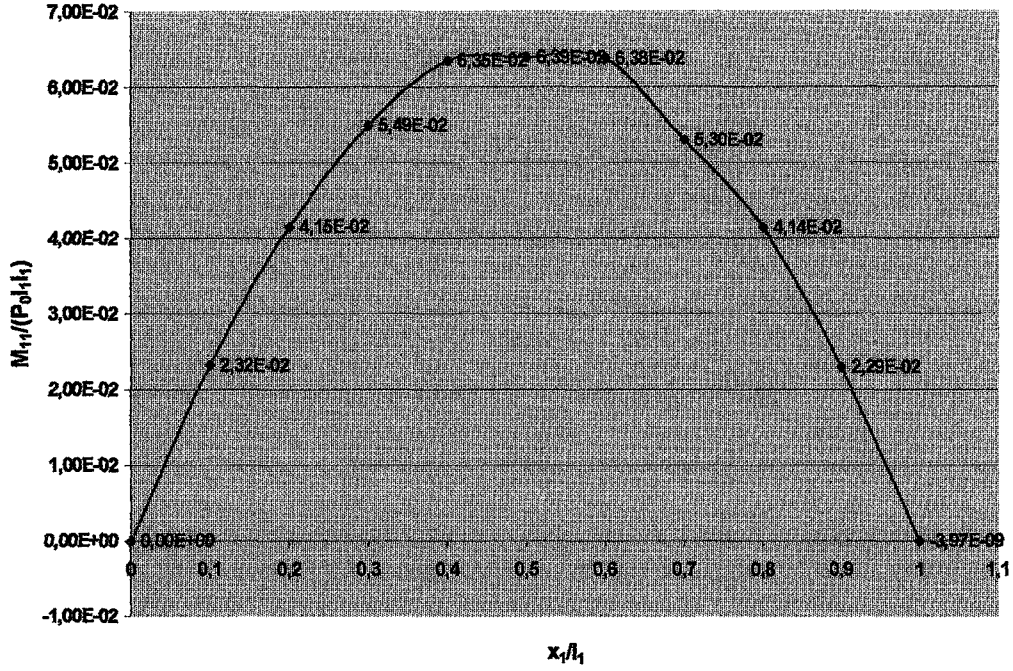
Şekil 5.10 $E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.2$, $\varpi^2=1.50$, $c=0.10$, $d=0.30$, $\delta=0.20$ için kesme kuvveti diyagramı.



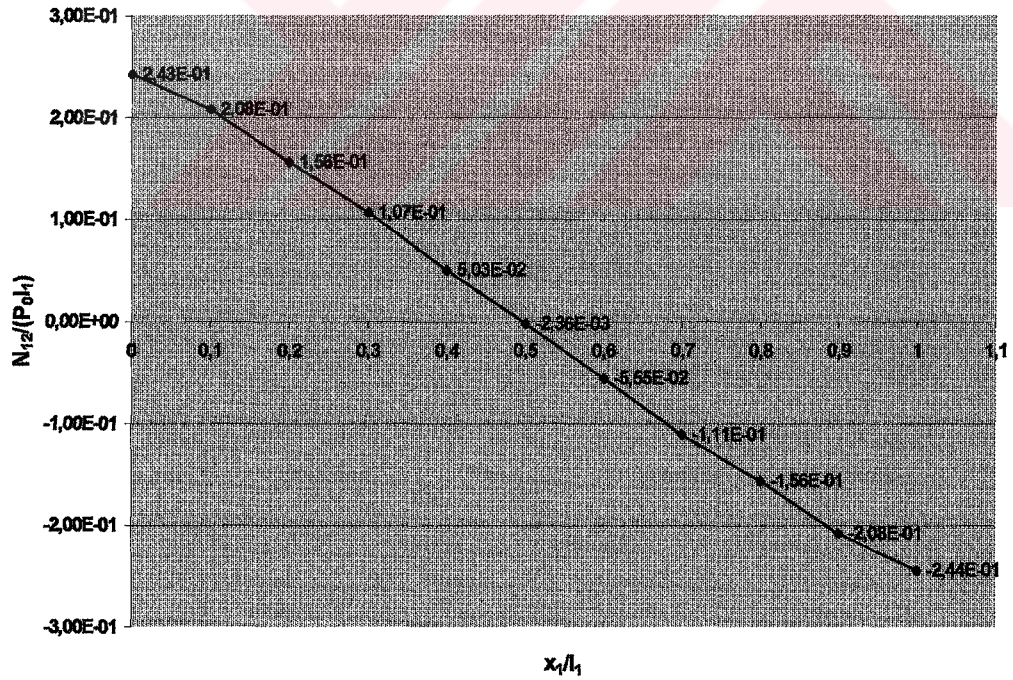
Şekil 5.11 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.20$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.



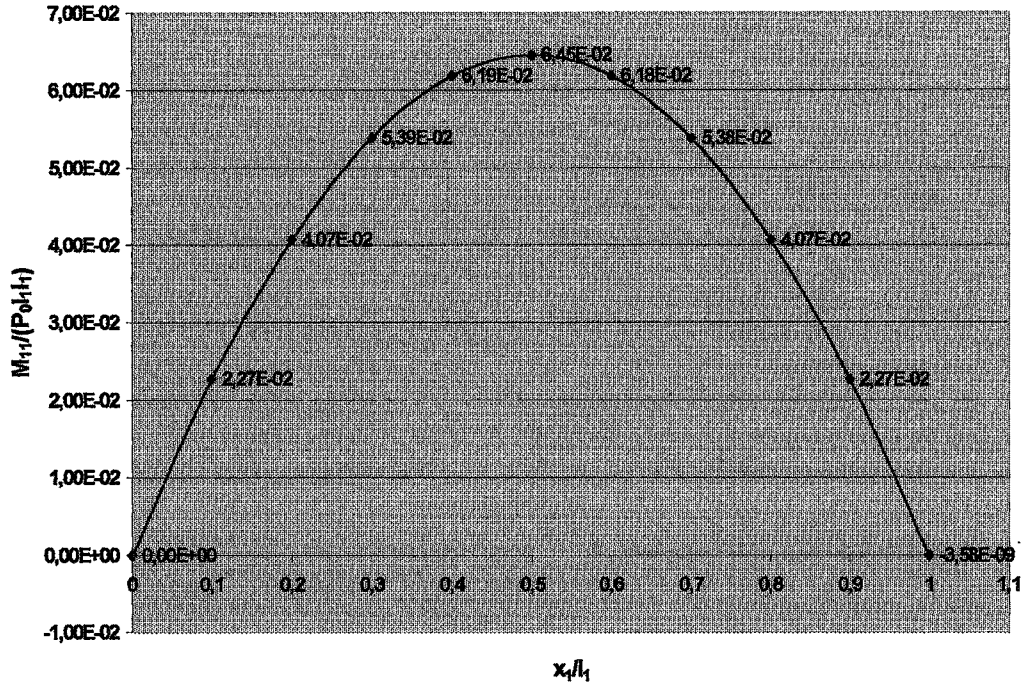
Şekil 5.12 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.20$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için kesme kuvveti diyagramı.



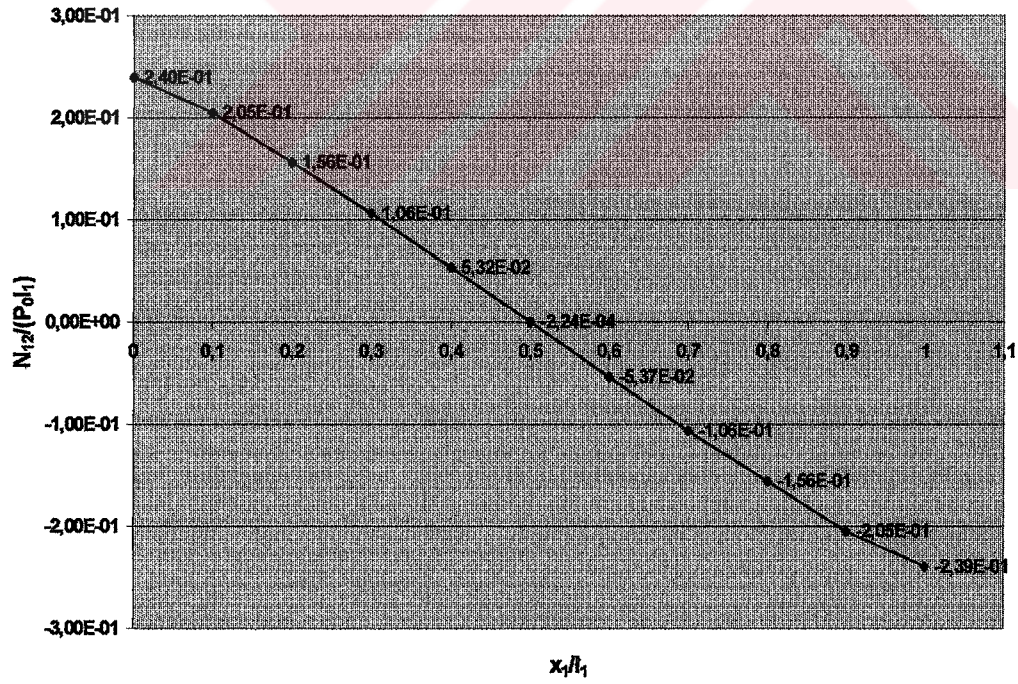
Şekil 5.13 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.06$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.



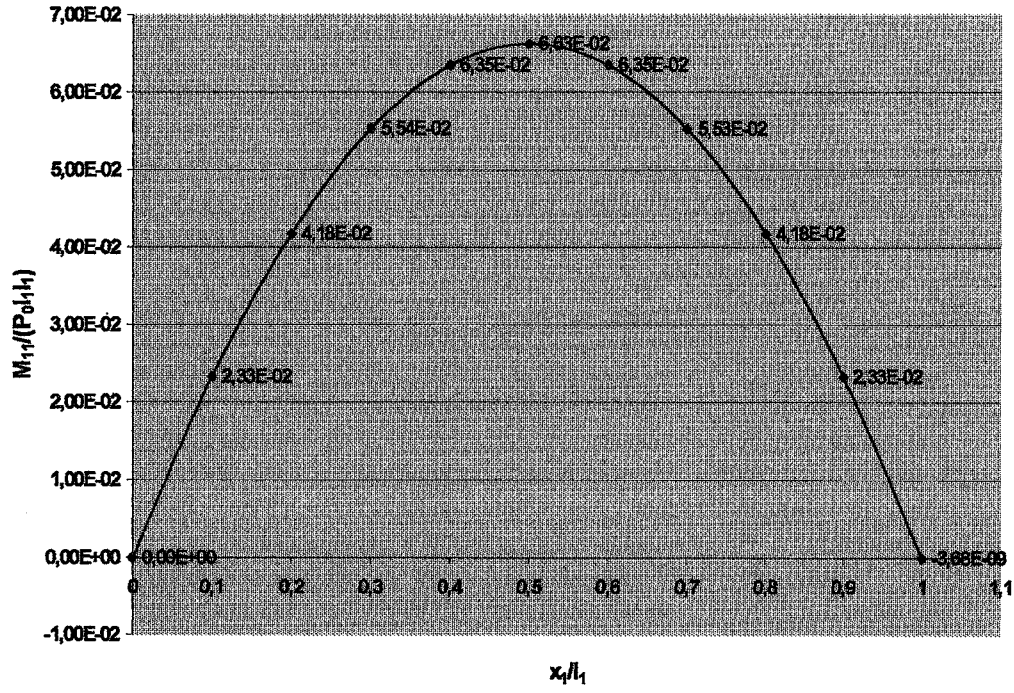
Şekil 5.14 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.06$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için kesme kuvveti diyagramı.



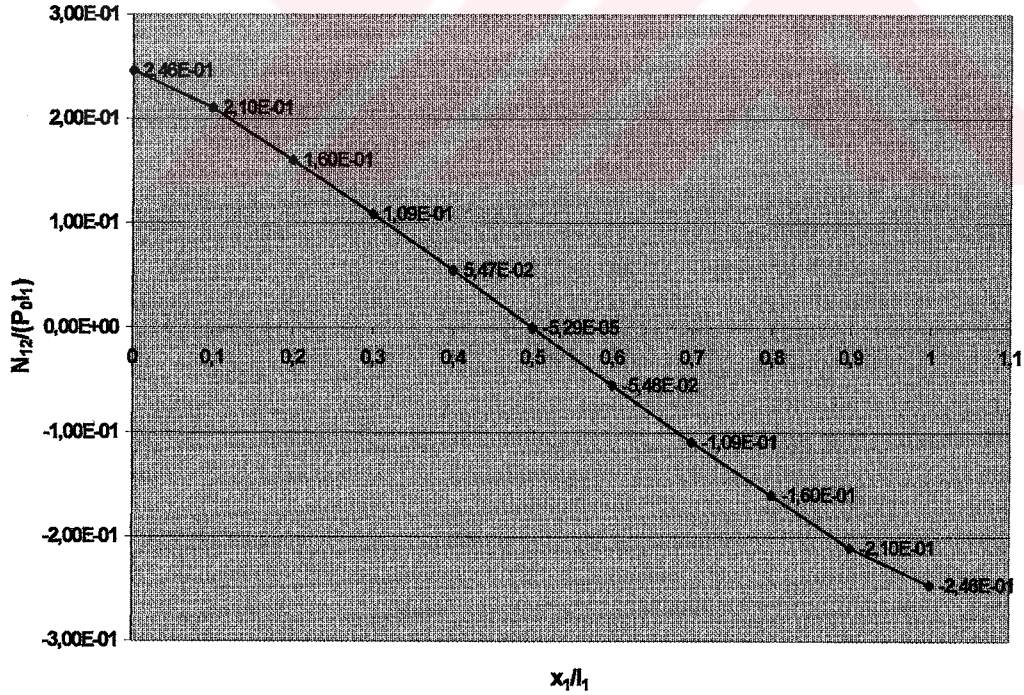
Şekil 5.15 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=0.20$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.



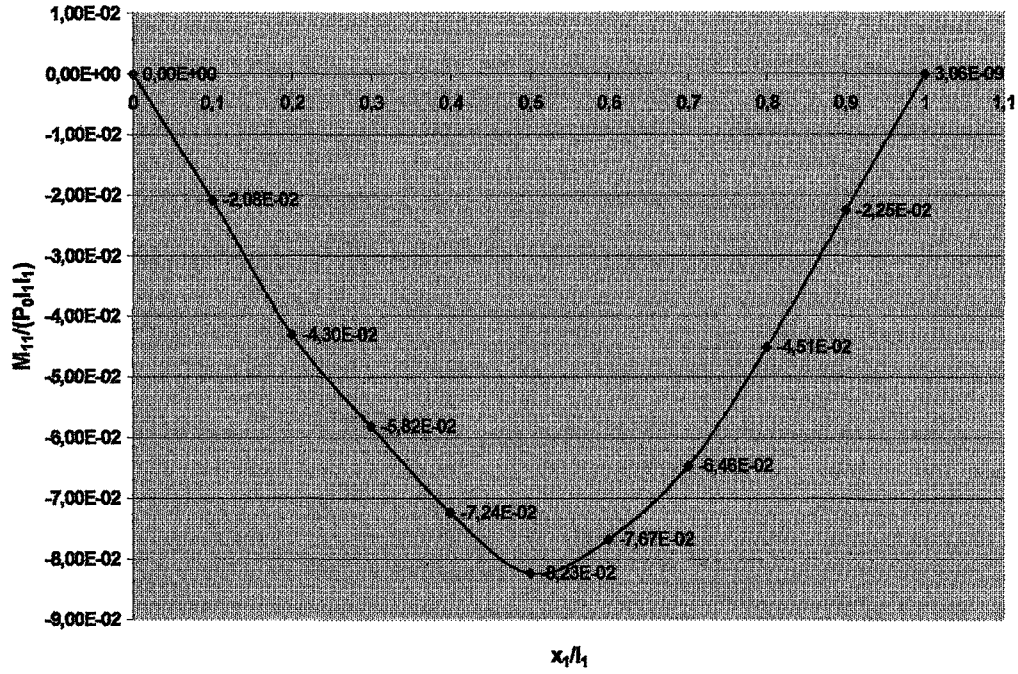
Şekil 5.16 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=0.20$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için kesme kuvveti diyagramı.



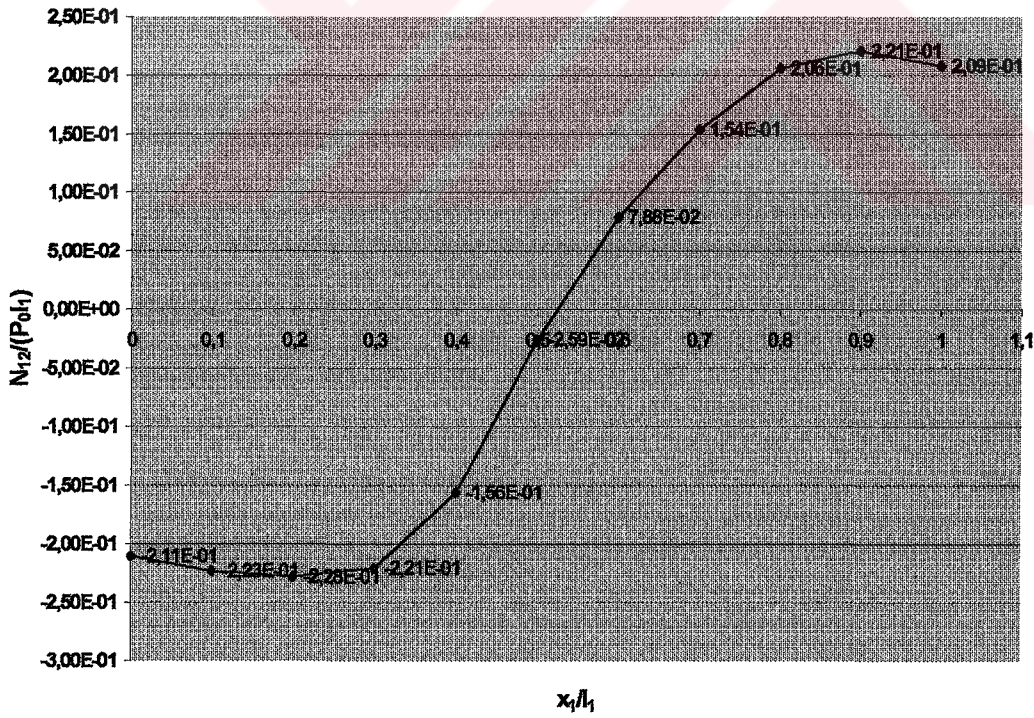
Şekil 5.17 $E_2/E_1=20$, $\epsilon=0.1$, $\varpi^2=0.06$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.



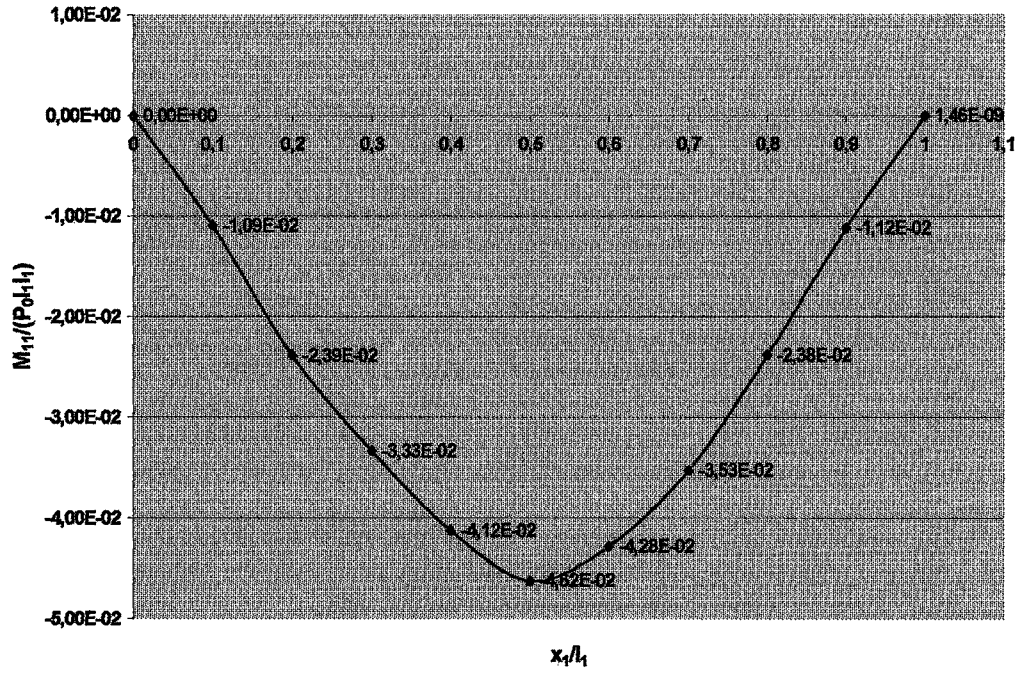
Şekil 5.18 $E_2/E_1=20$, $\epsilon=0.1$, $\varpi^2=0.06$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için kesme kuvveti diyagramı.



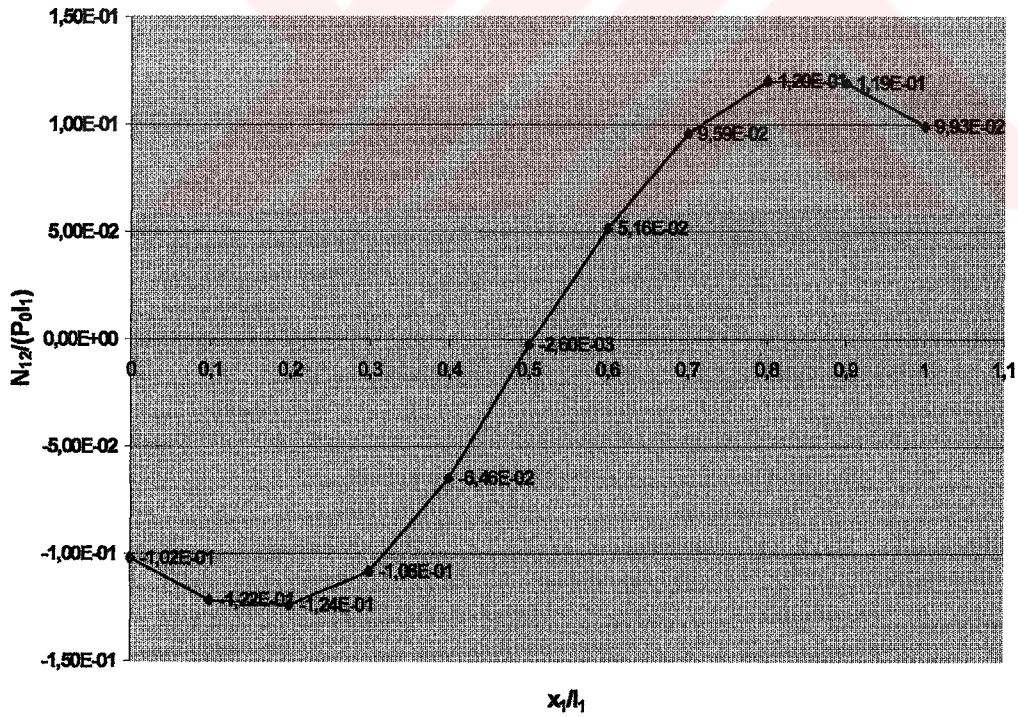
Şekil 5.19 $E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.7$, $\varpi^2=1.90$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı.



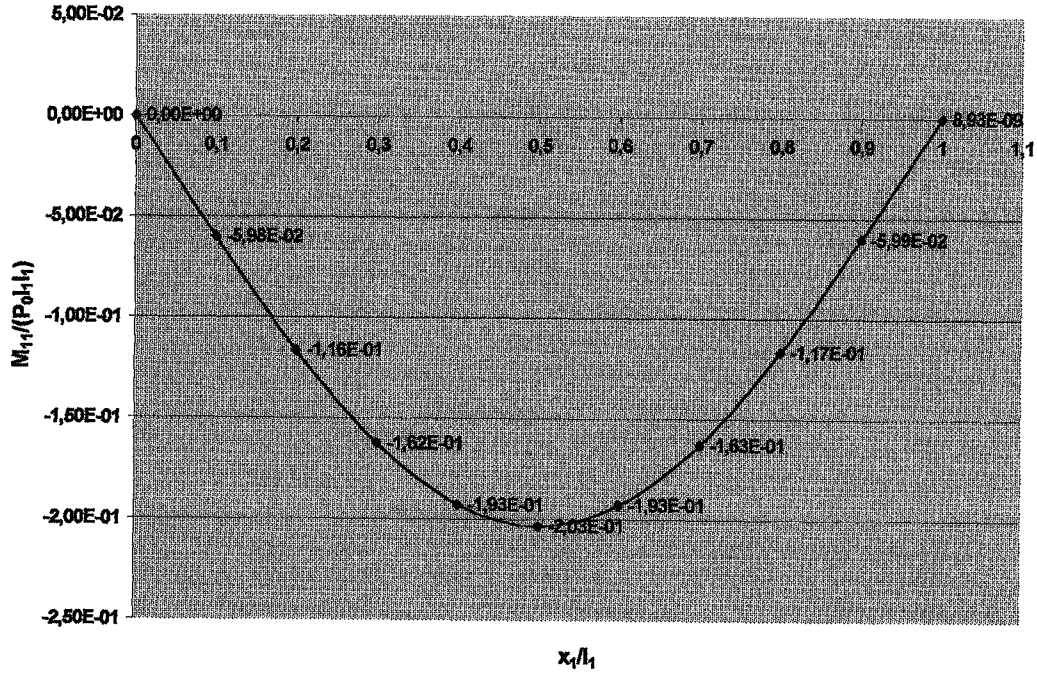
Şekil 5.20 $E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.7$, $\varpi^2=1.90$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı.



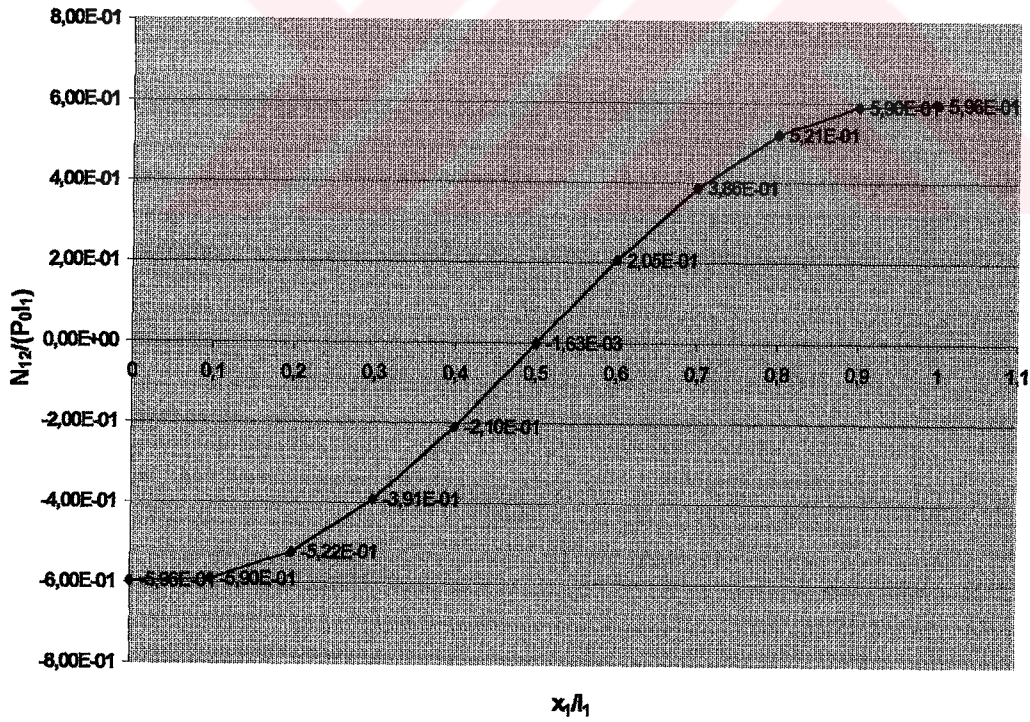
Şekil 5.21 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.80$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı.



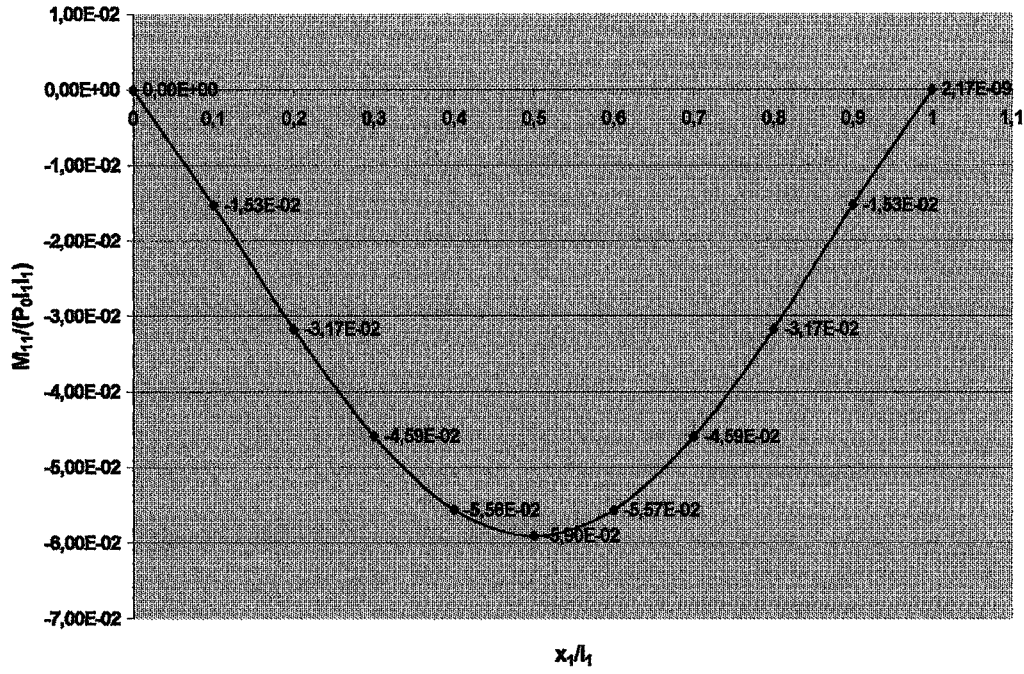
Şekil 5.22 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.80$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı.



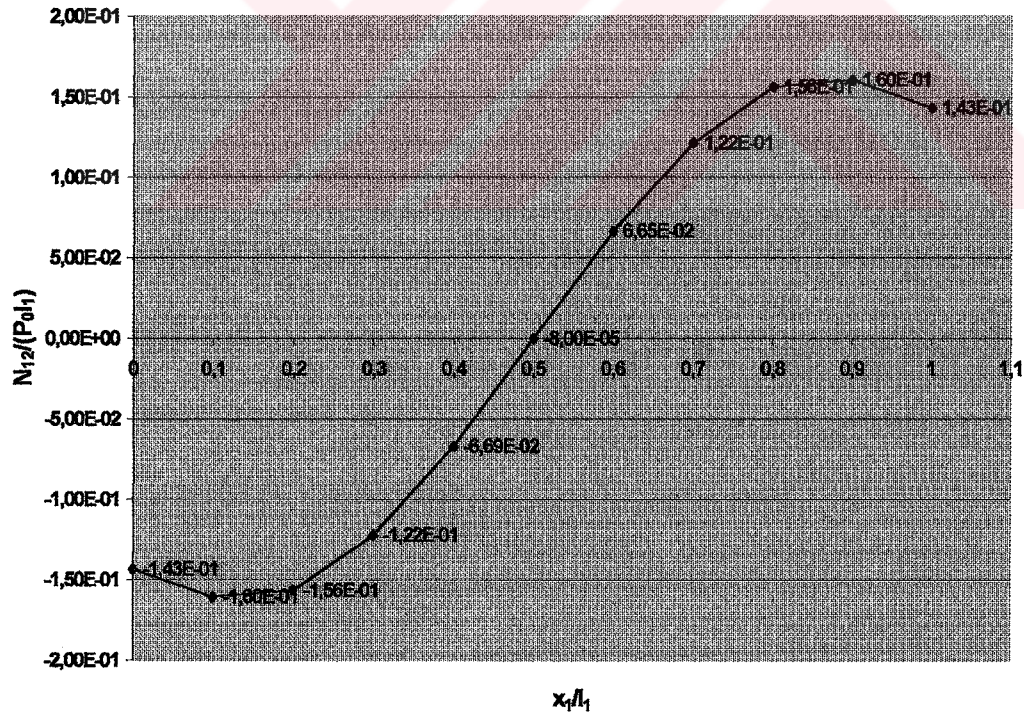
Şekil 5.23 $E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.1$, $\varpi^2=1.40$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı.



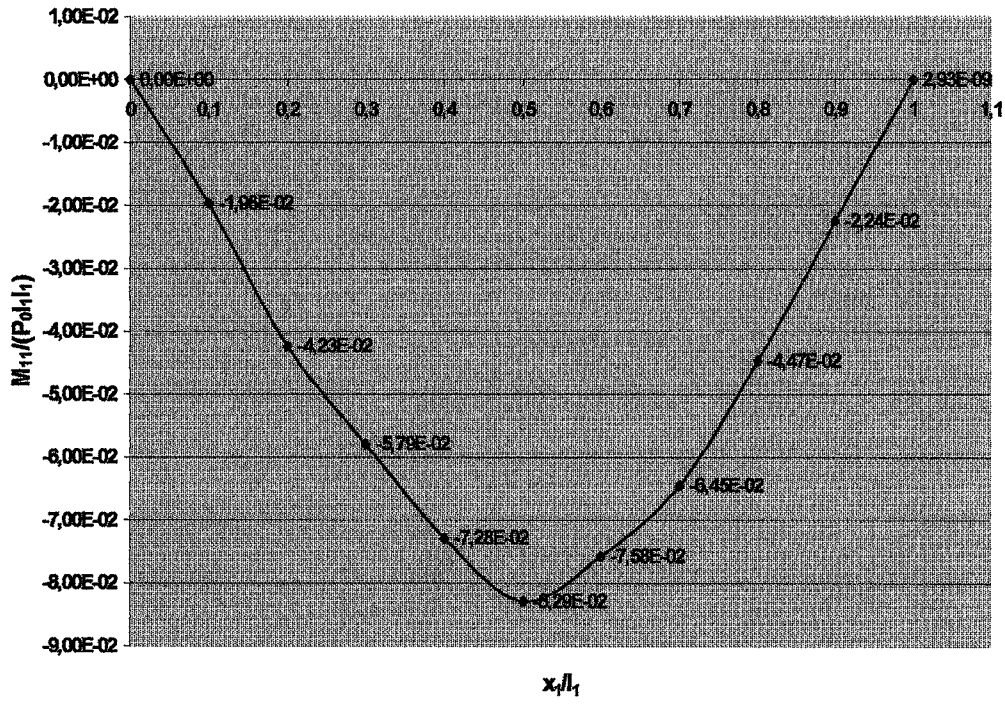
Şekil 5.24 $E_2/E_1=100$, $\epsilon=0.1$, $\varpi^2=1.40$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı.



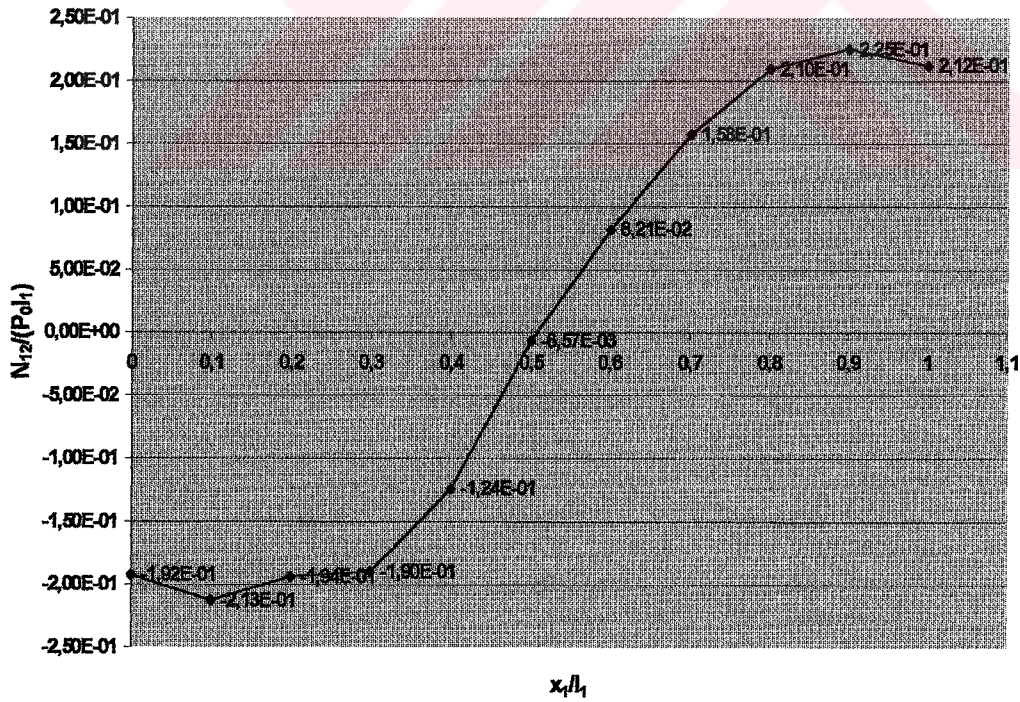
Şekil 5.25 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=0.70$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı.



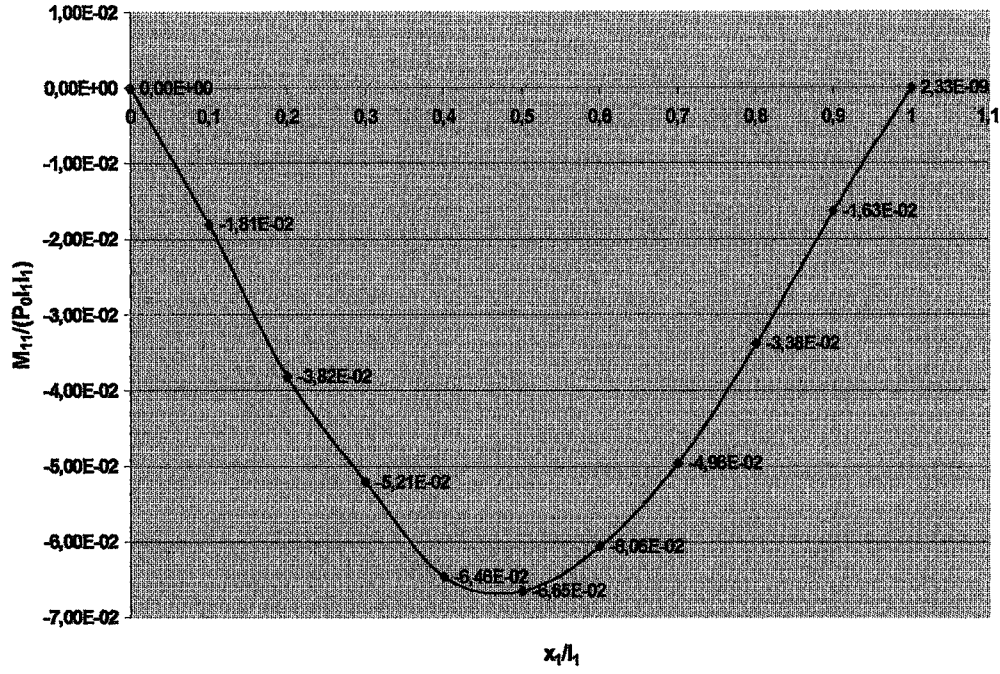
Şekil 5.26 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=0.70$, $c=0.15$, $d=0.55$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı.



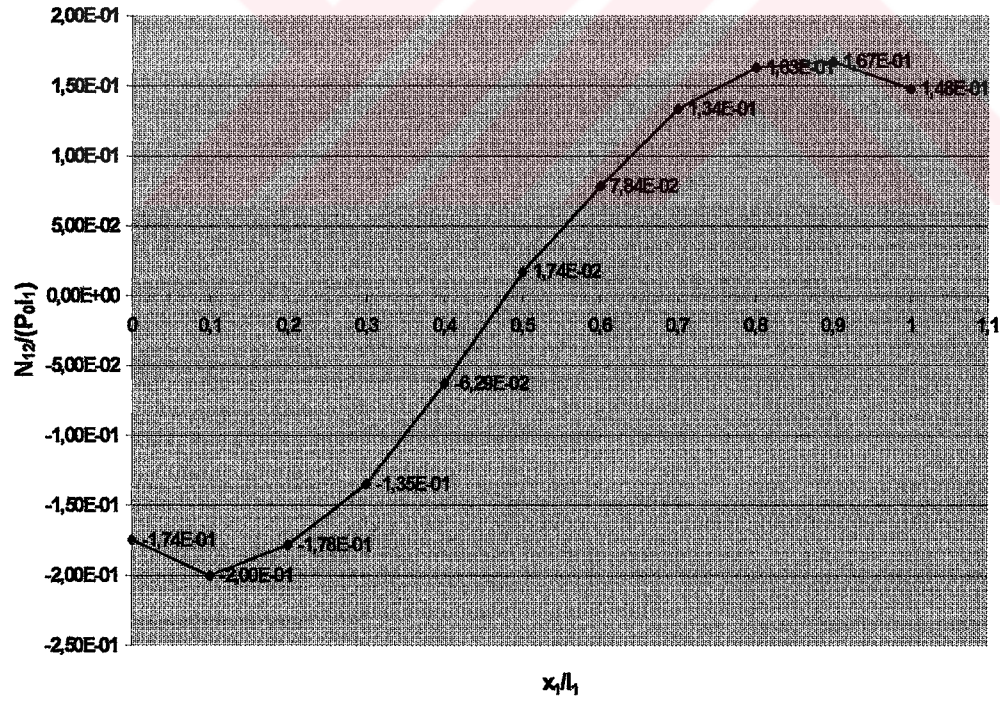
Şekil 5.27 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=1.90$, $c=0.10$, $d=0.60$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı.



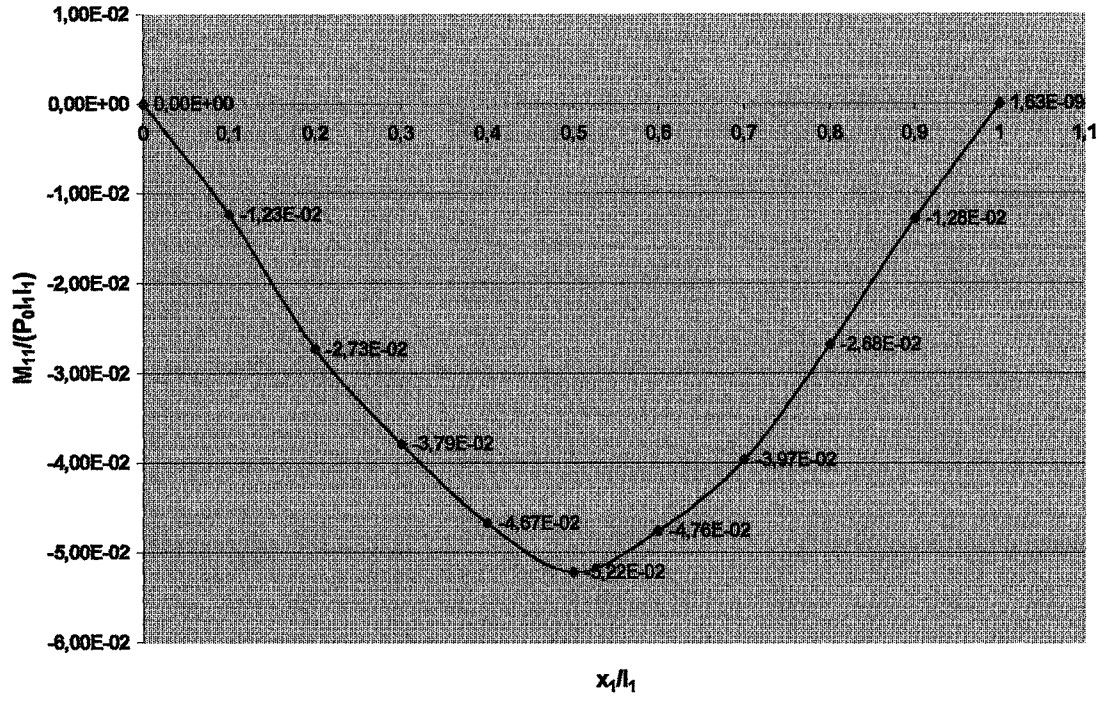
Şekil 5.28 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=1.90$, $c=0.10$, $d=0.60$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı.



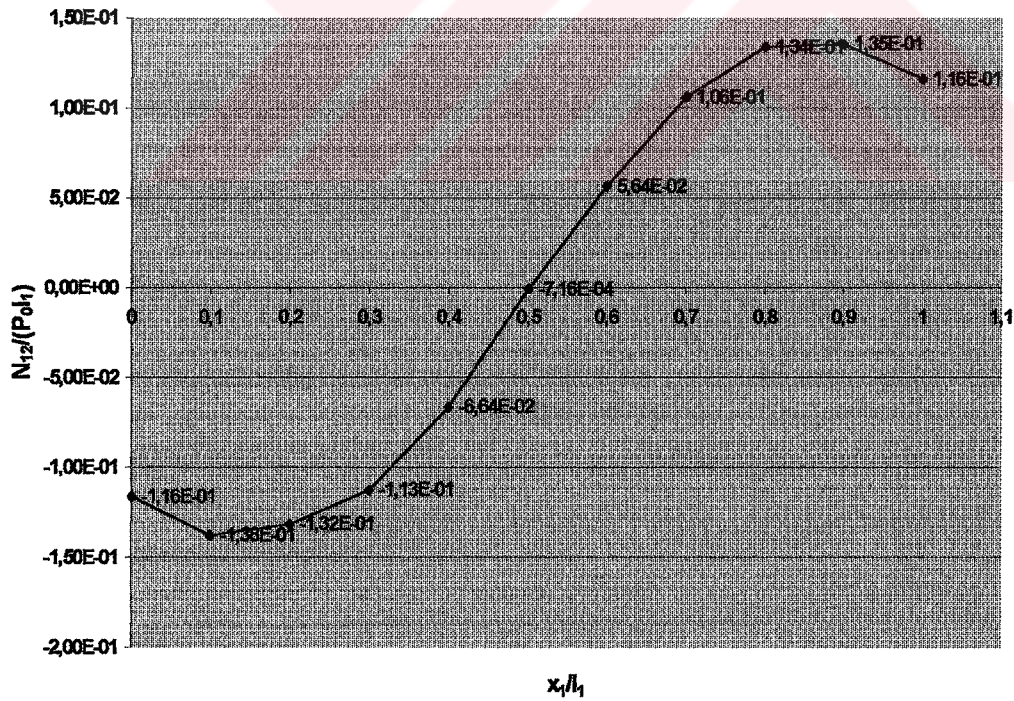
Şekil 5.29 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=1.90$, $c=0.10$, $d=0.60$, $\delta=0.15$ için moment diyagramı.



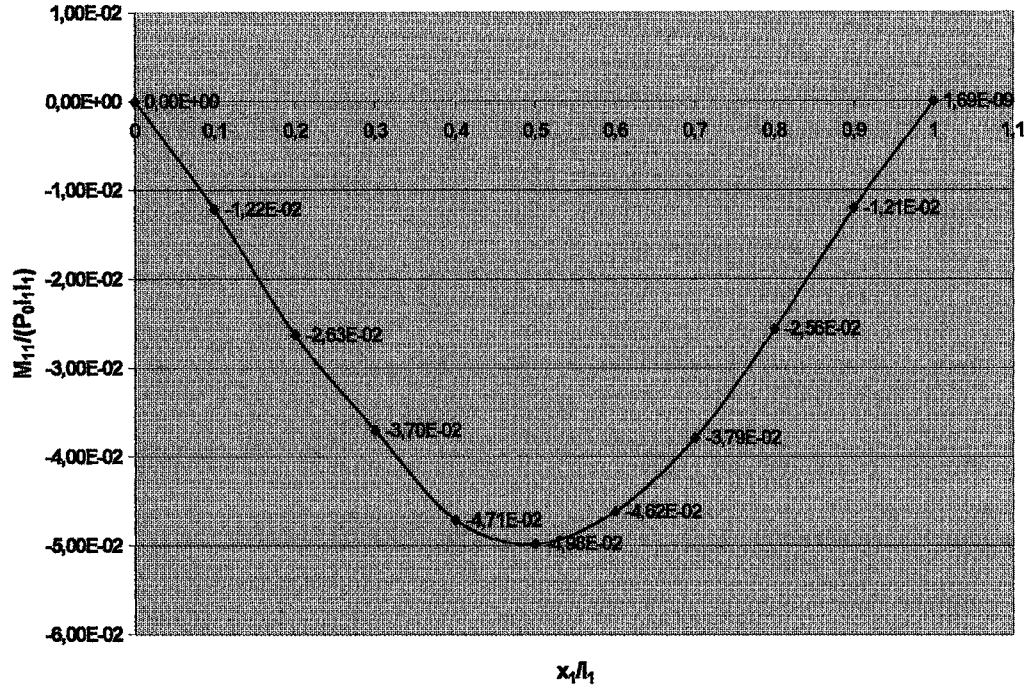
Şekil 5.30 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=1.90$, $c=0.10$, $d=0.60$, $\delta=0.15$ için kesme kuvveti diyagramı.



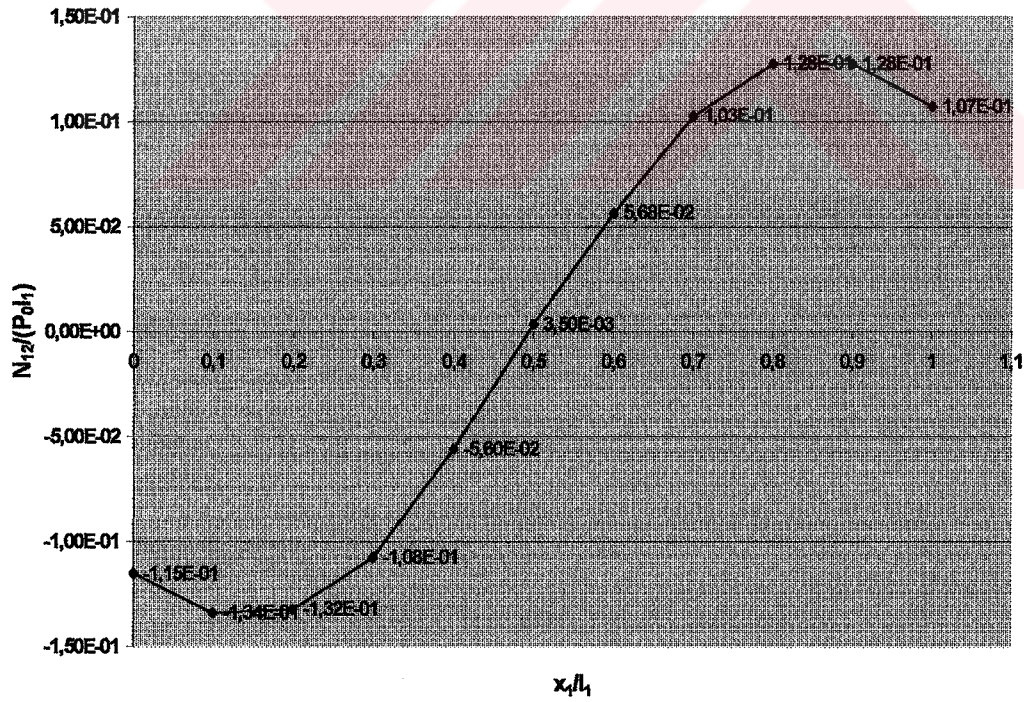
Şekil 5.31 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.10$, $d=0.60$, $\delta=0.35$ için moment diyagramı.



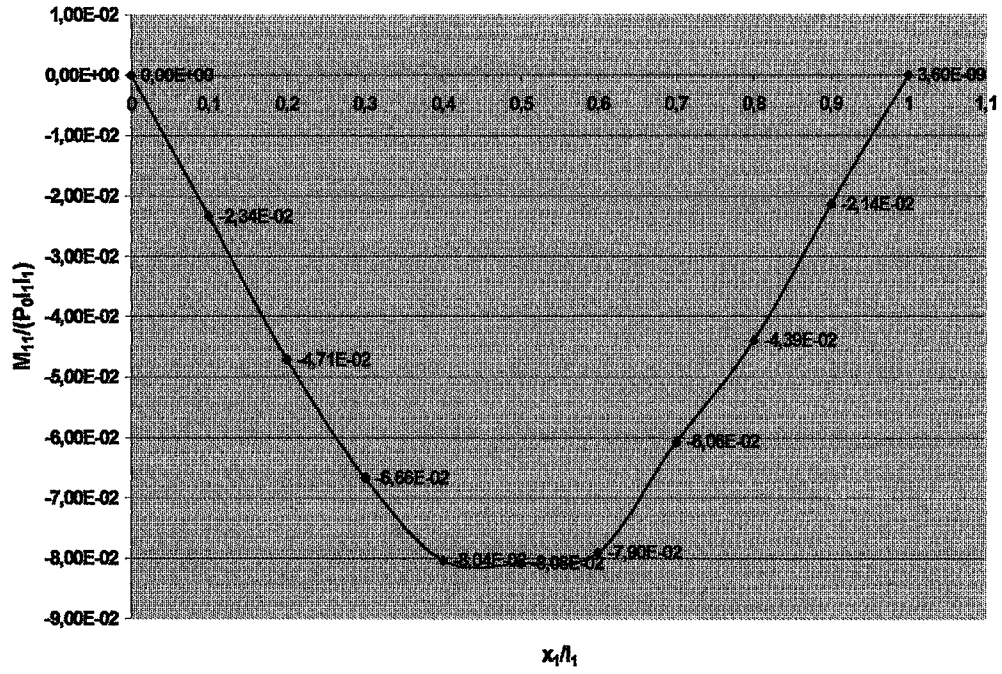
Şekil 5.32 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.10$, $d=0.60$, $\delta=0.35$ için kesme kuvveti diyagramı.



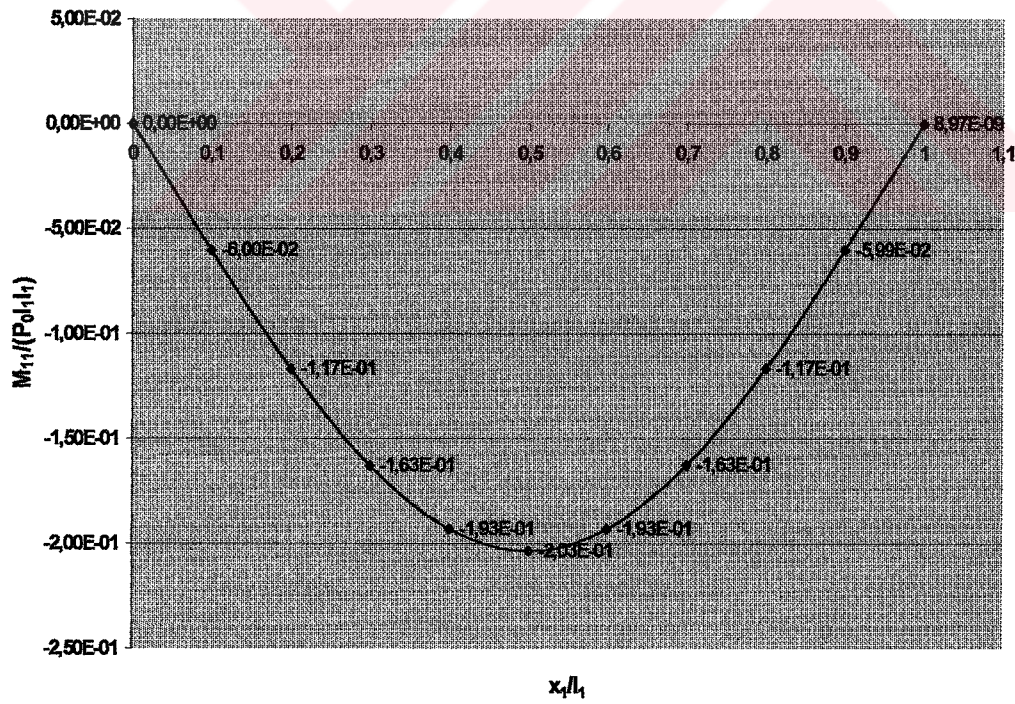
Şekil 5.33 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.10$, $d=0.60$, $\delta=0.15$ için moment diyagramı.



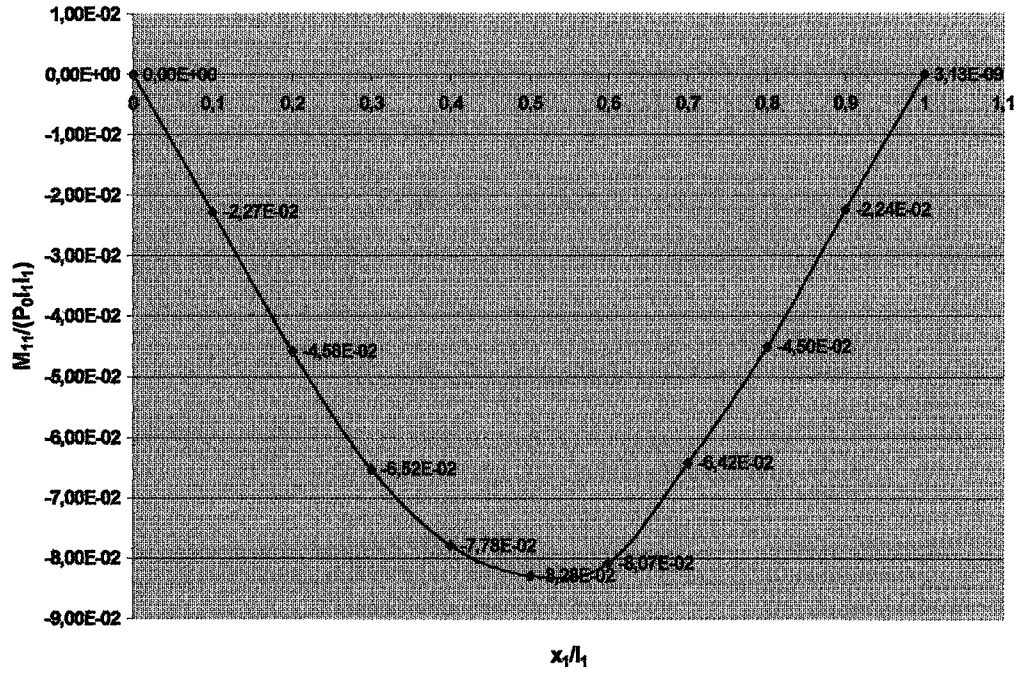
Şekil 5.34 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.10$, $d=0.60$, $\delta=0.15$ için kesme kuvveti diyagramı.



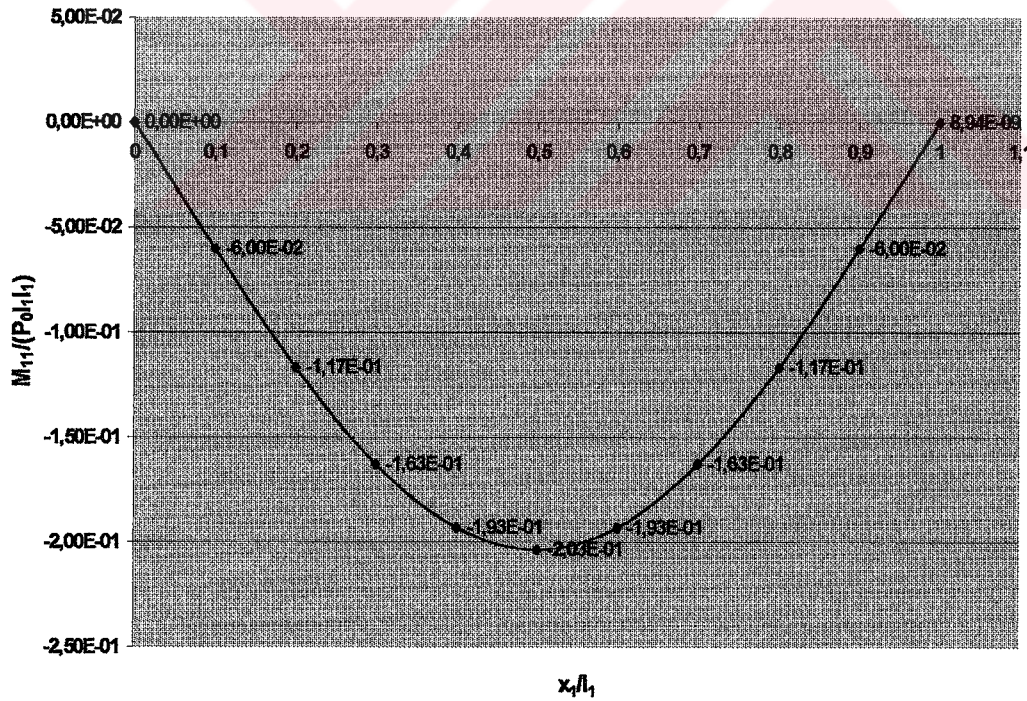
Şekil 5.35 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=1.90$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.



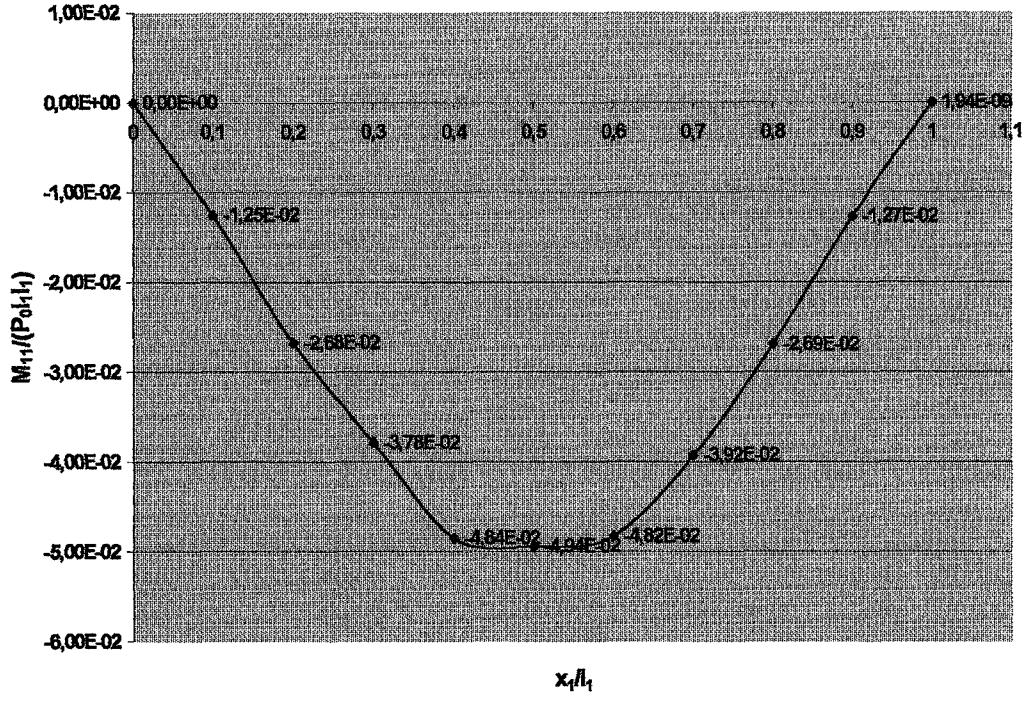
Şekil 5.36 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=1.40$, $c=0.30$, $d=0.90$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.



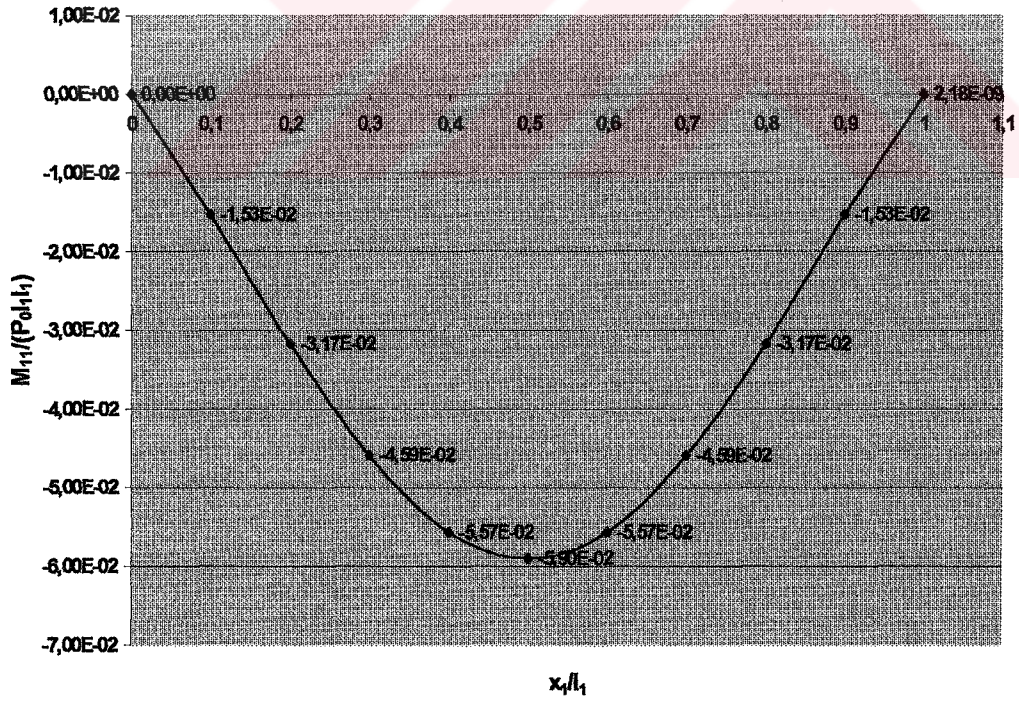
Şekil 5.37 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=1.90$, $c=0.50$, $d=0.70$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.



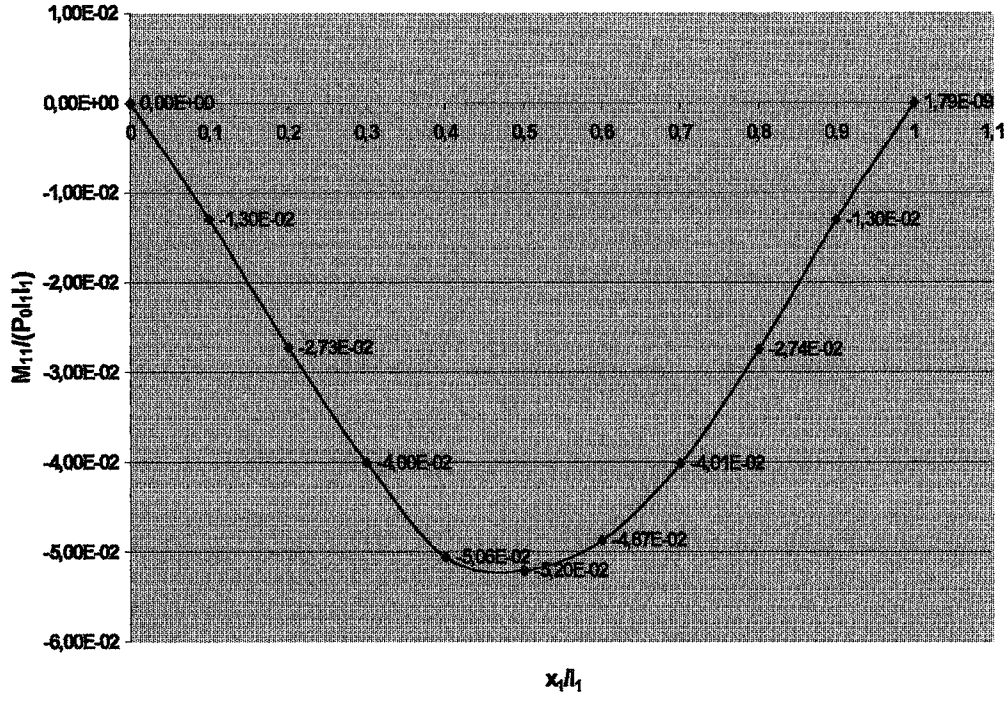
Şekil 5.38 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=1.40$, $c=0.50$, $d=0.70$, $\delta=0.60$ için moment diyagramı.



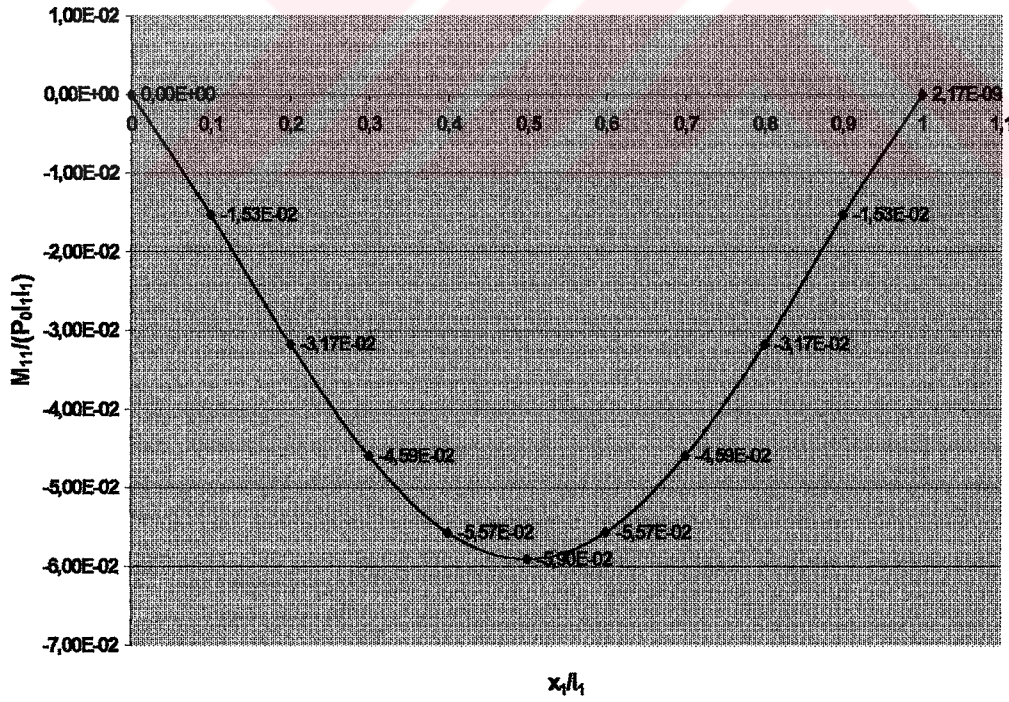
Şekil 5.39 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=0.75$, $c=0.10$, $d=0.70$, $\delta=0.40$ için moment diyagramı.



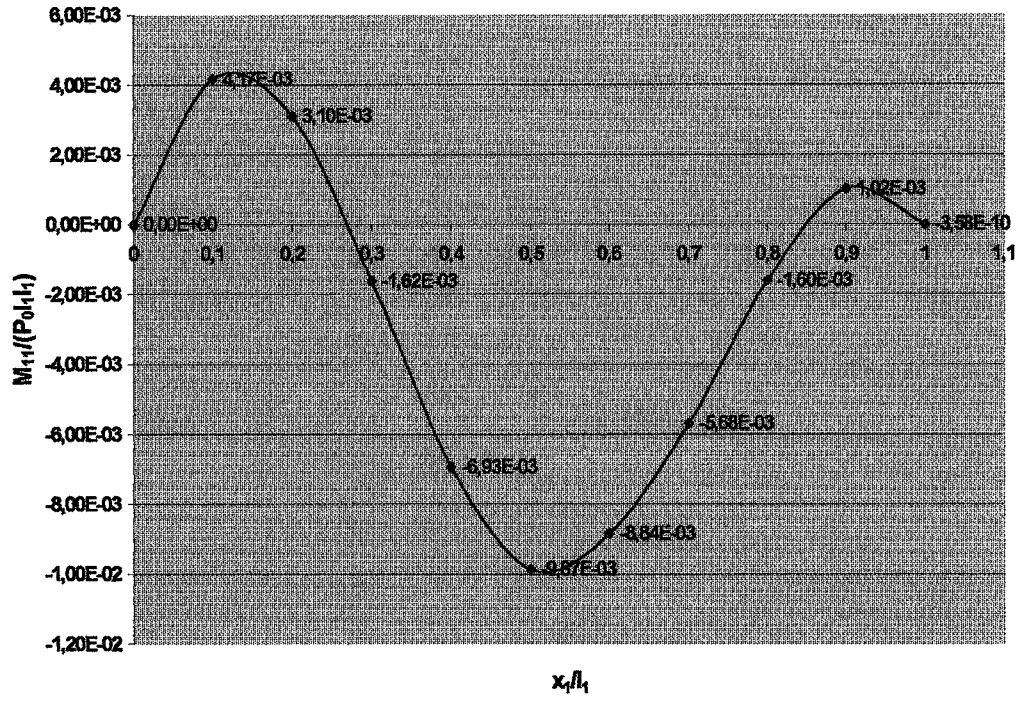
Şekil 5.40 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $\omega^2=0.70$, $c=0.10$, $d=0.70$, $\delta=0.40$ için moment diyagramı.



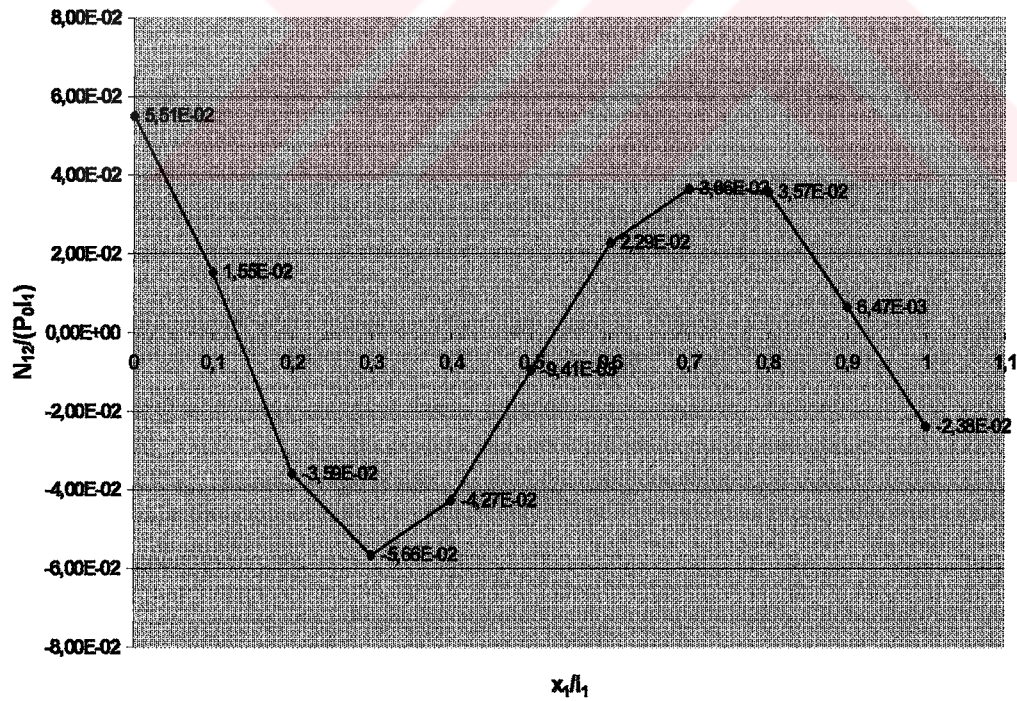
Şekil 5.41 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=0.75$, $c=0.30$, $d=0.50$, $\delta=0.40$ için moment diyagramı.



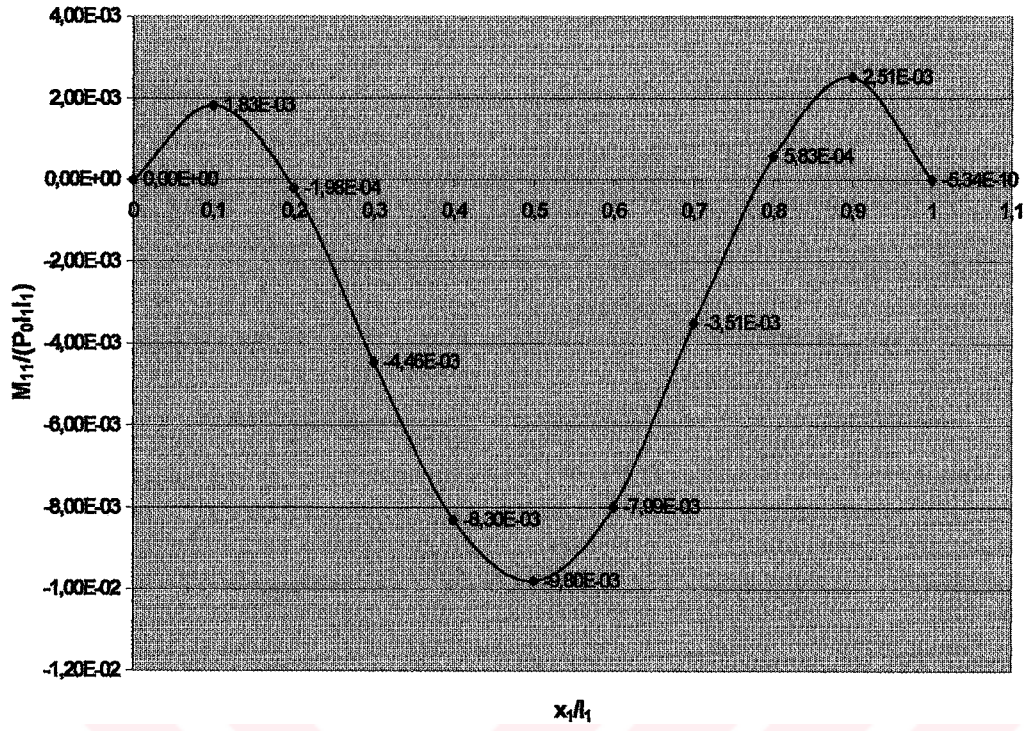
Şekil 5.42 $E_2/E_1=20$, $\varepsilon=0.1$, $\varpi^2=0.70$, $c=0.30$, $d=0.50$, $\delta=0.40$ için moment diyagramı.



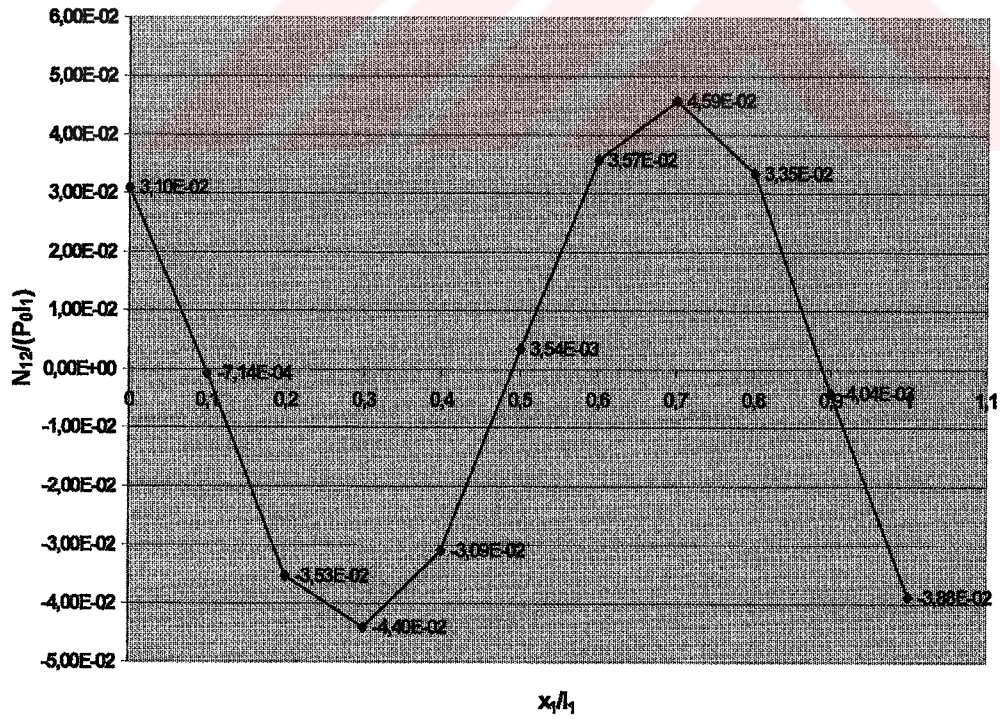
Şekil 5.43 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=11.50$, $c=0.10$, $d=0.80$, $\delta=0.20$ için moment diyagramı.



Şekil 5.44 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\varpi^2=11.5$, $c=0.10$, $d=0.80$, $\delta=0.20$ için kesme kuvveti diyagramı.



Şekil 5.45 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=11.5$, $c=0.10$, $d=0.80$, $\delta=0.45$ için moment diyagramı.



Şekil 5.46 $E_2/E_1=100$, $\varepsilon=0.7$, $\omega^2=11.5$, $c=0.10$, $d=0.80$, $\delta=0.45$ için kesme kuvveti diyagramı.

KAYNAKLAR

- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N., (1991), "On the Continuum Theory in Mechanics of Composite Materials with Small-Scale Curved Structures", *Prikladnaia Mekhanika*, 27(2): 3-13.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N., (1992), "Statics of Laminated and Fibrous Composites with Curved Structures", *Applied Mechanics Review*, 45: 17-35.
- Akbarov, S.D. ve Yahnioğlu, N., (1995), "Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemeden Hazırlanmış Şeritin Gerilme Durumunun Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Araştırılması", IX. Ulusal Mekanik Kongresi, Ürgüp, 1: 68-77.
- Akbarov, S.D., (1995), "On the Determination of Normalized Nonlinear Mechanical Properties of Composite Materials with Periodically Curved Layers", *International Journal of Solids and Structures*, 32(21): 3129-3143.
- Akbarov, S.D., Guz, A.N., Movsumov, E.A. ve Mustafayov, S.M., (1995), *Mechanics of Composite Materials with Curved Structures*, Naukova Dumka, 320, Kiev.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N., (2000), *Mechanics of Curved Composites*, Kluwer Academic Publishers, Portland, OR.
- Bazhant, Z.P., (1968), "The Influence of the Curvature of Reinforced Fibers on the Elasticity Modulus and Strength of Composite Materials", *Mekh. Polim.*, 2: 314-321.
- Bolotin, V.V. ve Novichkov, Yu.N., (1980), *Mechanics of Multilayered Structures*, Mashinostroyeniye, Moscow.
- Christensen, R.M., (1979), *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley and Sons Inc.
- Goldenveizer, A.L., (1958), "On Reissner's Theory of the Bending of Plates", *Izvestia AN SSSR*, 4:102-109.
- Hildebrand, F.B., Reissner, E. ve Thomas, G.E., (1949), *Notes on the Foundations of the Theory of Small Displacements of Orthotropic Shells*, NACA Technical Note, 1983.
- Kromm, A., (1953), "Verallgemeinerte Theori der Plattenstatik", *Ing. Arch.*, 21: 266-286.
- Kromm, A., (1955), "Über die Randquerkrofte Beigestützten Platten", *ZAMM*, 35: 231-242.
- Kütüğü, Z., (1996), "Kompozit Malzemelerden Üretilmiş Lokal-Yerel-Eğrisel Yapıya Sahip Plağın Doğal Titreşimi", II. Ulusal Hesaplamalı Mekanik Konferansı, 4 Eylül 1996, 424, KTÜ Trabzon.
- Kütüğü, Z., (1998), "Lokal ve Periyodik Eğriliğe Sahip Kompozit Malzemeden Hazırlanmış Kiriş ve Plakların Doğal Titreşim ve Stabilitesi", Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Lekhnitskii, S.G., (1963), *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden Day, San Francisco, CA.
- Lo, K.H., Christensen, R.M. ve Wu, E.M., (1977a), "A High-Order Theory of Plate Deformation. Part 1: Homogenous Plates", *Journal of Applied Mechanics*, 44: 663-668.
- Lo, K.H., Christensen, R.M. ve Wu, E.M., (1977b), "A High-Order Theory of Plate Deformation. Part 2: Laminated Plates", *Journal of Applied Mechanics*, 44: 669-676.
- Manisfield, E.H. ve Puslow, D., (1974), "The Influence of Fibre Waviness on the Moduli of Unidirectional Fibre Reinforced Composites", *Aeronautical Research Council Current Paper*,

1339: 30.

Reissner, E., (1944), "On the Theory of Bending of Elastic Plates", Journal of Mathematics and Physics, 23: 184-191.

Reissner, E., (1945), "The Effects of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", Journal of Applied Mechanics, 12(2): 69-77.

Reissner, E., (1947), "On the Bending of Elastic Plates", Journal of Applied Mechanics, 5: 55-68.

Tarnapolsky, Yu.M. ve Rose, A.V., (1969), Special Features of Design of Parts Fabricated from Reinforced Plastics, Zinatne, Riga: 274.

Vanin, G.A., (1985), Micromechanics of Composite Materials, Naukov Dumka, Kiev.

Whitney, J.M., (1966), "Geometrical Effects of Filament Twist on the Modulus and Strength of Graphite Fiber", Reinforced Composites Textil. Res., 36: 765-770.

Yahnioğlu, N., (1995), "Bir Ucu Rijit Tutturulmuş Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemedden Hazırlanmış Şeritin Eğilmesinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Araştırılması", II. Ulusal Matematik Mühendisliği Sempozyumu, İstanbul.

Yahnioğlu, N., (1996a), "Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemedden Hazırlanmış Yapı Elemanlarının Statiğine Uygun Sınırdeğer Problemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile İncelenmesi", Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Yahnioğlu, N., (1996b), "Finite Element Method Analysis of the Stress and Displacement Distribution in the Cantilever Plate Fabricated from the Composite Material with Small-Scale Periodically Curved Structure", YTÜ Dergisi, 1996/1: 61-73.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	20.09.1975	
Doğum yeri	Almanya	
Lise	1991-1994	Özel Kültür Lisesi
Lisans	1994-1999	Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1999-2002	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı
Çalıştığı kurum(lar)	2000-2001	Küm İnşaat Sanayi ve Ticaret A.Ş.

