

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PASTERNAK ZEMİNİNE OTURAN SONLU BİR KİRİŞİN
ASİMETRİK TEKİL YÜK ETKİSİ ALTINDAKİ STATİK
DAVRANIŞININ İNCELENMESİ**

İnşaat Müh. Mustafa Kerem ODABAŞ

**FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İrfan COŞKUN

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Elastik Zemin Modelleri	1
1.1.1 Winkler Zemin Modeli	1
1.1.2 Filonenko-Borodich Zemin Modeli	2
1.1.3 Pasternak Zemin Modeli	3
1.1.4 Vlasov Zemin Modeli	3
1.2 Konu İle İlgili Çalışmalar	4
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU	6
2.1 Sistem ve Denge Denklemleri	6
2.2 Sınır Koşulları	9
3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ	12
4. SONUÇLAR	20
KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ.....	31

SİMGE LİSTESİ

L	Kiriş boyu
L_1	Kiriş sol ucu ile tekil P yükü arasındaki mesafe
L_2	Kiriş sağ ucu ile tekil P yükü arasındaki mesafe
l	Kiriş boyu (boyutsuz durum için)
l_1	Kiriş sol ucu ile tekil P yükü arasındaki mesafe (boyutsuz durum için)
l_2	Kiriş sağ ucu ile tekil P yükü arasındaki mesafe (boyutsuz durum için)
X_1	Kirişin sol tarafındaki temas bölgesi koordinatı
X_2	Kirişin sağ tarafındaki temas bölgesi koordinatı
P	Tekil yük
W_1	Yer değiştirme (sol taraftaki zemin yüzeyi için)
W_2	Yer değiştirme (sol taraftaki kiriş parçası için)
W_3	Yer değiştirme (temas bölgesi için)
W_4	Yer değiştirme (sağ taraftaki kiriş parçası için)
W_5	Yer değiştirme (sağ taraftaki zemin yüzeyi için)
EJ	Eğilme rijitliği
G	Kayma tabakası parametresi
p	Zemin tepki kuvveti
λ	Boyutsuz Winkler zemini parametresi
λ_G	Boyutsuz Pasternak zemini parametresi
ξ_1	Kirişin sol tarafındaki temas bölgesi koordinatı (boyutsuz durum için)
ξ_2	Kirişin sağ tarafındaki temas bölgesi koordinatı (boyutsuz durum için)
F	Yük parametresi (boyutsuz durum için)
δ	Dirac delta fonksiyonu
k	Winkler zemin modülü (orantı katsayısı)
w_1	Boyutsuz durumdaki yer değiştirme (sol taraftaki zemin yüzeyi için)
w_2	Boyutsuz durumdaki yer değiştirme (sol taraftaki kiriş parçası için)
w_3	Boyutsuz durumdaki yer değiştirme (temas bölgesi için)
w_4	Boyutsuz durumdaki yer değiştirme (sağ taraftaki kiriş parçası için)
w_5	Boyutsuz durumdaki yer değiştirme (sağ taraftaki zemin yüzeyi için)
$\bar{p}$	Boyutsuz durumdaki zemin tepki kuvveti
$\bar{M}$	Boyutsuz durumdaki zemin tepki kuvveti
$\bar{T}$	Boyutsuz durumdaki zemin tepki kuvveti

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1 Winkler zemin modeli.....	2
Şekil 1.2 Filonenko-Borodich zemin modeli	2
Şekil 1.3 Pasternak zemin modeli.....	3
Şekil 1.4 Vlasov zemin modeli.....	4
Şekil 2.1 Üzerine tekil yük uygulanmış L boyundaki kiriş	6
Şekil 2.2. (a) Dış yükler (b) Şekil değiştirme.....	7
Şekil 4.1 Simetrik yükleme durumu için kiriş elastik eğrileri.....	21
Şekil 4.2 Asimetrik yükleme durumu için kiriş elastik eğrileri	21
Şekil 4.3 Simetrik yükleme durumunda kısa kiriş için elastik eğri	22
Şekil 4.4 Asimetrik yükleme durumunda kiriş için elastik eğri	23
Şekil 4.5 Toplam temas boyunun kiriş boyu ile değişimi.....	24
Şekil 4.6 Temas boyunun λ_G ile değişimi	24
Şekil 4.7 Moment diyagramı	25
Şekil 4.8 Kesme kuvveti diyagramı.....	26
Şekil 4.9 Kiriş boyunca taban basıncı.....	26
Şekil 4.10 Moment diyagramı (asimetrik durum)	27
Şekil 4.11 Kesme kuvveti diyagramı (asimetrik durum)	27
Şekil 4.12 Kiriş boyunca taban basıncı (asimetrik durum).....	28

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1	Verilen λ_g değerlerinin ζ_1 ve ζ_2 ile değişimi	20
-----------	--	----

ÖNSÖZ

Elastik zemin modellerinden biri olan Pasternak zeminine oturan sonlu kiriş bu tezde çalışma konusu olarak seçilmiştir. Kiriş üzerine tekil yük uygulanmış ve kirişin zeminden ayrılma noktaları hesaplanmıştır.

Tüm eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmamda bilgi ve tecrübesiyle yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç.Dr. İrfan COŞKUN'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

ÖZET

Bu çalışmada, çekme almayan Pasternak zeminine oturan bir sonlu kirişin tekil yük etkisi altındaki davranışı incelenmiştir. Kiriş üzerine uygulanan tekil yük simetrik ya da asimetrik biçimde uygulanabilmektedir. Probleme ait diferansiyel denklemler elde edilirken, kirişin zemine tam batmadığı ve Bernoulli-Euler hipotezinin geçerli olduğu kabul edilmiştir. Zeminin çekme gerilmesini aktarmaması nedeniyle, kiriş zeminden ayrılmakta ve ayrılma noktalarının koordinatları (temas boyu) bilinmediğinden problem lineer olmayan bir karakter göstermektedir. Giriş bölümünde elastik zemin modellerinden ve yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. 2. bölümde ayrılma ve temas bölgeleri için diferansiyel denklemler elde edilmiş ve gerekli boyutsuzlaştırmalar yapılmıştır. 3. bölümde kirişin çökme denklemlerinin çeşitli parametrelere göre çözümleri verilmiştir. Son bölümde ise temas boyunun çeşitli parametrelere göre değişimi ile taban basıncı, kesme kuvveti, eğilme momentinin değişimi şekilleri yardımıyla verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pasternak zemini, ayrılma noktası, sonlu kiriş, asimetrik yükleme

ABSTRACT

In this work, the static response of a finite beam resting on a tensionless Pasternak foundation subjected to a vertical point load is investigated. The vertical point load may either be applied at the center or offset of the beam. The differential equations are obtained by considering the Bernoulli-Euler Hypothesis and with assumption that the beam doesn't sink into the foundation exactly. Because of the tensionless foundation, the beam separates from the foundation and the problem appears as a nonlinear one in which the contact region coordinates are not known in priority. In the introduction, elastic foundation models and the studies are explained. In chapter two, the differential equations for separation and the contact regions are obtained in dimensionless form. In chapter three, the solutions of the vertical deflection equations of the beam are obtained for different cases. In the last chapter, the variation of contact length beam shear and bending moments with respect to some parameters are obtained and the results are shown in the figures.

Keywords: Pasternak foundation, point of separation, finite beam, asymmetric loading

1. GİRİŞ

Elastik zemine oturan yapılar (demiryolu hatları, yol kaplamaları, bina temelleri v.b.) ile ilgili çalışmalar uygulama alanının genişliği nedeniyle oldukça fazladır. Özellikle yapı mühendisliğinde yaygın olarak kullanılan elastik zemine oturan kiriş problemleri literatürde geniş bir şekilde incelenmiştir. Bu tür problemlerde kirişle zemin etkileşim içinde olduğundan, sistemin davranışını inceleyebilmek için öncelikle bazı kabullerin yapılması, yani bir zemin modelinin baştan kabul edilmesi gerekmektedir. Bunun nedeni, zeminin karışık ve belirsiz elastik özelliklere sahip olması ve plastik deformasyon yapabilmesidir. Elastik zemine oturan kirişlere ait çalışmalarda esas hipotez, genellikle zemin tepkileri hakkında yapılan hipotezler olmuştur. Bu tür çalışmalarda en fazla kullanılan hipotez, zemin tepkilerinin kiriş çökmeleri ile orantılı olduğunu kabul eden Winkler hipotezidir (Hetenyi, 1946).

Orantı katsayısı, yatak katsayısı (Winkler zemin parametresi) olarak bilinmektedir. Bu hipotezde, yatak katsayısının taban basıncından bağımsız olduğu ve kiriş boyunca sabit kaldığı kabul edilmektedir. Yine bu hipotezde, zemine etkiyen kuvvetlerin yalnız etkidiği noktada şekil değiştirme oluşturduğu kabul edilmektedir. Buna göre zemin birbirinden bağımsız ve birbirine sonsuz yakın yaylardan oluşan bir ortam gibi alınmakta, bu yayların yalnız doğrudan doğruya yüklendiklerinde tepki gösterdikleri ve komşu yayların yüklemekten etkilenmedikleri kabul edilmektedir. Bunun sonucu olarak ta, zemin süreksiz bir ortam olarak göz önüne alınmaktadır. Basitliği nedeniyle oldukça yaygın olarak kullanılan bu modelde, yaylar arasındaki etkileşim dikkate alınmamaktadır. Yaylar arasındaki etkileşimi dikkate almak için çeşitli iki parametrelili zemin modelleri geliştirilmiştir. Matematik olarak eşdeğer olan bu modeller, yalnızca zemin parametrelerinin tanımı bakımından farklılık göstermektedir.

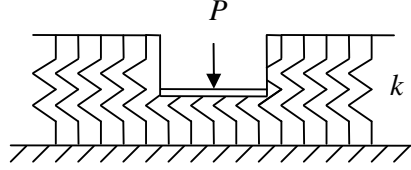
1.2 Elastik Zemin Modelleri

1.2.1 Winkler Zemin Modeli

Bu modelde, yukarıda da değinildiği gibi, zeminin birbirine sonsuz yakın elastik yaylardan oluşan bir ortam olduğu ve her noktada yer değiştirme ile orantılı olarak kirişe bir tepki kuvveti uyguladığı kabul edilmektedir. Kısaca, hipotez $p(x)$ zemin tepkilerinin w kiriş çökmesi ile orantılı olduğu kabulüne dayanan,

$$p(x) = kw(x) \quad (1.1)$$

bağıntısı ile tanımlanmaktadır. Burada k Winkler zemin modülünü (N/mm^2), $p(x)$ zemin tepkisini, $w(x)$ ise kirişteki çökmeyi göstermektedir.



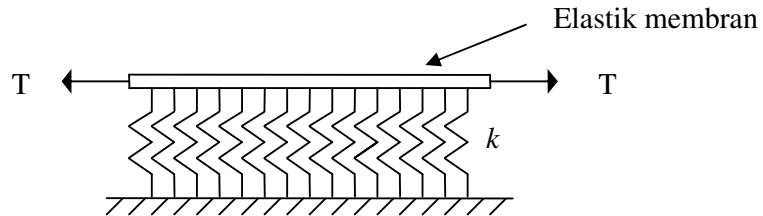
Şekil 1.1 Winkler zemin modeli

1.2.2 Filonenko-Borodich Zemin Modeli

Bu zemin modelinde, Winkler zemin modelinde tanımlanan yayların, iki ucundan T çekme kuvvetine maruz bir elastik membrana tutturulduğu kabul edilmektedir. Bu yolla da yaylar arasındaki etkileşim göz önüne alınmış olmaktadır. Bu zemin modelinde zemin tepkisi;

$$p(x) = kw(x) - T \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (1.2)$$

ifadesi ile verilmektedir. Burada T , membrandaki çekme kuvvetini göstermektedir.



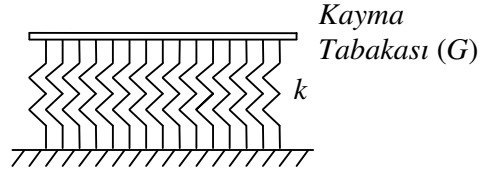
Şekil 1.2 Filonenko-Borodich zemin modeli

1.2.3 Pasternak Zemin Modeli

Pasternak zemin modelinde, yayların üst uçlarından yalnızca kayma deformasyonlarına karşı koyan bir kayma tabakasına tutturulduğu kabul edilmekte, böylece yaylar arasındaki kayma etkileşimi göz önüne alınmaktadır. Zemin tepkisi, kayma tabakasının düşey dengesinden,

$$p(x) = kw(x) - G \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.3)$$

olarak elde edilmektedir. Burada G kayma tabakası parametresini göstermektedir.



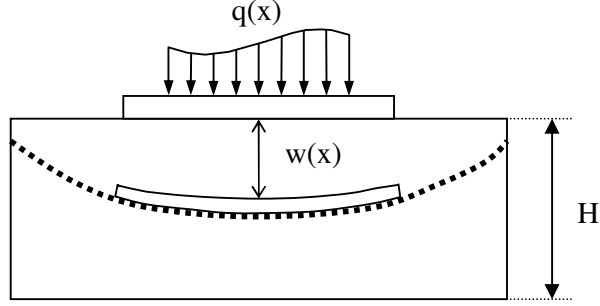
Şekil 1.3 Pasternak zemin modeli

1.2.4 Vlasov Zemin Modeli

Bu modelde zemin yarı sonsuz bir ortam olarak tanımlanmıştır. Zemin tepkisi ile çökme ilişkisi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$p(x) = kw(x) - 2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.4)$$

Burada k ve t parametreleri kiriş ve zeminin boyut ve elastik sabitlerine bağlı olarak ifade edilmektedir.



Şekil 1.4 Vlasov zemin modeli

Yukarıda verilen zemin modellerine ilaveten Genelleştirilmiş zemin modeli, Hetenyi ve Reissner zemin modelleri de, zemin yapı etkileşim problemlerinde kullanılmaktadır (Dutta ve Roy, 2002; Zhaohua ve Cook, 1983).

1.2 Konu İle İlgili Çalışmalar

Elastik zemine oturan kiriş problemlerinde çoğunlukla zeminin iki yönlü olarak çekme ve basınç gerilmesi aktardığı kabul edilmektedir. Bununla beraber, uygulamada bu tür bir davranış (kirişle zemin arasında yapışma temin edilmediği sürece) fiziksel olarak gerçekçi olmamaktadır. Bunun yerine, daha gerçekçi bir yaklaşım olarak, zeminin yalnız basınç gerilmesi aktardığı kabul edilmektedir. Bu durumda kiriş belirli noktalardan zeminden ayrılmakta ve bu noktaların koordinatları başlangıçta bilinmediğinden, problem lineer olmayan bir karakter göstermektedir.

Zeminin iki yönlü olarak çekme ve basınç aktardığı kabulü altında Winkler (bir parametrelili) zemin modülünü esas alan çalışmalar literatürde oldukça geniş bir yer tutmasına karşın iki parametrelili zemine oturan kirişlerin davranışını inceleyen çalışmalar biraz daha kısıtlıdır. Bu çalışmalar örnek olarak Razaqpur ve Shah (1991), Yokoyama (1991), Eisenberger ve Clastornik (1987), Zhaohua ve Cook (1983), Morfidis ve Avramidis (2002), Valsangkar ve Prandhang (1987), Rosa ve Maurizi (1998), Hoibe ve Asano'nun (2001) çalışmaları verilebilir.

Çekme almayan elastik zeminlere oturan sonsuz kirişlerin statik/dinamik yük etkisi altındaki davranışı Tsai ve Westmann (1967), Weitsman (1970), Choros ve Adams (1979) ve Lin ve Adams (1987) tarafından incelenmiştir. Bu tür zemine oturan sonlu kirişlerin statik/dinamik davranışları ise Kerr ve Coffin (1991), Celep vd., (1989), Coşkun (2003), Celep ve Demir

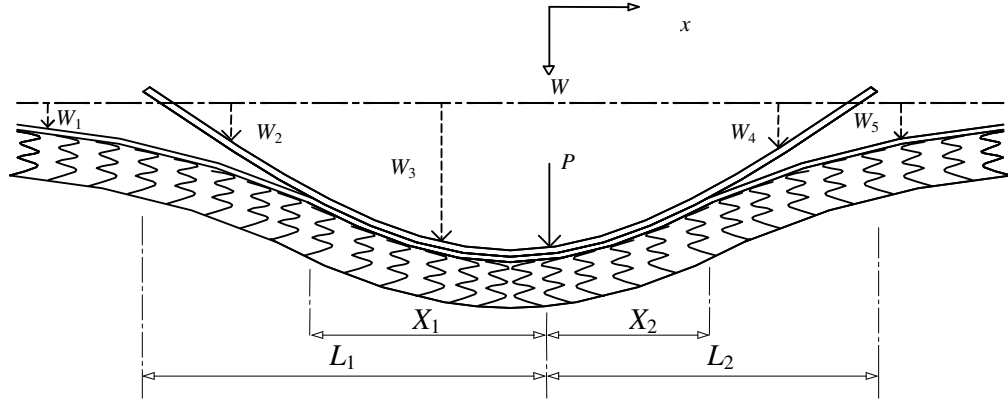
(2005), Zhang ve Murphy (2004) tarafından incelenmiştir. Çekme almayan zemine (Winkler veya iki parametrelili) oturan kiriş problemleri ile ilgili bu çalışmalarda genel olarak, kirişin zeminden ayrıldığı noktaların koordinatları (temas bölgesi) bulunmuş ve bu noktaların yerlerinin çeşitli parametrelere göre değişimi incelenmiştir.

Bu çalışmada, çekme gerilmesi aktarmayan Pasternak zeminine oturan sonlu bir kirişin tekil yük etkisi altındaki davranışı incelenmiştir. Kirişin sonlu olması nedeniyle yük, simetrik olmanın yanı sıra asimetrik olarak uygulanabilmektedir. Yüklemenin simetrik olması haline ait çalışma Kerr ve Coffin (1991) tarafından yapılmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Yükün simetrik olmaması halinde, anılan çalışmadaki sınır koşullarından bazıları geçerli olmamaktadır. Bu çalışmada ise, simetrik hali de göz önüne alan bir formülasyon yapılmış ve sonuçlar grafikler yardımıyla verilmiştir.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

2.1 Sistem ve Denge Denklemleri

Şekil 2.1’de görüldüğü gibi bir kiriş-zemin sistemi göz önüne alınmaktadır. Çekme almayan Pasternak zeminine oturan kirişin boyu L , eğilme rijitliği ise EJ ’dir. Kiriş statik P tekil yüküne maruzdur ve koordinat sistemi de yükün altındaki bir noktaya yerleştirilmiştir. L_1 ve L_2 mesafeleri kirişin sol ve sağ ucundan yüke olan uzaklıkları göstermektedir. Zeminin çekme almaması nedeniyle kiriş zeminden ayrılmakta, sol ve sağ taraflarda ayrılma bölgeleri ortaya çıkmaktadır. Sol taraftaki temas boyu X_1 sağ taraftaki temas boyu ise X_2 ile gösterilmekte ve bunların toplamı da toplam temas boyu olarak alınmaktadır.



Şekil 2.1 Üzerine tekil yük uygulanmış L boyundaki kiriş

Kirişin zeminden ayrılması nedeniyle sistemde kiriş ve zemin yüzeyi için 5 farklı bölge ortaya çıkmaktadır. Bu bölgeler ve bu bölgelerdeki diferansiyel denklemler aşağıdaki gibidir:

- a) 1. Bölge: Bu bölgede kiriş zeminden ayrılmış durumdadır. Zemin yüzeyi için yer değiştirme;

$$W(x) = W_1(x), \quad -\infty < x < -X_1$$

- b) 2. Bölge: Bu bölgede kiriş zeminden ayrılmış durumdadır. Kiriş için yer değiştirme;

$$W(x) = W_2(x), \quad -L_1 < x < -X_1$$

- c) 3. Bölge: Bu bölgede kiriş ve zemin birlikte hareket etmektedir. Yer değiştirme;

$$W(x) = W_3(x), \quad -X_1 < x < X_2$$

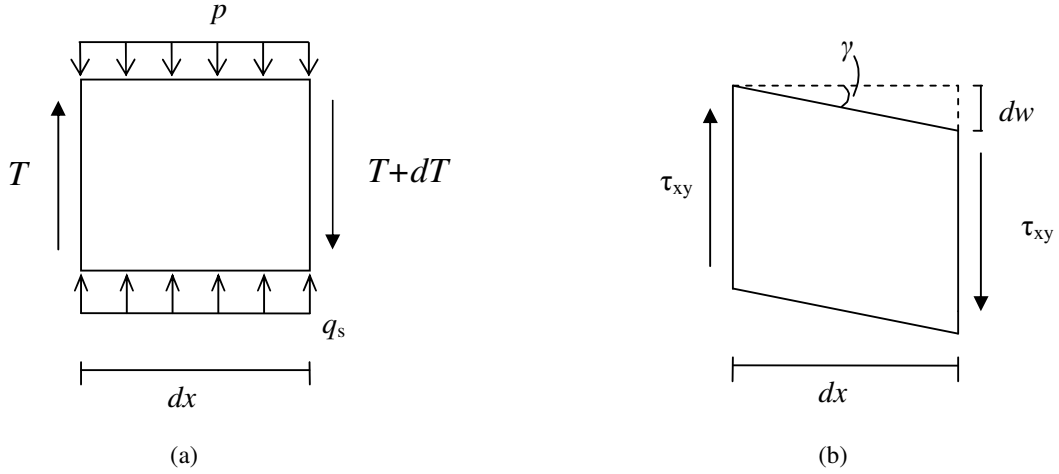
d) 4. Bölge: Bu bölgede kiriş zeminden ayrılmış durumdadır. Kiriş için yer değiştirme;

$$W(x) = W_4(x), \quad X_2 < x < L_2$$

e) 5. Bölge: Bu bölgede kiriş zeminden ayrılmış durumdadır. Zemin yüzeyi için yer değiştirme;

$$W(x) = W_5(x), \quad X_2 < x < +\infty$$

Yaylar arasındaki kayma etkileşimi aşağıdaki gibi alınacaktır. Zemin tabakasına gelen p basıncını elde etmek için dx boyunda bir eleman çıkartılmıştır (Şekil 2.2.a). Burada T kesme kuvvetini, p kirişten zemin yüzeyine gelen yükü, q_s ise Winkler zemin tepkisini göstermektedir.



Şekil 2.2. (a) Dış yükler (b) Şekil değiştirme

Şekil 2.2.b'de kayma gerilmelerine maruz elemanda γ kayma açısı $\gamma_{xy} = \frac{dw}{dx}$ 'dir. Hooke yasasından $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ bağıntısı dikkate alınırsa;

$$\tau_{xy} = G \frac{dw}{dx} \quad (2.1)$$

bağıntısı elde edilir. Birim kalınlıktaki kayma tabakası için kesme kuvveti;

$$T = \int_0^1 \tau_{xy} dy = \int_0^1 G \frac{dw}{dx} dy \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan kesme kuvveti için;

$$T = G \frac{dw}{dx} \quad (2.3)$$

bağıntısı elde edilmektedir. p basıncının hesabı için şekil 2.2.a'daki diferansiyel eleman üzerinde düşey denge yazılırsa;

$$pdx + (T + dT) - T - q_s dx = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{dT}{dx} = q_s - p \quad (2.5)$$

bağıntısı elde edilir. (2.3) bağıntısı türetilip yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa;

$$G \frac{d^2w}{dx^2} = q_s - p \quad (2.6)$$

denklemini elde edilir. Bu ifadede $q_s = kw$ alınır, zemin tabakasına gelen p yükü;

$$p = kw - G \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.7)$$

olarak elde edilir. P dış yükü ve p zemin tepkisine maruz kiriş için diferansiyel denklem;

$$\text{kesme kuvveti, moment ve dış yükler arasındaki } \frac{M}{EJ} = -\frac{d^2w}{dx^2}, \quad \frac{dM}{dx} = T, \quad \frac{dT}{dx} = p$$

bağıntılarından aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$-EJ \frac{d^4w}{dx^4} = \frac{dT}{dx} = p \quad (2.8)$$

$$p = kw - G \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.9)$$

$$EJ \frac{d^4w}{dx^4} - G \frac{d^2w}{dx^2} + kw = P\delta(x) \quad (2.10)$$

Yukarıda tanımlanan 5 bölge için denklemler aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$G \frac{d^2W_1}{dx^2} - kW_1 = 0 \quad (2.11)$$

$$EJ \frac{d^4W_2}{dx^4} = 0 \quad (2.12)$$

$$EJ \frac{d^4W_3}{dx^4} - G \frac{d^2W_3}{dx^2} + kW_3 = P\delta(x) \quad (2.13)$$

$$EJ \frac{d^4 W_4}{dx^4} = 0 \quad (2.14)$$

$$G \frac{d^2 W_5}{dx^2} - kW_5 = 0 \quad (2.15)$$

Burada G kayma tabakası parametresi (Pasternak zemin parametresi), k Winkler zemin modülünü, $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonunu göstermektedir. 1. ve 5. denklemlerde Pasternak zemini için taban basıncını gösteren $p(x) = kW(x) - G\left(\frac{d^2 W(x)}{dx^2}\right)$ bağıntısında, zemin yüzeyi üzerinde yük olmadığından $p(x)=0$ alınmıştır.

2.2 Sınır Koşulları

5 bölge için yukarıda verilen diferansiyel denklemlerin çözümü için sınır ve süreklilik koşullarına ihtiyaç vardır. Bu koşullar aşağıdaki gibidir:

a) Ayrılma noktalarında düşey yer değiştirmelerin eşitliği:

$$\begin{aligned} W_1(-X_1) &= W_3(-X_1) , \quad W_2(-X_1) = W_3(-X_1) , \\ W_3(X_2) &= W_5(X_2) , \quad W_3(X_2) = W_4(X_2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

b) Ayrılma noktalarında eğimlerin eşitliği:

$$\begin{aligned} \frac{dW_1(-X_1)}{dx} &= \frac{dW_3(-X_1)}{dx} , \quad \frac{dW_2(-X_1)}{dx} = \frac{dW_3(-X_1)}{dx} , \\ \frac{dW_3(X_2)}{dx} &= \frac{dW_5(X_2)}{dx} , \quad \frac{dW_3(X_2)}{dx} = \frac{dW_4(X_2)}{dx} \end{aligned} \quad (2.17)$$

c) Ayrılma noktalarında eğilme momentlerinin eşitliği:

$$\frac{d^2 W_2(-X_1)}{dx^2} = \frac{d^2 W_3(-X_1)}{dx^2} , \quad \frac{d^2 W_3(X_2)}{dx^2} = \frac{d^2 W_4(X_2)}{dx^2} \quad (2.18)$$

d) Ayrılma noktalarında kesme kuvvetlerinin eşitliği:

$$\frac{d^3 W_2(-X_1)}{dx^3} = \frac{d^3 W_3(-X_1)}{dx^3} , \quad \frac{d^3 W_3(X_2)}{dx^3} = \frac{d^3 W_4(X_2)}{dx^3} \quad (2.19)$$

e) Kiriş uçlarında eğilme momenti ve kesme kuvvetinin sıfır olmasından:

$$\begin{aligned}\frac{d^2W_2(-L_1)}{dx^2} &= 0, \quad \frac{d^2W_4(L_2)}{dx^2} = 0, \\ \frac{d^3W_2(-L_1)}{dx^3} &= 0, \quad \frac{d^3W_4(L_2)}{dx^3} = 0\end{aligned}\quad (2.20)$$

f) Zemin tabakası yüzeyi için yer değiştirmelerin sonlu kalması koşulundan:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \{W_1\} \rightarrow \text{sonlu}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \{W_5\} \rightarrow \text{sonlu} \quad (2.21)$$

Yukarıda verilen toplam 18 koşul (2.11), (2.11), (2.12), (2.13), (2.15) denklemlerinden ortaya çıkacak 16 sabit ve ayrılma noktalarının koordinatları olan X_1 ve X_2 'nin hesabı için yeterli olmaktadır.

Simetrik hal için ise bu koşulların sayısı 11 olmaktadır. Bu halde simetriden dolayı, yükün altındaki noktada;

$$\frac{dW_3(0)}{dx} = 0, \quad \frac{d^3W_3(0)}{dx^3} = \frac{P}{2EJ} \quad (2.22)$$

koşulları yazılmakta, ayrılma noktasındaki süreklilik koşulları ve diğer koşullar ise (simetriden dolayı bir bölge göz önüne alındığında) bu halde de geçerli olmaktadır (Kerr ve Coffin, 1991).

Asimetrik ve simetrik hal için yukarıda verilen sınır ve süreklilik koşulları, her iki bölgede de ayrılma olması hali için geçerlidir. Bu durumdan başka, kirişin zemine tamamen batması, sol tarafta ayrılma sağ tarafta batma veya bunun tersi gibi durumlar da ortaya çıkabilmektedir. Kirişin tam batması halinde sınır koşulları aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$W_1(-L_1) = W_3(-L_1), \quad \frac{d^2W_3(-L_1)}{dx^2} = 0, \quad -EJ \frac{d^3W_3(-L_1)}{dx^3} + G \left(\frac{dW_3(-L_1)}{dx} \right) = G \frac{dW(-L_1)}{dx}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \{W_1\} \rightarrow \text{sonlu}, \quad W_3(L_2) = W_5(L_2), \quad \frac{d^2W_3(L_2)}{dx^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \{W_5\} \rightarrow \text{sonlu}$$

$$- EJ \frac{d^3 W_3(L_2)}{dx^3} + G \left(\frac{dW_3(L_2)}{dx} - \frac{dW_5(L_2)}{dx} \right) = 0 \quad (2.23)$$

Kirişin zeminden sol tarafta ayrılması halinde ise sınır koşulları (2.16)-(2.21) sınır koşulları ile aynı olmakta, sağ taraf için ise (2.23) koşullarının sağ tarafı için verilenleri ile aynı olmaktadır.

(2.11)-(2.15) denklemlerinin çözümüne geçmeden önce aşağıdaki boyutsuzlaştırmalar yapılmaktadır:

$$\lambda^4 = \frac{k}{4EJ}, \quad \xi = \lambda x, \quad \xi_1 = \lambda X_1, \quad \xi_2 = \lambda X_2, \quad l = \lambda L, \quad l_1 = \lambda L_1, \quad l_2 = \lambda L_2$$

$$w = \lambda W, \quad \lambda_G = \frac{k}{G\lambda^2}, \quad F = \frac{P}{4\lambda^2 EJ} \quad (2.24)$$

Bu boyutsuz büyüklüklerin kullanılması ile (2.11)-(2.15) diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\frac{d^2 w_1}{d\xi^2} - \lambda_G w_1 = 0, \quad -\infty < \xi < -\xi_1 \quad (2.25)$$

$$\frac{d^4 w_2}{d\xi^4} = 0, \quad -l_1 < \xi < -\xi_1 \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{4} \frac{d^4 w_3}{d\xi^4} - \frac{1}{\lambda_G} \frac{d^2 w_3}{d\xi^2} + w_3 = F \delta(\xi), \quad -\xi_1 < \xi < \xi_2 \quad (2.27)$$

$$\frac{d^4 w_4}{d\xi^4} = 0, \quad \xi_2 < \xi < l_2 \quad (2.28)$$

$$\frac{d^2 w_5}{d\xi^2} - \lambda_G w_5 = 0, \quad \xi_2 < \xi < +\infty \quad (2.29)$$

Burada ξ boyutsuz koordinatı, ξ_1 ve ξ_2 de ayrılma noktalarının koordinatlarını göstermektedir.

3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, bölüm 2’de elde edilen (2.25)-(2.29) denklemlerinin (2.16)-(2.21) sınır ve süreklilik koşulları için çözümü yapılacaktır. (2.25) ve (2.29) diferansiyel denklemleri 2. mertebe homojen diferansiyel denklemlerdir ve çözümleri de benzer yolla yapılmaktadır. (2.26) ve (2.28) denklemleri ise 4. mertebe homojen diferansiyel denklemler olup, bunların çözümleri için de aynı yol izlenmektedir.

(2.25) denkleminin çözümü için $w_1 = D_1 e^{\mu \xi}$ şeklinde bir çözüm alınıp, bunun denklemden yerine yazılması ile;

$$\mu^2 - \lambda_G = 0 \quad (3.1)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri $\mu_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda_G}$ dir. Bu durumda (2.11) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$w_1(\xi) = A_1 e^{-\sqrt{\lambda_G} \xi} + A_2 e^{\sqrt{\lambda_G} \xi} \quad (3.2)$$

Benzer yolla (2.29) denkleminin çözümü de

$$w_5(\xi) = A_{15} e^{-\sqrt{\lambda_G} \xi} + A_{16} e^{\sqrt{\lambda_G} \xi} \quad (3.3)$$

olmaktadır. (2.26) ve (2.28) diferansiyel denklemlerinin çözümü ise bilindiği gibi 3.dereceden polinomlardır. Bu nedenle (2.26) denkleminin çözümü,

$$w_2(\xi) = A_3 \xi^3 + A_4 \xi^2 + A_5 \xi + A_6 \quad (3.4)$$

ve (2.28) denkleminin çözümü,

$$w_4(\xi) = A_{11} \xi^3 + A_{12} \xi^2 + A_{13} \xi + A_{14} \quad (3.5)$$

olarak yazılabilmektedir.

Kirişin zeminle temas halinde olduğu üçüncü bölge için elde edilen (2.27) diferansiyel denklemin çözümü ise, homojen ve özel çözümlerin toplamı şeklindedir. Homojen diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{4} \frac{d^4 w_3}{d\xi^4} - \frac{1}{\lambda_G} \frac{d^2 w_3}{d\xi^2} + w_3 = 0 \quad (3.6)$$

Bu denklemde $g = \frac{4}{\lambda_G}$ kısaltması yapıp düzenlenirse;

$$\frac{d^4 w_3}{d\xi^4} - g \frac{d^2 w_3}{d\xi^2} + 4w_3 = 0 \quad (3.7)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemi çözmek için $w_3(\xi) = D_2 e^{m\xi}$ fonksiyonu alınıp yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$m^4 - gm^2 + 4 = 0 \quad (3.8)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri ise,

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{\frac{g}{2} + \frac{\sqrt{g^2 - 16}}{2}}, \quad m_2 = -\sqrt{\frac{g}{2} + \frac{\sqrt{g^2 - 16}}{2}} \\ m_3 &= \sqrt{\frac{g}{2} - \frac{\sqrt{g^2 - 16}}{2}}, \quad m_4 = -\sqrt{\frac{g}{2} - \frac{\sqrt{g^2 - 16}}{2}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak elde edilmektedir. $g = \frac{4}{\lambda_G}$ ifadesinin bu köklerde yerine yazılması ile (3.8)

karakteristik denkleminin kökleri,

$$m_i = \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda_G} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda_G}\right)^2 - 4}} \quad i=1,2,3,4 \quad (3.10)$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki ifadede görüldüğü gibi λ_G 'nin değerine göre kökler gerçel veya kompleks olabilmektedir. Kök içindeki ifade α ile gösterilirse,

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_G} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda_G}\right)^2 - 4} > 0 \text{ olduğunda kökler gerçel olur. Bunun için } \left(\frac{2}{\lambda_G}\right)^2 - 4 > 0 \text{ olmalıdır.}$$

Buradan $\lambda_G < 1$ olması halinde köklerin gerçel olduğu anlaşılmaktadır. Boyutlu hal göz önüne

alındığında ise, $\frac{k}{G\lambda^2} < 1$ olmakta ve $k=4EJ\lambda^4$ ifadesinin yerine yazılması ile $G > 2\sqrt{kEJ}$ koşulu elde edilmektedir. $\lambda_G < 1$ için (3.6) diferansiyel denkleminin çözümü;

$$w_3(\xi) = B_1 e^{m_1 \xi} + B_2 e^{m_2 \xi} + B_3 e^{m_3 \xi} + B_4 e^{m_4 \xi} \quad (3.11)$$

olarak elde edilmektedir. Üstel ifadeler yerine hiperbolik fonksiyonların kullanılması ile (3.6) homojen denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$w_3(\xi) = A_7 \sinh(m\xi) + A_8 \cosh(m\xi) + A_9 \sinh(n\xi) + A_{10} \cosh(n\xi) \quad (3.12)$$

Burada $m = \sqrt{\frac{2}{\lambda_G} + \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda_G}\right)^2 - 4}}$, $n = \sqrt{\frac{2}{\lambda_G} - \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda_G}\right)^2 - 4}}$ olarak tanımlanmaktadır.

(2.27) diferansiyel denkleminin özel çözümü ise,

$$w_\delta = C_1 \sinh|m\xi| + C_2 \sinh|n\xi| \quad (3.13)$$

olarak alınmaktadır. Bu ifadenin (2.27) denkleminde yerine yazılması ve düzenlenmesi ile C_1 ve C_2 sabitleri, $C_1 = \frac{2F}{m(m^2 - n^2)}$, $C_2 = -\frac{2F}{n(m^2 - n^2)}$ olarak elde edilmektedir.

Yukarıda da belirtildiği gibi m_i kökleri λ_G parametresine bağlı olup kökler kompleks olabilmektedir. Bu durum $\left(\frac{2}{\lambda_G}\right)^2 - 4 < 0$ olması halinde ortaya çıkmaktadır. Bu ise $\lambda_G > 1$ ($G < 2\sqrt{kEJ}$) olmasını gerektirmektedir. Köklerin kompleks olması halinde (2.27) denkleminin homojen çözümü aşağıdaki gibi yapılmaktadır:

m_i köklerinin içindeki terimler için $\gamma = \frac{2}{\lambda_G}$ ve $\beta^2 = 4 - \left(\frac{2}{\lambda_G}\right)^2$ kısaltmaları yapılırsa, kökler $m_i = \pm\sqrt{\gamma \pm i\beta}$ olarak yazılabilmektedir. Bu durumda problem bir kompleks sayının karekökünün hesabına dönüşmektedir. $m = \sqrt{\gamma + i\beta}$ için çözüm aşağıda verilmiştir:

$$m = \sqrt{\gamma + i\beta} = t + ir \quad (3.14)$$

olarak alınabilir. Burada t ve r kompleks sayının gerçel ve sanal kısmına ait gerçel sayıları göstermektedir. Bu ifadenin her iki tarafının karesi alınıp düzenlenirse,

$$t^4 - \gamma^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0 \quad (3.15)$$

denklemini elde edilir. Burada $r = \frac{\beta}{2t}$ ve $\gamma = t^2 - r^2$ 'dir. (3.15) denkleminin çözümünden (t 'nin gerçel olması gerektiği de göz önüne alınarak)

$$t_1 = \sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}}{2}}, \quad t_2 = -\sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}}{2}}$$

kökleri elde edilmektedir. Bu değerler (3.14) bağıntısında yerine yazılırsa birbirinin simetriği olan,

$$m_1 = t_1 + i \frac{\beta}{2t_1}, \quad m_2 = -t_1 - i \frac{\beta}{2t_1} \quad (3.16)$$

kökleri elde edilir. Bu kökler $m = -\sqrt{\gamma + i\beta}$ değeri için de aynı değerleri vermektedir. $m = \sqrt{\gamma - i\beta}$ için çözüm aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$m = \sqrt{\gamma - i\beta} = t + ir \quad (3.17)$$

olarak (bir önceki hale benzer şekilde) alınabilir. Bu ifadenin her iki tarafının karesi alınıp düzenlenirse,

$$t^4 - \gamma^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0 \quad (3.18)$$

denklemini elde edilir. Burada $r = -\frac{\beta}{2t}$ ve $\gamma = t^2 - r^2$ 'dir. (3.18) denkleminin çözümünden,

$$t_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}}{2}}, \quad t_4 = -\sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}}{2}}$$

kökleri elde edilir. $t_4 = -t_3$ olduğu göz önünde tutulur ve bu kökler (3.17) ifadesinde yerine yazılırsa birbirinin simetriği olan

$$m_3 = t_3 - i \frac{\beta}{2t_3}, \quad m_4 = -t_3 + i \frac{\beta}{2t_3} \quad (3.19)$$

kökleri elde edilir. $t_3 = t_1$ olduğundan bu köklerin son şekli,

$$m_3 = t_1 - i \frac{\beta}{2t_1}, \quad m_4 = -t_1 + i \frac{\beta}{2t_1} \quad (3.20)$$

olur. Bu kökler $m = -\sqrt{\gamma - i\beta}$ bulunacak değerlerle aynı olmaktadır. Sonuçta (3.16) ve (3.20) köklerinin kompleks eşlenik olması nedeniyle m_i kökleri

$$m_{1,2} = t_1 \pm i \frac{\beta}{2t_1}, \quad m_{3,4} = -t_1 \pm i \frac{\beta}{2t_1} \quad (3.21)$$

olarak alınabilmektedir. Köklerin bu şekilde elde edilmesinden sonra homojen denklemin çözümü;

$$w_3(\xi) = (C_1 \cos \frac{\beta}{2t_1} \xi + C_2 \sin \frac{\beta}{2t_1} \xi) e^{t_1 \xi} + (C_3 \cos \frac{\beta}{2t_1} \xi + C_4 \sin \frac{\beta}{2t_1} \xi) e^{-t_1 \xi}$$

olarak elde edilir. Üstel fonksiyonlar yerine $e^{t_1 \xi} = \cosh t_1 \xi + \sinh t_1 \xi$, $e^{-t_1 \xi} = \cosh t_1 \xi - \sinh t_1 \xi$ eşitlikleri göz önüne alınarak, çözüm trigonometrik-hiperbolik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} w(\xi) = & \left[(C_1 + C_3) \cos \frac{\beta}{2t_1} \xi + (C_2 + C_4) \sin \frac{\beta}{2t_1} \xi \right] \cosh t_1 \xi \\ & + \left[(C_1 - C_3) \cos \frac{\beta}{2t_1} \xi + (C_2 - C_4) \sin \frac{\beta}{2t_1} \xi \right] \sinh t_1 \xi \end{aligned} \quad (3.22)$$

γ ve β için yukarıda verilen değerlerin yerine yazılması ile w_3 homojen çözümü,

$$\begin{aligned} w_3(\xi) = & A_7 \cos(n\xi) \cosh(t\xi) + A_8 \sin(n\xi) \cosh(t\xi) + A_9 \cos(n\xi) \sinh(t\xi) \\ & + A_{10} \sin(n\xi) \sinh(t\xi) \end{aligned} \quad (3.23)$$

olarak elde edilir. Burada $n = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_G}}$, $t = \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_G}}$ olarak tanımlanmaktadır.

$\lambda_G > 1$ olması durumunda homojen çözüm elde edildikten sonra, denklemin özel çözümü aranacaktır. Bunun için,

$$w_o = E_1 \sinh|t\xi| \cos n\xi + E_2 \cosh t\xi \sin|n\xi| \quad (3.24)$$

şeklinde bir çözüm alınmaktadır. Diferansiyel denklemde 4. ve 2. mertebeden türevler olduğundan önce gerekli türetmeler yapılmaktadır. Mutlak değer ve $\delta(x)$ fonksiyonlarının türevleri de hesaba girmektedir. Bu nedenle bu fonksiyonlar aşağıda verilmiştir.

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 ; x < 0 \\ 0 ; x = 0 \\ 1 ; x > 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta(x) &= 0, \quad x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F(x) dx &= F(0) \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

$$\frac{d|x|}{dx} = \text{sign}(x) , \quad \frac{d(\text{sign}(x))}{dx} = 2\delta(x) \quad (3.27)$$

Bu özellikler de dikkate alınarak 2. ve 4. türevler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} w''(\xi) &= E_1 \left\{ 2t\delta(\xi) + \text{sign}(\xi) \left[-2tn \cosh(t\xi) \sin(n\xi) + (t^2 - n^2) \sinh(t\xi) \cos(n\xi) \right] \right\} \\ &\quad + E_2 \left\{ 2n\delta(\xi) + \text{sign}(\xi) \left[(t^2 - n^2) \cosh(t\xi) \sin(n\xi) + 2tn \sinh(t\xi) \cos(n\xi) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^{IV}(\xi) &= E_1 \left[2t \delta''(\xi) + 2\delta(\xi)(t^3 - 3tn^2) + (4tn^3 - 4t^3n) \cosh(t\xi) \sin|n\xi| \right. \\ &\quad \left. + (t^4 + n^4 - 6t^2n^2) \sinh|t\xi| \cos(n\xi) \right] \\ &\quad + E_2 \left[2n \delta''(\xi) + 2\delta(\xi)(3t^2n - n^3) + (t^4 + n^4 - 6t^2n^2) \cosh(t\xi) \sin|n\xi| \right. \\ &\quad \left. + (4t^3n - 4tn^3) \sinh|t\xi| \cos(n\xi) \right] \end{aligned}$$

Bu türevler ve (3.24) çözümü diferansiyel denklemde yerine yazılıp düzenlenirse, aşağıdaki denklem elde edilmektedir:

$$\begin{aligned}
& \delta(\xi) \left\{ \left(\frac{t^3 - 3tn^2}{2} - \frac{2t}{\lambda_G} \right) E_1 + \left(\frac{3t^2n - n^3}{2} - \frac{2n}{\lambda_G} \right) E_2 \right\} + {}''\delta(\xi) \left\{ \frac{t}{2} E_1 + \frac{n}{2} E_2 \right\} \\
& \text{sign}(\xi) \left\{ \left(tn^3 - t^3n + \frac{2tn}{\lambda_G} \right) \cosh(t\xi) \sin(n\xi) + \left(-\frac{6t^2n^2 + t^4 + n^4}{4} - \frac{t^2 - n^2}{\lambda_G} + 1 \right) \sinh(t\xi) \cos(n\xi) \right\} E_1 \\
& \text{sign}(\xi) \left\{ \left[\frac{1}{4} (t^4 + n^4 - 6t^2n^2) - \frac{t^2 - n^2}{\lambda_G} + 1 \right] \cosh(t\xi) \sin(n\xi) + \left(t^3n - tn^3 - \frac{2tn}{\lambda_G} \right) \sinh(t\xi) \cos(n\xi) \right\} E_2 \\
& = F\delta(\xi)
\end{aligned}$$

Bu denklemde $t = \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_G}}$, $n = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_G}}$ yazılması ile işaret fonksiyonunu içeren terim sıfır olmaktadır. Diğer taraftan Dirac delta fonksiyonun ikinci türevi sağ tarafta görünmediğinden, bu terimin katsayısı sıfıra eşitlenerek;

$$\frac{t}{2} E_1 + \frac{n}{2} E_2 = 0 \rightarrow E_2 = -\frac{t}{n} E_1 \quad (3.28)$$

bağıntısı elde edilmektedir. $\delta(\xi)$ parantezindeki terimler ise t ve n değerleri yerine yazıldığında, E_1 ve E_2 'nin katsayıları için sırasıyla $\gamma_1 = -\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_G}}$ ve $\gamma_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_G}}$ olmaktadır. Bu kez sol ve sağ tarafların $\delta(\xi)$ 'nin katsayılarının eşitliğinden,

$$-\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_G}} E_1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_G}} E_2 = F \quad (3.29)$$

bağıntısı elde edilmektedir. Bu iki bağıntıdan,

$$E_1 = -\frac{F}{2\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_G}}}, \quad E_2 = \frac{F}{2\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_G}}} \quad (3.30)$$

olarak sabitler elde edilmektedir.

Yukarıda elde edilen çözümler toplu olarak aşağıda verilmiştir:

$\lambda_G > 1$ ($G < 2\sqrt{kEI}$) için çözümler;

$$w_1(\xi) = A_1 e^{-\sqrt{\lambda_G} \xi} + A_2 e^{\sqrt{\lambda_G} \xi} \quad (3.31)$$

$$w_2(\xi) = A_3 \xi^3 + A_4 \xi^2 + A_5 \xi + A_6 \quad (3.32)$$

$$w_3(\xi) = [A_7 \cos(n\xi) + A_8 \sin(n\xi)] \cosh(t\xi) + [A_9 \cos(n\xi) + A_{10} \sin(n\xi)] \sinh(t\xi) \\ + E_1 \sinh|t\xi| \cos(n\xi) + E_2 \cosh(t\xi) \sin|n\xi| \quad (3.33)$$

$$w_4(\xi) = A_{11} \xi^3 + A_{12} \xi^2 + A_{13} \xi + A_{14} \quad (3.34)$$

$$w_5(\xi) = A_{15} e^{-\sqrt{\lambda_G} \xi} + A_{16} e^{\sqrt{\lambda_G} \xi} \quad (3.35)$$

Burada;

$$n = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_G}} \quad , \quad t = \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_G}} \quad , \quad E_1 = -\frac{F}{2t} \quad , \quad E_2 = \frac{F}{2n}$$

olarak tanımlanmaktadır.

$\lambda_G < 1$ ($G > 2\sqrt{kEI}$) için çözümler;

$$w_1(\xi) = B_1 e^{-\sqrt{\lambda_G} \xi} + B_2 e^{\sqrt{\lambda_G} \xi} \quad (3.36)$$

$$w_2(\xi) = B_3 \xi^3 + B_4 \xi^2 + B_5 \xi + B_6 \quad (3.37)$$

$$w_3(\xi) = B_7 \sinh(m_{11}\xi) + B_8 \cosh(m_{11}\xi) + B_9 \sinh(m_{12}\xi) + B_{10} \cosh(m_{12}\xi) \\ + C_1 \sinh|m_{11}\xi| + C_2 \sinh|m_{12}\xi| \quad (3.38)$$

$$w_4(\xi) = B_{11} \xi^3 + B_{12} \xi^2 + B_{13} \xi + B_{14} \quad (3.39)$$

$$w_5(\xi) = B_{15} e^{-\sqrt{\lambda_G} \xi} + B_{16} e^{\sqrt{\lambda_G} \xi} \quad (3.40)$$

Burada;

$$m_{11} = \sqrt{\frac{2}{\lambda_G} + \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda_G}\right)^2 - 4}} \quad , \quad m_{12} = \sqrt{\frac{2}{\lambda_G} - \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda_G}\right)^2 - 4}} \quad , \quad C_1 = \frac{2F}{m_{11}(m_{11}^2 - m_{12}^2)} \quad ,$$

$$C_2 = \frac{2F}{m_{12}(m_{11}^2 - m_{12}^2)} \quad \text{olarak tanımlanır.}$$

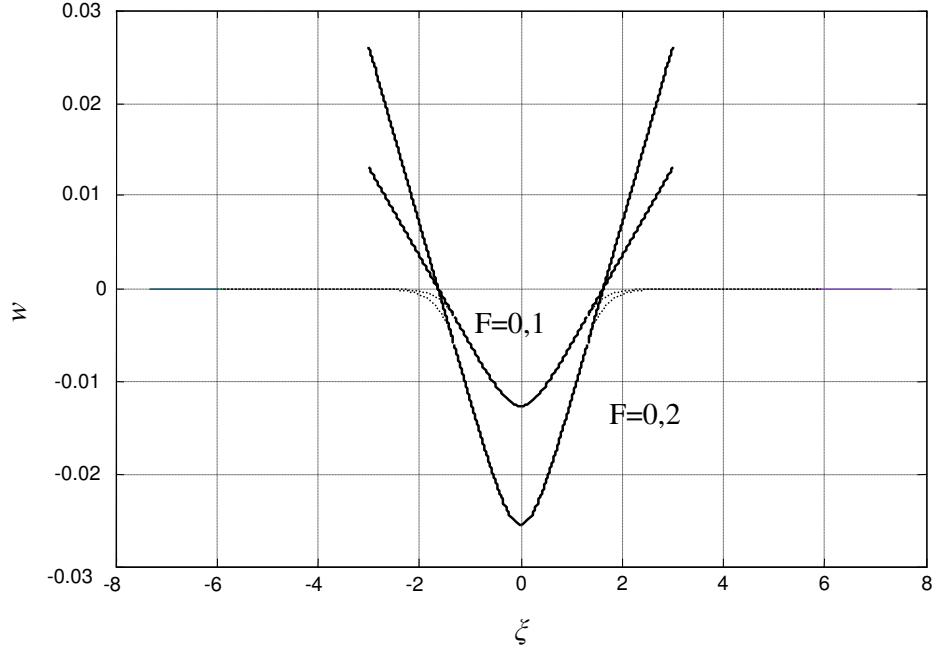
4. SONUÇLAR

Önceki bölümde söz edildiği gibi A_n sabitlerinin ve ξ_1 ve ξ_2 koordinatlarının bulunması gerekmektedir. Bu bilinmeyenlerin bulunmasında (2.16)-(2.21)'da verilen sınır ve süreklilik koşullarından yararlanılacaktır. Kiriş uçlarında kesme kuvveti ve eğilme momenti sıfırdır. Bu koşul (3.5), (3.7) denklemlerinde uygulanırsa A_3 , A_4 , A_{11} ve A_{12} sabitleri sıfır çıkmaktadır. Yine zeminde, yer değiştirmenin sonlu kalması koşulunun (3.4), (3.8) denklemlerine uygulanması ile A_1 , A_{16} sabitleri de sıfır olmaktadır. Bundan sonra geri kalan 12 bilinmeyen bulunması için kullanılmayan sınır koşulları yardımıyla ξ_1 ve ξ_2 'ye bağlı lineer bir denklem takımı elde edilmektedir. ξ_1 ve ξ_2 seçilip bu takım çözüldükten (sabitler bulunduktan) sonra, bu sabitlerin yerine konulması ile daha önce hiç kullanılmayan iki lineer olmayan denklem elde edilmektedir. Bu iki denklemi sağlayan ξ_1 ve ξ_2 değerleri ayrılma noktalarının koordinatlarını vermektedir.

Tablo 4.1'de çeşitli λ_G değerleri için ayrılma bölgelerinin koordinatları verilmiştir. Görüldüğü gibi λ_G değerinin büyümesi ile ayrılma bölgesi koordinatları da büyümektedir. Diğer bir deyişle temas boyu ($\xi_1 + \xi_2$) büyümektedir. λ_G büyüdükçe (G küçüldükçe) zemin Winkler zemini gibi davranmakta ve temas boyu da π değerine gitmektedir.

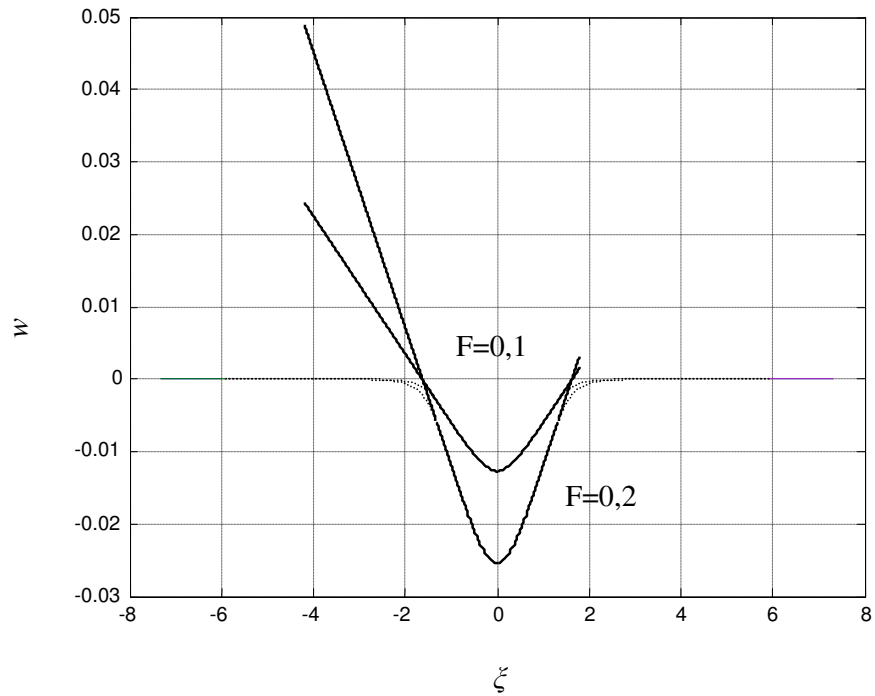
Tablo 4.1 Verilen λ_G değerlerinin ξ_1 ve ξ_2 ile değişimi.

λ_G	ξ_1	ξ_2
1,5	-1,0660	1,0660
2	-1,1107	1,1107
5	-1,2378	1,2378
10	-1,3166	1,3166
50	-1,4434	1,4434
100	-1,4780	1,4780
500	-1,5276	1,5276
1000	-1,5399	1,5399



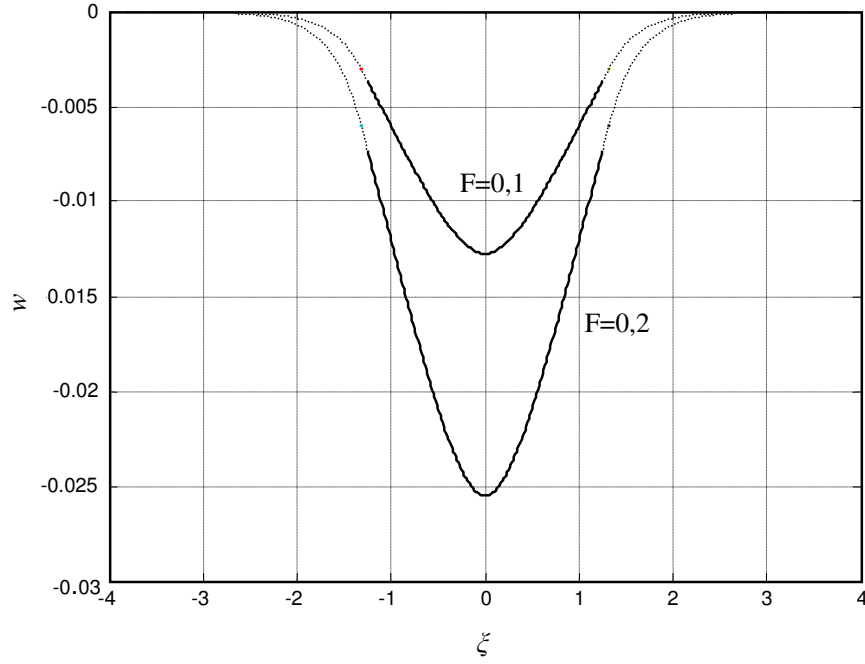
Şekil 4.1 Simetrik yükleme durumu için kiriş elastik eğrileri

Şekil 4.1'de $\lambda_G=10$ için simetrik durumda farklı yükleme durumları için kiriş elastik eğrileri $l=6$ için gösterilmiştir. Kiriş boyu temas boyundan ($\zeta_1+\zeta_2=2,6332$) büyük olduğu için kirişin zeminden ayrıldığı görülmektedir. Bununla birlikte yükün büyüklüğünün temas boyu üzerinde bir etkisi olmadığı görülmektedir.



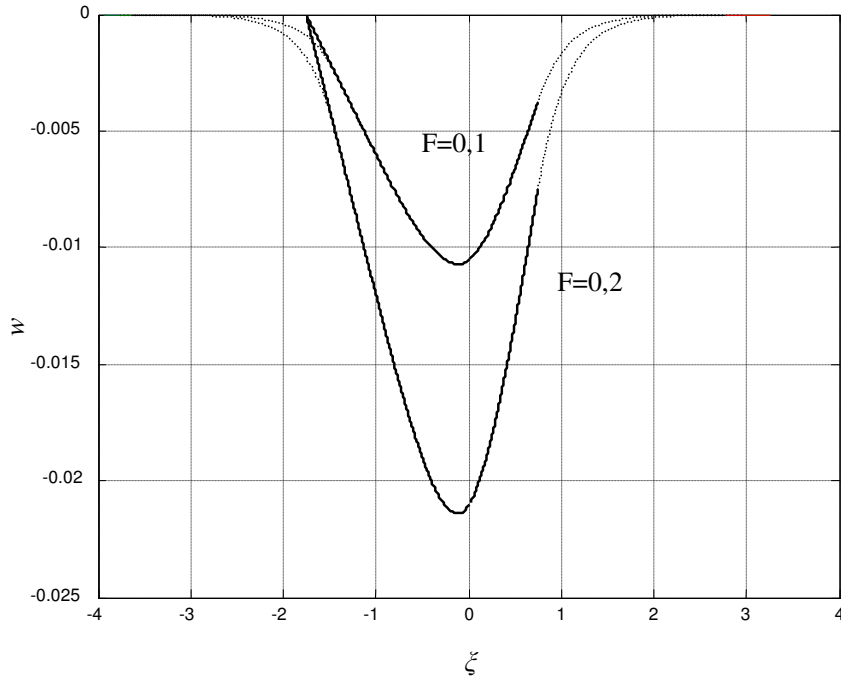
Şekil 4.2 Asimetrik yükleme durumu için kiriş elastik eğrileri

Şekil 4.2’de asimetrik yükleme durumu için kiriş elastik eğrisi görülmektedir. Asimetrikliğin tanımlanması için yük $l_1=0,7l$ mesafeye konulmuştur. Kiriş boyu $l=6$ olarak seçildiğinde kirişin sağ ve sol tarafı da temas bölgesi koordinatlarından büyük olmaktadır. Bu nedenle kiriş zeminden her iki taraftan da ayrılmaktadır.



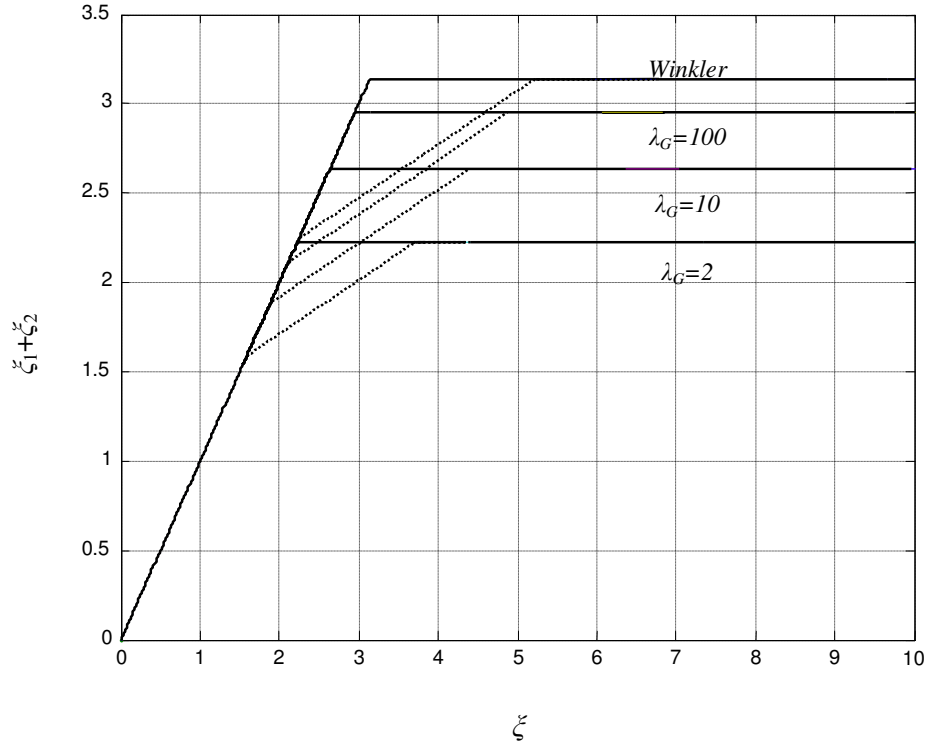
Şekil 4.3 Simetrik yükleme durumunda kısa kiriş için elastik eğri

Şekil 4.3’de simetrik yükleme durumunda $l=2.5$ için kirişin elastik eğrisi verilmiştir. Kiriş boyu temas boyundan küçük olduğu için, kiriş zeminden ayrılmamaktadır. Şekil 4.4’de asimetrik yükleme durumunda $l=2.5$ için kiriş elastik eğrisi verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi bu durumda sol tarafta kiriş zeminden ayrılmakta, sağ tarafta ise ayrılma olmamaktadır.

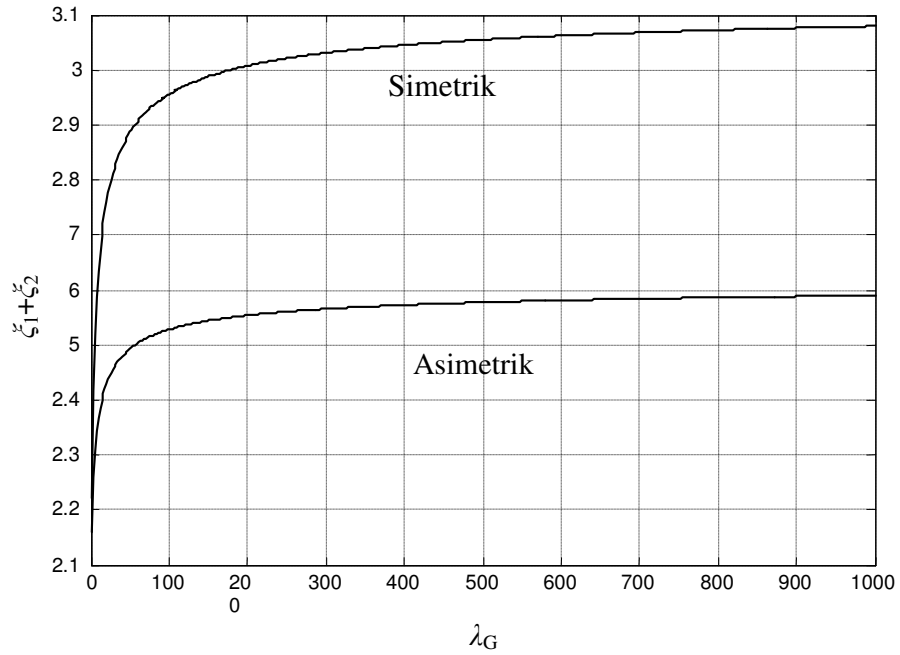


Şekil 4.4 Asimetrik yükleme durumunda kiriş için elastik eğri

Şekil 4.5’de çeşitli λ_G değerleri için simetrik ve asimetrik durumlarda temas boyunun kiriş boyu ile değişimi verilmiştir. Simetrik durumda, kısa kiriş boyları için kiriş boyu ile temas boyu orantılı olarak gitmektedir. Diğer bir deyişle zeminden ayrılma olmamaktadır. Ancak kiriş boyunun verilen λ_G değeri için belirlenen temas boyunu aşması halinde kiriş zeminden ayrılmakta ve artan boylar için temas boyu sabit kalmaktadır. Kısa kiriş boyları için simetrik ve asimetrik durum arasında fark bulunmamaktadır. Asimetrik halde ise kiriş boyunun büyümesi ile temas boyu da daha küçük oranda büyümektedir. Yani sol tarafta kiriş zeminden ayrılmakta, sağ tarafta ise ayrılma olmamaktadır. Kiriş boyunun daha da büyümesi ile temas boyu λ_G için verilen değerlerde, simetrik halde olduğu gibi, sabit kalmaktadır.

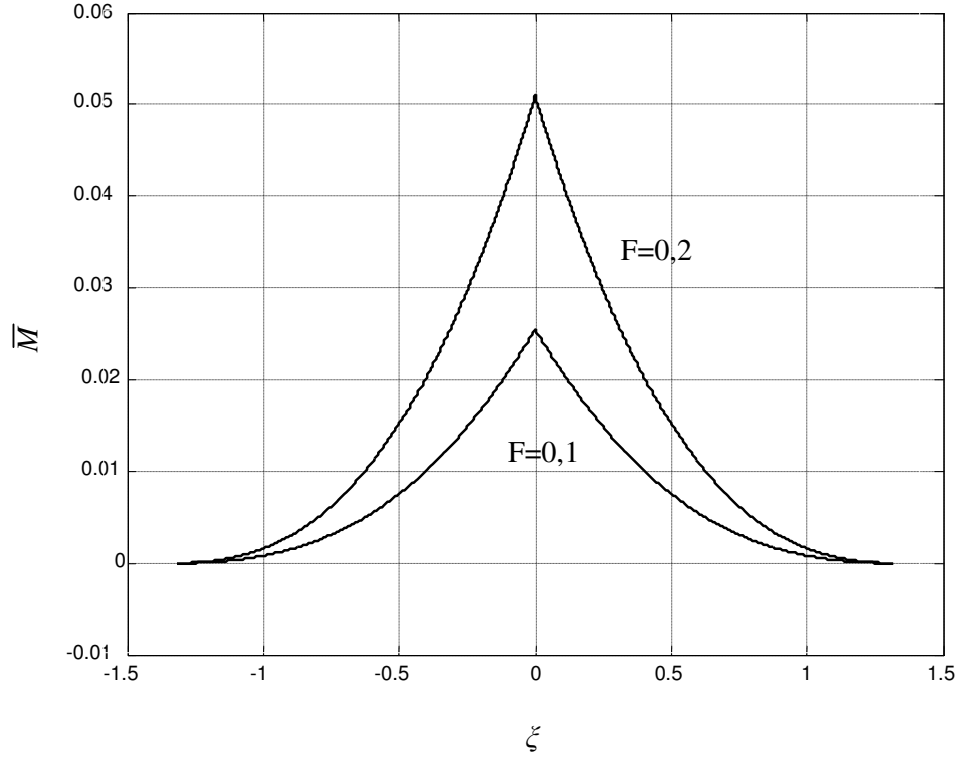


Şekil 4.5 Toplam temas boyunun kiriş boyu ile değişimi

Şekil 4.6 Temas boyunun λ_G ile değişimi

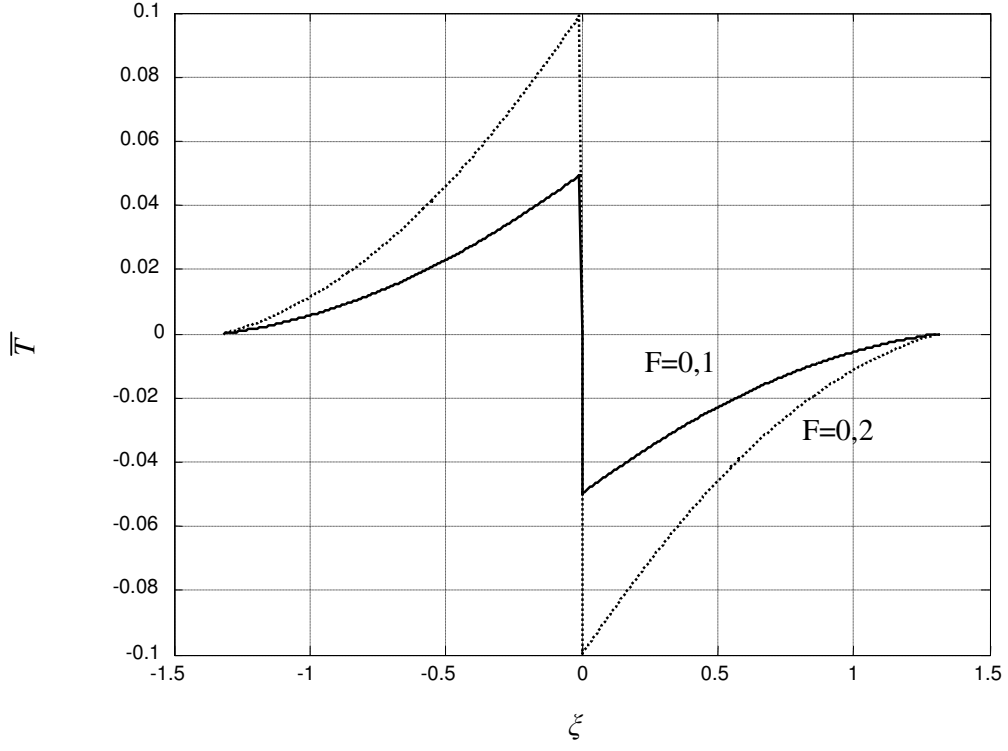
Şekil 4.6'de seçilen bir kiriş boyu için temas boyunun λ_G parametresi ile değişimi verilmiştir. Bu şekilde $l=3,5$ alınmış ve asimetrik durum $l_1=0,7l$ olarak tanımlanmıştır. Simetrik durumda, λ_G değerinin artması ile temas boyunun da arttığı görülmektedir. Bu değer λ_G 'nin çok büyük

değerleri için Winkler zemini için temas boyu olan π değerine gitmektedir. Şekilde görüldüğü gibi asimetrik halde de temas boyu λ_G ile büyümekte, fakat daima simetrik halin altında kalmaktadır.

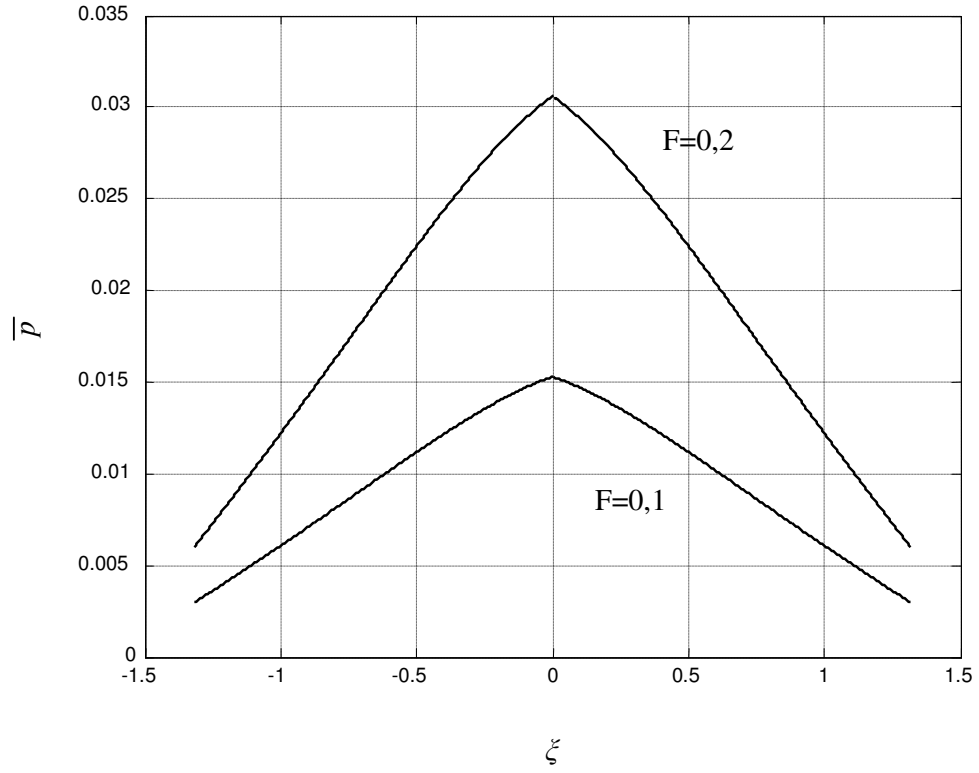


Şekil 4.7 Moment diyagramı

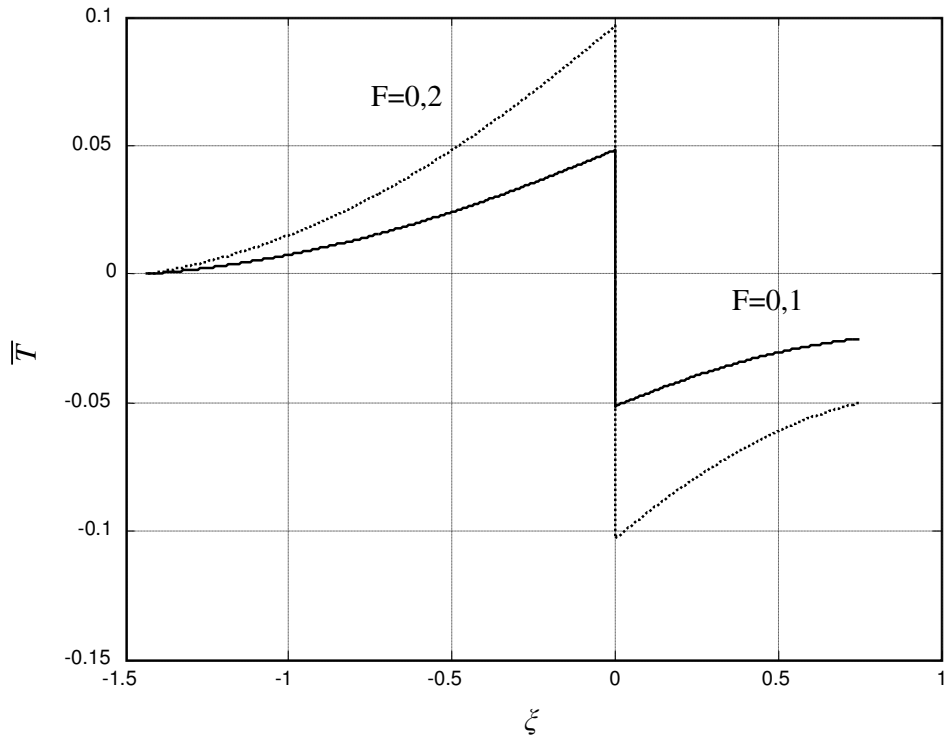
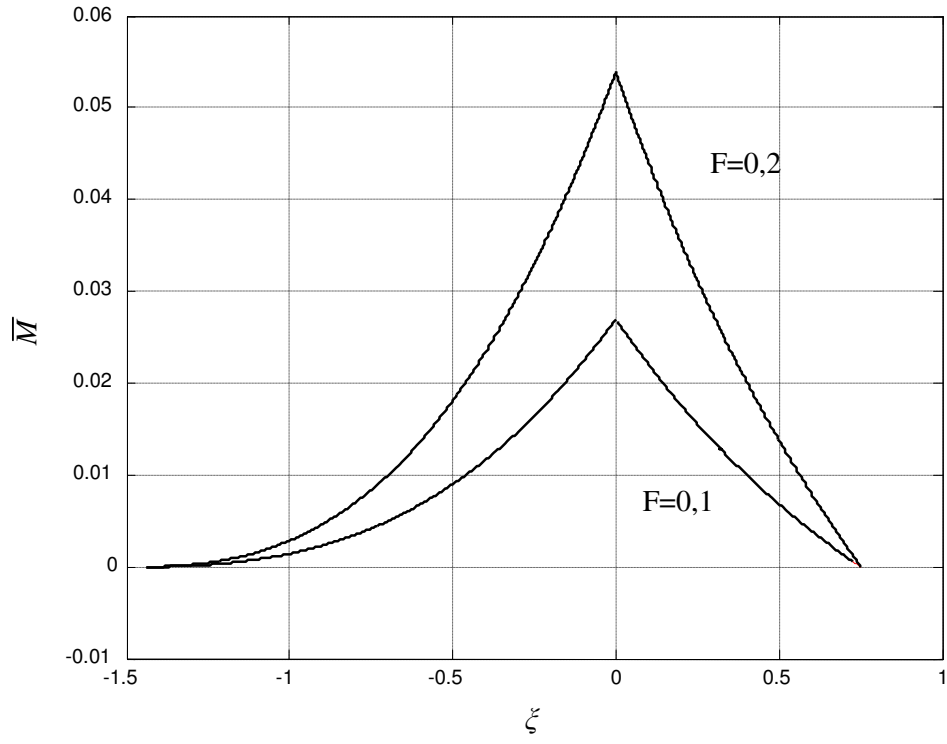
Şekil 4.7, 4.8 ve 4.9'de simetrik durum için boyutsuz moment, boyutsuz kesme kuvveti ve boyutsuz taban basıncı grafikleri verilmiştir. Şekil 4.7 ve 4.8'de görüldüğü gibi, sınır koşulları nedeniyle ayrılma noktalarında moment ve kesme kuvveti sıfır olmaktadır. Yükün şiddetinin artması ile moment ve kesme kuvvetinin de büyüdüğü görülmektedir. Şekil 4.9'de yine kuvvetin artması ile taban basıncının büyüdüğü görülmekte, ayrılma noktalarında ise basınç değerinin sıfır olmadığı anlaşılmaktadır.

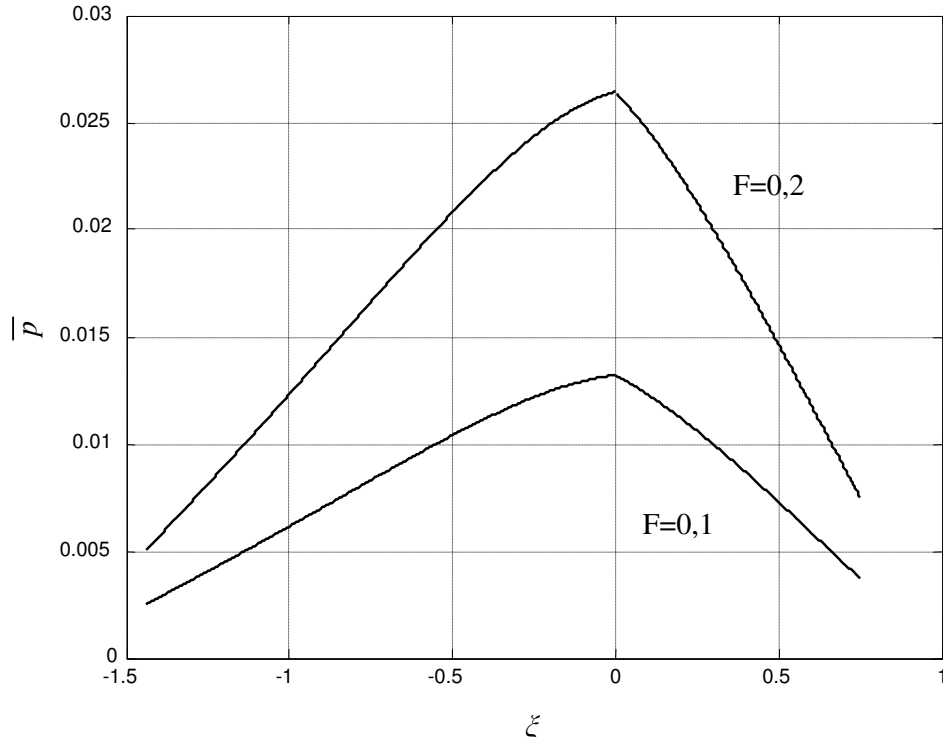


Şekil 4.8 Kesme kuvveti diyagramı



Şekil 4.9 Kiriş boyunca taban basıncı





Şekil 4.12 Kiriş boyunca taban basıncı (asimetrik durum)

Şekil 4.10, 4.11 ve 4.12’de asimetrik durum için boyutsuz moment, boyutsuz kesme kuvveti ve boyutsuz taban basıncı grafikleri verilmiştir. Şekil 4.10’de sınır koşulları nedeniyle ayrılma noktalarında moment sıfır olmaktadır. Şekil 4.11’de kesme kuvveti kirişin sol tarafında sıfır olmakta ancak ayrılma olmayan sağ tarafta sıfır olmamaktadır.

Simetrik ve asimetrik yükleme durumları için toplam temas boyunun kayma tabakası parametresi (λ_G) ile değiştiği görülmektedir. Simetrik halde olduğu gibi asimetrik yükleme durumunda da kısa kirişler için temas boyu ile kiriş boyu doğrusal olarak değişmektedir. Asimetriden dolayı kirişin sol tarafı, zeminden sağ tarafından daha önce ayrılmaktadır. Bu da asimetrik yüklemedeki toplam temas boyunun, simetrik haldeki temas boyundan daha küçük olmasını sağlamaktadır. Kiriş boyunun çok daha büyümesi halinde, asimetri önemini kaybetmekte ve sistem simetrik hale geçmektedir. Bundan başka kiriş üzerine uygulanan yükün büyüklüğünün temas boyunun uzunluğuna bir etkisi olmadığı da görülmektedir.

KAYNAKLAR

Celep, Z., Demir, F., (2005), "Circular Rigid Beam on Tensionless two Parameter Elastic Foundation", *Mathematics Mechanics*, 85(6): 431-439.

Celep, Z., Malaika, A., Abu-Hussein, M., (1989), "Forced Vibrations of a Beam on a Tensionless Foundation", *Journal of Sound and Vibration*, 128(2): 235-246.

Choros, J., Adams, G.G., (1979), "A Steadily Moving Load on an Elastic Beam Resting on a Tensionless Winkler Foundation", *Journal of Applied Mechanics*, 46(1): 175-180.

Coşkun, İ., (2003), "The Response of the Finite Beam on Tensionless Pasternak Foundation Subjected to a Harmonic Load", *European Journal of Mechanics*, 22(1): 151-161

Dutta, S.C., Roy, R., (2002), "A Critical Review on Idealization and Modeling for Interaction Among Soil-Foundation-Structure System", *Computers&Structures*, 80: 1579-1594.

Eisenberger, M., Clastornik, J., (1987), "Beams on Variable Two Parameter Elastic Foundation", *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10): 1454-1466.

Hetenyi, M., (1946), "Beams on Elastic Foundation", The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.

Horibe, T., Asano, N., (2001), "Large Deflection Analysis of Beams on Two Parameter Elastic Foundation Using the Boundary Integral Equation Method", *Jsme International Journal Series A-Solid Mechanics And Material Engineering*, 44(2): 231-236.

Kerr, A., Coffin, D.W., (1991), "Beams on a Two-Dimensional Pasternak Base Subjected to Loads That Cause Lift-off", *International Journal of Solids and Structures*, 28(4): 413-422.

Lin, L., Adams, G.G., (1987), "Beam on Tensionless Elastic Foundation", *Journal of Engineering Mechanics*, 113(4): 542-533.

M.A. De Rosa, M.J. Maurizi, (1998), "The Influence of Concentrated Masses and Pasternak Soil on the Free Vibration of Euler Beams – Exact Solution", *Journal of Sound and Vibration*, 212(4): 573-581.

Morfidis, K., Avramidis, I.E., (2002), "Formulation of a Generalized Beam Element on a Two Parameter Elastic Foundation with Semi Rigid Connections and Rigid Offsets", *Computers and Structures*, 80(25): 1919-1934.

Razaqpur, A.G., Shah, K.R., (1991), "Exact Analysis of Beams on Two Parameter Elastic Foundation", *International Journal of Solids and Structures*, 27(4): 435-454.

Tsai, N.C., Westmann, R.E., (1967), "Beams on Tensionless Foundation", *Journal of Engineering Mechanics*, 93: 1-12.

Valsangkar, A.J., Pradhanang, R., (1988), "Vibrations of Beams-coloums on Two Parameter Elastic Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16(2): 217-225.

Weitsman, Y., (1970), "On Foundations That Reacts in Compression Only", *Journal of Applied Mechanics*, 37(7): 1019-1030.

Yokoyama, T., (1991), "Vibrations of Timoshenko Beam-columns on Two Parameter Elastic Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20: 355-370.

Zhang, Y., Murphy, K.D., (2004), "Response of a Finite Beam in Contact with a Tensionless Foundation under Symmetric and Asymmetric Loading", *International Journal of Solids and Structures*, 41: 6745-6758.

Zhaohua, F., Cook, R.D., (1983), "Beam Elements on Two Parameter Elastic Foundations", *Journal of Engineering Mechanics*, 109(6): 1390-1402.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	26.06.1979	
Doğum yeri	Sarıgöl	
Lise	1993–1997	Kırklareli Atatürk Süper Lisesi
Lisans	1997–2002	Trakya Üniversitesi Çorlu Mühendislik Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2003–2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

Çalıştığı kurumlar

2004–2005	Ateş Yapı Denetim A.Ş.
2005-2006	ZEMA İnşaat San ve Tic. A.Ş.