

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EULER-BERNOULLİ VE TİMOSHENKO TEORİLERİ
KULLANILARAK BASİT MESNETLİ KİRİŞLERİN
SERBEST TİTREŞİMLERİNİN İNCELENMESİ**

İnşaat Müh. Yusuf KOÇ

**F.B.E İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK

İSTANBUL,2006

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	i
ŞEKİL LİSTESİ.....	ii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Konuya İlişkin Çalışmalar.....	1
1.2 Çalışmanın Amacı.....	2
2. BÜNYE BAĞINTILARI.....	3
3. TEMEL BAĞINTILAR.....	4
3.1 Yer Değiştirme ile Şekil Değiştirme Arasındaki Kinematik Bağıntılar.....	4
3.1.1 Euler-Bernoulli Kirişi için Yer Değiştirme, Şekil Değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar.....	4
3.1.2 Timoshenko Kirişi için Yer Değiştirme, Şekil Değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar.....	6
3.2 Potansiyel Enerji.....	8
3.2.1 Euler-Bernoulli Kirişi için Potansiyel Enerji.....	8
3.2.2 Timoshenko Kirişi için Potansiyel Enerji.....	9
3.3 Kinetik Enerji.....	11
3.3.1 Euler-Bernoulli Kirişi için Kinetik Enerji.....	11
3.3.2 Timoshenko Kirişi için Kinetik Enerji.....	12
4. KURAMSAL ÇALIŞMA.....	14
4.1 Lagrange Denklemlerinin Tüm Bölge Üzerinde Geçerli Deneme Fonksiyonlarıyla Kullanımı:Ritz metodu.....	14
4.1.1 Euler-Bernoulli Kirişi için Kuramsal Çalışma.....	15
4.1.2 Timoshenko Kirişi için Kuramsal Çalışma.....	17
4.2. Enerji Tabanlı Sonlu Farklar ile Kuramsal Çalışma.....	20
4.2.1 Euler-Bernoulli Kirişi için Kuramsal Çalışma.....	20
4.2.2 Timoshenko Kirişi için Kuramsal Çalışma.....	23
4.3 Sonlu Elemanlar ile Kuramsal Çalışma.....	26
4.3.1 Euler-Bernoulli Kirişi için Kuramsal Çalışma.....	26
4.3.2 Timoshenko Kirişi için Kuramsal Çalışma.....	32

4.3.2.1	Farklı Dereceden İnterpolasyon Fonksiyonlarının Kullanılması.....	34
4.3.2.2	Aynı Dereceden İnterpolasyon Fonksiyonlarının Kullanılması.....	36
5.	SAYISAL SONUÇLAR.....	40
6.	SONUÇ.....	51
KAYNAKLAR.....		53
EKLER.....		55
EK1	Euler-Bernoulli Kirişinde Enerji Tabanlı Sonlu Farklar Yöntemiyle Elde Edilen Özdeğer Denklemi.....	56
EK2	Timoshenko Kirişinde Enerji Tabanlı Sonlu Farklar Yöntemiyle Elde Edilen Özdeğer Denklemi.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....		58

SİMGE LİSTESİ

σ	Normal gerilme
G	Kayma modülü
E	Elastisite modülü
e	Şekil değiştirme oranı
W	Kirişin düşey yer değiştirmesi
ψ	Kiriş kesitinin dönmesi
k_s	Kayma gerilmesi dağılışı düzeltme faktörü
U_i	Kirişin potansiyel enerjisi
I	Kiriş eylemsizlik momenti
A	Kiriş kesitinin alanı
ρ	Kirişin birim hacim kütlesi
λ	Kirişin özdeğeri
T	Kirişin herhangi bir zamandaki kinetik enerjisi
ω	Kirişin boyutlu olan serbest titreşim frekansı
$[K]$	Rijitlik matrisi
$[M]$	Kütle matrisi

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	Bir kiriş parçası ve seçilen eksen takımı.....	3
Şekil 3.1	Basit mesnetli bir kiriş.....	4
Şekil 3.2	Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre alınan bir kesitin durum.....	5
Şekil 3.3	Timoshenko kiriş teorisine göre alınan bir kesitin durumu.....	6
Şekil 4.1	Basit kirişte düğüm noktalarının gösterilmesi.....	21
Şekil 4.2	Eğilme elemanı.....	27
Şekil 5.1	Euler-Bernoulli kirişinde Ritz yöntemi ile yakınsama.....	40
Şekil 5.2	Timoshenko kirişinde Ritz yöntemi ile yakınsama.....	41
Şekil 5.3	Euler-Bernoulli kirişinde sonlu elemanlar ile yakınsama.....	43
Şekil 5.4	Timoshenko kirişinde sonlu elemanlar ile yakınsama.....	44
Şekil 5.5	Euler-Bernoulli kirişinde enerji tabanlı sonlu farklarda yakınsama.....	45
Şekil 5.6	Timoshenko kirişinde enerji tabanlı sonlu farklarda yakınsama.....	46
Şekil 5.7	Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre iki ucu basit mesnetli kiriş için birinci mod şekli.....	49
Şekil 5.8	Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre iki ucu basit mesnetli kiriş için ikinci mod şekli.....	49
Şekil 5.9	Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre iki ucu basit mesnetli kiriş için üçüncü mod şekli.....	50
Şekil 5.10	Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre iki ucu basit mesnetli kiriş için dördüncü mod şekli.....	50

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1	Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre Ritz yöntemi ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için yakınsama ve kıyaslama çalışması.....	40
Çizelge 5.2	Timoshenko kiriş teorisine göre Ritz yöntemi ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için $h/l = 0.05$ oranında yakınsama ve kıyaslama çalışması.....	41
Çizelge 5.3	Timoshenko kiriş teorisine göre Ritz yöntemi ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için değişik h/l oranlarında $SD = 40$ için bulunan değerlerin literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırılması.....	42
Çizelge 5.4	Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre sonlu elemanlar ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için yakınsama ve kıyaslama çalışması.....	42
Çizelge 5.5	Timoshenko kiriş teorisine göre sonlu elemanlar ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için $h/l = 0.002$ oranında yakınsama ve kıyaslama çalışması.....	43
Çizelge 5.6	Timoshenko kirişinde sonlu elemanlar yönteminde farklı λ frekans parametreleri için değişik h/l oranlarında $SD = 140$ için bulunan değerlerin referans alınan sonuçla karşılaştırılması.....	44
Çizelge 5.7	Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre enerji tabanlı sonlu farklar ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için yakınsama ve kıyaslama çalışması.....	45
Çizelge 5.8	Timoshenko kiriş teorisine göre enerji tabanlı sonlu farklar ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için $h/l = 0.002$ oranında yakınsama ve kıyaslama çalışması.....	46
Çizelge 5.9	Timoshenko kirişinde enerji tabanlı sonlu farklar yönteminde farklı λ frekans parametreleri için değişik h/l oranlarında $SD = 140$ için bulunan değerlerin referans alınan sonuçla karşılaştırılması.....	47
Çizelge 5.10	Timoshenko kirişinde sonlu elemanlar yöntemi ve enerji tabanlı sonlu farklar yönteminin farklı λ frekans parametreleri için değişik h/l oranlarında $SD = 140$ için karşılaştırılması.....	48

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanmasında, her konuda benden yardımını esirgemeyen değerli hocam, tez danışmanım Sayın Prof.Dr.Turgut Kocatürk'e, hayatım boyunca bana daima destek olmuş olan aileme ve çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan İnş.Yük.Müh.Mesut Şimşek'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada, basit mesnetli bir kirişin serbest titreşim analizi, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri çerçevesinde ; Ritz, sonlu elemanlar ve sonlu farklar metodu kullanılarak yapılmıştır. Bu metodlar kullanılarak iki kiriş teorisine ait ilk altı özdeğer hesaplanmış ve tablolaştırılmıştır. Üç değişik çözüm metodu için değişik serbestlik derecelerinde yakınsama çalışmaları yapılmış ve bunlar tablolaştırılmıştır.Üç yöntem için elde edilen sonuçlar birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Ve elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sayısal sonuçlar göstermiştir ki, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri küçük kalınlık/uzunluk oranlarında birbirlerine çok yakın sonuç vermiştir. Ve bu çalışmalardan elde edilen sonuçlarla literatürdeki sonuçların iyi bir uyum içinde olduğu görülmüştür. Ayrıca Timoshenko kiriş teorisinde sonlu elemanlar ile sonlu farklar metodu aynı serbestlik derecesinde karşılaştırılmış ve birbirlerine yakın sonuçlar verdikleri görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Euler-Bernoulli kirişi, Timoshenko kirişi, serbest titreşim, sonlu elemanlar metodu, sonlu farklar metodu, Ritz metodu, özdeğerler

ABSTRACT

In this study, free vibration analysis of a simply-supported beam within the framework of both Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories was analyzed by using Ritz, finite element and finite differences methods. By using this methods the first sixth eigenvalues of the Euler-Bernoulli and Timoshenko beams are calculated and tabulated. The obtained eigenvalues are given for different thickness-to-length ratios for Timoshenko beam theory. Convergence studies were made for the different number of degree of the freedom for the three solution methods. The obtained results according to the three solution methods were compared to each other. Also, the obtained results were compared with the previously published results. Numerical investigations show that the results of Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories are very close to each other for small values of thickness-to-length ratios, and the results obtained from the present study are in good agreement with those the previously published results. Also, same number of degree of the freedom for finite element and finite differences methods compared in Timoshenko beam theory. The obtained results are very close to each other.

Keywords: Euler-Bernoulli beam, Timoshenko beam, free vibration, finite element method, finite differences method, Ritz method, eigenvalue

1.GİRİŞ

1.1 Konuya İlişkin Çalışmalar

Kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimi birçok araştırmacı tarafından incelenmiş olup, literatürde bu konuyla ilgili çok çeşitli çalışmalar mevcuttur. Burada kirişlerin serbest titreşimiyle ilgili çalışmalardan bazılarına değinilecektir. Farklı sınır koşullarına sahip kirişlere ait serbest titreşim frekans denklemlerini analitik olarak elde ederek çözümünü vermiştir (Timoshenko ve Young, 1955). Kitabında kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşim problemlerinin analitik çözümlerini vermiştir (Fybra, 1972). Farklı sınır koşullarına sahip eksenel kuvvet etkisi altındaki tek açıklıklı kirişler için, eksenel kuvvetin kirişin serbest titreşim karakteristikleri üzerindeki etkilerini incelemiştir (Bokaian, 1988). Bu çalışmalarda problem, statik eksenel yük basınç ve çekme alınarak analitik olarak incelenmiştir. Tekil kütle taşıyan ve eksenel yüke maruz sürekli kirişlerin serbest titreşimini klasik Ritz yöntemiyle sayısal olarak incelemiştir (Laura, 1983). Elastik ara mesnetleri olan ve bir noktada toplanmış tekil kütle taşıyan eksenel yüke maruz kirişlerin serbest titreşimlerini Green fonksiyonlarını kullanarak analitik olarak incelemiştir (Kukla, 1994). Eksenel çekme kuvveti etkisindeki kirişlerin serbest titreşim karakteristiklerini incelemek için, karakteristik ortogonal şekil fonksiyonları kullanarak Rayleigh-Ritz metoduna dayanan basit bir varyasyonel yöntem geliştirmişlerdir (Nallim ve Grossi, 1999). Çeşitli mesnet koşullarına sahip eksenel çekme ve basınç kuvveti etkisindeki kirişlerin serbest titreşimini Lagrange denklemlerini kullanarak Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde incelemiştir (Şimşek, 2005).

Yukarıda bahsedilen çalışmalar Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde yapılmıştır. Aşağıda ise Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde yapılan çalışmalardan bahsedilecektir. Pseudo-spectral yöntemini kullanarak değişik sınır koşullarına sahip kirişlerin serbest titreşimlerini farklı kesit yüksekliği/açıklık oranları için Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde incelemiştir (Lee ve Schultz, 2004). Rayleigh-Ritz yöntemiyle sürekli kirişlerin (Zhou, 2001), tekil kütle taşıyan elastik mesnetli kirişlerin serbest titreşimlerini analitik olarak incelemiştir (Rossi, 1993). Çok açıklıklı Timoshenko kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizini yapmıştır (Farghaly, 1994). Dinamik rijitlik matrisleri yardımıyla eksenel yük etkisindeki kirişlerin serbest titreşimini incelemiştir (Banerjee, 1998). Kesit açıklığında mafsal bulunan ve eksenel kuvvete maruz Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimini incelemiştir (Lee, 2003). Ardışık yaklaşıma dayalı Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak Timoshenko kirişlerinin serbest

titreşimini incelemişlerdir (Auciello and Ercolano, 2004). Farklı sınır koşullarına sahip Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimlerini Lagrange denklemlerini kullanarak ve sınır koşullarını Lagrange çarpanlarıyla sağlatarak incelemişlerdir (Kocatürk ve Şimşek, 2005). Elastik mesnetli kirişlerin serbest titreşimini Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde incelemişlerdir (Kocatürk ve Şimşek, 2005). Doktora raporunda Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri çerçevesinde kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimlerine ait çözümler bulunmaktadır (Şimşek 2005). Plakların serbest ve zorlanmış titreşimlerini enerji tabanlı sonlu farklar yöntemiyle incelemiştir (Altuntaş, 2002).

1.2 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada, doğrudan varyasyon yöntemleri olan Ritz, sonlu elemanlar ve enerji tabanlı sonlu farklar yöntemleri kullanılarak, hem Euler-Bernoulli, hem de Timoshenko kiriş teorileri çerçevesinde bir basit kirişin özdeğerleri elde edilecektir.

Tüm kiriş bölgesi üzerinde geçerli deneme fonksiyonları ile birlikte Lagrange denklemlerinin kullanımı (Ritz metodu), enerji tabanlı sonlu farklar yönteminin kullanımı ve sonlu elemanlar yönteminin kullanımıyla Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri çerçevesinde bir basit kirişin serbest titreşimleri incelenmiştir. İncelenme sonucu özdeğerlerin elde edilmesi dikkate alındığında hangi yöntemin en az serbestlik derecesi ile kesin sonuçlara en iyi şekilde yakınsadığı araştırılacaktır.

2.BÜNYE BAĞINTILARI

Kirişler için gerilmeler ile şekil değiştirmeler arasındaki bünye bağıntıları Şekil 2.1 deki eksen takımı için aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\sigma_{11} = Q_{11} e_{11} \quad (2.1)$$

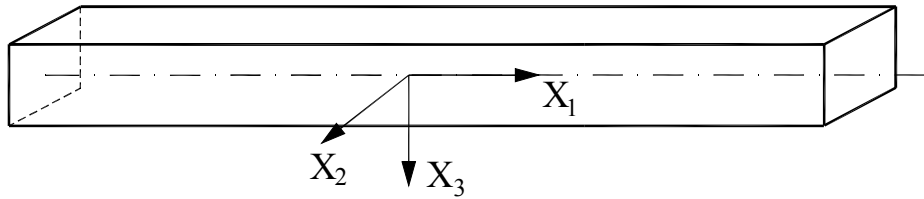
$$\sigma_{13} = Q_{13} e_{13} \quad (2.2)$$

burada Q_{11} ve Q_{13} aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$Q_{11} = E_{11} \quad (2.3)$$

$$Q_{13} = G_{13} \quad (2.4)$$

(2.1), (2.2), (2.3), ve (2.4) denklemlerindeki $E_{11}, \sigma_{11}, e_{11}$ sırasıyla X_1 eksenini doğrultusundaki Young (Elastisite) modülü, normal gerilme, şekil değiştirme oranıdır. G_{13}, X_1-X_3 düzlemindeki kayma modülü, σ_{13}, X_1-X_3 düzlemindeki kayma gerilmesi ve e_{13}, X_1-X_3 düzlemindeki kayma şekil değiştirmesidir.



Şekil 2.1 Bir kiriş parçası ve seçilen eksen takımı

3.TEMEL BAĞINTILAR

3.1 Yer değıştirme ile Şekil Değıştirme Arasındaki Kinematik Bağntılar

Yer değıştirmelerle şekil değıştirmeler arasındaki kinematik bağntılar lineer olmayan terimlerin ihmal edilmesiyle aşağıdaki şekilde verilmektedir:

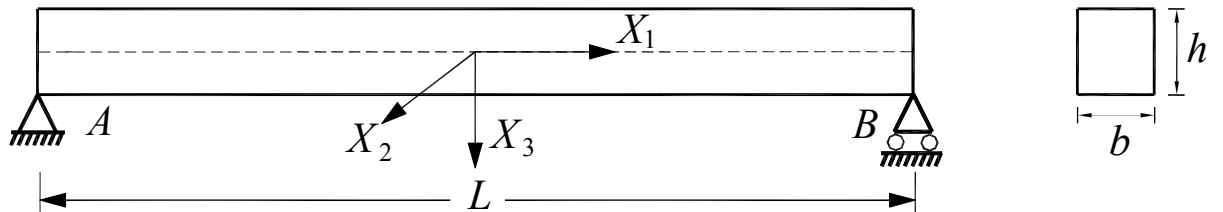
$$e_{11} = \frac{\partial U_1(X_1, t)}{\partial X_1} \quad (3.1)$$

$$e_{13} = \frac{\partial U(X_1, t)}{\partial X_3} + \frac{\partial W(X_1, t)}{\partial X_1} \quad (3.2)$$

Burada $U(X_1, t)$ kiriş kesitinin eğilmeden dolayı X_1 doğrultusundaki yer değıştirmesi, $W(X_1, t)$ kiriş tarafsız ekseninin X_3 doğrultusundaki düşey yer değıştirmesidir.

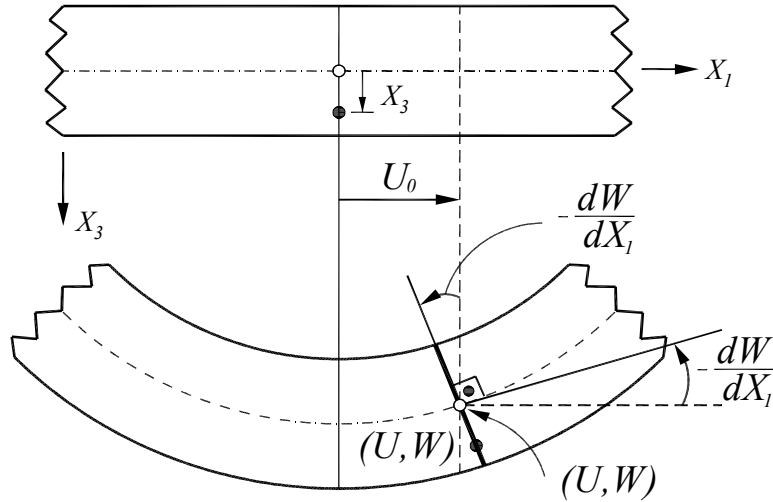
3.1.1.Euler-Bernoulli Kiriş için Yer Değıştirme, Şekil Değıştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağntılar

Açıklığı L , kesit yüksekliği h ve kesit genişliği b olan basit mesnetli bir kiriş Şekil 3.1’de gösterilmiştir. Kartezyen koordinat sistemi (X_1, X_2, X_3) kirişin orta noktasında tanımlanmıştır. X_1 aksı kiriş eksenı doğrultusunda, X_2 aksı kesit genişliği doğrultusunda ve X_3 aksı kesit yüksekliği doğrultusundadır.



Şekil 3.1 Basit mesnetli bir kiriş

Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre eğilmeden önce tarafsız eksene dik ve düzlem olan kesitler, eğilmeden sonra da tarafsız eksene dik ve düzlem kalırlar. Şekil 3.2’de de gösterildiği gibi bu kabul sonucunda kirişteki kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilmiş olur.



Şekil 3.2 Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre alınan bir kesitin durumu

Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre kirişteki yer değiştirmeler izleyen şekildedir:

$$U(X_1, X_3, t) = U_o - X_3 \frac{dW(X_1, t)}{dX_1} \quad (3.3)$$

$$W(X_1, X_3, t) = W(X_1, t) \quad (3.4)$$

Birinci mertebe teorisiyle çalışıldığı için eksen yerdeğiştirmesi olan U_0 değeri sıfıra çok yakın olup ihmal edilecektir.

(3.1) ve (3.2) denklemlerinde verilen kinematik bağıntıların uygulanmasıyla Euler-Bernoulli kiriş teorisindeki şekil değiştirme bileşenleri izleyen şekilde elde edilir:

$$e_{11} = -X_3 \frac{d^2 W}{dX_1^2} \quad (3.5)$$

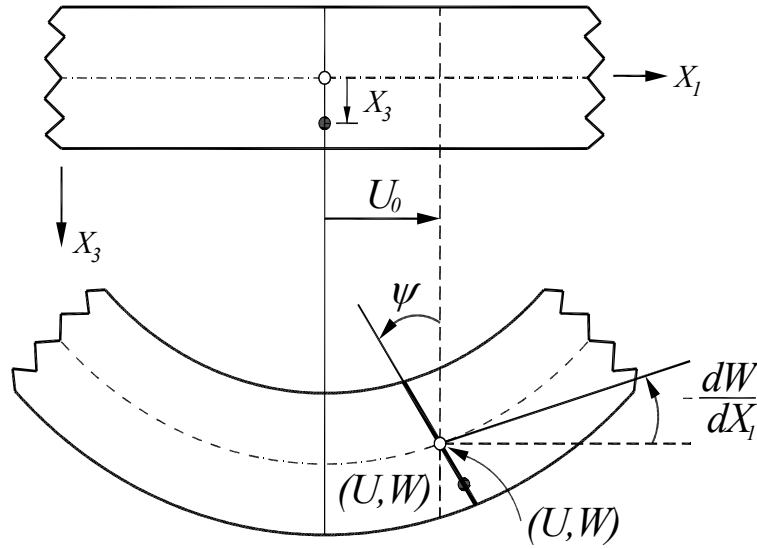
$$e_{13}=0 \tag{3.6}$$

Gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bünye bağıntıları kullanılırsa gerilme büyüklükleri izleyen şekilde elde edilir.

$$\sigma_{11} = E_{11} e_{11} = -X_3 E_{11} \frac{d^2 W}{dX_1^2} \quad (3.7)$$

3.1.2 Timoshenko Kirişi için Yerdeğiştirme, Şekil Değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar

Timoshenko kiriş teorisinde ise eğilmeden önce tarafsız eksene dik ve düzlem olan kesitler, eğilmeden sonra yine düzlem kalır, ancak tarafsız eksene dik kalmazlar. Yani kayma gerilmelerinin kirişin eğilmesine etkisi göz önüne alınmış olur. Timoshenko kiriş teorisinde kesitte sabit bir kayma şekil değiştirmesi (sabit kayma gerilmesi) dağılımı kabul edilir. Ancak mukavemetten bildiğimiz gibi kayma gerilmesi dağılışı sabit değildir. Bu sebepten dolayı oluşan bu hatayı düzeltmek için Timoshenko kiriş teorisinde düzeltme faktörü kullanılır. Şekil 3.3’de bir Timoshenko kirişinin eğilme öncesi ve sonrasındaki durumu gösterilmiştir.



Şekil 3.3 Timoshenko kiriş teorisine göre alınan bir kesitin durumu

Yukarıdaki açıklamalara göre Timoshenko kiriş teorisindeki yer değiştirme alanı izleyen şekilde verilmektedir:

$$U(X_1, X_3, t) = U_0 - X_3 \psi(X_1, t) \quad (3.8)$$

$$W(X_1, X_3, t) = W(X_1, t) \quad (3.9)$$

Birinci mertebe teorisiyle çalışıldığı için eksen yerdeğiştirmesi olan U_0 değeri sıfıra çok yakın olup ihmal edilecektir.

Burada $W(X_1, t)$ kiriřin dūřey yer deęiřtirmelerini, $\psi(X_1, t)$ kiriř kesitinin dōnmelerini göstermektedir.

Yer değiştirmelerle şekil değiştirmeler arasındaki kinematik bağıntıların kullanılmasıyla Timoshenko kirişindeki şekil değiştirme ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$e_{11} = -X_3 \frac{d\psi}{dX_1} \quad (3.10)$$

$$e_{13} = \frac{dW}{dX_1} - \psi \quad (3.11)$$

Gerilmelerle řekil deęiřtirmeler arasındaki būnye baęıntılarını kullanılırsa gerilme būyūklükleri izleyen řekilde elde edilir:

$$\sigma_{11} = E_{11} e_{11} = -E_{11} \cdot X_3 \frac{d\psi}{dX_1} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{13} = k_s G_{13} e_{13} = k_s G_{13} \left(\frac{dW}{dX_1} - \psi \right) \quad (3.13)$$

Burada σ_{11} , X_1 doęrultusundaki normal gerilme, σ_{13} , $(X_1 - X_3)$ dūzlemindeki kayma gerilmesi, k_s kayma gerilmesi daęılıřı dūzeltme faktōrū, E_{11} Young (Elastisite) modūlū ve G_{13} kayma modūlūdūr.

3.2.Potansiyel Enerji

3.2.1.Euler-Bernoulli Kirişı için Potansiyel Enerji

Kiriş hacmi üzerinde hesaplanan şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki şekildedir:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV \quad (3.14)$$

Kiriş için bu ifade Kartezyen koordinatlarda daha açık olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{11} \epsilon_{11} dX_1 dX_2 dX_3 \quad (3.15)$$

(3.7) numaralı bağıntıda verilmiş olan gerilme ifadesi (3.15) bağıntısında yerine yazılırsa potansiyel enerji ifadesi izleyen şekli alır:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_{11} b X_3^2 \frac{d^2 W}{dX_1^2} dX_3 dX_1 \quad (3.16)$$

Kiriş kesitinin eylemsizlik momenti I_{x_2} nın aşağıda (3.17) bağıntısıyla verilen tanımı göz önüne alınırsa potansiyel enerji ifadesi (3.18) bağıntısıyla ifade edilir.

$$I_{x_2} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_3^2 dX_3 \quad (3.17)$$

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} E_{11} I_{x_2} \left(\frac{d^2 W(X_1, t)}{dX_1^2} \right)^2 dX_1 \quad (3.18)$$

Sayısal sonuçlar kısmında boyutsuz sonuçlar elde edileceğinden dolayı potansiyel enerji ifadesini boyutsuz büyüklükler cinsinden yazabilmek için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır:

$$x_1 = \frac{X_1}{L}, \quad w = \frac{W}{L} \quad (3.19)$$

Bu durumda (3.18) bağıntısıyla verilen potansiyel enerji ifadesi izleyen şekli alır:

$$U_i = \frac{E_{11} I_{x_2}}{2L} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2 w}{dx_1^2} \right)^2 dx_1 \quad (3.20)$$

3.2.2 Timoshenko Kirişi için Potansiyel Enerji

Timoshenko kirişi için potansiyel enerji ifadesi kartezyen koordinatlarda izleyen şekilde ifade edilir:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_{11} e_{11} + \sigma_{13} e_{13}) dX_1 dX_2 dX_3 \quad (3.21)$$

Şekil değiştirmeler ve gerilmelerin (3.10), (3.11) ve (3.12), (3.13) numaralı bağıntılarda verilen ifadeleri (3.21) numaralı bağıntıda verilen potansiyel enerji ifadesinde yerlerine yazılırsa:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b (e_{11} E_{11} e_{11} + k_s e_{13} G_{13} e_{13}) dX_3 dX_1 \quad (3.22)$$

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} D_{xx} \left(\frac{d\psi}{dX_1} \right)^2 dX_1 + \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k_s A_{xz} \left(\frac{dW}{dX_1} - \psi \right)^2 dX_1 \quad (3.23)$$

ifadeleri elde edilir. (3.23) ifadesindeki D_{xx} ve A_{xz} kesit rijitlikleri izleyen şekilde verilmiştir:

$$D_{xx} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_{11} X_3^2 dX_3 \quad (3.24)$$

$$A_{xz} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_{13} dX_3 \quad (3.25)$$

Yukarıdaki kesit rijitlikleri dikdörtgen kesitler için aşağıdaki şekli alır:

$$D_{xx} = E_{11} I_{x_2} \quad (3.26)$$

$$A_{xz} = G_{13} A \quad (3.27)$$

Burada I_{x_2} kiriş kesitinin eylemsizlik momenti, A ise kiriş kesitinin alanıdır. Bu durumda Timoshenko kirişinin potansiyel enerjisi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[E_{11} I_{x_2} \left(\frac{d\psi}{dX_1} \right)^2 + k_s G_{13} A \left(\frac{dW}{dX_1} - \psi \right)^2 \right] dX_1 \quad (3.28)$$

İzleyen boyutsuz büyüklükler tanımlanır ve (3.28) bağıntısında yerlerine yazılırsa kirişe ait potansiyel enerji boyutsuz büyüklükler cinsinden izleyen şekilde elde edilir:

$$x_1 = \frac{X_1}{L}, \quad w = \frac{W}{L}, \quad \phi = \psi \quad (3.29)$$

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{E_{11} I_{x_2}}{L} \left(\frac{d\phi}{dx_1} \right)^2 + k_s G_{13} A L \left(\frac{dw}{dx_1} - \phi \right)^2 \right] dx \quad (3.30)$$

3.3 Kinetik Enerji

3.3.1 Euler-Bernoulli Kirişı için Kinetik Enerji

Titreşim yapan kiriş kesitinin herhangi bir noktasının herhangi bir andaki hızı izleyen şekilde ifade edilir:

$$v_{X_1} = \frac{dU(X_1, X_3, t)}{dt} = -X_3 \frac{d^2W(X_1, t)}{dx dt} \quad (3.31)$$

$$v_{X_3} = \frac{dW(X_1, t)}{dt} \quad (3.32)$$

Euler-Bernoulli kirişı için kinetik enerji ifadesi elde edilirken, dönme ataletinin etkisi ihmal edileceğinden dolayı kirişin kesitlerinin hızının v_x bileşeni ihmal edilir. Böylece tüm kiriş için kinetik enerji ifadesi aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{dW(X_1, t)}{dt} \right)^2 dV \quad (3.33)$$

burada ρ kirişin birim hacim kütesidir. Bu ifade kartezyen koordinatlarda daha ayrıntılı olarak izleyen şekilde yazılabilir:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{dW(X_1, t)}{dt} \right)^2 dX_1 dX_2 dX_3 \quad (3.34)$$

(3.34) numaralı bağıntıdaki integral işleminde gerekli hesaplamalar yapılırsa Euler-Bernoulli kirişı için kinetik enerji ifadesi izleyen şekilde elde edilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho A \left(\frac{dW(X_1, t)}{dt} \right)^2 dX_1 \quad (3.35)$$

(3.19) bağıntısındaki boyutsuz büyüklükler kullanılırsa kirişe ait kinetik enerji ifadesi izleyen şekilde olacaktır:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho A L^3 \left(\frac{dW(x_1, t)}{dt} \right)^2 dx_1 \quad (3.36)$$

3.3.2 Timoshenko Kirişi için Kinetik Enerji

Timoshenko kirişi için hız ifadeleri Euler-Bernoulli kirişi için çıkarılan hız ifadelerine benzer şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$v_{X_1} = \frac{dU(X_1, X_3, t)}{dt} = -X_3 \frac{d\psi(X_1, t)}{dt} \quad (3.37)$$

$$v_{X_3} = \frac{dW(X_1, t)}{dt} \quad (3.38)$$

Kirişin herhangi bir zamandaki kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left[\rho (v_{X_1}^2 + v_{X_3}^2) \right] dV \quad (3.39)$$

şeklinde olacaktır. (3.37) ve (3.38) bağıntıları (3.39) bağıntısında yerlerine yazılırsa kinetik enerji ifadesi aşağıdaki şekli alır:

$$T = \frac{b}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (v_{X_1}^2 + v_{X_3}^2) \rho dX_3 dX_1 \quad (3.40)$$

(3.40) ifadesinde gerekli integral işlemleri yapılır ve (3.41) de verilen atalet büyüklükleri tanımlanırsa (3.40) bağıntısıyla verilen kinetik enerji ifadesi (3.42) bağıntısındaki şeklini alır.

$$(J_A, J_D) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, X_3^2) \rho dX_3 \quad (3.41)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J_A \left(\frac{dW}{dX_1} \right)^2 dX_1 + \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J_D \left(\frac{d\psi}{dX_1} \right) dX_1 \quad (3.42)$$

Dikdörtgen kesit için J_A ve J_D büyüklükleri izleyen şekilde olacaktır:

$$J_A = \rho A \quad (3.43)$$

$$J_D = \rho I_{x_2} \quad (3.44)$$

Bu durumda Timoshenko kirişinin kinetik enerjisi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\rho A \left(\frac{dW}{dt} \right)^2 + \rho I_{x_2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] dX_1 \quad (3.45)$$

Timoshenko kirişi için elde edilmiş olan kinetik enerji ifadesini boyutsuz büyüklükler cinsinden yazabilmek için, (3.29) bağıntısında tanımlanmış olan boyutsuz büyüklükler kullanılırsa (3.45) bağıntısıyla verilen kinetik enerji ifadesi izleyen şekli alır:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\rho A L^3 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + \rho I_{x_2} L \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] dx_1 \quad (3.46)$$

4.KURAMSAL ÇALIŞMA

4.1 Lagrange Denklemlerinin Tüm Bölge Üzerinde Geçerli Deneme Fonksiyonlarıyla Kullanımı: Ritz Metodu

Lagrange denklemlerinin uygulanabilmesi için kirişe ait w çökme ve ϕ dönme fonksiyonları için bazı ifadelerin seçilmesi gereklidir. Bu çalışmada söz konusu bilinmeyen büyüklüklere polinomlar kullanılarak yaklaşım sağlanmıştır. Bu amaçla, sadece geometrik sınır koşulunu sağlayan bazı ifadeler $w(x_1, t)$ ve $\phi(x_1, t)$ için seçilir ve Lagrange denklemleri kullanılırsa doğal sınır koşulları da sağlatılmış olur. Lagrange denklemleri kullanılarak, yer değiştirme fonksiyonu olan $w(x_1, t)$ ve dönme fonksiyonu olan $\phi(x_1, t)$ nin kabul edilebilir fonksiyonların lineer serisi olarak temsil edilmesiyle ve serideki katsayıların Lagrange denklemlerini sağlayacak şekilde ayarlanmasıyla yer değiştirme ve dönme fonksiyonları için bir yaklaşık çözüm bulunur. Lagrange eşitliğinin uygulanması için deneme fonksiyonları olan $w(x_1, t)$ ve $\phi(x_1, t)$ ifadelerine uzay bağımlı $x_1^0, x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{N-1}$ koordinatları ve zaman bağımlı genelleştirilmiş $q_n(t)$ büyüklükleriyle yaklaşım sağlanmıştır. Böylece yer değiştirme ve dönme fonksiyonları izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$w(x_1, t) = \sum_{m=1}^M A_m(t) x_1^{m-1} \quad (4.1)$$

$$\phi(x_1, t) = \sum_{m=1}^M B_m(t) x_1^{m-1} \quad (4.2)$$

Lagrange denklemlerinin genel ifadesi izleyen şekilde verilmiştir:

$$\frac{\partial I}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (4.3)$$

Burada q_k büyüklükleri genelleştirilmiş koordinatlardır. I ise probleme ait fonksiyonel olup izleyen şekilde tanımlanmıştır:

$$I = T - U \quad (4.4)$$

Lagrange denklemleri ile ilgili bu kısa bilgiden sonra, daha önce enerji ifadeleri çıkarılmış olan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimleri için nasıl uygulanacağı izleyen bölümlerde açıklanacaktır.

4.1.1 Euler-Bernoulli Kirişi için Kuramsal Çalışma

Lagrange denklemlerinin uygulanabilmesi amacıyla kirişin düşey yer değiştirmesi için (4.1) bağıntısında verildiği gibi polinomlar kullanılacaktır. Yani,

$$w(x_1, t) = \sum_{m=1}^M A_m(t) x_1^{m-1} \quad (4.5)$$

Burada $A_m(t)$ zaman bağımlı genelleştirilmiş koordinatları, x_1^{m-1} de uzay bağımlı koordinatları göstermektedir. Eğer kiriş serbest titreşim yapıyorsa, kirişe ait zaman bağımlı genelleştirilmiş $A_m(t)$ koordinatı izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$A_m(t) = \bar{A}_m e^{i\omega t} \quad (4.6)$$

Burada ω kirişin boyutlu olan serbest titreşim frekansıdır. Bu durumda kirişe ait boyutsuz yer değiştirme fonksiyonunun genliği de aşağıdaki şekilde olur:

$$w(x_1) = \sum_{m=1}^M \bar{A}_m x_1^{m-1} \quad (4.7)$$

Ele alınan kiriş basit mesnetli olduğu için mesnet koşulları olarak kirişin her iki ucunda düşey yer değiştirmeler sıfırdır. Bu çalışmada mesnet koşulları Lagrange çarpanları ile sağlatılmış olup kısıtlılık koşulları izleyen şekilde verilmiştir:

$$\alpha_i w(x_{Si}, t) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.8)$$

Burada x_{S_i} i inci mesnetin koordinatı ve α_i Lagrange çarpanları olup bu problemde mesnet reaksiyonlarına karşılık gelir. Lagrange çarpanları, problemin Lagrangian fonksiyonelinin teşkil edilmesine imkan sağlar. Böylece;

$$L = I + \alpha_i w(x_{S_i}, t) \quad i = 1, 2 \quad (4.9)$$

Elde edilen Lagrangian fonksiyoneline uygulanacak olan Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\frac{\partial L}{\partial A_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_k} = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, M+2 \quad (4.10)$$

(4.10) bağıntısında verilen denklemlerde nokta zamana göre türevi göstermektedir. Problemin sayısal analizinde aşağıda verilmiş olan boyutsuz frekans parametresi kullanılacaktır:

$$\lambda^2 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{E_{11} I} \quad (4.11)$$

(4.10) bağıntısıyla verilen Lagrange denklemlerinin uygulanmasıyla ve

$$A_{M+i} = \alpha_i \quad i = 1, 2 \quad (4.12)$$

tanımının yapılmasıyla izleyen lineer cebrik denklem takımı (frekans denklemi) elde edilir.

$$[K] \{ \bar{A} \} - \lambda^2 [M] \{ \bar{A} \} = \{ 0 \} \quad (4.13)$$

(4.13) eşitliğiyle verilen $[K]$ ve $[M]$ matrisleri $(M+2) \times (M+2)$ boyutlarında rijitlik ve kütle matrisi olup elemanları izleyen şekildedir:

$$K_{km} = \int_{-1/2}^{1/2} (x_1^{k-1})'' (x_1^{m-1})'' dx_1 \quad k, m = 1, 2, 3, \dots, M$$

$$K_{km} = x_{1Sm}^{k-1}, \quad k = 1, \dots, M; \quad m = M+1, M+2$$

$$\begin{aligned}
K_{km} &= x_{1Sk}^{m-1}, & k &= M+1, M+2; \quad m=1, \dots, M \\
A_{km} &= 0, & k, m &= M+1, M+2 \\
M_{km} &= \int_{-1/2}^{1/2} (x_1^{k-1})(x_1^{m-1}) dx_1 & k, m &= 1, 2, 3, \dots, M \\
M_{km} &= 0, & k, m &= M+1, M+2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.13) de verilen denkleme kirişin frekans denklemi de denilmektedir. Özdeğerler olan λ değerleri denklem (4.13) ile verilen eşitlikler sisteminin determinantının sıfır olmasından bulunur.

4.1.2 Timoshenko Kirişi için Kuramsal Çalışma

Timoshenko kiriş teorisinde bilinmeyen fonksiyonlar düşey yer değiştirme ve dönme fonksiyonlarıdır. Bu durumda, Lagrange denklemlerini uygulayabilmek için (4.1) ve (4.2) eşitliklerinde düşey yer değiştirme ve dönme fonksiyonları için izleyen ifadeler kullanılacaktır:

$$w(x_1, t) = \sum_{m=1}^M A_m(t) x_1^{m-1} \tag{4.15}$$

$$\phi(x_1, t) = \sum_{m=1}^M B_m(t) x_1^{m-1} \tag{4.16}$$

Burada $A_m(t)$ ve $B_m(t)$ zaman bağımlı genelleştirilmiş koordinatları, x_1^{m-1} de uzay bağımlı koordinatları göstermektedir. Eğer kiriş serbest titreşim yapıyorsa, kirişe ait zaman bağımlı genelleştirilmiş $A_m(t)$ ve $B_m(t)$ koordinatları izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$A_m(t) = \bar{A}_m e^{i\omega t} \tag{4.17}$$

$$B_m(t) = \bar{B}_m e^{i\omega t} \tag{4.18}$$

Bulunmuş olan ω kirişin boyutlu olan serbest titreşim frekansıdır. Kirişin boyutsuz yer değiştirme fonksiyonunun genliği de izleyen şekilde olur:

$$w(x_1) = \sum_{m=1}^M \bar{A}_m x_1^{m-1} \quad (4.19)$$

$$\phi(x_1) = \sum_{m=1}^M \bar{B}_m x_1^{m-1} \quad (4.20)$$

Basit mesnetli kirişin her iki ucunda düşey yer değiştirmeler sıfırdır. Mesnet koşulları ise Lagrange çarpanları ile sağlatılmış olup kısıtlılık koşulları izleyen şekilde verilmiştir:

$$\alpha_i w(x_{Si}, t) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.21)$$

x_{Si} i inci mesnetin koordinatı ve α_i Lagrange çarpanları olup, problemde mesnet reaksiyonlarına karşılık gelir. Burada Lagrange çarpanları kullanılırsa, problemin Lagrangian fonksiyoneli elde edilmiş olur. Böylece;

$$L = I + \alpha_i w(x_{Si}, t) \quad i = 1, 2 \quad (4.22)$$

elde edilen Lagrangian fonksiyoneline uygulanacak olan Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2M+2 \quad (4.23)$$

Burada;

$$q_k = A_k \quad k=1,2,\dots,M \quad (4.24)$$

$$q_k = B_k \quad k=M+1,\dots,2M \quad (4.25)$$

$$q_{2M+1} = \alpha_1 ; q_{2M+2} = \alpha_2 \quad (4.26)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (4.23) bağıntısında verilen denklemlerde nokta zamana göre türevi gösterir. Problemin sayısal analizinde aşağıda verilmiş olan boyutsuz büyüklükler kullanılacaktır:

$$\lambda^2 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{E_{11} I}, \quad D = \frac{k_s G A L^2}{E_{11} I}, \quad \mu = \frac{h^2}{12 L^2} \quad (4.27)$$

(4.23) bağıntısıyla verilen Lagrange denklemlerinin uygulanmasıyla aşağıda verilen lineer cebrik denklem takımı (frekans denklemi) elde edilir:

$$[K]\{\bar{A}\} - \lambda^2 [M]\{\bar{A}\} = \{0\} \quad (4.28)$$

(4.28) eşitliğiyle verilen $[K]$ ve $[M]$ matrisleri $(2M+2) \times (2M+2)$ boyutlarında rijitlik ve kütle matrisi olup elemanları izleyen şekildedir:

$$K_{km} = \int_{-0.5}^{0.5} D (x_1^{k-1})' (x_1^{m-1})' d x_1 \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$K_{km} = \int_{-0.5}^{0.5} D (x_1^{k-1})' (x_1^{m-1}) d x_1 \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad m = M+1, \dots, 2M$$

$$K_{km} = \int_{-0.5}^{0.5} D (x_1^{k-1}) (x_1^{m-1})' d x_1 \quad k = M+1, \dots, 2M, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$K_{km} = \int_{-0.5}^{0.5} \left[D x_1^{k-1} x_1^{m-1} + (x_1^{k-1})' (x_1^{m-1})' \right] d x_1 \quad k = M+1, \dots, 2M, \quad m = M+1, \dots, 2M$$

$$M_{km} = \int_{-0.5}^{0.5} x_1^{k-1} x_1^{m-1} d x_1 \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$M_{km} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad m = M+1, \dots, 2M$$

$$\begin{aligned}
M_{km} &= 0 & k &= M+1, \dots, 2M, & m &= 1, 2, \dots, M \\
M_{km} &= \int_{-0.5}^{0.5} \mu x_1^{k-1} x_1^{m-1} dx_1 & k &= M+1, \dots, 2M, & m &= M+1, \dots, 2M
\end{aligned}
\tag{4.29}$$

Özdeğerler olan λ değerleri denklem (4.28) ile verilen eşitlikler sisteminin determinantının sıfır olmasından bulunur.

4.2 Enerji Tabanlı Sonlu Farklar ile Kuramsal Çalışma

Sonlu farklar metodu, analitik çözümü güç olan birçok problemde başvurulmuş, uygulama alanı çok geniş olan sayısal bir metottur. Bu metotta kirişin diferansiyel denklemi sonlu farklardan oluşan bir cebirsel denklem takımına dönüştürülür. $y = f(x)$ eğrisi göze alınırsa, birinci ve ikinci türevlerin

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_m \cong \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_m = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2\Delta x}
\tag{4.30}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{(\Delta x)^2}
\tag{4.31}$$

şeklinde olduğu bilinmektedir.

4.2.1 Euler-Bernoulli Kirişi için Kuramsal Çalışma

(4.10) ifadesinde genelleştirilmiş koordinatlarda verilmiş Lagrange eşitliklerinin sonlu farklar tekniği ile çözülebilmesi için (3.20) ve (3.36) eşitliklerinin Lagrange eşitliklerinde yerine konması ve türev ifadelerinin sonlu fark operatörleri ile değiştirilmesi gerekir. Sonlu fark operatörlerinin uygulandığı Lagrange eşitliklerinin gösterimi

$$\frac{\partial L}{\partial W_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{W}_i} = 0
\tag{4.32}$$

şeklinde olur. Genelleştirilmiş koordinat A_k yerine W_i alınmıştır. (4.32) ifadesi kirişin her noktasına uygulanır. Bunun için öncelikle şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadelerinin boyutsuz büyüklüklerle herhangi bir pivot noktası için sonlu fark açılımları yazılırsa:

$$U_i = \frac{E_{11} I_{x_2}}{2L} \left(\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\bar{\Delta}^2} \right)^2 \bar{\Delta} \quad (4.33)$$

$$T_i = \frac{1}{2} \rho A L^3 (\dot{w})^2 \bar{\Delta} \quad (4.34)$$

eşitlikleri elde edilir. Kirişin tamamı göz önünde bulundurulursa şekil değiştirme enerjisi ve kinetik enerji ifadeleri

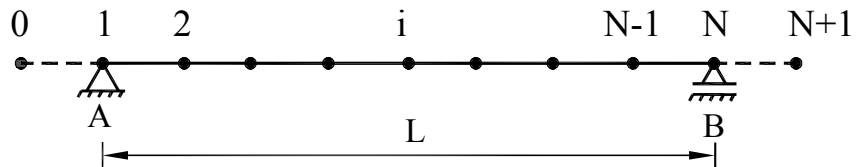
$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (4.35)$$

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \quad (4.36)$$

halini alır. (4.32) ifadesi kirişin tamamına uygulandığında, pivot noktalarının konumlarına göre beş farklı ifade elde edilir. Ayrıca, denklemlerin elde edilmesinde izleyen tanımlamalar yapılacaktır:

$$w = \bar{w} \cdot e^{i\omega t} \quad (4.37)$$

$$\lambda^2 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{E_{11} I} \quad (4.38)$$



Şekil 4.1 Basit kirişte düğüm noktalarının gösterilmesi

Kiriş e ait toplam Şekil değiştirme ve kinetik enerjileri bulunduktan sonra Lagrange denklemlerinin kirişin sol ucunun dışındaki fiktif noktada uygulanması izleyen ifadeyi verir (0 noktası):

$$\bar{w}_0\left(\frac{2}{\Delta}\right) - \bar{w}_1\left(\frac{4}{\Delta}\right) + \bar{w}_2\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 0 \quad (4.39)$$

Lagrange denklemlerinin kirişin sol ucunda bulunan noktada uygulanması izleyen ifadeyi verir (1 noktası):

$$\bar{w}_0\left(\frac{-4}{\Delta}\right) + \bar{w}_1\left(\frac{10}{\Delta} - 2\lambda^2\bar{\Delta}\right) + \bar{w}_2\left(\frac{-8}{\Delta}\right) + \bar{w}_3\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 0 \quad (4.40)$$

Lagrange denklemlerinin kirişin uç noktaları arasında bulunan herhangi bir noktada uygulanması izleyen ifadeyi verir (i noktası):

$$\bar{w}_{i-2}\left(\frac{2}{\Delta}\right) + \bar{w}_{i-1}\left(\frac{-8}{\Delta}\right) + \bar{w}_i\left(\frac{12}{\Delta} - 2\lambda^2\bar{\Delta}\right) + \bar{w}_{i+1}\left(\frac{-8}{\Delta}\right) + \bar{w}_{i+2}\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 0 \quad (4.41)$$

Lagrange denklemlerinin kirişin sağ ucunda bulunan noktada uygulanması izleyen ifadeyi verir (N noktası):

$$\bar{w}_{N-2}\left(\frac{2}{\Delta}\right) + \bar{w}_{N-1}\left(\frac{-8}{\Delta}\right) + \bar{w}_N\left(\frac{10}{\Delta} - 2\lambda^2\bar{\Delta}\right) + \bar{w}_{N+1}\left(\frac{-4}{\Delta}\right) = 0 \quad (4.42)$$

Lagrange denklemlerinin kirişin sağ ucunun dışındaki fiktif noktada uygulanması izleyen ifadeyi verir (N+1 noktası):

$$\bar{w}_{N-1}\left(\frac{2}{\Delta}\right) + \bar{w}_N\left(\frac{-4}{\Delta}\right) + \bar{w}_{N+1}\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 0 \quad (4.43)$$

Yukarıdaki (4.39), (4.40), (4.41), (4.42), (4.43) denklemleri matris formunda düzenlenirse izleyen Şekli alır:

$$[A]\{\bar{w}\} - \lambda^2 [B]\{\bar{w}\} = 0 \quad (4.44)$$

Sabit mesnetli kirişle çalışıldığından izleyen sınır koşulları vardır:

$$\bar{w}_1 = 0, \quad \bar{w}_N = 0 \quad (4.45)$$

Söz konusu (4.45) sınır koşullarının göz önüne alınmasıyla (4.44) homojen denklem takımı çözülürse kirişe ait λ^2 özdeğerleri elde edilir. Sınır koşullarının göz önüne alınmasından sonra elde edilen matrislerin boyutu $N \times N$ olur. Yukarıda verilen matris formundaki (4.44) özdeğer denkleminin açık ifadesi Eklerde (E1) denklemi ile verilmiştir.

4.2.2 Timoshenko Kirişi için Kuramsal Çalışma

Euler-Bernoulli kirişine benzer olarak Timoshenko kirişinde; (4.23) ifadesinde genelleştirilmiş koordinatlarda verilmiş Lagrange eşitliklerinin sonlu farklar tekniği ile çözülebilmesi için (3.30) ve (3.46) eşitliklerinin Lagrange eşitliklerinde yerine konması ve türev ifadelerinin sonlu fark operatörleri ile değiştirilmesi gerekir. Sonlu fark operatörlerinin uygulandığı Lagrange eşitliklerinin gösterimi

$$\frac{\partial L}{\partial W_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{W}_i} = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} = 0 \quad (4.47)$$

şeklindedir. Genelleştirilmiş koordinat q_k yerine W_i ve ψ_i alınmıştır. (4.46) ve (4.47) ifadeleri kirişin her noktasına uygulanır. Bunun için öncelikle şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadelerinin boyutsuz büyüklüklerle herhangi bir pivot noktası için sonlu fark açılımları yazılırsa:

$$U_i = \frac{E_{11} I_{x_2}}{2L} \left(\frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2\bar{\Delta}} \right)^2 \bar{\Delta} + \frac{k_s G_{13} AL}{2} \left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\bar{\Delta}} \right)^2 \bar{\Delta} + \frac{k_s G_{13} AL}{2} (\psi_i)^2 \bar{\Delta} - k_s G_{13} AL \cdot \left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\bar{\Delta}} \right) \cdot \psi_i \cdot \bar{\Delta} \quad (4.48)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho AL^3 (w_i)^2 + \frac{1}{2} \rho I_{x_2} L (\psi_i)^2 \quad (4.49)$$

denklemleri elde edilir. Kirişin tamamı gözönüne alınırsa enerji ifadeleri

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (4.50)$$

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \quad (4.51)$$

şeklini alır. (4.46) ve (4.47) ifadesi kirişin tamamına uygulandığında, pivot noktalarının konumlarına göre beşer farklı ifade elde edilir. Ayrıca, denklemlerin elde edilmesinde izleyen tanımlamalar yapılacaktır:

$$w = \bar{w} \cdot e^{i\omega t} \quad (4.52)$$

$$\psi = \bar{\psi} \cdot e^{i\omega t} \quad (4.53)$$

$$\frac{\rho AL^4 \omega^2}{E_{11} I} = \lambda^2, \quad \frac{h^2}{12L^2} = \mu, \quad \frac{k G_{13} AL^2}{E_{11} I} = D \quad (4.54)$$

Kirişe ait toplam şekil değiştirme ve kinetik enerjileri bulunduktan sonra Lagrange denklemlerinin kirişin sol ucunun dışındaki fiktif noktada uygulanması izleyen ifadeyi verir (0 noktası):

$$\frac{-D}{2\bar{\Delta}} \cdot \bar{w}_2 + \frac{D}{2\bar{\Delta}} \cdot \bar{w}_0 + D \cdot \bar{\psi}_1 = 0 \quad (4.55)$$

$$\left(\frac{1}{2\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_0 + \left(\frac{-1}{2\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_2 = 0 \quad (4.56)$$

Lagrange denklemlerinin kirişin sol ucunda bulunan noktada uygulanması izleyen ifadeyi verir (1 noktası):

$$\left(\frac{D}{2\Delta} - 2\lambda^2 \bar{\Delta}\right) \cdot \bar{w}_1 - \frac{D}{2\Delta} \cdot \bar{w}_3 + D \cdot \bar{\psi}_2 = 0 \quad (4.57)$$

$$\left(\frac{1}{2\Delta} - 2\lambda^2 \mu \cdot \bar{\Delta} + 2D \cdot \bar{\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_1 + \left(\frac{-1}{2\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_3 + (D) \cdot \bar{w}_0 + (-D) \cdot \bar{w}_2 = 0 \quad (4.58)$$

Lagrange denklemlerinin kirişin uç noktaları arasında bulunan herhangi bir noktada uygulanması izleyen ifadeyi verir (i noktası):

$$\left(\frac{D}{\Delta} - 2\lambda^2 \bar{\Delta}\right) \cdot \bar{w}_i - \frac{D}{2\Delta} \cdot \bar{w}_{i-2} - \frac{D}{2\Delta} \cdot \bar{w}_{i+2} - D \cdot \bar{\psi}_{i-1} + D \cdot \bar{\psi}_{i+1} = 0 \quad (4.59)$$

$$\left(\frac{-1}{2\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_{i-2} + \left(\frac{1}{\Delta} - 2\lambda^2 \mu \cdot \bar{\Delta} + 2D \cdot \bar{\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_i + \left(\frac{-1}{2\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_{i+2} + (D) \cdot \bar{w}_{i-1} + (-D) \cdot \bar{w}_{i+1} = 0 \quad (4.60)$$

Lagrange denklemlerinin kirişin sağ ucunda bulunan noktada uygulanması izleyen ifadeyi verir (N noktası):

$$\left(\frac{D}{2\Delta} - 2\lambda^2 \bar{\Delta}\right) \cdot \bar{w}_N - \frac{D}{2\Delta} \cdot \bar{w}_{N-2} + D \cdot \bar{\psi}_{N-1} = 0 \quad (4.61)$$

$$\left(\frac{-1}{2\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_{N-2} + \left(\frac{1}{2\Delta} - 2\lambda^2 \mu \cdot \bar{\Delta} + 2D \cdot \bar{\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_N + (D) \cdot \bar{w}_{N-1} + (-D) \cdot \bar{w}_{N+1} = 0 \quad (4.62)$$

Lagrange denklemlerinin kirişin sağ ucunun dışındaki fiktif noktada uygulanması izleyen ifadeyi verir (N+1 noktası):

$$\frac{D}{2\Delta} \cdot \bar{w}_{N+1} - \frac{D}{2\Delta} \cdot \bar{w}_{N-1} - D \cdot \bar{\psi}_N = 0 \quad (4.63)$$

$$\left(\frac{-1}{2\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_{N-1} + \left(\frac{1}{2\Delta}\right) \cdot \bar{\psi}_{N+1} = 0 \quad (4.64)$$

$$\hat{\delta}_{i+1} = \bar{w}_i ; \hat{\delta}_{i+N+3} = \bar{\psi}_i ; i = 0, N+1 \quad (4.65a)$$

(4.55) -(4.64) denklemleri, (4.65a) daki tanımlamalar kullanılırsa, (4.65b) de verilen matris formunda ifade edilir.

$$[A]\{\hat{\delta}\} - \lambda^2 [B]\{\hat{\delta}\} = 0 \quad (4.65b)$$

Sabit mesnetli kirişle çalışıldığından izleyen sınır koşulları vardır:

$$\bar{w}_1 = 0, \bar{w}_N = 0 \quad (4.66)$$

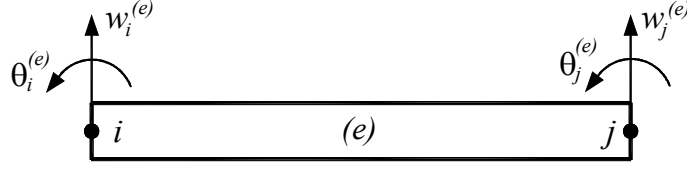
Söz konusu (4.66) sınır koşullarının göz önüne alınmasıyla (4.65) homojen denklem takımı çözülürse kirişe ait λ^2 özdeğerleri elde edilir. Sınır koşullarının göz önüne alınmasından sonra elde edilen matrislerin boyutu $(2N+2) \times (2N+2)$ olur. Yukarıda verilen matris formundaki (4.65) özdeğer denkleminin açık ifadesi Eklerde (E2) denklemi ile verilmiştir.

4.3 Sonlu Elemanlar ile Kuramsal Çalışma

4.3.1 Euler-Bernoulli Kirişi için Kuramsal Çalışma

Sonlu eleman formülasyonu sürekli olan bir alan değişkenini düğüm noktalarıyla ayrıklaştırarak ilgili alan değişkenini düğüm noktasında seçilen bilinmeyenler cinsinden ifade etmeye dayanır. Bir kiriş eğilme elemanı için her bir düğüm noktasında biri düşey yer değiştirme w_i , diğeri dönme θ_i olmak üzere iki adet bilinmeyen alınır. Ele alınan serbest titreşim probleminde zaman faktörü de olduğu için düğüm noktası yer değiştirmeleri zamanın fonksiyonudur. Bu prensibe göre sonlu bir kiriş parçası (eğilme elemanı) ve düğüm noktası yer değiştirmeleri pozitif yönleri dikkate alınarak Şekil 4.2’de gösterilmiştir. Düğüm noktası yer değiştirmeleri (4.67) de verildiği gibidir:

$$\{\delta\}_{(e)} = \left[w_i^{(e)}(t), \theta_i^{(e)}(t), w_j^{(e)}(t), \theta_j^{(e)}(t) \right]^T \quad (4.67)$$



Şekil 4.2 Eğilme elemanı

(4.67) numaralı bağıntıda verilen düğüm noktası yer değiştirmeleri kullanılarak, Şekil 4.2’de gösterilen eğilme elemanı için düşey yer değiştirme fonksiyonu izleyen şekilde ayrıklaştırılabilir:

$$w^{(e)}(x_1, t) = f\left(w_i^{(e)}(t), \theta_i^{(e)}(t), w_j^{(e)}(t), \theta_j^{(e)}(t), x_1\right) \quad (4.68)$$

Şekil 4.2’de ele alınan eğilme elemanı aşağıda gösterilen sınır koşullarını sağlamaktadır:

$$w^{(e)}(x_1 = x_i, t) = w_i^{(e)}(t); \quad w^{(e)}(x_1 = x_j, t) = w_j^{(e)}(t) \quad (4.69)$$

$$\frac{dw^{(e)}}{dx_1}(x_1 = x_i, t) = \theta_i^{(e)}(t); \quad \frac{dw^{(e)}}{dx_1}(x_1 = x_j, t) = \theta_j^{(e)}(t) \quad (4.70)$$

Burada x_i ve x_j eleman koordinatları olup, bundan sonraki hesaplamalarda kolaylık sağlaması yönüyle $x_i = 0$ ve $x_j = L$ şeklinde seçilecektir. Yukarıda ifade edilen dört sınır şartı ve daha önce verilmiş olan potansiyel enerji ifadesindeki yer değiştirme fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi de dikkate alınarak, yer değiştirme fonksiyonu aşağıdaki şekilde üçüncü dereceden bir Lagrange polinomu olarak seçilmiştir.

$$w^{(e)}(x_1, t) = a_0(t) + a_1(t)x_1 + a_2(t)x_1^2 + a_3(t)x_1^3 \quad (4.71)$$

(4.69) ve (4.70) bağıntılarıyla verilen sınır koşulları uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
w^{(e)}(x_1 = 0, t) &= w_i^{(e)}(t) = a_o(t) \\
w^{(e)}(x_1 = L, t) &= w_j^{(e)}(t) = a_o(t) + a_1(t)L + a_2(t)L^2 + a_3(t)L^3 \\
\frac{dw^{(e)}}{dx_1}(x_1 = 0, t) &= \theta_i^{(e)}(t) = a_1(t) \\
\frac{dw^{(e)}}{dx_1}(x_1 = L, t) &= \theta_j^{(e)}(t) = a_1(t) + 2a_2(t)L + 3a_3(t)L^2
\end{aligned} \tag{4.72}$$

denklemleri elde edilir. (4.72) denklemleri eşzamanlı olarak çözülürse bilinmeyen katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
a_o &= w_i^{(e)} \\
a_1 &= \theta_i^{(e)} \\
a_2 &= \frac{3}{L^2}(w_j^{(e)} - w_i^{(e)}) - \frac{1}{L}(2\theta_i^{(e)} + \theta_j^{(e)}) \\
a_3 &= \frac{2}{L^3}(w_i^{(e)} - w_j^{(e)}) - \frac{1}{L^2}(\theta_i^{(e)} + \theta_j^{(e)})
\end{aligned} \tag{4.73}$$

(4.73) denklemleri (4.71) bağıntısında yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, düşey yer değiştirme fonksiyonu izleyen şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
w^{(e)}(x_1, t) &= \left(1 - \frac{3x_1^2}{L^2} + \frac{2x_1^3}{L^3}\right)w_1^{(e)}(t) + \left(x_1 - \frac{2x_1^2}{L} + \frac{x_1^3}{L^2}\right)\theta_1^{(e)}(t) + \left(\frac{3x_1^2}{L^2} - \frac{2x_1^3}{L^3}\right)w_2^{(e)}(t) \\
&+ \left(\frac{x_1^3}{L^2} - \frac{x_1^2}{L}\right)\theta_2^{(e)}(t)
\end{aligned} \tag{4.74}$$

(4.74) bağıntısı daha sade bir şekilde aşağıdaki gibi

$$w^{(e)}(x_1, t) = N_1(x_1)w_i^{(e)}(t) + N_2(x_1)\theta_i^{(e)}(t) + N_3(x_1)w_j^{(e)}(t) + N_4(x_1)\theta_j^{(e)}(t) \tag{4.75}$$

veya matris formunda

$$w^{(e)}(x_1, t) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^{(e)} \\ \theta_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ \theta_2^{(e)} \end{Bmatrix} = [N] \{ \delta \} = N_i(x_1) \delta_i^{(e)}(t) \quad (4.76)$$

yazılır. Burada N_1, N_2, N_3 ve N_4 şekil fonksiyonları olarak adlandırılmaktadır. (4.75) bağıntısında verilen ayrıklaştırılmış yer değiştirme ifadesi şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadelerinde yerine konulursa bir eleman için herhangi bir andaki şekil değiştirme enerjisi ve kinetik enerji düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden izleyen şekilde elde edilir:

$$U^{(e)} = \frac{E_{11} I_{x_2}}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w^{(e)}(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 \quad (4.77)$$

$$T^{(e)} = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w^{(e)}(x_1, t)}{\partial t} \right)^2 dx_1 \quad (4.78)$$

Bir eleman için fonksiyonel aşağıdaki denklemle tanımlanmaktadır:

$$I^{(e)} = T^{(e)} - U^{(e)} \quad (4.79)$$

Bir eleman için izleyen bağıntıda verilen Lagrange denklemleri uygulanırsa

$$\frac{\partial I^{(e)}}{\partial \delta_k^{(e)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I^{(e)}}{\partial \dot{\delta}_k^{(e)}} = 0 \quad ; \quad k = 1, 4 \quad \delta_1^{(e)} = w_1, \delta_2^{(e)} = \theta_1, \delta_3^{(e)} = w_2, \delta_4^{(e)} = \theta_2 \quad (4.80)$$

matris formunda verilen bir lineer hareket denklemi izleyen şekilde elde edilir:

$$[K]_e \begin{Bmatrix} w_1^{(e)} \\ \theta_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ \theta_2^{(e)} \end{Bmatrix} + [M]_e \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1^{(e)} \\ \ddot{\theta}_1^{(e)} \\ \ddot{w}_2^{(e)} \\ \ddot{\theta}_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.81)$$

Burada $[K]_{(e)}$ ve $[M]_{(e)}$ matrisleri sırasıyla 4×4 boyutunda eleman rijitlik ve kütle matrisi olup izleyen şekilde verilmektedir:

$$[K]_{(e)} = EI_{x_2} \int_0^L N_i''(x_1) N_j''(x_1) dx_1 = \frac{EI_{x_2}}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

$$[M]_{(e)} = \rho A \int_0^L N_i(x_1) N_j(x_1) dx_1 = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Bir eleman için elde edilen bu denklem takımından faydalanılarak, tüm sistem için hareket denklemleri izleyen şekilde yazılabilir:

$$[K]\{\delta\} + [M]\{\ddot{\delta}\} = \{0\} \quad (4.84)$$

$$p = 2n; \quad n = m + 1 \quad (4.85)$$

Burada $[K]$ ve $[M]$ tüm kirişin rijitlik ve kütle matrisi, m eleman sayısı, n sistemdeki düğüm noktası sayısı, p modelin sahip olduğu toplam serbestlik derecesidir. Bu durumda $[K]$ ve $[M]$ matrisleri $p \times p$ boyutunda olacaktır.

Serbest titreşim yapan kirişte zamana bağlı düğüm noktası yer değiştirmeleri izleyen şekilde yazılabilir:

$$\{\delta(t)\} = \{\bar{\delta}\} e^{i\omega t} \quad (4.86)$$

(4.86) bağıntısındaki $\{\bar{\delta}\}$ yer değiştirme vektörünün elemanlarının genlikleridir. (4.86)

numaralı bağıntı göz önüne alınırsa (4.84) bağıntısı izleyen matris formunda ifade edilebilir:

$$[K]\{\bar{\delta}\} - \omega^2 [M]\{\bar{\delta}\} = \{0\} \quad (4.87)$$

Problemin sayısal analizinde aşağıda tanımlanmış olan boyutsuz büyüklükler kullanılacaktır:

$$\lambda^2 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{E_{11} I_{x_2}} \quad \widehat{\delta}_{2i-1} = \bar{\delta}_{2i-1} / L \quad \widehat{\delta}_{2i} = \bar{\delta}_{2i} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.88)$$

Yukarıda tanımlanan boyutsuz büyüklükler dikkate alındığında, (4.87) bağıntısı izleyen şekilde boyutsuz hale gelecektir:

$$\{[\widehat{K}] - \lambda^2 [\widehat{M}]\}\{\widehat{\delta}\} = \{0\} \quad (4.89)$$

Ele alınan kirişin her iki ucu basit mesnetli olduğu için, ilgili düğüm noktalarında düşey yer değiştirmelerin sıfır olması gerekir. Dolayısıyla problemdeki geometrik sınır koşulları izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$\widehat{\delta}_1(t) = 0, \quad \widehat{\delta}_{p-1}(t) = 0 \quad (4.90)$$

Sınır koşulları probleme uygulanırken, rijitlik ve kütle matrislerinde, sıfır olan düğüm noktası bilinmeyenine karşılık gelen satır ve sütun silinir. Böylece ele alınan problemde rijitlik ve kütle matrislerinin 1. satır ve sütunu ile $(p-1)$. satır ve sütunu silinir ve tüm sistem için izleyen şekilde verilen indirgenmiş boyutsuz frekans denklemi elde edilir:

$$[\widehat{K}^*]\{\widehat{\delta}\} - \lambda^2 [\widehat{M}^*]\{\widehat{\delta}\} = \{0\} \quad (4.91)$$

Burada $[\widehat{K}^*]$ ve $[\widehat{M}^*]$ tüm sistem için $(p-2) \times (p-2)$ boyutlarında indirgenmiş rijitlik ve kütle matrisidir. (4.91) de verilen denkleme kirişin frekans denklemi de denilmektedir. Özdeğerler olan λ değerleri denklem (4.91) ile verilen eşitlikler sisteminin determinantının sıfır olmasından bulunur.

4.3.2 Timoshenko Kirişı için Kuramsal Çalışma

Bir eğilme elemanı için her bir düğüm noktasında biri düşey yer değiştirme w_i , diğeri dönme θ_i olmak üzere iki adet düğüm noktası bilinmeyen olduğu daha önceki bölümde açıklanmıştı. Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre herhangi bir kesitteki dönme, düşey yer değiştirmenin o noktadaki türeviyle ifade edilir. Ancak, Timoshenko kiriş teorisinde kesitlerin yer değiştirmelerini ve dönmelerini ifade eden yer değiştirme ve dönme fonksiyonları birbirinden bağımsız olarak ele alınır. Bu amaçla düşey yer değiştirme $w^{(e)}(x_1, t)$ ve dönme $\psi^{(e)}(x_1, t)$ için aynı dereceden polinomlar seçilebileceği gibi, genellikle farklı dereceden polinomlar seçilmektedir. Söz konusu polinomlar, $\partial w / \partial x_1 \neq 0$ ve $\partial \psi / \partial x_1 \neq 0$ koşulları göz önüne alınarak, en az birinci dereceden seçilmelidir. Bir Timoshenko kiriş elemanı için yer değiştirme ve dönme fonksiyonları düğüm noktası bilinmeyenleri yardımıyla aşağıdaki şekilde ayrıklaştırılabilir:

$$w^{(e)}(x_1, t) = N_i(x_1) w_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.92)$$

$$\psi^{(e)}(x_1, t) = R_j(x_1) \theta_j(t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.93)$$

(4.92) ve (4.93) eşitliklerindeki $w_i(t)$ ve $\theta_j(t)$ zamana bağlı olarak ifade edilen düğüm noktası bilinmeyenleridir. (4.92) ve (4.93) deki ifadeler Timoshenko kirişi için daha önceden verilmiş olan şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadelerinde yerlerine konulursa, bir eleman için herhangi bir andaki şekil değiştirme ve kinetik enerji düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden izleyen şekilde elde edilir:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[E_{11} I_{x_2} \left(\frac{d\psi^{(e)}(x_1, t)}{dx_1} \right)^2 + k_s G_{13} A \left(\frac{dw^{(e)}(x_1, t)}{dx_1} - \psi^{(e)}(x_1, t) \right)^2 \right] dx_1 \quad (4.94)$$

$$T^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w^{(e)}(x_1, t)}{\partial t} \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_{x_2} \left(\frac{\partial \psi^{(e)}(x_1, t)}{\partial t} \right)^2 dx_1 \quad (4.95)$$

Bir eleman için fonksiyonel izleyen denklemlerle tanımlanmaktadır:

$$I^{(e)} = T^{(e)} - U^{(e)} \quad (4.96)$$

Bir eleman için daha önceden verilmiş olan Lagrange denklemleri uygulanırsa hareket denklemleri

$$[K]_{(e)} \{\delta\} + [M]_{(e)} \{\ddot{\delta}\} = \{0\} \quad (4.97)$$

olarak elde edilir. Burada $[K]_{(e)}$ ve $[M]_{(e)}$ matrisleri rijitlik ve kütle matrisleri olup izleyen şekilde verilmektedir:

$$[K]_{(e)} = \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

$$[M]_{(e)} = \begin{bmatrix} [M^{11}] & [0] \\ [0] & [M^{22}] \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

(4.97) eşitliğinde matris formunda verilen rijitlik matrisinin alt matris bileşenleri daha açık olarak izleyen şekilde verilmektedir:

$$K_{ij}^{11} = k_s G_{13} A \int_0^L N_i'(x_1) N_j'(x_1) dx_1, \quad (4.100)$$

$$K_{ij}^{12} = K_{ij}^{21} = k_s G_{13} A \int_0^L N_i'(x_1) R_j(x_1) dx_1 \quad (4.101)$$

$$K_{ij}^{22} = E_{11} I_{x_2} \int_0^L R_i'(x_1) R_j'(x_1) dx_1 + k_s G_{13} A \int_0^L R_i(x_1) R_j(x_1) dx_1 \quad (4.102)$$

$$M_{ij}^{11} = \rho A \int_0^L N_i(x_1) N_j(x_1) dx_1 \quad (4.103)$$

$$M_{ij}^{22} = \rho I_{x_2} \int_0^L R_i(x_1) R_j(x_1) dx_1 \quad (4.104)$$

(4.100), (4.101), (4.102) ve (4.104) eşitliklerindeki rijitlik terimleri hesaplanırken düğüm noktası yer değiştirmesi ve dönmeleri için aynı dereceden polinomlar (özellikle lineer) seçildiğinde, ele alınan eğilme elemanı, Timoshenko teorisindeki sabit kayma gerilmesi kabulü sebebiyle, literatürde kayma kilitlenmesi (shear locking) (Reddy, 1993) adı verilen olay meydana gelmektedir. Bu problemin üstesinden gelmek için literatürde iki yol bulunmaktadır (Reddy, 1993). Bu iki yöntem hakkında kısaca bilgi verilecektir.

4.3.2.1 Farklı Dereceden (Uyumlu) İnterpolasyon Fonksiyonlarının Kullanılması

Birinci yöntemde düşey yer değiştirme ve dönme fonksiyonları için farklı dereceden polinomlar seçilmektedir. Bu polinomlar $\partial w / \partial x_1$ ve ψ nin mertebesi eşit olacak şekilde seçilmelidir, örneğin $m = n + 1$. Bir eğilme elemanının düşey yer değiştirmesi $w^{(e)}(x_1, t)$ için ikinci dereceden (kuadratik), dönmelerini ifade eden $\psi^{(e)}(x_1, t)$ için birinci dereceden (lineer) polinom seçilirse, yer değiştirme ve dönme fonksiyonları izleyen şekilde ayrıklaştırılabilir:

$$w^{(e)}(x_1, t) = N_1(x_1)w_1^{(e)}(t) + N_2(x_1)w_2^{(e)}(t) + N_3(x_1)w_3^{(e)}(t) = [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} w_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ w_3^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (4.105)$$

$$\psi^{(e)}(x_1, t) = R_1(x_1)\theta_1^{(e)}(t) + R_2(x_1)\theta_2^{(e)}(t) = [R_1 \ R_2] \begin{Bmatrix} \theta_1^{(e)} \\ \theta_2^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (4.106)$$

Burada $N_i(x_1)$ ve $R_i(x_1)$ şekil fonksiyonları olarak bilinmektedir. (4.105) ve (4.106) eşitliklerindeki ifadeler şekil değiştirme ve kinetik enerji ifadelerinde yerlerine konulduktan sonra Lagrange denklemleri uygulanırsa izleyen matris formunda gösterilen hareket denklemleri elde edilir:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ w_3^{(e)} \\ \theta_1^{(e)} \\ \theta_2^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M^{11}] & [0] \\ [0] & [M^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1^{(e)} \\ \ddot{w}_2^{(e)} \\ \ddot{w}_3^{(e)} \\ \ddot{\theta}_1^{(e)} \\ \ddot{\theta}_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.107)$$

Burada $[K^{11}]$ matrisi 3×3 , $[K^{12}]$ matrisi 3×2 , $[K^{22}]$ matrisi 2×2 boyutunda olmaktadır.

Bu durumda ise bir eleman için rijitlik matrisi 5×5 boyutundadır. Bu matrisler açık olarak izleyen şekilde verilmektedir (Reddy, 1993):

$$\begin{aligned} [K^{11}] &= \frac{k_s G_{13} A}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \\ [K^{12}] &= [K^{21}] = \frac{k_s G_{13} A}{6} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 4 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\ [K^{22}] &= \frac{E_{11} I_{x_2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{k_s G_{13} AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.109)$$

(4.105), (4.106) ve (4.107) eşitliklerine dikkat edilirse, elemanın tam orta noktasında, sadece yer değiştirme türünden $w_3^{(e)}$ bilinmeyen olan ve diğer elemanlarla bağlantısı olmayan üçüncü bir düğüm noktasının ortaya çıktığı görülür. Bu düğüm noktası bir elemandan tüm sisteme geçişte ilgili matrislerin toplanmasında zorluk teşkil etmektedir. Bunun için eleman rijitlik matrisinde üçüncü düğüm noktasındaki $w_3^{(e)}$ bilinmeyeni yok edilirse, bir eleman için daraltılmış rijitlik matrisi izleyen şekilde olur:

$$[K]_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{k_s G_{13} A}{L} & -\frac{k_s G_{13} A}{L} & -\frac{k_s G_{13} A}{2} & -\frac{k_s G_{13} A}{2} \\ -\frac{k_s G_{13} A}{L} & \frac{k_s G_{13} A}{L} & \frac{k_s G_{13} A}{2} & \frac{k_s G_{13} A}{2} \\ -\frac{k_s G_{13} A}{2} & \frac{k_s G_{13} A}{2} & \frac{k_s G_{13} AL}{4} + \frac{E_{11} I_{x_2}}{L} & \frac{k_s G_{13} AL}{4} - \frac{E_{11} I_{x_2}}{L} \\ -\frac{k_s G_{13} A}{2} & \frac{k_s G_{13} A}{2} & \frac{k_s G_{13} AL}{4} - \frac{E_{11} I_{x_2}}{L} & \frac{k_s G_{13} AL}{4} + \frac{E_{11} I_{x_2}}{L} \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

Buna benzer şekilde kütle matrisi de elde edilerek, kayma kilitlenmesi probleminin üstesinden gelinmiş olur.

4.3.2.2 Aynı Dereceden İnterpolasyon Fonksiyonlarının Kullanılması

Düşey yer değiştirme ve dönme fonksiyonları için aynı dereceden ($m = n$) polinomlar seçildiğinde, eleman rijitlik ve kütle matrislerini oluşturan tüm alt matrisler $n \times n$ boyutlarında olmaktadır. Eleman rijitlik matrisinin $[K^{11}]$, $[K^{12}]$ bileşenleri ile $[K^{22}]$ matrisinin (4.102) eşitliğinde verilen birinci kısmı elde edilen şekil fonksiyonlarının kullanılmasıyla kesin olarak hesaplanır. $[K^{22}]$ matrisinin ikinci kısmı ise indirgenmiş integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanır (Reddy, 1993).

Yer değiştirme ve dönme fonksiyonları için izleyen şekilde verilen birinci dereceden (lineer) polinomlar seçilebilir:

$$w^{(e)}(x_1, t) = a_o(t) + a_1(t)x_1 \quad (4.111)$$

$$\psi^{(e)}(x_1, t) = b_o(t) + b_1(t)x_1 \quad (4.112)$$

Bu durumda ele alınan eğilme elemanı aşağıda verilen sınır koşullarını sağlamalıdır:

$$w^{(e)}(x_1 = 0, t) = w_1^{(e)}(t); \quad w^{(e)}(x_1 = L, t) = w_2^{(e)}(t) \quad (4.113)$$

$$\psi^{(e)}(x_1 = 0, t) = \theta_1^{(e)}(t); \quad \psi^{(e)}(x_1 = L, t) = \theta_2^{(e)}(t) \quad (4.114)$$

(4.111) ve (4.112) eşitliklerinde verilen sınır koşulları uygulandıktan sonra, Euler-Bernoulli kiriş teorisinde yapıldığı gibi benzer matematiksel işlemler ve düzenlemeler yapılırsa yer değiştirme ve dönme fonksiyonları izleyen şekilde ayrıklaştırılabilir:

$$w^{(e)}(x_1, t) = \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) w_1^{(e)}(t) + \left(\frac{x_1}{L}\right) w_2^{(e)}(t) = N_i(x_1) w_i^{(e)}(t) \quad (4.115)$$

$$\psi^{(e)}(x_1, t) = \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \theta_1^{(e)}(t) + \left(\frac{x_1}{L}\right) \theta_2^{(e)}(t) == R_i(x_1) \theta_i^{(e)}(t) \quad (4.116)$$

(4.115) ve (4.116) eşitliklerinden görüldüğü gibi yer değiştirme ve dönme fonksiyonları için elde edilen $N_i(x_1)$ ve $R_i(x_1)$ şekil fonksiyonları özdeş olmaktadır. Elde edilen bu şekil fonksiyonları yardımıyla ve (4.100), (4.101), (4.102), (4.103) ve (4.104) eşitliklerinin kullanılmasıyla rijitlik ve kütle matrislerinin bileşenleri izleyen şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} [K^{11}] &= \frac{k_s G_{13} A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ [K^{12}] &= [K^{21}] = \frac{k_s G_{13} A}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ [K^{22}] &= \frac{E_{11} I_{x_2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{k_s G_{13} A L}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ [M^{11}] &= \rho A L \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ [M^{22}] &= \rho I_{x_2} L \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.117)$$

(4.117) eşitliklerinde verilen alt matrisler bir eleman için tek bir matris içinde aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$[K]_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{k_s G_{13} A}{L} & -\frac{k_s G_{13} A}{L} & -\frac{k_s G_{13} A}{2} & -\frac{k_s G_{13} A}{2} \\ -\frac{k_s G_{13} A}{L} & \frac{k_s G_{13} A}{L} & \frac{k_s G_{13} A}{2} & \frac{k_s G_{13} A}{2} \\ -\frac{k_s G_{13} A}{2} & \frac{k_s G_{13} A}{2} & \frac{k_s G_{13} A L}{4} + \frac{E_{11} I_{x_2}}{L} & \frac{k_s G_{13} A L}{4} - \frac{E_{11} I_{x_2}}{L} \\ -\frac{k_s G_{13} A}{2} & \frac{k_s G_{13} A}{2} & \frac{k_s G_{13} A L}{4} - \frac{E_{11} I_{x_2}}{L} & \frac{k_s G_{13} A L}{4} + \frac{E_{11} I_{x_2}}{L} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

$$[M]_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\rho AL}{3} & \frac{\rho AL}{6} & 0 & 0 \\ \frac{\rho AL}{6} & \frac{\rho AL}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho I_{x_2} L}{3} & \frac{\rho I_{x_2} L}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\rho I_{x_2} L}{6} & \frac{\rho I_{x_2} L}{3} \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

(4.118) eşitliğinde bir eleman için verilen rijitlik matrisine dikkat edilirse, farklı dereceden polinomlar kullanılarak daha önceden elde edilmiş olan (4.110) eşitliğindeki rijitlik matrisiyle aynı olduğu dikkati çekmektedir. Bu çalışmada Timoshenko teorisine göre sonlu elemanlar yöntemiyle çözümde aynı dereceden polinomlar seçilerek elde edilmiş olan rijitlik ve kütle matrisleri kullanılacaktır. Bu durumda, bir eleman için elde edilen ilgili matrislerden faydalanarak, tüm sistem için hareket denklemi izleyen şekilde yazılabilir:

$$[K]\{\delta\} + [M]\{\ddot{\delta}\} = \{0\} \quad (4.120)$$

$$p = 2n; \quad n = m + 1 \quad (4.121)$$

Burada $[K]$ ve $[M]$ tüm kirişin rijitlik ve kütle matrisi, m eleman sayısı, n sistemdeki düğüm noktası sayısı, p modelin sahip olduğu toplam serbestlik derecesidir. Timoshenko kiriş teorisi kullanılması durumunda da $[K]$ ve $[M]$ matrisleri $p \times p$ boyutunda olacaktır.

Serbest titreşim yapan kirişte zamana bağlı düğüm noktası yer değiştirmeleri izleyen şekilde yazılabilir:

$$\{\delta(t)\} = \{\bar{\delta}\} e^{i \omega t} \quad (4.122)$$

(4.122) bağıntısındaki $\{\bar{\delta}\}$, yer değiştirme vektörünün elemanlarının boyutsuz genlikleridir.

(4.122) numaralı bağıntı göz önüne alınırsa, (4.120) bağıntısı izleyen matris formunda ifade edilebilir:

$$[K]\{\bar{\delta}\} - \omega^2 [M]\{\bar{\delta}\} = \{0\} \quad (4.123)$$

Problemın sayısal analizinde aşağıda tanımlanmış olan boyutsuz büyüklükler kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_i &= \bar{\delta}_i / L \quad ; \quad i=1,2,\dots,n \\ \widehat{\delta}_i &= \bar{\delta}_i \quad ; \quad i=n+1, n+2,\dots,2n \\ \lambda^2 &= \frac{\rho A \omega^2 L^4}{E_{11} I_{x_2}}, \quad D = \frac{k_s G_{13} A L^2}{E_{11} I_{x_2}}, \quad \mu = \frac{h^2}{12 L^2} \end{aligned} \quad (4.124)$$

Yukarıda tanımlanan boyutsuz büyüklükler dikkate alındığında, (4.123) bağıntısı izleyen şekilde boyutsuz hale gelecektir:

$$\{[\widehat{K}] - \lambda^2 [\widehat{M}]\}\{\widehat{\delta}\} = \{0\} \quad (4.125)$$

Problemde sınır koşulları, ele alınan kirişin her iki ucu basit mesnetli olduğu için, ilgili düğüm noktalarında düşey yer değiştirmelerin sıfır olmasıdır. Dolayısıyla problemdeki geometrik sınır koşulları izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$\widehat{\delta}_1(t) = 0, \quad \widehat{\delta}_{p/2}(t) = 0 \quad (4.126)$$

Sınır koşulları probleme uygulanırken, rijitlik ve kütle matrislerinde, sıfır olan düğüm noktası bilinmeyenine karşılık gelen satır ve sütun silinir. Böylece ele alınan problemde rijitlik ve kütle matrislerinin 1. satır ve sütunu ile $(p/2)$. satır ve sütunu silinir ve tüm sistem için izleyen şekilde verilen indirgenmiş boyutsuz frekans denklemi elde edilir:

$$[\widehat{K}^*]\{\widehat{\delta}\} - \lambda^2 [\widehat{M}^*]\{\widehat{\delta}\} = \{0\} \quad (4.127)$$

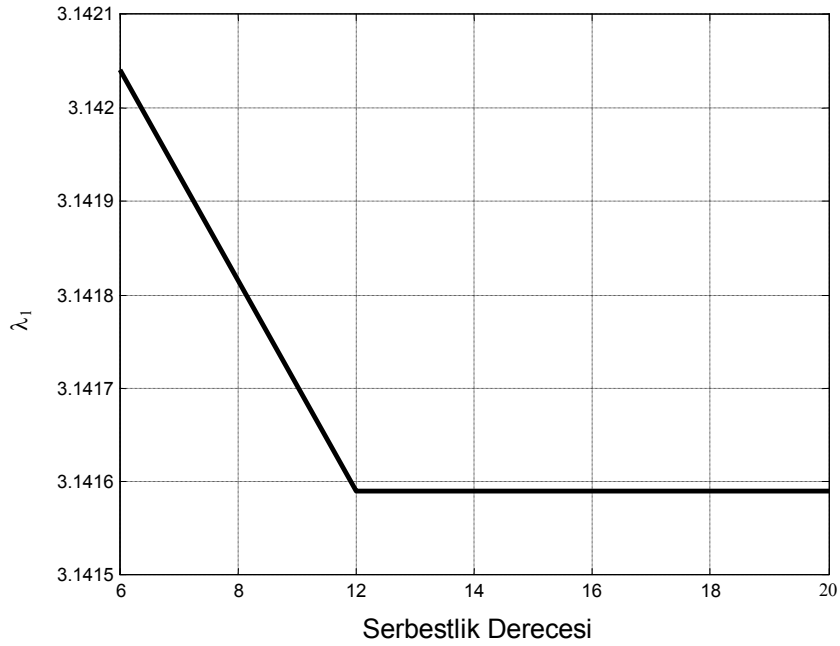
Burada $[\widehat{K}^*]$ ve $[\widehat{M}^*]$ tüm sistem için $(p-2) \times (p-2)$ boyutlarında indirgenmiş rijitlik ve kütle matrisidir. (4.127) de verilen denkleme kirişin frekans denklemi de denilmektedir. Özdeğerler olan λ değerleri denklem (4.127) ile verilen eşitlikler sisteminin determinantının sıfır olmasından bulunur.

5.SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada, iki ucu basit mesnetli bir kirişin ilk altı boyutsuz özdeğeri (frekans parametresi) λ , Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri çerçevesinde; tüm kiriş bölgesi üzerinde polinomlar alınıp Ritz yöntemi, enerji tabanlı sonlu farklar yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Her iki teori için elde edilen sonuçlar literatürde mevcut olan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Her üç yöntem için farklı sayıda serbestlik derecesi alınarak yakınsama çalışması yapılmıştır. Bu yakınsama çalışmaları grafikler üzerinde de gösterilmiştir. Ayrıca Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre söz konusu kirişin ilk dört mod şekli verilmiştir.

Çizelge 5.1 Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre Ritz yöntemi ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için yakınsama ve kıyaslama çalışması

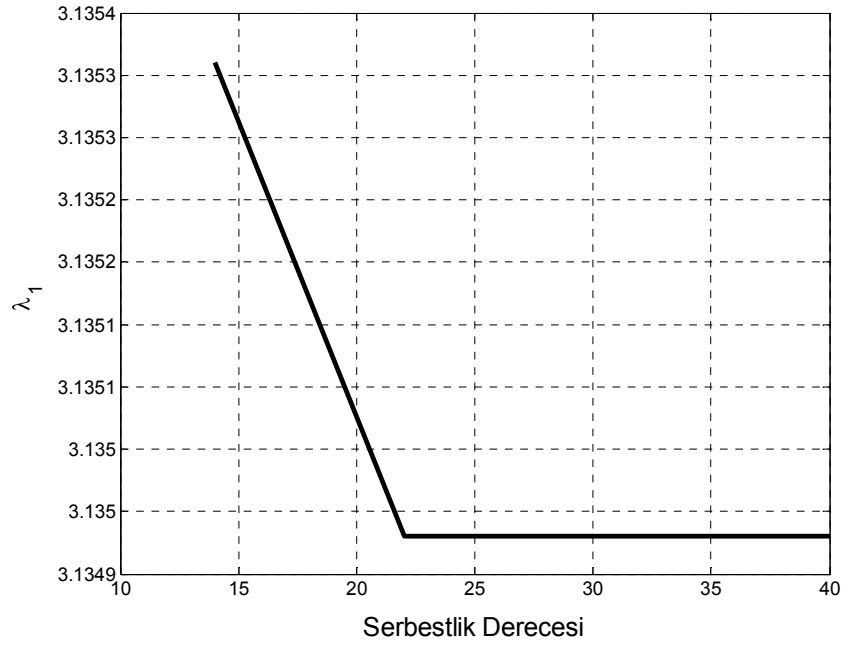
TS	SD	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
6	8	3.14205	6.29647	11.48096	-	-	-
10	12	3.14159	6.28318	9.42593	12.57477	16.33632	20.08920
12	14	3.14159	6.28318	9.42478	12.56646	15.74331	18.95374
14	16	3.14159	6.28318	9.42477	12.56637	15.70873	18.85312
16	18	3.14159	6.28318	9.42477	12.56636	15.70796	18.84957
18	20	3.14159	6.28318	9.42477	12.56636	15.70796	18.84950
(Tim.,1955)		3.14159	6.28319	9.42478	12.56640	15.70800	18.84960



Şekil 5.1 Euler-Bernoulli kirişinde Ritz yöntemi ile yakınsama

Çizelge 5.2 Timoshenko kiriş teorisine göre Ritz yöntemi ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için $h/l = 0.05$ oranında yakınsama ve kıyaslama çalışması

TS	SD	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
12	14	3.13536	6.24422	10.81672	15.61698	-	-
20	22	3.13498	6.23136	9.25602	12.18879	15.37615	18.66075
24	26	3.13498	6.23136	9.25537	12.18141	15.01036	17.76385
28	30	3.13498	6.23136	9.25536	12.18132	14.99291	17.68378
32	34	3.13498	6.23136	9.25536	12.18132	14.99264	17.68102
38	40	3.13498	6.23136	9.25536	12.18129	14.99261	17.68029
(Lee,2004)		3.13498	6.23136	9.25537	12.18130	14.99260	17.68100



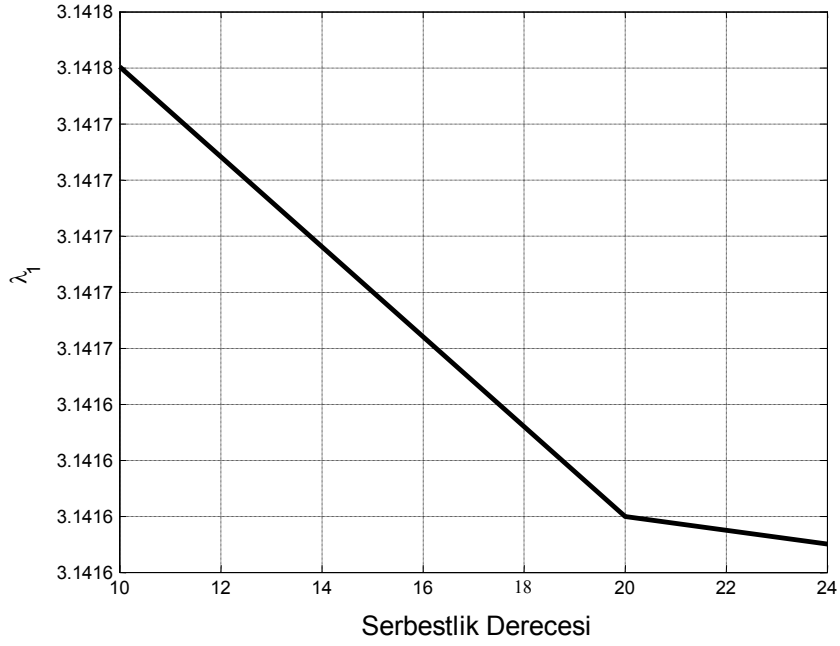
Şekil 5.2 Timoshenko kirişinde Ritz yöntemi ile yakınsama

Çizelge 5.3 Timoshenko kiriş teorisine göre Ritz yöntemi ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için değişik h/l oranlarında $SD = 40$ için bulunan değerlerin literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırılması

Yöntem	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
h/L=0.002						
(Lee, 2004)	3.14158	6.28310	9.42449	12.5657	15.7066	18.8473
Bu çalışma	3.14158	6.28311	9.42449	12.5656	15.7066	18.8471
h/L=0.005						
(Lee, 2004)	3.14153	6.28265	9.42298	12.5621	15.6997	18.8352
Bu çalışma	3.14152	6.28265	9.42298	12.5621	15.6996	18.8351
h/L=0.01						
(Lee, 2004)	3.14133	6.28106	9.41761	12.5494	15.6749	18.7926
Bu çalışma	3.14132	6.28105	9.41760	12.5494	15.6749	18.7925
h/L=0.02						
(Lee, 2004)	3.14053	6.27471	9.39632	12.4994	15.5784	18.6282
Bu çalışma	3.14052	6.27470	9.39629	12.4993	15.5784	18.6280
h/L=0.05						
(Lee, 2004)	3.13498	6.23136	9.25537	12.1813	14.9926	17.6810
Bu çalışma	3.13498	6.23136	9.25534	12.1812	14.9926	17.6802
h/L=0.1						
(Lee, 2004)	3.11568	6.09066	8.84052	11.3431	13.6132	15.6790
Bu çalışma	3.11567	6.09066	8.84048	11.3430	13.6131	15.6769
h/L=0.2						
(Lee, 2004)	3.04533	5.67155	7.83952	9.65709	11.2220	12.6022
Bu çalışma	3.04533	5.67155	7.83949	9.65693	11.2219	12.5971

Çizelge 5.4 Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre sonlu elemanlar ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için yakınsama ve kıyaslama çalışması

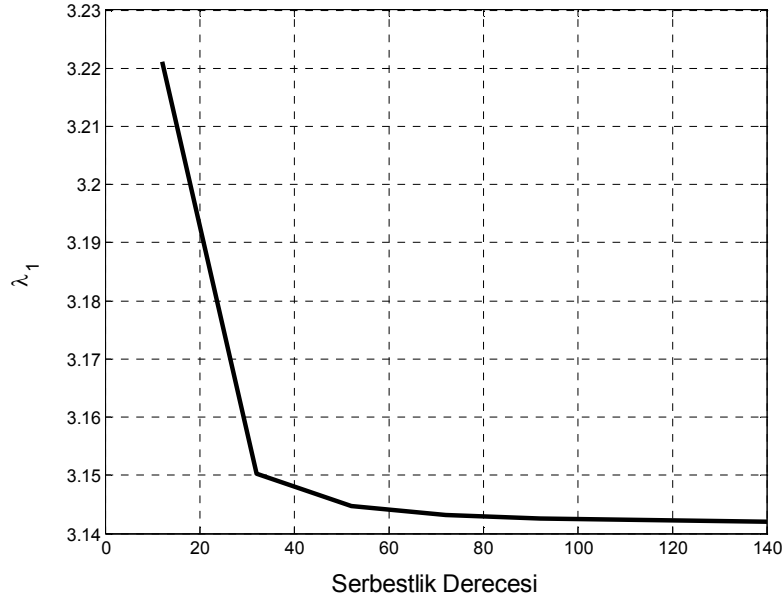
ES	SD	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
5	10	3.14176	6.28838	9.46212	12.71029	16.54875	19.88259
10	20	3.14160	6.28352	9.42729	12.57677	15.73893	18.92425
12	24	3.14159	6.28334	9.42600	12.57145	15.72321	18.88671
(Tim.,1955)		3.14159	6.28319	9.42478	12.56640	15.70800	18.84960



Şekil 5.3 Euler-Bernoulli kirişinde sonlu elemanlar ile yakınsama

Çizelge 5.5 Timoshenko kiriş teorisine göre sonlu elemanlar ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için $h/l = 0.002$ oranında yakınsama ve kıyaslama çalışması

ES	SD	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
5	10	3.22119	6.97679	12.17770	21.54655	173.2050	912.9735
15	30	3.15021	6.35282	9.66335	13.14409	16.86850	20.92733
25	50	3.14470	6.30802	9.50900	12.76751	16.10466	19.54329
35	70	3.14315	6.29578	9.46740	12.66780	15.90703	19.19560
45	90	3.14253	6.29077	9.45040	12.62724	15.82720	19.05634
70	140	3.14197	6.28625	9.43517	12.59105	15.75622	18.93306
(Lee,2004)		3.14158	6.28310	9.42449	12.56570	15.70660	18.84710



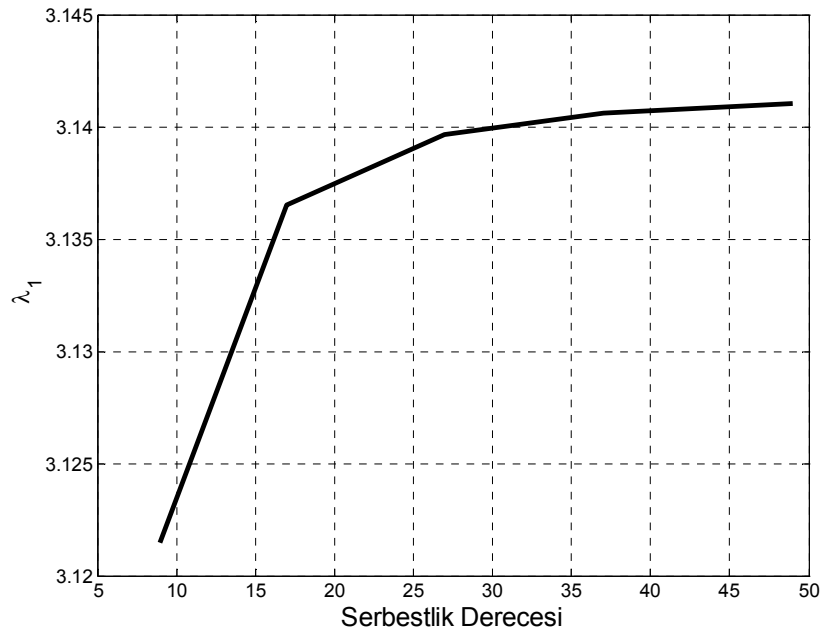
Şekil 5.4 Timoshenko kirişinde sonlu elemanlar ile yakınsama

Çizelge 5.6 Timoshenko kirişinde sonlu elemanlar yönteminde farklı λ frekans parametreleri için değişik h/l oranlarında $SD = 140$ için bulunan değerlerin referans alınan sonuçla karşılaştırılması

Yöntem	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
h/L=0.002						
(Lee, 2004)	3.14158	6.28310	9.42449	12.5657	15.7066	18.8473
Bu çalışma	3.14197	6.28625	9.43517	12.5910	15.7562	18.9330
h/L=0.005						
(Lee, 2004)	3.14153	6.28265	9.42298	12.5621	15.6997	18.8352
Bu çalışma	3.14191	6.28581	9.43366	12.5874	15.7491	18.9208
h/L=0.01						
(Lee, 2004)	3.14133	6.28106	9.41761	12.5494	15.6749	18.7926
Bu çalışma	3.14172	6.28422	9.42827	12.5746	15.7241	18.8775
h/L=0.02						
(Lee, 2004)	3.14053	6.27471	9.39632	12.4994	15.5784	18.6282
Bu çalışma	3.14092	6.27785	9.40688	12.5242	15.6265	18.7104
h/L=0.05						
(Lee, 2004)	3.13498	6.23136	9.25537	12.1813	14.9926	17.6810
Bu çalışma	3.13537	6.23443	9.26538	12.2040	15.0347	17.7497
h/L=0.1						
(Lee, 2004)	3.11568	6.09066	8.84052	11.3431	13.6132	15.6790
Bu çalışma	3.11606	6.09349	8.84908	11.3611	13.6443	15.7270
h/L=0.2						
(Lee, 2004)	3.04533	5.67155	7.83952	9.65709	11.2220	12.6022
Bu çalışma	3.04568	5.67379	7.84550	9.66863	11.2409	12.6304

Çizelge 5.7 Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre enerji tabanlı sonlu farklar ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için yakınsama ve kıyaslama çalışması

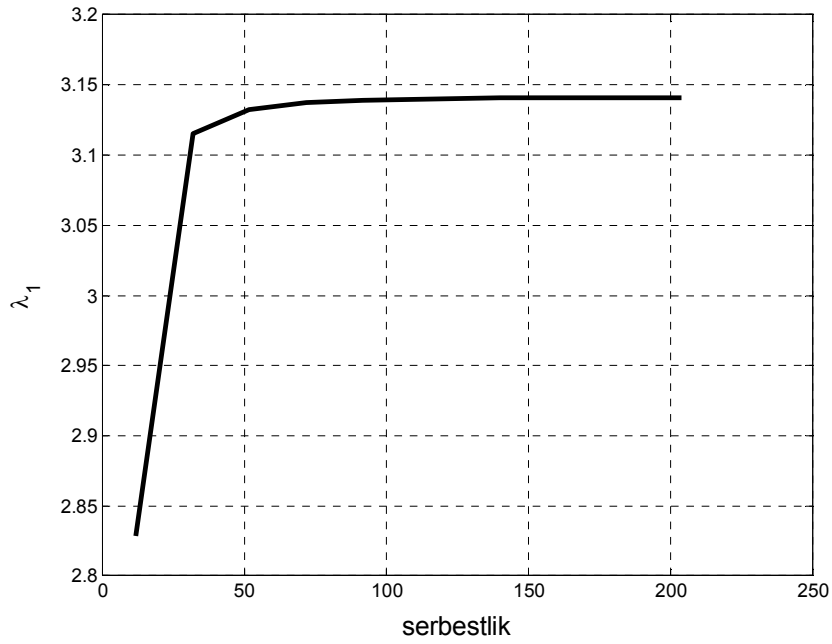
DS	SD	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
9	9	3.12144	6.12293	8.88912	11.31370	13.30351	14.78207
17	17	3.13654	6.24289	9.28910	12.24586	15.08469	17.77824
27	27	3.13968	6.26790	9.37326	12.44441	15.47015	18.43945
37	37	3.14059	6.27521	9.39788	12.50266	15.58365	18.63497
49	49	3.14103	6.27870	9.40964	12.53051	15.63796	18.72867
(Tim.,1955)		3.14159	6.28319	9.42478	12.56640	15.70800	18.84960



Şekil 5.5 Euler-Bernoulli kirişinde enerji tabanlı sonlu farklarda yakınsama

Çizelge 5.8 Timoshenko kiriş teorisine göre enerji tabanlı sonlu farklar ile yapılan çözümde basit mesnetli kirişin ilk altı frekans parametresi için $h/l = 0.002$ oranında yakınsama ve kıyaslama çalışması

DS	SD	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
5	12	2.82841	-	-	-	-	-
15	32	3.11528	6.07429	8.72862	10.94519	12.61287	13.64811
25	52	3.13261	6.21157	9.18413	11.99940	14.60920	16.96888
35	72	3.13711	6.24739	9.30426	12.28158	15.15390	17.89672
45	92	3.13891	6.26176	9.35259	12.39557	15.37517	18.27616
69	140	3.14046	6.27416	9.39434	12.49429	15.56734	18.60687
101	204	3.14106	6.27896	9.41054	12.53264	15.64213	18.73587
(Lee,2004)		3.14158	6.28310	9.42449	12.56570	15.70660	18.84730



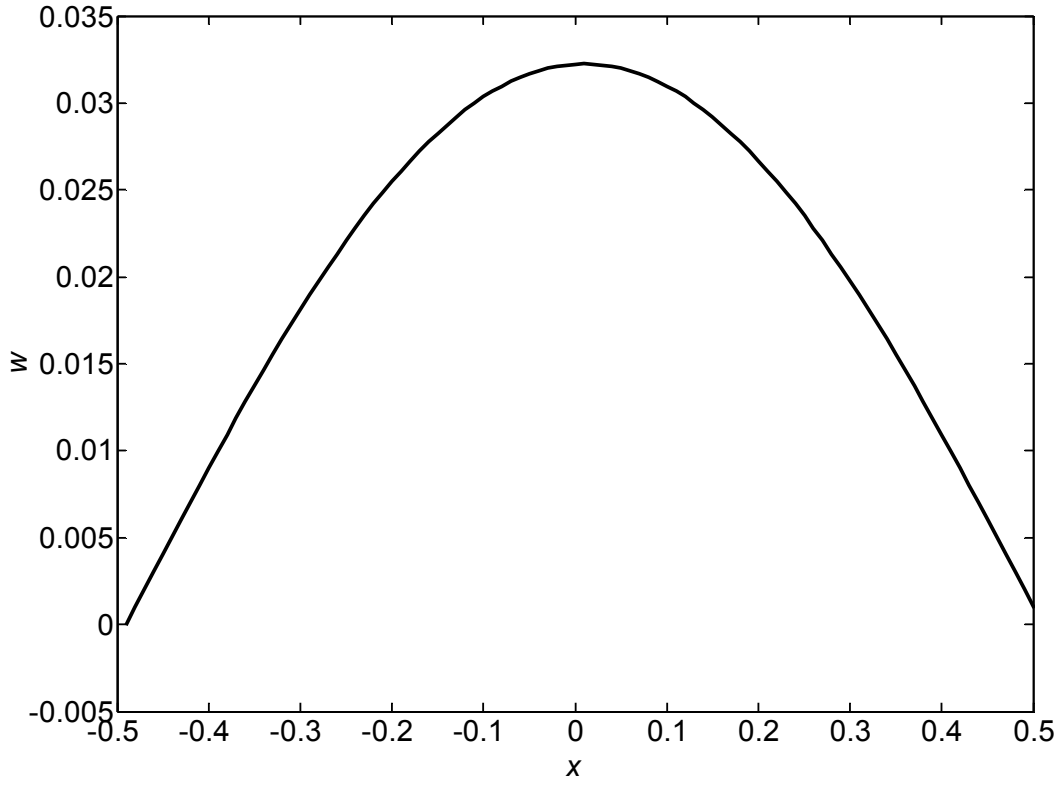
Şekil 5.6 Timoshenko kirişinde enerji tabanlı sonlu farklarda yakınsama

Çizelge 5.9 Timoshenko kirişinde enerji tabanlı sonlu farklar yönteminde farklı λ frekans parametreleri için değişik h/l oranlarında $SD = 140$ için bulunan değerlerin referans alınan sonuçla karşılaştırılması

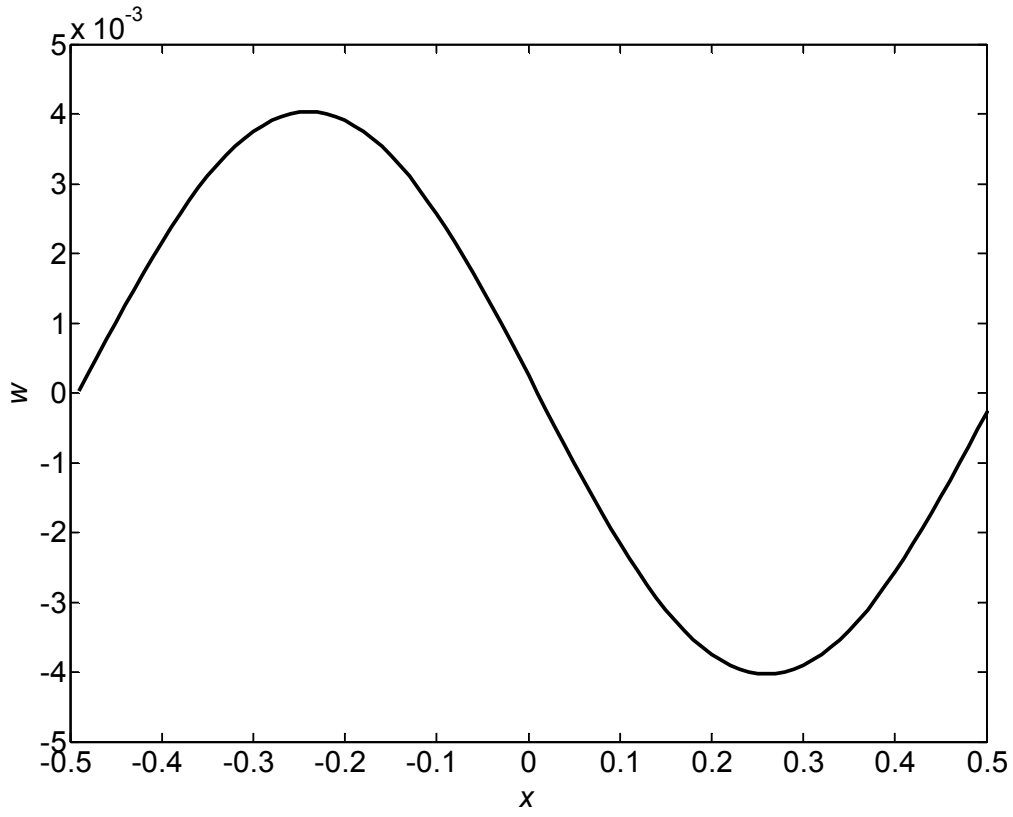
Yöntem	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
h/L=0.002						
(Lee, 2004)	3.14158	6.28310	9.42449	12.5657	15.7066	18.8473
Bu çalışma	3.14046	6.27416	9.39434	12.4942	15.5673	18.6068
h/L=0.005						
(Lee, 2004)	3.14153	6.28265	9.42298	12.5621	15.6997	18.8352
Bu çalışma	3.14040	6.27371	9.39285	12.4907	15.5605	18.5952
h/L=0.01						
(Lee, 2004)	3.14133	6.28106	9.41761	12.5494	15.6749	18.7926
Bu çalışma	3.14020	6.27213	9.38753	12.4782	15.5364	18.5542
h/L=0.02						
(Lee, 2004)	3.14053	6.27471	9.39632	12.4994	15.5784	18.6282
Bu çalışma	3.13941	6.26580	9.36643	12.4291	15.4424	18.3959
h/L=0.05						
(Lee, 2004)	3.13498	6.23136	9.25537	12.1813	14.9926	17.6810
Bu çalışma	3.13387	6.22264	9.22678	12.1160	14.8705	17.4796
h/L=0.1						
(Lee, 2004)	3.11568	6.09066	8.84052	11.3431	13.6132	15.6790
Bu çalışma	3.11459	6.08249	8.81530	11.2889	13.5170	15.5274
h/L=0.2						
(Lee, 2004)	3.04533	5.67155	7.83952	9.65709	11.2220	12.6022
Bu çalışma	3.04430	5.66477	7.82056	9.61889	11.1569	12.5019

Çizelge 5.10 Timoshenko kirişinde sonlu elemanlar yöntemi ve enerji tabanlı sonlu farklar yönteminin farklı λ frekans parametreleri için değişik h/l oranlarında $SD = 140$ için karşılaştırılması

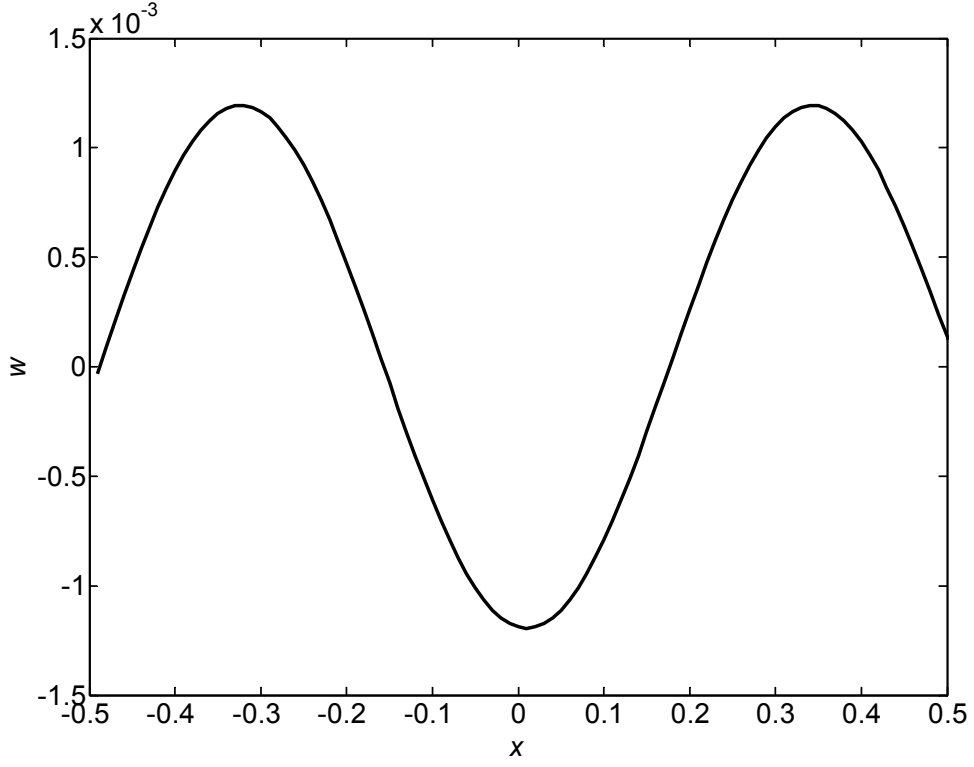
Yöntem	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
h/L=0.002						
SE	3.14197	6.28625	9.43517	12.5910	15.7562	18.9330
SF	3.14046	6.27416	9.39434	12.4942	15.5673	18.6068
(Lee, 2004)	3.14158	6.28310	9.42449	12.5657	15.7066	18.8473
h/L=0.005						
SE	3.14191	6.28581	9.43366	12.5874	15.7491	18.9208
SF	3.14040	6.27371	9.39285	12.4907	15.5605	18.5952
(Lee, 2004)	3.14153	6.28265	9.42298	12.5621	15.6997	18.8352
h/L=0.01						
SE	3.14172	6.28422	9.42827	12.5746	15.7241	18.8775
SF	3.14020	6.27213	9.38753	12.4782	15.5364	18.5542
(Lee, 2004)	3.14133	6.28106	9.41761	12.5494	15.6749	18.7926
h/L=0.02						
SE	3.14092	6.27785	9.40688	12.5242	15.6265	18.7104
SF	3.13941	6.26580	9.36643	12.4291	15.4424	18.3959
(Lee, 2004)	3.14053	6.27471	9.39632	12.4994	15.5784	18.6282
h/L=0.05						
SE	3.13537	6.23443	9.26538	12.2040	15.0347	17.7497
SF	3.13387	6.22264	9.22678	12.1160	14.8705	17.4796
(Lee, 2004)	3.13498	6.23136	9.25537	12.1813	14.9926	17.6810
h/L=0.1						
SE	3.11606	6.09349	8.84908	11.3611	13.6443	15.7270
SF	3.11459	6.08249	8.81530	11.2889	13.5170	15.5274
(Lee, 2004)	3.11568	6.09066	8.84052	11.3431	13.6132	15.6790
h/L=0.2						
SE	3.04568	5.67379	7.84550	9.66863	11.2409	12.6304
SF	3.04430	5.66477	7.82056	9.61889	11.1569	12.5019
(Lee, 2004)	3.04533	5.67155	7.83952	9.65709	11.2220	12.6022



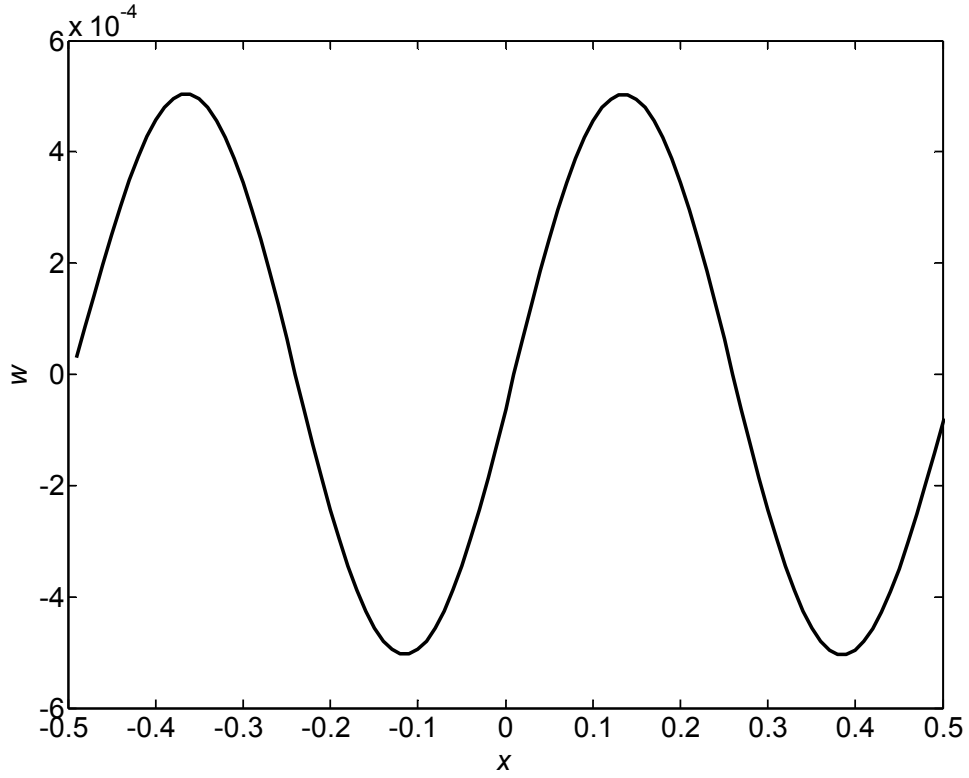
Şekil 5.7 Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre iki ucu basit mesnetli kiriş için birinci mod şekli



Şekil 5.8 Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre iki ucu basit mesnetli kiriş için ikinci mod şekli



Şekil 5.9 Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre iki ucu basit mesnetli kiriş için üçüncü mod şekli



Şekil 5.10 Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre iki ucu basit mesnetli kiriş için dördüncü mod şekli

6.SONUÇ

Bu çalışmada, iki ucu basit mesnetli bir kirişin ilk altı özdeğeri (frekans parametresi) λ , Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri çerçevesinde; polinomlar, enerji tabanlı sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Her iki teori için elde edilen sonuçlar literatürde mevcut olan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Her üç yöntem için farklı sayıda serbestlik derecesi alınarak yakınsama çalışması yapılmıştır.

Polinomlar ve sonlu elemanlar yönteminde serbestlik derecesi arttıkça elde edilen frekans parametrelerinin azaldığı, yani kesin değerlere üstten yakınsandığı görülmüştür. Serbestlik derecesi arttıkça kesin değerlere yakın değerler elde edilmiştir. Enerji tabanlı sonlu farklar yönteminde ise kesin değerlere yakınsamanın alttan olduğu görülmüştür.

Eşit serbestlik derecesi için sonlu elemanlar yönteminin sonlu farklar yöntemine göre kesin değerlere daha yakın sonuç verdiği görülmüştür. Ayrıca her üç yöntemde de ilk modlar için elde edilen özdeğerlerin kesin değerlere çok yakın olduğu görülmüştür. Mod sayısı arttıkça elde edilen değerlerin kesin sonuçlardan bir miktar uzaklaştığı görülmüştür.

Timoshenko kiriş teorisine göre; her üç yöntem için elde edilen değerler incelendiğinde h/L oranının artmasıyla birlikte özdeğerlerin azaldığı görülmektedir. Örneğin Çizelge 5.3 sonuçlarına göre $h/L = 0.002$ olduğunda $\lambda_1 = 3.14158$ iken, $h/L = 0.1$ iken $\lambda_1 = 3.11567$ dir. Bilindiği gibi Timoshenko kiriş teorisinde serbestlik derecesi, kayma şekil değiştirmelerinin etkilerinin dikkate alınması sonucu, Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre daha fazladır. Bu nedenle Euler-Bernoulli kirişinin Timoshenko kirişine göre daha rijit olduğu söylenebilir.

Çizelge 5.3, 5.6 ve 5.9 incelendiğinde h/L oranının mod sayısı arttıkça kirişin serbest titreşimi üzerinde daha etkili olduğu görülmüştür. Örneğin çizelge 5.3'e göre $h/L = 0.002$ iken $\lambda_1 = 3.14158$, $h/L = 0.1$ iken $\lambda_1 = 3.11567$ dir. Birinci özdeğerdeki azalma % 0.82 dir. Ancak altıncı frekans; $h/L = 0.002$ iken $\lambda_1 = 18.8471$, $h/L = 0.1$ iken $\lambda_1 = 15.6769$ dur. Altıncı özdeğerdeki azalma % 16.82 dir.

Üç yöntemin serbestlik derecesi açısından kıyaslanmasından görülmektedir ki, tüm giriş bölgesi üzerinde alınan deneme fonksiyonlarıyla elde edilen çözüm çok az serbestlik derecesinin kullanımıyla kesin sonuçlara çok yakın değerler vermektedir. Burada, eğer özdeğerlerin elde edilmesi isteniyorsa, kesin sonuca çok yakın değerler elde edilebilmesi için, tüm giriş bölgesi üzerinde deneme fonksiyonları olarak polinomların alınmasıyla çözüme ulaşılması diğer yöntemlere göre çok iyi sonuçlar verdiği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

- Altıntaş, G., (2002), “Viskoelastik Nokta Mesnetli Elastik Anizotrop Plakların Periyodik Zorlanmış Titreşimlerinin Analizi”, Y.T.Ü.Doktora Tezi, İstanbul.
- Auciello, N.M., Ercolano, A., (2004), “A General Solution for Dynamic Response of Axially Loaded Non-Uniform Timoshenko Beams”, Int.Journal of Solids and Structures.
- Banerjee, J.R., (1998), “Free Vibration of Axially Loaded Composite Timoshenko Beams Using the Dynamic Stiffness Matrix Method”, Computers & Structures, 69, 197-208.
- Bokaian, A., (1988), “Natural Frequencies of Beams under Tensile Axial Loads”, Journal of Sound and Vibration, 126, 49-56.
- Farghaly, S.H., (1994), “Vibration and Stability Analysis Timoshenko Beams with Discontinuities in Cross-Section”, Journal of Sound and Vibration, 174, 591-605.
- Fybra, L., (1972), “Vibration of Solids and Structures under Moving Loads”, The Netherlands, Noordhoff International, Groningen.
- Kocatürk, T., Şimşek, M., (2005), “Free Vibration Analysis of Timoshenko Beams Under Various Boundary Conditions”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 108-122
- Kocatürk, T., Şimşek, M., (2005), “Free Vibration Analysis of Elastically Supported Timoshenko Beams”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 79-93.
- Kukla, S., (1994), “Free Vibration of Axially Loaded Beams with Concentrated Masses Intermediate Elastic Supports”, Journal of Sound and Vibration, 172, 449-458.
- Laura, P.A.A., Sarmiento S., Bergmann A.N., (1983), “A Note on Traverse Vibrations of Continuous Beams Subject to an Axial Force and Carrying Concentrated Masses”, Journal of Sound and Vibration, 86, 279-284.
- Lee J. Schultz W.W., (2001), “Eigenvalue Analysis of Timoshenko Beams and Axisymmetric Mindlin Plates by the Pseudospectral Method”, Journal of Sound and Vibration, 269, 609-621.
- Lee, Y.Y., Wang, C.M., Kitipornchai, S., (2003), “Vibration of Timoshenko Beams with Internal Hinge”, Journal of Engineering Mechanics, 293-301.
- Nallim, L.G. ve Grossi, R.O., (1999), “A General Algorithm for the Study of the Dynamical Behaviour of Beams”, Applied Acoustic, 57, 345-356.
- Reddy, J.N., (1993), An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill International Editions.
- Rossi, R.E., (1993), “Free Vibrations of Timoshenko Beams Carrying Elastically Mounted Concentrated Masses”, Journal of Sound and Vibration, 165, 209-223.

Şimşek, M., (2005), “Free Vibration Analysis of Beams Subjected to Axial Load Under Various Boundary Conditions”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 1-10.

Şimşek, M., (2005), “Dış merkez Basınç Kuvveti Etkisindeki Kirişlerin Hareketli Harmonik Yük Altındaki Davranışının İncelenmesi”, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İkinci Altı Aylık Rapor.

Timoshenko, S. ve Young, D.H., (1955), “Vibration Problems in Engineering”, Van Nostrand Company, New York, 324-365.

Wang, C.M., Reddy, J.N., Lee, K.H., (2000), Shear Deformable Beams and Plates, Elsevier Science Ltd, Amsterdam.

Zhou D., (2001), “ Free Vibration of Multi-Span Timoshenko Beams Using Static Timoshenko Beam Functions”, Journal of Sound and Vibration, 241, 725-734.

EKLER

EK 1: Euler-Bernoulli Kirişinde Enerji Tabanlı Sonlu Farklar Yöntemiyle Elde Edilen Özdeğer Denklemi

EK 2 : Timoshenko Kirişinde Enerji Tabanlı Sonlu Farklar Yöntemiyle Elde Edilen Özdeğer Denklemi

$$\begin{bmatrix}
\frac{2}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{-4}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{2}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-4}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{10}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} - 2\lambda^2 \bar{\Delta} & \frac{-8}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{2}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \frac{2}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{-8}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{12}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} - 2\lambda^2 \bar{\Delta} & \frac{-8}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{2}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \frac{2}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{-8}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{10}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} - 2\lambda^2 \bar{\Delta} & \frac{-4}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \frac{2}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{-4}{\Delta^{\frac{-3}{3}}} & \frac{2}{\Delta^{\frac{-3}{3}}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_0 \\
w_1 \\
w_2 \\
w_3 \\
\cdot \\
w_{i-2} \\
w_{i-1} \\
w_i \\
w_{i+1} \\
w_{i+2} \\
\cdot \\
w_{N-2} \\
w_{N-1} \\
w_N \\
w_{N+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
\cdot \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
\cdot \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}$$

(EK1)

57

(EK2)

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi 06.09.1978

Doğum Yeri Trabzon

Lise 1989-1996 Trabzon Kanuni Anadolu Lisesi

Lisans 1997-2002 Karadeniz Teknik Üniversitesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2003- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik
Programı