

154344

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELİPTİK PARABOLİK KABUĞUN SAYISAL  
YÖNTEMLERLE EĞİLME HESABI**

İnşaat Müh. Erdal CELAP

**FBE İnşaat Anabilim Dalı Mekanik Programında  
Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER**

Prof. Dr. R. Faruk Yükseler *R. Faruk Yükseler*  
Doç. Dr. İrfan Coşkun *İrfan Coşkun*  
Prof. Dr. Uğur Güven *Uğur Güven*

**İSTANBUL, 2004**

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                      | Sayfa |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| SİMGE LİSTESİ .....                                                                                  | ii    |
| KISALTMA LİSTESİ.....                                                                                | vi    |
| ŞEKİL LİSTESİ .....                                                                                  | vii   |
| ÇİZELGE LİSTESİ.....                                                                                 | viii  |
| ÖNSÖZ .....                                                                                          | ix    |
| ÖZET .....                                                                                           | x     |
| ABSTRACT .....                                                                                       | xi    |
| 1. GİRİŞ.....                                                                                        | 1     |
| 2. İNCE KABUK TEORİSİNDE VARSAYIMLAR ve KAVRAMLAR .....                                              | 2     |
| 2.1 Birinci Mertebe Teorisinde Yapılan Varsayımlar .....                                             | 2     |
| 2.1.1 Malzeme ve Malzemenin Davranışı.....                                                           | 2     |
| 2.1.1.1 Malzeme Elastik Özelliği .....                                                               | 3     |
| 2.1.1.2 Malzeme Davranışı.....                                                                       | 6     |
| 2.1.2 Süreklilik hipotezi .....                                                                      | 8     |
| 2.1.3 Malzeme Lineer Elastiktir .....                                                                | 8     |
| 2.1.4 Süperpozisyon İlkesi Geçerlidir .....                                                          | 8     |
| 2.1.5 Betty Karşıtlık Teoremi Geçerlidir.....                                                        | 8     |
| 2.1.6 Kabuk İncedir .....                                                                            | 8     |
| 2.1.7 HKL, Kirchhoff-Love Varsayımları.....                                                          | 8     |
| 2.1.8 Kabuğun Kalınlığı $h \ll r_{\min}$ .....                                                       | 9     |
| 2.1.9 İnce, Basık Kabuk Teorisinde İlave Varsayımlar .....                                           | 9     |
| 2.1.10 Mambran Kabuk Teorisinde İlave Varsayımlar .....                                              | 10    |
| 3. YÜZEY GEOMETRİSİ ve GENEL KABUK DENKLEMLERİ.....                                                  | 11    |
| 3.1 Yüzey Geometrisi.....                                                                            | 11    |
| 3.1.1 Genel Yüzey Parametrik Denklemleri .....                                                       | 11    |
| 3.1.2 Lamé Katsayıları .....                                                                         | 12    |
| 3.1.3 Yüzey Elemanların Kenar Boyları ve $ds$ .....                                                  | 14    |
| 3.1.4 Yüzeyin Esas Eğrilikleri, Asal Eğrilikleri, Normal Eğrilikleri ve Normal Eğrilik Çapları ..... | 15    |
| 3.1.5 Yüzeyin Geodezik Eğrilik Yarıçapları ve Eğrilikleri.....                                       | 19    |
| 3.1.6 Toplam ve Ortalama Eğrilikler ve Yüzey Tipleri .....                                           | 21    |
| 3.1.6.1 Toplam Eğrilik, Gauss Eğriligi .....                                                         | 21    |
| 3.1.6.2 Ortalama Eğrilik .....                                                                       | 21    |
| 3.1.6.3 Yüzey Tipi ve Tarifleri.....                                                                 | 21    |
| 3.2 Kabuk Genel Denklemleri.....                                                                     | 23    |
| 3.2.1 Genel Yüzey Gerilme Hali ve Kesit Tesirleri .....                                              | 23    |
| 3.2.2 Ortogonal Eğrisel Koordinatlarla, Orta Yüzeyin Şekil Değiştirme Bileşenleri .....              | 27    |
| 3.2.3 Kabuk Elastisite Bağlantıları.....                                                             | 29    |
| 3.2.4 Genel Eğrisel (x, y) Koordinatlarında Denge Denklemleri.....                                   | 30    |
| 3.2.4.1 Ortogonal Asal Eğrisel (x, y) Koordinatlarında Denge Denklemleri.....                        | 30    |
| 3.2.4.2 Genel Eğrisel Koordinatlarda Lineer Mambran Denge Denklemleri .....                          | 31    |
| 3.2.4.3 Ortogonal Eğrisel Koordinatlarda Mambran Denge Denklemleri .....                             | 31    |

|       |                                                                                                                                          |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.    | İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA SONLU FARK İFADELERİNİN ÇIKARTILMASI .....                                                                 | 34  |
| 5.    | ELİPTİK PARABOLİK KABUĞUN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE EĞİLME HESABI.....                                                                   | 41  |
| 5.1   | Eliptik Parabolik Kabuğun Geometrik Özellikleri.....                                                                                     | 41  |
| 5.2   | Kabuğun Wlassow Denklemleri (Basık Yüzeyli) .....                                                                                        | 42  |
| 5.3   | Sonlu Farklar İle Çözüm .....                                                                                                            | 45  |
| 5.4   | Formüllerin Tablolaştırılması.....                                                                                                       | 48  |
| 5.5   | Kesit Zorları .....                                                                                                                      | 50  |
| 6.    | SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ.....                                                                                                             | 52  |
| 6.1   | Yöntemin Esasları, Tanımlar.....                                                                                                         | 52  |
| 6.2   | Deplasman Parametrelerinin Seçimi .....                                                                                                  | 52  |
| 6.3   | Elemanın İntegral Matrisi.....                                                                                                           | 54  |
| 6.4   | Elemanın Rijitlik Matrisi ve Geometrik Yük Matrisi .....                                                                                 | 55  |
| 6.5   | Düğüm Kuvvetleri.....                                                                                                                    | 56  |
| 6.6   | Elemanların Birleştirilmesi ve Sistemin Hesabı.....                                                                                      | 58  |
| 7.    | ELİPTİK PARABOLİK KABUĞUN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE EĞİLME HESABI.....                                                                 | 61  |
| 7.1   | Eliptik Parabolik Kabuk Denklemleri .....                                                                                                | 61  |
| 7.1.1 | Deplasman-Deformasyon Bağlantıları.....                                                                                                  | 61  |
| 7.1.2 | Kesit Tesirleri .....                                                                                                                    | 61  |
| 7.1.3 | Deplasman Fonksiyonlarının u, v, w Tayini .....                                                                                          | 62  |
| 7.1.4 | Deplasman Parametreleri .....                                                                                                            | 64  |
| 7.1.5 | Bağ Matrisi .....                                                                                                                        | 64  |
| 7.2   | Toplam Potansiyel Enerjinin Birinci Varyasyonu.....                                                                                      | 66  |
| 7.3   | Eleman Rijitlik Matrisinin Türev ve İntegral Matrisi .....                                                                               | 66  |
| 7.4   | Elemanın Rijitlik Matrisi.....                                                                                                           | 67  |
| 7.5   | Elemanın Dış Yük Matrisi.....                                                                                                            | 67  |
| 7.6   | Elemanların Birleştirilmesi ve Sistemin Hesabı.....                                                                                      | 67  |
| 8.    | SAYISAL UYGULAMALAR ve SONUÇLAR.....                                                                                                     | 69  |
| 8.1   | Sonlu Farklar Yöntemi ile Eğilme Hesabı .....                                                                                            | 69  |
| 8.2   | Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Eğilme Hesabı.....                                                                                           | 72  |
| 8.3   | Sonuçlar.....                                                                                                                            | 77  |
|       | KAYNAKLAR.....                                                                                                                           | 78  |
|       | EKLER .....                                                                                                                              | 79  |
| Ek1   | Eliptik Parabolik Kabuğun Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü İçin Microsoft Visual C++ 6.0 Platformunda Yazılan Bilgisayar Programı.....   | 80  |
| Ek2   | Eliptik Parabolik Kabuğun Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü İçin Microsoft Visual C++ 6.0 Platformunda Yazılan Bilgisayar Programı..... | 91  |
|       | ÖZGEÇMİŞ.....                                                                                                                            | 114 |

## SİMGE LİSTESİ

|                                                                                   |                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| a, b                                                                              | Kabuğun planda boyutları                          |
| A, B, C                                                                           | Lame katsayıları                                  |
| C                                                                                 | Uzama rijitliği                                   |
| D                                                                                 | Eğilme rijitliği                                  |
| [D]                                                                               | Elastisite matrisi                                |
| {d}                                                                               | Düğüm noktası deplasmanları                       |
| E                                                                                 | Young modülü, elastisite modülü                   |
| $e_x, e_y, e_{xy}$                                                                | Şekil değiştirme bileşenleri                      |
| F                                                                                 | Kuvvet fonksiyonu                                 |
| f                                                                                 | Kabuk yüksekliği                                  |
| [F]                                                                               | Türev matris                                      |
| G                                                                                 | Kayma elastisite modülü                           |
| h                                                                                 | Kabuk kalınlığı                                   |
| [H]                                                                               | İntegral matrisi                                  |
| I                                                                                 | Eylemsizlik momenti                               |
| [K]                                                                               | Sistemin rijitlik matrisi                         |
| $k_x, k_y, k_{xy}$                                                                | Eğilme ve burulma eğrilikleri                     |
| [k <sub>e</sub> ]                                                                 | Eleman rijitlik matrisi                           |
| L                                                                                 | Kabuğun uzunluğu                                  |
| $M_x, M_y$                                                                        | Eğilme momenti                                    |
| $M_{xy}$                                                                          | Burulma momenti                                   |
| N                                                                                 | Normal kuvvet                                     |
| [N]                                                                               | Şekil fonksiyonu                                  |
| $N_x, N_y$                                                                        | Normal kuvvetler                                  |
| $N_{xy}$                                                                          | Kayma kuvveti                                     |
| P                                                                                 | Yük                                               |
| [P]                                                                               | Dış yük matrisi                                   |
| $r_x, r_y, r_{xy}$                                                                | Eğrilik yarıçapları                               |
| s                                                                                 | Değişken koordinatlar                             |
| u, v, w                                                                           | Yer değiştirme bileşenleri                        |
| V                                                                                 | Şekil değiştirme enerjisi                         |
| $V_i$                                                                             | İç iş, iç kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisi   |
| $V_j$                                                                             | Dış iş, dış kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisi |
| x, y, z                                                                           | Dikdörtgen kartezyen koordinatlar                 |
| $\theta, \varphi$                                                                 | Açısal koordinatlar                               |
| $\theta_x, \theta_y, \tau$                                                        | Eğilme ve burulma açıları                         |
| $\beta, \beta_x, \beta_y$                                                         | Kabuk dönmeleri                                   |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$                                       | Şekil değiştirme bileşenleri                      |
| { $\varepsilon$ }                                                                 | Şekil değiştirme bileşenleri                      |
| $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$                                                   | Gerilme bileşenleri                               |
| { $\sigma$ }                                                                      | Gerilme bileşenleri                               |
| v                                                                                 | Poisson oranı                                     |
| $\varphi[x, y]$                                                                   | Deplasman fonksiyonları                           |
| $\Delta(...) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ | Kartezyen                                         |

$$\nabla^2 w = \partial w'' + \partial \ddot{w}$$

Harmonik denklem

$$\nabla^4 w = \nabla \nabla w$$

Biharmonik denklem



## KISALTMALAR

H.K. Hooke Kanunu

HKL Kirchhoff-Love Varsayımları



## ŞEKİL LİSTESİ

|             |                                                                                                           |    |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1   | Çeliğin gerilme-şekil değiştirme diyagramı .....                                                          | 2  |
| Şekil 3.1   | (x,y) Eğrisel koordinat takımı genel $\theta \neq 90^\circ$ , ortogonal ise $\theta = 90^\circ$ olur..... | 12 |
| Şekil 3.2.a | Genel bir yüzeyin,eğrisel ve ortogonal eğrisel koordinatlardaki karakteristikleri.....                    | 16 |
| Şekil 3.2.b | Genel bir yüzeyin,eğrisel ve ortogonal eğrisel koordinatlardaki karakteristikleri.....                    | 16 |
| Şekil 3.3.a | Genel bir yüzeyin esas eğrilik yarıçapları .....                                                          | 16 |
| Şekil 3.3.b | Genel bir yüzeyin esas eğrilik yarıçapları .....                                                          | 16 |
| Şekil 3.4   | Geodezik eğrilikler .....                                                                                 | 20 |
| Şekil 3.5.a | Genel yüzey gerilme hali ve kesit tesirleri .....                                                         | 23 |
| Şekil 3.5.b | Genel yüzey gerilme hali ve kesit tesirleri .....                                                         | 23 |
| Şekil 4.1   | İki boyutlu sonlu farklar ağı .....                                                                       | 34 |
| Şekil 5.1   | Eliptik parabolik kabuğun geometrik özellikleri .....                                                     | 41 |
| Şekil 5.2   | Sonlu farklar düğüm noktaları şeması.....                                                                 | 46 |
| Şekil 6.1   | S sistemi.....                                                                                            | 58 |
| Şekil 7.1   | Eliptik parabolik kabuk geometrik özellikleri.....                                                        | 62 |
| Şekil 7.2   | Sonlu elemanlar ağı .....                                                                                 | 65 |
| Şekil 7.3   | Üçgensel basık elemanların geometrik özellikleri .....                                                    | 65 |
| Şekil 8.1   | Sonlu farklar ağı ve düğüm noktaları .....                                                                | 69 |
| Şekil 8.2   | Kesit Tesirleri Diyagramları.....                                                                         | 71 |
| Şekil 8.3   | Sonlu eleman ağı ve düğüm noktaları .....                                                                 | 73 |
| Şekil 8.4   | $N_x$ Diyagramı.....                                                                                      | 73 |
| Şekil 8.5   | $N_y$ Diyagramı.....                                                                                      | 74 |
| Şekil 8.6   | $N_{xy}$ Diyagramı .....                                                                                  | 74 |
| Şekil 8.7   | $M_x$ Diyagramı .....                                                                                     | 75 |
| Şekil 8.8   | $M_y$ Diyagramı .....                                                                                     | 75 |
| Şekil 8.9   | $M_{xy}$ Diyagramı.....                                                                                   | 76 |
| Şekil 8.10  | Zaman ve hata bakımından sonlu elemanlar ile sonlu farklar metodunun karşılaştırılması.....               | 77 |

## ÇİZELGE LİSTESİ

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| Çizelge 8.1 Kesit tesirleri ..... | 70 |
|-----------------------------------|----|



## ÖNSÖZ

Kabuklar az kalınlıklı, hafif, büyük hacimlerin kapatılabilmesini sağlayan ve çeşitli formlarda olabilen konstrüksiyonlardır. Bu sistemler işlevsel, sağlam, emniyetli, hafif ve ekonomiktir. Bu yüzden inşaat mühendisliği uygulamaları içinde geniş bir kullanım alanı mevcuttur. Bu tezde eliptik parabolik kabukların eğilme hesabının sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri ile yapılması amaçlanmaktadır.

Bu tezin yapılmasında katkılarından dolayı Sayın Prof. Dr. R. Faruk Yükseler'e ve Sayın Prof. Dr. Ercüment Köksal'a teşekkür ederim.



## ÖZET

Kabuk problemlerinin mühendislikte pratik çözüm ve uygulama alanları bulabilmesi, matematiksel formülasyon ve hesap yöntemlerinin oluşturulmasında, uygun ve kabul edilebilir yaklaşımlar yapılmasıyla olasıdır. Bu nedenle, kabuk hesaplarındaki varsayımlar, kabuk teorisi ve çözüm yöntemleri ele alınmaktadır.

Genel kabuğun geometrisi, boyutlu ve boyutsuz koordinatlarda genel kabuk denklemleri ve kesit zorları verildikten sonra bunların basık kabuk için Wlassow teorisine uygun olarak basitleşmiş ifadeleri elde edilmiştir. Bu ifadelerden hareketle mambran kesit tesirlerinin  $F(x,y)$  kuvvet fonksiyonları cinsinden tarifi yapılarak, kabuk denklemlerinin  $F$  ve  $w$ 'ye bağlı olarak eğilmeli ve mambran teorilerine göre Wlassow denklemleri çıkarılmıştır. Sonra bu denge ve kesit tesirleri denklemlerinin  $x, y, z$  kartezyen koordinatlarda izdüşüm ifadeleri ile  $F$  kuvvet ve  $w$  yer değiştirme fonksiyonları cinsinden denklemler elde edilmiştir.

Eliptik parabolik kabuğun eğilme analizi için sayısal yöntemlerden sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri kullanılmıştır. Sayısal çözüm için, kabuğun sonsuz küçük yani diferansiyellerle ifade edilen denklemleri sonlu farklar, sonlu elemanlar gibi sonlu küçük büyüklüklerle oluşturulmaktadır.

Sonlu farklar yönteminde, sonlu fark denklemleri kabuğun diferansiyel denkleminin yerine geçer. Oluşturulan sonlu farklar denklemlerinin çözümü ile kabuğun eğilme analizi yapılmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde sonlu eleman olarak, basık üçgensel eleman göz önüne alınmış ve buna uygun deplasman fonksiyonları geliştirilmiştir. Toplam potansiyel enerjinin birinci varyasyonundan, eliptik parabolik kabuğun denge statik problemi sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmüştür.

Her iki yöntem için Microsoft Visual C++ 6.0 platformunda yazılan bilgisayar programı yardımıyla sayısal uygulamalar yapılmış ve sonuçlar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Eliptik, parabolik, kabuk, sonlu farklar, sonlu elemanlar.

## ABSTRACT

It is possible for shell problems to place practical solutions and application areas in engineering by applying appropriate and acceptable approaches for building mathematical formulations and calculation methods. Therefore, assumptions in shell calculations, shell theory and solution methods are covered.

After introducing the general shell geometry, general shell equations in dimensioned and dimensionless coordinates and cross-sectional forces, depending on Wlassow theory the simplified expressions of those are extracted for shallow shell. Putting on these statements, membrane cross-sectional forces are defined in terms of  $F(x,y)$  force functions and according to membrane theories, depending on  $F$  and  $w$ , Wlassow equations are extracted. At last, with the projection expressions of those static and cross-sectional force equations on  $x$ ,  $y$ ,  $z$  Cartesian coordinates, equations in terms of  $F$  stress function and  $w$  displacement component are obtained.

For the elliptic parabolic shell bending analysis, finite difference and finite elements methods are used among numerical methods. For the numerical solution, shell's infinite small (expressed by differentials) equations are formed by finite small values like finite differences, finite elements.

In the finite differences method, finite difference equations are used instead of shells differential equations. Bending analysis of the shell is made by solving the formed finite differences equations. In the finite elements method, shallow triangular element is considered as the finite element and the related displacement functions are developed. Elliptic parabolic shells static problem is solved by finite element method from the first version of the total potential energy.

For both of the methods, numerical analysis is applied and the solutions are introduced by using software developed in Microsoft Visual C++ 6.0 platform.

**Keywords:** Elliptic, parabolic, shell, finite differences, finite elements.

## 1. GİRİŞ

Kabuklar; yüzeysel taşıyıcılar olup, az kalınlıklı, hafif, büyük hacimlerin kapatılabilmesini sağlayan ve çeşitli formlarda olabilen kontrüksiyonlardır. Kabukta üç eksenli bir gerilme hali mevcuttur. Kabuğun gerilme durumu, karşılaştırma yüzeyi yani ortalama yüzey koordinatlarının çift değişkenli fonksiyonları ile ifade edilebilir. Kabuğun karşılaştırma yüzeyi olarak, alt ve üst yüzeylerin ortasında bulunan, kabuk kalınlığını her yerde ikiye bölen orta yüzey alınır. Böylece kabuğun geometrisi idealize edilmiş olur.

Kabukların çözümü; analitik, sayısal ve enerjetik (varyasyon) yöntemlerle yapılabilmektedir. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri en güncel sayısal yöntemlerdendir.

İkinci bölümde, ince kabuk teorisinde yapılan varsayımlar, malzeme ve malzemenin davranışı anlatılmaktadır. Üçüncü bölümde, genel kabuk geometrisi verilerek, kabuğun statik (non-lineer, lincer, mambran lineer ) denge denklemleri ve elastisite bağıntıları verilmiştir. Dördüncü bölümde, iki değişkenli fonksiyonlarda sonlu fark ifadelerinin çıkartılması yapılmıştır. Beşinci bölümde, eliptik parabolik kabuğun geometrik özellikleri sunulmaktadır. Ayrıca, basık yüzeyli kabuk için Wlassow denklemleri çıkartılarak sonlu farklar yöntemiyle bu denklemlerin çözümü yapılmıştır. Altıncı bölümde, sonlu elemanlar yöntemi anlatılmıştır. Yedinci bölümde, eliptik parabolik kabuğun sonlu elemanlar yöntemi ile eğilme hesabı yapılmıştır. Sekizinci bölümde, kabuk karakteristikleri ve yükü verilen eliptik parabolik kabuk için değişik sınır koşulları altında sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemiyle sayısal uygulamalar yapılmış ve sonuçlar verilmiştir.

## 2. İNCE KABUK TEORİSİNDE VARSAYIMLAR ve KAVRAMLAR

Genel anlamda mekanik, mühendislik problemlerinin tümünü kapsar. Problemlerde ana unsur, malzeme olup malzemenin yapısına göre mekanik bilimi sınıflandırılır;

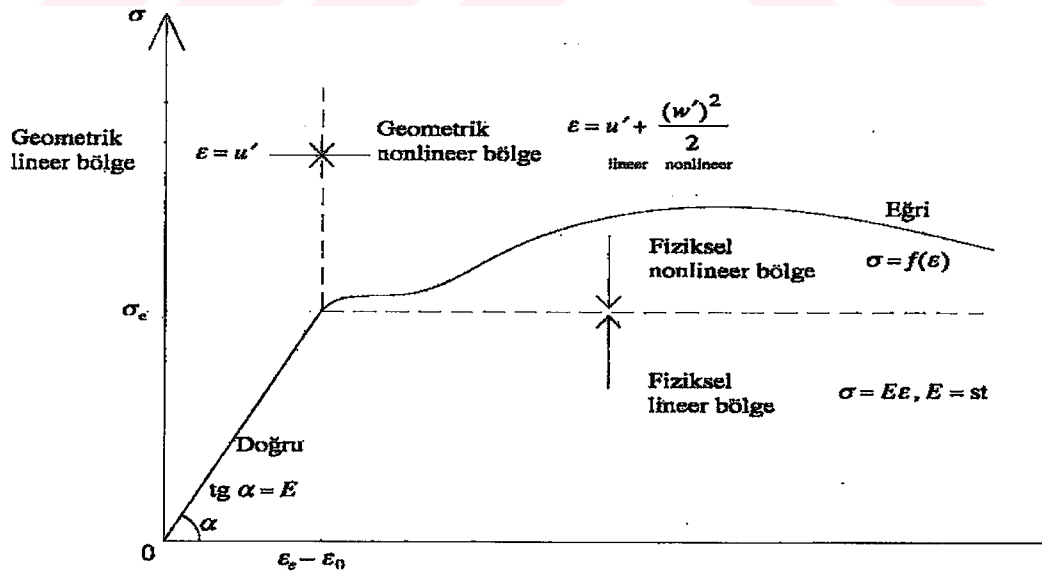
- Rijit Cisim Mekaniği
- Elastik Cisim Mekaniği
- Akışkanlar Mekaniği

Kabuk malzemesi elastik cisim olup, kabuk sistemler elastik cisim mekaniğinin konusudur. Kabuk sistemler için yapılan yaklaşımlar, kabuk probleminin birinci merteye ya da ikinci merteye hesabına bağlı olarak iki ana gruba ayrılır.

### 2.1 Birinci Merteye Teorisinde Yapılan Varsayımlar

Mühendislik problemlerinde, tipine göre hesaplar I. merteye ya da II. merteye teorisiyle yapılır. I. merteye teorisiyle hesap yapmak demek şekil değiştirmemiş sistem üzerinde işlem yapmak, örneğin denge ve uygunluk denklemlerini oluşturmaktadır. Bu durumda yer değiştirme ve şekil değiştirmenin küçük olduğu varsayılır.

#### 2.1.1 Malzeme ve Malzemenin Davranışı



Şekil 2.1 Çeliğin gerilme-şekil değiştirme diyagramı

**Malzeme Kavramı:** Malzemeyi belirleyen iki ana özellik vardır. Bunların biri malzemenin elastik özelliği, diğeri davranış biçimidir.

#### Malzeme kavramı

- Elastik özellik
  - Anizotrop malzeme
  - Ortotrop malzeme
  - İzotrop malzeme
- Davranış biçimi
  - Fiziksel açıdan
    - Lineer  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  (Hooke)
    - Nonlinear  $\sigma = f(\varepsilon)$
  - Geometrik açıdan
    - Lineer  $\varepsilon = \partial u / \partial x$
    - Nonlinear  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$

Kabuk malzemesi, homogen, izotrop ve sürekli kabul edilir.

Homogen ve izotrop olma, malzeme özelliklerinin sırasıyla, noktanın bulunduğu yere ve noktadan geçen doğrultuya göre değişmediğini gösterir. Malzeme hem elastik özelliğine ve hem de davranış tipine göre sınıflandırılır (Köksal ve Köksal, 1996).

#### 2.1.1.1 Malzeme elastik özelliği

Malzeme elastik özellikler açısından üç ana gruba ayrılır. Bunlar:

- 1-Anizotrop malzeme
- 2-Ortotrop malzeme
- 3-İzotrop malzeme

Genel Hook yasası,

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad i,j,k,l = 1,2,3 \quad (2.1)$$

Matris formda

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (2.2)$$

şeklinde gösterilir. Burada  $[D]$ , malzemenin elastik sabitlerinin matris formda gösterimidir ve katsayılar matrisi olarak ifade edilir.

### 1-Anizotrop Hal

En genel anizotrop halde  $(9 \times 9)$  luk  $[D]$  katsayılar (Elastisite) matrisinin bağımsız eleman sayısı 81 adettir.

$$\begin{bmatrix} D_{1111} & \dots & D_{1119} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{9991} & \dots & D_{9999} \end{bmatrix}$$

Gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin, homogen olmayan halde, simetrik olması durumunda elastik sabitlerin sayısı 36 ya iner. Dört indisli gösterimi iki indise indirgeyerek bu anizotrop halde  $[D]$  katsayılar matrisi;

$$\begin{bmatrix} D_{1111} & \dots & D_{1119} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{9991} & \dots & D_{9999} \end{bmatrix}$$

Green şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu

$$U = \frac{1}{2} D_{ijkl} \cdot \epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl} , \quad \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$$

şeklindeyse  $[D]$  katsayılar matrisinin bu anizotrop hal için bağımsız elastik sabit katsayısı 36 dan 21 e iner.

Elastik özellikler tek bir düzleme göre simetrikse (monolitik simetrlili) bağımsız elastik sabit katsayısı 13'e iner. Örneğin, kabuk ve plakta orta yüzey simetri düzlemi ise sekiz elastik sabit sıfır olur ve 21 bağımsız elastik sabit 13'e iner.

### 2- Ortotrop Hal

Malzemenin elastik özellikleri karşılıklı olarak birbirine dik üç düzleme göre, ikişer ikişer simetrik ise ortotrop cisim adını alır ve  $[D]$  katsayılar matrisinde bağımsız elastik sabit sayısı 9 a iner. Örneğin,  $\sigma_z = 0$  için, düzlem gerilme haline tekabül eden bu durumda sabit sayısı 9 olur. Bu durumda kayma etkisi göz önüne alınmaktadır (Reissner Teorisi).

Ortotrop cisimde, malzemenin elastik özellikleri uygun olarak seçilen bir eksen takımının iki eksenini doğrultusunda aynı, üçüncü eksen doğrultusunda farklı ise yani ortotrop olma koşuluna

ek olarak iki eksenin, üçüncü eksen etrafında dönmesi halinde elastik özellikler değişmiyorsa, bağımsız elastik sabit sayısı 6'ya iner. Örneğin, bu durumda kabuk ve plakta kayma etkisi terkedilmiştir ve bağımsız elastik sabit sayısı 6' dır. Bu hal Kirchhoff Teorisi' dir.

Ortotrop cisim kalınlık boyunca homogen ise bağımsız elastik sayısı 4'e iner.

Malzemenin elastik özellikleri birbirine dik üç eksen boyunca eşitse (kübik malzeme) bağımsız elastik sabit sayısı 3'e iner.

Ortotrop kabuklarda, ortotropi özelliğini sağlayan elemanların, örneğin nervürlerin etkisi

-Kabuğa çizgisel yük şeklinde verilerek,

-Kabuk ile nervürler birlikte mütalaa edilerek yani nervürleri kabuk elastik sabitlerine katarak, sağlanır.

### 3- İzotrop Hal

Cismin malzemesinin elastik sabitleri koordinat eksenlerinin doğrultusundan bağımsız ise yani herhangi bir noktadan geçen tüm doğrultularda elastik özellikler aynı ise izotrop malzeme adını alır ve bağımsız elastik sabit sayısı 2 ye iner. Bunlara Lamé katsayıları denir:  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Lamé katsayıları ile E Young modülü ve  $\nu$  Poisson oranı arasında aşağıdaki bağıntılar vardır;

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \quad \dots\dots\dots \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.3)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots\dots\dots E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \quad (2.4)$$

İzotrop hal için  $[D]$  katsayılar matrisini açık formlarda verelim.

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{1111} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & D_{1212} & 0 \\ & & & & & D_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & D_{66} & 0 \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \\
&= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

İzotrop kabukta elastisite bağıntısı (Hooke Yasası)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \nu C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} C & 0 & 0 & 0 \\ & & & D & \nu D & 0 \\ & & & & D & 0 \\ & & & & & \frac{1-\nu}{2} D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Burada,  $C = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  ve örneğin  $k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $k_{xy} = -2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  olur.  $N_i$ ,  $M_i$  ler

kabukta birim boya düşen kesit tesirleri ve  $h$  kabuk kalınlığıdır.  $C$  uzama,  $D$  eğilme rijitlikleri ve  $k_x$ ,  $k_y$  ler eğriliklerdir (Köksal ve Köksal, 1996).

### 2.1.1.2 Malzeme Davranışı

Malzeme davranışı açısından değerlendirilirken, malzeme fiziksel ve geometrik özellikleriyle ele alınır;

#### 1- Malzemenin fiziksel özelliği

Gerilme-şekil değiştirme bağıntısının farklılığından oluşur.

$$\sigma = f(\epsilon)$$

Fiziksel açıdan malzemeleri iki gruba ayırmaktayız.

1.a- Lineer hal,

Hook yasası geçerli, gerilme-şekil değiştirme bağıntısı doğrusaldır. Elastisite modülü sabittir.

1.b- Nonlineer hal,

Hook yasası geçersiz,  $\sigma = f(\varepsilon)$  bağıntısı eğriseldir.

2- Malzemenin geometrik özelliği

Şekil değiştirme bağıntılarının durumunu gösterir. Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntısının farklılığından oluşur.  $\varepsilon = f(d)$ ,  $\{d\}=(u, v, w, u_x, v_y, w_z)$ .

Geometrik olarak da malzemeleri iki gruba ayırmaktayız;

2.a- Lineer hal,

Deplasmanlar küçük olup,  $\varepsilon = f(d)$  bağıntısı doğrusaldır. İkinci dereceden terimler alınmaz.

2.b- Non-linear hal,

Deplasmanlar nispeten büyük olup,  $\varepsilon = f(d)$  bağıntısı eğriseldir ve ikinci dereceden terimler

içerir. Örneğin,  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \dots$  gibi. Burada ikinci terim non-lineerdir.

Malzemenin davranışının fiziksel ve geometrik özelliklerinin durumu çeliğin gerilme-şekil değiştirme diyagramı üzerinde Şekil 2.1’de gösterilmiştir (Köksal ve Köksal, 1996).

### **Homogen malzeme**

Malzeme içerisinde, elastik özellikler noktadan noktaya değişmez. Elastik sabitler koordinatlara bağlı olmaz ve bütün ortamda aynı sabit değeri alırlar.

### **Kabuk orta yüzeyi**

Kabuğun alt ve üst yüzeylerinin tam ortalarını teşkil eden noktaların geometrik yerini oluşturan yüzey kabuk orta yüzeyi adını alır. Hesaplarımızda bu yüzeyi karşılaştırma yüzeyi olarak almaktayız.

### 2.1.2 Süreklilik hipotezi

Kabuğun sürekli ortama sahip olması, bize, kuvvet ve deplasmanları sürekli fonksiyonlarla ifade etme olanağını verir. Kısaca kabuğun malzemesinin homogen, izotrop ve sürekli ortam özelliği taşıdığı kabullerine süreklilik hipotezi adı verilir.

### 2.1.3 Malzeme lineer elastiktir

Malzemenin lineer elastik olması, gerilme şekil değiştirme bağıntılarının lineer olduğunu kısaca Hook Yasası'nın geçerli olduğunu gösterir. Bu bize hesaplarda süperpozisyon ilkesini uygulama olanağını verir.

### 2.1.4 Süperpozisyon ilkesi geçerlidir

### 2.1.5 Betty karşılıklı teoremi geçerlidir

### 2.1.6 Kabuk incedir

Kabuk ince olup ayrıca kalınlığına oranla şekil ve yer değiştirme bileşenleri küçüktür. Örneğin,  $w \ll h$ . Bu malzemenin, geometrik lineer özelliğine karşı gelir. Bu yapılacak hesaplarda yer değiştirme büyüklüklerinden yalnızca lineer terimler göz önüne alınacak yani kinematik bağıntılarda (şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları), yer değiştirme bileşenlerinin yalnızca birinci mertebeden terimlerinin dikkate alınacağı demektir. Sonuç olarak bünye denklemleri ve geometrik uygunluk şartlarında ikinci mertebeden terimler terk edilirler. Kısaca geometrik ve fiziksel olarak lineer hal söz konusudur. Ayrıca

1- Deformasyonlar kabuk kalınlığı boyunca lineerdir.

2-  $(h/r)^2 \ll 1$

3- HKL geçerlidir.

Tüm bunlar kabuk kabullerinde birinci yaklaşım olarak kabul edilirler.

### 2.1.7 HKL, Kirchhoff-Love varsayımları

1- Kabuk orta yüzeyine dik doğrultudaki normal gerilmeler terk edilebilecek kadar küçüktür. Yani  $\sigma_z = 0$  alınır. Elastisite teorisinde bu gerilmelerin ikinci mertebeden rol oynadıkları ispatlanmış olup, pratikten de  $\sigma_z$  normal gerilmesinin diğer gerilmelere oranla %0.1 mertebesinde kaldığı bilinmektedir.

2- Şekil değişim öncesi kabuk orta yüzeyine dik olan bir doğru, şekil değişiminden sonra da ;

- Doğru olarak kalır.
- Kabuk orta yüzeyine dik kalır.

Bu Bernoulli-Navier Hipotezi'nin genelleştirilmiş haline karşı gelir. Bu Bernoulli-Navier Hipotezi, basit kiriş teorisinde deformasyondan sonra düzlem kesitler düzlem kalır şeklindedir ve kesme kuvvetinden dolayı meydana gelen şekil değişimleri ihmal edilir. Bu da kabuktaki orta yüzeye dik doğrultudaki  $V_x$  ve  $V_y$  kuvvetlerinden dolayı kabuktaki deformasyonlar ihmal edilecek demektir. Yani bu kabul gereğince, enine kayma açıları  $\gamma_{zx}$  ve  $\gamma_{zy}$  sıfır olur. Bu varsayımı içermeyen kabuk teorisine, kaymalı kabuk teorisi denir. Bu teoriye göre, doğru, orta yüzeye deformasyondan sonra dik kalmaz. Dolayısı ile enine birim kayma şekil değiştirme bileşenleri sıfır olmaz.

- Kabuk orta yüzeyine dik doğrunun deformasyondan sonra boyu değişmez.

Orta yüzeye dik doğru üzerindeki bütün noktalar eşit miktarda yer değiştirirler. Böylece kabuğun kalınlığının deformasyondan sonra değişmediği varsayılır. Buna göre  $\varepsilon_z = 0$  olup, bu da kabuk ince ise geçerlidir.

Böylece kabuk teorilerini birinci ve ikinci mertebeden olmak üzere iki kategoriye ayırmanın nedeni açığa çıkar.

### 2.1.8 Kabuğun kalınlığı $h \ll r_{\min}$

Kabuğun bir noktasındaki kalınlığının, orta yüzeyin o noktadaki en küçük eğrilik yarıçapına oranı terk edilebilir.

$$\frac{r+h}{r} = 1 + \frac{h}{r} \cong 1, \quad r \rightarrow r_{\min} \quad (2.7)$$

Sıralanan bu kabuller, “lineer eğilmeli ince kabuk teorisinde” yapılır.

### 2.1.9 İnce, basık kabuk teorisinde ilave varsayımlar

Kabuk yüksekliği, taban genişliğine oranla küçüktür. Öyle ki,

$$\frac{f}{L_{\min}} \leq \frac{1}{5} \quad (2.8)$$

olmalıdır.

1- Bu durumda denge denklemlerinin ilk ikisinde  $V_x$  ve  $V_y$  kesme kuvvetleri terk edilebilir.

2- Yine  $N_{xy}$  ve  $M_x$  ifadelerinde  $M_{xy}$  momentlerinin tesiri az olacağından terk edilebilir.

- 3- Normal dönmelerde de (u) ve (v) deplasmanları terk edilir.
- 4- Basık kabukta, orta yüzeyin toplam eğriliği yaklaşık sıfırdır.

#### 2.1.10 Mambran kabuk teorisinde ilave kabuller

Mambran kabuk, kabuk kalınlığının çok ince olduğu, zar gibi, hali betimler.

- 1- Kabuğun çok ince olduğu ve orta yüzeyle ifade edildiği kabul edilir.
- 2- Bu durumda kabuk kalınlığı ve düşey deplasman sıfırdır.

$$h = w = 0 \quad (2.9)$$

- 3- Kabuk elemanlarının kenarlarında gerilmeler ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ ) üniform olarak yayılı olup, z ekseninden bağımsızdır. Bu durumda “mambran gerilme hali” olur.

Gerilmelerden,

$$(\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0) \quad (2.10)$$

olup, diğer gerilmeler de üniform yayılı olduğundan,

$$M_x = M_y = M_{yx} = 0 \quad (2.11)$$

$$V_x = V_y = 0 \quad (2.12)$$

olur (Köksal ve Köksal, 2003).

### 3. YÜZEY GEOMETRİSİ ve GENEL KABUK DENKLEMLERİ

#### 3.1 Yüzey Geometrisi

##### 3.1.1 Genel yüzey parametrik denklemleri

Uzayda bir yüzeyi belirleyebilmek için, yüzeyin bir dört kenarlı herhangi bir elemanın,

- Kenar boylarının  $(ds_x, ds_y)$
- Köşegen eğri uzunluklarının  $(ds)$
- Normal eğrilik çaplarının  $(r_x, r_y, r_{xy})$
- Normal eğriliklerinin  $(1/r_x, 1/r_y, 1/r_{xy})$
- Geodezik eğrilik yarıçaplarının  $(\rho_x, \rho_y, \rho_{xy})$
- Geodezik eğriliklerinin  $(1/\rho_x, 1/\rho_y, 1/\rho_{xy})$
- Dönmelerinin  $(\phi_x, \dots, \omega_x \dots)$

-Yüzey genel parametrik denklemlerinin

-Bunlar için gerekli Lamé Katsayılarının

bulunması ifadelerinin tayin edilmesi gerekir. Görüldüğü gibi yukarıdaki karakteristik değerlerin bir kısmı bağımsız değildir. Bunlardan kabuk yüzey tiplerine geçmek ve kabuk etüdünü yapmak olasıdır. Daha sonra genel yüzey yani genel kabuk geometrisinden ve sonsuz küçük dört kenarlı elemanından hareketle

- Denge denklemlerini: Statik ( Non-Lineer, Lineer, membran lineer ) denge denklemleri, stabilize ( Lineer, non-lineer ) denge denklemleri.

- Kinematik Bağlılıklarını

- Elastisite Bağlılıklarını

- Kabuk Ana Diferansiyel Denklemlerini

- Enerji ifadelerini

oluşturmak olasıdır. Şimdi bu konuların açıklamalarını yapalım.

Uzayda herhangi bir (M) noktası (X,Y,Z) kartezyen koordinatlarıyla belirtilebilir. Ancak nokta bir yüzey üzerinde bulunuyorsa o zaman koordinatlar arasında bir  $s(X,Y,Z)=0$  bağıntısı mevcut olur. Buna yüzey denklemi adı verilir. Matematiksel açıdan kolaylık olsun diye, özellikle elastisite teorisiyle ilgili birçok problemlerde değişik koordinat takımı daha doğrusu, parametre kullanarak (X,Y,Z) içeren denklemler iki yüzey eğrisi (x,y) cinsinden yazılabilir. Dolayısıyla, kabuk kalınlığının orta yüzeyi de (X,Y,Z) kartezyen koordinatlarda yazılabilir. Böylece genel yüzey parametrik denklemleri

$$\begin{aligned} X &= f_1(x,y) \\ Y &= f_2(x,y) \\ Z &= f_3(x,y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

olur. Bu (3.1) parametrik ifadelerdeki ( $f_i$ ) ler, ( $x$ ) ve ( $y$ ) parametrelerinin sürekli ve üniform fonksiyonlarıdır. Kısaca yukarıdaki bu bağıntılar herhangi bir yüzey denkleminin parametrik ifadesidir. Yüzeye ait herhangi bir ( $M$ ) noktası, yüzeyin eğrisel koordinatları denen ( $x,y$ ) nin bir değer çiftine karşılık gelir.

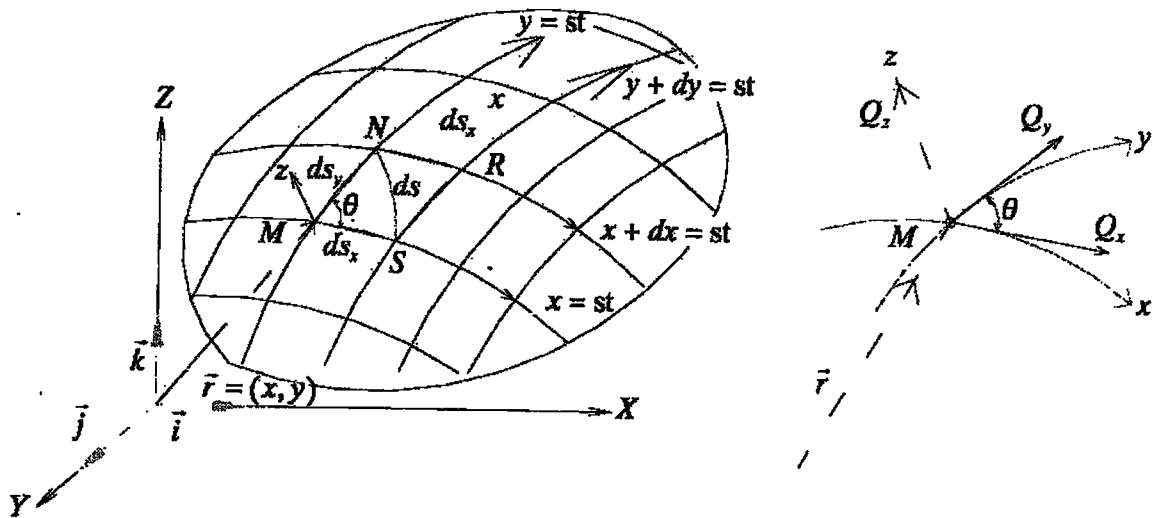
$\vec{r}$  yer vektörünün ( $X,Y,Z$ ) kartezyen koordinatlarıyla (parametreleriyle) belirtilen bir yüzey üzerindedir. O halde  $M'$  nin  $X,Y,Z$  bileşenleri (yer vektörü bileşkesi  $\vec{r}$ ) ile ( $x,y,z$ ) eğrisel koordinat takımı arasında matematiksel (diferansiyel) bir bağıntı kurulabilir. Yüzey üzerindeki herhangi bir eğride, ( $x,y$ ) cinsinden  $g(x,y)=0$  olarak ya da parametrik formda  $x = g_x(\beta)$ ,

$y = g_y(\beta)$  ile ifade edilebilir. Burada ( $\beta$ ) bağımsız değişkendir ve  $x, y$  yüzeyin eğrisel koordinatlarıdır (Köksal ve Köksal, 2003).

### 3.1.2 Lamé Katsayıları

Bir yüzeyin tüm geometrisini Lamé Katsayıları belirler. Çünkü yüzeyin şekli ve eğrilikleri, iki ana kuadratik form katsayılarına bağlıdır.

- 1- Birinci kuadratik form katsayıları, yüzey şeklini
- 2- İkinci kuadratik form katsayıları, yüzey eğriliklerini karakterize ederler.



Şekil 3.1 ( $x,y$ ) Eğrisel koordinat takımı genel  $\theta \neq 90^\circ$ , ortogonal ise  $\theta = 90^\circ$  olur.

### 1-Birinci kuadratik form katsayıları, Lamé Katsayıları

$$\begin{aligned}
 E &= \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \quad \dots\dots A = \sqrt{E} \\
 G &= \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \quad \dots\dots B = \sqrt{G} \\
 F &= \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \dots\dots C = \sqrt{F}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

### Birinci kuadratik form, (s<sub>1</sub>)

$$s_1 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = ds^2 \tag{3.3}$$

### 1-İkinci kuadratik form katsayıları, Lamé Katsayıları

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix} \\
 M &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix} \\
 N &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

### İkinci kuadratik form, (s<sub>2</sub>)

$$s_2 = L dx^2 + 2M dx dy + N dy^2. \tag{3.5}$$

Yüzeyin bir (M) noktasında kovariant baz vektörleri, yer vektörünün (x) ve (y) ye göre türetilmesiyle elde edilir. Yer vektörü,

$$\vec{r} = X(x,y) \vec{i} + Y(x,y) \vec{j} + Z(x,y) \vec{k} \tag{3.6}$$

şeklindedir, öte yandan

$$\vec{a}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \quad \vec{a}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}, \quad \vec{a}_z = \frac{\vec{a}_x \times \vec{a}_y}{|\vec{a}_x \times \vec{a}_y|} \quad (3.7)$$

olarak tariflenir. Kovariant baz vektörlerinden üçüncü bileşen (3.7) yüzeye dik birim vektörüdür (Köksal, 1975).

### 3.1.3 Yüzey elemanlarının kenar boyları ve $\overline{ds}$

Genel yüzey (MNRS) elemanının kenar boylarını ve  $\overline{ds}$  hesabını verelim. Yüzey karakteristiklerinin daha uygun bir formda aşağıdaki biçimde Lamé katsayılarından yararlanarak ifade edebiliriz.

$$A = \sqrt{E} = \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$B = \sqrt{G} = \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.8)$$

$$C = \sqrt{F}$$

tarifini yapalım.

Ayrıca,

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy \quad (3.9)$$

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$$

olup, herhangi bir eğrisel yüzeyin bir  $\hat{NS}$  eğrisinin boyu,

$$d\hat{s}^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (3.10)$$

olur. Denklem (3.8) in belirttiği tariflerden yararlanarak  $d\bar{s}$  yani köşegen eğrisi boyu ile sonsuz küçük elemanın kenar boyları, genel eğrisel koordinatlarda,

$$\hat{MS} = ds_x = A \cdot dx$$

$$\hat{MN} = ds_y = B \cdot dy$$

$$\hat{RN} = ds_x^+ = \left( A + \frac{\partial A}{\partial y} . dy \right) dx = ds_x + \frac{\partial s_x}{\partial y} . dy \quad (3.11)$$

$$\hat{RS} = ds_y^+ = \left( B + \frac{\partial B}{\partial x} . dx \right) dy = ds_y + \frac{\partial s_y}{\partial x} . dx$$

olarak bulunur. (3.3), (3.8) ve (3.11) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= ds_x^2 + ds_y^2 - 2ds_x ds_y \cos \theta \\ d\bar{s}^2 &= A dx^2 + B dy^2 - 2AB dx dy \cos \theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

olur. Bu denklemlerdeki (-) üst çizgiler, x ve y yüzeyin eğrisel koordinatlarının genel olduğunu yani  $\theta$  açısının  $90^\circ$  den farklı olduğunu betimler. Yüzeyin (x,y) koordinat takımının ortogonal olması halinde yani  $\theta = 90^\circ$  için üst çizgiler karakterlerde kaldırılarak yazılacaktır.

Denklem (3.3) ve (3.12)  $\hat{MR}$  eğrisinin difransiyelinin karesini gösterir.  $\theta$  açısı,  $x = st$  ve  $y = st$  koordinat eğrilerinden tayin edilebilir. Şöyle ki, MNS üçgeninde

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{E.G}} = \frac{C^2}{A.B} \quad (3.13)$$

Eğer (x,y) eğrisel koordinatları ortogonalse, yani  $\theta = 90^\circ$  ise,  $\cos \theta = 0$  olacağından,

$$F \equiv 0 \rightarrow C = 0 \quad (3.14)$$

olur. Şekil 2.1 den görüldüğü gibi  $\theta$  açısı, x ve y eğrisel koordinatları arasındaki açıdır.

Ortogonal (x,y) eğrisel koordinatlarda (ds) boyu, denklem (3.12) ve (3.14) den,

$$ds^2 = ds_x^2 + ds_y^2 = A^2 dx^2 + B^2 dy^2 \quad (3.15)$$

olur. Şimdi genel yüzeyin, genel ve ortogonal eğrisel koordinatlarda diğer karakteristik değerlerini verelim.

### 3.1.4 Yüzeyin esas eğrilikleri, asal eğrilikleri, normal eğrilikleri ve normal eğrilik yarıçapları

Genel bir yüzeyin, genel eğrisel koordinatlarda ve ortogonal eğrisel koordinatlarda karakteristikleri Şekil 3.2 a,b' de gösterilmiştir.

1- Genel eğrisel eksenler

$$\theta \neq 90^\circ, \quad \bar{r}_x, \bar{r}_y, \bar{r}_{xy}, C, F, M$$

2- Eşlenik eğrisel eksenler

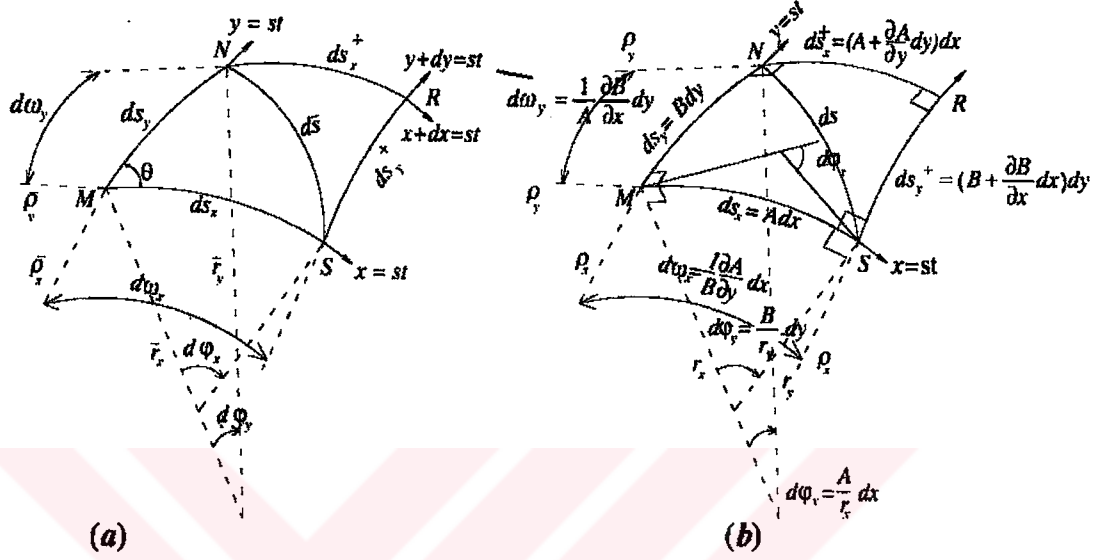
$$\theta \neq 90^\circ, \quad \bar{r}_x, \bar{r}_y \neq 0, \quad \bar{r}_{xy} = 0 \rightarrow M = 0, C, F$$

### 3- Ortogonal fakat eşlenik olmayan eğrisel eksenler

$$\theta = 90^\circ \rightarrow C = F = 0, r_x, r_y, r_{xy}, M$$

### 4- Ortogonal, eşlenik eğrisel eksenler (Asal eksenler)

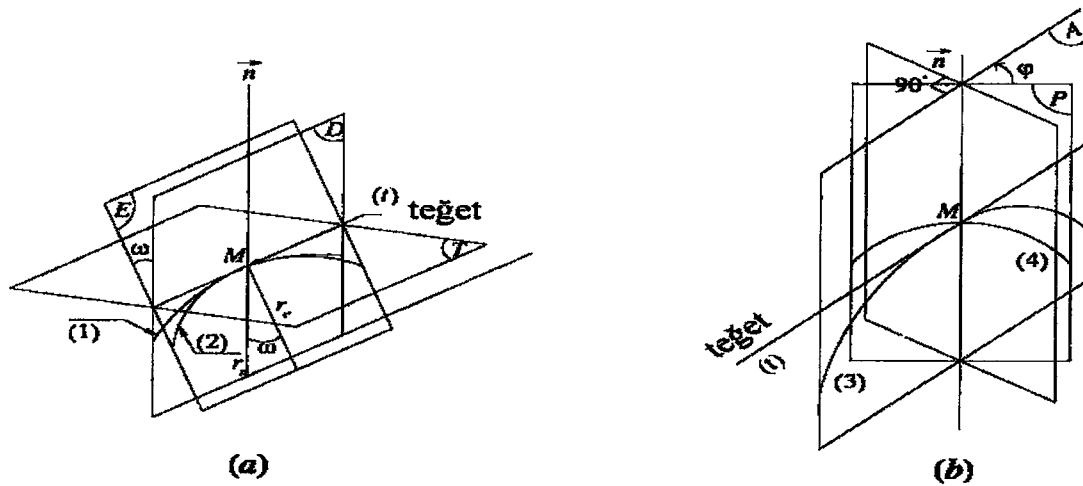
$$\theta = 90^\circ \rightarrow C = F = 0, r_x \rightarrow r_{\max}, r_y \rightarrow r_{\min}, r_{xy} = 0 \rightarrow M = 0$$



Şekil 3.2.a, b Genel bir yüzeyin, eğrisel ve ortogonal eğrisel koordinatlardaki karakteristikleri

Genel bir yüzeyin eğriliklerini, eğrilik yarıçaplarını yine Lamé Katsayıları ile ifade edebiliriz. Genel bir yüzeyin esas eğrilik yarıçapları ve eğrilikleri aşağıdaki denklemin kökleriyle bulunurlar (Köksal, 1975).

$$(LN - M^2)r_n^2 - (EN + GL - 2FM)r_n + EG - F^2 = 0 \quad (3.16)$$



Şekil 3.3 a,b Genel bir yüzeyin esas eğrilik yarıçapları

Çünkü, Şekil 3.3 a,b de gösterilen yüzeyin üzerindeki bir (M) noktasından, yüzeye, n normalini ve bu normal içine alan (D) dik düzlemini çıkaralım. Yüzey ile (D) dik düzleminin ara kesiti (1) olsun. (M) noktasında normal içine alan yüzeye, normal düzlem denir. Bu düzlem, (M) noktasında normal doğru etrafında döndüğünde normal eğrilik yarıçapları değişir. Öyle bir konum vardır ki normal düzlemlerin eğrilik yarıçapları eşlenik olur. Yani  $\bar{r}_{xy} = 0$  olur ve  $\bar{r}_x$ ,  $\bar{r}_y$  ye esas eğrilik yarıçapları denir. Bu durumda, dik düzlemle yüzeyin arakesitini teşkil eden eğrilere de eşlenik eğriler denir. Eğer bu eşlenik eğriler birbirine dikse yani ortogonalse asal eğrisel koordinatlar adını alır. Eşlenik eğrilik yarıçapları da asal eğrilik yarıçaplarına dönüşür ve biri maksimum diğeri minimum olur. Kısaca öyle bir konum vardır ki normal düzlemin bu durumda eğrilik yarıçaplarından biri maksimum diğeri minimum olur ve asal eğrilik yarıçapları ( $r_x$ ,  $r_y$ ) adını alır ve ortogonaldır. Ortogonal yüzeyde ortogonal koordinat sisteminde ( $x = st$ ,  $y = st$ ) eğrileri asal eğrilerdir.

(M) noktasında yüzey normali  $\bar{n}$  ve eğriliği  $\frac{1}{r_n}$  olsun, normal eğriliğin değeri (3.3), (3.5) den,

$$\frac{1}{r_n} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2}{Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2} \quad (3.17)$$

olur. Eksenler eşlenik  $\bar{r}_{xy} = 0$  olacağından, esas eğrilik yarıçapları (3.16) denklemleriyle bulunurlar. Ancak eşlenik eksenler birbirine dik olursa asal eksenlere dönüşeceklerinden,  $F = 0$ ,  $M = 0$

olur. Bu durumda, asal eğrilik yarıçapları

$$LNr_n^2 - (EN + GL)r_n + EG = 0 \quad (3.18)$$

denkleminin kökleri ile bulunur.

### Asal eğrilik yarıçapları

$$r_x, r_y = \frac{\frac{EN + GL}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{EN + GL}{2}\right)^2 - LNEG}}{LN} = \frac{EN + GL}{2LN} \pm \frac{EN - GL}{2LN} \rightarrow \begin{pmatrix} r_x \rightarrow (+) \\ r_y \rightarrow (-) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$r_x \rightarrow (+)$  ve  $r_y \rightarrow (-)$  hali için,

$$r_x = \frac{E}{L} = \frac{A^2}{L}$$

$$r_y = \frac{G}{N} = \frac{B^2}{N} \quad (3.20)$$

### Normal asal eğrilikleri

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_x} &= \frac{L}{E} = \frac{L}{A^2} \\ \frac{1}{r_y} &= \frac{N}{G} = \frac{N}{B^2}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Ayrıca bu eğrilik yarıçapları  $ds_x$  ve  $ds_y$  elemanter yay uzunlukları boyunca değişmez ise aşağıdaki bağıntılar yazılabilir. Şekil 3.2a dan genel eğrisel koordinatlarda

$$\begin{aligned}ds_x &= A.dx = \bar{r}_x.d\phi_x \\ ds_y &= B.dy = \bar{r}_y.d\phi_y\end{aligned}\quad (3.22)$$

Burulma eğrilik yarıçapları, genel eğrisel koordinatlarda

$$\begin{aligned}\bar{r}_{xy} &= \frac{ds_x}{d\gamma_x} = \frac{EM - FL}{E\sqrt{EG - F^2}} \\ \bar{r}_{yx} &= \frac{ds_y}{d\gamma_y} = \frac{EN - GM}{G\sqrt{EG - F^2}}\end{aligned}\quad (3.23)$$

ifadeleriyle verilebilir. Eşlenik olmayan, ortogonal eğrisel koordinatlarda,  $F \cong 0$  dan, üst çizgilerde kaldırılarak,

$$r_{xy} = -r_{yx} = \frac{M}{\sqrt{EG}} = \frac{M}{AB}\quad (3.24)$$

olur. Eğer (x) ve (y) aynı zamanda asal eğriler ise yani hem ortogonal ( $\theta = 90^\circ$ ) ve hem de eşlenik ( $r_{xy} = 0$ ),  $F = C = 0$  ve  $M = 0$  dan,

$$r_{xy} = r_{yx} = 0\quad (3.25)$$

olur. Diğer taraftan eğrisel koordinat sisteminin ortogonal olmasından,

$$\bar{a}_y \cdot \bar{a}_y = 0\quad (3.26)$$

ifadesinin sağlandığı varsayılır. Yüzey baz vektörlerinin boyları A ve B,

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{\bar{a}_x \cdot \bar{a}_x} \\ B &= \sqrt{\bar{a}_y \cdot \bar{a}_y}\end{aligned}\quad (3.27)$$

yazılabilir. Dolayısıyla kabuk yani ortogonal bir yüzey elemanının üzerindeki bir eğri elemanının boyunun (3.15) denklemi ile verilebileceğini biliyoruz (Şekil 3.2b). Sonuç olarak, ortogonal asal eğrisel (x,y) koordinatlarında, normal asal eğrilik yarıçapları, sırasıyla normal eğrilikler normal açı değişimleri ve burulma açı değişimleri,

### Normal asal eğrilik yarıçapları

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{E}{L}, \quad r_x = \frac{A^2}{L} \quad \dots\dots A = \sqrt{E}, \quad r_x = \frac{A^2}{\vec{a}_z} \cdot \frac{\partial x}{\partial \vec{a}_x} \\ r_y &= \frac{G}{N}, \quad r_y = \frac{B^2}{N} \quad \dots\dots B = \sqrt{G}, \quad r_y = \frac{B^2}{\vec{a}_z} \cdot \frac{\partial y}{\partial \vec{a}_y} \end{aligned} \quad (3.28)$$

### Normal eğrilikler

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_x} &= \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{r_x} = \frac{L}{A^2}, \quad \frac{1}{r_x} = \frac{\vec{a}_x}{A^2} \cdot \frac{\partial \vec{a}_x}{\partial x} \\ \frac{1}{r_y} &= \frac{N}{G}, \quad \frac{1}{r_y} = \frac{G}{B^2}, \quad \frac{1}{r_y} = \frac{\vec{a}_y}{B^2} \cdot \frac{\partial \vec{a}_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Bilindiği gibi asal eğrilikler birbirine dik iki düzlem içinde bulunurlar ve burada  $r_x$  ve  $r_y$  asal eğrilik yarıçaplarıdır ve  $r_{xy} = 0$  dır. Buradan ve Şekil (3.2b) ile (3.11), (3.29) denklemlerinden,

### Normal Açı Değişimleri $d\phi_x, d\phi_y$

$$\begin{aligned} ds_x &= A \cdot dx = r_x \cdot d\phi_x, \quad ds_y = B \cdot dy = r_y \cdot d\phi_y \\ d\phi_x &= \frac{A}{r_x} \cdot dx = \frac{AL}{E} \cdot dx, \quad d\phi_x = \frac{AL}{A^2} \cdot dx = \frac{L}{A} \cdot dx \\ d\phi_y &= \frac{B}{r_y} \cdot dy = \frac{BN}{G} \cdot dy, \quad d\phi_y = \frac{BL}{B^2} \cdot dy = \frac{N}{B} \cdot dy \end{aligned} \quad (3.30)$$

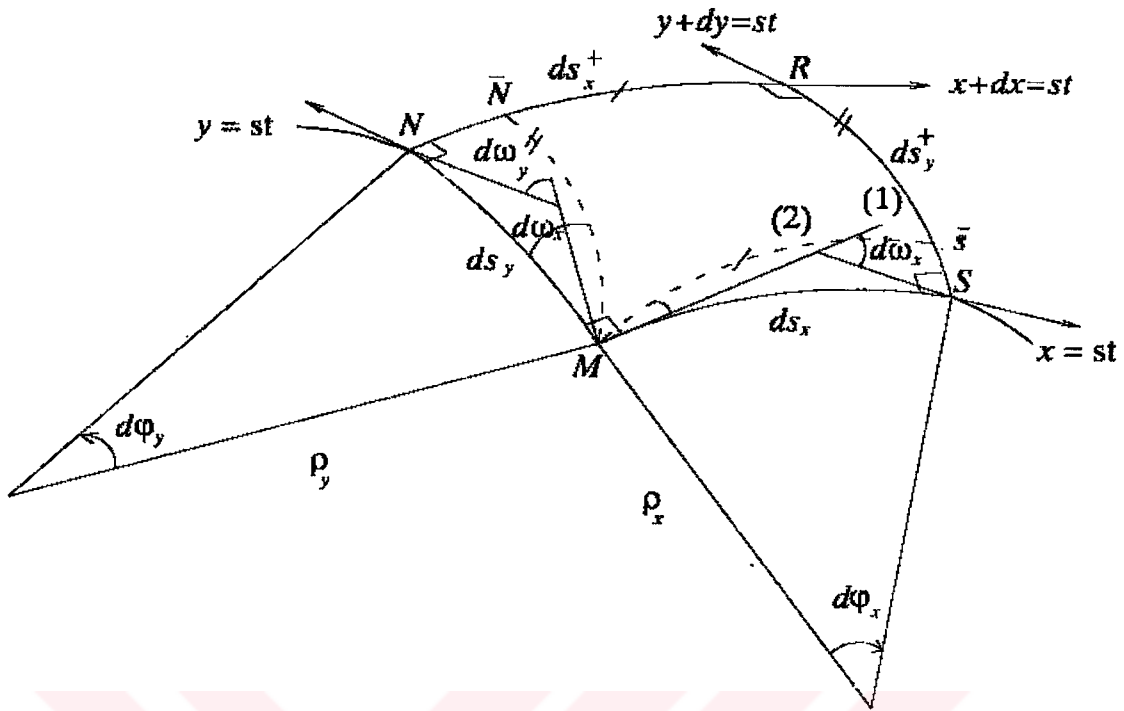
### Burulma açısı değişimleri

$$\begin{aligned} d\gamma_x &= \frac{ds_x}{r_{xy}} = \frac{A \cdot dx}{r_{xy}} = 0 \\ d\gamma_y &= \frac{ds_y}{r_{xy}} = \frac{B \cdot dy}{r_{xy}} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

olur.

### 3.1.5 Yüzeyin geodezik eğrilik yarıçapları ve eğrilikleri

Geodezik açı değişimleri, ortogonal eğrisel koordinatlarda, aşağıdaki şekilde bulunabilir. Yüzeyin  $x = st$ ,  $y = st$  koordinat eğrilerine sırasıyla M ve S noktalarını çizilen (1) ve (2) teğetlerinin belirttiği düzlemdeki  $\rho_x$  eğriliği ve aralarındaki  $dw_x$  açısı değişimi ile (M)



Şekil 3.4 Geodezik eğrilikler

noktasından geçen  $\widehat{RN}$  ve  $\widehat{RS}$  kenarlarına paralel  $\widehat{MS}$  ve  $\widehat{MN}$  yayları göz önüne alınsın, geodezik açı değişimi (Şekil 3.4) ve denklem (3.11) den,

$$d\omega_x = \frac{\widehat{NN}}{\widehat{MN}} = \frac{NR - SM}{MN} = \frac{ds_x^+ - ds_x}{ds_y} = \left[ \frac{\partial}{\partial y} (A dx) dy + A dx - A dx \right] \frac{1}{B dy}$$

$$d\omega_x = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} dx \quad (3.32)$$

$$d\omega_y = \frac{\widehat{SS}}{\widehat{MS}} = \frac{RS - MN}{MS} = \frac{ds_y^+ - ds_y}{ds_x} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (B dy) dx + B dy - B dy \right] \frac{1}{A dx}$$

$$d\omega_y = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} dy$$

bulunur. Buradan geodezik eğrilik yarıçaplarına ve eğriliklere geçebiliriz. Şekil 3.4 ve 3.2b den ve denklem (3.32) ve (3.11) den,

**Geodezik eğrilik yarıçapları,  $\rho_x, \rho_y$**

$$\widehat{MS} = A \cdot dx = \rho_x \cdot d\omega_x$$

$$\widehat{MN} = B \cdot dy = \rho_y \cdot d\omega_y$$

$$\begin{aligned}\rho_x &= A \cdot \frac{dx}{d\omega_x} = A \cdot dx \frac{B \partial y}{dx \partial A}, & \rho_x &= A \cdot B \cdot \frac{\partial y}{\partial A} \\ \rho_y &= B \cdot \frac{dy}{d\omega_y} = B \cdot dy \frac{A \partial x}{dy \partial B}, & \rho_y &= A \cdot B \cdot \frac{\partial x}{\partial B}\end{aligned}\quad (3.33)$$

### Geodezik eğrilikler

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_x} &= \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho_y} &= \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.34)$$

ifadeleriyle elde edilirler.

Şimdi eğriliklerden yararlanarak çok genel ve yüzey tipinin belirlenmesinde kullanılan tarifleri ve bunlara bağlı olarak ifade edilen bazı kabuk tiplerini verelim.

### 3.1.6 Toplam ve ortalama eğrilikler ve yüzey tipleri

#### 3.1.6.1 Toplam eğrilik, Gauss eğriliği

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (3.35)$$

#### 3.1.6.2 Ortalama eğrilik

$$\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \quad (3.36)$$

olarak tariflenir.

#### 3.1.6.3 Yüzey tipi ve tarifleri

Yüzey tipini belirlemek için yukarıdaki tariflerden yararlanır. Şöyle ki, (M) noktasındaki

1- Toplam eğrilik pozitif ise yani eğrilik yarıçapları aynı işaretli ise, yüzey eliptik adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} > 0 \quad (3.37)$$

2- Toplam eğrilik negatif ise yani eğrilik yarıçapları farklı işaretli ise, yüzey hiperbolik adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} < 0 \quad (3.38)$$

3- Toplam eğrilik pozitif yani eğrilik yarıçapları aynı işaretli ve eşit ise, yüzey küresel adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} > 0, \quad r_x = r_y \quad (3.39)$$

4- Toplam eğrilik sıfır yani asal eğriliklerden biri sıfırsa, yüzey parabolik adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = 0, \quad r_y \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{r_y} = 0 \quad (3.40)$$

5- Toplam eğrilik yaklaşık sıfır ise, yüzey basık (kabuk) adını alır. Bu durumda eğrilik yarıçapları çok büyüktür.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} \cong 0, \quad r_x \text{ ve } r_y \gg 0 \quad (3.41)$$

6- Toplam eğrilik sıfır ve eğrilik yarıçaplarından biri sonsuz diğeri dönme eksenini boyunca sabit ise yüzey silindirik adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = 0, \quad r_x = \infty, \quad r_y = st \quad (3.42)$$

7- Toplam eğrilik sıfır ve eğrilik yarıçaplarından biri sonsuz diğeri dönme eksenine göre değişken ise yüzey konik adını alır.

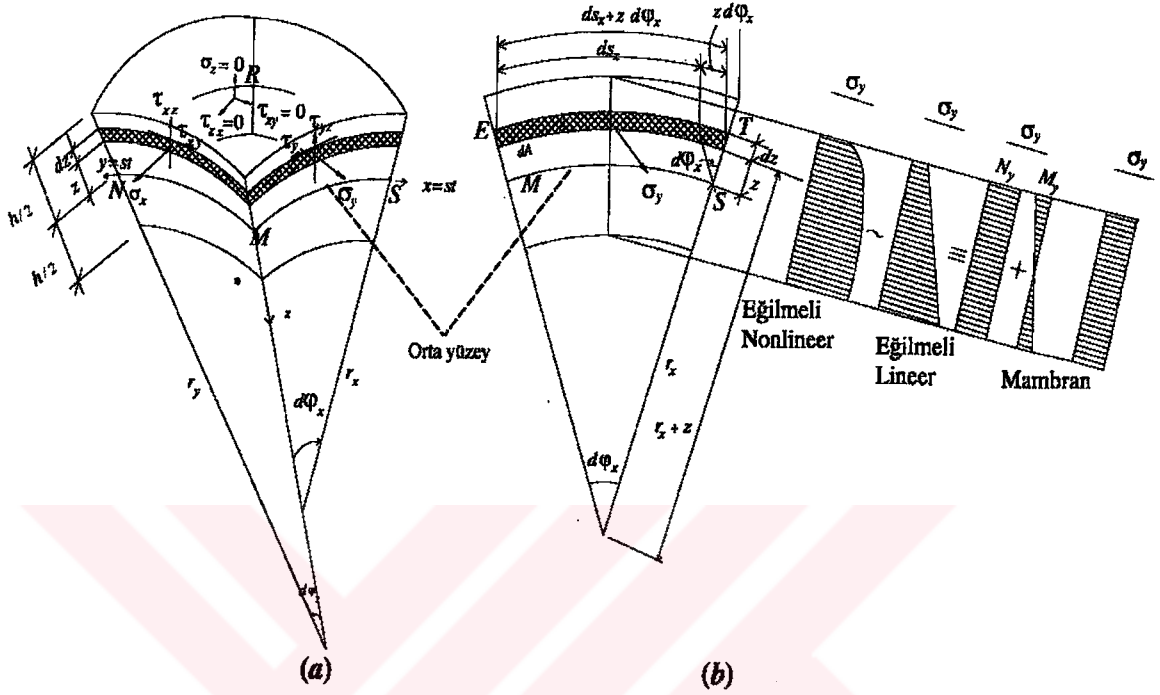
$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = 0, \quad r_x = \infty, \quad r_y \neq st \quad (3.43)$$

8- Verilen bir düzleme paralel kalarak ve verilen bir doğru ile verilen bir uzay eğrisine değen bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye konoid yüzey denir.

9- Verilen bir eğri yayının, sabit bir doğru etrafında döndürülmesi ile meydana gelen yüzeye dönel yüzey denir (Köksal ve Köksal, 2003).

### 3.2 Kabuk Genel Denklemleri

#### 3.2.1 Genel yüzey gerilme hali ve kesit tesirleri



Şekil 3.5 a,b Genel yüzey gerilme hali ve kesit tesirleri

Yüzeyin (MNRS) dört kenarlı elemanının  $\hat{M}S$  ve  $\hat{M}N$  kenarlarında yani (x) ve (y) eğrisel koordinatlarının bulunduğu, kenarlarda sırasıyla (Şekil 3.5 a)

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$$

$$\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$$

gerilmeleri oluşur. Bu gerilmelerin büyüklüğü orta yüzeye olan (z) uzaklığına bağlıdır. Bilindiği gibi aslında üç boyutlu cisimde üç eksenli gerilme hali mevcuttur. Kabuk kalınlığının, eğrilik yarıçaplarına oranla küçük olduğu kabulünden, ( $z = st$ ) kesitleri içinde normal  $\sigma_z$  gerilmelerinin sıfır olduğu varsayılır, ( $\sigma_z = 0$ ). Yine ince elastik klasik kabuk varsayımlarından hatırlanacağı gibi ( $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ) alınır. Eksenler ortogonal yani  $x = st$  ve  $y = st$  birbirlerine dik olduklarında  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  olacağından bağımsız gerilmelerin sayısı beşe iner. Kabukta kesme etkisi terk edilirse  $\tau_{xz}$  ve  $\tau_{yz}$  gerilmelerini de sıfır almak gerekir. Bu durumda bağımsız üç gerilme ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ ) kalır. Mambran halde ise bu üç bağımsız

gerilmenin (Şekil 3.5 b) den de görüldüğü gibi kabuk kalınlığı boyunca üniform yayılı olduğu varsayılır.

Üç boyutlu genel gerilme halinden, üç bağımsız gerilme haline geçişi matris formda ifade edelim.

### 1- Gerilme hali

Genel Kabuk      Kaymalı Kabuk      İnce Kabuk      Mambran Kabuk

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ & \sigma_y & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Simetrik

### 2- Birim boya düşen kesit tesirleri

Kabukta kesit tesirlerini birim boya düşen miktarlar olarak belirleriz. Örnek olarak, birim boya düşen  $N_y$  normal kuvvetin değerini bulalım. Orta eksen (z) mesafedeki yay uzunluğu (Şekil 3.5 b) den,

$$\hat{ET} = ds_x + z.d\phi_x = ds_x + \frac{ds_x}{r_x} \cdot z = ds_x \left( 1 + \frac{z}{r_x} \right) \quad (3.44)$$

olur. Burada

$$ds_x = d\phi_x \cdot r_x, \quad d\phi_x = \frac{ds_x}{r_x} \quad (3.45)$$

olup, taralı kesitteki normal  $\sigma_y$  kesit tesiri denklem (3.44) dan

$$\sigma_y \cdot dA = \sigma_y \cdot dz ds_x \left( 1 + \frac{z}{r_x} \right), \quad dA = dz ds_x \left( 1 + \frac{z}{r_x} \right) \quad (3.46)$$

olur. Şimdi birim boya düşen ve (h) kalınlığı boyunca yayılı gerilmelerin toplamını veren kesit tesiri,

$$N_y \cdot ds_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot ds_x \frac{r_x + z}{r_x} dz \rightarrow N_y \cdot 1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \left( 1 + \frac{z}{r_x} \right) dz \quad (3.47)$$

olur. Diğer kesit tesirleri de benzer şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
\text{Normal Kuvvetler,} \quad N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz \\
\text{Kayma Kuvvetleri,} \quad N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz \\
\text{Eğilme Momentleri,} \quad M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) z dz \quad (3.48) \\
\text{Burulma Momentleri,} \quad M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) z dz, \quad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) z dz \\
\text{Kesme Kuvvetleri,} \quad V_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad V_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz
\end{aligned}$$

Yüzey elemanındaki (Şekil 3.5 b) gerilme yayılımını kısaca inceleyelim.

### 3- Non-Linear gerilme hali

Kabuk elemanının yan yüzeylerinin genişlikleri (z) koordinatlarına bağlı olduğuna göre, orta yüzeye paralel tesir eden ve yapılan varsayımlara göre gerilme bileşenleri kabuk kalınlığınca lineer olarak dağılmaz. Gerilme dağılışı doğrusal değil eğriseldir, (Şekil-3.5 b) deki ilk gerilme diyagramı.

### 4- Lineer gerilme hali

Ancak kabuk kalınlığı ve (z), eğrilik yarıçaplarına göre çok küçük olduklarında  $\frac{z}{r_x}$  ve  $\frac{z}{r_y}$  terimlerinin tesiri çok az olur ve birin yanında terk edilebilir.

Kesit kuvvet ve momentlerinden gerilmelerin hesaplanmasında, kesit yüzlerini dik açılı ve normal gerilmelerle, orta yüzeye paralel tesir eden kayma gerilmelerinin kabuk kalınlığınca lineer yayılı olduğunu kabul etmek mümkündür. Görüldüğü gibi,  $r_x \neq r_y$  ise  $N_{xy} \neq N_{yx}$  ve  $M_{xy} \neq M_{yx}$  dir. Ancak  $1 + \frac{z}{r} \cong 1$  kabulü yapıldığında ya da  $r_x = r_y$  olduğunda,  $N_{xy} = N_{yx}$  ve  $M_{xy} =$

$M_{yx}$  olur. Yine  $x = st$  ve  $y = st$  ortogonal ise  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  olur, çünkü  $x = st$  ve  $y = st$  de yüzler birbirine diktir.  $V_x$  ve  $V_y$  doğru eksenli çubuklardaki kesme kuvvetine benzer.

$N_{xy}$ ,  $N_{yx}$ ,  $M_{xy}$ ,  $M_{yx}$  nin (3.42) deki değerleri yerlerine konulduğunda aşağıdaki  $\sum M_z = 0$  denge bağıntısının özdeş olarak sağlandığı görülür.

$$\frac{M_{xy}}{r_x} - \frac{M_{yx}}{r_y} - V_{xy} + V_{yx} \cong 0 \quad (3.49)$$

### 5- Mambran gerilme hali

Bazı özel hallerde, yük ve mesnetlenme durumlarına bağlı olarak gerilmelerin ekstrem değerleri yani maksimum ile minimum arasındaki çok az bir fark olur. Öyle ki  $\sigma_x, \sigma_y$  ve  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  kabuk kalınlığınca üniform dağılılı kabul edilebilir. Yani gerilmeler (z) den bağımsız olurlar. Bu durumda kesit tesirlerinin yukardaki toplamaları şu sonuçları verir.

$$\begin{aligned} N_x &= \sigma_x \cdot h, & N_y &= \sigma_y \cdot h, & N_{xy} &= N_{yx} = \tau_{xy} \cdot h \\ M_x &= -\sigma_x \cdot \frac{h^3}{12r_y}, & M_y &= -\sigma_y \cdot \frac{h^3}{12r_x}, \\ M_{xy} &= -\tau_{xy} \cdot \frac{h^3}{12r_y}, & M_{yx} &= -\tau_{yx} \cdot \frac{h^3}{12r_x} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Burada momentler şöyle de yazılabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} M_x &= -\sigma_x \cdot \frac{h \cdot h \cdot h}{12r_y}, & N_x &= \sigma_x \cdot h, & M_x &= -N_x \cdot \frac{h \cdot h}{12r_y} \\ e_x &= h \cdot \frac{h}{12r_y}, & M_x &= -N_x \cdot e_x \end{aligned} \quad (3.51)$$

kabullerinden kabuk kalınlığının eğrilik yarıçapına göre çok küçük olduğu ve yukarıda  $N_x$  kuvvetlerinin  $\frac{h}{12r_y}$  oranında azaldığı görülmektedir. Bu oran (1/240) altında olduğundan eksantrisitesi pratik olarak sıfır alınabilir.

$$M_x = -N_x \cdot e_x, \quad e_x = 0, \quad M_x \cong 0 \quad (3.52)$$

olur. Benzer şekilde,

$$M_y = M_{xy} = M_{yx} = M_x = 0 \quad (3.53)$$

olur. Denge denklemleri gösterir ki eğer momentler sıfır ise,

$$V_x = V_y = 0 \quad (3.54)$$

olur (Köksal ve Köksal, 2003). Böylece kabuk kalınlığı boyunca üniform gerilme yayılımı elde edilebilir. Bu durumda kabukta yalnızca  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy} = N_{yx}$  kesit tesirleri oluşur. Bu da kabuğun membran halini gösterir. Sonuçta kabuğun eğilmeden bağımsız olan bu gerilme haline, membran gerilme hali denir. Şekil 3.5 b deki son gerilme diyagramıdır.

### 3.2.2 Ortogonal eğrisel koordinatlarda, orta yüzeyin şekil değiştirme bileşenleri

#### 1- Birim uzama şekil değiştirme bileşenleri

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} v + \frac{w}{r_x} = \frac{\partial u}{\partial s_x} + \frac{v}{\rho_x} + \frac{w}{r_x} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u + \frac{w}{r_y} = \frac{\partial v}{\partial s_y} + \frac{u}{\rho_y} + \frac{w}{r_y} \end{aligned} \quad (3.55)$$

#### 2- Birim kayma şekil değiştirme bileşenleri

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{A} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial s_y} + \frac{\partial v}{\partial s_x} - \frac{u}{\rho_x} - \frac{v}{\rho_y} \end{aligned} \quad (3.56)$$

#### 3- Koordinat eğrilerine teğet doğruların eğimlerinin değişimi, yani dönmeleri

$$\begin{aligned} \beta_x &= \frac{u}{r_x} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{\partial s_x} \\ \beta_y &= \frac{v}{r_y} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{\partial s_y} \end{aligned} \quad (3.57)$$

#### 4- Normal eğrilik değişimi

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{A \partial x} + \frac{u}{r_x} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{B \partial y} + \frac{v}{r_y} \right) \\ k_x &= \frac{\partial \beta_x}{\partial s_x} + \frac{\beta_y}{\rho_x} = \frac{\partial \beta_x}{A \partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\beta_y}{AB} \end{aligned}$$

$$k_y = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{B \partial y} + \frac{v}{r_y} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{A \partial x} + \frac{u}{r_x} \right) \quad (3.58)$$

$$k_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial s_y} + \frac{\beta_x}{\rho_y} = \frac{\partial \beta_y}{B \partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\beta_x}{AB}$$

##### 5- Burulma eğriliğinin değişimi

$$k_{xy} = \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{r_x} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} u \right) + \frac{1}{r_y} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} v \right)$$

$$k_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_y}{A \partial x} + \frac{\beta_x}{B \partial y} - \left( \frac{\partial A}{\partial y} \beta_x + \frac{\partial B}{\partial x} \beta_y \right) \frac{1}{AB} \right] \quad (3.59)$$

6- Yüzeyin orta yüzeyden (z) mesafedeki yerinde orta yüzey şekil değiştirme bileşenleri cinsinden deformasyon ifadeleri, (Şekil 3.5).

Yukarıda verilen deformasyon bileşenleri hep orta yüzeyin şekil değiştirme bileşenleri idi (Timoshenko ve Woinowsky-Krieger, 1959). Kabuk kalınlığında orta yüzeyin dışında bir (z) mesafedeki noktada deformasyonlar aşağıda orta yüzeyin deformasyonları cinsinden verilmiştir;

$$\epsilon_x^{(z)} = \frac{\epsilon_x + z k_x}{1 + \frac{z}{r_x}} \approx \epsilon_x + z \left( k_x + \frac{\epsilon_x}{r_x} \right)$$

$$\epsilon_y^{(z)} = \frac{\epsilon_y + z k_y}{1 + \frac{z}{r_y}} \approx \epsilon_y + z \left( k_y + \frac{\epsilon_y}{r_y} \right) \quad (3.60)$$

$$\gamma_{xy}^{(z)} = \frac{\gamma_{xy} \left( 1 + \frac{z^2}{r_x r_y} \right) + z k_{xy} \left[ 2 + z \left( \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) \right]}{\left( 1 + \frac{z}{r_x} \right) \left( 1 + \frac{z}{r_y} \right)} \approx \gamma_{xy} + z \left[ 2 k_{xy} + \left( \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) \gamma_{xy} \right] \quad (3.61)$$

### 3.2.3 Kabuk elastisite bağıntıları

Genel bir yüzeyde elastisite bağıntıları aşağıdaki şekilde verilebilir;

$$\begin{aligned}
 N_x &= C(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\
 N_y &= C(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\
 N_{xy} &= C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy} \\
 M_x &= D(k_x + \nu k_y) \\
 M_y &= D(k_y + \nu k_x) \\
 M_{xy} &= D(1-\nu) k_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Burada şekil değiştirme bileşenleri, ortogonal eğrisel koordinatlarda kesit zorlarının non-lineer formda yer değiştirmeler cinsinden ifadeleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Köksal ve Köksal, 2003).

$$\begin{aligned}
 N_x &= C[(e_x + \beta_x^2) + \nu(e_y + \beta_y^2)] \\
 N_y &= C[(e_y + \beta_y^2) + \nu(e_x + \beta_x^2)] \\
 N_{xy} &= C \frac{1-\nu}{2} [(e_{xy} + \beta_x \beta_y + \beta_y \beta_x)] \\
 M_x &= D \left[ \frac{\partial \beta_x}{\partial x.A} + \frac{\partial A \beta_y}{\partial y.AB} + \nu \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y.B} + \frac{1}{AB} \frac{\partial \beta}{\partial x} \beta_x \right) \right] \\
 M_y &= D \left[ \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial \beta}{\partial x} \beta_x \right) + \nu \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x.A} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \beta_y \right) \right] \\
 M_{xy} &= D \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Burada C uzama, D eğilme rijitliğidir. h ise kabuğun et kalınlığıdır.

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.64}$$

### 3.2.4 Genel eğrisel (x,y) koordinatlarında denge denklemleri

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0} \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(N_x \cdot B)}{\partial x} + \frac{\partial(N_{yx} \cdot A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} \right] - \frac{V_x}{\bar{r}_x} - \frac{V_y}{\bar{r}_{xy}} + p_x &= 0 \\
\sum_{y=0} \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(N_y \cdot A)}{\partial y} + \frac{\partial(N_{xy} \cdot B)}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x + \frac{\partial B}{\partial x} N_{yx} \right] - \frac{V_y}{\bar{r}_y} - \frac{V_x}{\bar{r}_{yx}} + p_y &= 0 \\
\sum_{z=0} \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(V_x \cdot B)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y \cdot A)}{\partial y} \right] + \frac{N_x}{\bar{r}_x} + \frac{N_y}{\bar{r}_y} + \frac{N_{xy}}{\bar{r}_{xy}} + \frac{N_{yx}}{\bar{r}_{yx}} + p_z &= 0 \quad (3.65) \\
\sum_{M_x=0} \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(M_x \cdot B)}{\partial x} + \frac{\partial(M_{yx} \cdot A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} M_y + \frac{\partial A}{\partial y} M_{xy} \right] - V_x &= 0 \\
\sum_{M_y=0} \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(M_y \cdot A)}{\partial y} + \frac{\partial(M_{xy} \cdot B)}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} M_x + \frac{\partial B}{\partial x} M_{yx} \right] - V_y &= 0 \\
\sum_{M_z=0} \dots \frac{M_x}{\bar{r}_{xy}} - \frac{M_y}{\bar{r}_{yx}} + \frac{M_{yx}}{\bar{r}_y} - \frac{M_{xy}}{\bar{r}_x} + N_{xy} - N_{yx} &= 0
\end{aligned}$$

#### 3.2.4.1 Ortogonal asal eğrisel (x,y) koordinatlarında denge denklemleri

Burada, (x,y) eğrisel koordinatlar sistemi ortogonal ve eşlenik olduğundan  $\bar{r}_x, \bar{r}_y$  ler, asal eğrilik yarıçaplarına dönüşür ve artık  $r_x, r_y$  şeklinde gösterilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0} \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(N_x \cdot B)}{\partial x} + \frac{\partial(N_{yx} \cdot A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} \right] - \frac{V_x}{r_x} + p_x &= 0 \\
\sum_{y=0} \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(N_y \cdot A)}{\partial y} + \frac{\partial(N_{xy} \cdot B)}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x + \frac{\partial B}{\partial x} N_{yx} \right] - \frac{V_y}{r_y} + p_y &= 0 \\
\sum_{z=0} \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(V_x \cdot B)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y \cdot A)}{\partial y} \right] + \frac{N_x}{r_x} + \frac{N_y}{r_y} + p_z &= 0 \quad (3.66) \\
\sum_{M_x=0} \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(M_x \cdot B)}{\partial x} + \frac{\partial(M_{yx} \cdot A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} M_y + \frac{\partial A}{\partial y} M_{xy} \right] - V_x &= 0 \\
\sum_{M_y=0} \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(M_y \cdot A)}{\partial y} + \frac{\partial(M_{xy} \cdot B)}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} M_x + \frac{\partial B}{\partial x} M_{yx} \right] - V_y &= 0 \\
\sum_{M_z=0} \dots \frac{M_{xy}}{r_x} - \frac{M_{yx}}{r_y} + N_{xy} - N_{yx} &= 0
\end{aligned}$$

Yukarıdaki (3.66) un 6.denkleminin bir özdeşlik olduğu dolayısıyla bağımsız bir ifade olmadığı görülür. Çünkü  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  ve

$$\frac{M_{xy}}{r_x} - \frac{M_{yx}}{r_y} + N_{xy} - N_{yx} = \int \tau_{xy} \left[ \frac{z}{r_x} \left( 1 + \frac{z}{r_y} \right) - \frac{z}{r_y} \left( 1 + \frac{z}{r_x} \right) - \left( 1 + \frac{z}{r_y} \right) + \left( 1 + \frac{z}{r_x} \right) \right] dz \equiv 0 \quad (3.67)$$

olur. O halde elimizde beş bağımsız denkleme karşı bilinmeyen kesit tesiri olduğu görülür  $(N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, V_x, V_y)$ . Dolayısı ile problem hiperstatiktir. Böylece kabuk problemlerinde kabuk deformasyonlarının da kinematik bağıntıların incelenmesi zorunluluğunun nedeni ortaya çıkar (Köksal ve Köksal, 2003).

### 3.2.4.2 Genel eğrisel koordinatlarda lineer mambran denge denklemleri

Mambran halde eğilme ve burulma momentleri terk edilir.

$$M_x = M_y = M_{xy} = M_{yx} = 0$$

Diğer taraftan (3.65) denklemlerinin 4, 5 ve 6. larından

$$V_x = V_y = 0, \quad N_{xy} = N_{yx}$$

olur. Bu durumda denge denklemleri üçe iner.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(N_x \cdot B)}{\partial x} + \frac{\partial(N_{yx} \cdot A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} + ABp_x &= 0 \\ \frac{\partial(N_y \cdot A)}{\partial y} + \frac{\partial(N_{xy} \cdot B)}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x + \frac{\partial B}{\partial x} N_{yx} + ABp_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\frac{N_x}{r_x} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0$$

### 3.2.4.3 Ortogonal eğrisel koordinatlarda mambran denge denklemleri

Ortogonal eğrisel koordinatlarda (3.68) denklemlerinde koordinatlar asal eksenler olduğundan, yalnızca  $\bar{r}_x = r_x$  ve  $\bar{r}_y = r_y$  olur ve yalnızca üçüncü denklem değişir.

$$\frac{N_x}{r_x} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0 \quad (3.69)$$

Diğer iki denklem aynıdır.

Mambran halde üç bağımsız denge denkleminin karşın, üç adet bilinmeyen kesit tesiri ( $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ) olduğundan, problem izostatiktir.

Özel kabuk tiplerinde (x,y) eğrisel koordinatları yerine uygun koordinatları yerine uygun koordinat takımları seçilerek bu denklemler daha basit formda yazılabilirler.

### İzotrop kabukların bünye denklemleri

İnce cidarlı, h kalınlıklı, izotrop kabuğun kesit tesiri-şekil değiştirme bağıntıları  $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$ , açık formda,

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

olur. Buradan, izotrop hal için,

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \nu C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2}C & 0 & 0 & 0 \\ & & & D & \nu D & 0 \\ & & & & D & 0 \\ & & & & & \frac{1-\nu}{2}D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

olur. Burada,

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.72)$$

ya da,

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & C_{44} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ C_{12} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & C_{45} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ C_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & C_{55} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$C_{33} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}, \quad C_{66} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}$$

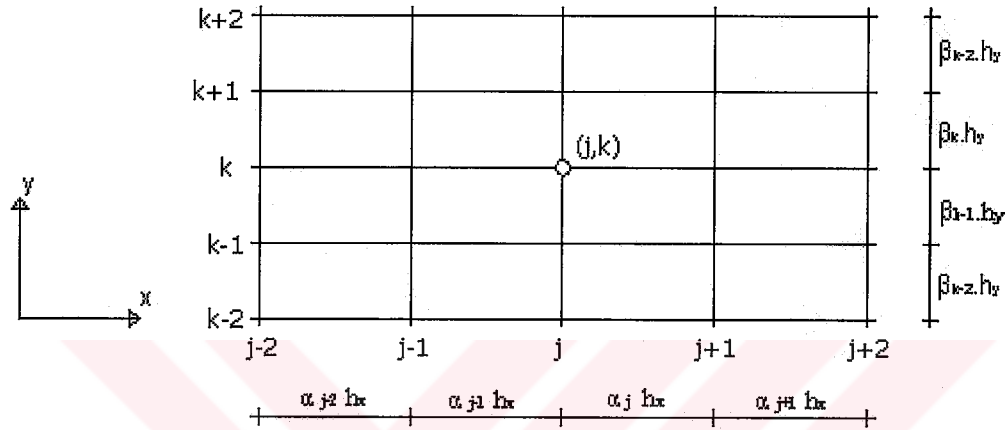
olur.  $[D]$  matrisi,

$$[D] = \begin{bmatrix} C \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{vmatrix} & D \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

şeklinde yazılabilir (Köksal ve Köksal, 2003).

#### 4. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA SONLU FARK İFADELERİNİN ÇIKARTILMASI

$w(x,y)$  fonksiyonunun herhangi bir  $(j,k)$  noktasındaki türevlerini sonlu farklarla ifade edebilmek için, Şekil 4.1 de görüldüğü gibi,  $x$  ve  $y$  eksenlerine paralel doğrular çizerek bir ağ teşkil edelim.



Şekil 4.1

$y$  eksenine paralel doğruların aralıkları  $\alpha_{j-2}h_x, \alpha_{j-1}h_x, \alpha_jh_x, \dots$  ve

$x$  eksenine paralel doğruların aralıkları  $\beta_{k-2}h_y, \beta_{k-1}h_y, \beta_kh_y, \dots$  olsun.

Özel hal olarak aralıklar eşit olarak seçilirse,  $\alpha_{j-2} = \alpha_{j-1} = \alpha_j = \dots = 1$  ve,

$\beta_{k-2} = \beta_{k-1} = \beta_k = \dots = 1$  olacaktır.

Önce  $y$ 'yi sabit kabul edip,  $w(x,y)$  fonksiyonunun  $x$ 'e göre kısmi türevleri bulunacaktır. Sonra da  $x$ 'i sabit kabul edip, aynı fonksiyonun  $y$ 'ye göre kısmi türevleri bulunacaktır. Buna göre, herhangi bir  $(j,k)$  noktasındaki kısmi türevler şu şekilde bulunabilir:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{j,k} &\cong \left( \frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{j,k} = \frac{w_{j-1,k} - w_{j+1,k}}{\alpha_{j-1}h_x + \alpha_jh_x} \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{j,k} &\cong \left( \frac{\Delta w}{\Delta y} \right)_{j,k} = \frac{w_{j,k-1} - w_{j,k+1}}{\beta_{k-1}h_y + \beta_kh_y} \\ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{j,k} &\cong \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_{j,k} = \frac{\frac{(w_{j+1,k} - w_{j,k})}{\alpha_jh_x} - \frac{(w_{j,k} - w_{j-1,k})}{\alpha_{j-1}h_x}}{\frac{(\alpha_{j-1}h_x + \alpha_jh_x)}{2}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{h_x^2 \alpha_j \alpha_{j-1} (\alpha_{j-1} + \alpha_j)} [\alpha_j w_{j-1,k} - (\alpha_{j-1} + \alpha_j) w_{j,k} + \alpha_{j-1} w_{j+1,k}] \\
\left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{j,k} &\cong \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right)_{j,k} = \frac{\frac{(w_{j,k+1} - w_{j,k})}{\beta_{j-1} h_y} - \frac{(w_{j,k} - w_{j,k-1})}{\beta_{k-1} h_y}}{\frac{(\beta_{k-1} h_y + \beta_k h_y)}{2}} \\
&= \frac{2}{h_y^2 \beta_k \beta_{k-1} (\beta_{k-1} + \beta_k)} [\beta_k w_{j,k-1} - (\beta_{k-1} + \beta_k) w_{j,k} + \beta_{k-1} w_{j,k+1}] \\
\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{j,k} &\cong \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{j,k} \cong \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta w}{\Delta y} \right)_{j,k} = \frac{\left( \frac{\Delta w}{\Delta y} \right)_{j-1,k} - \left( \frac{\Delta w}{\Delta y} \right)_{j+1,k}}{\alpha_{j-1} h_x + \alpha_j h_x} \\
&= \frac{1}{(\alpha_{j-1} + \alpha_j)(\beta_{k-1} + \beta_k) h_x h_y} (w_{j-1,k-1} - w_{j-1,k+1} - w_{j+1,k-1} + w_{j+1,k+1})
\end{aligned}$$

(4.1) ifadelerinden faydalanılarak, herhangi bir (j,k) noktasındaki:

$$\nabla^2 w_{j,k} = \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_{j,k} + \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right)_{j,k} \text{ değerleri kolayca bulunabilir (Timoshenko, 1959).}$$

$$\nabla^2 = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2}{\Delta y^2} \text{ değerine Laplace Operatörü denir.}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 w_{j,k} &= \left[ \frac{2\alpha_j}{h_x^2 \alpha_j \alpha_{j-1} (\alpha_{j-1} + \alpha_j)} \right] \cdot w_{j-1,k} - \left[ \frac{2(\alpha_{j-1} + \alpha_j)}{h_x^2 \alpha_j \alpha_{j-1} (\alpha_{j-1} + \alpha_j)} + \frac{2(\beta_{k-1} + \beta_k)}{h_y^2 \beta_k \beta_{k-1} (\beta_{k-1} + \beta_k)} \right] \cdot w_{j,k} \\
&+ \left[ \frac{2\alpha_{j-1}}{h_x^2 \alpha_j \alpha_{j-1} (\alpha_{j-1} + \alpha_j)} \right] \cdot w_{j+1,k} + \left[ \frac{2\beta_k}{h_y^2 \beta_k \beta_{k-1} (\beta_{k-1} + \beta_k)} \right] \cdot w_{j,k-1} + \left[ \frac{2\beta_{k-1}}{h_y^2 \beta_k \beta_{k-1} (\beta_{k-1} + \beta_k)} \right] \cdot w_{j,k+1}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

(4.2) ifadesinde:

$$\begin{aligned}
(F1)_{j-1,k} &= \frac{2\alpha_j}{h_x^2 \alpha_j \alpha_{j-1} (\alpha_{j-1} + \alpha_j)} \\
(F0)_{j,k} &= -\frac{2(\alpha_{j-1} + \alpha_j)}{h_x^2 \alpha_j \alpha_{j-1} (\alpha_{j-1} + \alpha_j)} - \frac{2(\beta_{k-1} + \beta_k)}{h_y^2 \beta_k \beta_{k-1} (\beta_{k-1} + \beta_k)} \\
(F2)_{j+1,k} &= \frac{2\alpha_{j-1}}{h_x^2 \alpha_j \alpha_{j-1} (\alpha_{j-1} + \alpha_j)}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

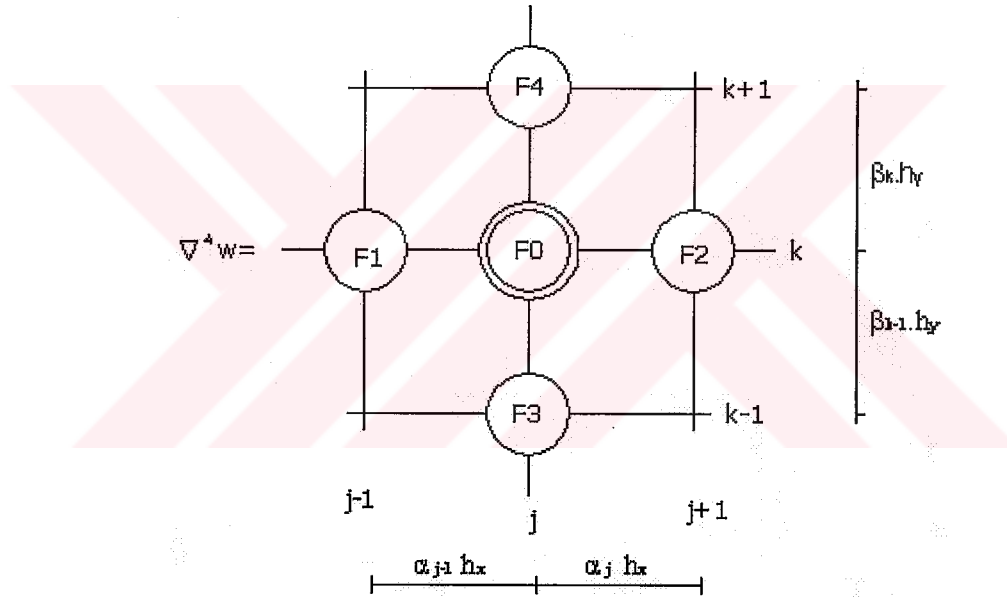
$$(F3)_{j,k-1} = \frac{2\beta_k}{h_y^2 \beta_k \beta_{k-1} (\beta_{k-1} + \beta_k)}$$

$$(F4)_{j,k+1} = \frac{2\beta_{k-1}}{h_y^2 \beta_k \beta_{k-1} (\beta_{k-1} + \beta_k)}$$

ile gösterilirse, (4.2) denklemi şu şekilde yazılabilir (Timoshenko, 1959):

$$\nabla^2 w_{j,k} = (F1)_{j-1,k} w_{j-1,k} + (F0)_{j,k} w_{j,k} + (F2)_{j+1,k} w_{j+1,k} + (F3)_{j,k-1} w_{j,k-1} + (F4)_{j,k+1} w_{j,k+1} \quad (4.4)$$

(4.4) denklemi Şekil (4.2) de görüldüğü gibi şematik olarak ifade edebiliriz. Bu şemaya göre, F0 molekülü (j,k) noktası ile çakıştırıldığında, F1 ile (j-1,k) noktasına ait w değeri, F2 ile (j+1,k) noktasına ait w değeri, F3 ile (j,k-1) noktasına ait w değeri, F4 ile de (j,k+1) noktasına ait w değeri çarpılıp toplamı alınacaktır. Şimdi de:



Şekil (4.2)

$\nabla^4 w_{j,k} = \nabla^2 (\nabla^2 w)_{j,k}$  değerini bulalım.

Şekil 4.22 deki şemayı tatbik edersek:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_{j,k} = & (F1)_{j-1,k} (\nabla^2 w)_{j-1,k} + (F0)_{j,k} (\nabla^2 w)_{j,k} + (F2)_{j+1,k} (\nabla^2 w)_{j+1,k} \\ & + (F3)_{j,k-1} (\nabla^2 w)_{j,k-1} + (F4)_{j,k+1} (\nabla^2 w)_{j,k+1} \end{aligned} \quad (4.5)$$

(4.5) denklemindeki  $\nabla^2 w$  değerlerini de, aynı şemaya göre yazarsak:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 w)_{j-1,k} = & (F1)_{j-2,k} w_{j-2,k} + (F0)_{j-1,k} w_{j-1,k} + (F2)_{j,k} w_{j,k} + (F3)_{j-1,k-1} w_{j-1,k-1} + (F4)_{j-1,k+1} w_{j-1,k+1} \\ (\nabla^2 w)_{j,k} = & (F1)_{j-1,k} w_{j-1,k} + (F0)_{j,k} w_{j,k} + (F2)_{j+1,k} w_{j+1,k} + (F3)_{j,k-1} w_{j,k-1} + (F4)_{j,k+1} w_{j,k+1} \\ (\nabla^2 w)_{j+1,k} = & (F1)_{j,k} w_{j,k} + (F0)_{j+1,k} w_{j+1,k} + (F2)_{j+2,k} w_{j+2,k} + (F3)_{j+1,k-1} w_{j+1,k-1} + (F4)_{j+1,k+1} w_{j+1,k+1} \end{aligned}$$

$$(\nabla^2 w)_{j,k-1} = (F1)_{j-1,k-1} w_{j-1,k-1} + (F0)_{j,k-1} w_{j,k-1} + (F2)_{j+1,k-1} w_{j+1,k-1} + (F3)_{j,k-2} w_{j,k-2} + (F4)_{j,k} w_{j,k}$$

Bu değerler (4.5) de yerine konulursa:

$$\begin{aligned} (\nabla^4 w)_{j,k} &= [(F1)_{j-2,k} (F1)_{j-1,k}] w_{j-2,k} + (F1)_{j-1,k} [(F0)_{j,k} (F0)_{j-1,k}] w_{j-1,k} \\ &+ [(F0)_{j,k}^2 + (F1)_{j,k} (F2)_{j+1,k} + (F2)_{j,k} (F1)_{j-1,k} + (F4)_{j,k} (F3)_{j,k-1} + (F3)_{j,k} (F4)_{j,k+1}] w_{j,k} \\ &+ (F2)_{j+1,k} [(F0)_{j,k} + (F0)_{j+1,k}] w_{j+1,k} + [(F2)_{j+2,k} (F2)_{j+1,k}] w_{j+2,k} + [(F3)_{j,k-2} (F3)_{j,k-1}] w_{j,k-2} \\ &+ (F3)_{j,k-1} [(F0)_{j,k} + (F0)_{j,k-1}] w_{j,k-1} + (F4)_{j,k+1} [(F0)_{j,k} + (F0)_{j,k+1}] w_{j,k+1} \\ &+ [(F4)_{j,k+2} (F4)_{j,k+1}] w_{j,k+2} + [(F3)_{j+1,k-1} (F2)_{j+1,k} + (F2)_{j+1,k-1} + (F3)_{j,k-1}] w_{j+1,k-1} \\ &+ [(F4)_{j+1,k+1} (F2)_{j+1,k} + (F2)_{j+1,k+1} + (F4)_{j,k+1}] w_{j+1,k+1} \\ &+ [(F3)_{j-1,k-1} (F1)_{j-1,k} + (F1)_{j-1,k-1} + (F3)_{j,k-1}] w_{j-1,k-1} \\ &+ [(F4)_{j-1,k+1} (F1)_{j-1,k} + (F1)_{j-1,k+1} + (F4)_{j,k+1}] w_{j-1,k+1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

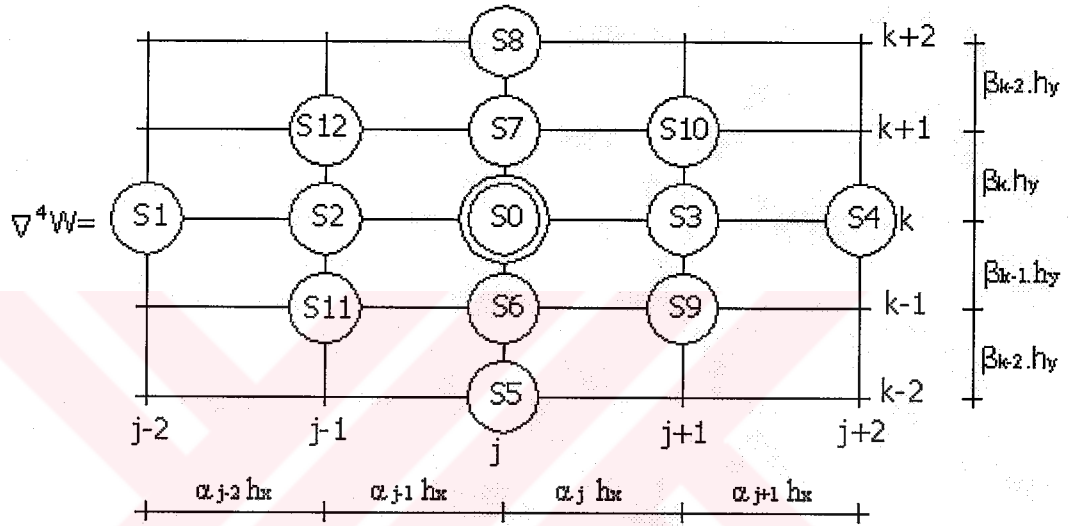
(4.6) denkleminde:

$$\begin{aligned} (S1)_{j-2,k} &= (F1)_{j-2,k} (F1)_{j-1,k} \\ (S2)_{j-1,k} &= (F1)_{j-1,k} [(F0)_{j,k} + (F0)_{j-1,k}] \\ (S0)_{j,k} &= (F0)_{j,k}^2 + (F1)_{j,k} (F2)_{j+1,k} + (F2)_{j,k} (F1)_{j-1,k} + (F4)_{j,k} (F3)_{j,k-1} + (F3)_{j,k} (F4)_{j,k+1} \\ (S3)_{j+1,k} &= (F2)_{j+1,k} [(F0)_{j,k} + (F0)_{j+1,k}] \\ (S4)_{j+2,k} &= (F2)_{j+2,k} (F2)_{j+1,k} \\ (S5)_{j,k-2} &= (F3)_{j,k-2} (F3)_{j,k-1} \\ (S6)_{j,k-1} &= (F3)_{j,k-1} [(F0)_{j,k} + (F0)_{j,k-1}] \\ (S7)_{j,k+1} &= (F4)_{j,k+1} [(F0)_{j,k} + (F0)_{j,k+1}] \\ (S8)_{j,k+2} &= (F4)_{j,k+2} (F4)_{j,k+1} \\ (S9)_{j+1,k-1} &= (F3)_{j+1,k-1} (F2)_{j+1,k} + (F2)_{j+1,k-1} + (F3)_{j,k-1} \\ (S10)_{j+1,k+1} &= (F4)_{j+1,k+1} (F2)_{j+1,k} + (F2)_{j+1,k+1} + (F4)_{j,k+1} \\ (S11)_{j-1,k-1} &= (F3)_{j-1,k-1} (F1)_{j-1,k} + (F1)_{j-1,k-1} + (F3)_{j,k-1} \\ (S12)_{j-1,k+1} &= (F4)_{j-1,k+1} (F1)_{j-1,k} + (F1)_{j-1,k+1} + (F4)_{j,k+1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ile gösterilirse, (4.6) denklemi şöyle yazılabilir (Timoshenko, 1959):

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_{j,k} = & (S1)_{j-2,k} w_{j-2,k} + (S2)_{j-1,k} w_{j-1,k} + (S0)_{j,k} w_{j,k} + (S3)_{j+1,k} w_{j+1,k} + (S4)_{j+2,k} w_{j+2,k} \\ & + (S5)_{j,k-2} w_{j,k-2} + (S6)_{j,k-1} w_{j,k-1} + (S7)_{j,k+1} w_{j,k+1} + (S8)_{j,k+2} w_{j,k+2} + (S9)_{j+1,k-1} w_{j+1,k-1} \\ & + (S10)_{j+1,k+1} w_{j+1,k+1} + (S11)_{j-1,k-1} w_{j-1,k-1} + (S12)_{j-1,k+1} w_{j-1,k+1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Bu denklemi Şekil (4.3) te görüldüğü gibi şematik olarak gösterebiliriz.



Şekil (4.3)

Böylece eşit olmayan aralıklar kullanılması halinde sonlu fark ifadeleri çıkartılmış oldu.

Şimdi bazı özel durumları ele alalım.

a) x doğrultusundaki bütün aralıklar  $h_x$ , y doğrultusundaki bütün aralıklar  $h_y$  olsun. Bu durumda  $\alpha_{j-2} = \alpha_{j-1} = \alpha_j = \dots = 1$  ve  $\beta_{k-2} = \beta_{k-1} = \beta_k = \dots = 1$  olacaktır. Ayrıca  $F0, F1, F2, F3, F4$  ve  $S0, S1, S2, S3, \dots, S12$  değerleri noktadan noktaya değişmeyecektir.

$\frac{h_x}{h_y} = d$  ile gösterirsek ve (4.3), (4.7) ifadelerini dikkate alırsak:

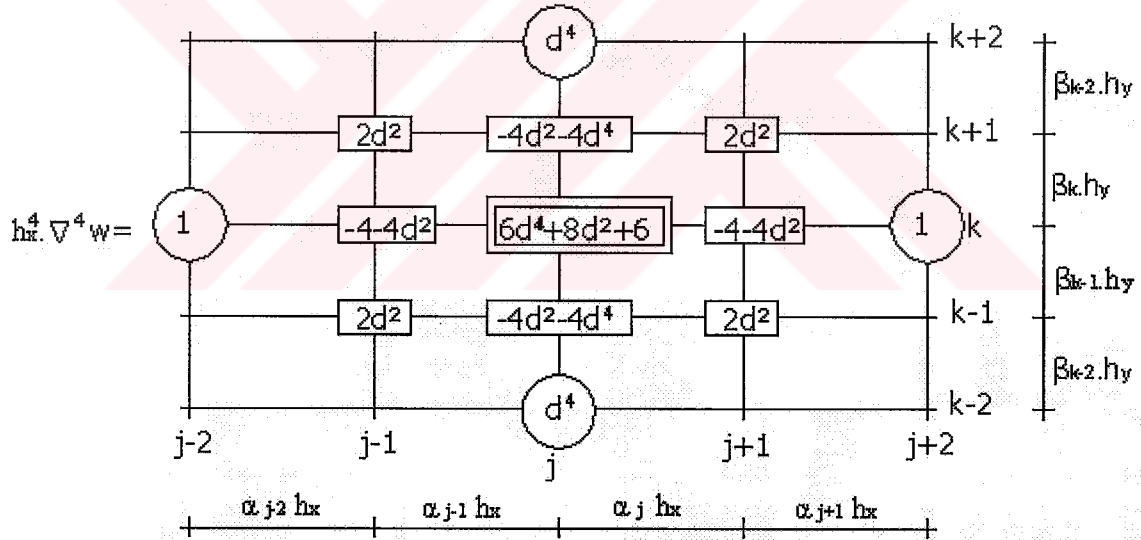
$$F1 = F2 = \frac{2.1}{h_x^2 \cdot 1.1(1+1)} = \frac{1}{h_x^2} = \frac{1}{d^2 h_y^2}$$

$$F3 = F4 = \frac{2.1}{h_y^2 \cdot 1.1(1+1)} = \frac{1}{h_y^2}$$

$$F0 = -\frac{2.(1+1)}{h_x^2 \cdot 1.1(1+1)} - \frac{2.(1+1)}{h_y^2 \cdot 1.1(1+1)} = -\frac{2.(1+d^2)}{d^2 h_y^2}$$

$$\begin{aligned}
S1 = S4 &= \frac{1}{d^2 h_y^2} \frac{1}{d^2 h_y^2} = \frac{1}{d^4 h_y^4} \\
S2 = S3 = S6 = S7 &= \frac{1}{d^2 h_y^2} \left[ -\frac{2 \cdot (1 + d^2)}{h_y^2} - \frac{2 \cdot (1 + d^2)}{h_y^2} \right] = -\frac{4 \cdot (1 + d^2)}{d^2 h_y^4} \\
S5 = S8 &= \frac{1}{h_y^2} \frac{1}{h_y^2} = \frac{1}{h_y^4} \\
S9 = S10 = S11 = S12 &= \frac{1}{h_y^2} \frac{1}{d^2 h_y^2} + \frac{1}{h_y^2} \frac{1}{d^2 h_y^2} = \frac{2}{d^2 h_y^4} \\
S0 &= 4 \frac{(1 + d^2)^2}{d^4 h_y^4} + 2 \left( \frac{1}{d^2 h_y^2} \frac{1}{d^2 h_y^2} + \frac{1}{h_y^2} \frac{1}{h_y^2} \right) = \frac{6d^4 + 8d^2 + 6}{d^4 h_y^4}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

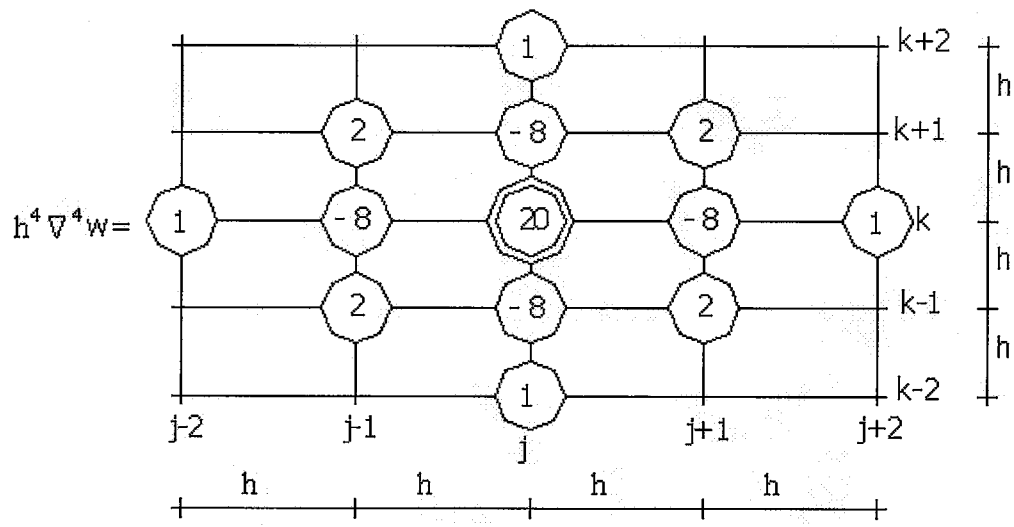
(4.9) daki değerler  $d^4 h_y^4 = h_x^4$  ile çarpılarak yerine konulursa, Şekil 4.4 te görülen Őema elde edilir.



Şekil 4.4

b) İkinci özel durum olarak, x ve y doğrultularındaki aralıkların birbirine eşit olması halini ele alalım. Bu durumda  $h_x = h_y = h$  olacağından  $d=1$  olur.

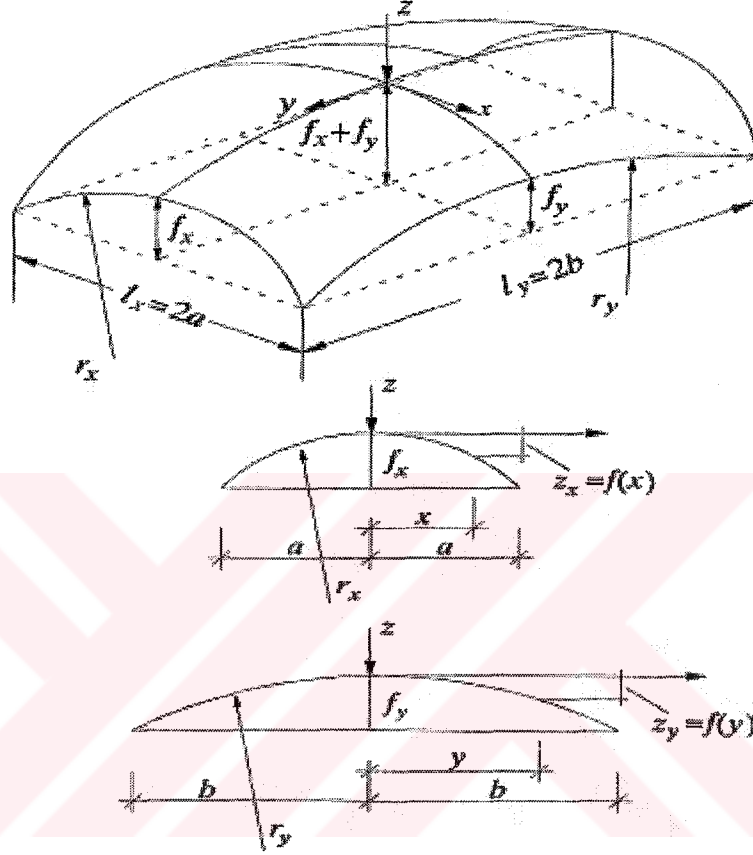
Şekil 4.4 te  $d=1$  alınırsa, Şekil 4.5 te görülen Őema elde edilir.



Şekil 4.5

## 5. ELİPTİK PARABOLİK KABUĞUN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE EĞİLME HESABI

### 5.1 Eliptik Parabolik Kabuğun Geometrik Özellikleri



Şekil 5.1 Eliptik parabolik kabuğun geometrik özellikleri

Yatay kesit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Elips,}$$

Düşey kesitler:

$$z_x = f_x \frac{x^2}{a^2} \quad \text{Parabol,}$$

$$z_y = f_y \frac{y^2}{b^2} \quad \text{Parabol,}$$

Eliptik parabolik kabuk denklemi (Şekil 5.1.)

$$z = z_x + z_y = f_x \frac{x^2}{a^2} + f_y \frac{y^2}{b^2} \quad (5.1)$$

olur.

Burada  $f_x$  ve  $f_y$ , sırasıyla  $x$  ve  $y$  eksenlerine paralel eğrilerin sehimleridir.  $L_x = 2a$  ve  $L_y = 2b$  kabuk tabanının kenarlarıdır. Koordinat takımının başlangıç noktası kabuğun üst tepe orta noktasıdır. Orta noktanın sehimi  $f = f_x + f_y$ 'dir.

Asal eğrilikler;

$$k_x = \frac{1}{r_x} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \cong \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2f_x}{a^2}$$

$$k_y = \frac{1}{r_y} = \frac{2f_y}{b^2}$$

$$\text{ve } k_{xy} = \frac{1}{r_{xy}} = 0 \quad (5.2)$$

Eğrilik yarıçapları:

$$r_x = \frac{a^2}{2f_x}$$

$$r_y = \frac{b^2}{2f_y}$$

(5.3)

Ayrıca ,

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=a} = \frac{2f_x}{a} \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{2f_x}{a^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2f_y}{b} \quad \beta = \frac{2f_y}{b^2} \quad \text{dersek,}$$

Buradan kabuk denklemi;

$$z = \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{2} y^2 \quad (5.4)$$

olarak ifade edilir (Köksal ve Köksal, 1986).

## 5.2 Kabuğun Wlassow Denklemi (Basık Yüzeyli)

Basık kabukta  $\frac{f}{l} \leq \frac{1}{5}$  şartı gerçekleştiği için (Köksal, 1994) denge ve şekil değiştirme denklemleri oldukça basitleşmektedir. Kartezyen koordinat sisteminde  $z = f(x,y)$  ile verilen basık kabukta şu kabuller yapılabilir.

$$p^2 \cong 0, \quad q^2 \cong 0, \quad pq \cong 0 \quad \text{ve} \quad F = 0, E = 1, G = 1, W = 1$$

Ayrıca C ile çarpılan terimler, D ile çarpılan terimlerin yanında ihmal edilebilir. Zira  $D \gg C$  dır.  $(1+r) \approx 1$ ,  $(1+t) \approx 1$  kabullerini yapabiliriz. Betonarme kabuklarda  $v = 0$  alınabilir. Bu durumda kesit zorları:

$$\begin{aligned} N_x &= D(u' + w'z'), \\ N_y &= D(\dot{v} + \dot{w}z), \\ N_{xy} &= \frac{D}{2}(\dot{u} + v' + \dot{w}z' + w'\dot{z}), \\ M_x &= -Kw'', \\ M_y &= -K\ddot{w}, \\ M_{xy} &= -K\dot{w}'. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Eğer yalnızca düşey p yükü etkiliyorsa ve ilk iki denklemde diğer terimlere oranla küçük olan momentlerin kısmi türevli terimleri terk edilirse aşağıdaki terimleri elde edilir;

$$\begin{aligned} N'_x + \dot{N}_{yx} &= 0 \\ \dot{N}_y + N'_{xy} &= 0 \\ rN_x + 2sN_{xy} + tN_y + M''_x + 2\dot{M}'_{xy} + \ddot{M}_y + p &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Bu denklemlere F gerilme fonksiyonu ithal edilirse yani normal ve kesme kuvvetleri yerine F cinsinden değerleri yerine konursa ve momentler yerine de w yerdeğiştirme bileşeni cinsinden değerleri konursa üçüncü denklem aşağıdaki şekle dönüşür. İlk iki denklemin özdeş olarak yok olacağı açıktır;

$$K\Delta\Delta w = rF'' - 2s\dot{F}' + t\ddot{F} + p \quad (5.5)$$

Bu denklemde F ve w aranan fonksiyonlardır. Bunların belirlenmesi için bir denkleme daha gerek vardır. Bu da uygunluk denklemi olup  $\Delta\Delta F = 0$  dır. Bunun açık olarak elde edilmesi ise;

$$\begin{aligned} \ddot{N}_x &= D[\ddot{u}' + (w'z')'''] \\ N_y'' &= D[\ddot{v}'' + (\dot{w}z)'''] \\ -2N_{xy} &= D[-\ddot{u}' - \dot{v}'' - (\dot{w}z')'' - (w'\dot{z})'''] \\ \Delta\Delta F &= \ddot{N}_x + \ddot{N}_y - 2N_{xy} = -D(\ddot{w}z'' - 2\dot{w}'z' + w''\ddot{z}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

dır. Eğer  $\bar{\Delta}(\dots) = r(\dots)'' - 2s(\dots)'' + 1(\dots)'$  operatörü uygulanırsa (5.5) ve (5.6) denklemleri aşağıdaki forma girer;

$$\Delta \Delta F = -D \bar{\Delta} w$$

$$K \Delta \Delta w = \bar{\Delta} F + p \quad (5.7)$$

Bunlar basık kabukların Wlassow denklemleridir. Burada bir  $\phi$  fonksiyonu ithali ile ve  $F = -D \bar{\Delta} \phi, w = \Delta \Delta \phi$  diyerek ( 5.7 ) denklemini bir (5.8) deki denkleme dönüştürülebilir.

$$K \Delta \Delta \Delta \Delta \phi = -D \bar{\Delta} \bar{\Delta} \phi + p \quad (5.8)$$

Pratikte olduğu gibi bizde basık kabukların (5.7) denklemini kullanacağız. Çünkü bu denklem kullanıldığında, w ve F (5.8) denklemindeki gibi toplanamayacağından w ve F'in sınır şartları dikkate alınabilir. (5.7) denkleminin türetilmesiyle u ve v deplasmanları yok olur ve sadece bilinmeyen olarak F ve w ile ifade edilebilirler.

Planda dikdörtgen olan sınır boyunca kenar itkisi doğmayan basık eliptik parabolik kabuklar

düşey p yükü ile yüklü ve  $z = \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{2} y^2$  denklemi ile ifade edilen eliptik parabolik

kabuklarda Wlassow denklemleri şu hale gelir;

$$\Delta \Delta F = -D(\alpha \ddot{w} + \beta w''), \quad (5.9)$$

$$K \Delta \Delta w = \alpha \ddot{F} + \beta F'' + p.$$

Kabuk kenarlar boyunca serbest oturmakta olup örneğin  $x = a$  kenarında  $w = w'' = 0$  ve  $F = \Delta F = 0$  ( $N_x = 0, N_y = 0$ ),  $\bar{N}_x = \ddot{F} - \int p_x dx : p = 0 \rightarrow \bar{N}_x = \ddot{F}$  ve basık kabukta  $\bar{N}_x \cong N_x$  dir. Diğer sınır içinde durum aynıdır. Yükün çift Fourier serisine açılmış şekli,

$$p = \frac{16 p_{mn}}{\Pi^2 mn} \sum_m \sum_n \sin \lambda_m x \sin \varphi_n y \quad (5.10)$$

dir.

Sonlu farklar yöntemiyle bu denklemlerin çözümü için, kabuk yüzeyi planda dikdörtgen bir ağ şebekesi ile düzenlenip Wlassow denklemleri(diferansiyel denklemler), düğüm noktalarında bir sistem dahilinde yazılarak elde edilir. Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen lineer denklemler sistemi çözümlenerek sonuçlar w ve F'in kenarlar boyunca w ve F'nin kısmi türevlerinin de kenar normalleri doğrultusunda değerleri verilebilir. Bunlarında dikkate alınmasıyla w ve F'in iç düğüm noktalarında bilinmeyen değerleri tek bir çözüm olarak belirlenebilir (Köksal, 1994).

### 5.3 Sonlu Farklarla Çözüm

Önceki paragraflarda yapılan açıklamalardan da bilindiği gibi, sonlu farklar yönteminin yazılış sisteminden dolayı, sonlu farklar denklemleri, kabuğun diferansiyel denklemlerinin yerine geçer. Şimdi sınır durumlarını

$$w = 0, \quad \Delta w = 0, \quad F = 0, \quad \Delta F = 0$$

olarak, yük durumu aşağıdaki şekildeki gibi belirleyelim. Her bir düğüm noktasının yükü, bir Fourier çift serisine benzer trigonometrik interpolasyon formülü ile ifade edelim. Buna göre bir  $jk$  düğüm noktasında yük aşağıdaki şekildedir.

$$p_{jk} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{mn} \sin \varphi_m j \cdot \sin \tau_n k \quad (5.11)$$

Burada,

$$jh = x_j, \quad kl = y_k, \quad \varphi = \frac{m\pi h}{l_x}, \quad \tau = \frac{n\pi l}{l_y}$$

Ayrıca,

$$j=0,1,2,\dots,(M+1); \quad k=0,1,2,\dots,(N+1)$$

$m=1,2,3,\dots,M$  ve  $n=1,2,3,\dots,N$  dir.

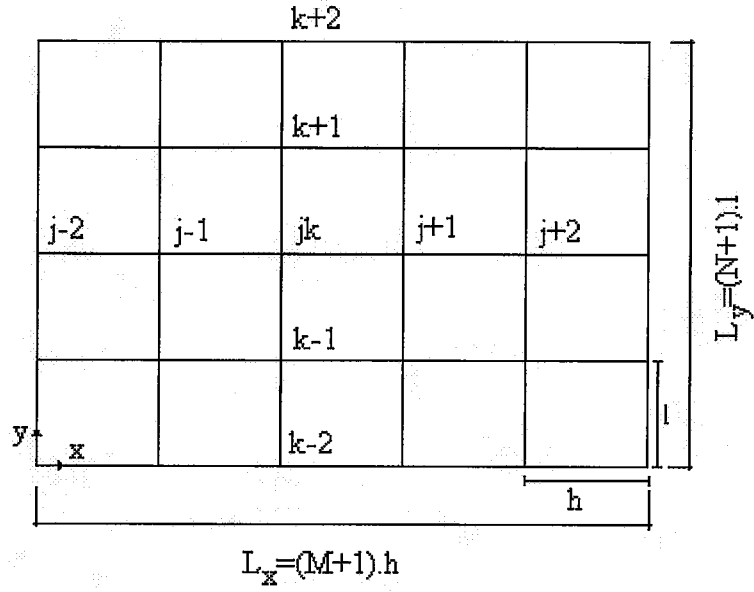
İncelenen iç noktaların adedi  $M \times N$  kadardır.  $P_0$  sabit yük halinde;

$$p_{mn} = \frac{4P_0 h l}{l_x l_y} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \sin \varphi_m j \cdot \sin \tau_n k \quad (5.12)$$

$$p_{mn} = \frac{4P_0 h l}{(M+1)h(N+1)l} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \sin \varphi_m j \cdot \sin \tau_n k$$

$$\overline{p_{mn}} = \frac{1}{(M+1)(N+1)} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \sin \varphi_m j \cdot \sin \tau_n k$$

$$p_{mn} = 4P_0 \overline{p_{mn}}$$



Şekil 5.2 Sonlu farklar düğüm noktaları şeması

(5.11) ve (5.12) ifadeleri istenen düğüm noktasında  $p_{jk}$  nın bulunmasına yararlar. (Şekil 5.2)  $jk$  noktasında  $l/h = d$  ise,  $l^4 \Delta \Delta w_{jk}$  diferansiyel ifadesi aşağıdaki bilinen sonlu farklar ifadeleriyle gerçekleştirilebilir:

$$l^4 \Delta \Delta w_{jk} = w_{jk} [6(d^4 + 1) + 8d^2] - 4[(d^2 + d^4)(w_{j+1,k} + w_{j-1,k}) + (d^2 + 1)(w_{j,k+1} + w_{j,k-1})] + 2d^2(w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j-1} + w_{k-1,j+1}) + d^4(w_{j+2,k} + w_{j-2,k}) + (w_{j,k+2} + w_{j,k-2}) \quad (5.13)$$

$w_{jk}$  için aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$w_{jk} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn} \sin \varphi_m j. \sin \tau_n k \quad (5.14)$$

Eğer (5.14), (5.13)'e ithal edilirse ve  $m$  indeksi daha doğrusu  $\varphi$  nun  $n$ 'i veya  $\tau$  gözönüne alınmazsa verilmiş bir  $mn$  çifti için:

$$w_{mn} \cdot \{ [6(d^4 + 1) + 8d^2] \sin \varphi j \sin \tau k - 4(d^2 + 1) [\sin \varphi j \sin \tau(k-1) + \sin \varphi j \sin \tau(k+1)] - 4(d^2 + d^4) [\sin \varphi(j-1) \sin \tau k + \sin \varphi(j+1) \sin \tau k] + 2d^2 [\sin \varphi(j-1) \sin \tau(k-1) + \sin \varphi(j-1) \sin \tau(k+1) + \sin \varphi(j+1) \sin \tau(k-1) + \sin \varphi(j+1) \sin \tau(k+1)] + d^4 [\sin \varphi(j-2) \sin \tau k + \sin \varphi(j+2) \sin \tau k] + \sin \varphi j \sin \tau(k-2) + \sin \varphi j \sin \tau(k+2) \} \quad \text{bulunur veya sadeleştirmeden sonra;}$$

$$\Delta \Delta w_{jk} \cong \frac{4}{l^4} [d^2 (\cos \varphi_m - 1) + (\cos \tau_n - 1)]^2 w_{mn}$$

$w_{mn}$  'nin çarpanı  $L_{mn}^2$  ile gösterilirse;

$$\Delta \Delta w_{jk} \cong L_{mn}^2 w_{mn} \quad (5.15)$$

olur.(5.14) ifadesine benzer şekilde, eğer, kısmi türevler  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  ve  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  sonlu farklarla gösterilirse ve  $\sin \varphi j$  ve  $\sin \tau k$  ile kısaltılırsa aşağıdakiler elde edilir;

$$\frac{\partial^2 w_{jk}}{\partial x^2} \cong \frac{2}{h^2} (\cos \varphi_m - 1) w_{mn} = H_m \cdot w_{mn} \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial^2 w_{jk}}{\partial y^2} \cong \frac{2}{l^2} (\cos \tau_n - 1) w_{mn} = H_n \cdot w_{mn}$$

$z = \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{2} y^2$  ile gösterilen basık eliptik parabolik kabuğun yukarıdaki sınır şartları ve (5.11), (5.12), (5.13), (5.16) formüllerinin yardımı ile Wlassow denkleminin çözümü (5.17) dir;

$$\Delta \Delta F + D(\alpha \ddot{w} + \beta w'') = 0 \quad (5.17)$$

$$K \Delta \Delta w - \alpha \ddot{F} - \beta F'' - p = 0$$

Bu şartlar w için (5.14) formülünü gerçekleştirir.

$$F_{jk} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{mn} \sin \varphi j \sin \tau k \quad (5.18)$$

(5.14) ve (5.18) formülleri (5.17) de yerine konulduğunda ve  $\sin \varphi j$  ve  $\sin \tau k$  ile kısaltmalar yapıldığında verilmiş mn değer çifti için ve (5.15) ifadesi dikkate alındığında bu ifadeler

$$L_{mn}^2 F_{mn} + D(\alpha H_n + \beta H_m) w_{mn} = 0 \quad (5.19)$$

elde edilir.

$$KL_{mn}^2 w_{mn} - (\alpha H_n + \beta H_m) F_{mn} - p_{mn} = 0 \text{ ve aranan bilinmeyen değerler}$$

$$F_{mn} = -\frac{D(\alpha H_n + \beta H_m) p_{mn}}{KL_{mn}^4 + D(\alpha H_n + \beta H_m)^2}$$

$$w_{mn} = \frac{L_{mn}^2 p_{mn}}{KL_{mn}^4 + D(\alpha H_n + \beta H_m)^2} \quad \text{dir (Köksal, 1994).} \quad (5.20)$$

#### 5.4 Formüllerin Tablolaştırılması

$$z = \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{2}y^2 \quad f_x + f_y = f$$

$$\alpha = \frac{8f_x}{l_x^2}, \quad \beta = \frac{8f_y}{l_y^2}, \quad \frac{f_x}{f_y} = \frac{\alpha l_x^2}{\beta l_y^2}$$

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\vartheta^2)}, \quad v=0 \text{ için } K = \frac{Et^3}{12}$$

$$D = \frac{Et}{(1-\vartheta^2)}, \quad v=0 \text{ için } D = Et \quad G = \frac{E}{2}$$

$$\varphi = \frac{m\Pi h}{l_x} \quad l_x = (M+1)h \quad \varphi = \frac{m\Pi}{M+1}$$

$$\tau = \frac{n\Pi l}{l_y} \quad l_y = (N+1)l \quad \tau = \frac{n\Pi}{N+1}$$

$$d = \frac{l}{h} \quad \frac{l_x}{h} = M+1 \quad \frac{l_y}{l} = N+1$$

$$A = \cos \varphi - 1$$

$$B = \cos \tau - 1$$

$$H_m = \frac{2}{h^2} A$$

$$H_n = \frac{2}{l^2} B$$

(5.21)

$$L_{mn} = \sqrt{\frac{4}{l^4} [d^2 (\cos \varphi_m - 1) + (\cos \tau_n - 1)]^2} = \frac{2}{l^2} \left[ \frac{l^2}{h^2} (\cos \varphi_m - 1) + (\cos \tau_n - 1) \right]$$

$$L_{mn} = \frac{2}{h^2} (\cos \varphi_m - 1) + \frac{2}{l^2} (\cos \tau_n - 1)$$

$$L_{mn} = \frac{2}{h^2} A + \frac{2}{l^2} B$$

(5.22)

$$L_{mn} = H_m + H_n$$

$$L_{mn} = \frac{1}{h^2} (2A + 2B \frac{h^2}{l^2})$$

$$\alpha H_n + \beta H_m = \frac{8f_x}{l_x^2} \cdot \frac{2}{l^2} B + \frac{8f_y}{l_y^2} \cdot \frac{2}{h^2} A$$

$$= \frac{8 \cdot 2f_x B}{h^2 l^2 (M+1)^2} + \frac{8 \cdot 2f_y A}{l^2 h^2 (N+1)^2}$$

(5.23)

$$\alpha H_n + \beta H_m = \frac{8}{h^2 l^2} \left( \frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2} \right)$$

(5.20) denklemlerinin paydası aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}
KL_{mn}^4 + D(\alpha H_n + \beta H_m)^2 &= K \frac{1}{h^8} (2A + 2B \frac{h^2}{l^2})^4 + D \frac{8^2}{h^4 l^4} (\frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2})^2 \\
&= \frac{Et^3}{12} \frac{1}{h^8} (2A + 2B \frac{h^2}{l^2})^4 + Et \frac{8^2}{h^4 l^4} (\frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2})^2 \\
&= \frac{Et^3}{h^8} \left[ \frac{t^2}{12} (2A + 2B \frac{h^2}{l^2})^4 + \frac{h^4 8^2}{l^4} (\frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2})^2 \right]
\end{aligned} \tag{5.24}$$

yazılabilir.  $F_{mn}$ 'in payı (5.20) den aşağıdaki gibi;

$$-D(\alpha H_n + \beta H_m) p_{mn} = -Et \frac{8}{h^2 l^2} (\frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2}) p_{mn} \tag{5.25}$$

yazılabilir. (5.12), (5.22), (5.24), (5.25) denklemlerini (5.20) de yerlerine koyarak  $F_{mn}$  ve  $w_{mn}$  aşağıdaki şekilde;

$$\begin{aligned}
F_{mn} &= -\frac{D(\alpha H_n + \beta H_m) p_{mn}}{KL_{mn}^4 + D(\alpha H_n + \beta H_m)^2} \\
F_{mn} &= -\frac{Et \frac{8}{h^2 l^2} (\frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2}) p_{mn}}{\frac{Et}{h^8} \left[ \frac{t^2}{12} (2A + 2B \frac{h^2}{l^2})^4 + \frac{h^4 8^2}{l^4} (\frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2})^2 \right]} p_{mn} \\
F_{mn} &= -4P_0 h^4 \frac{\frac{8h^2}{l^2} (\frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2})}{\frac{t^2}{12} (2A + 2B \frac{h^2}{l^2})^4 + \frac{64h^4}{l^4} (\frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2})^2} \overline{p_{mn}}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
w_{mn} &= \frac{L_{mn}^2 P_{mn}}{KL_{mn}^4 + D(\alpha H_n + \beta H_m)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{h^4} (2A + 2B \frac{h^2}{l^2})^2}{\frac{Et}{h^8} \left[ \frac{t^2}{12} (2A + 2B \frac{h^2}{l^2})^4 + \frac{h^4 8^2}{l^4} (\frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2})^2 \right]} p_{mn} \\
w_{mn} &= 4P_0 \frac{h^4}{Et} \frac{(2A + 2B \frac{h^2}{l^2})^2}{\frac{t^2}{12} (2A + 2B \frac{h^2}{l^2})^4 + \frac{64h^4}{l^4} (\frac{2f_x B}{(M+1)^2} + \frac{2f_y A}{(N+1)^2})^2} \overline{p_{mn}}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

elde ederiz. Burada altları çizili değerlere  $f(x)$  ve  $f(y)$  dersek yukarıdaki değerleri kısaca:

$$F_{mn} = -P_0 h^4 f(F)$$

$$w_{mn} = P_0 \frac{h^4}{Et} f(w)$$

şeklinde gösterebiliriz. Şimdi kesit zorları şöyle ifade edilebiliriz (Köksal, 1994).

### 5.5 Kesit Zorları

$$\begin{aligned} M_x &= -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{Et^3}{12} \frac{(w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}))}{(\Delta x)^2} \\ M_x &= -\frac{Et^3}{12h^2} (w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1})) = -\frac{Et^3}{12h^2} \frac{P_0 h^4}{Et} f(w) \\ M_x &= -\frac{P_0 h^2 t^2}{12} f(w) \\ M_x &= 10^3 P_0 h^2 t^2 \underline{f(M_x)} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Burada  $P_0 h^2 t^2$  kabuk boyutları ve yük değerine göre değişir ve hesaplanması gerekir.

$$\begin{aligned} M_y &= -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{Et^3}{12} \frac{(w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}))}{l^2} = -P_0 h^2 t^2 \frac{h^2}{12l^2} f(x) \\ M_y &= 10^3 P_0 h^2 t^2 \underline{f(M_y)} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Et^3}{12} \frac{(w_{k-1,j-1} + w_{k+1,j+1} w_{k+1,j-1} - w_{k-1,j+1}))}{4\Delta x \Delta y} \\ M_{xy} &= -\frac{Et^3}{12h^2} \frac{1}{4hl} \frac{P_0 h^4}{Et} f(w) \\ M_{xy} &= P_0 h^2 t^2 \frac{h}{48l} f(w) \\ M_{xy} &= -10^3 P_0 h^2 t^2 \underline{f(M_{xy})} \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ N_x &= \frac{F_{k-1} - 2F_k + F_{k+1}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$N_x = \frac{P_0 h^4}{l^2} f(F) = P_0 h^2 \frac{h^2}{l^2} f(F)$$

$$N_x = P_0 h^2 \underline{f(N_x)}$$

$$\begin{aligned} N_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ N_y &= \frac{F_{j-1} - 2F_j + F_{j+1}}{(\Delta x)^2} \quad \Delta x = h \end{aligned}$$

$$N_y = \frac{P_0 h^4}{h^2} f(F) = P_0 h^2 f(F)$$

$$N_y = P_0 h^2 \underline{f(N_y)} \quad (5.32)$$

$$N_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$N_{xy} = -\frac{F_{k-1,j-1} + F_{k-1,j+1} - F_{k-1,j} - F_{k+1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \quad \Delta x = h \quad (5.33)$$

$$N_{xy} = -\frac{P_0 h^4}{4lh} f(F) = -P_0 h^2 \frac{h f(F)}{4l} \quad \Delta y = l$$

$$N_{xy} = -P_0 h^2 \underline{f(N_{xy})}$$

## 6. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

### 6.1 Yöntemin Esasları, Tanımlar

Kabuk ve plak gibi sürekli sistemleri sonlu sayıdaki serbestlik derecesine sahip ayrı bir sisteme dönüştürme sonucu oluşan, cebirsel denklem takımlarının çözümüne dayanan sayısal hesap yöntemleri, özellikle çeyrek yüzyıldan beri elektronik hesap imkanlarının artmasıyla ön plana çıkmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi sürekli bir sistemi, problemin karakterine uygun sonlu elemanlara ayırarak, elde edilen elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonu ve sonlu bu elemanların birleştirilmesi tarzında bir uygulama gerektirir. Bunun sonucu olarak mesnet şartları, sisteme ait özellikler, dış yüklerin sürekli ya da ani değişimleri, kolayca göz önüne alınabilir. Dolayısıyla sonlu elemanlar yöntemi analitik yöntemlerle çözülemeyen karışık problemlere uygulanabilir. Yüzeysel sistemin tipik bölgelerinde eleman boyutları küçültülerek o bölgenin daha prezisyonlu incelenmesi mümkün olur. Diğer bir avantajıda sınır koşullarının problemin çözüm sırasına göre en son adımda hesaplara ithal edilmesidir. Böylelikle çeşitli sınır koşullarını probleme uygularken baştaki yoğun hesaplara girilmez.

Sonlu elemanlar yönteminin kabuk sistemlerine uygulanışına ait çalışmaların bir kısmında, sistem düzlemsel sonlu elemanlara ayrılmaktadır. Bu tip hesaplarda eleman özel eksenlerinin sistem eksenlerine dönüştürülmesinde, sistem rijitlik matrisinin hesabında bazı güçlüklerle karşılaşmaktadır. Kabuk şekline uygun eğrisel sonlu eleman kullanılması bu güçlükleri ortadan kaldırmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde, sistem sonlu sayıda elemana ayrılmaktadır. Sistemi oluşturan elemanların her birine sonlu eleman denir ve birleştikleri köşe noktalarına da düğüm noktaları olarak adlandırılır. Sonlu eleman yüzeyinin şekil değiştirmesi, düğüm noktalarının deplasman parametrelerine bağlı olarak ifade edilebilir. Deplasman parametreleri; deplasman bileşenleri, dönmeler ve burulma eğriliği gibi deplasman vektörleri içermektedir. Mukavemet hesaplarında düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin belirlenmesi, sistem deplasman yüzeyinin ve her düğüm noktasındaki kesit tesirlerinin bulunması için yeterlidir. Stabilité hesabında ise, bu deplasman parametrelerine göre kurulan denklem takımının  $\Delta$  katsayılar determinantını sıfır yapan yük, yani kritik yük tayin edilir.

### 6.2 Deplasman Parametrelerinin Seçimi

Deplasman fonksiyonları rijit cisim hareketlerini ve sabit deformasyon şartını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Koordinat eksenini değiştirince çözüm farklı olmamalıdır. Bunun için

deplasman fonksiyonları ya tam polinom veya tabii koordinatların fonksiyonu şeklinde olmalıdır. Elemanın içinde ve kenarında sürekli olmalıdır. Ayrıca, iç ve dış kuvvetlerin içindeki türevleri de sürekli olmalıdır. Herhangi bir ( $e_i$ ) elemanın içinde ya da sınırları üzerinde bir ( $i$ ) noktasındaki deplasman vektörü  $\{v_i\}$  olsun.

$$v_i = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = [\psi(x, y)]\{a\} \quad (6.1)$$

Burada  $[\psi(x, y)]$  seçilen fonksiyonlardır. Hesap kolaylığı bakımından genellikle polinom seçilir.  $\{a\}$  bilinmeyen katsayılarıdır.  $\{a\}$  katsayıların sayısı, bir elemandaki düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin toplam sayısına eşit olmalıdır. Elemanın düğüm noktası deplasman parametreleri

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \\ [d]_3 \\ [d]_4 \end{Bmatrix}. \quad (6.2)$$

Eleman düğüm noktası deplasmanları  $\{d\}$  ile, polinom sabitleri  $\{a\}$  arasındaki bağı veren  $[A]$  matrisi ise; elemanın düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin  $\psi(x, y)$  ve  $\psi(x, y)$ 'nin türevleri cinsinden yazılmış bileşenlerinde, düğüm noktası koordinatlarının yerine konmasıyla bulunur.

$$\{d\} = [A]\{a\} \quad (6.3)$$

Burada bilinmeyen  $\{a\}$  katsayıları hesaplanırsa;

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\} \quad (6.4)$$

$$[B] = [A]^{-1}$$

diyelim, bu takdirde  $\{a\}$  katsayıları;

$$\{a\} = [B]\{d\} \quad (6.5)$$

şeklinde olur. (6.5) denklemini (6.1) denkleminde yerine koyarsak; elemanın ( $i$ ) noktasının deplasman vektörü, elemanın düğüm noktalarının deplasman parametreleri cinsinden belirlenmiş olur.

$$v_i = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = [\psi(x, y)][B]\{d\} \quad (6.6)$$

Burada  $[\psi(x,y)][B]$  ifadesine şekil fonksiyonu denir. Bu şekil fonksiyonları her elemanda aynıdır.

### 6.3 Elemanın İntegral Matrisi

Elemanın rijitlik matrisi ve dış yük matrisleri hesaplanırken iki yöntem uygulanır.

1. İntegral matrisleriyle hesap yapmak
2. Şekil fonksiyonlarını önceden tayin edip onlarla işlem yapmak

Burada integral matrisleri ile hesap yapılmıştır. Yer ve şekil değiştirme bağıntılarından şekil değiştirme ve dönme vektörleri  $V_i(x,y)$ , yer değiştirme vektörlerinin türevlerine ve  $\{a\}$  sabitlerini değerlerine bağlı olarak yazılabilir.

$$\{\epsilon\}=[F]\{a\} \quad (6.7)$$

$$\{\beta\}=[G]\{a\} \quad (6.8)$$

Buradaki  $[F]$  ve  $[G]$  matrislerine türev matris denir.(6.5) bağıntısını, (6.7) ve (6.8) denklemlerinde yerine koyarsak,

$$\{\epsilon\}=[F][B]\{d\} \quad (6.9)$$

$$\{\beta\}=[G][B]\{d\}. \quad (6.10)$$

1. Denge problemi için:  $(e_i)$  elemanını şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonunu yazalım.

$$\partial V_i = \iint_{e_i} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dx dy \quad (6.11)$$

Buradaki  $[D]$  elastisite sabitlerinin matrisidir. (6.9) ve (6.10) denklemlerini, (6.11) denklemlerinde yerlerine koyarsak;

$$\partial V_i = \{d\}^T \iint_{e_i} [B]^T [F]^T [D] [B] [F] \{d\} dx dy \quad (6.12)$$

denklemini elde ederiz. Burada değişkenleri içine alan matrisleri ayrıca yazalım:

$$[H] = \iint_{e_i} [F]^T [D] [F] dx dy \quad (6.13)$$

Bu matrise elemanın rijitlik matrisinin integral matrisi denir.  $[H_{ij}]$ 'nin simetrik olmayan her bir terimini tek tek tayin etmek lazımdır. (6.12) denklemi sonuçta aşağıdaki şekli alır.

$$\partial V_i = \{d\}^T [B]^T [H] [B] \{d\} \quad (6.14)$$

2. Stabilité problemi için: (e<sub>i</sub>) elemanın şekil değıştirme enerjisinin ikinci varyasyonunu yazalım.

$$\frac{1}{2} \partial^2 V_i = \frac{1}{2} \iint_{e_i} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx dy + \frac{1}{2} \iint_{e_i} [\beta]^T [N_0] \{\beta\} dx dy \quad (6.15)$$

Burada [N<sub>0</sub>] ön burkulma membran gerilmelerini verir. (6.9) ve (6.10) denklemlerini (6.15) denkleminde yerine koyarsak:

$$\partial^2 V_i = \{d\}^T \iint_{e_i} [B]^T [F]^T [D] [F] [B] \{d\} dx dy + \{d\}^T \iint_{e_i} [B]^T [G]^T [N_0] [G] [B] \{d\} dx dy \quad (6.16)$$

olur. Yine değışkenleri içine alan matrisleri ayrıca yazalım.

$$[H] = \iint_{e_i} [F]^T [D] [F] dx dy \quad (6.17)$$

$$[L] = \iint_{e_i} [G]^T [N_0] [G] dx dy \quad (6.18)$$

Buradaki [H] yukarıdaki gibi elemanın rijitlik matrisinin integral matrisidir, [L] ise elemanın geometrik yük matrisinin integral matrisidir. [H<sub>ij</sub>] ve [L<sub>ij</sub>]'nin simetrik olmayan her bir terimi tek tek tayin etmek gerekir. (6.16) denklemini son olarak aşağıdaki şekli alır.

$$\partial^2 V_i = \{d\}^T [B]^T [H] [B] \{d\} + \{d\}^T [B]^T [L] [B] \{d\} \quad (6.19)$$

#### 6.4 Elemanın Rijitlik Matrisi ve Geometrik Yük Matrisi

(6.14) ve (6.19) denklemlerini daha kısa ve öz bir şekilde yazarsak

$$\partial V_i = \{d\}^T [k_e] \{d\} \quad (6.20)$$

$$\partial^2 V_i = \{d\}^T [k_e] \{d\} + \{d\}^T [n_e] \{d\} \quad (6.21)$$

şeklini alır. Burada; [k<sub>e</sub>]; elemanın rijitlik matrisini, [n<sub>e</sub>] geometrik yük matrisini, elemanın ikinci mertbe etkileri matrisini gösterir.

$$[k_e] = [B]^T [H] [B] \quad (6.22)$$

$$[n_e] = [B]^T [L] [B] \quad (6.23)$$

Denge problemleri için sadece elemanın rijitlik matrisini tayin etmek yeterlidir. Stabilité problemleri için ise, hem elemanın rijitlik matrisini hem de geometrik yük matrisini tayin etmek gerekir.

### 6.5 Dügüm Kuvvetleri

Bilindiğı gibi sonlu elemanlar yönteminde kuvvetler, düğüm noktalarına indirgenir.

1. Denge problemi için: Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisinin birinci varyasyonunu yazarsak denge denklemleri için gerekli olan elemanın düğüm noktalarının kuvvetlerini buluruz.

$$\partial V_d = - \left( \iint_{e_i} p[v_i]^T dx dy + \oint_{s(e_i)} q[v_i]^T ds \right) \quad (6.24)$$

(6.6) denklemini (6.24) denkleminde yerine koyarsak;

$$\partial V_d = - \left( \iint_{e_i} p[\psi(x,y)]^T [B]^T \{d\}^T dx dy + \oint_{s(e_i)} q[\psi(x,y)]^T [B]^T \{d\}^T ds \right) \quad (6.25)$$

olur. Bunu

$$\partial V_d = -\{F_d\} \{d\}^T \quad (6.26)$$

şeklinde yazalım.

$$\{F_d\} = [B]^T \left( \iint_{e_i} p[\psi(x,y)]^T dx dy + \oint_{s(e_i)} q[\psi(x,y)]^T ds \right) \quad (6.27)$$

$\{F_d\}$ ,  $\{e_i\}$  elemanın düğüm noktalarına gelen kuvvetleri gösterir, yani  $\{F_d\}$  elemanın dış yük matrisidir.

2. Stabilité problemi için: Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisinin ikinci varyasyonunu stabilite denklemleri için gerekli olan, elemanın düğüm noktalarının kuvvetlerini bulmuş oluruz.

$$\frac{1}{2} \partial^2 V_d = - \left( \frac{1}{2} \iint_{e_i} p[v_i]^T [v_i] dx dy + \oint_{s(e_i)} q(x,y,p)[v_i] ds \right) \quad (6.28)$$

Burada  $q(x,y,p)$ ;  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$ ,  $w(x,y)$  ve  $p$ 'ye bağılı bir değerdir. Hidrostatik basınç yükünün ve çizgisel yükün stabilite denklemini, (6.11) denklemini (6.28) denkleminde yerine koyarak yazalım.

$$\frac{1}{2} \partial^2 V_d = -\{d\}^T - \left( \iint_{e_i} p[B]^T [\Delta\psi(x,y)]^T [\Delta\psi(x,y)][B]\{d\} dx dy \right)$$

$$+ \oint_{s(e_i)} p [B]^T [\Delta\psi(x, y)]^T [\Delta\psi(x, y)] [B] \{d\} ds \quad (6.29)$$

Burada da değişkenleri içine alan matrisleri ayrıca yazalım.

$$[S] = - \left( \iint_{e_i} p [\Delta\psi(x, y)]^T [\Delta\psi(x, y)] dx dy \right) \quad (6.30)$$

$$[G]_j = \oint_{s(e_i)} p [\Delta\psi(x, y)]^T [\Delta\psi(x, y)] ds \quad (j = 1, \dots, 8) \quad (6.31)$$

Yukarıdaki [S] matrisine hidrostatik basınç yükünün integral matrisi, [G] matrisine ise çizgisel yükün integral matrisi denir. [S<sub>ij</sub>] ve [G<sub>ij</sub>]'nin simetrik olmayan her bir terimini hesaplamamız gerekir.

$$\frac{1}{2} \partial^2 V_d = \{d\}^T \left( \frac{1}{2} [B]^T [S] [B] \{d\} + [B]^T [G]_j [B] \{d\} \right) \quad (6.32)$$

denklemini elde ederiz. (6.32) denklemini daha kısa şekilde yazarsak,

$$\frac{1}{2} \partial^2 V_d = \{d\}^T [Q_e] \{d\} + \{d\}^T [Q_e]_j \{d\} \quad (6.33)$$

şeklini alır. Burada [Q<sub>e</sub>] eleman dış yük matrisini, [Q<sub>e</sub>]<sub>j</sub> ise eleman çizgisel yük matrisini gösterir.

$$[Q_e] = [B]^T [S] [B] \quad (6.34)$$

$$[Q_e]_j = [B]^T [G]_j [B] \quad j = (1, \dots, 8) \quad (6.35)$$

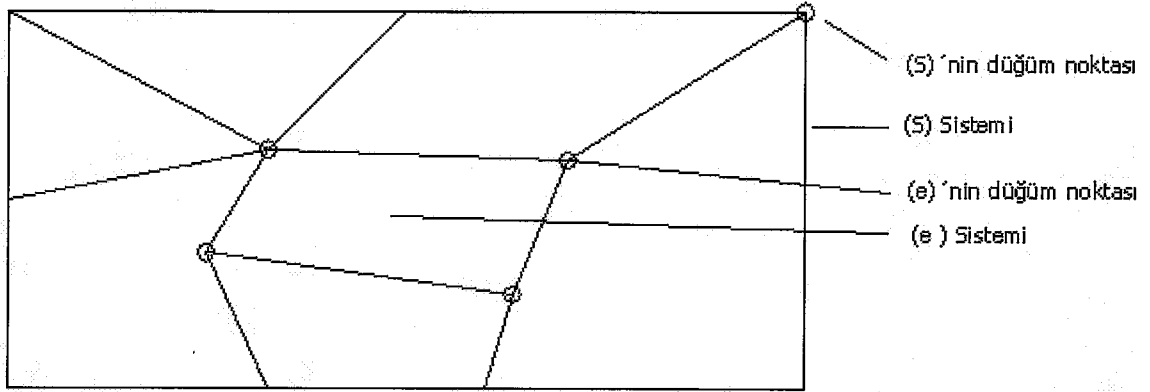
Böylece sonlu elemanlar yöntemi ile; [k<sub>e</sub>] eleman rijitlik matrisini, [n<sub>e</sub>] eleman geometrik yük matrisini, [Q<sub>e</sub>] eleman dış yük matrisini ve [Q<sub>e</sub>]<sub>j</sub> (j = 1, ..., 8) eleman çizgisel yük matrisini buluruz.

Denge probleminde;  $\partial V = \partial V_i + \partial V_d$

Stabilite probleminde;  $\frac{1}{2} \partial^2 V = \partial^2 V_i + \partial^2 V_d$

şeklinde dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi ile iç kuvvetlerin potansiyel enerjisinin toplamı yazılır.

## 6.6 Elemanların Birleştirilmesi ve Sistemin Hesabı



Şekil 6.1 S sistemi

(S) sistemi  $(e_i)$  elemanlarının toplamından oluşur. Global sisteme çevirme iki yöntemle yapılabilir;

1. Çevirme matrisleri yöntemi ile
2. Biriktirme yöntemi ile

1. Çevirme matrisleriyle sisteme geçiş

(s)'nin potansiyel enerjisi, her  $(e_i)$  elemanının potansiyel enerjisinin toplamından ibaret olacaktır. Sistemde  $n$  adet eleman varsa;

Stabilite problemlerinde;

$$\partial^2 V(s) = \sum_{i=1}^n \partial^2 V(e_i) \quad (6.36)$$

$(e_i)$  elemanın bir  $P$  düğüm noktası, sistemin bir  $\bar{P}$  noktası ile çakışır. Her  $(e_i)$  elemanının  $\{d\}$  düğüm deplasmanları, sistemin  $\{d_s\}$  deplasmanları ile bağlantılıdır. Her elemanda aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$\{d\} = [C]_{e_i} \{d_s\} \quad (6.37)$$

$[C]_{e_i}$  çevirme matrisidir. Bunun gibi her elemanın ayrı ayrı çevirme matrisi bulunur. Böylece elemandan sisteme geçiş sağlanır. (6.36) bağıntısı uygulanarak sistemin potansiyel enerjisi yazılabilir.

$$\partial^2 V(s) = \{d_s\}^T \left( \sum_{i=1}^n [C]_{e_i}^T [k_e] [C]_{e_i} \right) \{d_s\} + \lambda \left\{ \begin{aligned} &+ \{d_s\}^T \left( \sum_{i=1}^n [C]_{e_i}^T [Q_e] [Q]_{e_i} \right) \{d_s\} \\ &+ \{d_s\}^T \left( \sum_{i=1}^n [C]_{e_i}^T [Q_e]_j [Q]_{e_i} \right) \{d_s\} \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

$$[K] = \sum_{i=1}^n [C]_{e_i}^T [k_e] [C]_{e_i} \quad \text{Sistemin rijitlik matrisi} \quad (6.39)$$

$$[N] = \sum_{i=1}^n [C]_{e_i}^T [n_e] [C]_{e_i} \quad \text{Sistemin geometrik yük matrisi} \quad (6.40)$$

$$[Q] = \sum_{i=1}^n [C]_{e_i}^T [Q_e] [Q]_{e_i} \quad \text{Sistemin dış yük matrisi} \quad (6.41)$$

$$[Q]_j = \sum_{i=1}^n [C]_{e_i}^T [Q_e]_j [Q]_{e_i} \quad \text{Sistemin çizgisel yük matrisi} \quad (6.42)$$

Yukarıdaki bağıntılardan

$$\partial^2 V(s) = \{d_s\}^T \{ [K] \{d_s\} + \lambda ([N] \{d_s\} + [Q] \{d_s\} + [Q]_j \{d_s\}) \} = 0 \quad (6.43)$$

denklemini elde edilir.

Denge problemlerinde;

$$\partial V = \{d_s\}^T \left( \sum_{i=1}^n [C]_{e_i}^T [k_e] [C]_{e_i} \{d_s\} - \sum_{i=1}^n \{F_d\} [C]_{e_i}^T \right)$$

$$\{Q_d\} = \sum_{i=1}^n \{F_d\} [C]_{e_i}^T \quad \text{Sistemin dış yük matrisi}$$

Bu denklemi kısa şekilde yazarsak;

$$\partial V = \{d_s\}^T ([K] \{d_s\} - \{Q_d\}) = 0$$

denklemini elde edilir.

## 2. Biriktirme yöntemi ile sisteme geçiş

Global sistem rijitlik matrisi içine, eleman rijitlik matrislerinin uygun şekilde yerleştirilmesi ile elde edilir.

### Denge probleminin çözümü:

Elde edilen denge denklemlerinde problemin sınır şartları yerlerine konur. Denklem takımı çözülüp sistemin düğüm noktaları deplasman parametreleri bulunur. Sonra elemanların köşe noktalarındaki deformasyonlar ve kesit tesirleri sayısal olarak bulunur. Aynı düğüm noktasında birleşen elemanların her birinde hesaplanan kesit tesirleri farklıdır. Bu değerlerin ortalaması alınarak o düğüm noktasının kesit tesiri sayısal olarak bulunmuş olur.

### Stabilite probleminin çözümü:

Burkulma yükü, sistemin ilk durumunu kararsız hal sınırına getiren yani kritik farksız konuma karşı gelen en küçük yük parametresi olarak tanımlanabilir. Dış yüklerden oluşan mambran kesit tesirleri bir yük parametresine bağlı olarak ifade edilir. İkinci mertebe hesaplarında süperpozisyon prensibi geçerli olmadığı için yükü belli bir değerin katları şeklinde gösterebiliriz.  $[\bar{N}_0] = \lambda [\bar{n}_0]$  gibi. Burada  $\lambda$  yük parametresidir. Stabilite denklemi,

$$\{[K] + \lambda([N] + [Q] + [Q]_j)\}\{d\} = 0 \quad (6.44)$$

şeklindedir. Bu denklem takımına problemin sınır şartları konur. Sistemin ilk konumunun kararsız hale gelmesi ve  $\{d\} = 0$  dan farklı kararlı bir başka denge konumunun bulunması için yukarıdaki denklem takımının katsayılar matrisi  $\Delta_k$  determinantının sıfır olması gerektirir. ( $\Delta$ ) determinantını sıfır yapan yük iki şekilde bulunur;

1. Bisection yöntemi ile  $P_{kr}$  yük hesaplanır. Şöyle ki, sıfırdan başlayarak  $P$  'ye artan değerler verilir ve  $\Delta_k$  determinantı hesaplanır. Pozitiften negatife geçtiği bölgede bu aralıklar sıklaştırılarak  $P_{kr}$  determinantını sıfır yapan  $P_{kr}$  değeri bulunmuş olur.

$$\Delta_k = 0 \rightarrow P_{kr}$$

2. Ardışık yaklaşım yöntemi ile  $P_{kr}$  hesaplanır.

## 7. ELİPTİK PARABOLİK KABUĞUN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE EĞİLME HESABI

### 7.1 Eliptik Parabolik Kabuk Denklemleri

#### 7.1.1 Deplasman – Deformasyon Bağlılıkları

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{r_x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{r_y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2w}{r_{xy}} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \beta_x^2 \\ \frac{1}{2} \beta_y^2 \\ (\beta_x \beta_y)^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

#### 7.1.2 Kesit Tesirleri

$$N_x = C(\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$N_y = C(\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$N_{xy} = C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}$$

$$M_x = -D.(k_x + \nu k_y)$$

$$M_y = -D.(k_y + \nu k_x)$$

$$M_{xy} = -(1-\nu)k_{xy}$$

(7.2)

$$V_x = -D(w''' + w''')$$

$$V_y = -D(w''' + w''')$$

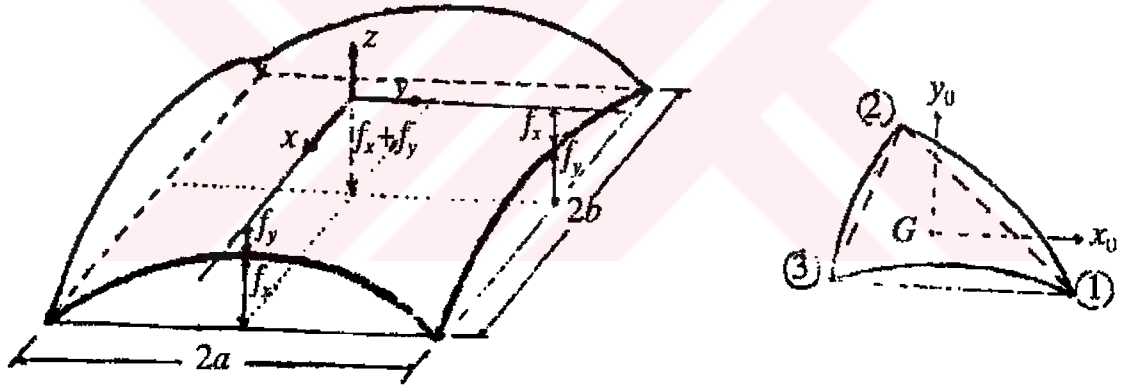
İzotrop, homojen, basık eliptik parabolik kabukta, elastisite matrisi açık formda;

$$[D] = \begin{bmatrix} C. \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & D. \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{r_x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; & t &= \frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; & s &= -\frac{1}{r_{xy}} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \\ r.t &= 0; & r &= \frac{2f_x}{a^2}; & t &= \frac{2f_y}{b^2}; \end{aligned} \quad (7.4)$$

Eksenler asal eksenlerdir. Dolayısıyla,  $s = 0$  'dır ( Köksal ve Köksal, 1986)

### 7.1.3 Deplasman Fonksiyonlarının u, v, w Tayini



Şekil 7.1 Eliptik parabolik kabuğun geometrik özellikleri

w Tayini:

$$\beta_x - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \dots b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (7.5)$$

$$\beta_y - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \dots b_7 + b_8 x + b_9 y + b_{10} x^2 + b_{11} xy + b_{12} y^2 = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Burada, gerekli integral işleminden sonra;

$$w = a_7 + a_8 x + a_9 y + a_{10} x^2 + a_{11} xy + a_{12} y^2 + a_{13} x^3 + a_{14} y^3 + a_{15} (x^2 y + xy^2) \quad (7.6)$$

elde edilir.

u, v Tayini:

Rijit cisim hareketinde elemanda boy değışimi olmaz.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - r.w = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - t.w = 0\end{aligned}\tag{7.7}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2.s.w = 0$$

Rijit cisim hareketine karşı gelen u, v, w daki terimler

$$\begin{aligned}u &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v &= a_4 + a_5x + a_6y\end{aligned}\tag{7.8}$$

$$w = a_7 + a_8x + a_9y$$

Bunları yukarıdaki yerlerine koyup gerekli integral işlemleri yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned}u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_7(rx + sy) + a_8\left(r\frac{x^2}{2} - t\frac{y^2}{2}\right) + a_9(rxy + sy^2), \\ v &= a_4 + a_5x + a_6y + a_7(ty + sx) + a_8(txy + sx^2) + a_9\left(t\frac{y^2}{2} - r\frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\tag{7.9}$$

elde edilir.

Şimdi  $s = 0$  için deplasman fonksiyonlarının eliptik parabolik kabuk için aldığı son durumu yazalım:

$$\begin{aligned}u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_7rx + a_8\left(r\frac{x^2}{2} - t\frac{y^2}{2}\right) + a_9rxy \\ v &= a_4 + a_5x + a_6y + a_7ty + a_8txy + a_9\left(t\frac{y^2}{2} - r\frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\tag{7.10}$$

$$w = a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}x^2 + a_{11}xy + a_{12}y^2 + a_{13}x^3 + a_{14}y^3 + a_{15}(x^2y + xy^2)$$

### 7.1.4 Deplasman Parametreleri

Üçgen basık eğrisel sonlu elemanda bilinmeyen deplasman parametreleri onbeş tanedir. Her düğüm noktasında beş adet bilinmeyen deplasman parametresi vardır. Elemanın herhangi bir (i) düğüm noktasında tarif edilen deplasman parametreleri şunlardır:

$$\{d\}^t = (u, v, w, \theta_x, \theta_y)_i \quad \{d\}^t_{ei} = \{ [d_1], [d_2], [d_3] \}_i \quad (7.11)$$

Düğüm noktasındaki dönmeler deplasman fonksiyonları cinsinden şöyle yazılabilir.

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (7.12)$$

$$\{d\}_{i(l=1,2,3)} = \begin{Bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \\ [d]_3 \end{Bmatrix}, \quad \{d\}_{i(l=1,2,3)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (7.13)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & rx & \frac{1}{2}(rx^2 - ty^2) & rxy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & ty & txy & \frac{1}{2}(ty^2 - rx^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & y^3 & x^2y + xy^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & 3y^2 & x^2 + 2xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 0 & y^2 + 2xy \end{bmatrix}$$

### 7.1.5 Bağ Matrisi

Koordinatlar;

#### 1. Eleman için;

1 nolu düğüm noktasında; ( 2a/3,- b/3 )

2 nolu düğüm noktasında; ( - a/3, 2b/3 )

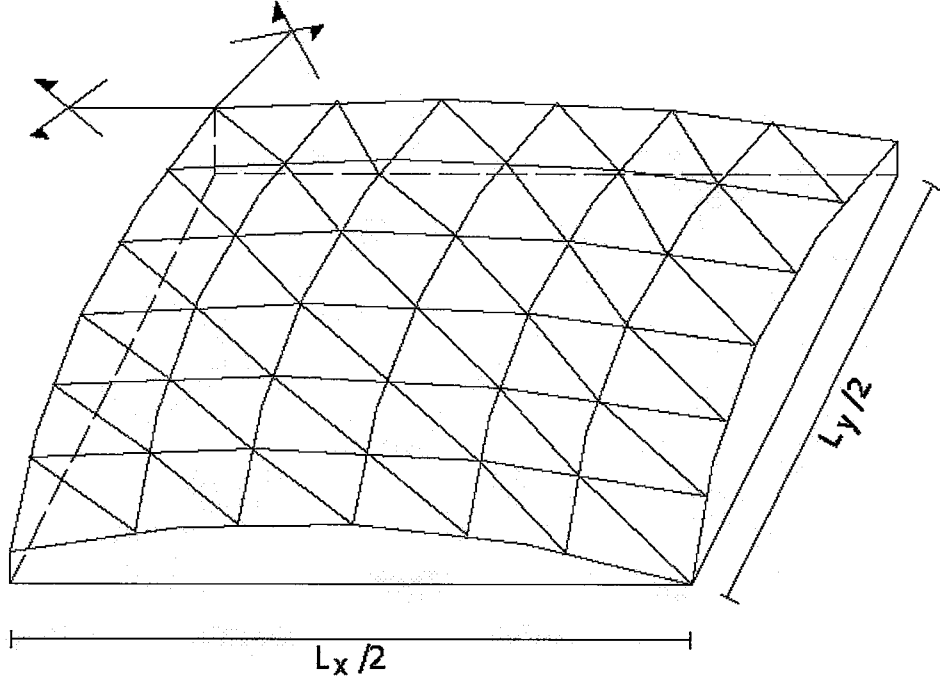
3 nolu düğüm noktasında;( - a/3,- b/3 )

#### 2. Eleman için;

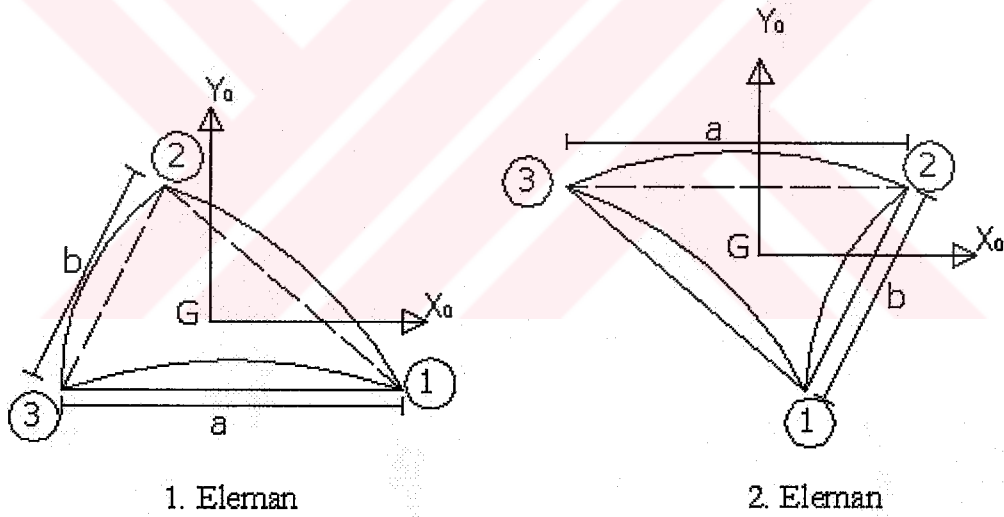
1 nolu düğüm noktasında; ( a/3,- 2b/3 )

2 nolu düğüm noktasında; ( a/3, b/3 )

3 nolu düğüm noktasında;( - 2a/3, b/3 )



Şekil 7.2 Sonlu elemanlar ağı



Şekil 7.3 Üçgenel basık elemanların geometrik özellikleri

Düğüm noktası deplasmanlarının sırası ve yönleri Şekil 7.2 de gösterildiği gibidir. Elemanın düğüm noktası deplasmanları  $\{d\}$  ile polinom sabitleri  $\{a\}$  arasındaki bağı veren  $[A]$  matrisi; elemanın düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin, deplasman fonksiyonları ve onların türevleri cinsinden yazılmış bileşenlerinde, düğüm noktası koordinatlarının yerine konması ile bulunur.

$$\{d\} = [A] \cdot \{a\} \quad (7.14)$$

Burada bilinmeyen  $\{a\}$  katsayıları hesaplanırsa;

$$\{a\} = [A]^{-1} \cdot \{d\} \quad (7.15)$$

$$[A]^{-1}=[B] \text{ diyelim} \quad (7.16)$$

$$\{a\}=[B].\{d\} \quad (7.17)$$

şeklinde elde edilir.

Eliptik parabolik kabuğun sonlu elemanlara ayrılmasında iki tip sonlu eleman çıkmıştır. Her tip için düğüm noktası koordinatları yerine konarak iki değişik eliptik parabolik sonlu eleman için iki bağ matrisi bulunur.

## 7.2 Toplam Potansiyel Enerjinin Birinci Varyasyonu

$$\partial V_{ei} = \partial V_{i,ei} + \partial V_{d,ei} = 0$$

$$\begin{aligned} \partial V_{ei} = C \iint \left( \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) dxdy \\ + \frac{D}{2} \iint \left[ (k_x^2 + k_y^2 + 2\nu k_x k_y + 2(1-\nu)k_{xy}^2) \right] dxdy - \iint p w dxdy \\ \partial V_{ei} = \{d\}^T \iint [B]^T [F]^T [D][F][B]\{d\} dxdy - \iint p [N_e]^T \{d\}^T dxdy \end{aligned} \quad (7.18)$$

## 7.3 Eleman Rijitlik Matrisinin Türev ve İntegral Matrisi

Eleman rijitlik ve yük matrislerini bulmak için, önce integral matrisini bulalım.  $\{\epsilon\}$  şekil değiştirme matrisini, deplasman fonksiyonlarının türevlerine ve  $\{a\}$  matrisinin değerlerine bağlı olarak şöyle ifade edilir.

$$\{\epsilon\}=[F].\{a\}=[F].[B].\{d\} \quad (7.19)$$

Burada  $[F]$  türev matrisidir.

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -rx^2 & -rxy & -ry^2 & -rx^3 & -ry^3 & -r(x^2y+y^2x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -tx^2 & -txy & -ty^2 & -tx^3 & -ty^3 & -t(x^2y+y^2x) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -6y & -2x & -2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4x+4y \end{bmatrix}$$

$$[H] = \int_0^a \int_0^b [F]^T [D][F] dxdy \quad (7.20)$$

$[H]$  elemanın integral matrisi olup terimleri hesaplanır.

#### 7.4 Elemanın Rijitlik Matrisi

(7.18) denkleminin birinci terimi eleman rijitlik matrisini vermektedir.

$$[K]_e = \iint [B]^T [F]^T [D] [F] [B] dx dy \quad (7.21)$$

Sonuç olarak eleman rijitlik matrisi;

$$[K]_e = [B]^T [H] [B] \quad (7.22)$$

olur.

#### 7.5 Elemanın Dış Yük Matrisi

Düşey yayılı sabit  $p$  yüküne maruz eliptik parabolik kabuk için (7.18) denkleminin ikinci terimi eleman dış yük matrisini vermektedir.

$$[Q_d]_e = \int_0^a \int_0^b p [N_e]^T dx dy \quad (7.23)$$

Burada  $[N_e] = [\psi(x, y)] [B]$  elemanın şekil fonksiyonudur.

$[\psi(x, y)]$  seçilen deplasman fonksiyonlarıdır ve

$$[\psi(x, y)] = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, y^3, x^2y + xy^2] \quad (7.24)$$

şeklinde ifade edilir.

$$[N_e] = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, y^3, x^2y + xy^2] [B] \quad (7.25)$$

halini alır.

#### 7.6 Elemanların Birleştirilmesi ve Sistemin Hesabı

Toplam potansiyel enerjinin birinci varyasyonunu eleman rijitlik matrisi formunda yazalım.

$$\delta V_{ei} = \{d\}^T ([K]_e \{d\} - [Q_d]_e) \quad (7.26)$$

Biriktirme yöntemi ile sistemin rijitlik matrisi içine eleman rijitlik matrisi ve sistemin dış yük matrisinin içine de eleman dış yük matrisi uygun şekilde yerleştirerek sisteme geçirelim.

$$[F_d]_s = [K]_s \{d\}_s \quad (7.27)$$

olur.

Yukarıdaki (7.27) denklem takımının çözümü ile sistemin düğüm noktalarının deplasman değerleri sayısal olarak belirlenir. Bu deplasman değerlerinden, kesit tesirleri değerleri de düğüm noktalarında sayısal olarak belirlenir.



## 8.SAYISAL ÖRNEKLER ve SONUÇLAR

### 8.1 Sonlu Farklar Yöntemi ile Eğilme Hesabı

#### Sayısal Örnek

Kabuk verileri:

$$f_x = 0,5 \text{ m}, \quad L_x = 20 \text{ m}, \quad E = 25.10^6 \text{ N/cm}^2,$$

$$f_y = 0,5 \text{ m}, \quad L_y = 10 \text{ m}, \quad C = E.h = 15.10^7 \text{ N/cm},$$

$$h = 0,06 \text{ m}, \quad p = 10 \text{ kN/m}^2, \quad D = E.h^3/12 = 45.10^7 \text{ Ncm}.$$

Sınır Koşulları;

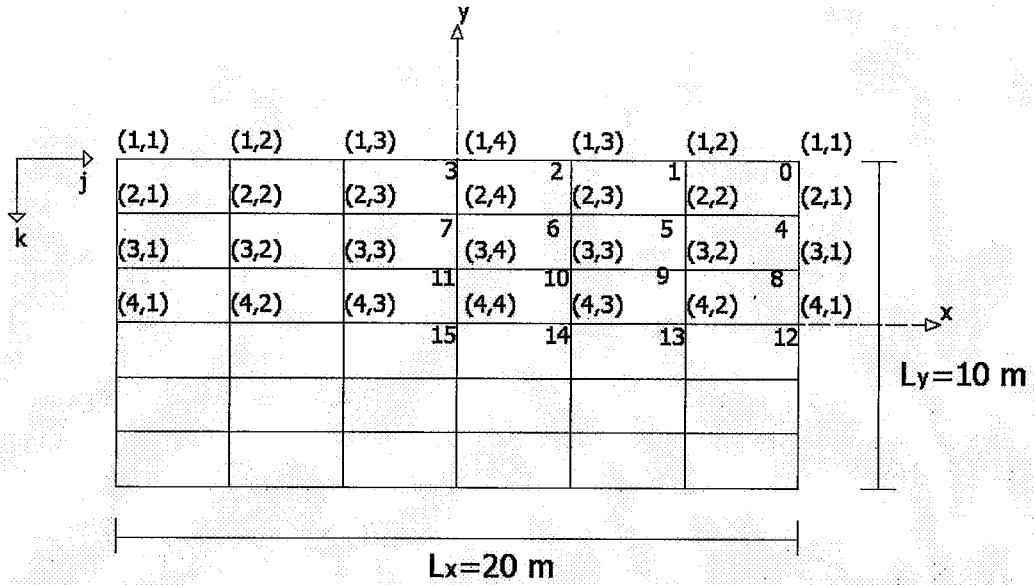
$$x = a \text{ için } w = w'' = 0 \dots \dots M_x = 0; \quad \Delta w = 0$$

$$F = \Delta F = 0 \dots \dots N_x = N_y = 0$$

Diğer sınır koşulu da aynıdır.

Betonarme kabuğun,  $p_0 = 10 \text{ kN/m}^2$ 'lik yük altında kesit zorları, bilgisayar programı (Ek1) yardımı ile çözülmüş ve aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur.

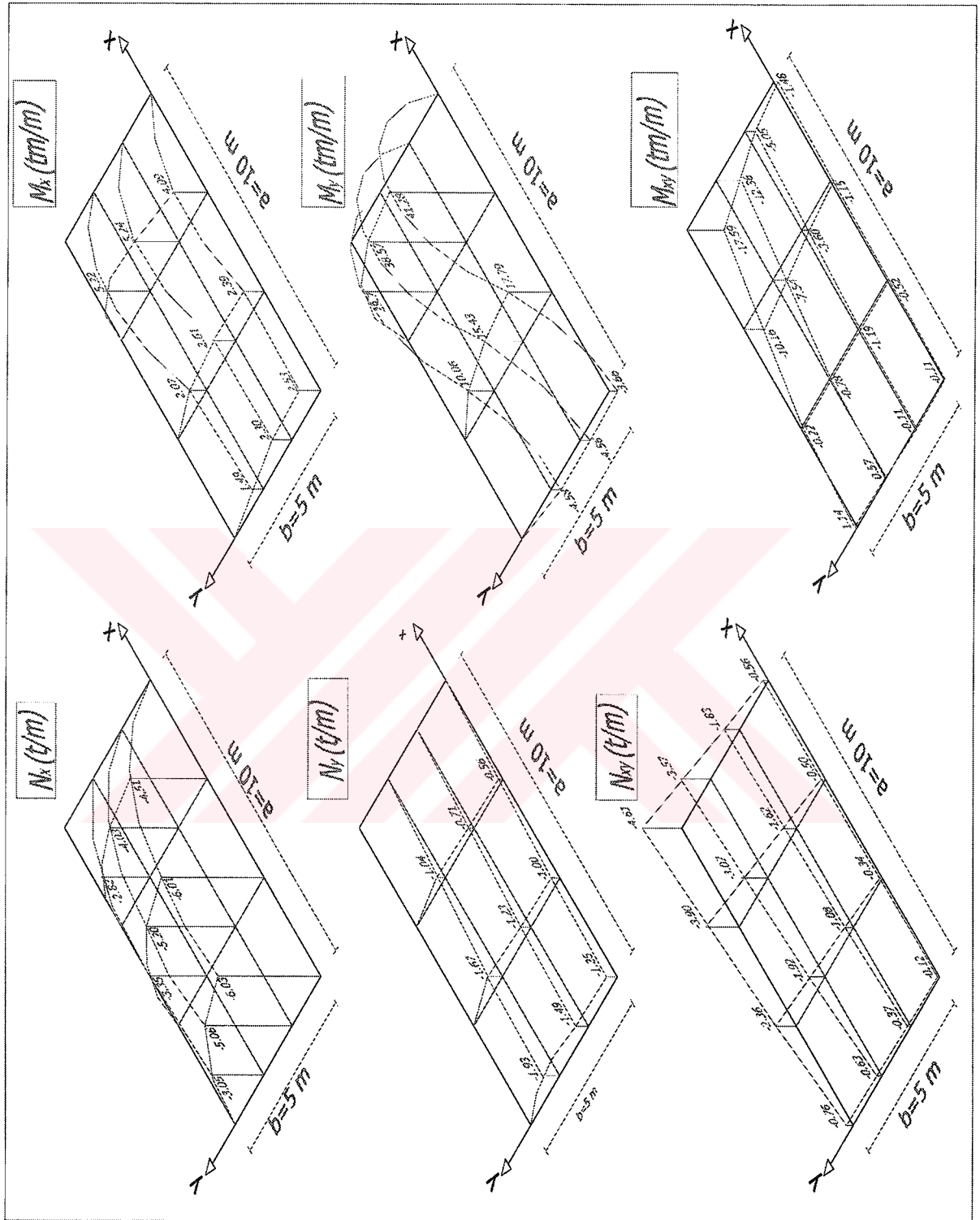
$M = N = 6$  olarak alınmıştır.



Şekil 8.1 Sonlu farklar ağı ve düğüm noktaları

Çizelge 8.1 Kesit tesirleri

| Kesit Tesirleri       | j/k |          | 2        | 3        | 4        |
|-----------------------|-----|----------|----------|----------|----------|
| $N_x$<br><br>kN/m     | 1   | 0        | 0        | 0        | 0        |
|                       | 2   | 0        | -282.334 | -335.178 | -304.767 |
|                       | 3   | 0        | -403.49  | -519.986 | -506.441 |
|                       | 4   | 0        | -451.183 | -601.303 | -602.936 |
| $N_y$<br><br>kN/m     | 1   | 0        | 0        | 0        | 0        |
|                       | 2   | 0        | -103.66  | -167.026 | -192.799 |
|                       | 3   | 0        | -70.533  | -122.7   | -148.996 |
|                       | 4   | 0        | -56.376  | -100.829 | -124.953 |
| $N_{xy}$<br><br>kN/m  | 1   | -461.14  | -390.556 | -236.178 | -76.191  |
|                       | 2   | -357.479 | -307.043 | -191.608 | -63.305  |
|                       | 3   | -183.286 | -162.179 | -107.808 | -37.271  |
|                       | 4   | -56.376  | -50.414  | -34.288  | -12.061  |
| $M_x$<br><br>N m/m    | 1   | 0        | 0        | 0        | 0        |
|                       | 2   | 0        | 522.71   | 207.844  | 148.958  |
|                       | 3   | 0        | 524.82   | 261.44   | 230.255  |
|                       | 4   | 0        | 409.674  | 239.432  | 252.787  |
| $M_y$<br><br>N m/m    | 1   | 0        | 0        | 0        | 0        |
|                       | 2   | 0        | 2970.03  | 1006.5   | -458.486 |
|                       | 3   | 0        | 3857.67  | 1543.97  | -456.388 |
|                       | 4   | 0        | 4128.32  | 1779.03  | -366.258 |
| $M_{xy}$<br><br>N m/m | 1   | -1759.02 | -1016.51 | -22.381  | 114.621  |
|                       | 2   | -1236.31 | -754.105 | -78.899  | 57.048   |
|                       | 3   | -505.76  | -360.975 | -119.623 | -11.528  |
|                       | 4   | -148.958 | -115.127 | -51.914  | -11.266  |



Şekil 8.2 Kesit tesirleri diyagramları

## 8.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Eğilme Hesabı

### Sayısal Örnek:

Kalkan duvarlara basit mesnetli, mesnet kabuk yüzeyine dik konumda, düşey yayılı sabit  $p_0 = 10 \text{ kN/m}^2$ 'lik yüke maruz, eliptik parabolik kabuğun eğimli çözümü bilgisayar programı (Ek2) yardımı ile yapılmış ve aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur.

Kabuk verileri:

$$f_x = 0,5 \text{ m},$$

$$f_y = 0,5 \text{ m}$$

$$L_x = 20 \text{ m},$$

$$L_y = 10 \text{ m},$$

$$h = 0,06 \text{ m},$$

$$p = 10 \text{ kN/m}^2,$$

$$E = 28,5 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2,$$

$$\nu = 0,$$

$$a = L_x/2,$$

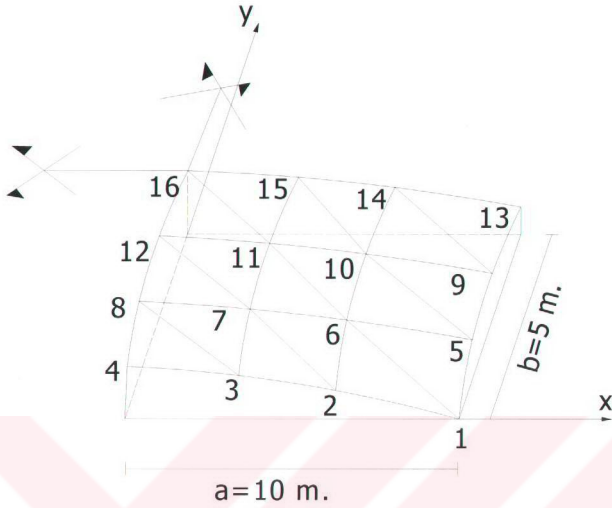
$$b = L_y/2.$$

Sınır Koşulları:

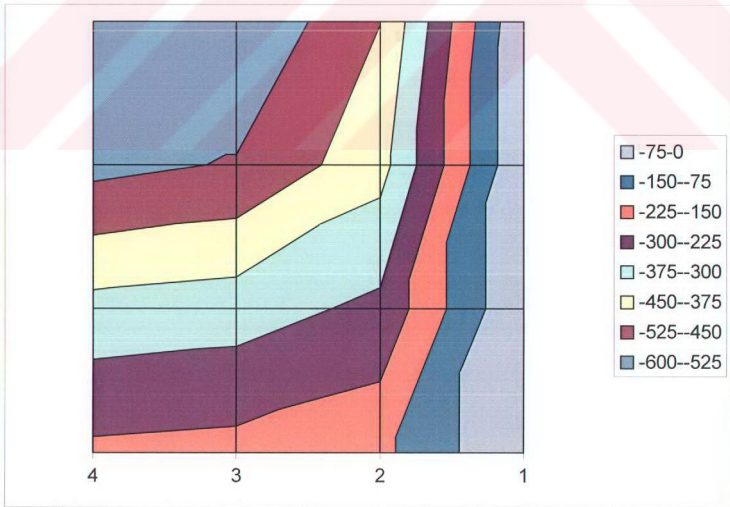
$$x = \mp a \quad v = w = u' = w'' = 0$$

$$y = \mp b \quad u = w = \dot{v} = \ddot{w} = 0$$

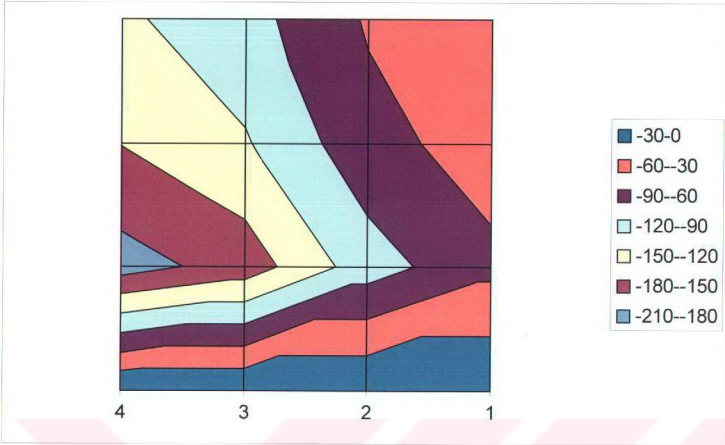
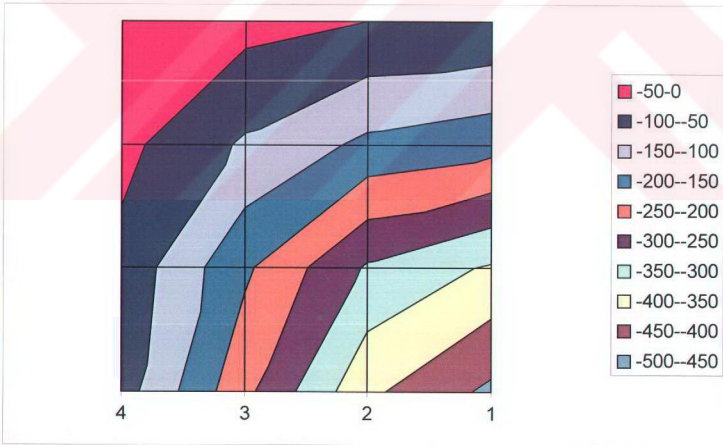
$M = N = 3$  olarak alınmıştır.

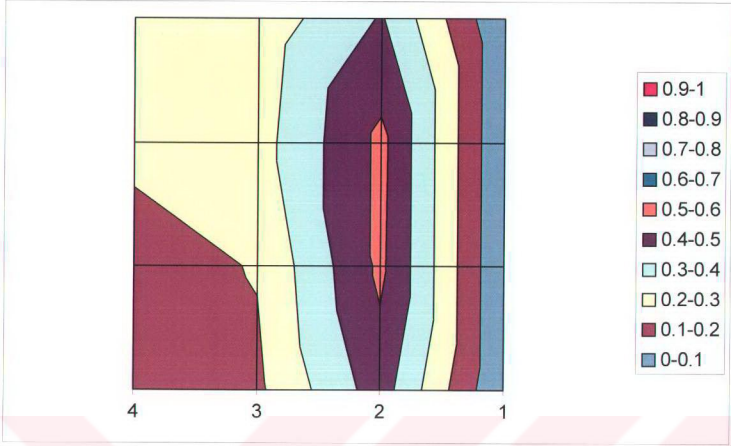


Şekil 8.3 Sonlu eleman ağı ve düğüm noktaları

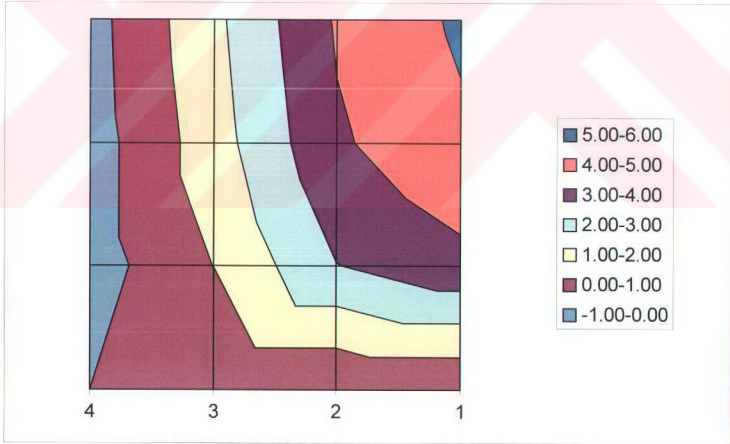


Şekil 8.4  $N_x$  Diyagramı (kN/m)

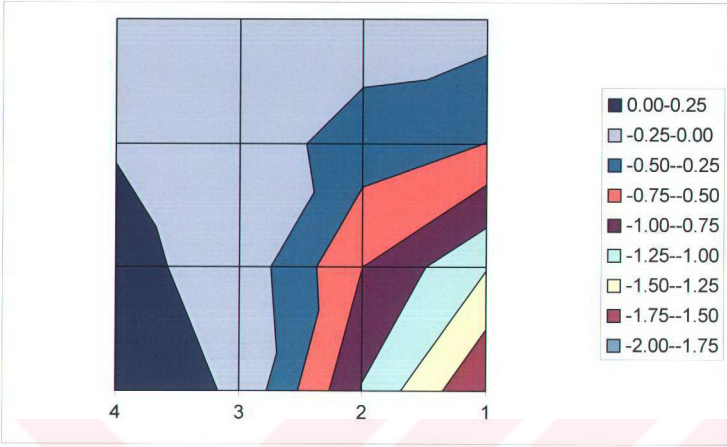
Şekil 8.5  $N_y$  Diyagramı (kN/m)Şekil 8.6  $N_{xy}$  Diyagramı (kN/m)



Şekil 8.7  $M_x$  Diyagramı (kNm/m)



Şekil 8.8  $M_y$  Diyagramı (kNm/m)



Şekil 8.9  $M_{xy}$  Diyagramı (kNm/m)

### 8.3 SONUÇLAR

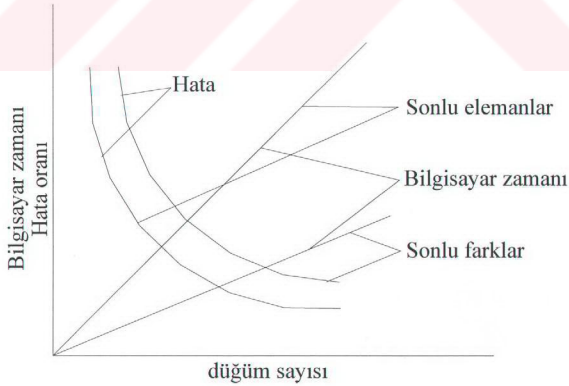
Eliptik parabolik kabuğun eğilme hesabı;

1. Basık üçgen sonlu eleman kullanılarak, sonlu elemanlar yöntemiyle yapılmıştır. Denge probleminin çözümü toplam potansiyel enerjinin birinci varyasyonundan yapıldıktan sonra, sayısal çözümler verilmiştir.
2. Sonlu farklar yöntemiyle çözüm için, kabuk yüzeyi planda dikdörtgen bir ağ şebekesi ile düzenlenip Wlassow denklemleri, düğüm noktalarında bir sistem dahilinde yazılarak, elde edilir. Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen lineer denklemler sistemi bilgisayar programı yardımıyla çözümlenerek yeterli hassasiyette sonuçlar bulunmuştur.

İki yöntemle bulunan sonuçların karşılaştırılması aşağıda verilmiştir:

Zaman ve hata bakımından sonlu elemanlar yöntemi ile sonlu farklar yönteminin karşılaştırılması Şekil 8.10 da verilmiştir. Sonlu elemanlarda hesap için harcanan zaman daha fazla, hata oranı ise daha azdır. Sonlu farklarda ise hesap için harcanan zaman daha az, fakat hata oranı daha fazladır.

Kesin değerlere sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan sonuçlar üstten yaklaşmakta, buna karşılık sonlu farklar yöntemi ile bulunan sonuçlar alttan yaklaşmaktadır.



Şekil 8.10 Zaman ve hata bakımından sonlu elemanlar ile sonlu farklar yönteminin karşılaştırılması

## KAYNAKLAR

Aktaş, Z., (1972), Sayısal Metotlarla Kabukların Çözümü, Ankara.

Berktaş, İ., (1992), Plak Teorisi ve Uygulamaları, Yıldız Üniversitesi Yayın Müdürlüğü, İstanbul.

Brush, O., Almroth, O., (1975), Buckling of Bars, Plates and Shells, Mc Graw-Hill, New York.

Köksal, E., Köksal, T., (1986), "Eliptik Paraboloid Kabukların Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Eğilme ve Stabilité Analizi", YTÜ Dergisi, 41-50, İstanbul.

Köksal, E., Köksal, T., (1996), Çubuk Plak Kabuk Stabilitesi, YTÜ Matbaası, İstanbul.

Köksal, T., (1980), Boyuna ve Dairesel Ayrık Nervürlerle Rijitleştirilmiş Silindirik Kabukların Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Stabilité Hesabı, Doktora Tezi, Yıldız Üniversitesi Yayın Müdürlüğü, İstanbul.

Köksal, T., Köksal, E., (1986), "Boyuna ve Dairesel Nervürlerle Rijitleştirilmiş Konik Kabuğun Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Eğilme Hesabı", YTÜ Dergisi, 51-66, İstanbul.

Köksal, E., (1975), Silindirik Kabukların Başlangıç Değerleri Metodları ile Hesabı, Doktora Tezi, İTÜ Mimarlık Fakültesi Baskı Atölyesi, İstanbul.

Köksal, T., (1994), "The Finite Differences Analysis of Elliptic, Hyperbolic and Revolution Paraboloid Shells", IASS Vol:31, no:3, 173-187, April, Madrid, Spain.

Köksal, T., (1996), Sonlu Elemanlar Yöntemi, YTÜ Matbaası, İstanbul.

Köksal, E., Köksal, M.K., (2003), Kabuk ve Plakların Statik Stabilité ve Dinamik Analizi Örnek Çözümler ve Tablolar, Literatür Yayınları, İstanbul.

Kraus, H., (1972), Thin Elastic Shells, State University of New York at Stony Brook John, Wiley Sydney, New York.

Novozhilov, V.V., (1970), Thin Shell Theory, Noordhoff Publishing, New York.

Timoshenko, Woinowsky-Krieger, (1959), Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill, New York.

Wlassow, W., Z., (1959), İnce Cidarlı Elastik Çubuklar, Moskova.

Zienkiewicz, O.C., (1971), The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw-Hill, New York.

**EKLER**

- Ek 1 Eliptik Parabolik Kabuğun Sonlu Farklar Yöntemi ile Eğilme Hesabı İçin Microsoft Visual C++ 6.0 Platformunda Yazılan Bilgisayar Programı
- Ek 2 Eliptik Parabolik Kabuğun Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Eğilme Hesabı İçin Microsoft Visual C++ 6.0 Platformunda Yazılan Bilgisayar Programı



**Ek 1   Eliptik Parabolik Kabuğun Sonlu Farklar Yöntemi ile Eğilme Hesabı İçin  
Microsoft Visual C++ 6.0 Platformunda Yazılan Bilgisayar Programı**

// thesis.cpp code

```
#include "stdafx.h"
#include <iostream.h>
#include <math.h>
#include <iomanip.h>

const float PI=3.14159264F;

void main()
{
    int MB;
    int NB;
    double FX = 0.;
    double FY = 0.;
    double T = 0.;
    double LX = 0.;
    double LY = 0.;
    double HL = 0.;
    double H = 0.;
    double L = 0.;
    double PO = 0.;

    cout<<"MB:";
    cin>>MB;

    cout<<"NB:";
    cin>>NB;

    cout<<"FX:";
    cin>>FX;

    cout<<"FY:";
    cin>>FY;

    cout<<"T:";
    cin>>T;

    cout<<"LX:";
    cin>>LX;
```

```
cout<<"LY:";
cin>>LY;
```

```
cout<<"PO:";
cin>>PO;
```

```
H=LX/(MB+1);
L=LY/(NB+1);
HL=H/L;
FX=8*FX;
FY=8*FY;
```

```
int SNB;
int SMB;
```

```
SNB=NB;
SMB=MB;
```

```
double SNA;
double SMA;
```

```
SNA = PI / (SNB+1);
SMA = PI / (SMB+1);
```

```
int SJ;
int SK;
int SM;
int SN;
int M;
int N;
int J;
int K;
double SecondSum;
double FirstSum;
double P[20][20];
double PMN;
```

```
for( M=1; M<=MB; M=M+2) //FirstDimOfMatrixElement
{
    for( N=1;N<=NB;N=N+2) //SecondDimOfMatrixElement
    {
        SM = M;
        SN = N;
        FirstSum = 0.;
```

```

for(J=1;J<=MB;J++)
{
    SJ = J;

    for(K=1;K<=NB;K++)
    {
        SK = K;
        FirstSum += sin(SMA*SM*SJ)*sin(SNA*SN*SK);
        SecondSum = 0.;
        SecondSum += FirstSum;
        PMN = SecondSum ;
        P[M][N] = PMN;
    }
}

//      cout<<"P"<< "[" << SM << "," << SN << "]" " << "----> " << PMN << "\n";
}

}

double Yuk;
double APD;
double Yuk1[20][20];

APD=4/double ((SMB+1)*(SNB+1));

for (M=1;M<=MB;M=M+2)
{

    for (N=1;N<=NB;N=N+2)
    {

        Yuk = APD * P[M][N];
        Yuk1[M][N] = Yuk;

//      cout<<"Yuk"<< "[" << M << "," << N << "]" " << "----> " << Yuk << "\n";
    }
}

```

```

double RO;
double A;
double TOO;
double B;
double FAB;
double AB;
double FMN;
double FMN1[20][20];

for (M=1;M<=MB;M=M+2)
{
    for (N=1;N<=NB;N=N+2)
    {
        RO = PI / double (SMB +1 );
        SM = M;
        RO = RO * SM;
        A= cos(RO) - 1;
        TOO = PI / double (SNB +1 );
        SN = N;
        TOO = TOO * SN;
        B= cos(TOO) - 1;
        FAB = 2 * FX * B / pow((SMB +1),2) + 2 * FY * A / pow((SNB+1),2);
        AB = 2 * A + 2 * B * HL * HL;
        FMN = (-1.) * HL * HL * (FAB / ( ( 1.0 / 12.0 ) * T * T * pow(AB,4) + FAB
* FAB * pow(HL,4)) ) * Yuk1[M][N];
        FMN1[M][N] = FMN;

        //      cout<<"FMN"<< "[" << M << ", " << N << "]" << "----> " << FMN << "\n";
    }
}

double SecondSumFT;
double FirstSumFT;
double SRO;
double STO;
double FTJK;
double FT[20][20];

int MA = int (MB / 2) + 2;
int NA = int (NB / 2) + 2;

for (J=1;J<=MA;J++)
{
    for (int K=1;K<=NA;K++)
    {

```

```

    SJ = J;
    SK = K;

    FirstSumFT = 0.;

    for (int M=1;M<=MB;M=M+2)
    {
        SM = M;
        RO = PI * SM / (SMB +1 ) * SJ;
        SRO = sin(RO);

        for (int N=1;N<=NB;N=N+2)
        {
            SN = N;
            TOO = PI * SN / (SNB +1) * SK;
            STO = sin(TOO);

            FirstSumFT += FMN1[M][N] * SRO * STO;
            SecondSumFT = 0.;
            SecondSumFT += FirstSumFT;
            FTJK = SecondSumFT ;
            FT[J][K] = FTJK;
        }
    }

    //      cout<<"FT"<< "[" << J << "," << K << "]" " << "----> " << FTJK << "\n";
    }

    int NC;
    int MC;
    int MB3;
    int NB3;
    int JA;
    int KA;
    double FSonuc[20][20];
    double NKuvvet[20][20];
    double F[20][20];
    double NX;
    double NY;
    double NXY;

```

```

NA = NB / 2 + 1;
MA = MB / 2 + 1;
NC = NB / 2;
MC = MB / 2;

for (J=1;J<=NC;J++)
{
    FT[J][NA] = FT[J][NC];
}

for (J=1;J<=NA;J++)
{
    FT[NA][J] = FT[NC][J];
}

MB3 = MB / 2 + 3;
NB3 = NB / 2 + 3;

for (J=1;J<=MB3;J++)
{
    for (K=1;K<=NB3;K++)
    {
        F[J][K] = 0;
    }
}

for (J=1;J<=NA;J++)
{
    JA = J + 2;

    for (K=1;K<=MA;K++)
    {
        KA = K + 2;
        F[JA][KA] = FT[J][K];
    }
}

for (K=3;K<=MB3;K++)
    F[1][K] = - F[3][K];

    for (J=3;J<=NB3;J++)
        F[J][1] = - F[J][3];

```

```
F[1][1]=F[3][3];
```

```
NA = NB / 2 + 2;
```

```
MA = MB / 2 + 2;
```

```
AB = HL * HL ;
```

```
for (J=2;J<=MA;J++)
```

```
{
```

```
    for (K=2;K<=NA;K++)
```

```
    {
```

```
        FTJK = AB * (F[J][K-1] - (2 * F[J][K]) + F[J][K+1]);
```

```
        FSonuc[J][K]=FTJK;
```

```
        NX = PO * pow(H,2) * FSonuc[J][K];
```

```
        NKuvvet[J][K] = NX;
```

```
        //cout<<"FNxT"<< "[" << J-1 << "," << K-1 << "]" " << "----> " << FTJK << "\n";
```

```
        cout<<"NX"<< "[" << J-1 << "," << K-1 << "]" " << "----> " << NX << "\n";
```

```
    }
```

```
}
```

```
AB = 1.0;
```

```
for (J=2;J<=MA;J++)
```

```
{
```

```
    for (K=2;K<=NA;K++)
```

```
    {
```

```
        FTJK = AB * (F[J-1][K] - (2 * F[J][K]) + F[J+1][K]);
```

```
        FSonuc[J][K]=FTJK;
```

```
        NY = PO * pow(H,2) * FSonuc[J][K];
```

```
        NKuvvet[J][K] = NY;
```

```
        //cout<<"FnyT"<< "[" << J-1 << "," << K-1 << "]" " << "----> " << FTJK << "\n";
```

```
        cout<<"NY"<< "[" << J-1 << "," << K-1 << "]" " << "----> " << NY << "\n";
```

```
    }
```

```
}
```

```
AB = (0.25) * HL;
```

```
for (J=2;J<=MA;J++)
```

```
{
```

```
    for (K=2;K<=NA;K++)
```

```
    {
```

```
        FTJK = AB * (F[J-1][K-1] + F[J+1][K+1] - F[J-1][K+1] - F[J+1][K-1]);
```

```
        FSonuc[J][K]=FTJK;
```

```

        NXY = (-1.0) * PO * pow(H,2) * FSonuc[J][K];
        NKuvvet[J][K] = NXY;
        //cout<<"FnxyT"<<"[" << J-1 << "," << K-1 << "]" <<"---->" << FTJK << "\n";
        cout<<"NXY"<<"[" << J-1 << "," << K-1 << "]" <<"---->" << NXY << "\n";
    }

}

double WMN;
double FirstSumWT;
double SecondSumWT;
double WTJK;
double WT[20][20];
double W[20][20];
double WMN1[20][20];
double MMoment[20][20];
double MX;
double MY;
double MXY;

SNB = MB;
SNB = NB;

for (M=1;M<=MB;M=M+2)
{
    for (N=1;N<=NB;N=N+2)
    {
        RO = PI / double (SMB +1 );
        SM = M;
        RO = RO * SM;
        A= cos(RO) - 1;
        TOO = PI / double (SNB +1 );
        SN = N;
        TOO = TOO * SN;
        B= cos(TOO) - 1;
        FAB = 2 * FX * B / pow((SMB +1),2) + 2 * FY * A / pow((SNB+1),2);
        AB = 2 * A + 2 * B * HL * HL;
        WMN=AB * AB / ( ((1.0 / 12.0) * T * T * pow(AB,4)) + FAB * FAB *
        pow(HL,4)) * Yuk1[M][N];
        WMN1[M][N] = WMN;
    }
}

```

```

SMB = MB;
SNB = NB;

MA = MB / 2 + 2;
NA = NB / 2 + 2;

for (J=1;J<=MA;J++)
{
    SJ = J;

    for (K=1;K<=NA;K++)
    {
        SK = K;
        FirstSumWT=0.;

        for (M=1;M<=MB;M=M+2)
        {
            SM = M;
            RO = PI * SM / (SMB +1 ) * SJ;
            SRO = sin(RO);

            for (int N=1;N<=NB;N=N+2)
            {
                SN = N;
                TOO = PI * SN / (SNB +1) * SK;
                STO = sin(TOO);

                FirstSumWT += WMN1[M][N] * SRO * STO;
                SecondSumWT = 0.;
                SecondSumWT += FirstSumWT;
                WTJK = SecondSumWT ;
                WT[J][K] = WTJK;
            }
        }

        //cout<<"WT"<<"[" << J << "," << K << "]" " << "----> " << WTJK << "\n";
    }
}

NA = NB / 2 + 1;
MA = MB / 2 + 1;
NC = NB / 2;
MC = MB / 2;

for (J=1;J<=NC;J++)

```

```

    WT[J][NA] = WT[J][NC];

for (J=1;J<=NA;J++)
    WT[NA][J] = WT[NC][J];

MB3 = MB / 2 + 3;
NB3 = NB / 2 + 3;

for (J=1;J<=MB3;J++)
    for (K=1;K<=NB3;K++)
        W[J][K] = 0;

for (J=1;J<=NA;J++)
{
    JA = J + 2;

    for (K=1;K<=MA;K++)
    {
        KA = K + 2;
        W[JA][KA]=WT[J][K];
    }
}

for (K=3;K<=MB3;K++)
{
    W[1][K]= - W[3][K];
}

for (J=3;J<=NB3;J++)
{
    W[J][1]= - W[J][3];
}

W[1][1] = W[3][3];

NA = NB / 2 + 2;
MA = MB / 2 + 2;

```

```
AB = (-1. / 12.);
```

```
for (K=2;K<=NA;K++)
    for (J=2;J<=MA;J++)
    {
        WTJK = AB * ( W[J-1][K] - (2 * W[J][K]) + W[J+1][K]);
        WT[J][K]=WTJK;
        MX = PO * pow(H,2) * pow(T,2) * WT[J][K];
        MMoment[J][K] = MX;
        //cout<<"WTX"<< "[" << J-1 << "," << K-1 << "]" " << "----> " << WTJK <<
"\n";
        cout<<"MX"<< "[" << J-1 << "," << K-1 << "]" " << "----> " << MX << "\n";
    }
```

```
AB = (-1.0) * (1.0 / 12.0 ) * HL * HL;
```

```
for (J=2;J<=MA;J++)
    for (K=2;K<=NA;K++)
    {
        WTJK= AB * ( W[J][K-1] - (2 * W[J][K]) + W[J][K+1]);
        WT[J][K]=WTJK ;
        MY = PO * pow(H,2) * pow(T,2) * WT[J][K];
        MMoment[J][K] = MY;
        //cout<<"WTY"<< "[" << J-1 << "," << K-1 << "]" " << "----> " << WTJK <<
"\n";
        cout<<"MY"<< "[" << J-1 << "," << K-1 << "]" " << "----> " << MY << "\n";
    }
```

```
AB = HL / 48;
```

```
for (J=2;J<=MA;J++)
    for (K=2;K<=NA;K++)
    {
        WTJK=AB * (W[J-1][K-1] + W[J+1][K+1] - W[J-1][K+1] - W[J+1][K-1]);
        WT[J][K]=WTJK;
        MXY = (-1.0) * PO * pow(H,2) * pow(T,2) * WT[J][K];
        MMoment[J][K] = MXY;
        //cout<<"WTXY"<< "[" << J-1 << "," << K-1 << "]" " << "----> " << WTJK
<< "\n";
        cout<<"MXY"<< "[" << J-1 << "," << K-1 << "]" " << "----> " << MXY <<
"\n";
    }
}
```

**Ek 2 Eliptik Parabolik Kabuğun Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Eğilme Hesabı İçin  
Microsoft Visual C++ 6.0 Platformunda Yazılan Bilgisayar Programı**

//function.h code

#pragma once

```
#define BagCol          15
#define BagRow          15
#define IntegralCol      15
#define IntegralRow      15
#define YukCol           1
#define YukRow           15
#define RijitRow         15
#define RijitCol          15
#define TurevRow          6
#define TurevCol          15
#define ElasticityRow     6
#define ElasticityCol     6
#define X_DOWN_AXIS      0
#define X_UP_AXIS         1
#define Y_LEFT_AXIS       2
#define Y_RIGHT_AXIS       3

#define NumberOfNodeParams 5
#define NumberOfElementNodes 3
#define NumberOfParams      ((NumberOfElementNodes) * (NumberOfNodeParams))

#define FirstIBE(a)          InsertFirstBagElement(a)
#define SecondIBE(a)         InsertSecondBagElement(a)
#define IIE(a)               InsertIntegralElement(a)
#define FirstIYE(a)          InsertFirstYukElement(a)
#define SecondIYE(a)         InsertSecondYukElement(a)
#define ITE(a,b,c)           InsertTurevElement(a,b,c)
#define IEE(a)               InsertElasticityElement(a)

#define FindNodeIndex(m, i, j) (((m)*(i)) + (j))
#define FindOddElementIndex(m, i, j) ((2)*((m)*(i) + (j)))
#define FindEvenElementIndex(m, i, j) ((2)*((m)*(i) + (j)) + (1))

template <class type>
```

```
type GetValue(const char* paramName)
```

```
{
    type value;
    cout << paramName;
    cin >> value;
    return(value);
}
```

```
CString DoubleToString(double number)
```

```
{
    CString str;
    str.Format("%f", number);
    return(str);
}
```

```
CString IntegerToString(int number)
```

```
{
    CString str;
    str.Format("%d", number);
    return(str);
}
```

```
// project.cpp code
```

```
#include "stdafx.h"
#include "functions.h"
#include "math.h"
#include "array.h"
#include "matrix.h"
```

```
#ifndef _NO_NAMESPACE
using namespace std;
using namespace math;
#define STD std
#else
#define STD
#endif
```

```
#ifndef _NO_EXCEPTION
# define TRYBEGIN() try {
# define CATCHERROR() } catch (const STD::exception& e) { \
    cerr << "Error: " << e.what() << endl; }
#else
# define TRYBEGIN()
# define CATCHERROR()
```

```
#endif
```

```
matrix<double> FirstBagMatris(BagRow,BagCol);
matrix<double> SecondBagMatris(BagRow,BagCol);
matrix<double> IntegralMatris(IntegralRow,IntegralCol);
matrix<double> FirstYukMatris(YukRow,YukCol);
matrix<double> SecondYukMatris(YukRow,YukCol);
matrix<double> FirstRijitlikMatris(RijitRow,RijitCol);
matrix<double> SecondRijitlikMatris(RijitRow,RijitCol);
matrix<double> SytemRigidityMatrix;
matrix<double> DisplacementOfNodesMatrix;
matrix<double> SystemLoadMatrix;
matrix<double> TurevMatrix(TurevRow,TurevCol);
matrix<double> ElasticityMatrix(6,6);
matrix<double> RealDisplacementOfNodesMatrix;
matrix<double> SystemRigidityMatrix;
double d;
typedef CITArray<int> IntegerArray;
```

```
IntegerArray SubSystemArray;
CArray<IntegerArray, IntegerArray> SystemArray;
CArray<IntegerArray, IntegerArray> NodesToNodeParamIndex;
CArray<IntegerArray, IntegerArray> ElementsToNodes;
CITArray<int> BoundryNodes;
```

```
int MB = 0;
int NB = 0;
int NumberOfNodes = 0;
int NumberOfElements = 0;
int RigidityDimention = 0;
```

```
typedef matrix<double> doublematrix;
```

```
struct NodeDeformationMatrixParams
{
    int m_NodeID;
    matrix<double> m_DeformationMatrix;
};
```

```
typedef CITArray<NodeDeformationMatrixParams*> NodeDeformationMatrixParamsArray;
```

```
void InsertFirstBagElement(double value)
{
```

```

static int row = 0;
static int column = 0;

if (!((column)%BagCol) && column)
{
    column = 0;
    row++;
}

FirstBagMatris(row,column++) = value;
}

void InsertSecondBagElement(double value)
{
    static int row = 0;
    static int column = 0;

    if (!((column)%BagCol) && column)
    {
        column = 0;
        row++;
    }

    SecondBagMatris(row,column++) = value;
}

void InsertElasticityElement(double value)
{
    static int row = 0;
    static int column = 0;

    if (!((column)%ElasticityCol) && column)
    {
        column = 0;
        row++;
    }

    ElasticityMatrix(row,column++) = value;
}

void InsertTurevElement(double value, int row, int col)
{
    TurevMatrix(row,col) = value;
}

```

```
void InsertIntegralElement(double value)
```

```
{
    static int row = 0;
    static int column = 0;

    if (!((column)%IntegralCol) && column)
    {
        column = 0;
        row++;
    }

    IntegralMatris(row,column++) = value;
}
```

```
void InsertFirstYukElement(double value)
```

```
{
    static int row = 0;
    int column = 0;
    FirstYukMatris(row++, column) = value;
}
```

```
void InsertSecondYukElement(double value)
```

```
{
    static int row = 0;
    int column = 0;

    SecondYukMatris(row++, column) = value;
}
```

```
void PrepareFirstBagMatrix(double a, double b, double r, double t)
```

```
{
    FirstIBE(1.0);FirstIBE(2.0/3.0*a);FirstIBE(-b/3.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);
    FirstIBE(0.0);FirstIBE(2.0/3.0*r*a);FirstIBE(2.0/9.0*r*a*a-t*b*b/18.0);
    FirstIBE(-2.0/9.0*r*a*b);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);
    FirstIBE(0.0); FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);

    FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0); FirstIBE(0.0); FirstIBE(1.0);FirstIBE(2.0/3.0*a);
    FirstIBE(-b/3.0);FirstIBE(-t*b/3.0);FirstIBE(-2.0/9.0*t*a*b);
    FirstIBE(t*b*b/18.0-2.0/9.0*r*a*a);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);
    FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);

    FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);
}
```

FirstIBE(0.0);FirstIBE(1.0);FirstIBE(2.0/3.0\*a);FirstIBE(-b/3.0);  
 FirstIBE(4.0/9.0\*a\*a);FirstIBE(-2.0/9.0\*a\*b);FirstIBE(b\*b/9.0);  
 FirstIBE(8.0/27.0\*a\*a\*a);FirstIBE(-b\*b\*b/27.0);FirstIBE(-4.0/27.0\*a\*a\*b+2.0/27.0\*b\*b\*a);

FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(1.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(2.0/3.0\*a);  
 FirstIBE(-2.0/3.0\*b);FirstIBE(0.0);FirstIBE(b\*b/3.0);FirstIBE(4.0/9.0\*a\*a-4.0/9.0\*a\*b);

FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(1.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(4.0/3.0\*a);FirstIBE(-b/3.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(4.0/3.0\*a\*a);FirstIBE(0.0);FirstIBE(b\*b/9.0-4.0/9.0\*a\*b);

FirstIBE(1.0);FirstIBE(-a/3.0);FirstIBE(2.0/3.0\*b);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(-r\*a/3.0);FirstIBE(r\*a\*a/18.0-2.0/9.0\*t\*b\*b);  
 FirstIBE(-2.0/9.0\*r\*a\*b);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);

FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(1.0);FirstIBE(-a/3.0);  
 FirstIBE(2.0/3.0\*b);FirstIBE(2.0/3.0\*t\*b);FirstIBE(-2.0/9.0\*t\*a\*b);  
 FirstIBE(2.0/9.0\*t\*b\*b-r\*a\*a/18.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);

FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);  
 FirstIBE(1.0);FirstIBE(-a/3.0);FirstIBE(2.0/3.0\*b);FirstIBE(a\*a/9.0);  
 FirstIBE(-2.0/9.0\*a\*b);FirstIBE(4.0/9.0\*b\*b);FirstIBE(-a\*a\*a/27.0);  
 FirstIBE(8.0/27.0\*b\*b\*b);FirstIBE(2.0/27.0\*a\*a\*b-4.0/27.0\*b\*b\*a);

FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(1.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(-a/3.0);  
 FirstIBE(4.0/3.0\*b);FirstIBE(0.0);FirstIBE(4.0/3.0\*b\*b);FirstIBE(a\*a/9.0-4.0/9.0\*a\*b);

FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(1.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(-2.0/3.0\*a);FirstIBE(2.0/3.0\*b);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(a\*a/3.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(4.0/9.0\*b\*b-4.0/9.0\*a\*b);

FirstIBE(1.0);FirstIBE(-a/3.0);FirstIBE(-b/3.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(-r\*a/3.0);FirstIBE(r\*a\*a/18.0-t\*b\*b/18.0);FirstIBE(r\*a\*b/9.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);

FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(1.0);FirstIBE(-a/3.0);  
 FirstIBE(-b/3.0);FirstIBE(-t\*b/3.0);FirstIBE(t\*a\*b/9.0);  
 FirstIBE(t\*b\*b/18.0-r\*a\*a/18.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);  
 FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);

FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0); FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);

```

FirstIBE(0.0);FirstIBE(1.0);FirstIBE(-a/3.0);FirstIBE(-b/3.0);FirstIBE(a*a/9.0);
FirstIBE(a*b/9.0);FirstIBE(b*b/9.0);FirstIBE(-a*a*a/27.0);FirstIBE(-b*b*b/27.0);
FirstIBE(-a*a*b/27.0-b*b*a/27.0);

```

```

FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);
FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(1.0);FirstIBE(0.0); FirstIBE(-a/3.0);
FirstIBE(-2.0/3.0*b);FirstIBE(0.0);FirstIBE(b*b/3.0);FirstIBE(a*a/9.0+2.0/9.0*a*b);

```

```

FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(0.0);
FirstIBE(0.0);FirstIBE(1.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(-2.0/3.0*a);FirstIBE(-b/3.0);
FirstIBE(0.0);FirstIBE(a*a/3.0);FirstIBE(0.0);FirstIBE(b*b/9.0+2.0/9.0*a*b);

```

```

}

```

```

void PrepareSecondBagMatrix(double a, double b, double r, double t)

```

```

{

```

```

SecondIBE(1.0);SecondIBE(a/3.0);SecondIBE(-2.0/3.0*b);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);
SecondIBE(0.0);SecondIBE(r*a/3.0);SecondIBE(r*a*a/18.0-2.0/9.0*t*b*b);
SecondIBE(-2.0/9.0*r*a*b);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);
SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);

```

```

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(a/3.0);
SecondIBE(-2.0/3.0*b);SecondIBE(-2.0/3.0*t*b);SecondIBE(-2.0/9.0*t*a*b);
SecondIBE(2.0/9.0*t*b*b-r*a*a/18.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);
SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);

```

```

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);
SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(a/3.0);SecondIBE(-2.0/3.0*b);SecondIBE(a*a/9.0);
SecondIBE(-2.0/9.0*a*b);SecondIBE(4.0/9.0*b*b);SecondIBE(a*a*a/27.0);
SecondIBE(-8.0/27.0*b*b*b);SecondIBE(-2.0/27.0*a*a*b+4.0/27.0*b*b*a);

```

```

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);
SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(0.0);
SecondIBE(a/3.0);SecondIBE(-4.0/3.0*b);SecondIBE(0.0);SecondIBE(4.0/3.0*b*b);
SecondIBE(a*a/9.0-4.0/9.0*a*b);

```

```

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);
SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(2.0/3.0*a);
SecondIBE(-2.0/3.0*b);SecondIBE(0.0);SecondIBE(a*a/3.0);SecondIBE(0.0);
SecondIBE(4.0/9.0*b*b-4.0/9.0*a*b);

```

```

SecondIBE(1.0);SecondIBE(a/3.0);SecondIBE(b/3.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);
SecondIBE(0.0);SecondIBE(r*a/3.0);SecondIBE(r*a*a/18.0-t*b*b/18.0);
SecondIBE(r*a*b/9.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);

```

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(a/3.0);  
SecondIBE(b/3.0);SecondIBE(t\*b/3.0);SecondIBE(t\*a\*b/9.0);  
SecondIBE(t\*b\*b/18.0-r\*a\*a/18.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(a/3.0);SecondIBE(b/3.0);SecondIBE(a\*a/9.0);  
SecondIBE(a\*b/9.0);SecondIBE(b\*b/9.0);SecondIBE(a\*a\*a/27.0);SecondIBE(b\*b\*b/27.0);  
SecondIBE(a\*a\*b/27.0+b\*b\*a/27.0);

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(a/3.0); SecondIBE(2.0/3.0\*b);SecondIBE(0.0);SecondIBE(b\*b/3.0);  
SecondIBE(a\*a/9.0+2.0/9.0\*a\*b);

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(2.0/3.0\*a);  
SecondIBE(b/3.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(a\*a/3.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(b\*b/9.0+2.0/9.0\*a\*b);

SecondIBE(1.0);SecondIBE(-2.0/3.0\*a);SecondIBE(b/3.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(-2.0/3.0\*r\*a);SecondIBE(2.0/9.0\*r\*a\*a-t\*b\*b/18.0);  
SecondIBE(-2.0/9.0\*r\*a\*b);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(-2.0/3.0\*a);  
SecondIBE(b/3.0);SecondIBE(t\*b/3.0);SecondIBE(-2.0/9.0\*t\*a\*b);  
SecondIBE(t\*b\*b/18.0-2.0/9.0\*r\*a\*a);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(-2.0/3.0\*a);SecondIBE(b/3.0);  
SecondIBE(4.0/9.0\*a\*a);SecondIBE(-2.0/9.0\*a\*b);SecondIBE(b\*b/9.0);  
SecondIBE(-8.0/27.0\*a\*a\*a);SecondIBE(b\*b\*b/27.0);  
SecondIBE(4.0/27.0\*a\*a\*b-2.0/27.0\*b\*b\*a);

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(-2.0/3.0\*a);SecondIBE(2.0/3.0\*b);  
SecondIBE(0.0);SecondIBE(b\*b/3.0);SecondIBE(4.0/9.0\*a\*a-4.0/9.0\*a\*b);

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);

```

SecondIBE(0.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(1.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(-4.0/3.0*a);
SecondIBE(b/3.0);SecondIBE(0.0);SecondIBE(4.0/3.0*a*a);SecondIBE(0.0);
SecondIBE(b*b/9.0-4.0/9.0*a*b);

}

void PrepareIntegralMatrix(double r, double t, double c, double d, double nu, double a, double b )
{
    IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(c*(1.0/2.0-nu/2.0)*b*a);IIE(0.0);IIE(c*(1.0/2.0-nu/2.0)*b*a);
    IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);

    IIE(0.0);IIE(c*nu*b*a);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(c*b*a);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);
    IIE((-r*c*nu*b-t*c*b)*a*a*a/3.0);IIE((-r*c*nu-t*c)*b*b*a*a/4.0);
    IIE((-r*c*nu-t*c)*b*b*b*a/3.0);IIE((-r*c*nu*b-t*c*b)*a*a*a/4.0);
    IIE((-r*c*nu-t*c)*b*b*b*b*a/4.0);IIE((-r*c*nu-t*c)*b*b*a*a*a/6.0+(-r*c*nu-
        t*c)*b*b*b*a*a/6.0);

    IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);
    IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);

    IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);
    IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);

    IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);
    IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);

    IIE(0.0);IIE((-r*c*b-t*c*nu*b)*a*a*a/3.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);
    IIE((-r*c*nu*b-t*c*b)*a*a*a/3.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r*b-(-r*c*nu-t*c)*t*b)*a*a*a*a/5.0+4.0*d*b*a);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-t*c)*t)*b*b*a*a*a/8.0);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-t*c)*t)*b*b*b*a*a*a/9.0+4.0*d*nu*b*a);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r*b-(-r*c*nu-t*c)*t*b)*a*a*a*a*a/6.0+6.0*d*b*a*a);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-t*c)*t)*b*b*b*b*a*a*a/12.0+6.0*d*nu*b*b*a);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-t*c)*t)*b*b*b*a*a*a*a/10.0+(-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-
        t*c)*t)*b*b*b*b*a*a*a/12.0+2.0*d*nu*b*a*a+2.0*d*b*b*a);

    IIE(0.0);IIE((-r*c-t*c*nu)*b*b*a*a/4.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);
    IIE((-r*c*nu-t*c)*b*b*b*a*a/4.0);IIE(0.0);IIE(0.0);IIE(0.0);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-t*c)*t)*b*b*b*a*a*a/8.0);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-t*c)*t)*b*b*b*b*a*a*a/9.0+4.0*d*(1.0/2.0-nu/2.0)*b*a);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-t*c)*t)*b*b*b*b*b*a*a/8.0);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-t*c)*t)*b*b*b*a*a*a*a/10.0);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-t*c)*t)*b*b*b*b*b*b*a/a/10.0);
    IIE((-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-t*c)*t)*b*b*b*b*b*b*a/a/12.0+(-(-r*c-t*c*nu)*r-(-r*c*nu-
        t*c)*t)*b*b*b*b*b*a/a/12.0+4.0*d*(1.0/2.0-nu/2.0)*b*a*a+4.0*d*(1.0/2.0-nu/2.0)*b*b*a);

```

$$\begin{aligned}
& \Pi E(0.0); \Pi E((-r^*c-t^*c*nu)^*b*b*b*a/3.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \\
& \Pi E((-r^*c*nu-t^*c)^*b*b*b*a/3.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*a*a*a/9.0+4.0*d*nu*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*a*a/8.0); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*a/5.0+4.0*d*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*a*a*a/12.0+6.0*d*nu*b*b*a*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*a/6.0+6.0*d*b*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*a*a*a/12.0+((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu- \\
& \quad t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b/5.0+4.0*d*b)^*a*a/2.0+2.0*d*nu*b*b*b*a);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Pi E(0.0); \Pi E((-r^*c*b-t^*c*nu*b)^*a*a*a*a/4.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \\
& \Pi E((-r^*c*nu*b-t^*c*b)^*a*a*a*a/4.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r*b-(-r^*c*nu-t^*c)^*t*b)^*a*a*a*a*a*a/6.0+6.0*d*b*b*a*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*a*a*a*a/10.0); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*a*a*a*a/12.0+6.0*d*nu*b*b*a*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r*b-(-r^*c*nu-t^*c)^*t*b)^*a*a*a*a*a*a*a/7.0+12.0*d*b*b*a*a*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*a*a*a*a/16.0+9.0*d*nu*b*b*b*a*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*a*a*a*a*a/12.0+((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu- \\
& \quad t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*a*a*a*a/15.0+4.0*d*nu*b*b*a*a*a*a+3.0*d*b*b*b*a*a);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Pi E(0.0); \Pi E((-r^*c-t^*c*nu)^*b*b*b*b*a/4.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \\
& \Pi E((-r^*c*nu-t^*c)^*b*b*b*b*a/4.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*a*a*a/12.0+6.0*d*nu*b*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*a/10.0); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*a/6.0+6.0*d*b*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*a*a*a/16.0+9.0*d*nu*b*b*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*b*a/7.0+12.0*d*b*b*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*b*b*a*a/15.0+((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu- \\
& \quad t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*b/6.0+6.0*d*b*b*b)^*a*a/2.0+4.0*d*nu*b*b*b*b*a);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Pi E(0.0); \Pi E((-r^*c-t^*c*nu)^*b*b*b*a*a*a/6.0+(-r^*c-t^*c*nu)^*b*b*b*b*a/6.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \\
& \Pi E(0.0); \Pi E((-r^*c*nu-t^*c)^*b*b*b*a*a*a/6.0+(-r^*c*nu- \\
& \quad t^*c)^*b*b*b*b*a/6.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \Pi E(0.0); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*a*a*a*a/10.0+((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu- \\
& \quad t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*a*a*a*a/12.0+2.0*d*nu*b*b*a*a+2.0*d*b*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*a*a*a*a/12.0+((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu- \\
& \quad t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*a*a*a/12.0+4.0*d*(1.0/2.0-nu/2.0)*b*b*a*a+4.0*d*(1.0/2.0-nu/2.0)*b*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*a*a*a/12.0+((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu- \\
& \quad t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b/5.0+4.0*d*b)^*a*a/2.0+2.0*d*nu*b*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*a*a*a/12.0+((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu- \\
& \quad t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*a*a*a/15.0+4.0*d*nu*b*b*a*a*a+3.0*d*b*b*b*a*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*b*a/15.0+((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu- \\
& \quad t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*b/6.0+6.0*d*b*b*b)^*a*a/2.0+4.0*d*nu*b*b*b*b*a); \\
& \Pi E((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*b*b*a*a*a/15.0+(-2.0*(-r^*c-t^*c*nu)^*r-2.0*(- \\
& \quad r^*c*nu-t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b*b*a*a*a/16.0+(4.0*d*b+((-(-r^*c-t^*c*nu)^*r-(-r^*c*nu- \\
& \quad t^*c)^*t)^*b*b*b*b*b*b/5.0+16.0*d*(1.0/2.0-nu/2.0)*b)^*a*a*a/3.0+(8.0*d*nu+32.0*d*(1.0/2.0- \\
& \quad nu/2.0))*b*b*b*a*a/4.0+(16.0*d*(1.0/2.0-nu/2.0)+4.0*d)*b*b*b*b*a/3.0);
\end{aligned}$$

}

```
void PrepareFirstYukElement(double a, double b, double P)
```

```
{
    FirstIYE(0.0);
    FirstIYE(0.0);
    FirstIYE(41.0/54.0*P*a*b);
    FirstIYE(5.0/108.0*P*a*b*b*(14.0*a-b)/(a-b));
    FirstIYE(P*a*a*b/108.0);
    FirstIYE(0.0);
    FirstIYE(0.0);
    FirstIYE(41.0/54.0*P*a*b);
    FirstIYE(P*b*b*a/54.0);
    FirstIYE(5.0/108.0*P*a*a*b*(a-14.0*b)/(a-b));
    FirstIYE(0.0);
    FirstIYE(0.0);
    FirstIYE(-14.0/27.0*P*a*b);
    FirstIYE(-P*a*b*b*(63.0*a+2.0*b)/(a-b)/108.0);
    FirstIYE(P*b*a*a*(2.0*a+63.0*b)/(a-b)/108.0);
}
```

```
void PrepareSecondYukElement(double a, double b, double P)
```

```
{
    SecondIYE(0.0);
    SecondIYE(0.0);
    SecondIYE(23.0/108.0*P*a*b);
    SecondIYE(17.0/216.0*P*b*b*a);
    SecondIYE(-P*a*a*b*(5.0*a+2.0*b)/(a-b)/216.0);
    SecondIYE(0.0);
    SecondIYE(0.0);
    SecondIYE(4.0/54.0*P*a*b);
    SecondIYE(P*a*b*b*(45.0*a-52.0*b)/(a-b)/216.0);
    SecondIYE(P*b*a*a*(52.0*a-45.0*b)/(a-b)/216.0);
    SecondIYE(0.0);
    SecondIYE(0.0);
    SecondIYE(23.0/108.0*P*a*b);
    SecondIYE(P*a*b*b*(2.0*a+5.0*b)/(a-b)/216.0);
    SecondIYE(17.0/216.0*P*a*a*b);
}
```

```
void PrepareTurevMatrix(double x, double y, double r, double t, int currentNode)
```

```
{
    ITE(0.0, 0, 0);ITE(1.0, 0,1);ITE(0.0, 0, 2);ITE(0.0, 0, 3);ITE(0.0, 0, 4);ITE(0.0, 0, 5);
    ITE(0.0, 0, 6);ITE(0.0, 0, 7);ITE(0.0, 0, 8);ITE(-r*x*x, 0, 9);ITE(-r*x*y, 0, 10);
    ITE(-r*y*y, 0, 11);ITE(-r*x*x*x, 0, 12);ITE(-r*y*y*y, 0, 13);ITE(-r*(x*x*y+x*y*y), 0, 14);
}
```

```

ITE(0.0, 1, 0);ITE(0.0, 1, 1);ITE(0.0, 1, 2);ITE(0.0, 1, 3);ITE(0.0, 1, 4);ITE(1.0, 1, 5);
ITE(0.0, 1, 6);ITE(0.0, 1, 7);ITE(0.0, 1, 8);ITE(-t*x*x, 1, 9);ITE(-t*x*y, 1, 10);
ITE(-t*y*y, 1, 11);ITE(-t*x*x*x, 1, 12);ITE(-t*y*y*y, 1, 13);ITE(-t*(x*x*y+x*y*y), 1, 14);

```

```

ITE(0.0, 2, 0);ITE(0.0, 2, 1);ITE(1.0, 2, 2);ITE(0.0, 2, 3);ITE(1.0, 2, 4);ITE(0.0, 2, 5);
ITE(0.0, 2, 6);ITE(0.0, 2, 7);ITE(0.0, 2, 8);ITE(0.0, 2, 9);ITE(0.0, 2, 10);
ITE(0.0, 2, 11);ITE(0.0, 2, 12);ITE(0.0, 2, 13);ITE(0.0, 2, 14);

```

```

ITE(0.0, 3, 0);ITE(0.0, 3, 1);ITE(0.0, 3, 2);ITE(0.0, 3, 3);ITE(0.0, 3, 4);ITE(0.0, 3, 5);
ITE(0.0, 3, 6);ITE(0.0, 3, 7);ITE(0.0, 3, 8);ITE(-2.0, 3, 9);ITE(0.0, 3, 10);ITE(0.0, 3, 11);
ITE(-6.0*x, 3, 12);ITE(0.0, 3, 13);ITE(-2.0*y, 3, 14);

```

```

ITE(0.0, 4, 0);ITE(0.0, 4, 1);ITE(0.0, 4, 2);ITE(0.0, 4, 3);ITE(0.0, 4, 4);ITE(0.0, 4, 5);
ITE(0.0, 4, 6);ITE(0.0, 4, 7);ITE(0.0, 4, 8);ITE(0.0, 4, 9);ITE(0.0, 4, 10);ITE(-2.0, 4, 11);
ITE(0.0, 4, 12);ITE(-6.0*y, 4, 13);ITE(-2.0*x, 4, 14);

```

```

ITE(0.0, 5, 0);ITE(0.0, 5, 1);ITE(0.0, 5, 2);ITE(0.0, 5, 3);ITE(0.0, 5, 4);ITE(0.0, 5, 5);
ITE(0.0, 5, 6);ITE(0.0, 5, 7);ITE(0.0, 5, 8);ITE(0.0, 5, 9);ITE(2.0, 5, 10);ITE(0.0, 5, 11);
ITE(0.0, 5, 12);ITE(0.0, 5, 13);ITE(4.0*x+4.0*y, 5, 14);

```

```

if (currentNode <= MB) // X_DOWN_AXIS); //0.,3. rows will be set to zero
{
    for (int column = 0; column < 15; column++)
    {
        TurevMatrix(1, column) = 0.;
        TurevMatrix(4, column) = 0.;
    }
}

```

```

if (!(currentNode % (MB + 1))) //Y_RIGHT
{
    for (int column = 0; column < 15; column++)
    {
        TurevMatrix(0, column) = 0.;
        TurevMatrix(3, column) = 0.;
    }
}

```

```

void PrepareElasticityMatrix(double c, double d, double nu)
{
    IEE ( c);IEE ( c*nu);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);
    IEE ( c*nu);IEE ( c);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);
    IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( c*(1.0/2.0-nu/2.0));IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);
}

```

```

        IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( d);IEE ( d*nu);IEE ( 0.0);
        IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( d*nu);IEE ( d);IEE ( 0.0);
        IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( 0.0);IEE ( d*(1.0/2.0-nu/2.0));
    }

    void PrepareRijitlikMatrixs()
    {
        FirstRijitlikMatris = (~(! (FirstBagMatris))) * (IntegralMatris) * (! (FirstBagMatris));
        SecondRijitlikMatris = (~(! (SecondBagMatris))) * (IntegralMatris)* (! (SecondBagMatris));
    }

    double GetValueFromAppropriateRigidityMatrix(int elementIndex, int x_coordinate, int y_coordinate)
    {
        if (elementIndex % 2)
            return(SecondRijitlikMatris(x_coordinate, y_coordinate));
        else
            return(FirstRijitlikMatris(x_coordinate, y_coordinate));

        return(0.);
    }

    double GetValueFromAppropriateLoadMatrix(int elementIndex, int x_coordinate, int y_coordinate = 0)
    {
        if (elementIndex % 2)
            return(SecondYukMatris(x_coordinate, y_coordinate));
        else
            return(FirstYukMatris(x_coordinate, y_coordinate));

        return(0.);
    }

    void SearchInSystemArray(int i, int j)
    {
        double theRigiditySum = 0.;

        for (int elementIndex = 0; elementIndex < SystemArray.GetSize(); elementIndex++)
        {
            int firstHit = SystemArray[elementIndex].Find(i);
            if (firstHit == -1)
                continue;

            int secondHit = SystemArray[elementIndex].Find(j);
            if (secondHit == -1)
                continue;
        }
    }

```

```

theRigiditySum += GetValueFromAppropriateRigidityMatrix(elementIndex, firstHit, secondHit);
    }

```

```

    SytemRigidityMatrix(i, j) = theRigiditySum;
}

```

```

void PrepareSytemRigidityMatrix(int NumberOfElements, int NumberOfNodes)
{
    int RijitlikMatrixDim = NumberOfNodes * 5;

    for (int i = 0; i < RijitlikMatrixDim; i++)
        for (int j = 0; j < RijitlikMatrixDim; j++)
            SearchInSystemArray(i, j);
}

```

```

void SearchInSystemArrayForLoadMatrix(int i)
{
    double theLoadSum = 0.;

    for (int elementIndex = 0; elementIndex < SystemArray.GetSize(); elementIndex++)
    {
        int firstHit = SystemArray[elementIndex].Find(i);
        if ( firstHit == -1)
            continue;

        theLoadSum += GetValueFromAppropriateLoadMatrix(elementIndex, firstHit);
    }

    SystemLoadMatrix(i, 0) = theLoadSum;
}

```

```

void PrepareSystemLoadMatrix(int NumberOfElements, int NumberOfNodes)
{
    int RijitlikMatrixDim = NumberOfNodes * 5;

    for (int i = 0; i < RijitlikMatrixDim; i++)
        SearchInSystemArrayForLoadMatrix(i);
}

```

```

void ClearSysytemRigidityMaxtrix(int index)
{
    for (int curIndex = 0; curIndex < RigidityDimention; curIndex++)
    {
        SytemRigidityMatrix(curIndex, index) = 0.;
    }
}

```

```

        SytemRigidityMatrix(index, curIndex) = 0.;
    }

    SytemRigidityMatrix(index, index) = 1.;

    SystemLoadMatrix(index, 0) = 0.;
}

void ModifySysytemRigidityMaxtrixForBoundry(int currentNode, BYTE axis)
{
    CITArray<int> displacementParametersToSetZero;
    switch (axis)
    {
        case X_DOWN_AXIS :
        {
            BoundryNodes.Add(currentNode);
            displacementParametersToSetZero.Add(1);
            displacementParametersToSetZero.Add(2);
            break;
        }
        case Y_RIGHT_AXIS :
        {
            BoundryNodes.Add(currentNode);
            displacementParametersToSetZero.Add(0);
            displacementParametersToSetZero.Add(2);
            break;
        }
        case X_UP_AXIS :
        {
            displacementParametersToSetZero.Add(3);
            break;
        }
        case Y_LEFT_AXIS :
        {
            displacementParametersToSetZero.Add(4);
            break;
        }
    }

    for (int i = 0; i < displacementParametersToSetZero.GetSize(); i++)

        ClearSysytemRigidityMaxtrix(NodesToNodeParamIndex[currentNode][displacement
ParametersToSetZero.GetAt(i)]);
}

```

```

void PrepareSytemArray(int M, int N)
{
    NodesToNodeParamIndex.SetSize(NumberOfNodes);
    IntegerArray NodeParamIndex;
    NodeParamIndex.SetSize(NumberOfNodeParams);

    for (int i = 0; i < NumberOfNodes; i++)
        for (int j = 0; j < NumberOfNodeParams; j++)
        {
            NodeParamIndex[j] = 5 * i + j;
            NodesToNodeParamIndex[i] = NodeParamIndex;
        }

    ElementsToNodes.SetSize(NumberOfElements);
    IntegerArray array;
    array.SetSize(NumberOfElementNodes);

    //ODD
    {
        for (int i = 0; i <= M - 1; i++)
            for (int j = 0; j <= N - 1; j++)
            {
                array[0] = FindNodeIndex(M + 1, i, j);
                array[1] = FindNodeIndex(M + 1, i + 1, j + 1);
                array[2] = FindNodeIndex(M + 1, i, j + 1);

                ElementsToNodes[FindOddElementIndex(M, i, j)] = array;
            }
    }
    //EVEN
    {
        for (int i = 0; i <= M - 1; i++)
            for (int j = 0; j <= N - 1; j++)
            {
                array[0] = FindNodeIndex(M + 1, i, j);
                array[1] = FindNodeIndex(M + 1, i + 1, j);
                array[2] = FindNodeIndex(M + 1, i + 1, j + 1);

                ElementsToNodes[FindEvenElementIndex(M, i, j)] = array;
            }
    }
    SystemArray.SetSize(NumberOfElements);
}

```

```

SubSystemArray.SetSize(0);

for (i = 0; i < NumberOfElements; i++)
{
    for (int j = 0; j < NumberOfElementNodes; j++)

        SubSystemArray.Append(NodesToNodeParamIndex[ElementsToNodes[i][j]]);

    SystemArray[i] = SubSystemArray;
    SubSystemArray.RemoveAll();
}

PrepareSytemRigidityMatrix(NumberOfElements, NumberOfNodes);
PrepareSystemLoadMatrix(NumberOfElements, NumberOfNodes);

{
    int currentNode = 0;

    for (int j = 0; j <= N; j++)
        for (int i = 0; i <= M; i++)
        {
            if (j == 0 || j == N)
                j ? ModifySysytemRigidityMaxtrixForBoundry(currentNode,
X_UP_AXIS) : ModifySysytemRigidityMaxtrixForBoundry(currentNode, X_DOWN_AXIS);

            if (i == 0 || i == M)
                i ? ModifySysytemRigidityMaxtrixForBoundry(currentNode,
Y_LEFT_AXIS) : ModifySysytemRigidityMaxtrixForBoundry(currentNode,
Y_RIGHT_AXIS);

            currentNode ++;
        }
    }
}

void PrepareDeplacementOfNodesMatrix()
{
    DeplacementOfNodesMatrix = (1 / d) * (!SytemRigidityMatrix) * SystemLoadMatrix;
    //RealDeplacementOfNodesMatrix = (1 / d) * DeplacementOfNodesMatrix;
}

void main()

```

```

{
    MB = GetValue<int>("Enter MB:");
    NB = GetValue<int>("Enter NB:");

    int RigidityMatrixSize = (MB + 1) * (NB + 1) * 5;

    SytemRigidityMatrix.SetSize(RigidityMatrixSize, RigidityMatrixSize);
    DeplacementOfNodesMatrix.SetSize(RigidityMatrixSize, 1);
    SystemLoadMatrix.SetSize(RigidityMatrixSize, 1);
    //RealDeplacementOfNodesMatrix.SetSize(RigidityMatrixSize, 1);

    double FX = GetValue<double>("Enter FX(m):");
    double FY = GetValue<double>("Enter FY(m):");
    double LX = GetValue<double>("Enter LX(m):");
    double LY = GetValue<double>("Enter LY(m):");
    double H = GetValue<double>("Enter H(m):");
    double P = GetValue<double>("Enter P(KN/m2):");
    double E = GetValue<double>("Enter E(KN/m2):");
    double nu = GetValue<double>("Enter PoissonOrani:");

    double a = (LX/2) / MB;
    double b = (LY/2) / NB;
    double r = (8 * FX) / pow(LX,2);
    double t = (8 * FY) / pow(LY,2);
    double c = (E * H) / (1 - pow(nu,2));
    d = (E * pow(H,3)) / (12 * (1 - pow(nu,2)));
    double x = 0.;
    double y = 0.;

    NumberOfElements = 2 * MB * NB;
    NumberOfNodes = (MB + 1) * (NB + 1);
    RigidityDimention = NumberOfNodes * NumberOfNodeParams;

    PrepareFirstBagMatrix(a, b, r, t);
    PrepareSecondBagMatrix(a, b, r, t);
    PrepareIntegralMatrix(a, b, c, d, nu, r, t);
    PrepareFirstYukElement(a, b, P);
    PrepareSecondYukElement(a, b, P);
    PrepareRijitlikMatrixs();
    PrepareSytemArray(MB, NB);
    PrepareDeplacementOfNodesMatrix();
    PrepareElasticityMatrix(c,d,nu);

    CString FileOutput("");

```

```
NodeDeformationMatrixParamsArray deformationArray;
```

```
for (int iElement = 0; iElement < NumberOfElements; iElement++)
{
```

```
    int currentNode = 0;
```

```
    matrix<double> elementDisplacementMatrix(15,1);    //temp
```

```
    for (int g = 0; g < NumberOfParams; g++)
```

```
    {
```

```
        int dNumber = SystemArray[iElement][g];
```

```
        elementDisplacementMatrix(g, 0) = DisplacementOfNodesMatrix(dNumber, 0);
```

```
    }
```

```
    for (int i = 0; i < NumberOfElementNodes; i++)
```

```
    {
```

```
        currentNode = ElementsToNodes[iElement].GetAt(i);
```

```
        switch (i)
```

```
        {
```

```
            case 0 :
```

```
            {
```

```
                if (iElement % 2)    //odd
```

```
                {
```

```
                    x = a / 3;
```

```
                    y = (-2. * b) / 3;
```

```
                }
```

```
            else
```

```
            {
```

```
                x = 2. * a / 3.;
```

```
                y = (-1. * b) / 3.;
```

```
            }
```

```
            break;
```

```
        }
```

```
        case 1 :
```

```
        {
```

```
            if (iElement % 2)    //odd
```

```
            {
```

```
                x = a / 3.;
```

```
                y = b / 3.;
```

```
            }
```

```
        else
```

```
        {
```

```
            x = (-1. * a) / 3.;
```

```

        y = (2. * b) / 3.;
    }
    break;
}
case 2 :
{
    if (iElement % 2)        //odd
    {
        x = (-2. * a) / 3.;
        y = b / 3.;
    }
    else
    {
        x = (-1. * a) / 3.;
        y = (-1. * b) / 3.;
    }
    break;
}
}

PrepareTurevMatrix(x, y, r, t, currentNode);
matrix<double> NodeDeformationMatrix(6,1);

if (iElement % 2)        //odd
NodeDeformationMatrix = ElasticityMatrix * (TurevMatrix *
(!SecondBagMatris) * elementDisplacementMatrix);
else
NodeDeformationMatrix = ElasticityMatrix * (TurevMatrix *
(!FirstBagMatris) * elementDisplacementMatrix);

NodeDeformationMatrixParams* pNDM = new
NodeDeformationMatrixParams;

pNDM->m_NodeID = ElementsToNodes[iElement][i];
pNDM->m_DeformationMatrix = NodeDeformationMatrix;
deformationArray.Add(pNDM);
}
}

matrix<double> temp(6,1);

for (int i = 0; i < NumberOfNodes; i++)
{
    for (int k = 0; k < 6; k++)
        temp(k, 0) = 0.;
}

```

```

double turn = 0;
for (int p = 0; p < deformationArray.GetSize(); p++)
{
    NodeDeformationMatrixParams* pNDM = deformationArray[p];

    if (pNDM->m_NodeID == i)
    {
        turn ++;
        temp += pNDM->m_DeformationMatrix;
    }
}

temp = (1 / turn) * temp;

FileOutput += IntegerToString(i) + " NODE" + "\n";

for (int n = 0; n < 6; n++)
    FileOutput += DoubleToString(temp(n, 0)) + "\n";

FileOutput += "\n";
FileOutput += "\n";
}

CStdioFile file;
file.Open("C:\\FEM.txt", CFile::modeCreate | CFile::modeReadWrite);
file.Write(FileOutput, FileOutput.GetLength());

for (int l = 0; l < deformationArray.GetSize(); l++)
    delete deformationArray[l];

CString FileOutput2("");
CStdioFile file2;
file2.Open("C:\\SytemRigidityMatrix.txt", CFile::modeCreate | CFile::modeReadWrite);

for (i = 0; i < 605; i++)
{
    for (int j = 0; j < 605; j++)
    {
        FileOutput2 += DoubleToString(SytemRigidityMatrix(i, j)) + " ";
    }
}

```

```

    }

    FileOutput2 += '\n';
}

file2.Write(FileOutput2, FileOutput2.GetLength());

CString FileOutput3("");
CStdioFile file3;
file3.Open("C:\\SystemLoadMatrix.txt", CFile::modeCreate | CFile::modeReadWrite);

for (i = 0; i < 605; i++)
{
    {
        FileOutput3 += DoubleToString(SystemLoadMatrix(i, 0)) + " ";
    }

    FileOutput3 += '\n';
}

file3.Write(FileOutput3, FileOutput3.GetLength());

CString FileOutput4("");
CStdioFile file4;
file4.Open("C:\\IntegralMatrix.txt", CFile::modeCreate | CFile::modeReadWrite);

for (i = 0; i < 15; i++)
{
    for (int j=0; j<15;j++)
    {
        FileOutput4 += DoubleToString(IntegralMatris(i, j)) + " ";
    }

    FileOutput4 += '\n';
}

file4.Write(FileOutput4, FileOutput4.GetLength());

```

```

        CString FileOutput5("");
CStdioFile file5;
file5.Open("C:\\DeplacementOfNodes.txt", CFile::modeCreate | CFile::modeReadWrite);

for (i = 0; i < 605; i++)
{
    {
        FileOutput5 += DoubleToString(DeplacementOfNodesMatrix(i, 0)) + " ";
    }

    FileOutput5 += '\n';
}

file5.Write(FileOutput5, FileOutput5.GetLength());

//cout << SytemRigidityMatrix;
//cout << SystemLoadMatrix;
//cout << SecondYukMatris;
//cout << FirstRijitlikMatris;
//cout << IntegralMatrix;
//cout << SecondRijitlikMatris;
//cout << SytemRigidityMatrix;
//cout << DeplacementOfNodesMatrix;

```

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi 20.04.1978

Doğum yeri Trabzon

Lise 1991-1994 Trabzon Affan Kitapçıoğlu Lisesi

Lisans 1996-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fak.  
İnşaat Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2002- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

**Çalıştığı kurumlar**

2002-2003 Ark Yapı A.Ş.

2003-2003 Rena İnşaat Sanayi ve Ticaret Ltd. Şti.

2003-2004 Alpo Mühendislik Ltd. Şti.

2004- Giba İnşaat San. Tic. ve Turz. Ltd. Şti.