

168442

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DAİRESEL SİLİNDİRİK BOŞLUK İÇEREN SONSUZ
ORTAMIN HARMONİK TİTREŞİMLERİ

İnş. Müh. Mehmet Sinan YETKİNŞEKERCİ

FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İrfan Coşkun

Prof. Dr. R. Faruk Yüksekeli

Doç. Dr. Tolay

AKSU ÖZKUL

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. İKİ BOYUTLU HALDE ELASTİSİTE DENKLEMLERİ	3
2.1 Düzlem Dışı Şekil Değiştirme	4
2.2 Düzlem Şekil Değiştirme	5
3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜM	7
4. SAYISAL SONUÇLAR	23
5. DEĞERLENDİRME VE ÖNERİLER	34
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	36

SİMGE LİSTESİ

a, b	Oyuk yarıçapları
A_n, B_n, C_n, D_n	Bessel trigonometrik çarpım serisi bilinmeyen sabitleri
E	Elastisite modülü
E_n	Serbest bilinmeyen değeri
f	Cisim kuvvetleri
G	Kayma modülü
H, h	Mesafeler
J_n, Y_n	Birinci ve ikinci nevi Bessel fonksiyonları
k	Boyutsuz kayma dalgası değeri
n_1, n_2	Kesit çevresinin dış birim normaline ait doğrultunun kosinüslerini
t	Zaman
u, w	Yer değiştirme
ω	Zorlama frekansı
σ	Normal gerilme
τ	Kayma gerilmesi
ν	Poisson katsayısı
ε	Şekil değiştirme oranı
θ	Açı değeri
∇	Kutupsal koordinatlar için Laplasyen
λ, μ	Lame sabitleri
δ	Kronecker deltası
ρ	Ortaman kütle yoğunluğu

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1	Uzun silindirik yeraltı yapısı 4
Şekil 3.1	Problemin geometrisi 7
Şekil 3.2	Ara yüzey geometrisi 16
Şekil 4.1a	$\omega = 60rd/s$, $\mu_2 = \mu_1$ ve $H_1 = H_2 = 15m$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler 25
Şekil 4.1b	$\omega = 60rd/s$, $\mu_2 = \mu_1$ ve $H_1 = H_2 = 15m$ için ikinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler 25
Şekil 4.2a	$\omega = 60rd/s$, $\mu_2 = \mu_1$ ve $H_1 = H_2 = 15m$ için ara yüzeydeki yer değiştirmeler 26
Şekil 4.2b	$\omega = 60rd/s$, $\mu_2 = \mu_1$ ve $H_1 = H_2 = 15m$ için ara yüzeydeki yer değiştirmeler 26
Şekil 4.3a	$\omega = 60rd/s$, $a = 5m$ ve $b = 3m$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler 27
Şekil 4.3b	$\omega = 60rd/s$, $a = 5m$ ve $b = 3m$ için ikinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler 27
Şekil 4.4a	$\omega = 60rd/s$, $a = 5m$, $b = 3m$ ve $\mu_2 = 2\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler 28
Şekil 4.4b	$\omega = 60rd/s$, $a = 5m$, $b = 3m$ ve $\mu_2 = 2\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler 28
Şekil 4.5a	$\omega = 60rd/s$, $a = 5m$, $b = 3m$ ve $\mu_2 = 2\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler 29
Şekil 4.5b	$\omega = 60rd/s$, $a = 5m$, $b = 3m$ ve $\mu_2 = 2\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler 29
Şekil 4.6a	$\omega = 60rd/s$ ve $\mu_2 = 4\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler 30
Şekil 4.6b	$w = 60rd/s$ ve $\mu_2 = 4\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler 30
Şekil 4.7	$\omega = 60rd/s$, $a = b = 3m$ ve $\mu_2 = \mu_1$ için oyuk yüzeyinde ve tepe noktasından geçen bir düzlemde ($\theta = 90^\circ$) yer değiştirme ve gerilmeler 31
Şekil 4.8	$\omega = 60rd/s$, $a = 5m$, $b = 3m$ ve $\mu_2 = 4\mu_1$ için oyuk yüzeyinde ve tepe noktasından geçen bir düzlemde ($\theta = 90^\circ$) yer değiştirme ve gerilmeler 32
Şekil 4.9	$a = 5m$, $b = 3m$ ve $\mu_2 = \mu_1$ için oyuk tepe noktasındaki yer değiştirmelerin w ile değişimi 33

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında değerli yardımlarını, bilgilerini, birikimini ve bilhassa zamanını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. İrfan Coşkun hocama teşekkürlerimi sunarım. Bununla birlikte bugüne kadar almış olduğum eğitime maddi ve manevi destekte bulunan ailem ve değerli hocalarıma müteşekkirim.

Bu araştırma Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nce desteklenmiştir. Proje No: 24-05-01-03



ÖZET

Sonsuz veya yarı sonsuz elastik ortam içinde yapılan yeraltı tünelleri ve boru hatları gibi mühendislik yapıları taşıt yükleri, sıvı ve gaz basınçları, deprem dalgaları ve patlama şok dalgaları gibi dinamik etkilere maruzdur. Bu nedenle, bu etkilerden dolayı yapıda veya ortamda oluşabilecek gerilme ve yer değiştirmelerin bilinmesi tasarım açısından önemlidir.

Bu çalışmada, iki dairesel silindirik boşluk içeren, farklı malzemeden oluşmuş lineer elastik bir sonsuz ortamın harmonik titreşimleri incelenmiştir. Her iki boşluğun eksen boyunca harmonik olarak zorlandığı kabul edilmiştir.

Birinci bölümde, konuyla ilgili önceki çalışmalardan ve bu çalışmada kullanılan yöntemden bahsedilmiştir. İkinci bölümde düzlem ve düzlem dışı şekil değiştirme hallerine ait hareket denklemleri verilmiştir. Üçüncü bölümde çözüm yöntemi anlatılmıştır. Her iki ortam için elde edilen denklemler Bessel-trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür. Çözümde ortaya çıkan bilinmeyen sabitler oyuk yüzeyleri ve ortak ara yüzey boyunca yazılan sınır koşulları yardımıyla hesaplanmıştır. Ara yüzeyde sonsuz sayıda nokta olması ve serilerin sonlu bir sayıda kesilmesi nedeniyle sınır koşulları tam olarak sağlatılamamaktadır. En Küçük Kareler Yöntemi kullanılarak, burada sınır koşulları yaklaşık olarak sağlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, Matlab 6.1 paket programı kullanılarak sayısal hesaplamalar yapılmış ve çeşitli parametreler için elde edilen yer değiştirme ve gerilmeler grafiklerle gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sonsuz ortam, silindirik oyuk, düzlem dışı şekil değiştirme, en küçük kareler yöntemi

ABSTRACT

Engineering buildings like underground tunnels and pipe lines buried in infinite or semi-infinite elastic medium are subjected to dynamic effects such as liquid and gas pressures, traffic loads, earthquake waves and explosive shock waves. So, it is important to know the displacements and stresses in structures caused by these effects for design purposes.

In this study, the harmonic vibrations of a linear elastic infinite medium which is made of different kinds of materials and includes two cylindrical cavities is investigated. Each cavity is subjected to a harmonic excitation which is applied parallel to the lengthwise direction.

In the first part of the study, past studies on the similar topic and the method used in this study are given. In the second part, equations of motion for the plain strain and anti-plane strain cases are given. In the third part, the formulation of the problem is made and the solution method is explained. The equations for each of the medium are solved analitically, by using the Bessel-trigonometric series. The unknown constants appeared in the solutions are obtained from the boundary conditions written on the cavity surfaces and the interface of the medium. The boundary conditions on the interface can not be satisfied exactly as there are infinite number of points and the series truncated for a finite number. Using the Least-Squares Technique, these conditions are satisfied approximately .

In the fourth part, the displacements and stresses obtained for various parameters are shown in the graphics. For obtaining the numerical results and the graphics, Matlab (version 6.1) is used.

Keywords: Infinite medium, cylindirical cavity, anti-plane strain, Least-Squares Technique.

1. GİRİŞ

Boşluk veya farklı tipten bir malzeme içeren elastik bir ortamın dinamik etkiler altındaki davranışı geçmişte pek çok araştırmanın konusu olmuştur (Eringen ve Şuhubi, 1974; Graff, 1975; Pao ve Mow, 1971). Bu tür bir ortamda yapılan yeraltı tünelleri ve boru hatları gibi mühendislik yapıları, taşıt yükleri, sıvı ve gaz basınçları, ani patlama şok dalgaları ve deprem dalgaları gibi dinamik etkilere maruz kalabilmektedir.

Elastik yarı sonsuz ortamda gömülü silindirik kabuğun sismik etki altındaki davranışı El-Akily ve Datta (1980, 1981) tarafından incelenmiştir. Aynı ortamda bulunan boru hattının etrafının farklı malzeme ile doldurulması halindeki davranışı Datta vd. (1984) tarafından, geometrisinin dairesel kabuktan farklı olması hali ise Wong vd. (1985) tarafından incelenmiştir. Yeraltı tünellerindeki trenlerin hareketi nedeniyle yerüstü yapılarına etkileri Balendra vd. (1989) ve Balendra vd. (1991) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalarda ortam viskoelastik, tünel ise rijit cisim olarak dikkate alınmıştır. Viskoelastik ortamda gömülü sonsuz uzun silindirik kabuğun sismik etki altındaki davranışı Luco ve De Barros (1994) tarafından incelenmiştir. Guan ve Moore (1993, 1996), birbirine paralel iki silindirik tünelin hareketli veya sismik yükler etkisi altındaki davranışını incelemişlerdir. Coşkun vd. (2003), iki paralel silindirik oyuk içeren, sonsuz ortamın harmonik titreşimlerini incelemişlerdir.

Bu çalışmada, paralel olarak yerleştirilmiş iki dairesel silindirik boşluk içeren farklı malzemeden oluşmuş bir sonsuz ortamın harmonik titreşimleri incelenmiştir. Her iki boşluğun eksen boyunca harmonik zorlamaya maruz kaldığı kabul edilmiştir. Zorlamanın oyuk eksenini boyunca olması nedeniyle problem bir düzlem dışı şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır. Ortamlar lineer elastik, homojen ve izotrop olarak kabul edilmiştir. Her iki ortam için elde edilen hareket denklemleri “Bessel-Trigonometrik” fonksiyon serileri yardımıyla çözülmüştür. Çözümde ortaya çıkan bilinmeyenler, oyuk iç yüzeylerinde ve ortamların ortak ara yüzeyi üzerinde yazılan sınır koşulları yardımıyla elde edilmiştir. Oyuk iç yüzeylerinde sınır koşulları tam olarak sağlanmaktadır. Bu sınır koşulları kullanılarak bilinmeyenlerin yarısı, diğerleri cinsinden elde edilmiştir. Ara yüzeyde yer değiştirme ve gerilmeler birbirine eşittir. Yüksek mertebeden ikinci nevi “Bessel” fonksiyonlarının özellikle küçük argüman büyük indis halinde ekstrem değerler alması nedeniyle, serilerde sonlu sayıda terim alınmıştır. Bu durumda ara yüzeyde yazılan sınır

koşullarının sayısı, bilinmeyen sayısından fazla olmaktadır. Bu nedenle ara yüzeydeki koşullar “En Küçük Kareler Yöntemi” kullanılarak yaklaşık olarak sağlatılmıştır. Sayısal işlemlerde Matlab paket programı kullanılarak, oyuk yüzeylerindeki yerdeğiştirme ve herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme ve gerilmelerin çeşitli parametrelerle değişimi grafiklerle gösterilmiştir.



2. İKİ BOYUTLU HALDE ELASTİSİTE DENKLEMLERİ

Bu bölümde lineer elastik, homojen ve izotrop ortamlar için düzlem ve düzlem dışı şekil değiştirme hallerine ait denklemler verilecektir.

Lineer elastik, homojen ve izotrop ortamlar için hareket denklemi:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

şeklindedir (Pao ve Mow, 1971). Burada ρ ortamın kütle yoğunluğunu ve f de cisim kuvvetlerini göstermektedir. Böyle bir ortamda gerilme-şekil değiştirme bağıntısı ise

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

şeklindedir. Buradaki λ ve μ “Lame” sabitleridir. Bu sabitler, Poisson oranı ve elastisite modülleri cinsinden

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.3)$$

olarak alınabilir. Şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasında ise

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

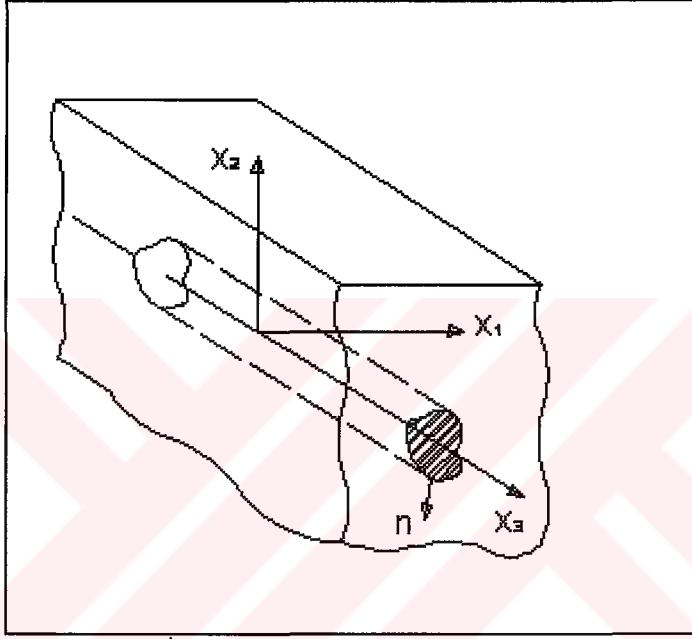
bağıntısı bulunmaktadır. (2.4) bağıntısı (2.2) bağıntısında yerine yazılırsa, gerilmeler yer değiştirmeler cinsinden

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Bu gerilme ifadeleri (2.1) hareket denkleminde yerine yazılırsa, hareket denklemi:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} + \rho f_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

olarak “Navier Denklemi” elde edilir. Birçok uygulamada incelenen elastik cismin bir doğrultuda, diğerleri yanında daha uzun veya daha kısa olan bir karakteristik boyu vardır. Bu doğrultuda da cismin kesit alanı sabit olmaktadır. Örneğin, uzun tüneller ve sabit kalınlıklı ince plaklarda bu böyledir. Özel yükleme durumları dikkate alınarak, bu tür bir geometriye sahip cisimde hareket denklemleri basitleştirilebilir. Bunun için yer değiştirmeler bakımından çeşitli yaklaşımlar yapılmaktadır. Buna, bir doğrultuda kesit alanı sabit uzun bir yeraltı tüneli örnek olarak verilebilir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Uzun silindirik yeraltı yapısı

Bu tünel probleminde yüklerin uygulanış biçimine göre iki durum ortaya çıkabilir. Eğer yayılı yük eksene (x_3) paralel olarak uygulanırsa, baskın olan yerdeğiştirme bu doğrultuda olur ve problem bir düzlem dışı şekil değiştirme problemi olarak alınabilir. Yüklerin eksene dik ve üniform olarak uygulanması halinde ise bu doğrultuda yer değiştirme meydana gelmez ve problem düzlem şekil değiştirme problemi olur.

2.1 Düzlem Dışı Şekil Değiştirme

Şekil 2.1 deki cisim için düzlem dışı şekil değiştirme

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = w(x_1, x_2, t) \quad (2.7)$$

yer değiştirme bileşenleri ile verilmektedir. Gerilmeler ise, (2.5) denklemi dikkate alındığında aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\sigma_{13} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \quad (2.8)$$

(2.7) eşitlikleri ile verilen yer değiştirmeler (2.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

olarak hareket denklemi elde edilir. Sınır koşulları ise kesit çevresinde, cismin rijit bağlı olması halinde

$$w = 0 \quad (2.10)$$

ve gerilmesiz yüzey halinde

$$n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} = \mu \left[\cos(x_1, n) \frac{\partial w}{\partial x_1} + \cos(x_2, n) \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] = 0 \quad (2.11)$$

olarak yazılmaktadır. Burada n_1 ve n_2 , kesit çevresinin dış birim normaline ait doğrultman kosinüslerini göstermektedir. Yukarıda verilen denklemlerde kartezyen koordinatlar kullanılmakla beraber problemin geometrisine göre silindirik koordinatlarda kullanılabilir. Bu durumda x_1 , x_2 düzlem eğrisel koordinatlar olup x_3 eksenine diktir ve (2.7) bağıntıları aynen geçerlidir. Yalnız yer değiştirme (w) ile ilgili uygun dönüşümler yapmak gerekmektedir.

2.2 Düzlem şekil Değiştirme

Bu durumda şekil (2.1) için yer değiştirmeler

$$u_1 = u(x_1, x_2, t), \quad u_2 = v(x_1, x_2, t), \quad u_3 = 0 \quad (2.12)$$

olarak alınabilir. Gerilme bileşenlerinden x_3 eksenine boyunca hesaplanan σ_{13} ve σ_{23} gerilmeleri sıfırdır. σ_{33} bileşeni ise diğerleri cinsinden

$$\sigma_{33} = -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.13)$$

olarak elde edilir. Sıfırdan farklı diğer bileşenler ise,

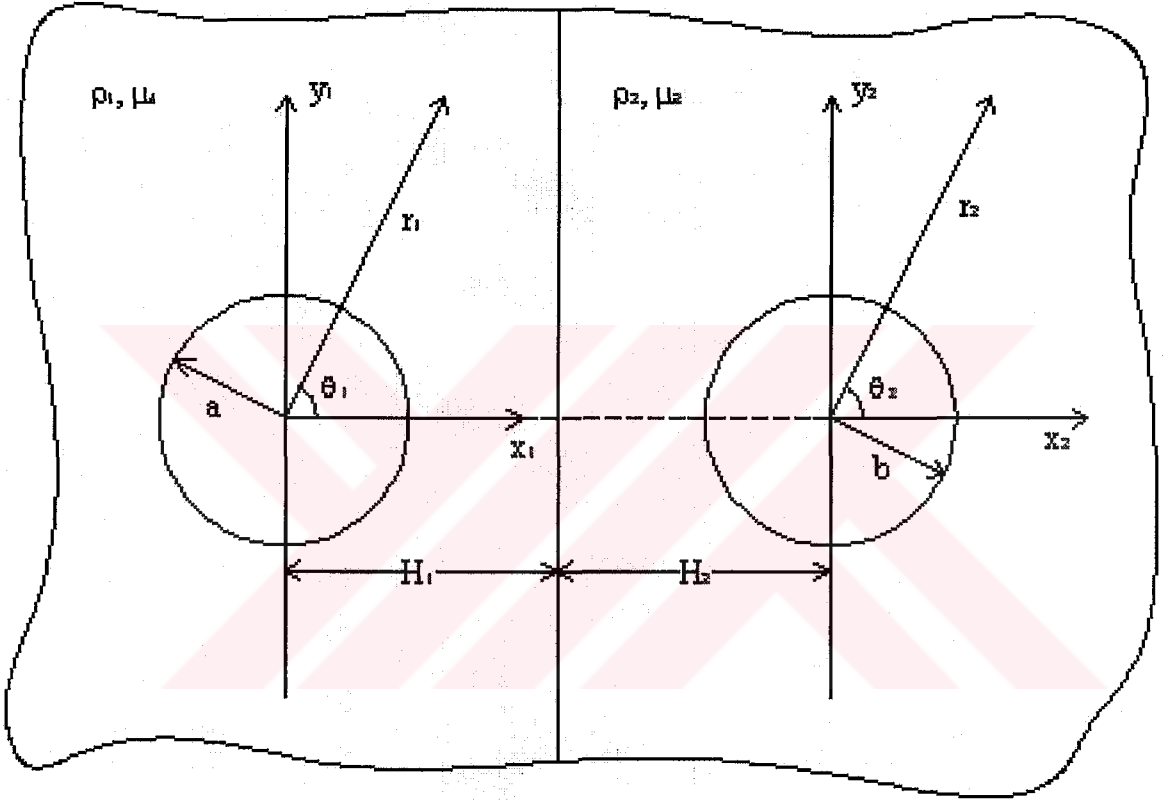
$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \mu \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2 \quad (2.14)$$

bağıntısından bulunabilir. Hareket denklemi ise aşağıdaki gibi olur:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \mu \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + \rho f_\beta = \rho \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (2.15)$$

3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜM

Farklı malzemeden oluşmuş bir sonsuz ortamda, yarıçapları a ve b olan paralel iki silindirik oyuk alalım. Oyukların ortamları birbirinden ayıran düzleme uzaklıkları H_1 ve H_2 dir. Her iki oyukta eksenleri doğrultusunda (z eksenî) $\tau_{0a}e^{i\omega_1 t}$ ve $\tau_{0b}e^{i\omega_2 t}$ yayılı harmonik iç zorlama etkisi altındadır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Problemin geometrisi

Oyukların geometrisi nedeniyle kutupsal koordinatların kullanılması uygun olmaktadır. Zorlama ve geometri nedeni ile problem bir düzlem dışı şekil değiştirme problemidir. Bu nedenle, (2.7) ve (2.8) eşitlikleri ile verilen yerdeğiştirme ve gerilmeler kutupsal koordinatların kullanılması ile aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = u_z(r, \theta, t) \neq 0 \quad (3.1)$$

$$\tau_{rr} = 0, \quad \tau_{\theta\theta} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \tau_{zz} = 0, \quad \tau_{rz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \tau_{\theta z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad (3.2)$$

Bu durumda, herhangi bir ortam için, kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi ve (2.1) denklemi yardımıyla hareket denklemi

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \tau_{rz} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

olarak yazılmaktadır. Diğer doğrultulardaki hareket denklemleri ise özdeş olarak sağlanmaktadır. (3.2) ifadesindeki gerilmelerin (3.3) denkleminde yerine yazılması ile, her iki ortam için hareket denklemleri yerdeğiştirmeler cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}\right)_i + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_i + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}\right)_i = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)_i \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\right)_i, \quad i=1,2. \quad (3.4)$$

Bu ifadede ρ ve μ , sırasıyla ortamın kütle yoğunluğunu ve kayma modülünü göstermektedir. Probleme ait sınır koşulları ortak ara yüzeyde ve oyuk iç yüzeylerinde yazılacaktır. $r_1 = a$ ve $r_2 = b$ için oyuk iç yüzeyinde;

$$\tau_{rz}^{(1)}(a, \theta_1, t) = \tau_{0a} e^{i\omega_1 t}, \quad \tau_{rz}^{(2)}(b, \theta_2, t) = \tau_{0b} e^{i\omega_2 t} \quad (3.5)$$

ve $r_1 = H_1 / \cos \theta_1$ ve $r_2 = H_2 / \cos \theta_2$ için ortak ara yüzeyde;

$$u_z^{(1)}(H_1 / \cos \theta_1, \theta_1, t) = u_z^{(2)}(H_2 / \cos \theta_2, \theta_2, t) \quad (3.6)$$

$$\tau_{xz}^{(1)}(H_1 / \cos \theta_1, \theta_1, t) = \tau_{xz}^{(2)}(H_2 / \cos \theta_2, \theta_2, t) \quad (3.7)$$

olarak yazılabilir.

Sisteme etki eden zorlama etkileri harmonik olduğından, gerilmeler ve yer değıştirmeler de harmoniktir. Bu nedenle yer değıştirme ifadelerinde aşağıdaki ayrıştırmalar yapılabilir.

$$u_z^{(1)}(r_1, \theta_1, t) = V_1(r_1, \theta_1) e^{i\omega_1 t} + V_1^*(r_1, \theta_1) e^{i\omega_2 t} \quad (3.8)$$

$$u_z^{(2)}(r_2, \theta_2, t) = V_2(r_2, \theta_2) e^{i\omega_1 t} + V_2^*(r_2, \theta_2) e^{i\omega_2 t} \quad (3.9)$$

İfadelerdeki ω_1 ve ω_2 , oyuklara etki eden kuvvetlerin zorlama frekanslarını göstermektedir. Bu ayrıştırma sonrasında, elde edilen değışlerin (3.4) denkleminde yerine yazılması ve düzenleme yapılması ile, aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$\nabla^2 V_1 + k_{11}^2 V_1 = 0 \quad (3.10)$$

$$\nabla^2 V_1 + k_{12}^2 V_1^* = 0 \quad (3.11)$$

$$\nabla^2 V_2 + k_{21}^2 V_2 = 0 \quad (3.12)$$

$$\nabla^2 V_2 + k_{22}^2 V_2^* = 0 \quad (3.13)$$

Bu denklemlerdeki $k_{11} = \omega_1 \sqrt{\rho_1 / \mu_1}$, $k_{12} = \omega_2 \sqrt{\rho_1 / \mu_1}$, $k_{21} = \omega_1 \sqrt{\rho_2 / \mu_2}$, $k_{22} = \omega_2 \sqrt{\rho_2 / \mu_2}$ terimleri ortamlara ait boyutsuz kayma dalgası değerlerini göstermektedir. ∇^2 ise kutupsal koordinatlar için Laplasyen olup $\nabla^2 = (\partial^2 / \partial r^2) + (1/r)(\partial / \partial r) + (1/r^2)(\partial^2 / \partial \theta^2)$ dir.

(3.5) – (3.7) sınır koşulları ve (3.10) – (3.13) hareket denklemleri incelendiğinde, lineer teoremin kullanılması ve harmonik zorlama nedenleri ile $\omega_1 \neq \omega_2$ durumu için V_i ve V_i^* çözümleri arasında herhangi bir girişim olmamaktadır. Bu nedenle $\omega_1 = \omega_2$ ve $\omega_1 = 0$ (veya $\omega_2 = 0$) olması hallerinde yapılan çözümler yeterlidir. Yani (3.8) ve (3.9) denklemleri

$$u_z^{(1)}(r_1, \theta_1, t) = V_1(r_1, \theta_1) e^{i\omega_1 t} \quad (3.14)$$

$$u_z^{(2)}(r_2, \theta_2, t) = V_2(r_2, \theta_2) e^{i\omega_1 t} \quad (3.15)$$

halini alacaktır. Bu durumda (3.11) ve (3.13) denklemlerine gerek duyulmayacaktır. (3.10) ve (3.12) denklemlerinin çözümleri, sonsuz terimli Bessel trigonometrik çarpım serileri ve θ açısına göre simetrisinin de göz önüne alınması ile, aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$V_1(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(k_{11} r_1) + B_n Y_n(k_{11} r_1)] \cos n\theta_1 \quad (3.16)$$

$$V_2(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n J_n(k_{21} r_2) + D_n Y_n(k_{21} r_2)] \cos n\theta_2 \quad (3.17)$$

Bu ifadelerde yer alan J_n ve Y_n terimleri birinci ve ikinci nevi Bessel fonksiyonlarıdır. A_n , B_n , C_n , D_n bilinmeyen sabitleri ise, sınır koşulları yardımıyla elde edilecektir. Oyuk yüzeylerindeki sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

$$\tau_{rz}|_{r=a} = \tau_{0a} \rightarrow \mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial r_1} \Big|_{r=a} = \tau_{0a} \quad (3.18)$$

$$\tau_{rz}|_{r=b} = \tau_{0b} \rightarrow \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial r_2} \Big|_{r=b} = \tau_{0b} \quad (3.19)$$

Birleşim yüzeyinde ise, $u_z^{(1)} = u_z^{(2)}$ ve $\tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)}$ olacağından; $\bar{r}_1 = H_1/\cos\theta_1$, $\bar{r}_2 = H_2/\cos\theta_2$ kısaltmaları ile buradaki sınır koşulları:

$$\begin{aligned} V_1|_{\bar{r}_1} &= V_2|_{\bar{r}_2}, \\ \tau_{xz}^{(1)}|_{\bar{r}_1} &= \tau_{xz}^{(2)}|_{\bar{r}_2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

olarak yazılabilir. Sıfırdan farklı gerilme bileşenleri olan τ_{rz} ve $\tau_{\theta z}$ yardımıyla τ_{xz} kayma gerilmesi

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (3.21)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (3.22)$$

olarak yazılabilir. $\partial r/\partial x = \cos\theta$ ve $\partial \theta/\partial x = -(1/r)\sin\theta$ olduğundan

$$\tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \sin\theta \right] \quad (3.23)$$

olarak elde edilir. Bu durumda, birleşim yüzeyinde;

$$\mu_1 \left[\frac{\partial V_1}{\partial \bar{r}_1} \cos\theta_1 - \frac{1}{\bar{r}_1} \frac{\partial V_1}{\partial \theta_1} \sin\theta_1 \right] \Big|_{\bar{r}_1} = \mu_2 \left[\frac{\partial V_2}{\partial \bar{r}_2} \cos\theta_2 - \frac{1}{\bar{r}_2} \frac{\partial V_2}{\partial \theta_2} \sin\theta_2 \right] \Big|_{\bar{r}_2} \quad (3.24)$$

ifadesi elde edilir. (3.18) ve (3.19) bağıntılarındaki τ_{0a} ve τ_{0b} , zorlama fonksiyonlarına ait genlikleri göstermektedir. Bağıntılardaki serilerin çözümünde sonsuz sayıda terim alınması pratikte mümkün değildir. Bundan başka Bessel fonksiyonlarından Y_n , küçük argüman ve büyük indis olması halinde uç değerler almakta ve sayısal işlemlerde zorluk çıkarmaktadır. Bu nedenle (3.10) ve (3.12) ifadelerindeki seri çözümleri bir N sayısında kesilmiştir. Bunun

sonucunda problemin bilinmeyen sabitlerinin sayısı $4 \times N + 4$ olmaktadır. Bu sabitlerin hesabında (3.18), (3.19) ve (3.20) sınır koşulları kullanılacaktır. (3.18) ve (3.19) sınır koşullarından;

$$\sum_{n=0}^N [A_n (\frac{n}{a} J_n(k_{11}a) - k_{11} J_{n+1}(k_{11}a)) + B_n (\frac{n}{a} Y_n(k_{11}a) - k_{11} Y_{n+1}(k_{11}a))] \cos n\theta_1 = \frac{\tau_{0a}}{\mu_1} \delta_{0n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.25)$$

$$\sum_{n=0}^N [C_n (\frac{n}{b} J_n(k_{21}b) - k_{21} J_{n+1}(k_{21}b)) + D_n (\frac{n}{b} Y_n(k_{21}b) - k_{21} Y_{n+1}(k_{21}b))] \cos n\theta_2 = \frac{\tau_{0b}}{\mu_2} \delta_{0n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.26)$$

denklemleri elde edilir. Denklemlerin elde edilmesinde, Bessel fonksiyonları için:

$$\frac{\partial J_n(k_{11}\bar{r}_1)}{\partial \bar{r}_1} = \frac{n}{\bar{r}_1} J_n(k_{11}\bar{r}_1) - k_{11} J_{n+1}(k_{11}\bar{r}_1) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial Y_n(k_{11}\bar{r}_1)}{\partial \bar{r}_1} = \frac{n}{\bar{r}_1} Y_n(k_{11}\bar{r}_1) - k_{11} Y_{n+1}(k_{11}\bar{r}_1)$$

bağıntısı kullanılmıştır.

(3.25) ve (3.26) ifadelerinden $2 \times N + 2$ denklem yazılmaktadır. Denklemlerde yer alan δ_{0n} , Kronecker deltasını göstermektedir. Birleşim yüzeyinde yazılan (3.20) ve (3.24) sınır koşullarından, $\bar{r}_1 = H_1 / \cos \theta_1$ ve $\bar{r}_2 = H_2 / \cos \theta_2$ alınması ile:

$$\sum_{n=0}^N [A_n J_n(k_{11}\bar{r}_1) + B_n Y_n(k_{11}\bar{r}_1)] \cos n\theta_1 = \sum_{n=0}^N [C_n J_n(k_{21}\bar{r}_2) + D_n Y_n(k_{21}\bar{r}_2)] \cos n\theta_2 \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & \mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} [\{A_n (\frac{n}{\bar{r}_1} J_n(k_{11}\bar{r}_1) (\cos n\theta_1 \cos \theta_1 + \sin n\theta_1 \sin \theta_1) - k_{11} J_{n+1}(k_{11}\bar{r}_1) \cos n\theta_1 \cos \theta_1) \\ & + B_n (\frac{n}{\bar{r}_1} Y_n(k_{11}\bar{r}_1) (\cos n\theta_1 \cos \theta_1 + \sin n\theta_1 \sin \theta_1) - k_{11} Y_{n+1}(k_{11}\bar{r}_1) \cos n\theta_1 \cos \theta_1)\}] \\ & = \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} [\{C_n (\frac{n}{\bar{r}_2} J_n(k_{21}\bar{r}_2) (\cos n\theta_2 \cos \theta_2 + \sin n\theta_2 \sin \theta_2) - k_{21} J_{n+1}(k_{21}\bar{r}_2) \cos n\theta_2 \cos \theta_2) \\ & + D_n (\frac{n}{\bar{r}_2} Y_n(k_{21}\bar{r}_2) (\cos n\theta_2 \cos \theta_2 + \sin n\theta_2 \sin \theta_2) - k_{21} Y_{n+1}(k_{21}\bar{r}_2) \cos n\theta_2 \cos \theta_2)\}] \end{aligned} \quad (3.28)$$

denklemleri elde edilmektedir. (3.28) denkleminin düzenlenmesi ile bu denklem:

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n \left(\frac{n}{\bar{r}_1} J_n(k_{11}\bar{r}_1) \cos(n\theta_1 - \theta_1) - k_{11} J_{n+1}(k_{11}\bar{r}_1) \cos n\theta_1 \cos \theta_1 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_n \left(\frac{n}{\bar{r}_1} Y_n(k_{11}\bar{r}_1) \cos(n\theta_1 - \theta_1) - k_{11} Y_{n+1}(k_{11}\bar{r}_1) \cos n\theta_1 \cos \theta_1 \right) \right\} \right] \\
& = \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ C_n \left(\frac{n}{\bar{r}_2} J_n(k_{21}\bar{r}_2) \cos(n\theta_2 - \theta_2) - k_{21} J_{n+1}(k_{21}\bar{r}_2) \cos n\theta_2 \cos \theta_2 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + D_n \left(\frac{n}{\bar{r}_2} Y_n(k_{21}\bar{r}_2) \cos(n\theta_2 - \theta_2) - k_{21} Y_{n+1}(k_{21}\bar{r}_2) \cos n\theta_2 \cos \theta_2 \right) \right\} \right] \quad (3.29)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (3.27) ve (3.29) ifadelerinden de $2 \times N + 2$ denklem elde edilebilir. Bununla birlikte, yukarıdaki bağıntıların birleşim yüzeyinin her noktası için sağlanması mümkün değildir. Bu nedenle, birleşim yüzeyi üzerindeki koşulların sağlatılmasında “En Küçük Kareler Yöntemi” kullanılarak, bu koşullar yaklaşık olarak sağlatılacaktır. Yöntemin uygulamasından önce (3.25) ve (3.26) eşitlikleri yardımıyla $2 \times N + 2$ bilinmeyen diğerleri cinsinden ifade edilecektir. Bunun için (3.25) denklemini dikkate alınırsa, $n = 0$ için:

$$A_0 J_1(k_{11}a) + B_0 Y_1(k_{11}a) = -\frac{\tau_{0a}}{\mu_1 k_{11}} \quad (3.30)$$

ve $n > 0$ için:

$$A_n \left[\frac{n}{a} J_n(k_{11}a) - k_{11} J_{n+1}(k_{11}a) \right] + B_n \left[\frac{n}{a} Y_n(k_{11}a) - k_{11} Y_{n+1}(k_{11}a) \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.31)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde,

$$\begin{aligned}
f_{01} &= J_1(k_{11}a), \quad f_{02} = Y_1(k_{11}a), \quad P_{0a} = -\frac{\tau_{0a}}{\mu_1 k_{11}}, \quad f_{1n} = \left[\frac{n}{a} J_n(k_{11}a) - k_{11} J_{n+1}(k_{11}a) \right], \\
f_{2n} &= \left[\frac{n}{a} Y_n(k_{11}a) - k_{11} Y_{n+1}(k_{11}a) \right] \quad (3.32)
\end{aligned}$$

kısaltmaları yapılır ve denklemler düzenlenirse;

$$A_0 = -\frac{f_{02}}{f_{01}} B_0 + \frac{P_{0a}}{f_{01}} \quad (3.33)$$

$$A_n = -\frac{f_{2n}}{f_{1n}} B_n, \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.34)$$

bağıntıları elde edilir. Benzer şekilde (3.26) denklemi dikkate alındığında, $n=0$ için:

$$C_0 J_1(k_{21}b) + D_0 Y_1(k_{21}b) = -\frac{\tau_{0b}}{\mu_2 k_{21}} \quad (3.35)$$

ve $n > 0$ için:

$$C_n \left[\frac{n}{b} J_n(k_{21}b) - k_{21} J_{n+1}(k_{21}b) \right] + D_n \left[\frac{n}{b} Y_n(k_{21}b) - k_{21} Y_{n+1}(k_{21}b) \right] = 0, \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.36)$$

denklemleri elde edilmektedir. Bu denklemlerde;

$$\begin{aligned} g_{01} &= J_1(k_{21}b), \quad g_{02} = Y_1(k_{21}b), \quad P_{0b} = -\frac{\tau_{0b}}{\mu_2 k_{21}}, \quad g_{1n} = \left[\frac{n}{b} J_n(k_{21}b) - k_{21} J_{n+1}(k_{21}b) \right], \\ g_{2n} &= \left[\frac{n}{b} Y_n(k_{21}b) - k_{21} Y_{n+1}(k_{21}b) \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

kısaltmaları yapılır ve denklemler düzenlenirse:

$$C_0 = -\frac{g_{02}}{g_{01}} D_0 + \frac{P_{0b}}{g_{01}} \quad (3.38)$$

$$C_n = -\frac{g_{2n}}{g_{1n}} D_n, \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.39)$$

bağıntıları elde edilir. Böylece sabitlerin yarısı diğerleri cinsinden elde edilmiş olur. Elde edilen bu bağıntılar yerine yazıldığında ara yüzey için yazılan (3.20) yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{P_{0a}}{f_{01}} J_0(k_{11}\bar{r}_1) + \left[-\frac{f_{02}}{f_{01}} J_0(k_{11}\bar{r}_1) + Y_0(k_{11}\bar{r}_1) \right] B_0 + \sum_{n=1}^N B_n \left[-\frac{f_{2n}}{f_{1n}} J_n(k_{11}\bar{r}_1) + Y_n(k_{11}\bar{r}_1) \right] \cos n\theta_1 \\ &\quad n=0,1,2,\dots,N \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$V_2 = \frac{P_{0b}}{g_{01}} J_0(k_{21}\bar{r}_2) + \left[-\frac{g_{02}}{g_{01}} J_0(k_{21}\bar{r}_2) + Y_0(k_{21}\bar{r}_2) \right] D_0 + \sum_{n=1}^N D_n \left[-\frac{g_{2n}}{g_{1n}} J_n(k_{21}\bar{r}_2) + Y_n(k_{21}\bar{r}_2) \right] \cos n\theta_2$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N$$
(3.41)

Bu eşitliklerde,

$$P_a(\bar{r}_1) = \frac{P_{0a}}{f_{01}} J_0(k_{11}\bar{r}_1), \quad \alpha_{10}(\bar{r}_1) = \left[-\frac{f_{02}}{f_{01}} J_0(k_{11}\bar{r}_1) + Y_0(k_{11}\bar{r}_1) \right],$$

$$\alpha_{1n}(\bar{r}_1) = \left[-\frac{f_{2n}}{f_{1n}} J_n(k_{11}\bar{r}_1) + Y_n(k_{11}\bar{r}_1) \right] \cos n\theta_1, \quad P_b(\bar{r}_2) = \frac{P_{0b}}{g_{01}} J_0(k_{21}\bar{r}_2),$$

$$\beta_{10}(\bar{r}_2) = \left[-\frac{g_{02}}{g_{01}} J_0(k_{21}\bar{r}_2) + Y_0(k_{21}\bar{r}_2) \right], \quad \beta_{1n}(\bar{r}_2) = \left[-\frac{g_{2n}}{g_{1n}} J_n(k_{21}\bar{r}_2) + Y_n(k_{21}\bar{r}_2) \right] \cos n\theta_2 \quad (3.42)$$

kısaltmaları yapılırsa, (3.40) ve (3.41) eşitlikleri:

$$V_1 = P_a(\bar{r}_1) + \alpha_{10}(\bar{r}_1) B_0 + \sum_{n=1}^N \alpha_{1n}(\bar{r}_1) B_n \quad (3.43)$$

$$V_2 = P_b(\bar{r}_2) + \beta_{10}(\bar{r}_2) D_0 + \sum_{n=1}^N \beta_{1n}(\bar{r}_2) D_n \quad (3.44)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde yukarıda elde edilen sabitler yardımıyla (3.20) den gerilme ifadeleri;

$$\tau_{xz}^{(1)} = -\mu_1 \frac{P_{0a}}{f_{01}} k_{11} J_1(k_{11}\bar{r}_1) \cos \theta_1 + \left[\mu_1 \frac{f_{02}}{f_{01}} k_{11} J_1(k_{11}\bar{r}_1) \cos \theta_1 - \mu_1 k_{11} Y_1(k_{11}\bar{r}_1) \cos \theta_1 \right] B_0$$

$$+ \mu_1 \sum_{n=1}^N \left[-\frac{f_{2n}}{f_{1n}} \left(\frac{n}{\bar{r}_1} J_n(k_{11}\bar{r}_1) \cos(n\theta_1 - \theta_1) - k_{11} J_{n+1}(k_{11}\bar{r}_1) \cos n\theta_1 \cos \theta_1 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{n}{\bar{r}_1} Y_n(k_{11}\bar{r}_1) \cos(n\theta_1 - \theta_1) - k_{11} Y_{n+1}(k_{11}\bar{r}_1) \cos n\theta_1 \cos \theta_1 \right] B_n \quad (3.45)$$

$$\tau_{xz}^{(2)} = -\mu_2 \frac{P_{0b}}{g_{01}} k_{21} J_1(k_{21}\bar{r}_2) \cos \theta_2 + \left[\mu_2 \frac{g_{02}}{g_{01}} k_{21} J_1(k_{21}\bar{r}_2) \cos \theta_2 - \mu_2 k_{21} Y_1(k_{21}\bar{r}_2) \cos \theta_2 \right] D_0$$

$$+ \sum_{n=1}^N \mu_2 \left[-\frac{g_{2n}}{g_{1n}} \left(\frac{n}{\bar{r}_2} J_n(k_{21}\bar{r}_2) \cos(n\theta_2 - \theta_2) - k_{21} J_{n+1}(k_{21}\bar{r}_2) \cos n\theta_2 \cos \theta_2 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{n}{\bar{r}_2} Y_n(k_{21}\bar{r}_2) \cos(n\theta_2 - \theta_2) - k_{21} Y_{n+1}(k_{21}\bar{r}_2) \cos n\theta_2 \cos \theta_2 \right] D_n \quad (3.46)$$

olarak elde edilir. Burada da,

$$\begin{aligned}
 P_{aa}(\bar{r}_1) &= -\mu_1 \frac{P_{0a}}{f_{01}} k_{11} J_1(k_{11} \bar{r}_1) \cos \theta_1, \quad \alpha_{100}(\bar{r}_1) = [\mu_1 \frac{f_{02}}{f_{01}} k_{11} J_1(k_{11} \bar{r}_1) \cos \theta_1 - \mu_1 k_{11} Y_1(k_{11} \bar{r}_1) \cos \theta_1], \\
 \alpha_{11n}(\bar{r}_1) &= \mu_1 \sum_{n=1}^N [-\frac{f_{2n}}{f_{1n}} (\frac{n}{\bar{r}_1} J_n(k_{11} \bar{r}_1) \cos(n\theta_1 - \theta_1) - k_{11} J_{n+1}(k_{11} \bar{r}_1) \cos n\theta_1 \cos \theta_1), \\
 P_{bb}(\bar{r}_2) &= -\mu_2 \frac{P_{0b}}{g_{01}} k_{21} J_1(k_{21} \bar{r}_2) \cos \theta_2, \\
 \beta_{100}(\bar{r}_2) &= [\mu_2 \frac{g_{02}}{g_{01}} k_{21} J_1(k_{21} \bar{r}_2) \cos \theta_2 - \mu_2 k_{21} Y_1(k_{21} \bar{r}_2) \cos \theta_2] \\
 \beta_{11n}(\bar{r}_2) &= \mu_2 [-\frac{g_{2n}}{g_{1n}} (\frac{n}{\bar{r}_2} J_n(k_{21} \bar{r}_2) \cos(n\theta_2 - \theta_2) - k_{21} J_{n+1}(k_{21} \bar{r}_2) \cos n\theta_2 \cos \theta_2) \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

kısaltmaları yapılırsa, (3.45) ve (3.46) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

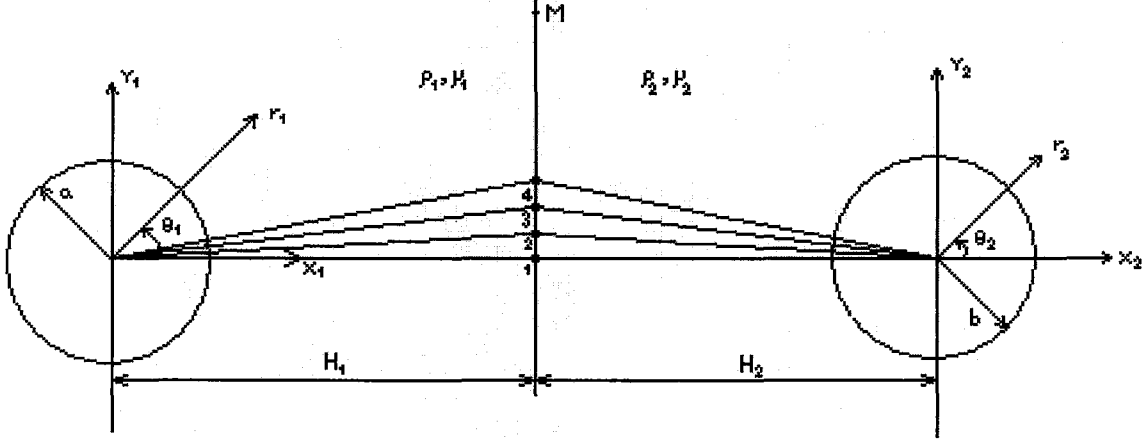
$$\tau_{xz}^{(1)} = P_{aa}(\bar{r}_1) + \alpha_{100}(\bar{r}_1) B_0 + \sum_{n=1}^N \alpha_{11n}(\bar{r}_1) B_n \quad (3.48)$$

$$\tau_{xz}^{(2)} = P_{bb}(\bar{r}_2) + \beta_{100}(\bar{r}_2) D_0 + \sum_{n=1}^N \beta_{11n}(\bar{r}_2) D_n \quad (3.49)$$

Ara yüzeydeki yerdeğiştirme ve gerilmeler için yazılan (3.43), (3.44), (3.48) ve (3.49) denklemlerinde B_0 , B_n , D_0 ve D_n bilinmeyenleri görülmektedir. Bunların hesabı için, daha önce bahsedilen “En Küçük Kareler Yöntemi” kullanılacaktır. Bu yöntemle göre;

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{k=1}^M (V_1^{(k)} - V_2^{(k)})^2 \\
 S_2 &= \sum_{k=1}^M ((\tau_{xz}^{(k)})_1 - (\tau_{xz}^{(k)})_2)^2 \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

toplamları minimum olmalıdır. Bunun için ara yüzey üzerinde herhangi bir k noktasında $\theta_1^{(k)}$ seçilmekte ve geometriden;



Şekil 3.2 Ara yüzey geometrisi

$\tan \theta_1^{(k)} = h_1^{(k)} / H_1$, $\tan \theta_2^{(k)} = -h_1^{(k)} / H_2$ yazılarak

$$\tan \theta_2^{(k)} = -H_1 / H_2 \tan \theta_1^{(k)} \quad (3.51)$$

bağıntısı yardımıyla $\theta_2^{(k)}$ hesaplanmaktadır. (3.27) ve (3.29) eşitlikleri (3.50) ifadelerinde yerine yazılıp minimum olma koşulu kullanılırsa;

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_n} = \sum_{k=1}^M [V_1 \left(\frac{\partial V_1}{\partial E_n} \right) - V_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial E_n} \right)] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial E_n} = \sum_{k=1}^M [\tau_{xz}^{(1)} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{(1)}}{\partial E_n} \right) - \tau_{xz}^{(2)} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{(2)}}{\partial E_n} \right)] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.53)$$

bağıntıları elde edilir. Burada E_n serbest bilinmeyenleri (B_0 , B_n , D_0 ve D_n) göstermektedir. Bu bağıntılardan $2 \times N + 2$ denklem yazılabilmekte ve elde edilen lineer denklem takımı çözülerek bu bilinmeyenler hesaplanmaktadır.

Ara yüzey üzerinde herhangi bir noktadaki $\theta_1^{(k)}$ ve $\theta_2^{(k)}$ değerleri, dolayısıyla $r_1^{(k)}$ ve $r_2^{(k)}$ değerleri bilindiğine göre (3.43), (3.44), (3.48) ve (3.49) eşitlikleri (3.50) de yerine yazılırsa:

$$S_1 = \sum_{k=1}^M \{ P_a(\bar{r}_{1k}) + \alpha_{10}(\bar{r}_{1k})B_0 + \sum_{n=1}^N \alpha_{1n}(\bar{r}_{1k})B_n - P_b(\bar{r}_{2k}) - \beta_{10}(\bar{r}_{2k})D_0 - \sum_{n=1}^N \beta_{1n}(\bar{r}_{2k})D_n \}^2 = \min \quad (3.54)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^M \{P_{aa}(\bar{r}_{1k}) + \alpha_{100}(\bar{r}_{1k})B_0 + \sum_{n=1}^N \alpha_{11n}(\bar{r}_{1k})B_n - P_{bb}(\bar{r}_{2k}) - \beta_{100}(\bar{r}_{2k})D_0 - \sum_{n=1}^N \beta_{11n}(\bar{r}_{2k})D_n\}^2 = \min \quad (3.55)$$

ifadeleri bulunur. Bundan sonra (3.52) ve (3.53) ifadelerindeki türetmeler aşağıdaki gibi yapılmaktadır.

$$\frac{\partial S_1}{\partial B_0} = 0 \text{ eşitliğinden;}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M (P_a(\bar{r}_{1k})\alpha_{10}(\bar{r}_{1k}) - P_b(\bar{r}_{2k})\alpha_{10}(\bar{r}_{1k})) + B_0 \sum_{k=1}^M \alpha_{10}^2(\bar{r}_{1k}) + D_0 \sum_{k=1}^M -\beta_{10}(\bar{r}_{2k})\alpha_{10}(\bar{r}_{1k}) \\ & + \sum_{n=1}^N B_n \sum_{k=1}^M \alpha_{1n}(\bar{r}_{1k})\alpha_{10}(\bar{r}_{1k}) + \sum_{n=1}^N D_n \sum_{k=1}^M -\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})\alpha_{10}(\bar{r}_{1k}) = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \chi_{10}(\bar{r}_{1k}) &= \sum_{k=1}^M (P_a(\bar{r}_{1k})\alpha_{10}(\bar{r}_{1k}) - P_b(\bar{r}_{2k})\alpha_{10}(\bar{r}_{1k})), \quad \chi_{20}(\bar{r}_{1k}) = \sum_{k=1}^M \alpha_{10}^2(\bar{r}_{1k}), \\ \chi_{30}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M -\beta_{10}(\bar{r}_{2k})\alpha_{10}(\bar{r}_{1k}), \quad \chi_{4n}(\bar{r}_{1k}) = \sum_{k=1}^M \alpha_{1n}(\bar{r}_{1k})\alpha_{10}(\bar{r}_{1k}), \quad \chi_{5n}(\bar{r}_k) = \sum_{k=1}^M -\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})\alpha_{10}(\bar{r}_{1k}) \\ & \quad r = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.57)$$

kısaltmaları yapılırsa, (3.56) denklemini aşağıdaki gibi olur:

$$\chi_{10}(\bar{r}_{1k}) + \chi_{20}(\bar{r}_{1k})B_0 + \chi_{30}(\bar{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \chi_{4n}(\bar{r}_{1k}) + \sum_{n=1}^N D_n \chi_{5n}(\bar{r}_k) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial D_0} = 0 \text{ eşitliğinden:}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M (-P_a(\bar{r}_{1k})\beta_{10}(\bar{r}_{2k}) + P_b(\bar{r}_{2k})\beta_{10}(\bar{r}_{2k})) + B_0 \sum_{k=1}^M (-\alpha_{10}(\bar{r}_{1k})\beta_{10}(\bar{r}_{2k})) + D_0 \sum_{k=1}^M \beta_{10}^2(\bar{r}_{2k}) \\ & + \sum_{n=1}^N B_n \sum_{k=1}^M (-\alpha_{1n}(\bar{r}_{1k})\beta_{10}(\bar{r}_{2k})) + \sum_{n=1}^N D_n \sum_{k=1}^M (\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})\beta_{10}(\bar{r}_{2k})) = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned}
\gamma_{10}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (-P_a(\bar{r}_{1k})\beta_{10}(\bar{r}_{2k}) + P_b(\bar{r}_{2k})\beta_{10}(\bar{r}_{2k})), & \gamma_{20}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (-\alpha_{10}(\bar{r}_{1k})\beta_{10}(\bar{r}_{2k})), \\
\gamma_{30}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M \beta_{10}^2(\bar{r}_{2k}), & \gamma_{4n}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (-\alpha_{1n}(\bar{r}_{1k})\beta_{10}(\bar{r}_{2k})), & \gamma_{5n}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})\beta_{10}(\bar{r}_{2k})) \\
& & & & r &= 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.60}$$

kısaltmaları yapılırsa (3.59) denklemi, aşağıdaki gibi olur:

$$\gamma_{10}(\bar{r}_k) + \gamma_{20}(\bar{r}_k)B_0 + \gamma_{30}(\bar{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \gamma_{4n}(\bar{r}_k) + \sum_{n=1}^N D_n \gamma_{5n}(\bar{r}_k) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \tag{3.61}$$

$\frac{\partial S_1}{\partial B_r} = 0$ eşitliğinden:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^M (P_a(\bar{r}_{1k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k}) - P_b(\bar{r}_{2k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k})) + B_0 \sum_{k=1}^M (\alpha_{10}(\bar{r}_{1k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k})) + D_0 \sum_{k=1}^M (-\beta_{10}(\bar{r}_{2k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k})) \\
& + \sum_{n=1}^N B_n \sum_{k=1}^M (\alpha_{1n}(\bar{r}_{1k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k})) + \sum_{n=1}^N D_n \sum_{k=1}^M (-\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k})) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.62}$$

denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
P_r(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (P_a(\bar{r}_{1k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k}) - P_b(\bar{r}_{2k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k})), & B_{01r}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (\alpha_{10}(\bar{r}_{1k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k})), \\
D_{01r}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (-\beta_{10}(\bar{r}_{2k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k})), & F_{nr}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (\alpha_{1n}(\bar{r}_{1k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k})), \\
G_{nr}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (-\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})\alpha_{1r}(\bar{r}_{1k})), & r &= 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.63}$$

kısaltmaları yapılırsa, (3.62) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$P_r(\bar{r}_k) + B_{01r}(\bar{r}_k)B_0 + D_{01r}(\bar{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n F_{nr}(\bar{r}_k) + \sum_{n=1}^N D_n G_{nr}(\bar{r}_k) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \tag{3.64}$$

$\frac{\partial S_1}{\partial D_r} = 0$ eşitliğinden:

$$\sum_{k=1}^M (-P_a(\bar{r}_{1k})\beta_{1r}(\bar{r}_{2k}) + P_b(\bar{r}_{2k})\beta_{1r}(\bar{r}_{2k})) + B_0 \sum_{k=1}^M (-\alpha_{10}(\bar{r}_{1k})\beta_{1r}(\bar{r}_{2k})) + D_0 \sum_{k=1}^M \beta_{10}(\bar{r}_{2k})\beta_{1r}(\bar{r}_{2k})$$

$$+\sum_{n=1}^N B_n \sum_{k=1}^M (-\alpha_{1n}(\bar{r}_{1k})\beta_{1r}(\bar{r}_{2k})) + \sum_{n=1}^N D_n \sum_{k=1}^M (\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})\beta_{1r}(\bar{r}_{2k})) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (3.65)$$

denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} P_{2r}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (-P_a(\bar{r}_{1k})\beta_{1n}(\bar{r}_{2k}) + P_b(\bar{r}_{2k})\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})), \quad B_{02r}(\bar{r}_k) = \sum_{k=1}^M (-\alpha_{10}(\bar{r}_{1k})\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})), \\ D_{02r}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M \beta_{10}(\bar{r}_{2k})\beta_{1n}(\bar{r}_{2k}), \quad H_{nr}(\bar{r}_k) = \sum_{k=1}^M (-\alpha_{1n}(\bar{r}_{1k})\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})), \\ J_{nr}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})\beta_{1n}(\bar{r}_{2k})), \quad r = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.66)$$

kısaltmaları yapılırsa, (3.65) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$P_{2r}(\bar{r}_k) + B_{02r}(\bar{r}_k)B_0 + D_{02r}(\bar{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n H_{nr}(\bar{r}_k) + \sum_{n=1}^N D_n J_{nr}(\bar{r}_k) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (3.67)$$

Elde edilen denklemler aşağıda topluca verilmiştir;

$$\begin{aligned} \chi_{10}(\bar{r}_{1k}) + \chi_{20}(\bar{r}_{1k})B_0 + \chi_{30}(\bar{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \chi_{4n}(\bar{r}_{1k}) + \sum_{n=1}^N D_n \chi_{5n}(\bar{r}_k) &= 0 \\ \gamma_{10}(\bar{r}_k) + \gamma_{20}(\bar{r}_k)B_0 + \gamma_{30}(\bar{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \gamma_{4n}(\bar{r}_k) + \sum_{n=1}^N D_n \gamma_{5n}(\bar{r}_k) &= 0 \\ P_{1r}(\bar{r}_k) + B_{01r}(\bar{r}_k)B_0 + D_{01r}(\bar{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n F_{nr}(\bar{r}_k) + \sum_{n=1}^N D_n G_{nr}(\bar{r}_k) &= 0 \\ P_{2r}(\bar{r}_k) + B_{02r}(\bar{r}_k)B_0 + D_{02r}(\bar{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n H_{nr}(\bar{r}_k) + \sum_{n=1}^N D_n J_{nr}(\bar{r}_k) &= 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.68)$$

olarak elde edilir.

$$\frac{\partial S_2}{\partial B_0} = 0 \text{ eşitliğinden:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M (P_{aa}(\bar{r}_{1k})\alpha_{100}(\bar{r}_{1k}) - P_{bb}(\bar{r}_{2k})\alpha_{100}(\bar{r}_{1k})) + B_0 \sum_{k=1}^M \alpha_{100}^2(\bar{r}_{1k}) + D_0 \sum_{k=1}^M -\beta_{100}(\bar{r}_{2k})\alpha_{100}(\bar{r}_{1k}) \\ + \sum_{n=1}^N B_n \sum_{k=1}^M \alpha_{11n}(\bar{r}_{1k})\alpha_{100}(\bar{r}_{1k}) + \sum_{n=1}^N D_n \sum_{k=1}^M -\beta_{11n}(\bar{r}_{2k})\alpha_{100}(\bar{r}_{1k}) = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \overline{\chi_{10}}(\overline{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (P_{aa}(\overline{r}_{1k})\alpha_{100}(\overline{r}_{1k}) - P_{bb}(\overline{r}_{2k})\alpha_{100}(\overline{r}_{1k})), \quad \overline{\chi_{20}}(\overline{r}_k) = \sum_{k=1}^M \alpha_{100}^2(\overline{r}_{1k}), \\
 \overline{\chi_{30}}(\overline{r}_k) &= \sum_{k=1}^M -\beta_{100}(\overline{r}_{2k})\alpha_{100}(\overline{r}_{1k}), \quad \overline{\chi_{4n}}(\overline{r}_k) = \sum_{k=1}^M \alpha_{11n}(\overline{r}_{1k})\alpha_{100}(\overline{r}_{1k}), \\
 \overline{\chi_{5n}}(\overline{r}_k) &= \sum_{k=1}^M -\beta_{11n}(\overline{r}_{2k})\alpha_{100}(\overline{r}_{1k}), \quad r = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

kısaltmaları yapılırsa, (3.69) denklemini aşağıdaki gibi olur:

$$\overline{\chi_{10}}(\overline{r}_k) + \overline{\chi_{20}}(\overline{r}_k)B_0 + \overline{\chi_{30}}(\overline{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \overline{\chi_{4n}}(\overline{r}_k) + \sum_{n=1}^N D_n \overline{\chi_{5n}}(\overline{r}_k) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \tag{3.71}$$

$\frac{\partial S_2}{\partial D_0} = 0$ eşitliğinden:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^M (-P_{aa}(\overline{r}_{1k})\beta_{100}(\overline{r}_{2k}) + P_{bb}(\overline{r}_{2k})\beta_{100}(\overline{r}_{2k})) + B_0 \sum_{k=1}^M (-\alpha_{100}(\overline{r}_{1k})\beta_{100}(\overline{r}_{2k})) + D_0 \sum_{k=1}^M \beta_{100}^2(\overline{r}_{2k}) \\
 &+ \sum_{n=1}^N B_n \sum_{k=1}^M (-\alpha_{11n}(\overline{r}_{1k})\beta_{100}(\overline{r}_{2k})) + \sum_{n=1}^N D_n \sum_{k=1}^M (\beta_{11n}(\overline{r}_{2k})\beta_{100}(\overline{r}_{2k})) = 0
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \overline{\gamma_{10}}(\overline{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (-P_{aa}(\overline{r}_{1k})\beta_{100}(\overline{r}_{2k}) + P_{bb}(\overline{r}_{2k})\beta_{100}(\overline{r}_{2k})), \quad \overline{\gamma_{20}}(\overline{r}_k) = \sum_{k=1}^M (-\alpha_{100}(\overline{r}_{1k})\beta_{100}(\overline{r}_{2k})), \\
 \overline{\gamma_{30}}(\overline{r}_k) &= \sum_{k=1}^M \beta_{100}^2(\overline{r}_{2k}), \quad \overline{\gamma_{4n}}(\overline{r}_k) = \sum_{k=1}^M (-\alpha_{11n}(\overline{r}_{1k})\beta_{100}(\overline{r}_{2k})), \\
 \overline{\gamma_{5n}}(\overline{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (\beta_{11n}(\overline{r}_{2k})\beta_{100}(\overline{r}_{2k})), \quad r = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

kısaltmaları yapılırsa, (3.72) denklemini aşağıdaki gibi olur;

$$\overline{\gamma_{10}}(\overline{r}_k) + \overline{\gamma_{20}}(\overline{r}_k)B_0 + \overline{\gamma_{30}}(\overline{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \overline{\gamma_{4n}}(\overline{r}_k) + \sum_{n=1}^N D_n \overline{\gamma_{5n}}(\overline{r}_k) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \tag{3.74}$$

$\frac{\partial S_2}{\partial B_r} = 0$ eşitliğinden:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^M (P_{aa}(\bar{r}_{1k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k}) - P_{bb}(\bar{r}_{2k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k})) + B_0 \sum_{k=1}^M (\alpha_{100}(\bar{r}_{1k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k})) + D_0 \sum_{k=1}^M (-\beta_{100}(\bar{r}_{2k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k})) \\
& + \sum_{n=1}^N B_n \sum_{k=1}^M (\alpha_{11n}(\bar{r}_{1k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k})) + \sum_{n=1}^N D_n \sum_{k=1}^M (-\beta_{11n}(\bar{r}_{2k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k})) = 0
\end{aligned} \quad (3.75)$$

denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned}
\overline{P_{1r}}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (P_{aa}(\bar{r}_{1k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k}) - P_{bb}(\bar{r}_{2k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k})), \quad \overline{B_{01r}}(\bar{r}_k) = \sum_{k=1}^M (\alpha_{100}(\bar{r}_{1k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k})), \\
\overline{D_{01r}}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (-\beta_{100}(\bar{r}_{2k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k})), \quad \overline{F_{nr}}(\bar{r}_k) = \sum_{k=1}^M (\alpha_{11n}(\bar{r}_{1k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k})), \\
\overline{G_{nr}}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (-\beta_{11n}(\bar{r}_{2k})\alpha_{11r}(\bar{r}_{1k})), \quad r = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \quad (3.76)$$

kısaltmaları ile (3.75) denklemini aşağıdaki gibi olur:

$$\overline{P_{1r}}(\bar{r}_k) + \overline{B_{01r}}(\bar{r}_k)B_0 + \overline{D_{01r}}(\bar{r}_k)D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \overline{F_{nr}}(\bar{r}_k) + \sum_{n=1}^N D_n \overline{G_{nr}}(\bar{r}_k) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (3.77)$$

$\frac{\partial S_2}{\partial D_r} = 0$ eşitliğinden:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^M (-P_{aa}(\bar{r}_{1k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k}) + P_{bb}(\bar{r}_{2k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k})) + B_0 \sum_{k=1}^M (-\alpha_{100}(\bar{r}_{1k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k})) + D_0 \sum_{k=1}^M \beta_{100}(\bar{r}_{2k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k}) \\
& + \sum_{n=1}^N B_n \sum_{k=1}^M (-\alpha_{11n}(\bar{r}_{1k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k})) + \sum_{n=1}^N D_n \sum_{k=1}^M (\beta_{11n}(\bar{r}_{2k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k})) = 0
\end{aligned} \quad (3.78)$$

denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned}
\overline{P_{2r}}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (-P_{aa}(\bar{r}_{1k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k}) + P_{bb}(\bar{r}_{2k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k})), \quad \overline{B_{02r}}(\bar{r}_k) = \sum_{k=1}^M (-\alpha_{100}(\bar{r}_{1k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k})), \\
\overline{D_{02r}}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M \beta_{100}(\bar{r}_{2k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k}), \quad \overline{H_{nr}}(\bar{r}_k) = \sum_{k=1}^M (-\alpha_{11n}(\bar{r}_{1k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k})), \\
\overline{J_{nr}}(\bar{r}_k) &= \sum_{k=1}^M (\beta_{11n}(\bar{r}_{2k})\beta_{11r}(\bar{r}_{2k})), \quad r = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \quad (3.79)$$

kısaltmaları yapılırsa (3.78) denklemini aşağıdaki gibi olur:

$$\overline{P_{2r}}(\overline{r_k}) + \overline{B_{02r}}(\overline{r_k})B_0 + \overline{D_{02r}}(\overline{r_k})D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \overline{H_{nr}}(\overline{r_k}) + \sum_{n=1}^N D_n \overline{J_{nr}}(\overline{r_k}) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (3.80)$$

Elde edilen denklemler, topluca aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \overline{\chi_{10}}(\overline{r_k}) + \overline{\chi_{20}}(\overline{r_k})B_0 + \overline{\chi_{30}}(\overline{r_k})D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \overline{\chi_{4n}}(\overline{r_k}) + \sum_{n=1}^N D_n \overline{\chi_{5n}}(\overline{r_k}) &= 0 \\ \overline{\gamma_{10}}(\overline{r_k}) + \overline{\gamma_{20}}(\overline{r_k})B_0 + \overline{\gamma_{30}}(\overline{r_k})D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \overline{\gamma_{4n}}(\overline{r_k}) + \sum_{n=1}^N D_n \overline{\gamma_{5n}}(\overline{r_k}) &= 0 \\ \overline{P_{1r}}(\overline{r_k}) + \overline{B_{01r}}(\overline{r_k})B_0 + \overline{D_{01r}}(\overline{r_k})D_0 + \sum_{n=1}^N B_n \overline{F_{nr}}(\overline{r_k}) + \sum_{n=1}^N D_n \overline{G_{nr}}(\overline{r_k}) &= 0 \\ \overline{P_{2r}}(\overline{r_k}) + \overline{B_{02r}}(\overline{r_k})B_0 + \overline{D_{02r}}(\overline{r_k})D_0 + \overline{H_{nr}}(\overline{r_k}) \sum_{n=1}^N B_n + \overline{J_{nr}}(\overline{r_k}) \sum_{n=1}^N D_n &= 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.81)$$

(3.68) ve (3.81) lineer denklem takımları incelendiğinde, her bir takımında $23N+2$ denklem olduğu görülmektedir. Herhangi bir noktada hem yer değiştirme hem de gerilmelerin eşitliği söz konusudur. Bu nedenle sayısal işlemlerde, yukarıda verilen iki takımdan $N+1$ denklem (3.68)'den ve $N+1$ denklem de (3.81)'den alınarak bilinmeyenler elde edilmiştir. Daha sonra geriye dönülerek (3.33), (3.34), (3.38) ve (3.39) bağıntılarından diğer sabitler hesaplanmıştır. Problemdaki sabitlerin hesabından sonra, bunlar ilgili denklemlerde yerine yazılarak istenilen bir noktadaki yer değiştirme ve gerilme değerleri bulunabilmektedir.

4. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde eksen doğrultusunda harmonik zorlamaya maruz iki silindirik oyuk içeren sonsuz ortam ile ilgili sayısal sonuçlar, bilgisayar yardımı ile çizilen çeşitli grafikler yardımıyla açıklanmaya çalışılmıştır. Tüm işlemlerde N sayısı 7 olarak alınmıştır. Sayısal işlemlerde kullanılan malzeme sabitleri ve zorlama genlikleri birinci ortam için;

$$\rho_1 = 2665 \text{ kg/m}^3, \quad E_1 = 7.567 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad \nu_1 = 0.25, \quad \mu_1 = 3.026 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \\ \tau_{0a} = 100000 \text{ N/m}^2$$

olarak alınmıştır. İkinci ortam için ise $\tau_{0a} = \tau_{0b}$ ve μ_2 değeri μ_1 'in katları olarak alınmıştır. Sayısal işlemlerde ara yüzey üzerindeki sınır koşullarının yaklaşık olarak sağlatılabilmesi için $20xH$ kadar sonlu bir yükseklik seçilmiştir.

Şekil 4.1a ve Şekil 4.1b'de ortamların aynı olması halinde seçilen bir zorlama frekansı için oyuk yüzeylerindeki yer değiştirmelerin oyuk yarıçapları ile değişimi verilmiştir. Beklendiği gibi, ortamlar aynı olduğundan, her iki oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler eşit çıkmaktadır. Şekillerden, oyuk yarıçaplarının büyümesi ile yer değiştirmelerin küçüldüğü anlaşılmaktadır. Şekil 4.2a ve Şekil 4.2b'de, ortamların aynı olması halinde ara yüzeydeki yer değiştirme ve gerilmelerin yükseklikle değişimi verilmiştir. Şekillerden yer değiştirme ve gerilmelerin oyuktan uzaklaştıkça yükseklikle küçüldüğü görülmektedir.

Şekil 4.3a ve Şekil 4.3b'de seçilen oyuk yarıçapları ve zorlama frekansı için, ortamların kayma modülleri farklı alınarak, oyuk yüzeylerindeki yer değiştirmeler verilmiştir. Şekilden, ikinci ortamın kayma modülünün büyümesi ile her iki oyuktaki yer değiştirmelerin küçüldüğü görülmektedir. İkinci oyuktaki yer değiştirmeler, birincidekine göre daha küçüktür. İkinci ortamın birinciye göre daha rijit olması nedeniyle bu beklenen bir sonuçtur.

Şekil 4.4a ve Şekil 4.4b'de seçilen oyuk yarıçapları, zorlama frekansı ve kayma modülü oranı için, ikinci oyuktaki zorlamanın genliğinin değişmesi halinde yer değiştirmeler verilmiştir. Beklendiği gibi zorlama genliğinin azalması ile her iki oyukta da yer değiştirmeler küçülmektedir. Birinci oyuktaki zorlama nedeniyle, ikinci oyukta zorlama

olmasa bile ($\tau_{ob} = 0$), burada birinci oyuktakine yakın bir yer değiştirme ortaya çıkmaktadır.

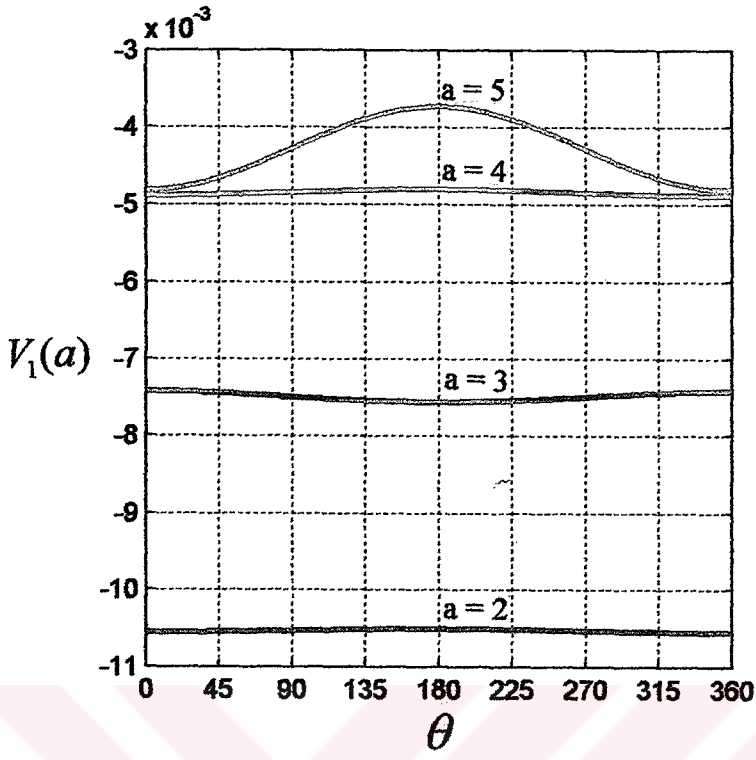
Şekil 4.5a ve Şekil 4.5b’de bu kez ikinci oyuktaki zorlama genliği sabit tutularak birinci oyuktaki zorlamanın genliği değiştirildiğinde, elde edilen yer değiştirmeler verilmiştir. Bu durumda da, bir önceki haldeki gibi bir davranış gözlenmiştir. Yani birinci oyukta zorlama olmasa bile, ikinci oyuktaki zorlamadan dolayı, birinci oyukta ikinciye yakın yer değiştirmeler oluşmaktadır.

Şekil 4.6a ve Şekil 4.6b’de, birinci ortamdaki oyuğun yarı çapı sabit tutulup, diğerinin yarı çapı değiştirildiğinde elde edilen yer değiştirmeler görülmektedir. Şekilden, ikinci oyuğun yarıçapı büyüdükçe her iki oyuktaki yer değiştirmelerinde küçüldüğü gözlenmektedir.

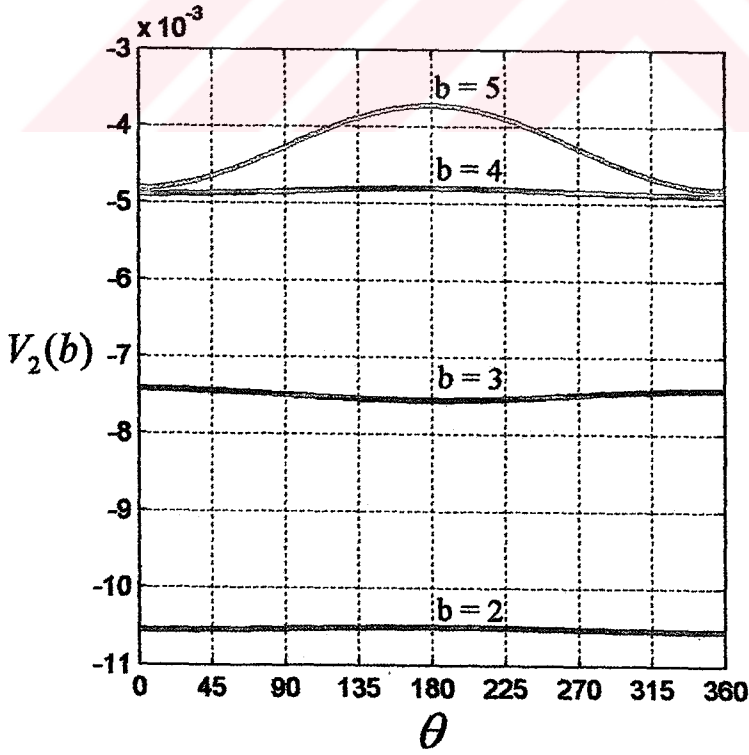
Şekil 4.7’de, ortamların ve oyuk yarıçaplarının aynı olması halinde, oyuk yüzeylerindeki yer değiştirme ve gerilmelerle, oyuk tepe noktasından ($\theta = 90^\circ$) geçen bir düşey düzlemdeki yer değiştirme ve gerilmeler verilmiştir. Ortamlar aynı olduğundan, oyuk yüzeylerindeki yer değiştirmelerde eşit çıkmaktadır (Şekil 4.7a). Oyuk yüzeylerinde sınır koşulları tam olarak sağlatıldığı için, buradaki gerilmelerinde (τ_{rz}) zorlama genliğine eşit çıktığı görülmektedir (Şekil 4.7b). Şekil 4.7c’den, yer değiştirmelerin oyuktan uzaklaştıkça küçüldüğü görülmektedir. Şekil 4.7d’de ise sıfırdan farklı gerilme bileşenleri olan τ_{rz} ve $\tau_{\theta z}$ ile düşey düzlemde hesaplanan τ_{xz} ’nin yükseklikle değişimi verilmiştir. Şekilden bu gerilmelerin de oyuktan uzaklaştıkça küçüldüğü görülmektedir.

Şekil 4.8’de bu kez ortamlar ve oyuk yarıçapları farklı alınarak, $\theta = 90^\circ$ için yer değiştirme ve gerilmeler verilmiştir. Şekillerden yer değiştirme ve gerilmelerin oyuktan uzaklaştıkça küçüldüğü görülmektedir. Şekil 4.7 ile karşılaştırıldığında, bu büyüklüklerin ortamların farklı olması nedeniyle biraz daha küçük olduğu görülmektedir.

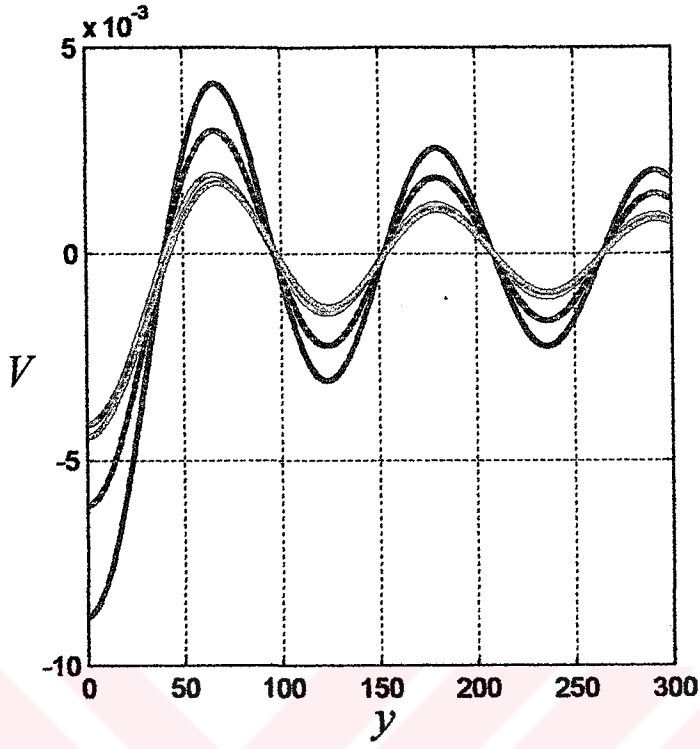
Şekil 4.9’dan oyuk tepe noktasındaki yer değiştirmelerin zorlama frekansı ile değişimi verilmiştir. Şekilden zorlama frekansının büyümesi ile yer değiştirmelerin küçüldüğü görülmektedir.



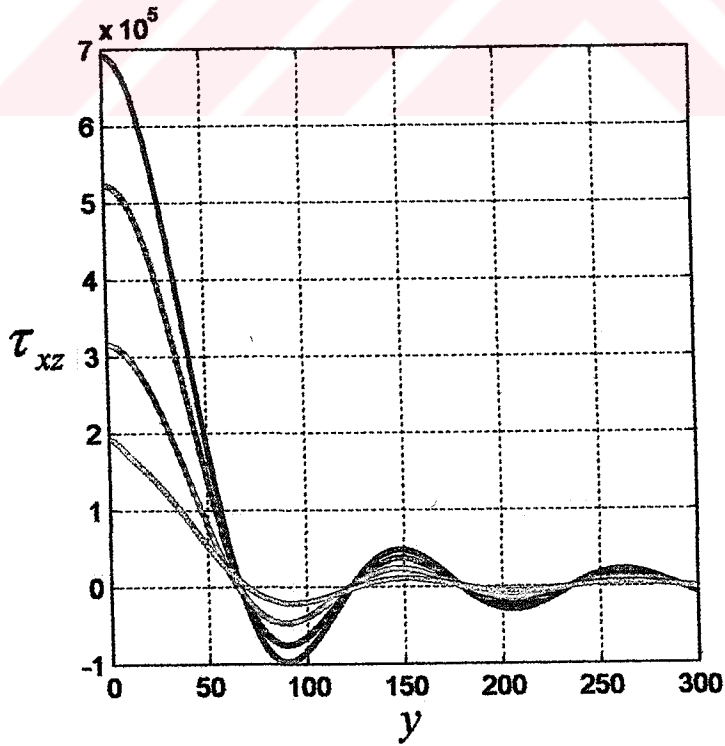
Şekil 4.1a $\omega = 60 \text{ rad/s}$, $\mu_2 = \mu_1$ ve $H_1 = H_2 = 15 \text{ m}$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler



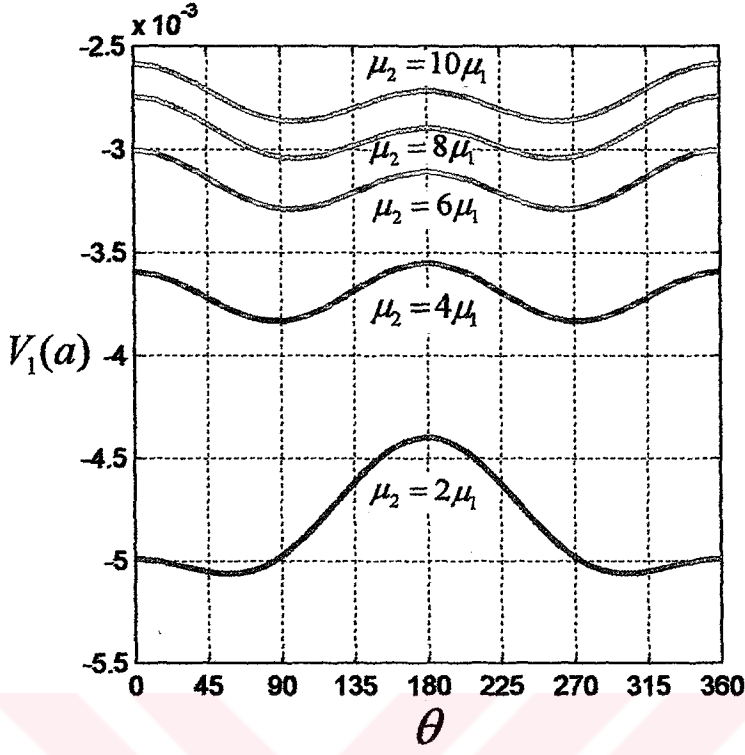
Şekil 4.1b $\omega = 60 \text{ rad/s}$, $\mu_2 = \mu_1$ ve $H_1 = H_2 = 15 \text{ m}$ için ikinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler



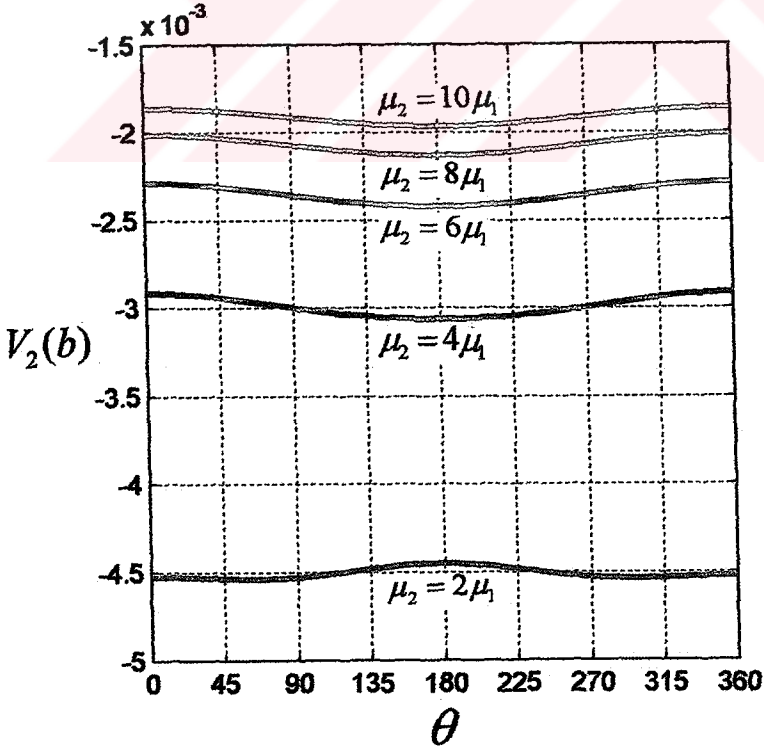
Şekil 4.2a $\omega = 60 \text{ rad/s}$, $\mu_2 = \mu_1$ ve $H_1 = H_2 = 15 \text{ m}$ için ara yüzeyindeki yer değiştirmeler



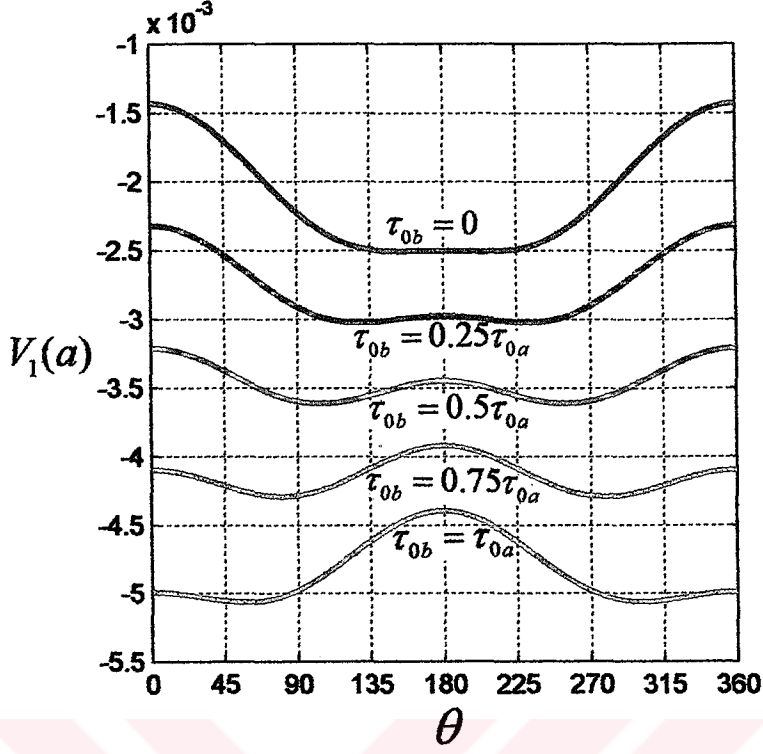
Şekil 4.2b $\omega = 60 \text{ rad/s}$, $\mu_2 = \mu_1$ ve $H_1 = H_2 = 15 \text{ m}$ için ara yüzeyindeki gerilmeler



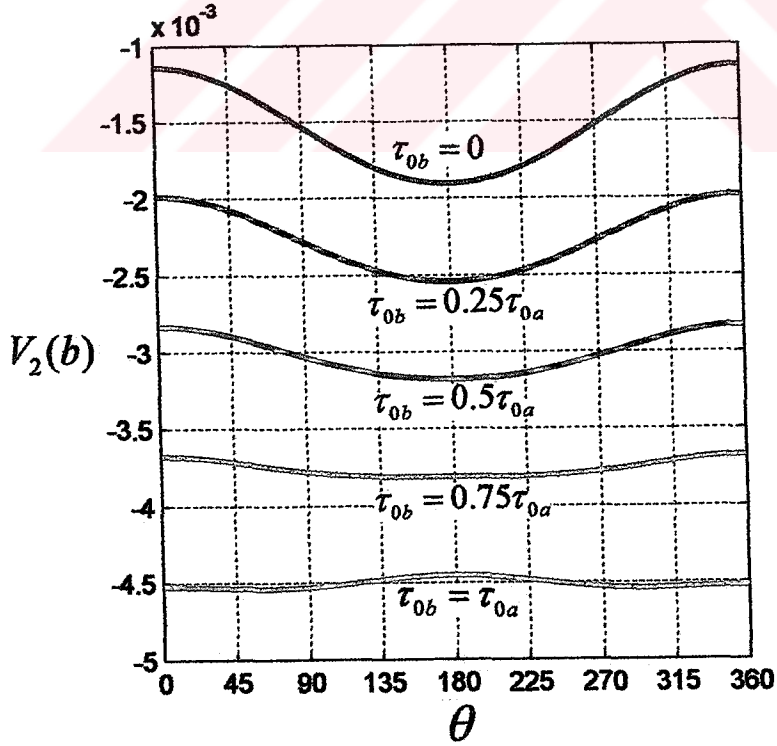
Şekil 4.3a $\omega = 60 \text{ rad/s}$, $a = 5 \text{ m}$ ve $b = 3 \text{ m}$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler



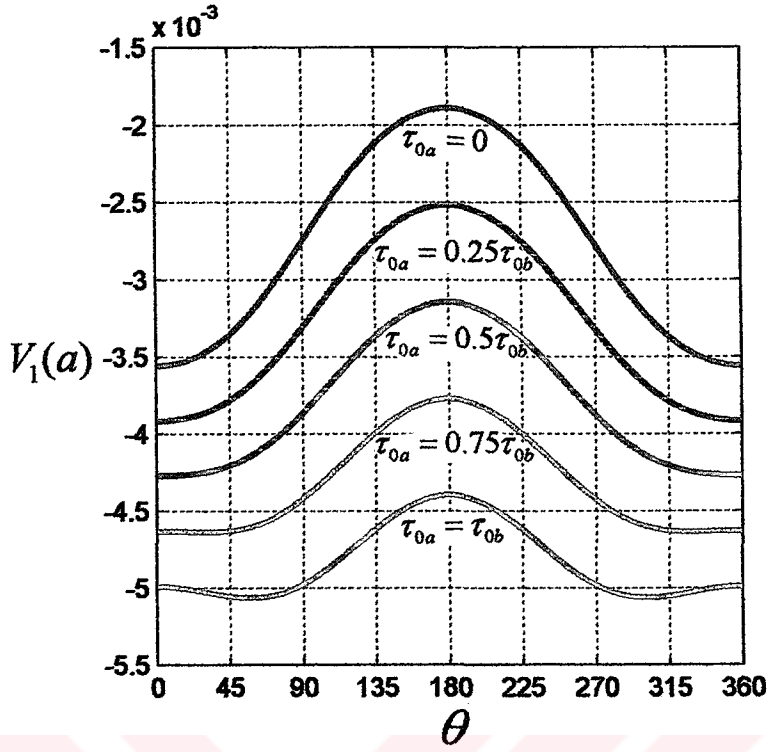
Şekil 4.3b $\omega = 60 \text{ rad/s}$, $a = 5 \text{ m}$ ve $b = 3 \text{ m}$ için ikinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler



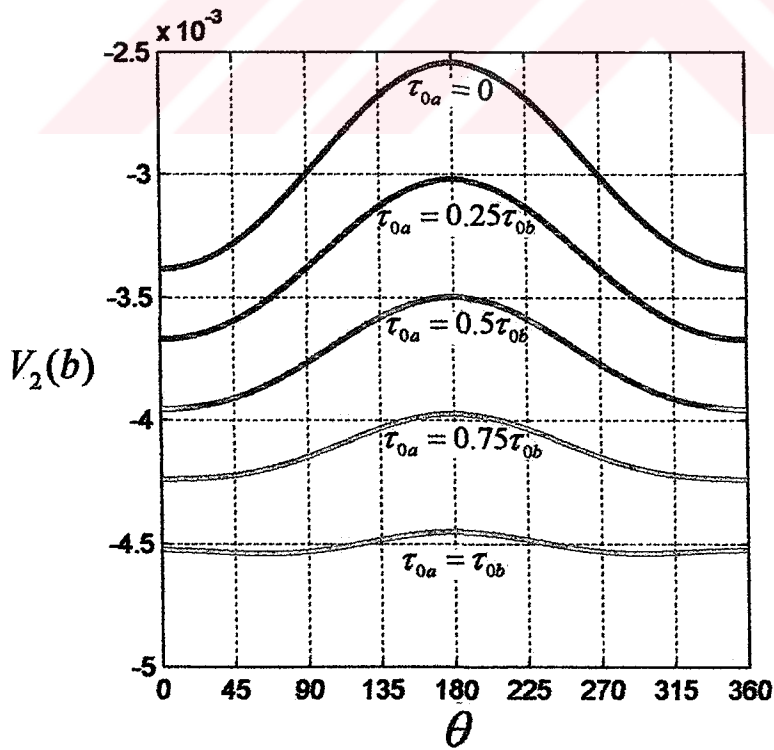
Şekil 4.4a $\omega = 60 \text{ rd/s}$, $a = 5 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$ ve $\mu_2 = 2\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler



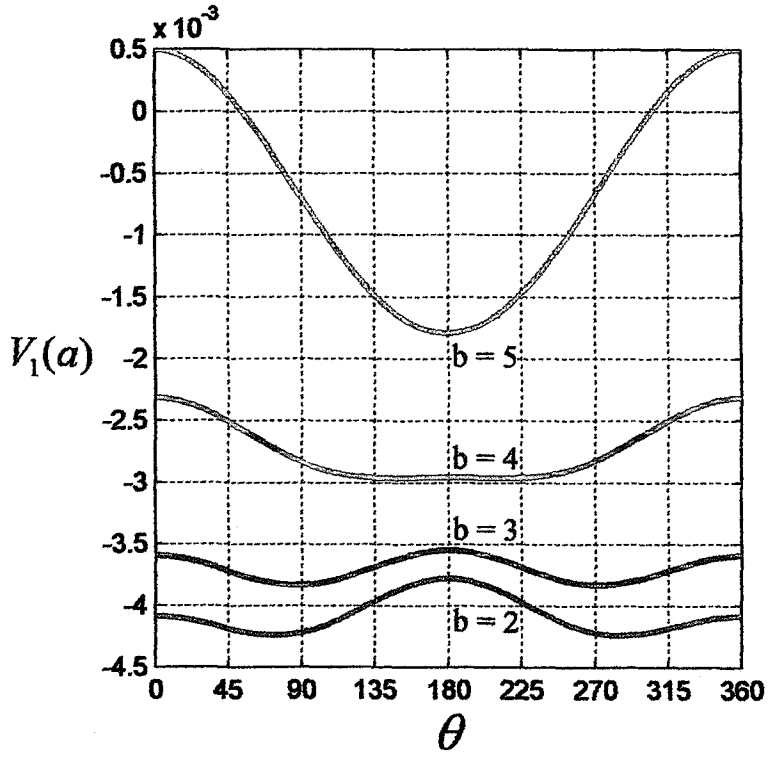
Şekil 4.4b $\omega = 60 \text{ rd/s}$, $a = 5 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$ ve $\mu_2 = 2\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler



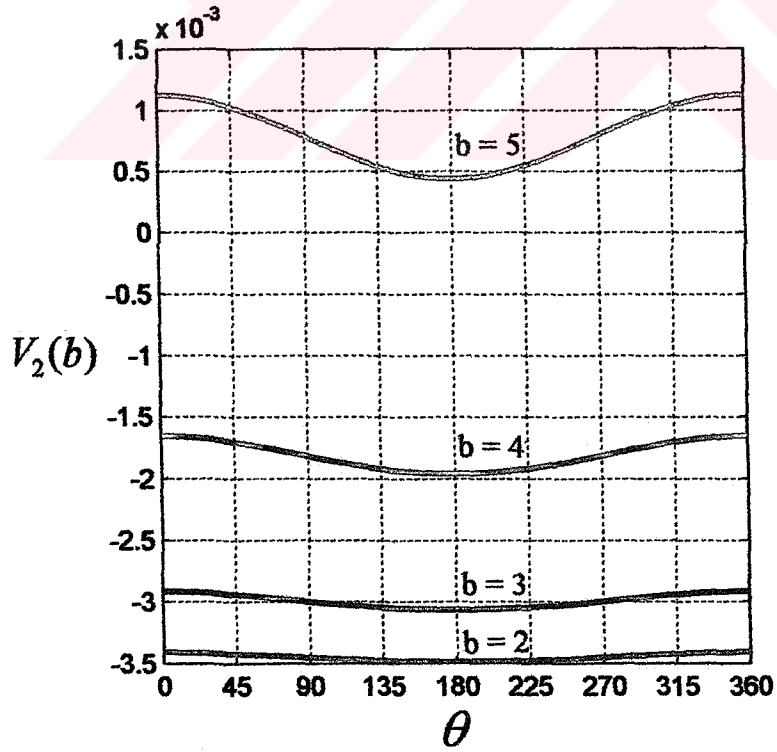
Şekil 4.5a $\omega = 60 \text{ rad/s}$, $a = 5 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$ ve $\mu_2 = 2\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler



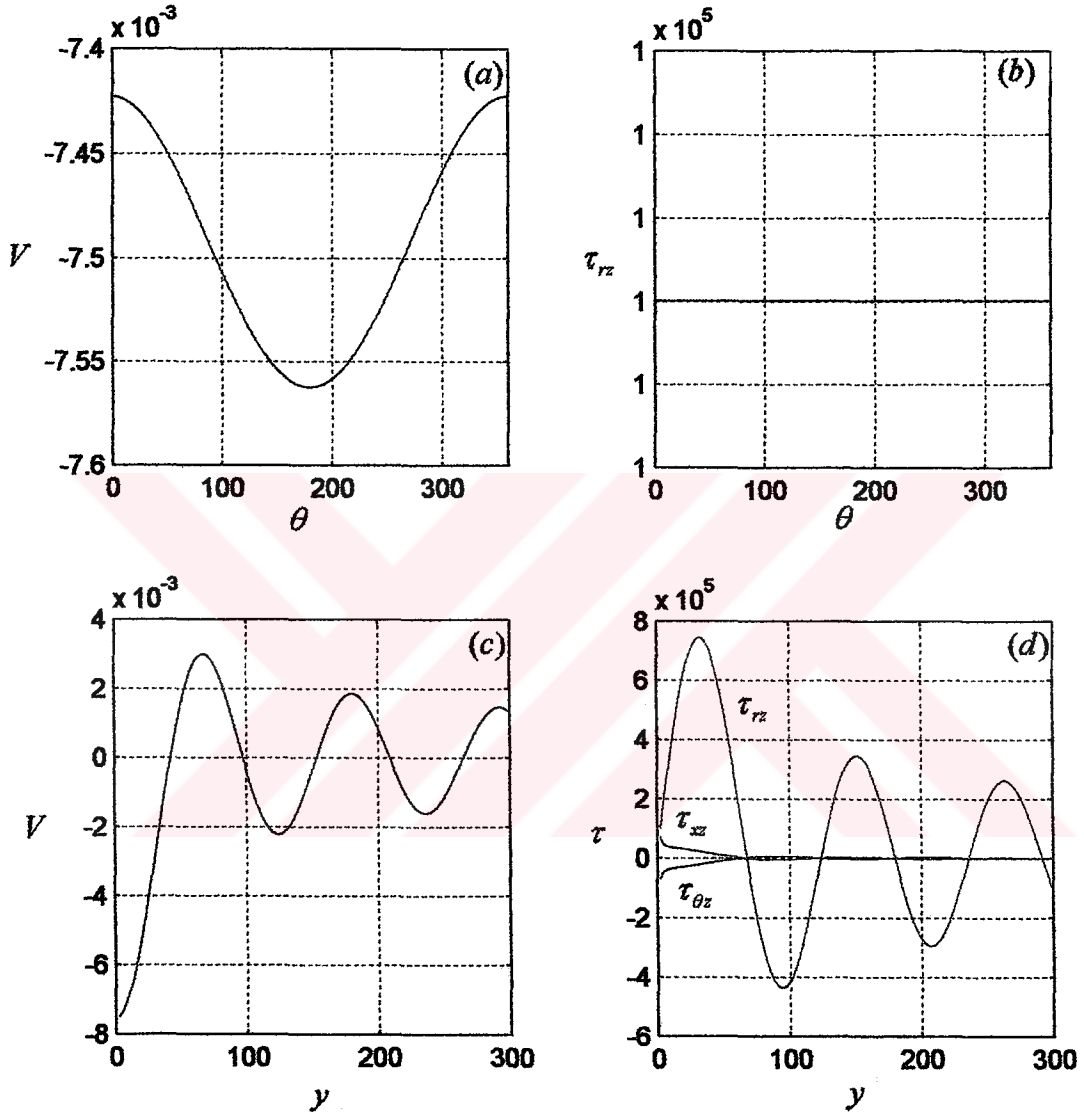
Şekil 4.5b $\omega = 60 \text{ rad/s}$, $a = 5 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$ ve $\mu_2 = 2\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler



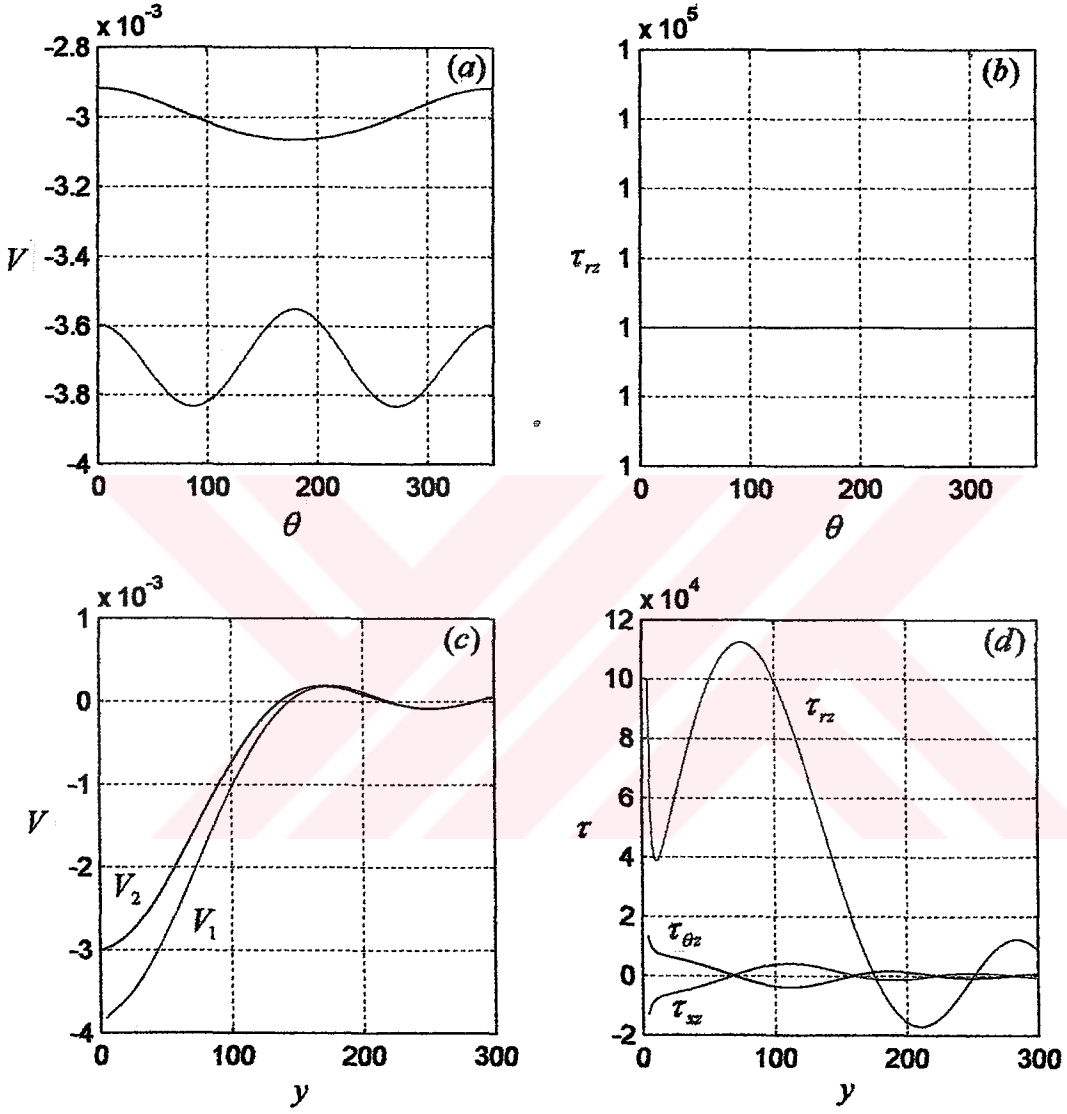
Şekil 4.6a $\omega = 60 \text{ rad/s}$ ve $\mu_2 = 4\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler



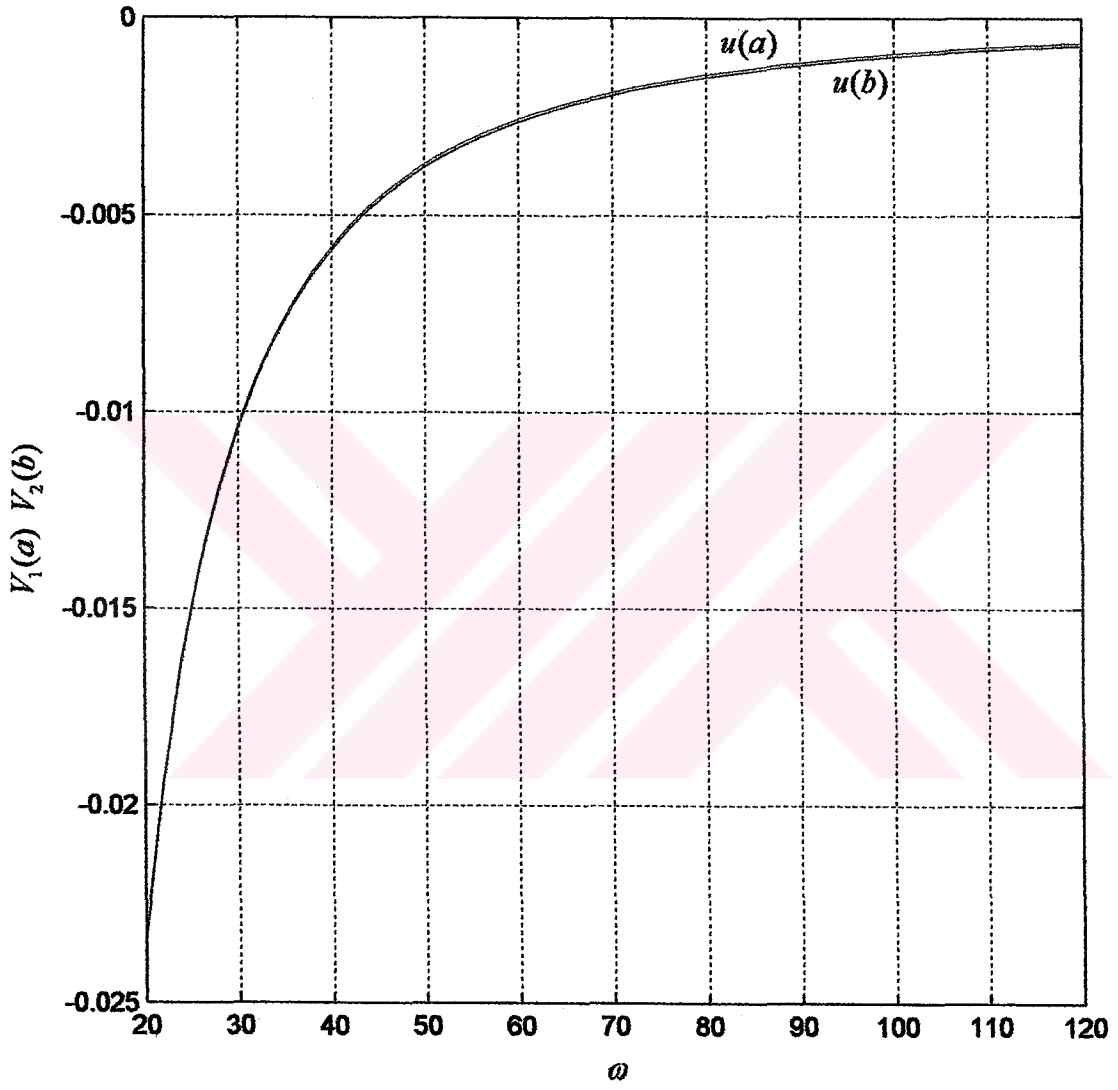
Şekil 4.6b $\omega = 60 \text{ rad/s}$ ve $\mu_2 = 4\mu_1$ için birinci ortamda oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler



Şekil 4.7 $\omega = 60 \text{ rd/s}$, $a = b = 3 \text{ m}$ ve $\mu_2 = \mu_1$ için oyuk yüzeyinde ve tepe noktasından geçen bir düzlemde ($\theta = 90^\circ$) yer değiştirme ve gerilmeler



Şekil 4.8 $\omega = 60 \text{ rad/s}$, $a = 5 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$ ve $\mu_2 = 4\mu_1$ için oyuk yüzeyinde ve tepe noktasından geçen bir düzlemde ($\theta = 90^\circ$) yer değiştirme ve gerilmeler



Şekil 4.9 $a = 5m$, $b = 3m$ ve $\mu_2 = \mu_1$ için oyuk tepe noktasındaki yer değiştirmelerin ω ile değişimi

5. DEĞERLENDİRME VE ÖNERİLER

Bu çalışmada eksen doğrultusunda harmonik zorlamaya maruz iki silindirik oyuk içeren sonsuz ortamın davranışı incelenmiştir. Elde edilen hareket denklemleri Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla çözülmüştür. Probleme ait sınır koşulları oyuk iç yüzeylerinde tam olarak sağlatılmış, ara yüzeyde ise En Küçük Kareler Yöntemi kullanılarak yaklaşık olarak sağlatılabilmektedir.

Seçilen zorlama frekansı ve malzeme sabitleri için oyuk yüzeylerinde, ara yüzeyde ve oyuk tepe noktasından geçen bir düzlemdeki ($\theta = 90^\circ$) yer değiştirme ve gerilmeler, kayma modülleri ve oyuk yarıçapları değiştirilerek grafikler yardımı ile verilmiştir. Ortamların aynı olması halinde, oyuk yarıçaplarının büyümesi ile oyuk yüzeylerindeki yer değiştirmelerin küçüldüğü görülmüştür. Ortamların kayma modüllerinin farklı olması halinde, kayma modülü büyük olan ortamdaki oyuk yüzeyinde yer değiştirmelerin diğerine göre daha küçük olduğu görülmüştür. Benzer şekilde, bir oyuktaki zorlama genliğinin küçülmesi ile yer değiştirmelerinde küçüldüğü, bu oyukta zorlama olmasa bile yer değiştirme olduğu görülmüştür.

Bu problemin devamı olabilecek çalışmalar;

1. Ortamın yarı sonsuz olması,
2. Ortamın viskoelastik olması,
3. Oyuk çevresinin daireden farklı olması,
4. Zorlamanın periyodik olmaması, olarak özetlenebilir.

KAYNAKLAR

Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S., (1975), Elastodynamics, Vol II, Academic press, New York.

Graff, K.F., (1975), Wave Motion In Elastic Solids, Clarendon press, Oxford.

Pao, Y.H. ve Mow, C.C., (1971). Diffraction of Elastic Waves And Dynamic Stress Concentrations, Crane Russak, New York.

El-Akily, N. ve Datta, S.K., (1980), (1981), "Response Of A Circular Cylindrical Shell To Disturbances In A Half-Space", Earthquake Engineering And Structural Dynamics, 9: 477-487.

Datta, S.K., Shah, A.H. ve Wong, K.C., (1984), "Dynamic Stresses And Displacements In Burried Pipe", Journal Of Engineering Mechanics, 110: 1451-1466.

Wong, K.C., Shah, A.H. ve Datta, S.K., (1985). "Dynamics Stress And Displacements In A Burried Tunnel", Journal Of Engineering Mechanics, 111: 218-234.

Balendra, T., Chua, K.H., Lo, K.W. ve Lee, S.K., (1989), "Steady-state Vibration Of Subway-Soil-Building System", Journal Of Engineering Mechanics, 115: 145-162.

Balendra, T., Koh, C.G. ve Ho, Y.C., (1991), "Dynamics Response Of Buildings Due To Trains In Underground Tunnels", Earthquake Engineering And Structural Dynamics, 20: 275-291.

Luco, J.E. ve De Barros, F.C.P., (1994), "Seismic Response Of A Cylindrical Shell Embedded In A Layered Viscoelastic Half Space-I: Formulation", Earthquake Engineering And Structural Dynamics, 223: 553-567.

Guan, F. ve Moore, I.D., (1993), "Three Dimensional Response Of Twin Cavities To Travelling Loads", Journal Of Engineering Mechanics, ASCE, 120, 3: 637-651.

Guan, F. ve Moore, I.D., (1996), "Three Dimensional Dynamic Response Of Lined Tunnels Due To Incident Seismic Waves", Earthquake Engineering And Structural Dynamics, 25: 357-369.

Coşkun, İ., Engin, H. ve Özmütlu, A., (2003), "Boşluk İçeren Farklı İki Malzemeden Yapılmış Sonsuz Ortamın Harmonik Titreşimleri", XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, 277-286.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	06.07.1979	
Doğum yeri	Gaziantep	
Lise	1990-1997	Gaziantep Anadolu Lisesi
Lisans	1997-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2002-2005	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

Çalıştığı kurumlar

2001-2002 Aks İnşaat Ltd. Şti.
2002-2003 Ensar İnşaat
2003-2004 Cemre İnşaat Ltd. Şti.