

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KANTOROVİCH YÖNTEMİNİN BAZI PLAK
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI**

İnşaat Müh. Cem ÖZTÜRK

**F.B.E İnşaat Mühendisliği Anabilimdalı Mekanik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ.....	vi
ÖZET	vii
RESUME.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. PLAK TEORİSİ	3
2.1 Varsayımlar	3
2.2 Bağıntılar	3
2.2.1 Geometrik Bağıntılar	3
2.2.2 Gerilme Bileşenleri ile Şekil Değiştirme Bileşenleri Arasındaki Bağıntılar	4
2.2.3 Gerilme Bileşenleri ile Momentler Arasındaki Bağıntılar	6
2.2.4 Kartezyen Koordinatlarda Plak Differansiyel Denge Denklemi	7
3. KULLANILAN YÖNTEMLER	9
3.1 Kantorovich Yöntemi	9
3.2 Euler Yöntemi.....	10
4. UYGULAMALAR.....	11
4.1 Bağıntılar	12
4.2 Dört Kenarı Sabit Mesnetli Düzgün Yayılı Yük Altındaki Plakın Çözümü	13
4.2.1 Fonksiyon Seçimi	13
4.2.2 Kapalı Çözüm.....	13
4.2.3 Euler Sayısal Yöntemiyle Çözüm (Kantorovich Yönteminde Tek terim Kullanılması)	17
4.2.3.1 Sınır Değer Probleminin Herhangi Bir Başlangıç Değer Yöntemiyle Hesabı	17
4.2.3.2 Katsayılar Matrisi ve Yük Vektörünün Bulunması	19
4.2.4 Kantorovich Yönteminde İki Terim Kullanılması	23
4.2.5 Boyutsuzlaştırma	25
4.3 Bir Dikdörtgen İçerisinde Tesir Eden, Düzgün Yayılı Yük Tesiri Altındaki Plakın Çözümü.....	27
4.3.1 Özel Hal: Düzgün Yayılı Yük Tesiri Altındaki Plak.....	31
5 SONUÇLAR.....	33

KAYNAKLAR.....	34
EKLER	35
ÖZGEÇMİŞ.....	45

SİMGE LİSTESİ

[A]	Katsayılar matrisi
K	Plak eğilme rijitliği
E	Elastisite modülü
G	Kayma modülü
P	Düzgün yayılı yük
w	Düşey yer değiştirme
M	Eğilme momenti
q	Kesme kuvveti
β	Dönme
μ	Poisson oranı
ε	Birim boy değişimi
σ	Gerilme
a	x eksenine doğrultusundaki plak boyutu
b	y eksenine doğrultusundaki plak boyutu
t	Plak kalınlığı
c	İntegral sabiti
{y}	Durum vektörü
{f}	Yük vektörü
h	hata değeri
e	hata yüzdesi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Şekil değiştirmeden önce ve sonra plak elemanı	3
Şekil 2.2	Plak elemanına tesir eden iç kuvvetler	6
Şekil 2.3	Sonsuz küçük plak elemanının dengesi	7
Şekil 3.1	Diferansiyel denklemin çözümü	10
Şekil 4.1	Uygulamada kullanılacak eksen takımı	11
Şekil 4.2	M_x momentinin $y=0.5m$ simetri eksenini boyunca $b/a=1,2,3,4$ değerlerine karşı gelen değişimleri	20
Şekil 4.3	β dönme açısının, $y=0,5m$ simetri eksenini boyunca $b/a=1$ değerleri için değişimi	21
Şekil 4.4	w düşey yer değiştirmesinin, $y=0,5m$ simetri eksenini boyunca $b/a=1$ değerleri için değişimi	22
Şekil 4.5	q_x kesme kuvvetinin $y=0.5m$ simetri eksenini boyunca $b/a=1$ değerleri için değişimi	22
Şekil 4.6	M_x momentinin $y=0,5m$ simetri eksenini boyunca $b/a=1$ değerine karşı gelen değişimi	25
Şekil 4.7	Plak yükleme durumu	27
Şekil 4.8	w düşey yer değiştirmesinin $y=0,5m$ simetri eksenini boyunca değişimi	29
Şekil 4.9	Plak yükleme durumu	30
Şekil 4.10	M_x momentinin $y=0,5m$ simetri eksenini boyunca $b/a=1$ değerine karşı gelen değişimi	32

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanma sürecinde öncülük eden, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. R. Faruk Yükseler’e teşekkürü bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca maddi, manevi desteklerini esirgemeyen aileme şükranlarımı sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada, plak denklemlerinin sayısal olarak ve kapalı çözümü için Kantorovich yönteminden yararlanılarak, bir başlangıç değeri yöntemi olan Euler yöntemi kullanılmıştır. Plakların, yer değiştirmeler cinsinden yazılan kısmi differansiyel denklemlerinin çözümüyle, düşey yer değiştirme ve kesit tesirlerinin istenen herhangi bir kesitte sayısal olarak ve bulunması gerçekleştirilmiştir.

RESUME

Dans cette these, pour la résolution numérique des équations fondamentales des plaques, en utilisant la méthode de Kantorovich, on s'est servi de la méthode Euler étant une méthode variationnelle. Avec la résolution des équations aux dérivées partielles des plaques, on a eu l'occasion de calculer les déplacements et des efforts sectionnels dans une section quelconque.

1. GİRİŞ

Plaklar, diğer boyutlarına nazaran kalınlığı çok az olan ve hiçbir yüzeysel eğriliği bulunmayan, düzlemsel yapılardır. Geometrik olarak, kenarları, doğrusal ve/veya eğriseldir. Statik olarak plaklar, serbest uçlu, dönmeye ve çökmeye karşı elastik mesnet gibi çeşitli sınır koşulları içeren, basit mesnetli ve ankastre mesnetli veya bazı durumlarda noktasal mesnetli olabilirler. Plaklar tarafından taşınan statik veya dinamik yükler, plak yüzeyine daima dik olarak etkirler (Girkmann, 1965).

Plaklar, bütün mühendislik dallarında geniş ölçüde kullanılırlar. Örnek olarak; bazıları, mimari yapılar, köprüler, su yapıları, konteynerler, uçak, füze ve gemiler, bir takım makine parçaları gibi gösterilebilirler.

Plak genel denklemi, Lagrange (1811) tarafından elde edilmiş olan ve bu çalışmada da verilen dördüncü mertebeden homojen olmayan biharmonik doğrusal bir differansiyel denklemdir.

Kısaca “plak denklemi” olarak adlandırılan dördüncü mertebeden homojen olmayan doğrusal biharmonik differansiyel denklemin çeşitli sınır koşulları altında kesin ve yaklaşık çözümleri vardır.

Bugüne kadar, çeşitli bilim adamları seriler yardımıyla, çeşitli sınır koşullarına sahip plakların çökme ifadelerini araştırmışlardır. Bunlardan Navier plağın çökme differansiyel denkleminin çözümünü homojen ve özel çözüm olarak iki kısma ayırmış, bunları ayrı ayrı çözüp süperpoze etmiştir (Kütüğ, 1992). Bunlardan homojen olan biharmonik denklem, plağa sadece kenarlarından dış yükler etkimesi durumunda çeşitli sınır koşulları altında plağın alacağı çökme şeklini belirlemek içindir. Homojen olmayan biharmonik denklemin çözümünden elde edilecek w_0 özel çözümü ise, plağın yüzeyini etkileyen dış $P(x,y)$ yüklerinden meydana gelen çökmenin ifadesidir. Özel çözüm plağın sınır koşullarından tümüyle bağımsızdır. Bir bütün olarak çözüm, iki çözümün yani homojen ve özel çözümün toplamı veya başka bir deyişle süperpozisyonudur.

Navier (1823), çökmeyi çift katlı trigonometrik tek seri toplamı olarak düşünmüş ve serinin de hızla yakınsayabilmesi için örnek olarak dört tarafından basit mesnetli bir plağı ele almıştır (Kütüğ, 1992). $P(x,y)$ yükünü ise, çökme ifadesi gibi çift katlı trigonometrik bir tek seriye açmış, özel çözümün sonunda çökme fonksiyonundaki m ve n 'ye bağlı her bir w_{mn} katsayısını, yük fonksiyonundaki aynı m 'ye ve n 'ye karşı gelen P_{mn} seri katsayısına m 'ye ve n 'ye bağlı olan bir ifade bulmuştur.

Levy (1899); plak differansiyel denkleminin kesin çözümü için, tek katlı Fourier serileriyle çözüm olarak adlandırılan, Navier çözümünün yavaş yakınsadığı çeşitli yükleme durumlarında bile hızlı yakınsayabilen bir yöntem geliştirmiştir (Kütüğü, 1992).

Levy de Navier gibi çökme ifadesini homojen ve özel çözüm olarak ele almıştır. Levy özel çözümü elde edebilmek için plağın karşılıklı iki kenarının basit mesnetli ve diğer iki kenarının yeteri kadar uzun olduğunu varsaymış, böylelikle plak differansiyel denklemini iki parametreye bağlı olmaktan kurtarıp tek parametreye bağımlı kılmıştır. Çökme özel ifadesini bu tek parametrenin bir sinüs serisi şeklinde ifade etmiştir. Çökme özel çözümündeki seri katsayılarıyla, Navier'nin yaptığı gibi aynı şekilde seriye açılmış yük fonksiyonunun seri katsayılarının karşıt olanları arasında bağlantı kurmuştur.

Bu tez çalışmasında basit mesnetlere oturtulmuş diktörgen plakların çözümleri, Kantorovich Yöntemi uygulanarak yapılmıştır. İkinci bölümde plak teorisi, üçüncü bölümde kullanılan yöntemlerden (Kantorovich Yöntemi ve Euler Yöntemi) bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, yapılan uygulamalar sunulmuştur. Uygulamaların ilk alt bölümünde, plağın düşey yer değiştirmesi ve kesit tesirleri arasındaki bağıntılar sunulmuştur. İkinci alt bölümde dört kenarı basit mesnetlenmiş plağın, kısmi differansiyel denklemleri Kantorovich yöntemi kullanılarak sıradan differansiyel denklemlere dönüştürülmüş, elde edilen denklemlerin kapalı çözümleri ve bir başlangıç değer yöntemi olan Euler yöntemiyle yapılan sayısal çözümleri sunulmuştur. Üçüncü alt bölümde diktörtgen düzgün yayılı yük uygulanmış dört kenarı basit mesnetli plağın sayısal çözümleri sunulmuştur. Uygulamaların her aşamasında elde edilen sonuçlar, diğer bilim adamlarının ulaştığı sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Beşinci bölümde ise çalışmanın genel bir değerlendirmesi yapılmıştır.

2. PLAK TEORİSİ

Yüzeysel taşıyıcı sistemler; iki boyutu kalınlığına göre çok büyük olan sistemlerdir. Yüzeysel taşıyıcı sistemin eğriliği sıfır olursa “plak” adını alır.

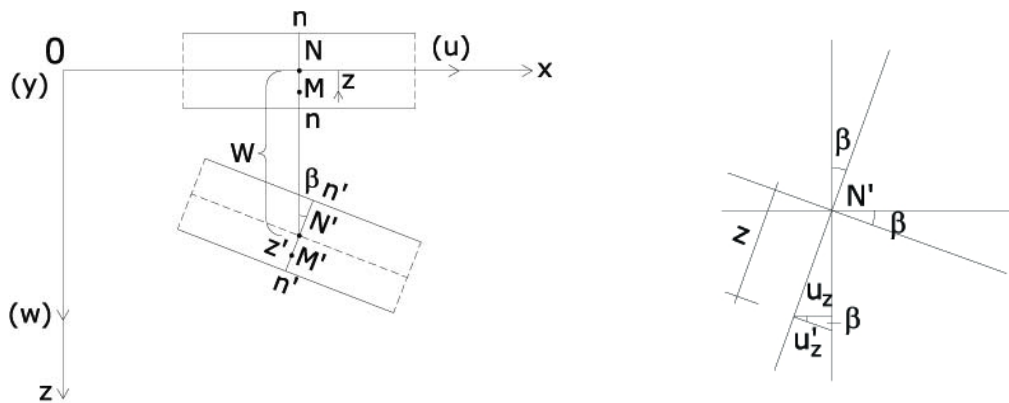
Plak teorisi, elastisite teorisinin özel bir uygulama alanıdır ve plaklardaki kuvvet, yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilmeler arasındaki ilişkileri inceler (Berktaş, 1992).

2.1 Varsayımlar

- Plak kalınlığı, diğer boyutları yanında çok küçüktür.
- Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlemdir.
- Yükler orta düzleme diktir.
- Çökmeler, plak kalınlığı yanında çok küçüktür.
- Plak; homojen, izotrop, doğrusal-elastik bir malzemeden meydana gelmektedir.
- Orta düzleme dik bir doğru üzerinde bulunan noktalar şekil değiştirmeden sonra da, şekil değiştirmiş orta düzleme dik bir doğru üzerinde kalır (Kirchhoff - Love).
- Plak orta düzlemine dik doğrultudaki σ_z normal gerilmeleri yok sayılabilecek kadar küçüktür (Berktaş, 1992).

2.2 Bağlımlar

2.2.1 Geometrik Bağlımlar



Şekil 2.1 Şekil değiştirmeden önce ve sonra plak elemanı

Plağın x doğrultusundaki eğimi, $\tan \beta \approx \beta \approx \frac{\partial w}{\partial x}$ olur.

$$\text{Şekil 2.1'den } \tan \beta = \frac{u'_z}{z} \quad u'_z = z \tan \beta = z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$u_z = u'_z \cos \beta$ ve β çok küçük olduğundan $\cos \beta \approx 1$; $u_z = u'_z$ olur.

u_z yer değişimi x ekseninin negatif yönünde olduğu için

$$u_z = -\frac{\partial w}{\partial x} z \quad (2.1)$$

olur. Benzer şekilde

$$v_z = -\frac{\partial w}{\partial y} z \quad (2.2)$$

olacaktır. z derinliğinde birim boy değişimleri:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_z}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_z}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

olur. z derinliğinde ve orta düzleme paralel bir elemandaki açı değişimi

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.4)$$

olur.

2.2.2 Gerilme Bileşenleri ile Şekil Değiştirme Bileşenleri Arasındaki Bağıntılar

$\sigma_z \approx 0$ ve $\varepsilon_z \approx 0$ alındığından

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\tag{2.5}$$

olur. Burada; E, malzemenin elastisite modülünü göstermektedir. G kayma modülüdür ve

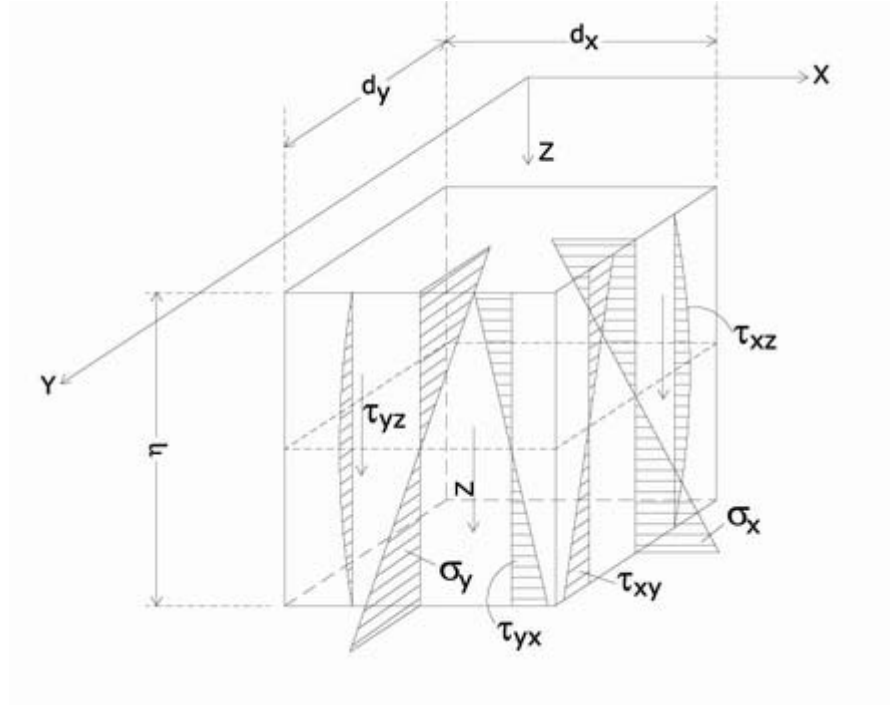
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}\tag{2.6}$$

şeklinde ifade edilir.

(2.3), (2.4) ve (2.5) denklemleri kullanılarak gerilme bileşenleri, yer değiştirme bileşenlerinin fonksiyonları olarak ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1 - \mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1 - \mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = -\frac{Ez}{1 + \mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\tag{2.7}$$

2.2.3 Gerilme Bileşenleri ile Kesit Momentleri Arasındaki Bağlıntılar



Şekil 2.2 Plak elemanına tesir eden iç kuvvetler

Plak teorisinde gerilme bileşenleri yerine hesapta, orta düzlemin birim boyuna isabet eden kesit momentleri ve kesit kuvvetleri kullanılır. Gerilme bileşenleri ile bu kesit büyüklükleri arasında aşağıdaki bağıntılar kurulabilir (Berktaş, 1992):

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (2.8)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$$

M_x ve M_y eğilme momentleri, M_{xy} ise burulma momenti adını alırlar.

(2.8) ifadelerindeki gerilme bileşenlerinin yerine (2.7) numaralı bağıntılar kullanılarak integrasyon yapılacak olursa:

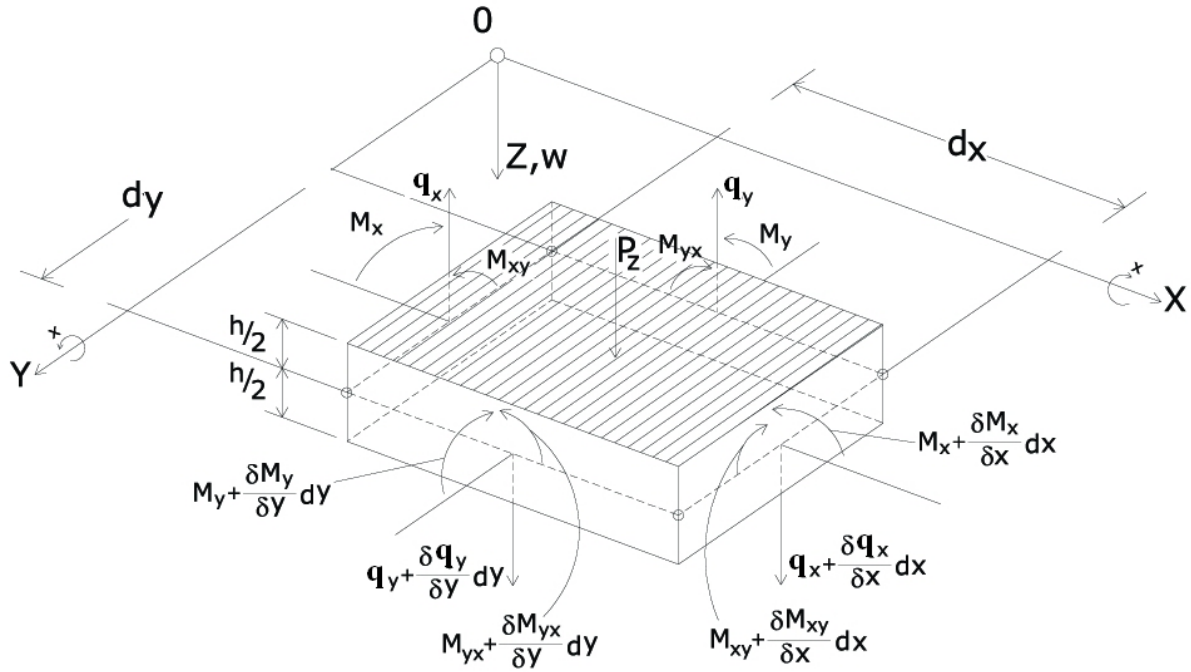
$$\begin{aligned}
M_x &= -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
M_y &= -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
M_{xy} &= -K(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

ifadeleri bulunur. Burada; K plak eğilme rijitliğidir ve

$$K = \frac{Et^3}{12} \frac{1}{(1 - \mu^2)} \tag{2.10}$$

şeklinde ifade edilir.

2.2.4 Kartezyen Koordinatlarda Plak Differansiyel Denge Denklemleri



Şekil 2.3 Sonsuz küçük plak elemanının dengesi

Plak elemanı için sınır koşulları yazılacak olursa:

- Şekil 2.3’de görülen plak elemanının z doğrultusundaki izdüşüm koşulu:

$$\sum P_z = 0$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -P \quad (2.11)$$

Burada; P plağın maruz kaldığı yayılı yükü göstermektedir.

- Şekil 2.3'deki plağın merkezinden geçen ve x eksenine paralel olan bir eksene göre moment denge koşulu:

$$\sum M_x = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (2.12)$$

- Şekil 2.3'deki plağın merkezinden geçen ve x eksenine paralel olan bir eksene göre moment denge koşulu:

$$\sum M_y = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (2.13)$$

(2.12) ve (2.13) bağıntıları ile (2.9) bağıntılarının yardımıyla q_x ve q_y w cinsinden bulunabilir:

$$q_x = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) \quad (2.14)$$

$$q_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)$$

q_x ve q_y 'nin (2.14) de bulunan değerleri (2.11) bağıntısında yerine yazılırsa dış yükle düşey yer değiştirme arasındaki bağıntı, yani plak differansiyel denklemi bulunur:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{K} \quad (2.15)$$

3. KULLANILAN YÖNTEMLER

3.1 Kantorovich Yöntemi

Plak kısmi differansiyel denklemini, sıradan differansiyel denklemlere indirgemek için kullanılan yöntemlerden biri Kantorovich yöntemidir.

Kantorovich yöntemi bir varyasyon yöntemi olarak ele alınabilmekle birlikte herhangi bir kısmi differansiyel denkleme de uygulanabilmektedir.

u , x ve y ' ye bağlı bir değişken olsun ve

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{k=1}^n u_k(x) m_k(x, y) \quad (3.1)$$

şeklinde bir çözümü olsun. Burada; $m_k(x, y)$ ($k=1, 2, \dots, n$), ilgili problemin sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçilen fonksiyonlar, $u_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) fonksiyonları ise bilinmeyen fonksiyonlardır. $E(u)$ bir varyasyon probleminin sıfıra eşit Euler denklemi (Hildebrand, 1965) ise

$$\int_{y^0}^{y^1} E(\bar{u}) m_k(x, y) dy = 0 \quad k=(1, 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

denklemlerinin uygulanmasıyla söz konusu varyasyon probleminin çözümüne karşı gelen sıradan differansiyel denklemler elde edilebilmektedir (Sokolnikoff, 1965).

$$L(u) = 0 \quad (3.3)$$

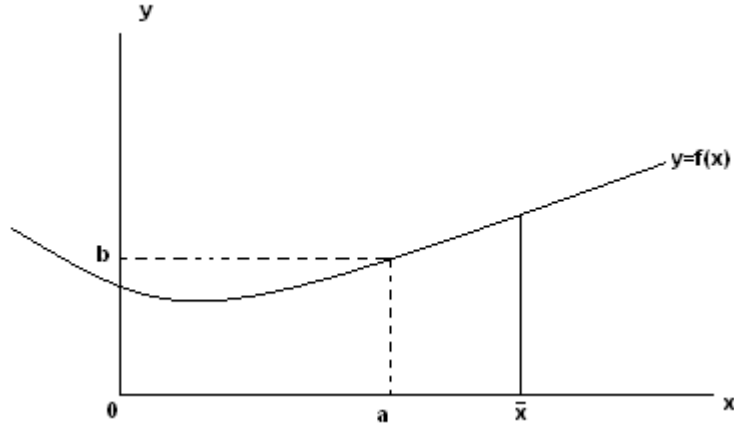
herhangi bir differansiyel denklem olsun.

$$\int_{y^0}^{y^1} L(u) m_k(x, y) dy = 0 \quad k=(1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

ile (3.1) kısmi differansiyel denkleminin çözümü, bir sıradan differansiyel denklem takımının çözümüne indirgenebilmektedir. Dikkat edilirse, ikinci yaklaşımda varyasyon hesabı ile hiçbir ilişki kurulmamıştır ve geneldir (Kantorovich ve Krylov, 1964).

3.2 Euler Yöntemi

Bir diferansiyel denklemin çözümü için en basit sayısal yöntem Euler Yöntemi'dir. Bu yöntemde bir noktada bağımlı değişken (yani fonksiyon)'un değeri, bir önceki noktadan geçen bir doğru boyunca ekstrapolasyon ile elde edilir.



Şekil 3.1 Diferansiyel denklemin çözümü

$y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu ile verilmiş,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.5)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ hesaplanabilir ve Taylor serisinin ilk iki teriminin kullanılmasıyla $y(x_0+h)$ için bir yaklaşık değer bulunabilir.

$$y(x_0 + h) = y_0 + hy'(x_0) \quad (3.6)$$

$x_1 = x_0+h$ olsun, $y(x_0+h) = y(x_1) = y_1$ alınırsa

$$y_1 = y_0 + hf(x_0) \quad (3.7)$$

yazılabilir. Genel olarak, x_n ve y_n cinsinden bir sonraki x_{n+1} noktasındaki y_{n+1} değeri

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n) \quad (3.8)$$

ile tanımlanır.

4. UYGULAMALAR

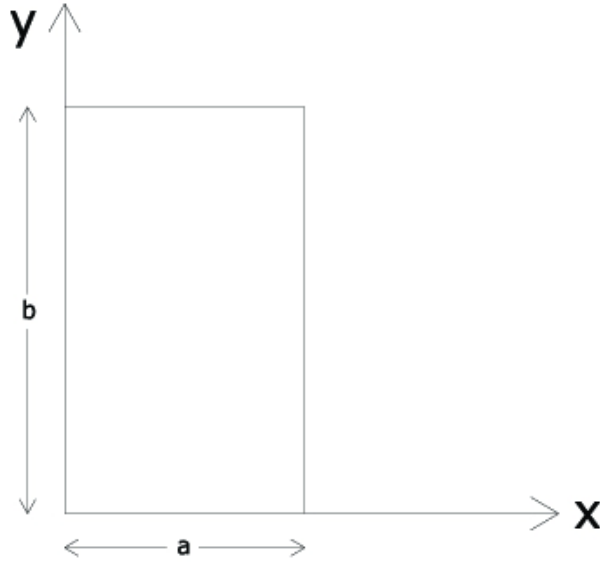
Bu bölümde Kantorovich yöntemi çeşitli plak problemlerinde uygulanacaktır. Uygulamalarda

$$t = 0,1 \text{ m} \quad E = 2,1 \times 10^6 \text{ t/m}^2 \quad \mu = 0 \quad P = 1 \text{ t/m}^2 \quad (4.1)$$

değerleri kullanılmıştır. Burada; E kullanılan malzemenin elastisite modülünü, μ kullanılan malzemenin Poisson oranını, t ise plağın kalınlığını göstermektedir. K plak eğilme rijitliği için ise (2.10) denkleminde hesaplanarak

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{2,1 \times 10^6 (0,1)^3}{12} = 175 \text{ tm}^2$$

değeri kullanılmıştır.



Şekil 4.1 Uygulamada kullanılacak eksen takımı

Uygulama olarak Şekil 4.1 de görülen plağın dört kenarının basit mesnet olma hali için çözüm yapılacaktır. Çözüm için önce Kantorovich yöntemi kullanılarak kapalı çözüm yapılacak, daha sonra ise Kantorovich yöntemi Euler yöntemiyle beraber kullanılarak sayısal çözüm yapılacaktır. Elde edilen sonuçlar farklı yöntemlerle elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

4.1 Bağıntılar

Uygulamalarda kolaylık sağlaması açısından plağın düşey yer değiştirmesi ve kesit tesirleri arasındaki bağıntıların açık bir şekilde yazılmasında fayda vardır. Bu alt bölümde sunulacak bağıntılar çözüm aşamasında kullanılacaktır. Şekil 2.1 den

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \beta \quad (4.2)$$

olur. β burada plakdaki dönme açısının ifadesidir. (2.8) ifadelerinde Poisson oranı (μ) sıfır alındığı için moment ifadesi

$$M_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

olur. (4.2) denklemi, (4.3)'de kullanıldığında

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{M_x}{K} \quad (4.4)$$

bağıntısı yazılabilir. (4.4) denkleminden elde edilebilecek moment ifadesi

$$M_x = -K \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (4.5)$$

ve (4.2) denklemi, (2.14) denkleminde kullanıldığında

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = q_x + K \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \quad (4.6)$$

denklemi elde edilir. (2.14) denkleminin x'e göre türevinin alınmasıyla

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -K \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (4.7)$$

bağıntısı elde edilir. (2.15) plak denklemindeki $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ ifadesi (4.7) bağıntısındaki yerinde kullanıldığında

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = K \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - P \quad (4.8)$$

denklemini elde edilir. (4.3) denklemini (4.8)'de kullanıldığında

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = K \left(-\frac{1}{K} \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - P \quad (4.9)$$

bağıntısı elde edilir.

4.2 Dört Kenarı Sabit Mesnetli Düzgün Yayılı Yük Altındaki Plakın Çözümü

4.2.1 Fonksiyon Seçimi

Dördüncü mertebeden bir kısmi differansiyel denklem olan (2.15) plak denklemini Kantorovich yöntemi kullanılarak sıradan differansiyel denklemlere dönüştürülmek istenmektedir. Bunun için w 'nin y eksenindeki davranışı için

$$w = w(x, y) \cong w_1(x) \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.10)$$

şeklinde bir tahmin yapılmıştır. Bu fonksiyonun sabit mesnetlenmiş olan $y = 0$ ve $y = b$ kenarlarında sınır koşullarını sağlaması gerekmektedir. Bu kenarlarda çökme ve Δw değerlerinin sıfır olmalıdır:

$$w|_{y=0} = w_1 \sin \frac{\pi 0}{b} = 0$$

$$w|_{y=b} = w_1 \sin \frac{\pi b}{b} = 0$$

$$\Delta w|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \sin \frac{\pi 0}{b} - w_1 \frac{\pi^2}{b^2} \sin \frac{\pi 0}{b} = 0$$

$$\Delta w|_{y=b} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \sin \frac{\pi b}{b} - w_1 \frac{\pi^2}{b^2} \sin \frac{\pi b}{b} = 0$$

Görüldüğü gibi (4.10) fonksiyonu $y = 0$ ve $y = b$ kenarlarında gerekli sınır koşullarını sağlamaktadır.

4.2.2 Kapalı Çözüm

(4.10) denklemini (2.15) denkleminde kullanıldığında

$$L = \sin \frac{\pi y}{b} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - 2 \frac{\pi^2}{b^2} \sin \frac{\pi y}{b} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\pi^4}{b^4} \sin \frac{\pi y}{b} w_1 - \frac{P}{K} = 0 \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11) denklemi, Kantorovich yöntemi gereği $\sin \frac{\pi y}{b}$ fonksiyonuyla çarpılıp y'ye göre integre edildiğinde, yani

$$\int_0^b L \sin \frac{\pi y}{b} dy = 0 \quad (4.12)$$

integrasyonu yapıldığında

$$\frac{b}{2} \frac{d^4 w_1}{dx^4} - \frac{\pi^2}{b} \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{\pi^4}{b^3} w_1 = \frac{2Pb}{K\pi}, \quad (4.13)$$

sadece x değişkenine bağlı dördüncü mertebeden, sağ taraflı sıradan bir differansiyel denklem elde edilir. (4.13) denkleminin genel çözümü homojen ve özel çözümün toplamına eşittir (Karadeniz, 1999). (4.13) denklemi

$$\alpha_1 = \frac{b}{2} ; \alpha_2 = -\frac{\pi^2}{b} ; \alpha_3 = \frac{\pi^4}{2b^3} ; \lambda = \frac{2Pb}{K\pi} \quad (4.14)$$

eşitlikleri kullanılarak yazılırsa

$$\alpha_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \alpha_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \alpha_3 w_1 = \lambda \quad (4.15)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Homojen çözüm (4.15) denkleminin sağ tarafının sıfır alındığı çözümdür:

$$\alpha_1 \frac{\partial^4 w_1^h}{\partial x^4} + \alpha_2 \frac{\partial^2 w_1^h}{\partial x^2} + \alpha_3 w_1^h = 0 \quad (4.16)$$

(4.16) denkleminin karakteristik denklemi

$$\alpha_1 r^4 + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 = 0 \quad (4.17)$$

şeklindedir. (4.17) cebirsel denkleminin kökleri ise

$$r_1 = r_2 = \frac{\pi}{b} ; \quad r_3 = r_4 = -\frac{\pi}{b}$$

olur. Bu köklere bağlı olarak (4.16) denkleminin homojen çözümü

$$w_1^h = (c_1 x + c_2) e^{\frac{\pi x}{b}} + (c_3 x + c_4) e^{-\frac{\pi x}{b}} \quad (4.18)$$

şeklinde yazılır.

Özel çözüm ise (4.15) denkleminin çözümüdür:

$$\alpha_1 \frac{\partial^4 w_1^{\ddot{o}}}{\partial x^4} + \alpha_2 \frac{\partial^2 w_1^{\ddot{o}}}{\partial x^2} + \alpha_3 w_1^{\ddot{o}} = \lambda \quad (4.19)$$

(4.19) deki $w_1^{\ddot{o}}$

$$w_1^{\ddot{o}} = ax^2 + bx + c \quad (4.20)$$

şeklinde yazılıp, (4.19)' da yerine konulduğunda

$$2a\alpha_2 + ax^2\alpha_3 + bx\alpha_3 + c\alpha_3 = \lambda \quad (4.21)$$

denklemini elde edilir. (4.21) denkleminde eşitliğin sağ ve sol tarafındaki x^0 , x^1 , x^2 'nin çarpanlarının eşitliğinden ve (4.14) denklemlerinden

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = \frac{4Pb^4}{K\pi^5} \quad (4.22)$$

sonuçlarına ulaşılır. (4.22), (4.19) denkleminde kullanılıncaya

$$w_1^{\ddot{o}} = \frac{4Pb^4}{K\pi^5} \quad (4.23)$$

özel çözümüne ulaşılır.

(4.18) homojen çözümünün ve (4.23) özel çözümünün toplamı (4.13) denkleminin genel çözümünü verir:

$$w_1 = (c_1 x + c_2) e^{\frac{\pi x}{b}} + (c_3 x + c_4) e^{-\frac{\pi x}{b}} + \frac{4Pb^4}{K\pi^5} \quad (4.24)$$

Buradaki c_1 , c_2 , c_3 ve c_4 bilinmeyen integral sabitleridir. Bu dört bilinmeyeni bulmak için dört adet sınır koşulu yazmak gerekir:

$x = 0$ ve $x = a$ kenarlarında w düşey yer değiştirme oluşmayacaktır;

- $w_1|_{x=0} = 0$

(4.24) denklemiyle

$$c_2 + c_4 \frac{4Pb^4}{K\pi^5} = 0. \quad (4.25)$$

- $w_1|_{x=a} = 0$

(4.24) denklemiyle

$$c_1 a e^{\frac{\pi a}{b}} + c_2 e^{\frac{\pi a}{b}} + c_3 a e^{-\frac{\pi a}{b}} + c_4 e^{-\frac{\pi a}{b}} + \frac{4Pb^4}{K\pi^5} = 0. \quad (4.26)$$

Diğer sınır kuşulları ise $x = 0$ ve $x = a$ kenarlarında M_x değerlerinin sıfır olmasıdır. (2.8) denkleminde $\mu=0$ alındığı için M_x

$$M_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.27)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemde sınır koşulları yazılırsa

- $\left. \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0$

$$2c_1 + \frac{\pi}{b}c_2 - 2c_3 + \frac{\pi}{b}c_4 = 0 \quad (4.28)$$

- $\left. \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0$

$$2c_1 e^{\frac{\pi a}{b}} + a c_1 \frac{\pi}{b} e^{\frac{\pi a}{b}} + c_2 \frac{\pi}{b} e^{\frac{\pi a}{b}} - 2c_3 e^{-\frac{\pi a}{b}} + a c_3 \frac{\pi}{b} e^{-\frac{\pi a}{b}} + c_4 \frac{\pi}{b} e^{-\frac{\pi a}{b}} = 0 \quad (4.29)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.25) ; (4.26) ; (4.28) ; (4.29) denklemlerinin hazırlanan bir Fortran programı kullanılarak Gauss eliminasyon yöntemiyle (Çağal, 1998) yapılan çözüm

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0,4860072 \times 10^{-5} \\
c_2 &= -0,7752768 \times 10^{-5} \\
c_3 &= -0,1124654 \times 10^{-3} \\
c_4 &= -0,6693897 \times 10^{-4}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

sonuçlarını vermiştir.

Plağın en büyük moment ve çökme değerleri $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ koordinatlarında oluşmaktadır.

(4.30) 'da verilmiş olan sabitler (4.24) de yerine konulduğunda çökme ifadesi bulunur.

(4.27) ve (4.24) denklemleri kullanılarak,

$$M_{x \max} = M_x \Big|_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} = -K \frac{\partial^2 w_1^2}{\partial x^2} \sin \frac{\pi}{2} = 0.037 tm / m \text{ sonucu elde edilir.}$$

(4.10) ve (4.24) denklemleri kullanılarak,

$$w_{\max} = w \Big|_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} = w_1 \sin \frac{\pi b}{2b} = -2.3437 \times 10^{-5} m \text{ sonucu elde edilir.}$$

4.2.3 Euler Sayısal Yöntemiyle Çözüm (Kantorovich Yönteminde Tek terim Kullanılması)

(4.10)'da düşey yerdeğiştirme için yapılan tahmin, dönme, moment ve kesme kuvveti içinde yapılabilir:

$$\begin{aligned}
w &= w_1 \sin \frac{\pi y}{b} \\
\beta &= \beta_1 \sin \frac{\pi y}{b} \\
M_x &= M_{x1} \sin \frac{\pi y}{b} \\
q &= q_{x1} \sin \frac{\pi y}{b}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

4.2.3.1 Sınır Değer Probleminin Herhangi Bir Başlangıç Değer Yöntemiyle Hesabı

Bu alt bölümde, ilgili sınır değer probleminin herhangi bir başlangıç değer yöntemi ile çözümünden bahsedilmektedir. İlgili problemde, w, β, M_x, q_x değişkenleri esas değişkenler olarak seçilmiştir. Dolayısıyla durum vektörü $\{y\}$

$$\{y\} = [w \quad \beta \quad M_x \quad q_x] \quad (4.32)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bir başlangıç değer yönteminin uygulanabilmesi için ilgili problemin

$$\{y\}_{,x} = [A]\{y\} + \{f\} \quad (4.33)$$

şekline getirilmesi gerekmektedir. Burada; $[A]$ katsayılar matrisini, $\{f\}$ yük vektörünü göstermektedir.

İlgili problemin çözümü

$$\{y\} = [V]\{z\} + \{r\} \quad (4.34)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\{z\}$ başlangıç sınırı olan $x=0$ 'daki bilinmeyenlerdir. Bu problemde bilinmeyenler β ve q_x olup w ve M_x 'in değerleri bilinmektedir. M_x ve w ; $x=0$ sınırında sıfırdır. O halde

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \beta_1|_{x=0} \\ q_{x1}|_{x=0} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

şeklinde yazılabilir. (4.34) denklemi $x=0$ 'da (4.35)'den faydalanılarak yazılırsa

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ q_{x1} \end{Bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1|_{x=0} \\ q_{x1}|_{x=0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

elde edilir.

(4.34) denkleminin x 'e göre türevinin alınmasıyla

$$\{y\}_{,x} = [V]_{,x}\{z\} + \{r\}_{,x} \quad (A)$$

denklemi elde edilir. (4.34) denklemi (4.33) denkleminde kullanıldığında

$$\{y\}_{,x} = [A]([V]\{z\} + \{r\}) + \{f\} \quad (B)$$

elde edilir. (A) ve (B)'deki $\{z\}$ 'nin çarpanlarının eşitliğinden

$$[V]_{,x} = [A][V] \quad (4.37a)$$

elde edilir. Diğer çarpanların eşitliğinden

$$\{r\}_{,x} = [A]\{r\} + \{f\} \quad (4.37b)$$

elde edilir. (4.37a) ve (4.37b) birinci mertebeden differansiyel denklem takımları $[V(0)]$ ve $\{r(0)\}$ başlangıç koşullarıyla çözülebilir.

$[V(0)]$ ve $\{r(0)\}$, (4.36) 'da görülmektedir. $x=a$ sınırındaki bilinenler kullanılarak $x=0$ 'daki bilinmeyenleri içeren $\{z\}$ vektörü hesaplanabilir. Hesaplanan $\{z\}$ vektörü yardımıyla her x değerine karşı gelen durum vektörü sayısal olarak hesaplanabilir.

4.2.3.2 Katsayılar Matrisi ve Yük Vektörünün Bulunması

Bu alt bölümde, ilgili problemde kullanmak üzere (4.33) 'de belirtilen $[A]$ ve $\{f\}$ 'nin bulunmasından bahsedilmektedir.

(4.2) ve (4.10) denklemlerinden

$$w_{1,x} = \beta_1 \quad (4.38)$$

bağıntısı elde edilir. (4.4) ve (4.10) denklemlerinden

$$\beta_{1,x} = -\frac{M_{x1}}{K} \quad (4.39)$$

bağıntısı elde edilir. (4.6) ve (4.10) denklemlerinden

$$M_{x1,x} = q_{x1} - \frac{\pi^2}{b^2} K \beta_1 \quad (4.40)$$

bağıntısı elde edilir. (4.9) ve (4.10) denklemlerinden

$$\frac{\partial q_{x1}}{\partial x} \sin \frac{\pi y}{b} = K \left(-\frac{1}{K} \frac{\partial^2 M_{x1}}{\partial y^2} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \sin \frac{\pi y}{b} \right) - P \quad (4.41)$$

bağıntısı yazılabilir. (4.41) denklemi eşitliğin bir tarafında toplanarak

$$L = q_{x1,x} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{\pi^2}{b^2} M_{x1} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{\pi^4}{b^4} K w_1 \sin \frac{\pi y}{b} + P = 0 \quad (4.42)$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.42) denklemi, Kantorovich yöntemi gereği $\sin \frac{\pi y}{b}$ fonksiyonuyla çarpılıp y 'ye göre integre edildiğinde, yani

$$\int_0^b L \sin \frac{\pi y}{b} dy = 0 \quad (4.43)$$

integrasyonu yapıldığında

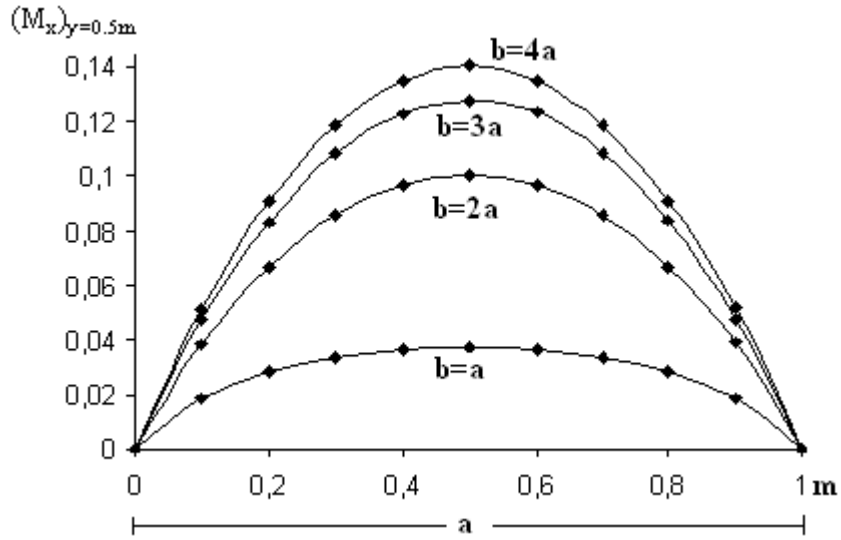
$$q_{x1,x} = \frac{\pi^2}{b^2} M_{x1} + \frac{\pi^4}{b^4} K w_1 - \frac{4P}{\pi} \quad (4.44)$$

denklemi elde edilir. (4.38) , (4.39) , (4.40) , (4.44) denklemleri (4.34) denkleminde yerine konulduğunda

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_1 \\ M_{x1} \\ q_{x1} \end{Bmatrix}_{,x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{K} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi^2 K}{b^2} & 0 & 1 \\ \frac{\pi^4 K}{b^4} & 0 & \frac{\pi^2}{b^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_1 \\ M_{x1} \\ q_{x1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4P}{\pi} \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

şeklinde yazılabilir.

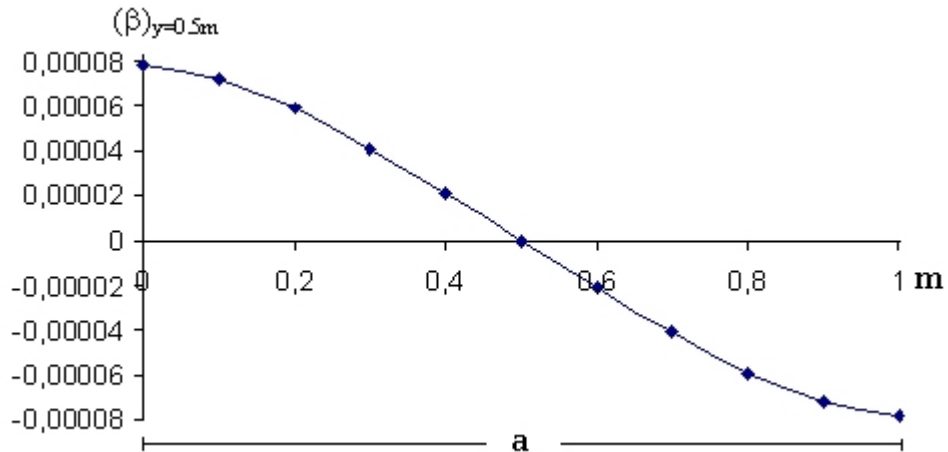
(4.45) denklemi (4.36) koşulları için çözüldüğünde, farklı a , b oranları için elde edilen sonuçlar Şekil 4.2 , Şekil 4.3, Şekil 4.4 ve Şekil 4.5'de sunulmuştur. (4.45) denkleminin, Fortran editöründe hazırlanmış Euler yöntemiyle çözümü EK de sunulmaktadır



Şekil 4.2 M_x momentinin $y=0,5m$ simetri eksenı boyunca $b/a=1,2,3,4$ değęerlerine karşı gelen değışimleri

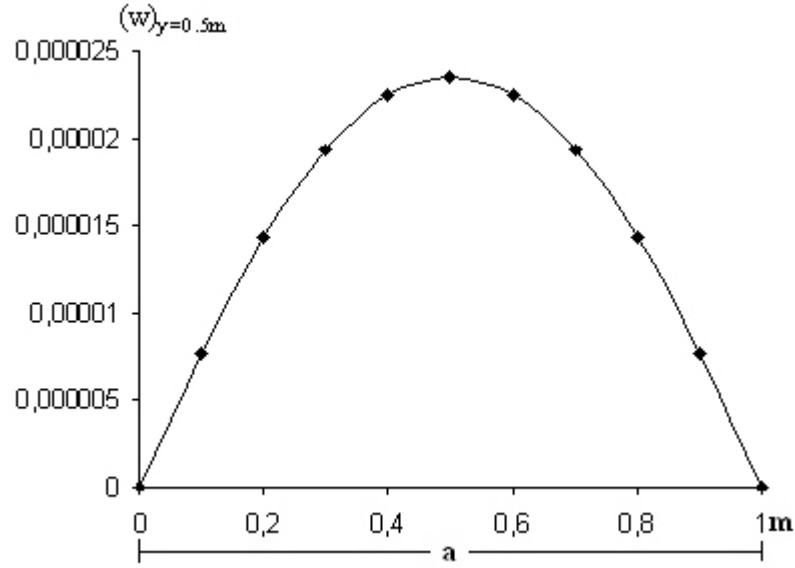
Şekil 4.2'deki M_x değęerleri, $b/a=1,2,3,4$ için sırasıyla; 0,0370286 tm/m, 0,0100442 tm/m, 0,0128287 tm/m ve 0,0135199 tm/m olarak görölmektedir.

Girkmann tarafından Galerkin yöntemiyle yapılan çözümde ise, $b/a=1,2,3,4$ oranları için maksimum moment değęerleri sırasıyla 0,0368 pa^2 , 0,0938 pa^2 , 0,1159 pa^2 , 0,11225 pa^2 değęerlerine ulaşılmıştır (Girkmann, 1965).



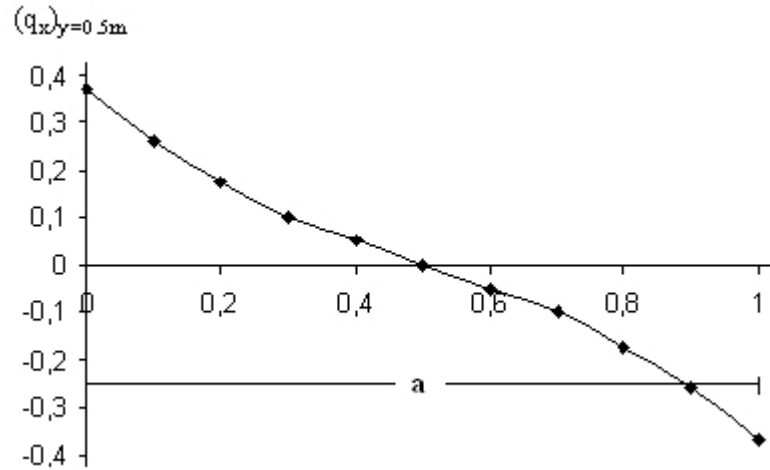
Şekil 4.3 β dönme açısının, $y=0,5m$ simetri eksenı boyunca $b/a=1$ değęerleri için değışimi

Şekil 4.3'de plak orta noktasında dönme açısının sıfır olduğu, bu noktadan itibaren ise eksi değęer aldığı görölmektedir. Mesnetlerde oluşan dönme açısı değęeri $\beta = 7,8 \times 10^{-5}$ rad'dır.



Şekil 4.4 w düşey yerdeğiştirmesinin, $y=0,5m$ simetri eksenı boyunca $b/a=1$ değeri için değışimi

Şekil 4.4’de mesnetlerde düşey yerdeğiştirme oluşmadığı görölmektedir. Plak orta noktasındaki çökme değeri $w=2.3 \times 10^{-5}$ m’dir.



Şekil 4.5 q_x kesme kuvvetinin, $y=0,5m$ simetri eksenı boyunca $b/a=1$ değeri için değışimi

Şekil 4.5’de en büyük kesme kuvveti değeri $q_x=0,381$ t/m olarak görölmektedir. Galerkin yöntemiyle yapılan çözümde ise reaksiyon kuvvetinin maksimum değeri $(q_x)_{max}=0,42$ pa bulunmuştur (Girkmann, 1965).

4.2.4 Kantorovich Yönteminde İki Terim Kullanılması

Kantorovich yöntemiyle yapılan çözümlerde bir varsayımdan yola çıkıldığı için elde edilen sonuçlar kesin çözümü vermez. Bu yüzden ilk seçilen fonksiyonla yapılan çözümlere, ikinci bir fonksiyonla yapılan çözümlerin eklenmesinde fayda vardır. Buradaki amaç kesin sonuca biraz daha yaklaşımdır.

Bu çözümde 4.2.3 bölümünde yapılan çözüme $w_2(x) \sin \frac{3\pi y}{b}$ fonksiyonu eklenmektedir:

$$w = w_1 \sin \frac{\pi y}{b} + w_2 \sin \frac{3\pi y}{b} \quad (4.46)$$

(4.2) ve (4.46) denklemlerinden

$$L = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) - \left(\beta_1 \sin \frac{\pi y}{b} + \beta_2 \sin \frac{3\pi y}{b} \right) = 0 \quad (4.47)$$

denklemini elde edilebilir. Kantorovich yöntemi gereği (4.47) denklemini ayrı ayrı $\sin \frac{\pi y}{b}$ ve

$\sin \frac{3\pi y}{b}$ fonksiyonlarıyla çarpılıp integre edildiğinde, yani;

$$\begin{aligned} \int_0^b L \sin \frac{\pi y}{b} dy &= 0 \\ \int_0^b L \sin \frac{3\pi y}{b} dy &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

integrasyonları yapıldığında:

$$w_{1,x} = \beta_1 \quad (4.49a)$$

$$w_{2,x} = \beta_2 \quad (4.49b)$$

denklemleri elde edilir. (4.4) ve (4.46) denklemlerinden

$$L = \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) + \left(\frac{M_{x1}}{K} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{M_{x2}}{K} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) = 0 \quad (4.50)$$

denklemini elde edilebilir. (4.50) denkleminde (4.48) integrasyonları yapılırsa:

$$\beta_{1,x} = -\frac{M_{x1}}{K} \quad (4.51a)$$

$$\beta_{2,x} = -\frac{M_{x2}}{K} \quad (4.51b)$$

denklemleri elde edilir. (4.6) ve (4.46) denklemlerinden

$$\begin{aligned} L = & \left(q_{x1} \sin \frac{\pi y}{b} + q_{x2} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) + K \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) \\ & + K \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\beta_1 \sin \frac{\pi y}{b} + \beta_2 \sin \frac{3\pi y}{b} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

denklemleri elde edilebilir. (4.52) denkleminin (4.48) integrasyonları yapılırsa:

$$M_{x1,x} = q_{x1} - \frac{\pi^2}{b^2} K \beta_1 \quad (4.53a)$$

$$M_{x2,x} = q_{x2} - \frac{9\pi^2}{b^2} K \beta_2 \quad (4.53b)$$

denklemleri elde edilir. (4.9) ve (4.46) denklemlerinden

$$\begin{aligned} L = & \left(\frac{\partial q_{x1}}{\partial x} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{\partial q_{x2}}{\partial x} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) + K \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) \\ & - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(M_{x1} \sin \frac{\pi y}{b} + M_{x2} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) - P = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

denklemleri elde edilebilir. (4.54) denklemlerine (4.48) integrasyonları yapılırsa:

$$q_{x1,x} = \frac{\pi^2}{b^2} M_{x1} + \frac{\pi^4}{b^4} K w_1 - \frac{4P}{\pi} \quad (4.55a)$$

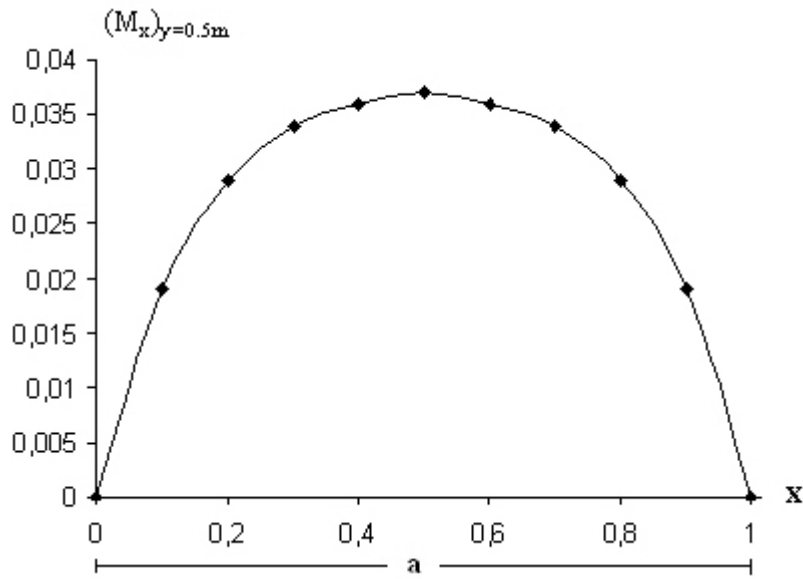
$$q_{x2,x} = \frac{9\pi^2}{b^2} M_{x2} + \frac{81\pi^4}{b^4} K w_2 - \frac{4P}{3\pi} \quad (4.55b)$$

denklemleri elde edilir. (4.49a), (4.51a), (4.53a), (4.55a) denklemlerinin (4.38), (4.39), (4.40),

(4.44) denklemleriyle aynı olması nedeniyle sadece $w_2(x) \sin \frac{3\pi y}{b}$ fonksiyonu için çözüm yapmak mümkündür. (4.49b), (4.51b), (4.53b), (4.55b) denklemleri (4.34) denkleminde yerine konulduğunda:

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \beta_2 \\ M_{x2} \\ q_{x2} \end{Bmatrix}_{,x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{K} & 0 \\ 0 & -\frac{9\pi^2 K}{b^2} & 0 & 1 \\ \frac{81\pi^4 K}{b^4} & 0 & \frac{9\pi^2}{b^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \beta_2 \\ M_{x2} \\ q_{x2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4P}{3\pi} \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

şeklinde yazılabilir. (4.56) denklemi (4.36) koşulları için çözüldüğünde çıkan sonuçların 4.2.3’de elde edilen sonuçlara eklenmesiyle elde edilen sonuçlar Şekil 4.6’da sunulmaktadır.



Şekil 4.6 M_x momentinin $y=0,5m$ simetri eksenı boyunca $b/a=1$ değerine karşı gelen değışimi

4.2.3 bölümünde elde edilen M_x değerinin 4.2.4 bölümünde elde edilen M_x değerlerinin superpozisyonuyla, plak orta noktasında $M_x=0,0372$ tm/m değeri elde edilmiştir.

4.2.5 Boyutsuzlaştırma

Burada yapılacak boyutsuzlaştırma işlemi ile şu ana kadar elde edilen sonuçlar kuvvet, uzunluk gibi boyutlardan bağımsız, oransal ifadelerle elde edilecektir.

Plakla ilgili yerdeğıştirme, dönme açısı, moment, kesme kuvveti, x koordinatı ve yük ifadeleri

çeşitli çarpanlarla boyutsuz hale getirilebilir:

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{x}{h} & b^* &= \frac{b}{h} & P^* &= P \frac{h^3}{K} \\
 w_1^* &= \frac{w_1}{h} & \beta_1^* &= \beta \\
 M_{x1}^* &= M_{x1} \frac{h}{K} & q_{x1}^* &= q_{x1} \frac{h^2}{K}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

(4.38) bağıntısında (4.57) ifadeleri kullanıldığında

$$w_{1,x}^* = \beta_1^* \tag{4.58}$$

denklemini elde edilir. (4.39) bağıntısında (4.57) ifadeleri kullanıldığında

$$\beta_{1,x}^* = -M_{x1}^* \tag{4.59}$$

denklemini elde edilir. (4.40) bağıntısında (4.57) ifadeleri kullanıldığında

$$M_{x1,x}^* = q_{x1}^* - \frac{\pi^2}{b^{*2}} \beta_1^* \tag{4.60}$$

denklemini elde edilir. (4.44) bağıntısında (4.57) ifadeleri kullanıldığında

$$q_{x1,x}^* = \frac{\pi^4}{b^{*4}} w_1^* + \frac{\pi^2}{b^{*2}} M_{x1}^* - \frac{4}{\pi} P^* \tag{4.61}$$

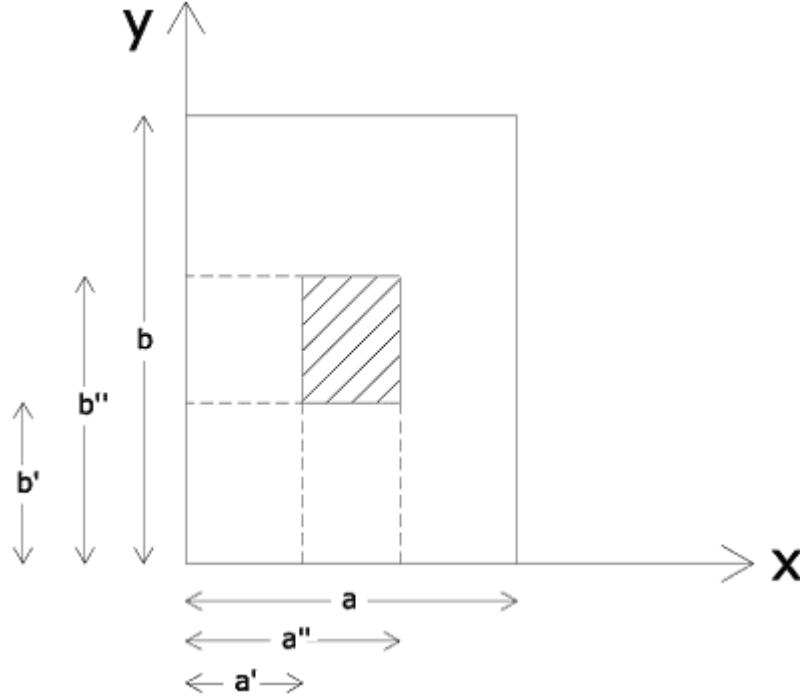
denklemini elde edilir. (4.58) , (4.59) , (4.60) , (4.61) denklemleri, (4.34) denkleminde yerine konulduğunda

$$\begin{Bmatrix} w_1^* \\ \beta_1^* \\ M_{x1}^* \\ q_{x1}^* \end{Bmatrix}_{,x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi^2}{b^{*2}} & 0 & 1 \\ \frac{\pi^4}{b^{*4}} & 0 & \frac{\pi^2}{b^{*2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^* \\ \beta_1^* \\ M_{x1}^* \\ q_{x1}^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4P^*}{\pi} \end{Bmatrix} \tag{4.62}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.62) denklemi görüldüğü gibi bir önceki çözümde elde edilen (4.45) denkleminde bulunan plak eğilme rijitliği sabitinden bağımsız ve oransal ifadelerden oluşmuştur. İlgili denklemin çözümünden elde edilen sonuçlar, 4.2.3 bölümünde sunulan sonuçlarla aynıdır.

4.3 Bir Diktörtgen İçerisinde Tesir Eden, Düzgün Yayılı Yük Tesiri Altındaki Plakın Çözümü



Şekil 4.7 Plak yükleme durumu

Bu bölümde dört kenarı serbest mesnetlenmiş Şekil 4.7'deki şekilde yüklenmiş plakın çözümü sunulmaktadır. Şekildeki plakın, Fortran editöründe hazırlanmış Euler yöntemiyle çözümü EK-1 de sunulmaktadır. Ekte sunulan program Şekil 4.7'in genel çözümü için hazırlanmıştır. Ancak bu bölümde yapılan çözümde aşağıdaki değerler için çözüm yapılmış ve yine bu değerler için Navier çözümüyle karşılaştırılmıştır:

$$\begin{aligned}
 a &= b = 1m \\
 a' &= b' = 0,3m \\
 a'' &= b'' = 0,7m \\
 P &= 1t/m^2
 \end{aligned}
 \tag{4.63}$$

w'nin y eksenini yönündeki davranışı için

$$w = w(x, y) \cong w_1(x) \sin \frac{\pi y}{b}
 \tag{4.64}$$

şeklinde bir tahmin yapılmıştır. P yükünden bağımsız olan (4.38), (4.39) ve (4.40)

denklemleri aynı şekilde bu problem içinde kullanılabilirler. Ancak P yüküne bağlı $q_{x1,x}$ bağıntısı için özel bir çözüm yapmak gerekmektedir. Plak denklemi yükün olduğu yerlerde $\frac{P}{K}$ 'ya eşit olurken, diğer yerlerde sıfıra eşittir.

(4.64) kullanılarak plak denklemi

$$L = \sin \frac{\pi y}{b} \left(w_{1,xxxx} + \frac{2\pi^2}{b^2} \frac{M_{x1}}{K} + w_1 \frac{\pi^4}{b^4} \right) - \frac{P}{K} \begin{matrix} 0(0 \rightarrow b') \\ (b' \rightarrow b'') \\ 0(b'' \rightarrow b) \end{matrix} = 0 \quad (4.65)$$

şeklinde yazılabilir. (4.65) denklemi Kantorovich yöntemi gereği $\sin \frac{\pi y}{b}$ 'le çarpılıp y'ye göre

integre edildiğinde, yani

$$\int_0^{b'} L \sin \frac{\pi y}{b} dy + \int_{b'}^{b''} \left(L - \frac{P}{K} \right) \sin \frac{\pi y}{b} dy + \int_{b''}^b L \sin \frac{\pi y}{b} dy = 0 \quad (4.66)$$

integrasyonu yapıldığında

$$w_{1,xxxx} = -\frac{2\pi^2}{b^2} \frac{M_{x1}}{K} - w_1 \frac{\pi^4}{b^4} - \frac{2P}{\pi K} \left(\cos \frac{\pi b''}{b} - \cos \frac{\pi b'}{b} \right) \quad (4.67)$$

denklemleri elde edilir.

$$\frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi b''}{b} - \cos \frac{\pi b'}{b} \right) = KO \quad (4.68)$$

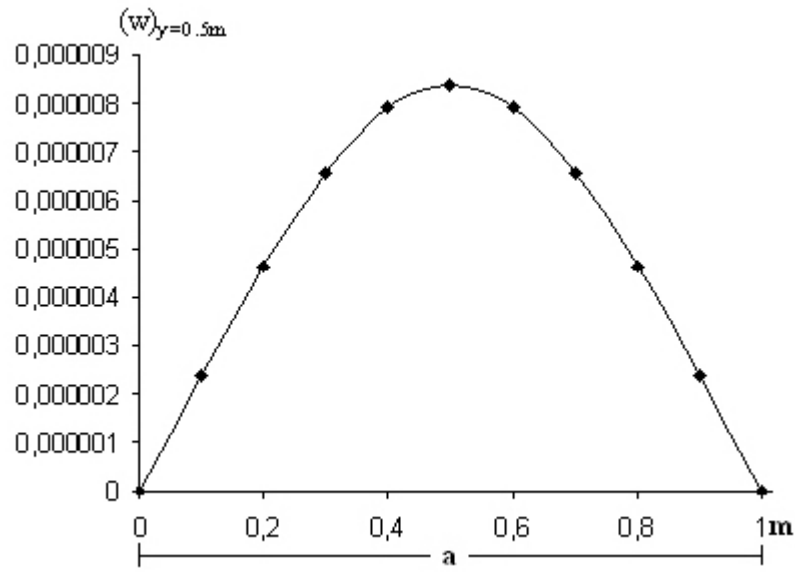
olarak ifade edildiğinde, (4.67) bağıntısı (4.8) denkleminde kullanıldığında

$$q_{x1,x} = w_1 K \frac{\pi^4}{b^4} + M_{x1} \frac{\pi^2}{b^2} + P(KO) \quad (4.69)$$

olarak ifade edilebilir. (4.38), (4.39), (4.40) ve (4.69) denklemleri (4.34) denkleminde kullanıldığında

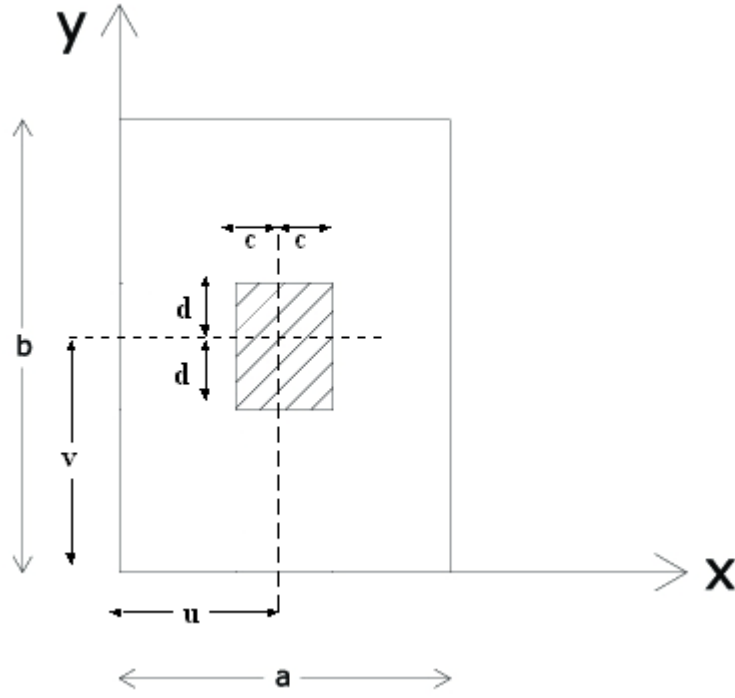
$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_1 \\ M_{x1} \\ q_{x1} \end{Bmatrix}_{,x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{K} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi^2 K}{b^2} & 0 & 1 \\ \frac{\pi^4 K}{b^4} & 0 & \frac{\pi^2}{b^2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_1 \\ M_{x1} \\ q_{x1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P(KO) \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.70) denklemi (4.36) sınır koşulları için çözüldüğünde Şekil 4.8’da sunulan sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 4.8 w düşey yer değiştirmesinin $y=0,5m$ simetri ekseni boyunca değişimi

En büyük düşey yerdeğiştirme değeri, plak orta noktasında oluşmaktadır ve değeri $w = 0,839814 \times 10^{-5} m$ 'dir (Şekil 4.8).



Şekil 4.9 Plak yükleme durumu

Navier (1823)' in, dikdörtgen içerisinde düzgün yayılı yük altındaki plağın (Şekil 4.9) çökme denklemi:

$$w = \frac{16Pa^4}{K\pi^6} \sum_n \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \times \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi v}{b} \sin \frac{m\pi d}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}}{m \left[1 + \left(\frac{a}{nb} \right)^2 m^2 \right]^2} \quad (4.71)$$

şeklindedir (Girkmann, 1956). Şekil 4.9'deki değerler Şekil 4.7'ye uyarlandığında

$$\begin{aligned} a &= b = 1m \\ v &= u = 0,5m \\ d &= c = 0,2m \\ P &= 1t/m^2 \end{aligned} \quad (4.72)$$

değerlerine ulaşılır. Plağın orta noktasındaki çökme değerini bulmak için (4.71) kullanıldığında:

$$\begin{aligned}
w_{\substack{x=0,5m \\ y=0,5m}} &= \frac{16}{K\pi^6} \left[\sin^2 0,5\pi \sin 0,2\pi \left(\frac{\sin^2 0,5\pi \sin 0,2\pi}{(1+1)^2} + \frac{\sin^2 0,5\pi \sin 0,2\pi 2}{2(1+2^2)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2^5} \sin^2 0,5\pi 2 \sin 0,2\pi 2 \left(\frac{\sin^2 0,5\pi \sin 0,2\pi}{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2} + \frac{\sin^2 0,5\pi \sin 0,2\pi 2}{2\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 2^2\right)^2} \right) \right] \\
&= 9,51 \times 10^{-5} \left[0,587 \left(\frac{0,587}{4} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$w_{\substack{x=0,5m \\ y=0,5m}} = 0,82 \times 10^{-5} m$$

sonucu elde edilir. Görüldüğü gibi Navier denkleminde elde edilen çökme değeri ile Kantorovich yöntemiyle bu çalışmada elde edilen sonuç (Şekil 4.6) çok yakındır.

4.3.1 Özel Hal: Düzgün Yayılı Yük Tesiri Altındaki Plak

Bu alt bölümde, Şekil 4.7'deki plak yükleme durumu refans alınarak, düzgün yayılı yük altındaki bir plağın çözümü sunulmaktadır. Bu yükleme durumu, 4.3 bölümünde incelenen plağın özel durumudur.

İlgili problemde boyutlar:

$$a = b = 1m$$

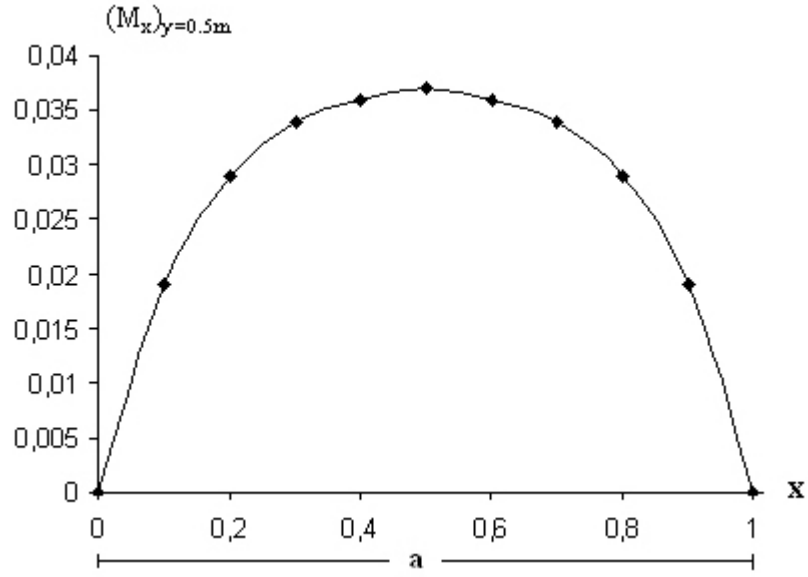
$$a' = b' = 0$$

$$a'' = b'' = 1m$$

$$P = 1t/m^2$$

(4.72)

şeklinde olmaktadır. Ek-1 de sunulan, Fortan editöründe hazırlanmış programın, bu özel durum için datalarının değiştirilerek yeniden yazılmasıyla oluşturulan program EK-2'de sunulmuştur. İlgili programın kullanılmasıyla Şekil 4.10'da sunulan sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 4.10 M_x momentinin $y=0,5m$ simetri eksenini boyunca $b/a=1$ değerine karşı gelen değişimi

Plak orta noktasında oluşan en büyük moment değeri $M_x=0,037 \text{ tm/m}$ olarak elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuç, 4.2 bölümünde elde edilen sonuçla aynıdır.

5. SONUÇLAR

Kantorovich yönteminden yararlanılarak, plak denkleminin kapalı ve sayısal çözümü yapılmıştır. Çalışmadan aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

- Denklemin kapalı çözümü ve sayısal çözümü aynı sonuçları vermektedir.
- Dört kenarı basit mesnetli plağın çözümünden elde edilen sonuçların, Girkmann (1965)' in Galerkin yöntemiyle elde ettiği sonuçlara çok yakın olduğu görülmüştür.
- Diktörtgen yayılı yük tesiri altındaki plağın çözümünden elde edilen sonuçlar, Navier (1823)' in çözümüyle elde edilen sonuçlara çok yakındır
- Ekte sunulan programlarda, dataalar değiştirilerek farklı boyutlandırma, farklı mesnetlenme ve farklı yükleme durumları için plağın herhangi bir kesitindeki kesit tesirleri, düey yer değiştirme değerleri bulunabilmektedir.

KAYNAKLAR

- Berktaş, İ., (1992), "Plak Teorisi ve Uygulamaları – Küçük Sehimli İnce Plaklar", Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, İstanbul
- Çağal, B., (1998), "Sayısal Analiz", Birsan Yayınevi, İstanbul
- Hildebrand, F.B., (1965), "Methodes of Applied Mathematics", 2. Baskı, Prentice-Hall Inc, England Cliffs, New Jersey
- Girkmann, K., (1965), "Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler – Levhaların, Plakların, Kabukların ve Düzlem Elemanlı Kabukların Elastostatikğine Giriş", İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul
- Kantorovich, L.V., Krylov, V.I., (1964), "Approximate Methods of Higher Analysis", Interscience Publishers, New York
- Karadeniz, A.A., (1999), "Yüksek Matematik – Cilt III", 7. Baskı, Çağlayan Kitabevi, İstanbul
- Köksal, E., (1975), "Silindirik kabukların Başlangıç Değerleri Metodları İle Hesabı", İstanbul Teknik Üniversitesi Mimarlık Fakültesi Baskı Atölyesi, İstanbul
- Kütüğü, Z., (1992), Plak Denklemlerinin Genel Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi
- Sokolnikoff, İ.S., (1965), "Matematik Elastisite Teorisi", İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi, İstanbul

C Euler Yönetmiyle Diktörtgen Düzgün Yayılı Yük Tesiri Altındaki Plak Çözümü

C * 18 / 7 / 1989 TARİHİNDE EN GELİSMİS SINIR DEĞER PROBLEMİ
COZUMU *****

C *** SINIR KOSULLARI GENEL ***** EULER YONTEMI *******

**DIMENSION Y(4),A(4,4),V(4,2),UU(4),R(2),Q(2,2),
&F(4),DD(4),L(2),RL(2),L1(2)**

**DOUBLE PRECISION F,Y,X,H,FN,Q,R,V,UU,XB,XS,PO,A,DK,P,PI,E,T,P2,RL
&,DD,AA,AAA,BB,BBB,B,B2**

**DATA N,FN,XB,XS,AA,AAA,B,BB,BBB,IE,E,PO,T,P/4,0.001D0,0.D0,1.D0,
&0.3D0,0.7D0,1.D0,0.3D0,0.7D0,0.2.1D+06,0.D0,0.1D0,1.D0/**

C FN : TOPLAM ARALIGIN BULUNDUGU SAYININ TERSİ .

C FN=ADIM UZUNLUGU/INTEGRAL ARALIGI

DATA V,UU/0.D0,1.D0,5*0.D0,1.D0,4*0.D0/

c DATA L,RL,L1/1,3,2*0.D0,1,3/

DATA L,RL,L1/1,3,2*0.D0,2,4/

open (6,file='HERHANGİ YÜK')

C L VEKTORU : SON SINIRDAKİ BİLİNEMLERİN SIRA NUMARALARI

**C L1 VEKTORU : BASLANGIC SINIRINDAKİ BİLİNMEYENLERİN SIRA
NUMARALARI**

C RL VEKTORU : SON SINIRDAKİ BİLİNEMLERİN DEĞERLER (SIRASIYLA)

C KB=0....UU 'YA KARŞI GELEN COZUM

C KB=N....V 'YE KARŞI GELEN COZUM

C KT=0....EKSİK SINIR KOSULLARINI HESAPLAMA ASAMASI...

C KT=1....BASLANGIC KOSULLARI BİLİNEMLERİN PROBLEMİN COZUMU

C IE : SONUCLARIN IE ADIMDA BİR YAZDIRILACAGI

C DK : PLAK EĞİLME RİJİTLİĞİ

C P : PLAK ÜZERİNDEKİ YÜK

C AA : a üssü

C AAA : ikiüssü

C BB : b üssü

C BBB : b ikiüssü

C E : ELESTİSİTE MODÜLÜ

C PO : POİSSON ORANI

C T : PLAK KALINLIĞI

NN=N/2

c Başlangıç ve son sınırdaki bilinmeyen sayıları eşit olursa NB=NN olmalı.

c Bunun dışındaki durumlarda NB'nin değeri ayarlanmalı

NB=NN

ier=0

PI=4.D0*DATAN(1.D0)

c write(*,*)pi

P2=PI*PI

B2=B*B

BKO=2.D0/PI*(dcos(pi*bbb/b)-dcos(pi*bb/b))

KT=0

ISAY=0

KB=0

X=XB

DO 71 I=1,N

```

71 Y(I)=UU(I)
   H=(XS-XB)*FN
   DK=E*T*T*T/(12.D0*(1.D0-PO*PO))
       DO 13 I=1,N
   DO 13 J=1,N
       F(I)=0.d0
13 A(I,J)=0.D0
   F(4)=P*BKO
   A(1,2)=1.D0
   A(2,3)=-1.D0/DK
   A(3,2)=-P2*DK/B2
   A(3,4)=1.D0
   A(4,1)=DK*P2*P2/B2/B2
   A(4,3)=P2/B2
35 if(x-aa)111,112,113
112 F(4)=P*BKO
    go to 115
113     if(x-aaa)112,112,111
111 f(4)=0.d0
115 DO 53 I=1,N
       DD(I)=0.D0
       DO 53 K=1,N
53 DD(I)=DD(I)+A(I,K)*Y(K)
   DO 83 I=1,N
83 Y(I)=Y(I)+DD(I)*H
   IF (KT) 61,61,84
61 IF (KB)84,84,85
84 DO 86 I=1,N
86 Y(I)=Y(I)+H*F(I)
85 IF (KT) 124,124,87
87 IF (ISAY-IE) 122,122,123
122 ISAY=ISAY+1
   GO TO 124
123     WRITE(6,66)X,(Y(I),I=1,N)
66     FORMAT(2X,'X=',D13.5,/,2X,'W=',D13.6,2X,'BETA=',D13.6,2X,
      &'MX=',D13.6,2X,'QX=',D13.6)
       ISAY=0
124     IF (X-XS)33,34,34
33       X=X+H
       GO TO 35
34       IF (KT) 51,51,52
51       IF (KB)
36 DO 72 I=1,N
72 UU(I)=Y(I)
       GO TO 38
37       DO 74 I=1,N
74       V(I,KB)=Y(I)
38       IF (KB-NB) 41,42,42
41       KB=KB+1
       DO 73 I=1,N
73       Y(I)=V(I,KB)

```

36,36,37

```

      X=XB
      GO TO 35
42 DO 43 I=1,NN
      R(I)=-UU(L(I))+RL(I)
      DO 43 J=1,NN
43      Q(I,J)=V(L(I),J)
      CALL DGELG(R,Q,NN,1,1.0D-08,IER)
      write(6,233)IER
233 format(2x,'IER=',I3)
c      WRITE (6,299)(R(I),I=1,NN)
c 299 FORMAT(2X,2D15.5)
      KT=1
      DO 991 I=1,N
991 Y(I)=0.D0
      do 666 I=1,NN
          II=L1(I)
666 Y(II)=R(I)
      X=XB
      WRITE(6,466)X,(Y(I),I=1,N)
466 FORMAT(2X,'X=',D13.5,/,2X,'W=',D13.6,2X,'BETA=',D13.6,2X,
      &'MX=',D13.6,2X,'QX=',D13.6)
      GO TO 35
52      STOP
      END
      subroutine dgelg(r,a,m,n,eps,ier)
      dimension a(1),r(1)
      double precision r,a,piv,tb,tol,pivi,eps
      if(m)23,23,1
1      ier=0
      piv=0.d0
      mm=m*m
      nm=n*m
      do 3 l=1,mm
      tb=dabs(a(l))
      if(tb-piv)3,3,2
2      piv=tb
      i=l
3      continue
      tol=eps*piv
      lst=1
      do 17 k=1,m
      if(piv)23,23,4
4      if(ier)7,5,7
5      if(piv-tol)6,6,7
6      ier=k-1
7      pivi=1.d0/a(i)
      j=(i-1)/m
      i=i-j*m-k
      j=j+1-k
      do 8 l=k,nm,m
      ll=l+i

```

```

    tb=pivi*r(ll)
    r(ll)=r(l)
8  r(l)=tb
    if(k-m)9,18,18
9  lend=lst+m-k
    if(j)12,12,10
10 ii=j*m
    do 11 l=lst,lend
        tb=a(l)
        ll=l+ii
        a(l)=a(ll)
11 a(ll)=tb
12 do 13 l=lst,mm,m
    ll=l+i
    tb=pivi*a(ll)
    a(ll)=a(l)
13 a(l)=tb
    a(lst)=j
    piv=0.d0
    lst=lst+1
    j=0
    do 16 ii=lst,lend
        pivi=-a(ii)
        ist=ii+m
        j=j+1
    do 15 l=ist,mm,m
        ll=l-j
        a(l)=a(l)+pivi*a(ll)
        tb=dabs(a(l))
        if(tb-piv)15,15,14
14 piv=tb
    i=l
15 continue
    do 16 l=k,nm,m
        ll=l+j
16 r(ll)=r(ll)+pivi*r(l)
17 lst=lst+m
18 if(m-1)23,22,19
19 ist=mm+m
    lst=m+1
    do 21 i=2,m
        ii=lst-i
        ist=ist-lst
        l=ist-m
        l=a(l)+.5d0
    do 21 j=ii,nm,m
        tb=r(j)
        ll=j
    do 20 k=ist,mm,m
        ll=ll+1
20 tb=tb-a(k)*r(ll)

```

```
    k=j+l  
    r(j)=r(k)  
21 r(k)=tb  
22 return  
23 ier=-1  
    return  
end
```

EK-2

C Euler Yönetmiyle Düzgün Yayılı Yük Tesiri Altındaki Plak için çözüm

DIMENSION Y(4),A(4,4),V(4,2),UU(4),R(2),Q(2,2),

&F(4),DD(4),L(2),RL(2),L1(2)

**DOUBLE PRECISION F,Y,X,H,FN,Q,R,V,UU,XB,XS,PO,A,DK,P,PI,E,T,P2,RL
&,DD,AA,AAA,BB,BBB,B,B2**

**DATA N,FN,XB,XS,AA,AAA,B,BB,BBB,IE,E,PO,T,P/4,0.001D0,0.D0,1.D0,
&0.D0,1.D0,1.D0,0.D0,1.D0,0,2.1D+06,0.D0,0.1D0,1.D0/**

C FN : TOPLAM ARALIGIN BULUNDUGU SAYININ TERSI .

C FN=ADIM UZUNLUGU/INTEGRAL ARALIGI

DATA V,UU/0.D0,1.D0,5*0.D0,1.D0,4*0.D0/

c DATA L,RL,L1/1,3,2*0.D0,1,3/

DATA L,RL,L1/1,3,2*0.D0,2,4/

open (6,file='HERHANGİ YÜK')

C L VEKTORU : SON SINIRDAKI BİLİNENLERİN SIRA NUMARALARI

**C L1 VEKTORU : BASLANGIC SINIRINDAKİ BİLİNMEYENLERİN SIRA
NUMARALARI**

C RL VEKTORU : SON SINIRDAKI BİLİNEN DEĞERLER (SIRASIYLA)

C KB=0....UU 'YA KARSİ GELEN COZUM

C KB=N....V 'YE KARSİ GELEN COZUM

C KT=0....EKSİK SINIR KOSULLARINI HESAPLAMA ASAMASI...

C KT=1....BASLANGIC KOSULLARI BİLİNEN PROBLEMİN COZUMU

C IE : SONUCLARIN IE ADIMDA BİR YAZDIRILACAGI

C DK : PLAK EĞİLME RİJİTLİĞİ

C P : PLAK ÜZERİNDEKİ YÜK

C AA : a üssü

C AAA : ikiüssü

C BB : b üssü

C BBB : b ikiüssü

C E : ELESTİSİTE MODÜLÜ

C PO : POISSON ORANI

C T : PLAK KALINLIĞI

NN=N/2

c Başlangıç ve son sınırdaki bilinmeyen sayıları eşit olursa NB=NN olmalı.

c Bunun dışındaki durumlarda NB'nin değeri ayarlanmalı

NB=NN

ier=0

PI=4.D0*DATAN(1.D0)

c write(*,*)pi

P2=PI*PI

B2=B*B

BKO=2.D0/PI*(dcos(pi*bbb/b)-dcos(pi*bb/b))

KT=0

ISAY=0

KB=0

X=XB

DO 71 I=1,N

71 Y(I)=UU(I)


```

H=(XS-XB)*FN
DK=E*T*T*T/(12.D0*(1.D0-PO*PO))
      DO 13 I=1,N
DO 13 J=1,N
      F(I)=0.d0
13 A(I,J)=0.D0
      F(4)=P*BKO
      A(1,2)=1.D0
      A(2,3)=-1.D0/DK
      A(3,2)=-P2*DK/B2
      A(3,4)=1.D0
      A(4,1)=DK*P2*P2/B2/B2
      A(4,3)=P2/B2
35 if(x-aa)111,112,113
112 F(4)=P*BKO
      go to 115
113      if(x-aaa)112,112,111
111 f(4)=0.d0
115 DO 53 I=1,N
      DD(I)=0.D0
      DO 53 K=1,N
53 DD(I)=DD(I)+A(I,K)*Y(K)
      DO 83 I=1,N
83 Y(I)=Y(I)+DD(I)*H
      IF (KT) 61,61,84
61 IF (KB)84,84,85
84 DO 86 I=1,N
86 Y(I)=Y(I)+H*F(I)
85 IF (KT) 124,124,87
87 IF (ISAY-IE) 122,122,123
122 ISAY=ISAY+1
      GO TO 124
123      WRITE(6,66)X,(Y(I),I=1,N)
66      FORMAT(2X,'X=',D13.5/,2X,'W=',D13.6,2X,'BETA=',D13.6,2X,
&'MX=',D13.6,2X,'QX=',D13.6)
      ISAY=0
124      IF (X-XS)33,34,34
33      X=X+H
      GO TO 35
34      IF (KT) 51,51,52
51      IF (KB)
36 DO 72 I=1,N
72 UU(I)=Y(I)
      GO TO 38
37      DO 74 I=1,N
74      V(I,KB)=Y(I)
38      IF (KB-NB) 41,42,42
41      KB=KB+1
      DO 73 I=1,N
73      Y(I)=V(I,KB)
      X=XB
36,36,37

```

```

      GO TO 35
42 DO 43 I=1,NN
      R(I)=-UU(L(I))+RL(I)
      DO 43 J=1,NN
43      Q(I,J)=V(L(I),J)
      CALL DGELG(R,Q,NN,1,1.0D-08,IER)
      write(6,233)IER
233 format(2x,'IER=',I3)
c      WRITE (6,299)(R(I),I=1,NN)
c 299 FORMAT(2X,2D15.5)
      KT=1
      DO 991 I=1,N
991 Y(I)=0.D0
      do 666 I=1,NN
          II=L1(I)
666 Y(II)=R(I)
      X=XB
      WRITE(6,466)X,(Y(I),I=1,N)
466 FORMAT(2X,'X=',D13.5,/,2X,'W=',D13.6,2X,'BETA=',D13.6,2X,
      &'MX=',D13.6,2X,'QX=',D13.6)
      GO TO 35
52      STOP
      END
      subroutine dgelg(r,a,m,n,eps,ier)
      dimension a(1),r(1)
      double precision r,a,piv,tb,tol,pivi,eps
      if(m)23,23,1
1  ier=0
      piv=0.d0
      mm=m*m
      nm=n*m
      do 3 l=1,mm
          tb=dabs(a(l))
          if(tb-piv)3,3,2
2  piv=tb
      i=1
3  continue
      tol=eps*piv
      lst=1
      do 17 k=1,m
          if(piv)23,23,4
4  if(ier)7,5,7
5  if(piv-tol)6,6,7
6  ier=k-1
7  pivi=1.d0/a(i)
      j=(i-1)/m
      i=i-j*m-k
      j=j+1-k
      do 8 l=k,nm,m
          ll=l+i
          tb=pivi*r(ll)

```

```

      r(ll)=r(l)
8  r(l)=tb
   if(k-m)9,18,18
9  lend=lst+m-k
   if(j)12,12,10
10 ii=j*m
   do 11 l=lst,lend
      tb=a(l)
      ll=l+ii
      a(l)=a(ll)
11 a(ll)=tb
12 do 13 l=lst,mm,m
      ll=l+i
      tb=pivi*a(ll)
      a(ll)=a(l)
13 a(l)=tb
      a(lst)=j
      piv=0.d0
      lst=lst+1
      j=0
      do 16 ii=lst,lend
         piv=-a(ii)
         ist=ii+m
         j=j+1
      do 15 l=ist,mm,m
         ll=l-j
         a(l)=a(l)+pivi*a(ll)
         tb=dabs(a(l))
         if(tb-piv)15,15,14
14 piv=tb
      i=l
15 continue
      do 16 l=k,nm,m
         ll=l+j
16 r(ll)=r(ll)+pivi*r(l)
17 lst=lst+m
18 if(m-1)23,22,19
19 ist=mm+m
      lst=m+1
      do 21 i=2,m
         ii=lst-i
         ist=ist-lst
         l=ist-m
         l=a(l)+.5d0
         do 21 j=ii,nm,m
            tb=r(j)
            ll=j
            do 20 k=ist,mm,m
               ll=ll+1
20 tb=tb-a(k)*r(ll)
      k=j+l

```

```
    r(j)=r(k)
21 r(k)=tb
22 return
23 ier=-1
    return
end
```

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 07.06.1978

Doğum yeri İstanbul

Lise 1989-1997 Özel Saint Benoit Fransız Lisesi

Lisans 1997-2001 İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fak.
İnşaat Mühendisliği Bölümü