

Prof. Dr. Ercüment KÖKSAL  
*E. Köksal*

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

154343

Prof. Dr. Cengiz Karakoç  
*C. Karakoç*

Prof. Naci Yücefer

*Naci Yücefer*

# VARYASYON METODU VE SONLU ELEMANLAR TEKNIĞİ İLE ÇUBUK STABİLİTESİNİN İNCELENMESİ

İnşaat Mühendisi Hakan İNCİ

FBE İnşaat Anabilim Dalı Mekanik Programında  
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ercüment KÖKSAL (YTÜ)

İSTANBUL, 2004

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                                      | Sayfa |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| SİMGE LİSTESİ.....                                                                                                                   | III   |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                                                                                   | IV    |
| ÖNSÖZ.....                                                                                                                           | V     |
| ÖZET.....                                                                                                                            | VI    |
| ABSTRACT.....                                                                                                                        | VII   |
| 1. GİRİŞ.....                                                                                                                        | 1     |
| 2. STABİLİTE ANALİZİNDE YAPILAN KABULLER.....                                                                                        | 4     |
| 3. ENERJİ (VARYASYON) YÖNTEMİ.....                                                                                                   | 5     |
| 3.1 Toplam Potansiyel Enerji Yöntemiyle Çubuk Stabilitesi.....                                                                       | 7     |
| 3.2 Ritz – Rayleigh Yöntemiyle Çubuk Stabilitesi.....                                                                                | 11    |
| 3.2.1 Yöntemde İzlenecek Adımlar.....                                                                                                | 12    |
| 3.2.2 Ritz Yöntemiyle Çubuk Stabilitesi Örnek Çözümü.....                                                                            | 13    |
| 4. SONLU ELEMENLAR TEKNIĞI.....                                                                                                      | 17    |
| 4.1 Giriş.....                                                                                                                       | 17    |
| 4.2 Enerji Yöntemi İle Eksenel Basınç Yüğü Etkisindeki Bir Çubuğun<br>Sonlu Elemanlar Tekniğini Kullanarak Burkulmasının Hesabı..... | 18    |
| 4.2.1 Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi.....                                                                                         | 18    |
| 4.2.2 Şekil Fonksiyonlarının Tayini.....                                                                                             | 19    |
| 4.2.3 Eleman Rijitlik Matrisi.....                                                                                                   | 23    |
| 4.2.4 Eleman Geometrik Yüğü Matrisi.....                                                                                             | 26    |
| 4.2.5 Çevirme Matrisleri.....                                                                                                        | 29    |
| 4.2.6 Sistem Rijitlik ve Geometrik Yüğü Matrislerinin Hesabı.....                                                                    | 30    |
| 4.2.7 Sınır Şartları ve Kritik Yüğü Hesabı.....                                                                                      | 33    |
| 4.3 Karşılaştırmalı Sonuçlar için Denge-Statik Yöntem ile Çubuk<br>Stabilite Analizi.....                                            | 38    |

|       |                                                                                                              |     |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.3.1 | İki Ucu Basit Mesnetli Kolon.....                                                                            | 40  |
| 4.3.2 | İki Ucu Ankastre Mesnetli Kolon.....                                                                         | 44  |
| 4.4   | Sürekli Değişken Kesitli Bir Kolonun Sonlu Elemanlar Tekniği ile<br>Burkulmasının Hesabı.....                | 47  |
| 4.5   | Sonlu Elemanlar Tekniğinde Çubuk Sistemlerin Bölündüğü<br>Eleman Sayısının, Stabilitate Hesabına Etkisi..... | 69  |
| 4.5.1 | İki Parçaya Bölünerek.....                                                                                   | 70  |
| 4.5.2 | Dört Parçaya Bölünerek.....                                                                                  | 84  |
| 4.5.3 | Altı Parçaya Bölünerek.....                                                                                  | 84  |
| 4.5.4 | Sekiz Parçaya Bölünerek.....                                                                                 | 85  |
| 4.5.5 | On Parçaya Bölünerek.....                                                                                    | 107 |
| 5.    | SONUÇLAR.....                                                                                                | 133 |
|       | KAYNAKLAR.....                                                                                               | 135 |
|       | ÖZGEÇMİŞ.....                                                                                                | 136 |

## SİMGE LİSTESİ

|               |                                         |
|---------------|-----------------------------------------|
| A             | Kesit alanı                             |
| E             | Elastisite modülü                       |
| F             | F integrantı                            |
| I             | Atalet momenti                          |
| L             | Çubuk boyu                              |
| $L_{kr}$      | Çubuk kritik boyu                       |
| [N]           | Şekil fonksiyonu                        |
| P             | Sisteme yüklenen yük                    |
| $P_{kr}$      | Kritik yük                              |
| u             | Yatay deplasman miktarı                 |
| U             | İç kuvvetlerin yaptığı iş               |
| $U_m$         | Membran şekil değiştirme enerjisi       |
| $U_b$         | Eğilme (bend) şekil değiştirme enerjisi |
| V             | Toplam potansiyel enerji                |
| $\Delta V$    | Toplam potansiyel enerjideki değişim    |
| w             | Düşey deplasman miktarı                 |
| W             | Dış kuvvetlerin yaptığı iş              |
| $\beta$       | Kesit normalinin yatayla yaptığı açı    |
| $\varepsilon$ | Birim şekil değiştirme                  |
| $\lambda$     | Yük parametresi                         |
| $\Delta$      | Katsayılar determinantı                 |
| $\sigma$      | Kesit normal gerilmesi                  |
| $\theta$      | Dönme açısı                             |

## ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

|              |                                                                                                                     |     |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 3.1    | Burkulma kriterleri için denge konumlarının, yatay düzlemde duran bilye konumları ile ifade edilmesi.....           | 6   |
| Şekil 3.2    | eksenel yük etkisindeki (P) basit mesnetli kolonun denge konumlarındaki deplasmanları.....                          | 7   |
| Şekil 3.3    | İki ucu ankastre ve P yüküne maruz bulunan kolonun şekil değiştirmiş hali ve kritik boyu.....                       | 15  |
| Şekil 4.1a   | İki ucu ankastre ve P yüküne maruz bulunan kolon.....                                                               | 18  |
| Şekil 4.1b   | İki ucu ankastre ve P yüküne maruz bulunan kolonun dört eşit parçaya ayrılmış hali.....                             | 18  |
| Şekil 4.1c   | İki ucu ankastre ve P yüküne maruz bulunan kolonun dört eşit parçasından birinde deplasman bileşenleri.....         | 18  |
| Şekil 4.2    | Sistem ve eleman deplasman parametreleri.....                                                                       | 29  |
| Şekil 4.3.1a | Dış eksenel yüke maruz doğru eksenli çubuk.....                                                                     | 38  |
| Şekil 4.3.1b | Şekil değiştirmemiş çubuk elemanı üzerinde kesit zorlarının pozitif yönü.....                                       | 38  |
| Şekil 4.3.1c | Şekil değiştirmiş çubuk elemanına etkiyen kesit zorları.....                                                        | 38  |
| Şekil 4.3.2  | İki ucu basit mesnetli kolonun eksenel yük etkisinde şekil değiştirmiş hali ve kesit zorları.....                   | 41  |
| Şekil 4.3.3  | İki ucu ankastre ve P yüküne maruz bulunan kolonun şekil değiştirmiş hali ve kritik boyu.....                       | 44  |
| Şekil 4.4.1  | İki ucu ankastre ve P yüküne maruz bulunan sürekli değişken kesitli kolonun idealize edilmiş atalet momentleri..... | 47  |
| Şekil 5.1    | Sonlu elemanlar çözüm tekniğinde çubuğun bölündüğü eleman sayısının hata oranına etkisi grafiği.....                | 133 |

## ÖNSÖZ

Çubuk stabilite analizinde varyasyon yöntemi ve sonlu elemanlar tekniği ele alınarak hazırlanan bu tezde öncelikle yöntem ve teknikler kısaca sıralanmış ve gruplandırılmıştır. Tezde toplam potansiyel enerji yöntemi ve sonlu elemanlar tekniği konuları anlatılmış ve çözümler, kesin çözüm yöntemleri (denge yöntemi) ile bulunanlarla karşılaştırılarak hata oranları saptanmıştır. Hata oranlarına etki eden unsurlar ortaya konularak farklı uygulama ve örneklerle değişimler incelenmiş ve sonuçlar ortaya konmuştur. Ayrıca örnek uygulama olarak sürekli değişken kesitli çubuğun sonlu elemanlar tekniği ile burkulması hesabı da verilmiştir.

Tezin hazırlanmasında çok emeği geçen Prof. Dr. Ercüment Köksal 'a teşekkür ederim.



## ÖZET

Programlama ile bilgisayar ortamına diğer tekniklerden daha kolay adapte edilebilen sonlu elemanlar tekniği ile çubuk elemanlarda, sistemin ayrıldığı belli sayıdaki elemana bağlı olarak hata oranlarının nasıl azaldığı incelenmiştir.

Toplam potansiyel enerji yöntemi ve sonlu elemanlar tekniği ile stabilite çözümleri yapılmış, denge yöntemiyle bulunan kesin çözümlerle karşılaştırılmıştır. Örnek olarak sürekli değişken kesitli bir çubuğun sonlu elemanlarla stabilite analizinde, sistem ayrıldığı her elemanla ani değişken kesitli çubuklar topluluğuna dönüştürülmüştür. Bu şekilde yapılmış bir idealizasyonun, eleman sayısı arttıkça gerçek sisteme yaklaşan hatlara sahip olduğu düşünülmüştür.

İki ucu ankastre ve eksenel P yüküne maruz çubuğun sonlu elemanlar tekniği ile stabilite analizinde sistem 2, 4, 6, 8, 10 eşit parçaya bölünerek sonuçlar bulunmuş ve hata oranlarının eleman sayısı arttıkça azalmasına ilişkin bir grafik oluşturulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Çubuk stabilitesi, sonlu elemanlar tekniği, varyasyon metodu, toplam potansiyel enerji yöntemi, yöntem.

## **ABSTRACT**

Bars were analyzed by finite element method, which is more adaptable than other methods for programming in computer, from the point of view of how the proportion of deviation which is related certain number of system element, is decreased.

Solutions of stability were studied by total potential energy and finite element method, and then these were compared with definite solutions which are found by equilibrium method. For example; in a stability analysis of bar has continual modulating cross-section, the system was transformed into bars group have instant modulating cross-sections, with every part of the system elements. In this idealization, it's assumed that, system was attempted to come closer the original system by the increase of element number.

In analysis of bar stability by finite element method, a bar was exposed to P axis load, separated 2, 4, 6, 8, 10 equal pieces and a graph was made about effect of increase of element number over reduction of proportion of deviation.

**Keywords:** Bar stability, finite element method, variation method, total potential energy method, method

## 1. GİRİŞ

Varyasyon yöntemiyle çubuk stabilitesinin incelenmesinden önce stabilite problemi ve çözüm yöntemleri hakkında aydınlatıcı olmakta yarar vardır. Stabilite probleminde amaç, şekil değiştirmiş sistemin denge konumunun kararlı olup olmadığını ve kararlı denge konumunu oluşturan şartları araştırıp gerçekleştirmektir. Yapının emniyetini tehlikeye sokan ana nedenlerden biri yapının denge konumunun kararsız olmasıdır. Bu bağlamda, stabilite problemi kararsız denge konumunda olan sistemleri boyut ve yük bakımından düzelterek onların dengesini kararlı duruma sokmaktır.

Stabilitede denge konumunun kararlı olup olmadığına ve kararlılığı belirleyecek durumların tespitine üç ana yöntemle varılabilir.

- 1- Statik Yöntem
- 2- Enerji Yöntemi
- 3- Dinamik Yöntem

Stabilite probleminin çözüm yöntemleri, esas anlamda ve çok kısa bir biçimde yukarıdaki gibi özetlenebilir. Ancak olaya, yapıların sistem ve bunların çözümü yollarının, en genel biçimde, belirlenmesi anlamında bakıldığında, çözüm yöntem ve tekniklerini daha açık vermek gerekli ve olasıdır. Yapıların statik ve stabilite problemlerinin çözümü için bilinen yöntemler ve çözüm teknikleri aşağıda verilmiştir.

**Genel**                      **Kısmi Diferansiyel**                      **Çözümler,**  
**Denklemler**             $\Rightarrow$             **Denklemler**                       $\Rightarrow$             **Analitik veya Sayısal**

Genel çözüm yöntemlerinin sınıflandırılması ;

- 1- Deplasman yöntemi
- 2- Kuvvet yöntemi
- 3- Karışık yöntem

### Çözüm Yöntemleri ile Kullanılan Teknikler

#### 1- Analitik yöntem :

- 1.1- Elemanter çözüm

- 1.2- Kuvvet serileriyle çözüm
- 1.3- Trigonometrik serilerle çözüm
- 1.4- Green, Bessel, vs. fonksiyonlarla çözüm
- 1.5- Sayısal tekniklerle çözüm

## **2- Enerjetik yöntem :** **(Varyasyon yöntemi)**

- 2.1- Virtüel iş yöntemi
- 2.2- Komplamanter enerji yöntemi
- 2.3- Kuadratik sapmalar yöntemi
- 2.4- Ortogonalizasyon yöntemi
- 2.5- Potansiyel enerji yöntemi
  - 2.5.1- Rayleigh tekniği
  - 2.5.2- Ritz tekniği
  - 2.5.3- Trefftz tekniği
  - 2.5.4- Galerkin tekniği
  - 2.5.5- Kantorovicht tekniği
  - 2.5.6- Sayısal tekniklerle çözüm

## **Sayısal teknikler**

- 1- Sonlu farklar tekniği
  - 1.1- Sonlu farklar tekniği
  - 1.2- Funukiler poligon
  - 1.3- Plurilokal
- 2- Sonlu elemanlar tekniği
- 3- Başlangıç değeri tekniği
  - 3.1- Runge-Kutta-Fehlberg
  - 3.2- Taşıma matrisleri
  - 3.3- Riccati dönüşümü
  - 3.4- Kalnins
  - 3.5- Bitişik Denklemler
  - 3.6- Hamming

3.7- Tmleyici mler

**3- Problemin kesin denklemleri üstüne kurulmuş yaklaşık yöntemler ve ilave basitletirilmi varsayımlara dayanan yaklaşık yöntemler :**

- 3.1- İstatistiki yöntemler (Amprık formüller elde edilerek.)
- 3.2- Orovas yöntemi
- 3.3- Drisclet yöntemi
- 3.4- Spline yöntemleri
- 3.5- Dischinger yöntemi



## 2. Stabilité Analizinde Yapılan Kabuller

Stabilité analizinde, klasik elemanter statikte kullanılan belli başlı ve önemli hipotezler geçersizdir. Çubukta, boy çubuk kesitine ve kabuk, plak sistem boyutları, kalınlığa oranla büyüdükçe, yapının narinliğinin artması söz konusu olacağından, deplasmanlar büyür ve ikinci mertebe teorisi ile hesaplama yoluna gidilebilir. Denge denklemleri, şekil değiştirmiş cisim üzerinde kurulduğu için elastik stabilité lineer olmayan bir teoridir. O halde stabilité deplasman-deformasyon bağıntılarında ikinci dereceden lineer olmayan terimleri de hesaba katan ve geometrik açıdan non-lineer bir teoriye göre hesap edilir. Bu durumda yapılan bazı kabuller vardır.

- 1- Denge denklemleri şekil değiştirmiş sistem üzerinde yazılır. İkinci mertebe teorisi geçerlidir.
- 2- Sistem lineer olmadığından süperpozisyon prensibi geçerli olmayıp, dış yüklerin aralarındaki oran sabit kalacak şekilde arttığı varsayılır. Yer değiştirme-yük arasında bir orantılılık yoktur.
- 3- Betty karşıtlık teoremi, Maxvell teoremi, birinci Castigliano teoremi gibi teoremler geçerli değildir.
- 4- Hiperstatik problemler bir esas sistem seçilerek çözülemez.

### 3. Enerji (Varyasyon) Yöntemi

Potansiyeli olan sistemlere konservatif sistemler denir. Sistem konservatif ise dış kuvvetlerin işi daima negatiftir.

Bir sistemde, statikçe ısı değişimi olmadan, elastik şekil değişimi halinde, enerjinin korunumu prensibine göre, iç ve dış kuvvetlerin işleri birbirine eşittir yani kesit tesirleri ile dış kuvvetlerin yaptığı işlerin toplamı sıfırdır.

$$V = U + W = 0 \quad (3.1)$$

Bir fonksiyonun minimum olma şartı için, fonksiyonun birinci varyasyonunun sıfır, ikinci varyasyonunun sıfırdan büyük olması gerekir.

$$\delta(u + w) = \delta V = 0 \quad (3.2)$$

Denge halinde sistemin bütün potansiyel enerjisinin varyasyonu (değişimi) sıfırdır. ( $u$  iç kuvvetlerin,  $w$  dış yüklerin şekil değiştirme işi). Bu sistemin iç potansiyel enerjideki değişiminin, dış kuvvetlerin işindeki değişime eşit olduğunu gösterir ki bu da elastostatikğin enerji teoremidir. Aynı zamanda yukarıdaki bağıntılar potansiyel enerjinin stasyonere değer ilkesi olarak görülebilir.

$$(V) \rightarrow (\Delta V) \rightarrow (\delta V = 0) \rightarrow (\delta^2 V > 0) \Rightarrow V_{\min} \quad (\text{Denge Kriteri})$$

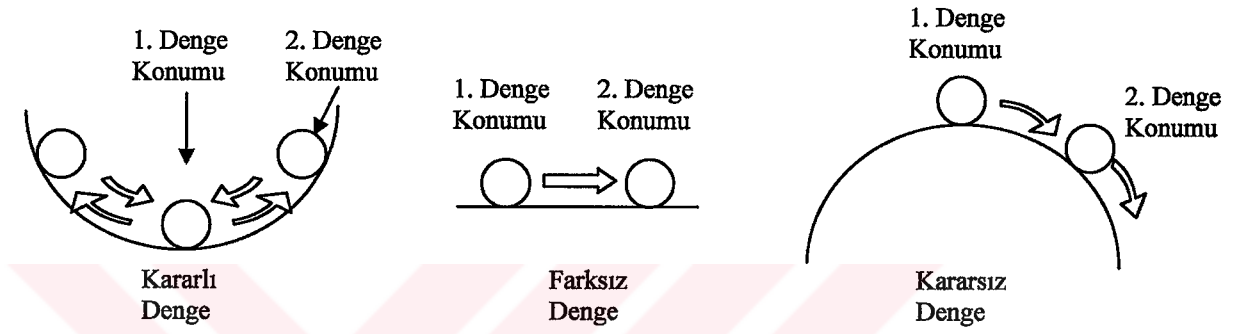
Enerji yöntemleri için, denge halinin kararlı mı, kararsız mı, yoksa farksız mı olduğunu ayırt edecek kriterler belirlenmiştir (Burkulma Kriterleri).

|                                 |                            |                            |                      |
|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------|
| 1-Kararlı denge kriteri         | $\delta V = 0$             | $\delta^2 V > 0$           |                      |
| 2-Kararsız denge kriteri        | $\delta V = 0$             | $\delta^2 V < 0$           |                      |
| 3-Farksız denge kriteri         | $\delta V = 0$             | $\delta^2 V = 0$           |                      |
| 4- Kritik farksız denge kriteri | $\delta(\delta^2 V) = 0$   | $\delta^2(\delta^2 V) > 0$ | T. Potansiyel Enerji |
|                                 | $\delta(\delta^2 V_i) = 0$ |                            | Komplementer Enerji  |
|                                 | $\delta V_d = \delta V_i$  |                            | Virtüel iş           |

Kararlı dengede toplam potansiyel enerjinin ( $V_{\min}$ ) minimizasyonu gerek ve yeterli iken, kritik farksız dengede toplam potansiyel enerjinin ikinci varyasyonunun ( $\delta^2 V_{\min}$ ) minimizasyonu gereklidir. Bu bizi farksız denge konumuna götürür ( $\delta^2 V = 0$ ).

Farksız denge pratik açıdan önemlidir, nedeni ise sistemin hesabı için aranan kritik yükü verir ( $P_{kr}$ ).

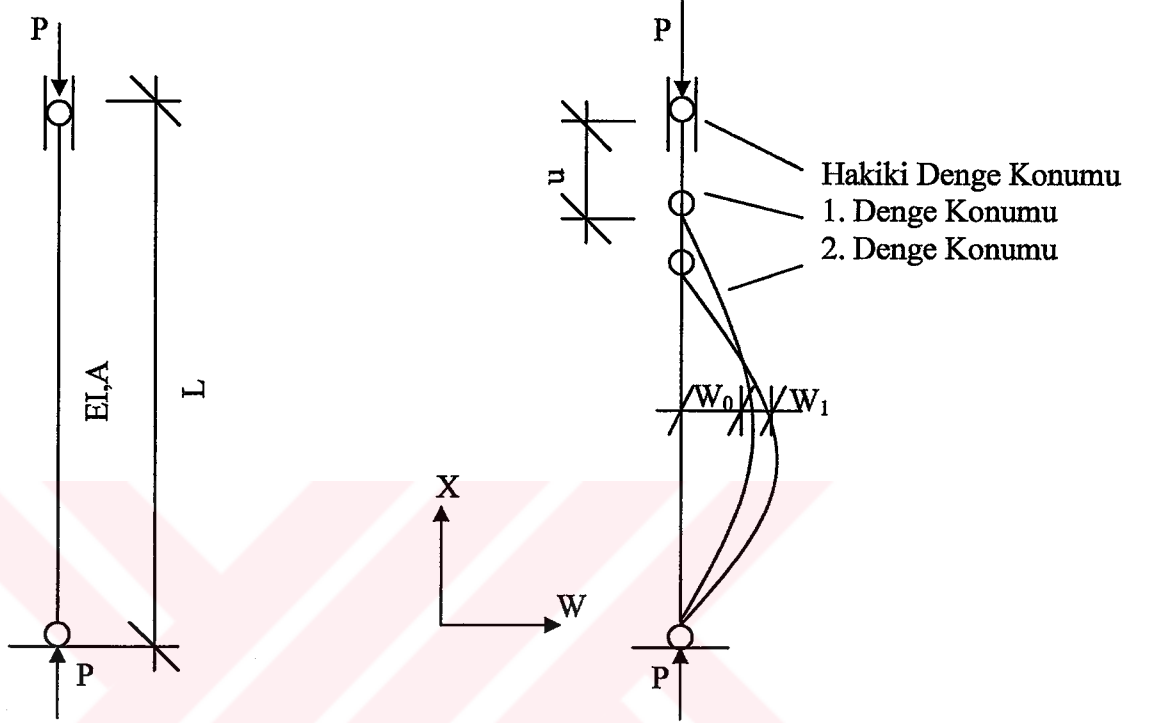
Aşağıda, burkulma kriterleri için denge konumları, yatay düzlemde duran bilye konumları ile ifade edilmiştir.



Şekil 3.1

### 3.1- Toplam Potansiyel Enerji Yöntemiyle Çubuk Stabilitesi

Çubuk stabilitesini incelemek üzere eksenel yük etkisindeki (P) basit mesnetli kolonu ele alalım.



Şekil 3.2

Toplam Potansiyel Enerji :  $V$ ,

$$V = U + W$$

$$U = U_m + U_b$$

$$\Rightarrow V = U_m + U_b + W \quad (3.3)$$

burada  $U_m$  ve  $U_b$  kolon elemanlarının membran ve eğilme (bend) şekil değiştirme enerjisi ve W tatbik edilen P yükünün potansiyel enerjisidir.

$$\bullet \quad U_m = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx$$

$$N = \sigma \times A \Rightarrow \sigma = E \times \varepsilon \Rightarrow N = E \times A \times \varepsilon$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{EA}{2} \int_0^L \varepsilon^2 dx$$

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}(w')^2 \rightarrow (\text{linear} + \text{non-linear})$$

$$U_m = \frac{EA}{2} \int_0^L \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dx \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad U_b &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx \\ M &= -EIw'' \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(-EIw'')^2}{EI} dx \\ U_b &= \frac{1}{2} \int_0^L EI (w'')^2 dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\bullet \quad W = P[u(L) - u(0)] = P \int_0^L u' dx \quad (3.6)$$

(3.4), (3.5), (3.6), ifadelerini (3.3) denklemindeki yerlerine koyalım.

$$V = \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \frac{EI}{2} (w'')^2 + Pu' \right] dx \quad (3.7)$$

Şimdi bu toplam potansiyel enerjinin değişiminin ikinci varyasyonunu elde edelim. ( $\delta^2 V_{\min}$ ),

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + u_1 \\ w &= w_0 + w_1 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{2. denge konumunun} \\ \text{deplasmanları} \end{array}$$

ifadelerini (3.7) denkleminde koyarak ve gerekli işlemleri yaparak ikinci varyasyonu elde ederiz. Öyle ki  $u_0$  ve  $w_0$  stabilite probleminin incelendiği gerçek denge halini ve  $u_1$ ,  $w_1$  ikinci konum için sonsuz küçük artımları gösterir. (3.7) denklemi içinde bunlar, alttaki ifadeleri ile birlikte yerleştirirsek ikinci varyasyonu buluruz.

$$u_0 = -\frac{P}{EA}x, \quad w'_0 \equiv 0 \quad \text{ve} \quad u'_0 = -\frac{P}{EA}$$

Burada,  $u_0 + u_1 \rightarrow u' = u'_0 + u'_1$

$$w = w_0 + w_1 \rightarrow w' = w'_0 + w'_1 \rightarrow w'' = w''_0 + w''_1 \quad \text{yazarsak ;}$$

$$V + \Delta V = \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} (u'_0 + u'_1)^2 + \frac{1}{2} (w'_0 + w'_1)^2 \right]^2 + \frac{EI}{2} (w''_0 + w''_1)^2 + P(u'_0 + u'_1) \Big] dx$$

$$V + \Delta V = \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} \left( u'^2_0 + u'^2_1 + \frac{1}{2} w'^2_0 + w'_0 w'_1 + w'^2_1 \right) + \frac{EI}{2} (w''^2_0 + 2w''_0 w''_1 + w''^2_1) + P(u'_0 + u'_1) \right] dx$$

$$\begin{aligned} V + \Delta V = \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} \left( \underline{u'^2_0} + \underline{u'^2_1} + \frac{1}{4} w'^4_0 + w'^2_0 w'^2_1 + w'^4_1 + 2u'_0 u'_1 + \underline{u'_0 w'^2_0} + 2u'_0 w'_0 w'_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2u'_0 w'^2_1 + u'_1 w'^2_0 + 2u'_1 w'_0 w'_1 + u'_1 w'^2_1 + w'^2_0 w'_0 w'_1 + \frac{1}{2} w'^2_0 w'^2_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + w'_0 w'_1 w'^2_1 \right) + \frac{EI}{2} (\underline{w''^2_0} + 2w''_0 w''_1 + w''^2_1) + P(\underline{u'_0} + u'_1) \right] dx \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada altı çizilmiş terimler,

$$V = \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} \left( u'_0 + \frac{1}{2} w'^2_0 \right)^2 + \frac{EI}{2} (w''_0)^2 + P u'_0 \right] dx \quad (3.8)$$

olup bunu yukarıdaki  $(V + \Delta V)$  denkleminde çıkarırsak geriye  $(\Delta V)$  toplam potansiyel enerjinin değişimi kalır.

$$\begin{aligned} \Delta V = \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} \left( u'^2_1 + w'^2_0 w'^2_1 + \frac{1}{4} w'^4_1 + \underline{2u'_0 u'_1} + 2u'_0 w'_0 w'_1 + u'_0 w'^2_1 \right. \right. \\ \left. \left. + u'_1 w'^2_0 + 2u'_1 w'_0 w'_1 + u'_1 w'^2_1 + w'^2_0 w'_0 w'_1 + \frac{1}{2} w'^2_0 w'^2_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + w'_0 w'_1 w'^2_1 \right) + \frac{EI}{2} (2w''_0 w''_1 + w''^2_1) + \underline{P(u'_1)} \right] dx \quad (3.9) \end{aligned}$$

Burada  $2u'_0 u'_1 = \frac{EA}{2} 2 \left( -\frac{P}{EA} \right) u'_1 = -P u'_1$  olduğundan altı çizili iki terim birbirini götürür.

Ayrıca toplam potansiyel enerjinin değişimini Taylor serisine açıp ikinci varyasyonu oluşturan ikinci terimleri ayırarak

$$\Delta V = \underbrace{\delta V}_{\text{Denge Pr ob.}} + \underbrace{\frac{1}{2!} \delta^2 V}_{\text{Stabilite Pr oblemi}} + \underbrace{\frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots}_{\text{Artiklar}} \quad (3.10)$$

ve  $u_0 = -\frac{P}{EA}x \rightarrow u'_0 = -\frac{P}{EA} \quad w_0 \equiv 0$

olduğuna göre

$$\frac{1}{2!} \delta^2 V = \int_0^L \frac{EA}{2} u_1'^2 dx + \frac{EI}{2} w_1''^2 dx + \frac{EA}{2} u_0' w_1'^2 dx \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{2!} \delta^2 V = \frac{1}{2} \int_0^L (EA u_1'^2 + EI w_1''^2 - P w_1'^2) dx$$

bulunur. Böylece çubuğun toplam potansiyel enerjisinin ikinci varyasyonu bulunmuş oldu. Bunu yaparken 2. derece terimler alınmış olup 3. ve daha yüksek dereceden terimler terk edilmiştir. Elde edilen (3.11) denklemi aranan stabilite denklemdir. Buna göre çubuğun diferansiyel stabilite denklemi,  $u_1'' = 0$  'dan

$$EI w_1'''' + P w_1'' = 0$$

olur. Buna ait Euler denklemlerinden,

$$F = EA(u_1')^2 + EI(w_1'')^2 - P(w_1')^2 \quad (\text{F integrantı}) \quad (3.12)$$

diyerek ve bunu Euler diferansiyel denklemleri şemasına uygulayarak

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta u_1} - \frac{d}{dx} \frac{\delta F}{\delta u_1'} &= 0 \\ \frac{\delta F}{\delta w_1} - \frac{d}{dx} \frac{\delta F}{\delta w_1'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\delta F}{\delta w_1''} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

çubuğun diferansiyel stabilite denklemi  $EI w_1'''' + P w_1'' = 0$  elde edilir.

### 3.2- Ritz – Rayleigh Yöntemiyle Çubuk Stabilitesi

Stabilite probleminin hesabında kullanılan denge yönteminde, amaç elemanın diferansiyel denklemini sağlayan fonksiyonlar arasında sınır şartlarını gerçekleyeni bulmaktır. Örneğin çubukta  $(EIw'')'' + Pw'' = 0$  diferansiyel denklemini sağlayan  $w(z)$  fonksiyonları arasında mafsallı mesnette  $u = 0$   $w'' = 0$ , ankastre mesnette  $u = 0$   $w' = 0$ , serbest uçta  $w'' = 0$ ,  $(EIw')' + Pw' = 0$  gibi sınır şartlarını da gerçekleyeni bulmaktır. Yine stabilite probleminin hesabını ayrı bir yolla da çözmek mümkündür. Bu varyasyon yöntemleridir. Varyasyonda kullanılan araç yani ifade-denklemler, enerjidir. Varyasyonla çözümde amaç elemanın sınır şartlarının bir kısmını gerçekleyen  $w(z)$  fonksiyonları arasından bunların belirli bir fonksiyoneli, enerji gibi, stasyoner yapanı bulmaktır. Stasyoner olması istenen ifade enerji gibi sınırlı bir integraldir. Varyasyon yöntemleri arasındaki fark varyasyona soktuğu fonksiyonların sağlamak zorunda olduğu sınır şartlarının tipidir. Sınır şartları geometrik ve dinamik olarak ikiye ayrılır. Örneğin çubukta yukarıdaki sınır şartlarından  $w = w' = 0$  geometrik tip,  $EIw'' = 0$ ,  $(EIw')' + Pw' = 0$  dinamik sınır şartı tipindedir. Varyasyon yöntemleri kullanılan sınır şartları tipine göre çeşitlenirler. Bu durumda denge yöntemine göre, varyasyon yönteminde eksik bırakılan sınır şartları ile diferansiyel denge denklemi yerine enerjinin stasyoner değeri ilkesi geçiyor demektir.

Bir burkulma probleminde geometrik sınır şartlarını sağlayan  $w(z)$  fonksiyonları arasında gerçek olanı toplam potansiyel enerjiyi stasyoner yapanıdır. Bu ilkenin Euler Diferansiyel denklemini denge denklemdir. Örneğin çubukta bu denge denklemi  $(EIw'')'' + Pw'' = 0$  olur.

Çeşitli varyasyon yöntemleri arasında özellikle şu üç teori önemlidir.

1. Toplam potansiyel enerji yöntemi
2. Virtüel iş yöntemi
3. Komplemanter enerji yöntemi

$$V_1 - \Delta V = \Delta V_2 \quad V_2 - V_1 = \frac{\delta V}{1!} + \frac{\delta^2 V}{2!}$$

stasyoner olma şartı  $\Delta V = 0 : \delta V = 0$  , farksız hal :  $\delta^2 V = 0$  . Kritik farksız hal :  $\delta(\delta^2 V) = 0$

Şimdi özel değer problemlerinin çözümü için bir yaklaşık yöntem verilecektir. Yaklaşıklık uygulamada örneğin seriye açılımda alınan terim sayısına yada bir integrasyon yönteminde yetinilen adımla belirlenir. Ritz yönteminin dayandığı fikir varyasyon prensibini çok parametrelili adi ekstremum, minimum problemine indirgemektir.

### 3.2.1- Yöntemde İzlenecek Adımlar :

1. İkinci denge konumunu veren  $w(z)$  fonksiyonu seçilir.

$$w(z) = a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z) \dots \dots \dots = \sum a_n f_n(z) \quad (3.14)$$

1.1.  $f_n(z)$  fonksiyonu stabilite probleminde, elemanın geometrik sınır şartlarını gerçekleyen ve keyfi seçilen fonksiyonlardır.

1.2.  $a_n$  sabitleri ise, toplam potansiyel enerjinin stasyoner ilkesinden bulunacaktır.

2. Sistemin toplam potansiyel enerjisinin değişimi  $w(z)$  yerine  $a_n f_n(z)$  ifadeleri konarak yazılır. Böylece enerjideki değişim  $a_n$  'lere bağlı olarak ifade edilmiş olur.

3. Stasyoner ilkesi için gerek ve yeter şart olan toplam potansiyel enerjinin  $a_n$  'lere göre kısmi türevleri alınır ve sıfıra eşitlenir. Böylece  $V$  potansiyel enerjisinin  $a_n$  'lere türevlerinin sıfır olmasından bulunacak  $a_n$  değerleri yerine konulduğunda potansiyel enerji ekstremum olur. yani

$$y = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = y' = 0 \rightarrow \text{bulunan } x, y \text{ 'yi extrem yapan değer olacağından}$$

stasyoner ilkesi kullanılmış olur.

$$V \rightarrow \text{Değişim } \Delta V \rightarrow \text{Terimleri } \delta V \text{ ve } \delta^2 V \text{ Farksız kritik denge için } \delta(\delta^2 V) = 0$$

4.  $\frac{\delta V}{\delta a_1} = 0, \frac{\delta V}{\delta a_2} = 0, \dots, \frac{\delta V}{\delta a_i} = 0$  şeklinde lineer homojen denklem takımları elde edilir.

5.  $a_i$  katsayılarının belirtilmesine olanak veren bu denklem takımının aşık olmaya bir çözümünün olması ve katsayılar determinantının sıfır etmesi gerekir, bu burkulma şartıdır.

6.  $a_i$  'lere bağı bu denklem takımının katsayılar determinantını sıfıra eşitleyerek bulacağımız yükler arasında en küçük olan kritik yüküdür.

Rayleigh yöntemi Ritz yönteminin basit bir özel halidir. Sınır şartlarını tam olarak fakat diferansiyel denklemi yaklaşık olarak sağlayan varyasyon yönteminizde farksız denge konumu için ikinci varyasyon sıfır olmalıdır. Açıklandığı gibi Ritz potansiyel enerjinin stasyoner değeri ilkesine dayanır.

O halde denklem (3.11) 'dan,  $\delta^2 V = 0$

$$\delta^2 V = \int_0^L (EAu_1'^2 + EIw_1''^2 - Pw_1'^2) dx = 0 \quad (3.15)$$

olur. Bu denklemden P 'yi çekersek,

$$P = \frac{\int_0^L (EIw_1''^2 + EAu_1'^2) dx}{\int_0^L w_1'^2 dx} \quad (3.16)$$

olarak buluruz.

Burada  $u_1$  ve  $w_1$  fonksiyonları bilindiği takdirde, bu P özel değerlerini iki belirli integralin oranı olarak bulabiliriz. Rayleigh yönteminde, yapılan iş, gerçek yer değiştirme fonksiyonları yerine seçilecek  $u$ ,  $w$  fonksiyonlarını (3.16) denkleminde yerine koymaktan ibarettir. Böylece P için yaklaşık değerler elde edilir. En küçük P yükü yaklaşık kritik yükü  $P_{kr}$  verir ve bu gerçek değerden biraz daha büyüktür. Şimdi örneğimize devam edersek ve

$u_1$  'li terimi  $w_1$  'li terim yanında terk edersek, [Bu terk işlemini yapabiliriz çünkü şekil değiştirmiş çubuk eğrisinin açısı çok küçük olduğundan  $\cos\alpha \cong 1$  'dir.]

$$\bar{P}_{kr} = \frac{\int_0^L EI w_1'^2 dx}{\int_0^L w_1'^2 dx} \geq P_{kr} \quad w_1 \cong \alpha w \quad (3.17)$$

olur ve buna Rayleigh oranı denir. Burada  $w$  seçilen ikame fonksiyonlarıdır ve başında sabit bir çarpanın önemi yoktur, çünkü oranda sabit fonksiyonlar birbirini götürür. Açıktır ki  $w$  fonksiyonu öyle seçilecektir ki sınır şartlarını sağladıktan başka bütün gerekli süreklilik ve türev alınabilme özelliklerine sahip olmalıdır. Özet olarak Rayleigh yaklaşık değerini  $\delta(\delta^2 V) = 0$  varyasyon probleminin çözümü olarak kabul etmek mümkün olur. Şimdi sistemin geometrik ve dinamik sınır şartlarını gerçekleyen

$$w = a(x^4 - 2Lx^3 + L^3 x)$$

fonksiyonunu seçelim. Bunu (3.17) denkleminde yerine koyarsak

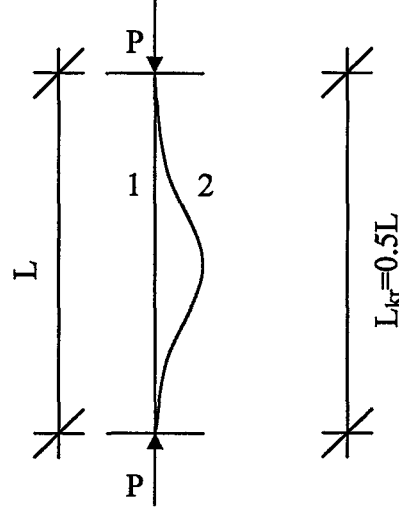
$$\bar{P}_{kr} = 9,882 \frac{EI}{L^2} > P_{kr}$$

bulunur. Bunun kesin çözümünden farkı %1 'dir. Eğer  $w = a \sin \frac{\pi x}{L}$  seçseydik kesin çözümü

$$\text{bulurduk yani } \bar{P}_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} = P_{kr} \quad (3.18)$$

### 3.2.2- Ritz Yöntemiyle Çubuk Stabilitesi Örnek Çözümü

İki ucu ankastre olan ve P yüküne maruz bulunan kolonun kritik yükünün Ritz yöntemiyle hesabı,



Şekil 3.3

1. Seçilen fonksiyon

$$w(x) = a \sin^2 \frac{\pi x}{L} \quad (3.19)$$

Problemin sınır şartlarını gerçeklemelidir.

$$x = 0 \quad w(0) = 0 \quad w = a \sin^2 \frac{\pi}{L} 0 = 0$$

$$x = 0 \quad w'(0) = 0 \quad w' = 2a \frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi}{L} 0 \cos \frac{\pi}{L} 0 = 0$$

$$x = L \quad w(L) = 0 \quad w = a \sin^2 \frac{\pi}{L} L = 0$$

$$x = L \quad w'(L) = 0 \quad w' = 2a \frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi}{L} L \cos \frac{\pi}{L} L = 0$$

$w(x)$  fonksiyonunun türevleri,

$$w' = 2a \frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi}{L} x \cos \frac{\pi}{L} x, \quad w'' = 2a \frac{\pi^2}{L^2} \left( \cos^2 \frac{\pi}{L} x - \sin^2 \frac{\pi}{L} x \right)$$

$$w' = a \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\pi}{L} x, \quad w'' = 2a \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi}{L} x$$

1.2. (a) sabitleri toplam potansiyel enerjinin stasyoner ilkesinden belirlenir.

2. Enerjideki değişimin  $\Delta V$ , ikinci varyasyonunun stasyonerlik ilkesine göre stabilite probleminde farksız dengeye karşı gelen  $\delta(\delta^2 V) = 0$  şartını sağlayalım. Bunun için  $w$  ve türevlerini yerlerine koyalım.

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \int_0^L \left( \frac{1}{2} EI w''^2 + P w'^2 \right) dx \quad (3.20)$$

$$\delta^2 V = \int 4EI \frac{\pi^4}{L^4} a^2 \cos \frac{2\pi}{L} x dx - \int \frac{\pi^2}{L^2} P a^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{L} dx = 0$$

$$\delta^2 V = 2EI a^2 \frac{\pi^3}{L^3} \left| \frac{2\pi x}{2L} + \sin \frac{4\pi x}{4} \right|_0^L - P a^2 \frac{\pi}{2L} \left| \frac{2\pi x}{2L} + \sin \frac{4\pi x}{4} \right|_0^L$$

$$\delta^2 V = 2EI \frac{\pi^3}{L^3} a^2 (\pi + 0) - \frac{\pi}{2L} P a^2 (\pi - 0) = 0 \quad (3.21)$$

3. (a) sabitlerinin sıfırdan farklı olduğu aşıkâr, trivial olmayan çözüm,  $P_{kr}$ ,

$$\bar{P}_{kr} = \frac{2\pi^4 EI a^2 / L^3}{a^2 \pi^2 / 2L} = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2} \geq P_{kr} \quad (3.22)$$

4. Bulunan bu  $\bar{P}_{kr}$  kesin çözüm olan  $P_{kr}$  değeriyle aynıdır.

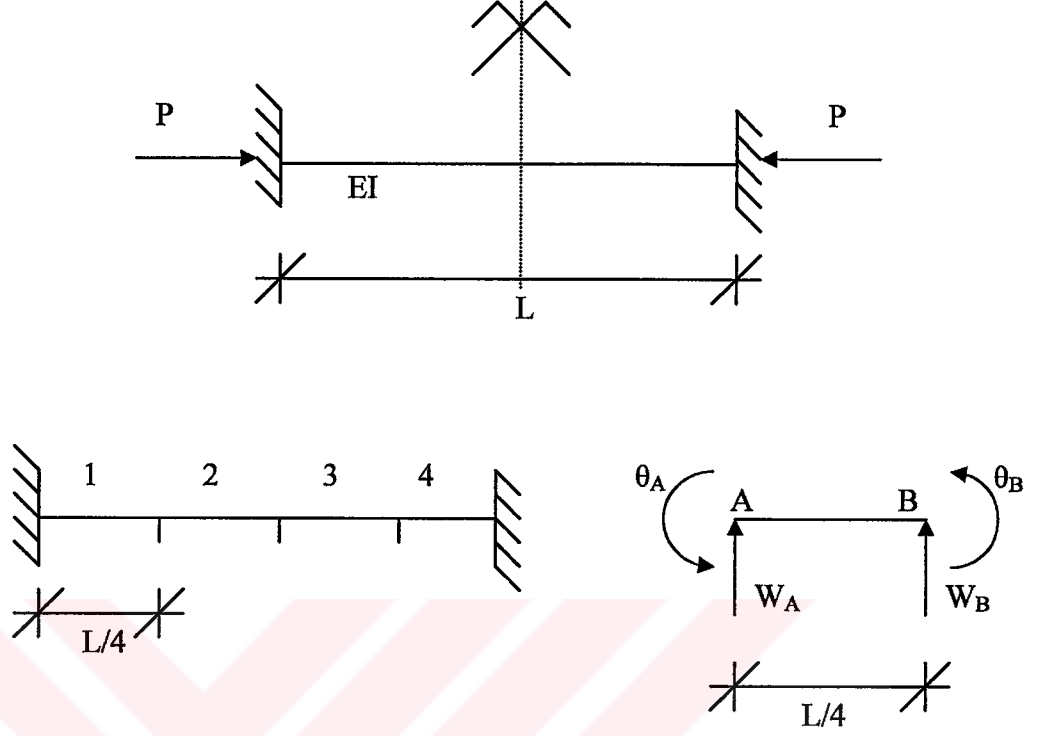
## 4. Sonlu Elemanlar Tekniği

### 4.1 Giriş

Sonlu elemanlar yöntemi; sürekli bir sistemi problemin karakterine uygun sonlu elemanlara ayırarak elde edilen elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonu ve sonra bu elemanların birleştirilmesi tarzında bir uygulama getirir. Bunun sonucu olarak mesnet şartları, sisteme ait özellikler dış yüklerin sürekli yada ani değişimleri kolayca göz önüne alınabilir. Dolayısıyla sonlu elemanlar yöntemi analitik metotlarla çözülemeyen karışık problemlere uygulanabilir. Yüzeysel sistemin tipik bölgelerinde eleman boyutları küçültülerek o bölgenin daha prezisyonlu incelenmesi mümkün olur. Diğer bir avantajı da sınır şartlarının problemin çözüm sırasına göre en son adımda hesaplara dahil edilmesidir. Böylelikle çeşitli sınır şartlarını probleme uygularken baştaki yoğun hesaplara girilmez.

Sonlu elemanlar metodunda sistem sonlu sayıda elemana ayrılmaktadır. Eleman boyutları küçüldükçe problemin hata oranı azalmakta, fakat çözüm süresi uzamaktadır. Sistemi oluşturan elemanların her birine sonlu eleman denir ve birleştikleri köşe noktaları da düğüm noktaları olarak adlandırılır. Sonlu eleman yüzeyinin şekil değiştirmesi, düğüm noktalarının deplasman parametrelerine bağlı olarak ifade edilebilir. Deplasman parametreleri; deplasman bileşenleri, dönmeler ve burulma eğriliği gibi deplasman vektörlerini içermektedir. Eğilme hesaplarında düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin belirlenmesi, sistemin deplasman yüzeyinin ve her düğüm noktasındaki kesit tesirlerinin bulunması için kafidir. Stabilité hesabında ise, bu deplasman parametrelerine göre kurulan denklem takımının ( $\Delta$ ) katsayılar determinantını sıfır yapan yük, yani kritik yük tayin edilir.

## 4.2 Enerji Yöntemi İle Eksenel Basınç Yüğü Etkisindeki Bir Çubuğun Sonlu Elemanlar Tekniğini Kullanarak Burkulmasının Hesabı



Şekil 4.1 a,b,c

Çubuğu dört eşit parçaya bölelim, (Şekil-4,1 b). Düğüm noktası deplasman parametrelerini tespit edelim, (Şekil-4,1 c).

$$\{d\}^T = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2] = [d_1, d_2, d_3, d_4] \quad (4.1)$$

### 4.2.1 Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi

Deplasman fonksiyonları rijit cisim hareketi ve sabit deformasyon şartını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Koordinat eksenini değişince çözüm farklı olmamalıdır. Bunun için deplasman fonksiyonu ya tam polinom veya tabii koordinatların fonksiyonu şeklinde olmalıdır. Elemanın içinde ve kenarlarında sürekli olmalıdır. Biz burada deplasman fonksiyonunu polinom olarak seçeceğiz. Elemanda bilinmeyen dört deplasman parametresi olduğu için, dört bilinmeyenli deplasman fonksiyonu seçmemiz gerekir.

$$w = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (4.2)$$

$$w = [\phi(x)]\{a\} = [1, x, x^2, x^3]\{a\} \quad (4.3)$$

#### 4.2.2 Şekil Fonksiyonlarının Tayini

Eleman düğüm noktası deplasmanları  $\{d\}$  ile polinom sabitleri  $\{a\}$  arasındaki bağı veren  $[A]$  matrisi ise; elemanın düğüm noktası deplasman parametrelerinin  $\phi(x)$  ve  $\phi(x)$  'in türevleri cinsinden yazılmış bileşenlerinde, düğüm noktası koordinatlarının yerlerine konulmasıyla bulunur.

$$\{d\} = [A]\{a\} \quad (4.4)$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\} \quad (4.5)$$

$$[A]^{-1} = [B] \quad \text{diyelim.}$$

$$\{a\} = [B]\{d\} \quad (4.6)$$

(4.6) denklemini (4.3) denkleminde yerine koyalım.

$$w = [\phi(x)][B]\{d\} \quad (4.7)$$

$$[N] = [\phi(x)][B] \quad \text{'ye } \textit{şekil fonksiyonu} \text{ denir.}$$

Bağ matrisi ise şöyle hesaplanır. Elemanın düğüm noktalarının koordinatları  $A(0,0); B(\frac{L}{4}, 0)$  'dır.

$$w = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (4.8)$$

$$w' = \theta = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

$$d_1 = w_A = w(x=0) = a_1 \quad (4.9)$$

$$d_2 = \theta_A = w'(x=0) = a_2$$

$$d_3 = w_B = w\left(x = \frac{L}{4}\right) = a_1 + a_2 \frac{L}{4} + a_3 \frac{L^2}{16} + a_4 \frac{L^3}{64}$$

$$d_4 = \theta_B = w'\left(x = \frac{L}{4}\right) = a_2 + 2a_3 \frac{L}{4} + 3a_4 \frac{L^2}{16}$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} & \frac{L^3}{64} \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} & \frac{3L^2}{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} & \frac{L^3}{64} \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} & \frac{3L^2}{16} \end{bmatrix} = \frac{L^4}{256} \quad (4.11)$$

$$[B] = \frac{Adj A}{|A|} \quad (4.12)$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} & \frac{L^3}{64} \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{3L^2}{16} \end{vmatrix} = \frac{L^4}{256}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{16} & \frac{L^3}{64} \\ 0 & \frac{L}{2} & \frac{3L^2}{16} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{L^3}{64} \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{16} \end{vmatrix} = -\frac{3L^2}{16} \quad A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} \end{vmatrix} = \frac{L}{2}$$

(4.13)

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} & \frac{L^3}{64} \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{3L^2}{16} \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{16} & \frac{L^3}{64} \\ 0 & \frac{L}{2} & \frac{3L^2}{16} \end{vmatrix} = \frac{L^4}{256}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{L^3}{64} \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{16} \end{vmatrix} = -\frac{L^3}{32} \quad A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} \end{vmatrix} = \frac{L^2}{16}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{3L^2}{16} \end{vmatrix} = 0 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} & \frac{3L^2}{16} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{16} \end{vmatrix} = \frac{3L^2}{16} \quad A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} \end{vmatrix} = -\frac{L}{2}$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} & \frac{L^3}{64} \end{vmatrix} = 0 \quad A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{16} & \frac{L^3}{64} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{L^3}{64} \end{vmatrix} = -\frac{L^3}{64} \quad A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} \end{vmatrix} = \frac{L^2}{16}$$

$$AdjA = \begin{vmatrix} \frac{L^4}{256} & 0 & -\frac{3L^2}{16} & \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L^4}{256} & -\frac{L^3}{32} & \frac{L^2}{16} \\ 0 & 0 & \frac{3L^2}{16} & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{L^3}{64} & \frac{L^2}{16} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} \frac{L^4}{256} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^4}{256} & 0 & 0 \\ -\frac{3L^2}{16} & -\frac{L^3}{32} & \frac{3L^2}{16} & -\frac{L^3}{64} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{16} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{16} \end{vmatrix}$$

$$[B] = \frac{AdjA}{|A|} = \frac{1}{\frac{L^4}{256}} \begin{vmatrix} \frac{L^4}{256} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^4}{256} & 0 & 0 \\ -\frac{3L^2}{16} & -\frac{L^3}{32} & \frac{3L^2}{16} & -\frac{L^3}{64} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{16} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{16} \end{vmatrix}$$

$$[B] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{vmatrix} \quad (4.14)$$

Şekil fonksiyonlarını hesaplayalım,

$$[N'] = [\phi(x)][B] = [1, x, x^2, x^3][B] \quad (4.15)$$

$$[N_1, N_2, N_3, N_4] = [1, x, x^2, x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{48x^2}{L^2} + \frac{128x^3}{L^3} \quad (4.16)$$

$$N_2 = x - \frac{8x^2}{L} + \frac{16x^3}{L^2}$$

$$N_3 = \frac{48x^2}{L^2} - \frac{128x^3}{L^3}$$

$$N_4 = -\frac{4}{L}x^2 + \frac{16x^3}{L^2}$$

#### 4.2.3 Eleman Rijitlik Matrisi

Uçlarından eksenel P basınç yüküne maruz bir prizmatik çubuğun toplam potansiyel enerjisinin ikinci varyasyonunu yazalım.

$$\delta^2 V^e = \int_0^{L/4} [EI(w'')^2 - P(w')^2] dx \quad (4.17)$$

Matris formda yazalım.

$$\delta^2 V^e = \int_0^{L/4} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx + \int_0^{L/4} \{\beta\}^T [N_0] \{\beta\} dx$$

$$\delta^2 V^e = \{d\}^T [k_e] \{d\} - P \{d\}^T [n_e] \{d\}$$

$$\{d\}^T [k_e] \{d\} = EI \int_0^{L/4} (w'')^2 dx \quad (4.18)$$

$$\lambda \{d\}^T [n_e] \{d\} = -P \int_0^{L/4} (w')^2 dx \quad (4.19)$$

$$\delta^2 V^e = \{d\}^T ([k_e] + \lambda [n_e]) \{d\} \quad (4.20)$$

Burada  $N_0 = -P$ ,  $[k_e]$  eleman rijitlik matrisi,  $\lambda$  yük parametresi,  $[n_e]$  geometrik yük matrisidir. Eleman rijitlik matrisi ve geometrik yük matrisleri iki yöntemle hesaplanabilir.

- 1) İntegral matrisleri ile hesap yapmak
- 2) Şekil fonksiyonlarını önceden tayin edip onlarla işlem yapmak. Bu çalışmada integral matrisleri ile hesap yapılmıştır.

$$w'' = -2a_3 - 6a_4 x \quad (4.21)$$

$$\{\varepsilon\} = [F] \{a\} \quad (4.22)$$

Burada  $[F]$  matrisine türev matrisi denir. (4.6) denklemini (4.22) denkleminde yerlerine koyalım.

$$\{\varepsilon\} = [F] [B] \{d\} \quad (4.23)$$

$$[F] = [0, 0, -2 - 6x] \quad (4.24)$$

(4.23) denklemini (4.18) denkleminde yerlerine koyalım.

$$[k_e] = EI \int_0^{L/4} [B]^T [F]^T [F] [B] dx \quad (4.25)$$

$$[H] = EI \int_0^{L/4} [F]^T [F] dx \quad \text{integral matrisidir.}$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{48}{L^2} & \frac{128}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{L} & \frac{16}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{48}{L^2} & -\frac{128}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{L} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/4} \begin{bmatrix} \frac{96}{L^2} - \frac{768x}{L^3} \\ \frac{16}{L} - \frac{96x}{L^2} \\ \frac{L}{96} - \frac{L^2}{768x} \\ -\frac{L^2}{8} + \frac{96x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{192}{L^2} + \frac{1536x}{L^3} & -\frac{576x}{L^2} + \frac{4608x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{32}{L} + \frac{192x}{L^2} & -\frac{96x}{L} + \frac{576x^2}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{192}{L^2} - \frac{1536x}{L^3} & \frac{576x^2}{L^2} - \frac{4608x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{L} + \frac{192x}{L^2} & -\frac{48x}{L} + \frac{576x^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= EI \int_0^{L/4} \left[ -\frac{48}{L^2} \left( -\frac{192}{L^2} + \frac{1536x}{L^3} \right) + \frac{128}{L^3} \left( -\frac{576x}{L^2} + \frac{4608x^2}{L^3} \right) \right] dx \\
&= EI \left[ -\frac{48}{L^2} \left| -\frac{192x}{L^2} + \frac{1536x^2}{2L^3} \right|_0^{\frac{L}{4}} + \frac{128}{L^3} \left| -\frac{576x^2}{2L^2} + \frac{4608x^3}{3L^3} \right|_0^{\frac{L}{4}} \right] \\
&= EI \left[ -\frac{48}{L^2} \left( -\frac{192}{L^2} \frac{L}{4} + \frac{1536}{2L^3} \frac{L^2}{16} \right) + \frac{128}{L^3} \left( -\frac{576}{2L^2} \frac{L^2}{16} + \frac{4608}{3L^3} \frac{L^3}{64} \right) \right] \\
&= \frac{768EI}{L^3}
\end{aligned}$$

$$k_{12} = \frac{96}{L^2} EI \quad k_{23} = -\frac{96}{L^2} EI$$

$$k_{13} = -\frac{768}{L^3} EI \quad k_{24} = \frac{8}{L} EI$$

$$k_{14} = \frac{96}{L^2} EI \quad k_{33} = \frac{768}{L^3} EI$$

$$k_{21} = \frac{96}{L^2} EI \quad k_{34} = -\frac{96}{L^2} EI$$

$$k_{22} = \frac{16}{L} EI \quad k_{44} = \frac{16}{L} EI$$

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 \\ -768 & -96L & 768 & -96L \\ 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Eleman rijitlik matrisi elde edilmiştir.

#### 4.2.4 Eleman Geometrik Yük Matrisi

$$w' = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (4.27)$$

$$\{\beta\} = [G]\{a\} \quad (4.28)$$

(4.6) denklemini (4.28) denkleminde yerlerine koyalım,

$$\{\beta\} = [G][B]\{d\} \quad (4.29)$$

$$[G] = [0, 1, 2x, 3x^2] \quad (4.30)$$

(4.29) denklemini (4.19) denkleminde yerine koyalım,

$$[n_e] = \int_0^{L/4} [B]^T [G]^T [G][B] dx \quad (4.31)$$

$$[n_e] = \int_0^{L/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{48}{L^2} & \frac{128}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{L} & \frac{16}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{48}{L^2} & -\frac{128}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{L} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(-\frac{96}{L^2}x + \frac{384}{L^3}x^2\right) & \left(-\frac{192}{L^2}x^2 + \frac{768}{L^3}x^3\right) & \left(-\frac{288}{L^2}x^3 + \frac{1552}{L^3}x^4\right) \\ 0 & \left(1 - \frac{16}{L}x + \frac{48}{L^2}x^2\right) & \left(2x - \frac{32}{L}x^2 + \frac{96}{L^2}x^3\right) & \left(3x^2 - \frac{48}{L}x^3 + \frac{144}{L^2}x^4\right) \\ 0 & \left(\frac{96}{L^2}x - \frac{384}{L^3}x^2\right) & \left(\frac{192}{L^2}x^2 - \frac{768}{L^3}x^3\right) & \left(\frac{288}{L^2}x^3 - \frac{1552}{L^3}x^4\right) \\ 0 & \left(-\frac{8}{L}x + \frac{48}{L^2}x^2\right) & \left(-\frac{16}{L}x^2 + \frac{96}{L^2}x^3\right) & \left(-\frac{24}{L}x^3 + \frac{144}{L^2}x^4\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[n_e] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix}$$

$$n_{11} = \int_0^{L/4} \left[ -\frac{48}{L^2} \left( -\frac{192}{L^2}x^2 + \frac{768}{L^3}x^3 \right) + \frac{128}{L^3} \left( -\frac{288}{L^2}x^3 + \frac{1552}{L^3}x^4 \right) \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ -\frac{48}{L^2} \left| -\frac{192}{L^2} \frac{x^3}{3} + \frac{768}{L^3} \frac{x^4}{4} \right|_0^{\frac{L}{4}} + \frac{128}{L^3} \left| -\frac{288}{L^2} \frac{x^4}{4} + \frac{1552}{L^3} \frac{x^5}{5} \right|_0^{\frac{L}{4}} \right] \\
&= \left[ -\frac{48}{L^2} \left( -\frac{192}{3L^2} \frac{L^3}{64} + \frac{768}{4L^3} \frac{L^4}{256} \right) + \frac{128}{L^3} \left( -\frac{288}{4L^2} \frac{L^4}{256} + \frac{1152}{5L^3} \frac{L^5}{1024} \right) \right] = \frac{24}{5L}
\end{aligned}$$

$$n_{12} = \frac{1}{10} \quad n_{23} = -\frac{1}{10}$$

$$n_{13} = -\frac{24}{5L} \quad n_{24} = -\frac{L}{120}$$

$$n_{14} = \frac{1}{10} \quad n_{33} = \frac{24}{5L}$$

$$n_{21} = \frac{1}{10} \quad n_{34} = -\frac{1}{10}$$

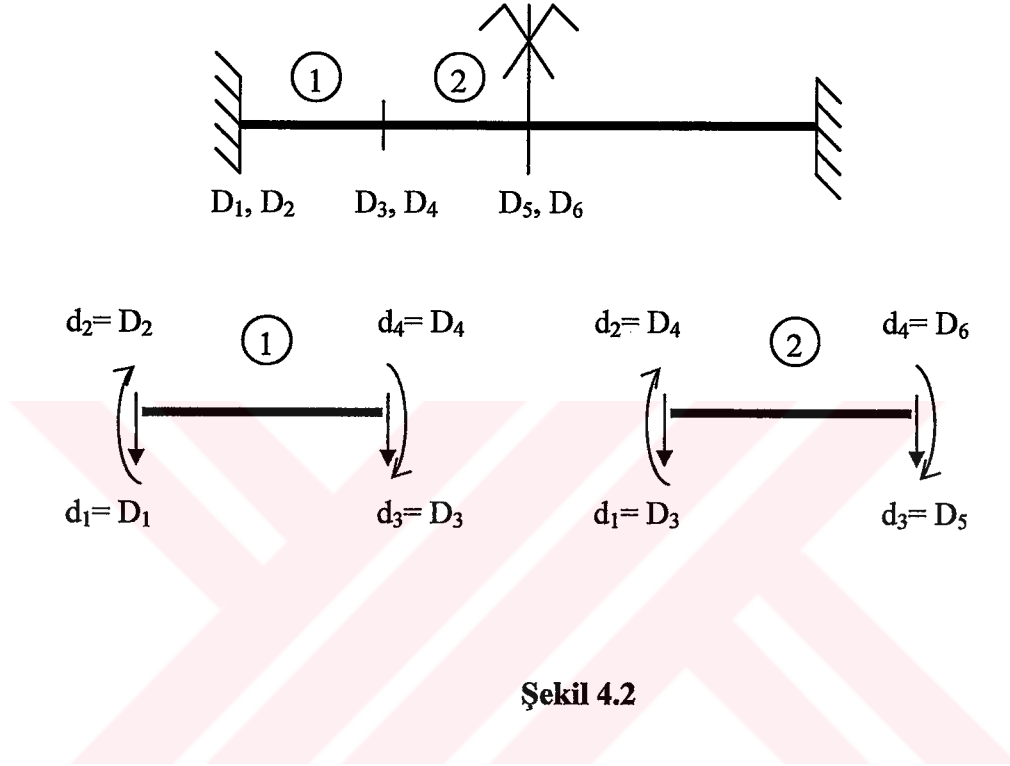
$$n_{22} = \frac{L}{30} \quad n_{44} = \frac{L}{30}$$

$$[n_e] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Eleman rijitlik matrisini ve eleman geometrik yük matrisini çevirme matrisleriyle çarparak sistem rijitlik ve sistem geometrik yük matrisini hesaplayalım.

#### 4.2.5 Çevirme Matrisleri

Eleman deplasman parametrelerini  $\{d_i\}$ ; sistem deplasman parametrelerini ise  $\{D_s\}$  lerle gösterelim. Simetri şartını kullanarak sistemin yarısı ile hesap yapalım.



Şekil 4.2

Birinci eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

$$[C_{e1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.33)

İkinci eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

$$[C_{e2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

#### 4.2.6 Sistemin Rijitlik ve Geometrik Yük Matrislerinin Hesabı

$$[K_{e1}] = [C_{e1}]^T [k_e] [C_{e1}]$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 \\ -768 & -96L & 768 & -96L \\ 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L & 0 & 0 \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 & 0 & 0 \\ -768 & -96L & 768 & -96L & 0 & 0 \\ 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$[K_{e2}] = [C_{e2}]^T [k_e] [C_{e2}]$$

$$[K_{e2}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 \\ -768 & -96L & 768 & -96L \\ 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e2}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 768 & 96L & -768 & 96L \\ 0 & 0 & 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 \\ 0 & 0 & -768 & -96L & 768 & -96L \\ 0 & 0 & 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$[N_{e1}] = [C_{e1}]^T [n_e] [C_{e1}]$$

$$[N_{e1}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e1}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$[N_{e2}] = [C_{e2}]^T [n_e] [C_{e2}]$$

$$[N_{e2}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{L^2} & \frac{L}{L^2} & -\frac{L}{L^2} & -\frac{L}{L^2} \\ \frac{10}{30} & \frac{10}{30} & -\frac{10}{120} & -\frac{10}{120} \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e2}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{L^2} & \frac{L}{L^2} & -\frac{L}{L^2} & -\frac{L}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{10}{30} & \frac{10}{30} & -\frac{10}{120} & -\frac{10}{120} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Sistemin rijitlik matrisi :

$$[K] = [K_{e1}] + [K_{e2}]$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L & 0 & 0 \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 & 0 & 0 \\ -768 & -96L & 1536 & 0 & -768 & 96L \\ 96L & 8L^2 & 0 & 32L^2 & -96L & 8L^2 \\ 0 & 0 & -768 & -96L & 768 & -96L \\ 0 & 0 & 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Sistemin geometrik yük matrisi :

$$[N] = [N_{e1}] + [N_{e2}]$$

$$[N] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & 0 & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\frac{\delta(\delta^2 V)}{\delta D_s} = 0 \quad \text{dan;} \quad ([K] - P[N])\{D_s\} = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L & 0 & 0 \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 & 0 & 0 \\ -768 & -96L & 1536 & 0 & -768 & 96L \\ 96L & 8L^2 & 0 & 32L^2 & -96L & 8L^2 \\ 0 & 0 & -768 & -96L & 768 & -96L \\ 0 & 0 & 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} =$$

$$-P \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & 0 & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.41)$$

#### 4.2.7 Sınır Şartları ve Kritik Yükün Hesabı

a) Sistemin iki ucunun ankastre mesnet olması halinde sınır şartları :

$$x = 0 \text{ 'da ; } w = 0 \rightarrow D_1 = 0$$

$$x = 0 \text{ 'da ; } w' = 0 \rightarrow D_2 = 0$$

$$x = \frac{L}{2} \text{ 'de ; } w' = 0 \rightarrow D_6 = 0 \quad (\text{simetri şartı})$$

Deplasman parametrelerinin sıfır olduğu yerlerde satır ve sütun silinip bir konur.

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1536 & 0 & -768 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32L^2 & -96L & 0 \\ 0 & 0 & -768 & -96L & 768 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$-P \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{48}{5} & 0 & -\frac{24}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (1536D_3 - 768D_5) - P \frac{1}{L} \left( \frac{48}{5} D_3 - \frac{24}{5} D_5 \right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (32L^2 D_4 - 96LD_5) - P \frac{1}{L} \left( \frac{L^2}{15} D_4 - \frac{L}{10} D_5 \right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (-768D_3 - 96LD_4 + 768D_5) - P \frac{1}{L} \left( -\frac{24}{5} D_3 - \frac{L}{10} D_4 + \frac{24}{5} D_5 \right) = 0$$

$$\left( \frac{EI}{L^3} 1536 - \frac{P}{L} \frac{48}{5} \right) D_3 - \left( 768 \frac{EI}{L^3} - \frac{24}{5} \frac{P}{L} \right) D_5 = 0 \quad (4.42)$$

$$\left(32L^2 \frac{EI}{L^3} - \frac{P L^2}{L 15}\right) D_4 - \left(96L \frac{EI}{L^3} - \frac{P L}{L 10}\right) D_5 = 0$$

$$-\left(768 \frac{EI}{L^3} - \frac{P 24}{L 5}\right) D_3 - \left(96L \frac{EI}{L^3} - \frac{P L}{L 10}\right) D_4 + \left(768 \frac{EI}{L^3} - \frac{P 24}{L 5}\right) D_5 = 0$$

Sistemin ilk konumunun kararsız hale gelmesi ve  $\{D_s\} = 0$  'dan farklı kararlı bir başka denge konumunun bulunması için yukarıdaki denklem takımının katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. ( $\Delta$ ) determinantını sıfır yapan kritik yüküdür.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \left(\frac{EI}{L^2} 1536 - P \frac{48}{5}\right) & 0 & -\left(768 \frac{EI}{L^2} - P \frac{24}{5}\right) \\ 0 & \left(32EI - \frac{PL^2}{15}\right) & -\left(96 \frac{EI}{L} - P \frac{L}{10}\right) \\ -\left(768 \frac{EI}{L^2} - P \frac{24}{5}\right) & -\left(96 \frac{EI}{L} - P \frac{L}{10}\right) & \left(768 \frac{EI}{L^2} - P \frac{24}{5}\right) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.43)$$

$$0,3P^2 L^2 - 166,4PEI + \frac{6144(EI)^2}{L^2} = 0 \quad (4.44)$$

$$P_{kr} = \frac{39,766EI}{L^2} \quad (4.45)$$

b) Sistemin iki ucunun basit mesnetli olması halinde sınır şartları :

$$x = 0 \text{ 'da ; } w = 0 \rightarrow D_1 = 0$$

$$x = \frac{L}{2} \text{ 'de ; } w' = 0 \rightarrow D_6 = 0 \quad (\text{Simetri şartı})$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16L^2 & -96L & 8L^2 & 0 & 0 \\ 0 & -96L & 1536 & 0 & -768 & 0 \\ 0 & 8L^2 & 0 & 32L^2 & -96L & 0 \\ 0 & 0 & -768 & -96L & 768 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{P}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & 0 & -\frac{24}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{L^2}{120} & 0 & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(16L^2 \frac{EI}{L^2} - \frac{PL^2}{30}\right) D_2 - \left(96L \frac{EI}{L^2} - P \frac{L}{10}\right) D_3 + \left(8L^2 \frac{EI}{L^2} + P \frac{L^2}{120}\right) D_4 = 0$$

$$-\left(96L \frac{EI}{L^2} - \frac{PL}{10}\right) D_2 + \left(1536 \frac{EI}{L^2} - P \frac{48}{5}\right) D_3 - \left(768 \frac{EI}{L^2} - P \frac{24}{5}\right) D_5 = 0$$

$$\left(8L^2 \frac{EI}{L^2} + \frac{PL^2}{120}\right) D_2 + \left(32L^2 \frac{EI}{L^2} - P \frac{L^2}{15}\right) D_4 - \left(96L \frac{EI}{L^2} - P \frac{L}{10}\right) D_5 = 0$$

$$-\left(768 \frac{EI}{L^2} - \frac{P24}{5}\right) D_3 - \left(96L \frac{EI}{L^2} - P \frac{L}{10}\right) D_4 + \left(768 \frac{EI}{L^2} - P \frac{24}{5}\right) D_5 = 0$$

Denklem takımının katsayılar determinantının sıfır olması  $P_{kr}$  yükü verir.

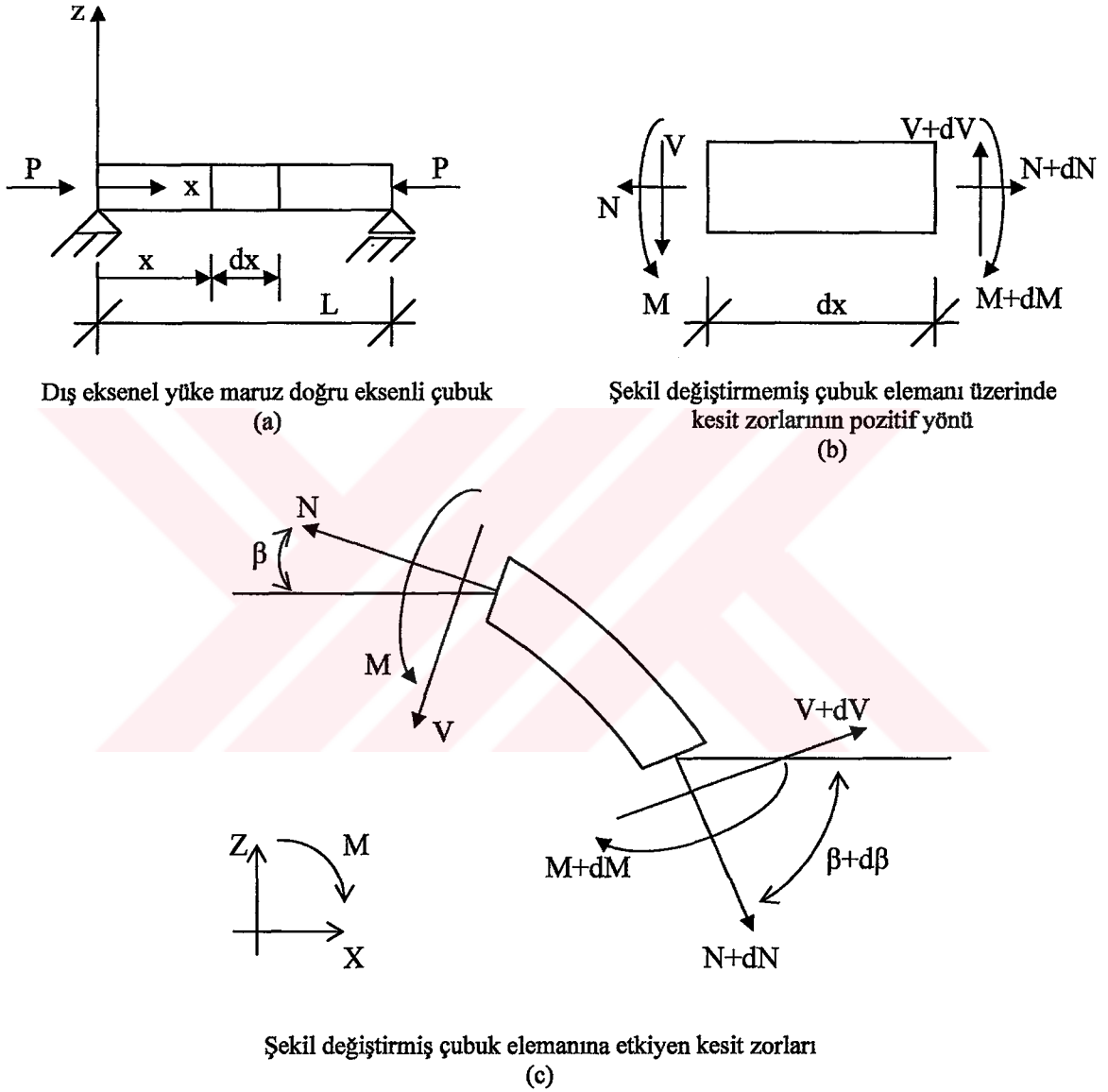
$$\Delta = \begin{bmatrix} \left(16EI - \frac{PL^2}{30}\right) & -\left(96\frac{EI}{L} - P\frac{L}{10}\right) & \left(8EI + P\frac{L^2}{120}\right) & 0 \\ -\left(96\frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & \left(1536\frac{EI}{L^2} - P\frac{48}{5}\right) & 0 & -\left(768\frac{EI}{L^2} - P\frac{24}{5}\right) \\ \left(8EI + \frac{PL^2}{120}\right) & 0 & \left(32EI - P\frac{L^2}{15}\right) & -\left(96\frac{EI}{L} - P\frac{L}{10}\right) \\ 0 & -\left(768\frac{EI}{L^2} - \frac{P24}{5}\right) & -\left(96\frac{EI}{L} - P\frac{L}{10}\right) & \left(768\frac{EI}{L^2} - P\frac{24}{5}\right) \end{bmatrix} = 0$$

Tatonmanla  $P_{kr}$  yük bulunur.

$$P_{kr} = \frac{9,87EI}{L^2} \quad (4.46)$$

### 4.3 Karşılaştırmalı Sonuçlar için Denge-Statik Yöntem ile Çubuk Stabilité Analizi

Genel ve sınır şartlarından bağımsız olarak basınca maruz bir çubukta stabilite probleminin çözümü aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.3.1 a,b,c

$\beta$  açısı çok küçük olduğundan  $\cos \beta \cong 1$ ,  $\sin \beta \cong \beta$  alınabilir. Şekil değiştirmiş eleman üzerinde denge denklemlerini (Şekil 4.3 c) yazalım.

$$\sum X = 0 \dots -N \cos \beta + (N + dN) \cos(\beta + d\beta) - V \sin \beta + (V + dV) \sin(\beta + d\beta) = 0$$

$$-N + N + dN - V \cdot \beta + (V + dV)(\beta + d\beta) = 0$$

$$\begin{aligned}
dN + V.d\beta + dV.\beta + dV.d\beta &= 0 \\
N' + V\beta' + \beta V' &= 0
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

$$\begin{aligned}
\sum Z &= 0 \dots -V.\cos\beta + (V + dV)\cos(\beta + d\beta) + N.\sin\beta - (N + dN).\sin(\beta + d\beta) = 0 \\
-V + V + dV + N\beta - (N + dN)(\beta + d\beta) &= 0 \\
dV - N.d\beta - dN.\beta - dN.d\beta &= 0 \\
V' - N\beta' - \beta N' &= 0
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

$$\begin{aligned}
\sum M &= 0 \dots -(M + dM) + M + V.dx = 0 \\
dM - V.dx &= 0 \\
M' - V &= 0
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

$V$  ve  $\beta$  küçük olduğundan türevleri terk edilerek, üç denklem aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
N' &= 0 \\
V' - N.\beta' &= 0 \\
V &= M'
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Burada,  $M'' = V'$  diyerek

$$\begin{aligned}
N' &= 0 \\
V' &= N.\beta' \\
M'' &= V' = N\beta' \\
M'' - N\beta' &= 0
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

olur. Burada  $\beta = -w'$  'dür.  $\beta' = -w''$  olur ve  $M = +EIw''$  olduğundan

$$N' = 0 \tag{4.3.6}$$

$$(EI.w'')'' - Nw'' = 0 \tag{4.3.7}$$

olur. Denklem (4.3.7),  $N$  ve  $w$  'ye bağlı dördüncü mertebeden, non-liner bir diferansiyel denklemdir. Denklem (4.3.6) 'da  $N$  'in,  $x$  boyunca sabit ve  $x = 0, L$  sınırlarında  $N = -P$

olduğu dikkate alınrsa, stabilite probleminin denge denklemleri, tek bir diferansiyel denkleme indirgenmiş olur.  $EI = \text{sabit}$  için elastik çubuğun non-lineer stabilite denklemi

$$EIw^{IV} + P.w'' = 0 \quad (4.3.8)$$

olur. (4.3.8) diferansiyel denklemi homojendir.  $w = 0$  çözümü aşık bir çözümdür ve 1 denge konumuna (kararlı denge konumu) karşı gelir. Aşık olmayan yani  $w \neq 0$  olan bir çözüm aramak gerekir. Bu da, 1 denge konumuna yakın denge durumlarını belirtecek olan  $P$  yükünün sadece farklı değerleri ( $P_{kr}$ ) için bulunur. Şimdi (4.3.8) denklemini

$$w^{IV} + k^2 w'' = 0 \quad , \quad k^2 = \frac{P}{EI} \quad (4.3.9)$$

formunda yazalım. Sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$w = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 \quad (4.3.10)$$

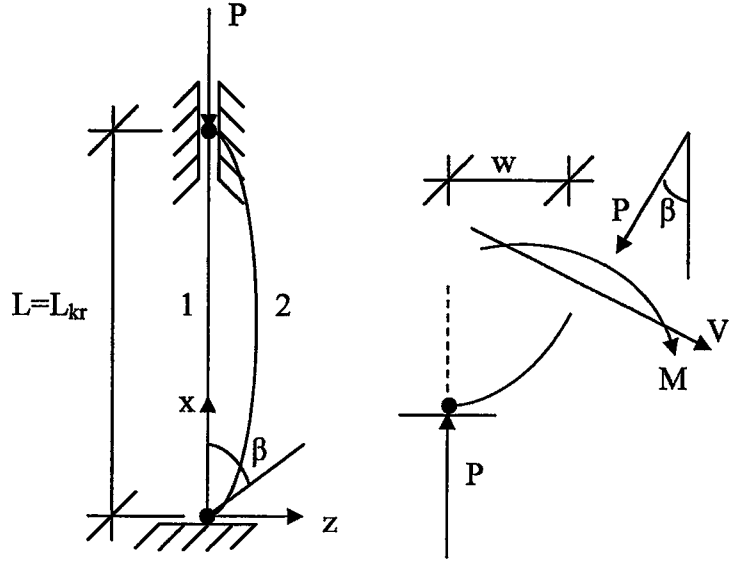
şeklindedir.  $C_i$ , integral sabitleri olup, çubuğun sınır şartlarından belirlenebilirler.

#### 4.3.1 İki Ucu Basit Mesnetli Kolon

Çubuğun sınır şartları

$$x = 0 \dots\dots\dots w(0) = 0, \quad w''(0) = 0$$

$$x = L \dots\dots\dots w(L) = 0, \quad w''(L) = 0$$



Şekil 4.3.2

$w$  'nin türevlerini alalım,

$$w' = k.C_1 \cos kx - kC_2 \sin kx + C_3$$

$$w'' = -k^2 C_1 \sin kx - k^2 C_2 \cos kx$$

Şimdi dört sınır şartı için  $w$  ve  $w''$  'nü yazalım.

$$0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + C_3 \cdot 0 + C_4 \dots\dots\dots C_2 + C_4 = 0 \quad (4.3.11)$$

$$0 = -k^2.C_1 \sin 0 - k^2.C_2 \cos 0 \dots\dots\dots -k^2 C_2 = 0 \quad (4.3.12)$$

$$0 = C_1 \cdot \sin kL + C_3 \cdot L \dots\dots\dots C_1 \cdot \sin kL + C_3 \cdot L = 0 \quad (4.3.13)$$

$$0 = -k^2.C_1 \cdot \sin kL \dots\dots\dots -k^2.C_1 \cdot \sin kL = 0 \quad (4.3.14)$$

Sırasıyla (4.3.11) ve (4.3.12) denklemlerinden  $C_2 = 0$ ,  $C_4 = 0$  olduğu görülür. Şimdi  $C_i$  'ler cinsinden bulunan (4.3.11-12-13-14) denklemlerinin, katsayılar determinantını yazalım.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 \\ \sin kL & 0 & L & 0 \\ -k^2 \cdot \sin kL & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.15)$$

Yukarıda verilen (4.3.11~14) denklemlerini matris formunda yazarsak

$$[\Delta]\{C_i\} = 0 \quad (4.3.16)$$

olur.  $\{C_i\} = 0$ , yani  $C_i$  'lerin hepsi sıfır olamaz. Çünkü o zaman yukarıda belirttiğimiz  $w = 0$  aşıkâr çözümü olur. Oysa aşıkâr çözüm dışında,  $w \neq 0$  için, farklı çözümler arandığından,  $[\Delta] = 0$ , yani katsayılar determinantı sıfır olmak zorundadır. İşte bu katsayılar determinantını sıfır yapan değer, aranan çözüme, yani aşıkâr olmayan, aranan değere karşı gelir. O halde (4.3.15) determinantını açarsak,

$$k^4 \cdot L \cdot \sin kL = 0 \quad (4.3.17)$$

bulunur. Burada  $C_1$ ,  $k$  ve  $L$  sıfırdan farklı olduğundan

$$\sin kL = 0$$

olmak zorundadır. Bu şartın sağlanması için  $k \cdot L = n \cdot \pi$  olması gerekir.

$$\begin{aligned} k &= \frac{n\pi}{L} & , n &= 1, 2, 3, \dots, n \\ k^2 &= \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} & , k^2 &= \frac{P}{EI} \\ P_n &= \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{L^2} \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Görüldüğü gibi P, çubuğun yalnız eğilme rijitliğine ve uzunluğuna bağlıdır.  $n = 1$  sayısına karşı gelen en küçük P değerine kritik yük denir.

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad n = 1 \quad (4.3.19)$$

Böylece iki ucu mafsallı kolonun Euler Kritik Yüğü bulunmuş olur. Kolona tesir eden P dış yüğü,

$P < P_{kr}$  ise, 1 denge konumu karardır.

$P = P_{kr}$  ise, 1 denge konumu farksızdır. Dalgalanma başlangıcı.

$P > P_{kr}$  ise,  $w = 0$ , 1 denge konumu çubuk boyunca kararsız olur.

$w > 0$ , dallanır ve kararl 2 denge konumunu alır.

$w < 0$ , dallanır ve kararl 2 denge konumunu alır.

Katsayılar,  $C_1 \cdot \sin kL = C_2 = C_3 = C_4 = 0$  olduğuna göre  $w(x)$  yerdeğıştirme fonksiyonu

$$w = C_1 \cdot \frac{\sin \pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.20)$$

olur.  $w = 0$  olması için de yukarıdaki gibi  $k = n\pi/L$  ve  $k^2 = P/EI$  olduğundan  $w$  'yi sıfır yapan özel değér,

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

olur. ve  $n = 1$  için kritik yük,

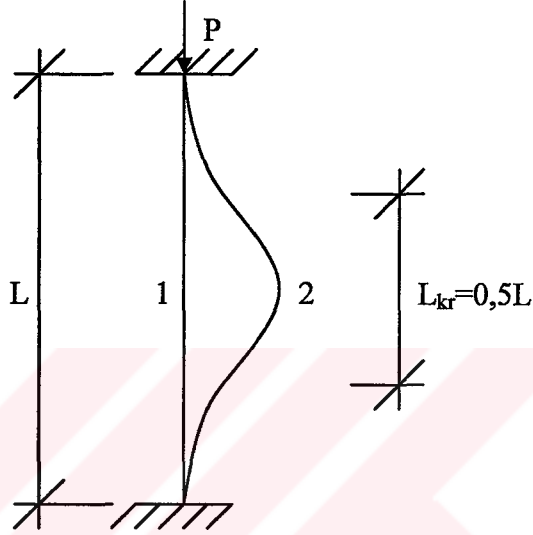
$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

olur. Burada  $L_{kr} = L$  'dir.

### 4.3.2 İki Ucu Ankastre Mesnetli Kolon

Ankastre çubuğun sınır şartları

$$\begin{aligned} x = 0 & \dots\dots\dots w(0) = 0, & w'(0) = 0 \dots\dots \theta = 0 \\ x = L & \dots\dots\dots w(L) = 0, & w'(L) = 0 \end{aligned}$$



Şekil 4.3.3

$w(x)$  ve  $w'(x)$  fonksiyonun türevini yazalım

$$w = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx + C_3 x + C_4$$

$$w' = k \cdot C_1 \cdot \cos kx - k \cdot C_2 \sin kx + C_3$$

Sınır şartlarını uygulayalım.

$$0 = C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cos 0 + C_3 \cdot 0 + C_4 \dots\dots\dots C_2 + C_4 = 0$$

$$0 = k \cdot C_1 \cdot \cos 0 - C_2 \cdot \sin 0 + C_3 \dots\dots\dots kC_1 + C_3 = 0 \quad (4.3.21)$$

$$0 = C_1 \cdot \sin kL + C_2 \cdot \cos kL + C_3 \cdot L + C_4 \dots\dots\dots C_1 \cdot \sin kL + C_2 \cdot \cos kL + C_3 \cdot L + C_4 = 0$$

$$0 = kC_1 \cdot \cos kL - kC_2 \sin kL + C_3 \dots\dots\dots kC_1 \cos kL - kC_2 \sin kL + C_3 = 0$$

Homojen (4.3.21) denklem sisteminin, aşık olmaya çözüm için, katsayılar determinantının sıfır olması gerekir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kL & \cos kL & L & 1 \\ k \cos kL & -k \sin kL & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ \sin kL & L & 1 \\ k \cos kL & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ \sin kL & \cos kL & 1 \\ k \cos kL & -k \sin kL & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta = 2k - 2k \cos kL - Lk^2 \sin kL = 0 \quad (4.3.22)$$

$$\frac{2}{L}(1 - \cos kL) - k \sin kL = 0$$

$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$  ve  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$  olduğu dikkate alınırsa (4.3.22) denklemi düzenlenerek,

$$\frac{2}{L} \left( 2 \sin^2 \frac{kL}{2} \right) - k \left( 2 \sin \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{kL}{2} \left( \frac{2}{L} \sin \frac{kL}{2} - k \cos \frac{kL}{2} \right) = 0$$

olur. Çarpım terimlerinden ilki,

$$\sin \frac{kL}{2} = 0 \quad (4.3.23)$$

parantez içindeki diğeri,

$$\frac{2}{L} \sin \frac{kL}{2} = k \cdot \cos \frac{kL}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{kL}{2} = \frac{kL}{2}$$

olur. İlk terimden hareketle (4.3.23)

$$\frac{kL}{2} = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\frac{k^2 L^2}{4} = n^2 \pi^2 \dots \dots \dots k^2 = \frac{4n^2 \pi^2}{L^2}$$

$$P = \frac{4n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

bulunur.  $n = 1$  için en küçük  $P$  değeri kritik yükü verir.

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (4.3.24)$$

ve

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2/4}$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{kr}^2} \quad , \quad L_{kr} = \frac{L}{2} \quad (4.3.25)$$

yazılabilir. Katsayıların yukarıda bulunan değerini  $w(x)$  yerdeğiştirme fonksiyonlarında yerine koyarak,

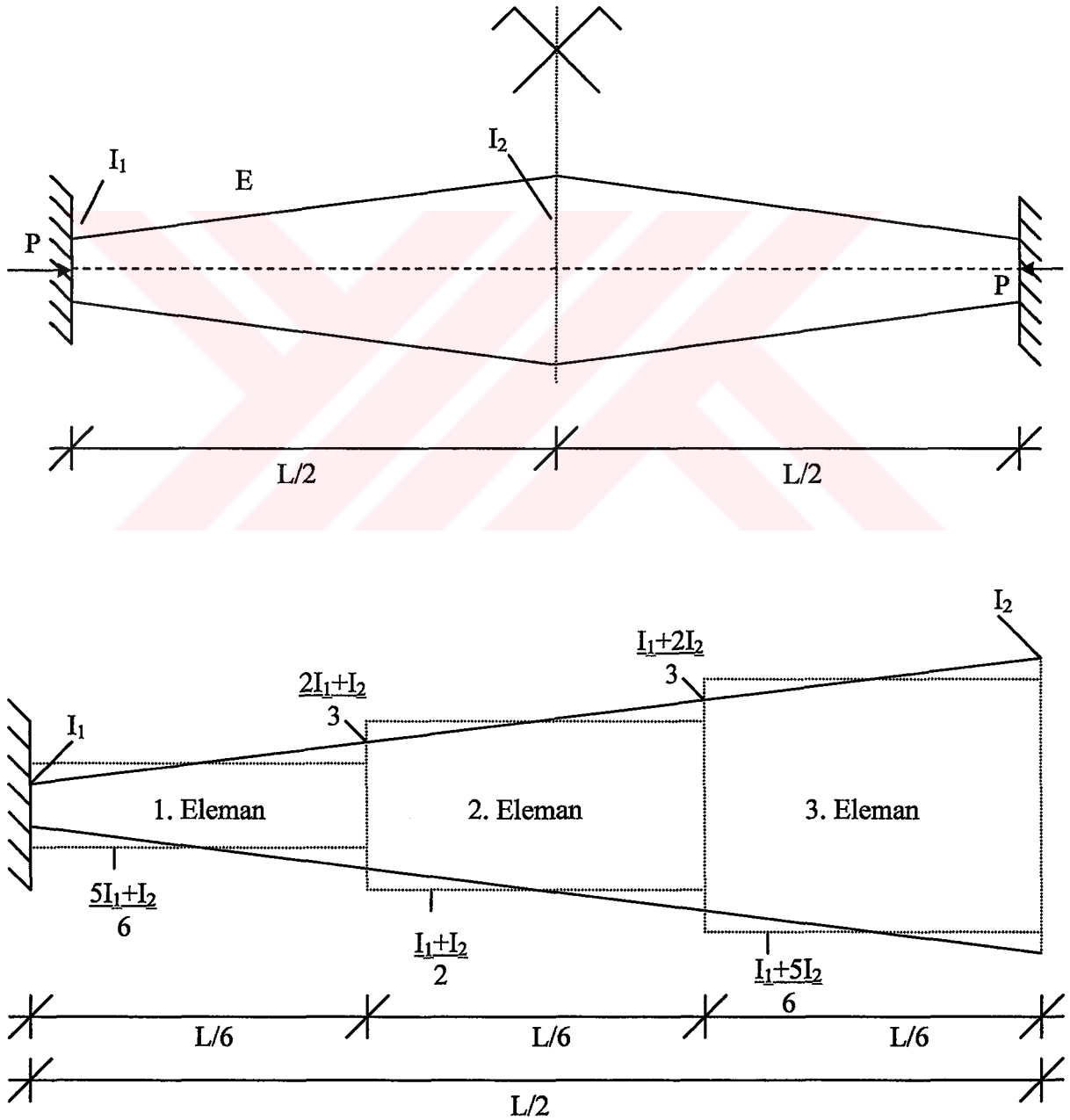
$$C_1 = C_3 = 0, \quad C_4 = -C_2 \quad kL = 2\pi, \quad n = 1$$

$$w = C_4 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) \quad (4.3.26)$$

genel çözümü bulunur.

#### 4.4 Sürekli Değişken Kesitli Bir Kolonun Sonlu Elemanlar Tekniği ile Burkulmasının Hesabı

Bu tip çubuklarda atalet momentinin değişimi sürekli dir.



Şekil 4.4.1

Şekil 4.4.1 'de görüldüğü üzere sürekli değişken kesitli çubuğun sonlu elemanlar tekniği ile incelenmesinde çubuk üç eşit uzunlukta parçaya bölünmüştür. Değişken atalet momentleri eşit uzunluktaki elemanların başında ve sonundaki değerlerin ortalaması alınarak idealize edilmiş ve problem süreksiz değişken kesit haline indirgenmiştir.

$$1. \text{ Elemanın atalet momenti, } I' = \frac{5I_1 + I_2}{6}$$

$$2. \text{ Elemanın atalet momenti, } I'' = \frac{I_1 + I_2}{2}$$

$$3. \text{ Elemanın atalet momenti, } I''' = \frac{I_1 + 5I_2}{6}$$

Değişken kesitli çubuğu incelerken bölünen parçaların sayısının çokluğu idealizasyondan kaynaklanabilecek sapmaları en aza indirecektir.

$$\{d\}^T = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2] = [d_1, d_2, d_3, d_4]$$

$$w = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

$$w = [\phi(x)]\{a\} = [1, x, x^2, x^3]\{a\}$$

$$\{d\} = [A]\{a\}$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\}$$

$$[A]^{-1} = [B] \quad \text{diyelim.}$$

$$\{a\} = [B]\{d\}$$

$$w = [\phi(x)][B]\{d\}$$

$$[N] = [\phi(x)][B]$$

Bağ matrisi ise şöyle hesaplanır. Elemanın düğüm noktalarının koordinatları  $A(0,0); B(\frac{L}{6},0)$  'dır.

$$w = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

$$w' = \theta = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

$$d_1 = w_A = w(x=0) = a_1$$

$$d_2 = \theta_A = w'(x=0) = a_2$$

$$d_3 = w_B = w\left(x = \frac{L}{6}\right) = a_1 + a_2 \frac{L}{6} + a_3 \frac{L^2}{36} + a_4 \frac{L^3}{216}$$

$$d_4 = \theta_B = w'\left(x = \frac{L}{6}\right) = a_2 + 2a_3 \frac{L}{6} + 3a_4 \frac{L^2}{36}$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{6} & \frac{L^2}{36} & \frac{L^3}{216} \\ 0 & 1 & \frac{L}{3} & \frac{3L^2}{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{6} & \frac{L^2}{36} & \frac{L^3}{216} \\ 0 & 1 & \frac{L}{3} & \frac{3L^2}{36} \end{bmatrix} = \frac{L^4}{1296}$$

$$[B] = \frac{Adj A}{|A|}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{6} & \frac{L^2}{36} & \frac{L^3}{216} \\ 1 & \frac{L}{3} & \frac{3L^2}{216} \end{vmatrix} = \frac{L^4}{1296}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{36} & \frac{L^3}{216} \\ 0 & \frac{L}{3} & \frac{3L^2}{36} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{6} & \frac{L^3}{216} \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{36} \end{vmatrix} = -\frac{3L^2}{36}$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{6} & \frac{L^2}{36} \\ 0 & 1 & \frac{L}{3} \end{vmatrix} = \frac{L}{3}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{6} & \frac{L^2}{36} & \frac{L^3}{216} \\ 1 & \frac{L}{3} & \frac{3L^2}{36} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{36} & \frac{L^3}{216} \\ 0 & \frac{L}{3} & \frac{3L^2}{36} \end{vmatrix} = \frac{L^4}{1296}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{6} & \frac{L^3}{216} \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{36} \end{vmatrix} = -\frac{L^3}{108}$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{6} & \frac{L^2}{36} \\ 0 & 1 & \frac{L}{3} \end{vmatrix} = \frac{L^2}{36}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{3} & \frac{3L^2}{36} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{3} & \frac{3L^2}{36} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{36} \end{vmatrix} = \frac{3L^2}{36} \quad A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L}{3} \end{vmatrix} = -\frac{L}{3}$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{6} & \frac{L^2}{36} & \frac{L^3}{216} \end{vmatrix} = 0 \quad A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{36} & \frac{L^3}{216} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{6} & \frac{L^3}{216} \end{vmatrix} = -\frac{L^3}{216} \quad A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{6} & \frac{L^2}{36} \end{vmatrix} = \frac{L^2}{36}$$

$$AdjA = \begin{vmatrix} \frac{L^4}{1296} & 0 & -\frac{3L^2}{36} & \frac{L}{3} \\ 0 & \frac{L^4}{1296} & -\frac{L^3}{108} & \frac{L^2}{36} \\ 0 & 0 & \frac{3L^2}{36} & -\frac{L}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{L^3}{216} & \frac{L^2}{36} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} \frac{L^4}{1296} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^4}{1296} & 0 & 0 \\ -\frac{3L^2}{36} & -\frac{L^3}{108} & \frac{3L^2}{36} & -\frac{L^3}{216} \\ \frac{L}{3} & \frac{L^2}{36} & -\frac{L}{3} & \frac{L^2}{36} \end{vmatrix}$$

$$[B] = \frac{AdjA}{|A|} = \frac{1}{\frac{L^4}{1296}} \begin{vmatrix} \frac{L^4}{1296} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^4}{1296} & 0 & 0 \\ -\frac{3L^2}{36} & -\frac{L^3}{108} & \frac{3L^2}{36} & -\frac{L^3}{216} \\ \frac{L}{3} & \frac{L^2}{36} & -\frac{L}{3} & \frac{L^2}{36} \end{vmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{108}{L^2} & -\frac{12}{L} & \frac{108}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} & -\frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} \end{bmatrix}$$

Şekil fonksiyonlarını hesaplayalım,

$$[N'] = [\phi(x)][B] = [1, x, x^2, x^3][B]$$

$$[N_1, N_2, N_3, N_4] = [1, x, x^2, x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{108}{L^2} & -\frac{12}{L} & \frac{108}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} & -\frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{108x^2}{L^2} + \frac{432x^3}{L^3}$$

$$N_2 = x - \frac{12x^2}{L} + \frac{36x^3}{L^2}$$

$$N_3 = \frac{108x^2}{L^2} - \frac{432x^3}{L^3}$$

$$N_4 = -\frac{6}{L}x^2 + \frac{36x^3}{L^2}$$

Eleman rijitlik matrisinin yazılması için,

$$w'' = -2a_3 - 6a_4x$$

$$\{\varepsilon\} = [F]\{a\}$$

$$\{\varepsilon\} = [F][B]\{d\}$$

$$[F] = [0, 0, -2 - 6x]$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/6} [B]^T [F]^T [F][B] dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{108}{L^2} & \frac{432}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{12}{L} & \frac{L^2}{36} \\ 0 & 0 & \frac{108}{L^2} & -\frac{432}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L} & \frac{L^2}{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6x \end{bmatrix} [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{108}{L^2} & -\frac{12}{L} & \frac{108}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} & -\frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/6} \begin{bmatrix} \frac{216}{L^2} - \frac{2592x}{L^3} \\ \frac{24}{L} - \frac{216x}{L^2} \\ -\frac{216}{L^2} + \frac{2592x}{L^3} \\ \frac{12}{L} - \frac{216x}{L^2} \end{bmatrix} [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{108}{L^2} & -\frac{12}{L} & \frac{108}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} & -\frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{432}{L^2} + \frac{5184x}{L^3} & -\frac{1296x}{L^2} + \frac{15552x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{48}{L} + \frac{432x}{L^2} & -\frac{144x}{L} + \frac{1296x^2}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{432}{L^2} - \frac{5184x}{L^3} & \frac{1296x^2}{L^2} - \frac{15552x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{L} + \frac{432x}{L^2} & -\frac{72x}{L} + \frac{1296x^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{108}{L^2} & -\frac{12}{L} & \frac{108}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} & -\frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= EI \int_0^{L/6} \left[ -\frac{108}{L^2} \left( -\frac{432}{L^2} + \frac{5184x}{L^3} \right) + \frac{432}{L^3} \left( -\frac{1296x}{L^2} + \frac{15552x^2}{L^3} \right) \right] dx \\
&= EI \left[ -\frac{108}{L^2} \left( -\frac{432x}{L^2} + \frac{5184x^2}{2L^3} \right) + \frac{432}{L^3} \left( -\frac{1296x^2}{2L^2} + \frac{15552x^3}{3L^3} \right) \right]_0^{L/6} \\
&= EI \left[ -\frac{108}{L^2} \left( -\frac{432}{L^2} \frac{L}{6} + \frac{5184}{2L^3} \frac{L^2}{36} \right) + \frac{432}{L^3} \left( -\frac{1296}{2L^2} \frac{L^2}{36} + \frac{15552}{3L^3} \frac{L^3}{216} \right) \right] \\
&= \frac{2592EI}{L^3}
\end{aligned}$$

$$k_{12} = \frac{216}{L^2} EI \quad k_{23} = -\frac{216}{L^2} EI$$

$$k_{13} = -\frac{2592}{L^3} EI \quad k_{24} = \frac{12}{L} EI$$

$$k_{14} = \frac{216}{L^2} EI \quad k_{33} = \frac{2592}{L^3} EI$$

$$k_{21} = \frac{216}{L^2} EI \quad k_{34} = -\frac{216}{L^2} EI$$

$$k_{22} = \frac{24}{L} EI \quad k_{44} = \frac{24}{L} EI$$

$$[k_e] = \frac{EI^*}{L^3} \begin{bmatrix} 2592 & 216L & -2592 & 216L \\ 216L & 24L^2 & -216L & 12L^2 \\ -2592 & -216L & 2592 & -216L \\ 216L & 12L^2 & -216L & 24L^2 \end{bmatrix}$$

\* Her eleman için farklı bir (I) değeri bulunduğundan yerine konduğunda farklı rijitlik matrisleri elde edilecektir.

Eleman rijitlik matrisi elde edilmiştir. Eleman geometrik yük matrisinin teşkili için,

$$w' = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

$$\{\beta\} = [G]\{a\}$$

$$\{\beta\} = [G][B]\{d\}$$

$$[G] = [0, 1, 2x, 3x^2]$$

$$[n_e] = \int_0^{L/6} [B]^T [G]^T [G][B] dx$$

$$[n_e] = EI \int_0^{L/6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{108}{L^2} & \frac{432}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{12}{L} & \frac{L^2}{36} \\ 0 & 0 & \frac{108}{L^2} & -\frac{432}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L} & \frac{36}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{108}{L^2} & -\frac{12}{L} & \frac{108}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} & -\frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(-\frac{216}{L^2}x + \frac{1296}{L^3}x^2\right) & \left(-\frac{432}{L^2}x^2 + \frac{2592}{L^3}x^3\right) & \left(-\frac{648}{L^2}x^3 + \frac{3888}{L^3}x^4\right) \\ 0 & \left(1 - \frac{24}{L}x + \frac{108}{L^2}x^2\right) & \left(2x - \frac{48}{L}x^2 + \frac{216}{L^2}x^3\right) & \left(3x^2 - \frac{72}{L}x^3 + \frac{324}{L^2}x^4\right) \\ 0 & \left(\frac{216}{L^2}x - \frac{1296}{L^3}x^3\right) & \left(\frac{432}{L^2}x^2 - \frac{2592}{L^3}x^3\right) & \left(\frac{648}{L^2}x^3 - \frac{3888}{L^3}x^4\right) \\ 0 & \left(-\frac{12}{L}x + \frac{108}{L^2}x^2\right) & \left(-\frac{24}{L}x^2 + \frac{216}{L^2}x^3\right) & \left(-\frac{36}{L}x^3 + \frac{324}{L^2}x^4\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{108}{L^2} & -\frac{12}{L} & \frac{108}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} & -\frac{432}{L^3} & \frac{36}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[n_e] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix}$$

$$n_{11} = \int_0^{L/6} \left[ -\frac{108}{L^2} \left( -\frac{432}{L^2}x^2 + \frac{2592}{L^3}x^3 \right) + \frac{432}{L^3} \left( -\frac{648}{L^2}x^3 + \frac{3888}{L^3}x^4 \right) \right] dx$$

$$= \left[ -\frac{108}{L^2} \left| -\frac{432}{L^2} \frac{x^3}{3} + \frac{2592}{L^3} \frac{x^4}{4} \right|_0^{L/6} + \frac{432}{L^3} \left| -\frac{648}{L^2} \frac{x^4}{4} + \frac{3888}{L^3} \frac{x^5}{5} \right|_0^{L/6} \right]$$

$$= \left[ -\frac{108}{L^2} \left( -\frac{432}{3L^2} \frac{L^3}{216} + \frac{2592}{4L^3} \frac{L^4}{1296} \right) + \frac{432}{L^3} \left( -\frac{648}{4L^2} \frac{L^4}{1296} + \frac{3888}{5L^3} \frac{L^5}{7776} \right) \right] = \frac{36}{5L}$$

$$n_{12} = \frac{1}{10} \quad n_{23} = -\frac{1}{10}$$

$$n_{13} = -\frac{36}{5L} \quad n_{24} = -\frac{L}{180}$$

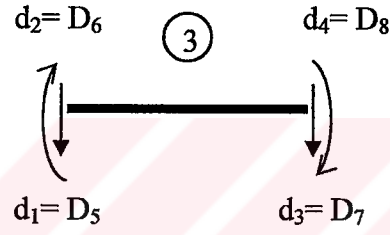
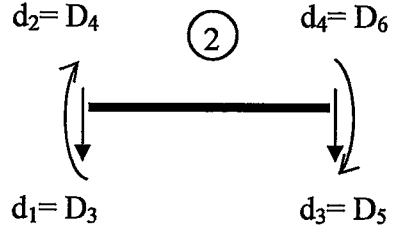
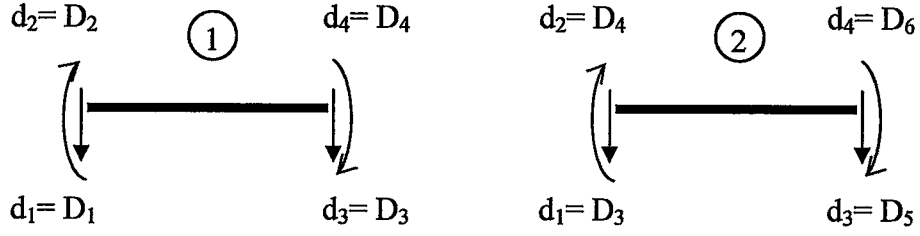
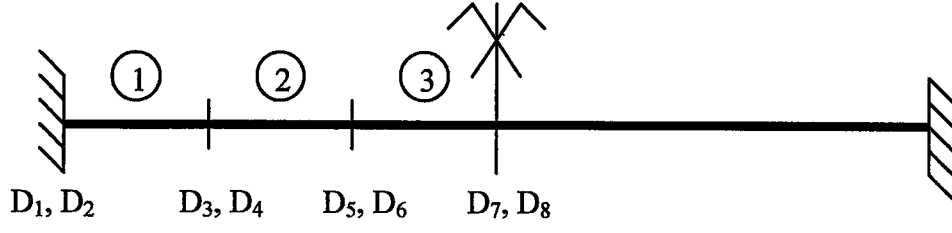
$$n_{14} = \frac{1}{10} \quad n_{33} = \frac{36}{5L}$$

$$n_{21} = \frac{1}{10} \quad n_{34} = -\frac{1}{10}$$

$$n_{22} = \frac{L}{45} \quad n_{44} = \frac{L}{45}$$

$$[n_e] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{36}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{36}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} \\ -\frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{36}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} \end{bmatrix}$$

Eleman rijitlik matrisini ve eleman geometrik yük matrisini çevirme matrisleriyle çarparak sistem rijitlik ve sistem geometrik yük matrisini hesaplayalım.



Birinci eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix}$$

$$[C_{e1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İkinci eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix}$$

$$[C_{e2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Üçüncü eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix}$$

$$[C_{e3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemin rijitlik ve geometrik yük matrislerinin hesabı;

$$[K_{e1}] = [C_{e1}]^T [k_e] [C_{e1}]$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI'}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2592 & 216L & -2592 & 216L \\ 216L & 24L^2 & -216L & 12L^2 \\ -2592 & -216L & 2592 & -216L \\ 216L & 12L^2 & -216L & 24L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI'}{L^3} \begin{bmatrix} 2592 & 216L & -2592 & 216L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 216L & 24L^2 & -216L & 12L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2592 & -216L & 2592 & -216L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 216L & 12L^2 & -216L & 24L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e2}] = [C_{e2}]^T [k_e] [C_{e2}]$$

$$[K_{e2}] = \frac{EI''}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2592 & 216L & -2592 & 216L \\ 216L & 24L^2 & -216L & 12L^2 \\ -2592 & -216L & 2592 & -216L \\ 216L & 12L^2 & -216L & 24L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e2}] = \frac{EI''}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2592 & 216L & -2592 & 216L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 216L & 24L^2 & -216L & 12L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2592 & -216L & 2592 & -216L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 216L & 12L^2 & -216L & 24L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e3}] = [C_{e3}]^T [k_e] [C_{e3}]$$

$$[K_{e3}] = \frac{EI'''}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2592 & 216L & -2592 & 216L \\ 216L & 24L^2 & -216L & 12L^2 \\ -2592 & -216L & 2592 & -216L \\ 216L & 12L^2 & -216L & 24L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e3}] = \frac{EI'''}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2592 & 216L & -2592 & 216L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 216L & 24L^2 & -216L & 12L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2592 & -216L & 2592 & -216L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 216L & 12L^2 & -216L & 24L^2 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e1}] = [C_{e1}]^T [n_e] [C_{e1}]$$

$$[N_{e1}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{36}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{36}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{L^2} & \frac{10}{45} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} \\ -\frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{36}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e1}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{36}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{36}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{L^2} & \frac{10}{45} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e2}] = [C_{e2}]^T [n_e] [C_{e2}]$$

$$[N_{e2}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{36}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{36}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{L^2} & \frac{10}{45} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} \\ -\frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{36}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e2}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{36}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{36}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e3}] = [C_{e3}]^T [n_e] [C_{e3}]$$

$$[N_{e3}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{36}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{36}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} \\ -\frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{36}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e3}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{36}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{36}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{36}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} \end{bmatrix}$$

Sistemin rijitlik matrisi :

$$[K] = [K_{e1}] + [K_{e2}] + [K_{e3}]$$

1. Elemanın atalet momenti,  $I' = \frac{5I_1 + I_2}{6}$

2. Elemanın atalet momenti,  $I'' = \frac{I_1 + I_2}{2}$

3. Elemanın atalet momenti,  $I''' = \frac{I_1 + 5I_2}{6}$

$$[K] = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} 2160I_1 + 432I_2 & (180I_1 + 36I_2)L & -2160I_1 - 432I_2 & (180I_1 + 36I_2)L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (180I_1 + 36I_2)L & (20I_1 + 4I_2)L^2 & (-180I_1 - 36I_2)L & (10I_1 + 2I_2)L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2160I_1 - 432I_2 & (-180I_1 - 36I_2)L & 3456I_1 + 1728I_2 & (-72I_1 + 72I_2)L & -1296I_1 - 1296I_2 & (108I_1 + 108I_2)L & 0 & 0 \\ (180I_1 + 36I_2)L & (10I_1 + 2I_2)L^2 & (-72I_1 + 72I_2)L & (6I_1 + 6I_2)L^2 & (-108I_1 - 108I_2)L & (6I_1 + 6I_2)L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1296I_1 - 1296I_2 & (108I_1 + 108I_2)L & 1728I_1 + 3456I_2 & (-72I_1 + 72I_2)L & -432I_1 - 2160I_2 & (36I_1 + 180I_2)L \\ 0 & 0 & (108I_1 + 108I_2)L & 0 & (-72I_1 + 72I_2)L & (16I_1 + 32I_2)L^2 & (-36I_1 - 180I_2)L & (2I_1 + 10I_2)L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -432I_1 - 2160I_2 & (-36I_1 - 180I_2)L & 432I_1 + 2160I_2 & (-36I_1 - 180I_2)L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (36I_1 + 180I_2)L & (2I_1 + 10I_2)L^2 & (-36I_1 - 180I_2)L & (4I_1 + 20I_2)L^2 \end{bmatrix}$$

Sistemin geometrik yük matrisi :

$$[N] = [N_{e1}] + [N_{e2}] + [N_{e3}]$$

$$[N] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{36}{5} & \frac{L}{10} & \frac{36}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{L}{45} & \frac{L}{72} & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{180} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & 0 & 0 & \frac{36}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{36}{5} & \frac{L}{72} & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{180} & \frac{L}{45} \\ 0 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & \frac{2L^2}{45} & \frac{L}{45} & -\frac{10}{180} & -\frac{180}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{36}{5} & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{180} & \frac{L}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{36}{5} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{180} & -\frac{180}{45} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\partial^2 V)}{\partial D_s} = 0$$

dan;

$$([K] - P[N])\{D_s\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{L^3} \\ 2160I_1 + 432I_2 \\ (180I_1 + 36I_2)L \\ -2160I_1 - 432I_2 \\ (180I_1 + 36I_2)L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (180I_1 + 36I_2)L \\ (20I_1 + 4I_2)L^2 \\ (-180I_1 - 36I_2)L \\ (10I_1 + 2I_2)L^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2160I_1 - 432I_2 \\ (-180I_1 - 36I_2)L \\ 3456I_1 + 1728I_2 \\ (-72I_1 + 72I_2)L \\ -1296I_1 - 1296I_2 \\ (108I_1 + 108I_2)L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (180I_1 + 36I_2)L \\ (10I_1 + 2I_2)L^2 \\ (-72I_1 + 72I_2)L \\ (32I_1 + 16I_2)L^2 \\ (-108I_1 - 108I_2)L \\ (6I_1 + 6I_2)L^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1296I_1 - 1296I_2 \\ (-108I_1 - 108I_2)L \\ 1728I_1 + 3456I_2 \\ (-72I_1 + 72I_2)L \\ -432I_1 - 2160I_2 \\ (36I_1 + 180I_2)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -432I_1 - 2160I_2 \\ (-36I_1 - 180I_2)L \\ 432I_1 + 2160I_2 \\ (-36I_1 - 180I_2)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (36I_1 + 180I_2)L \\ (2I_1 + 10I_2)L^2 \\ (-36I_1 - 180I_2)L \\ (4I_1 + 20I_2)L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{36}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{45} \frac{L}{10} \frac{36}{72} \frac{L}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \\ \frac{36}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{45} \frac{L}{10} \frac{36}{72} \frac{L}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \\ \frac{36}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{45} \frac{L}{10} \frac{36}{72} \frac{L}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \\ \frac{36}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{45} \frac{L}{10} \frac{36}{72} \frac{L}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \\ \frac{36}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{45} \frac{L}{10} \frac{36}{72} \frac{L}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \\ \frac{36}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{45} \frac{L}{10} \frac{36}{72} \frac{L}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \\ \frac{36}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{45} \frac{L}{10} \frac{36}{72} \frac{L}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \\ \frac{36}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{45} \frac{L}{10} \frac{36}{72} \frac{L}{5} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \frac{L}{10} \frac{L^2}{180} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} = 0$$

Sistemin iki ucunun ankastre mesnet olması nedeniyle sınır şartları :

$$x=0 \text{ 'da} ; w=0 \rightarrow D_1=0$$

$$x=0 \text{ 'da} ; w'=0 \rightarrow D_2=0$$

$$x=\frac{L}{2} \text{ 'de} ; w'=0 \rightarrow D_8=0 \quad (\text{simetri şartı})$$

Deplasman parametrelerinin sıfır olduğu yerlerde satır ve sütun silinip bir konur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3456I_1+1728I_2 & (-72I_1+72I_2)L & -1296I_1-1296I_2 & (108I_1+108I_2)L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-72I_1+72I_2)L & (32I_1+16I_2)L^2 & (-108I_1-108I_2)L & (6I_1+6I_2)L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1296I_1-1296I_2 & (-108I_1-108I_2)L & 1728I_1+3456I_2 & (-72I_1+72I_2)L & -432I_1-2160I_2 & 0 \\ 0 & 0 & (108I_1+108I_2)L & (6I_1+6I_2)L^2 & (-72I_1+72I_2)L & (16I_1+32I_2)L^2 & (-36I_1-180I_2)L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -432I_1-2160I_2 & (-36I_1-180I_2)L & 432I_1+2160I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{E}{L^3}$$

$$-P \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{72}{5} & 0 & -\frac{36}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{45} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{180} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{36}{5} & \frac{L}{10} & \frac{72}{5} & 0 & \frac{36}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{45} & 0 & \frac{2L^2}{45} & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{36}{5} & \frac{L}{10} & \frac{36}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left[ \frac{E}{I^3} [(3456I_1 + 1728I_2)D_3 + (-72I_1 + 72I_2)LD_4 + (-1296I_1 - 1296I_2)D_5 + (108I_1 + 108I_2)LD_6] - \frac{P}{L} \left( \frac{72}{5}D_3 - \frac{36}{5}D_5 + \frac{L}{10}D_6 \right) \right] = 0$$

$$\frac{E}{I^3} \left[ (-72I_1 + 72I_2)LD_3 + (32I_1 + 16I_2)I^2D_4 + (-108I_1 - 108I_2)LD_5 + (6I_1 + 6I_2)I^2D_6 \right] - \frac{P}{L} \left( \frac{2I^2}{45}D_4 - \frac{L}{10}D_5 - \frac{I^2}{180}D_6 \right) = 0$$

$$\frac{E}{I^3} [(-1296I_1 - 1296I_2)D_3 + (-108I_1 - 108I_2)LD_4 + (1728I_1 + 3456I_2)D_5 + (-72I_1 + 72I_2)LD_6 + (-432I_1 - 2160I_2)D_7]$$

$$- \frac{P}{L} \left( -\frac{36}{5}D_3 - \frac{L}{10}D_4 + \frac{72}{5}D_5 - \frac{36}{5}D_7 \right) = 0$$

$$\frac{E}{I^3} [(108I_1 + 108I_2)LD_3 + (6I_1 + 6I_2)I^2D_4 + (-72I_1 + 72I_2)LD_5 + (16I_1 + 32I_2)I^2D_6 + (-36I_1 - 180I_2)LD_7] - \frac{P}{L} \left[ \frac{L}{10}D_3 - \frac{I^2}{180}D_4 + \frac{2I^2}{45}D_6 - \frac{L}{10}D_7 \right] = 0$$

$$\frac{E}{I^3} [(-432I_1 - 2160I_2)D_5 + (-36I_1 - 180I_2)LD_6 + (432I_1 + 2160I_2)D_7] - \frac{P}{L} \left( -\frac{36}{5}D_5 - \frac{L}{10}D_6 + \frac{36}{5}D_7 \right) = 0$$

Sistemin ilk konumunun kararsız hale gelmesi ve  $\{D_5\} = 0$  'dan farklı kararlı bir başka denge konumunun bulunması için yukarıdaki denklem takımının katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. (Δ) determinantını sıfır yapan kritik yükler.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{E}{L^3}(3456I_1 + 1728I_2) - \frac{P}{L} \frac{72}{5} & \frac{E}{L^2}(-72I_1 + 72I_2) & \frac{E}{L^3}(-1296I_1 - 1296I_2) + \frac{36P}{5L} & 0 \\ \frac{E}{L^2}(-72I_1 + 72I_2) & \frac{E}{L}(32I_1 + 16I_2) - \frac{2PL}{45} & \frac{E}{L^2}(-108I_1 - 108I_2) + \frac{P}{10} & 0 \\ \frac{E}{L^3}(-1296I_1 - 1296I_2) + \frac{36P}{5L} & \frac{E}{L^2}(-108I_1 - 108I_2) + \frac{P}{10} & \frac{E}{L^3}(1728I_1 + 3456I_2) - \frac{72P}{5L} & \frac{E}{L^3}(-432I_1 - 2160I_2) + \frac{36P}{5L} \\ \frac{E}{L^2}(108I_1 + 108I_2) - \frac{P}{10} & \frac{E}{L}(6I_1 + 6I_2) + \frac{PL}{180} & \frac{E}{L^2}(-72I_1 + 72I_2) & \frac{E}{L^2}(16I_1 + 32I_2) - \frac{2PL}{45} \\ 0 & 0 & \frac{E}{L^2}(-36I_1 - 180I_2) + \frac{P}{10} & \frac{E}{L^3}(432I_1 + 2160I_2) - \frac{36P}{5L} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{E}{L^3}\left(3456I_1 + 1728I_2 - \frac{72PL^2}{5E}\right) & \frac{E}{L^2}(-72I_1 + 72I_2) & \frac{E}{L^3}\left(-1296I_1 - 1296I_2 + \frac{36PL^2}{5E}\right) & 0 \\ \frac{E}{L^2}(-72I_1 + 72I_2) & \frac{E}{L}\left(32I_1 + 16I_2 - \frac{2PL^2}{45E}\right) & \frac{E}{L^2}\left(-108I_1 - 108I_2 + \frac{PL^2}{10E}\right) & 0 \\ \frac{E}{L^3}\left(-1296I_1 - 1296I_2 + \frac{36PL^2}{5E}\right) & \frac{E}{L^2}\left(-108I_1 - 108I_2 + \frac{PL^2}{10E}\right) & \frac{E}{L^3}\left(1728I_1 + 3456I_2 - \frac{72PL^2}{5E}\right) & \frac{E}{L^3}\left(-432I_1 - 2160I_2 + \frac{36PL^2}{5E}\right) \\ \frac{E}{L^2}\left(108I_1 + 108I_2 - \frac{PL^2}{10E}\right) & \frac{E}{L}\left(6I_1 + 6I_2 + \frac{PL^2}{180}\right) & \frac{E}{L^2}\left(-72I_1 + 72I_2\right) & \frac{E}{L^2}\left(16I_1 + 32I_2 - \frac{2PL^2}{45E}\right) \\ 0 & 0 & \frac{E}{L^2}\left(-36I_1 - 180I_2 + \frac{PL^2}{10E}\right) & \frac{E}{L^3}\left(432I_1 + 2160I_2 - \frac{36PL^2}{5E}\right) \end{bmatrix} =$$

Hesap kolaylığı açısından  $\frac{PL^2}{5E} = a$  diyelim.

$$\begin{aligned}
& (3456I_1 + 1728I_2 - 72a) \left( 32I_1 + 16I_2 - \frac{2a}{9} \right) (1728I_1 + 3456I_2 - 72a) \left( 16I_1 + 32I_2 - \frac{2a}{9} \right) (432I_1 + 2160I_2 - 36a) \\
& - (-72I_1 + 72I_2) (-72I_1 + 72I_2) (-432I_1 - 2160I_2 + 36a) \left( 16I_1 + 32I_2 - \frac{2a}{9} \right) (-432I_1 - 2160I_2 + 36a) \\
& - (-1296I_1 - 1296I_2 + 36a) \left( 32I_1 + 16I_2 - \frac{2a}{9} \right) (-1296I_1 - 1296I_2 + 36a) \left( -36I_1 - 180I_2 + \frac{a}{2} \right) \left( -36I_1 - 180I_2 + \frac{a}{2} \right) \\
& - \left( 108I_1 + 108I_2 - \frac{a}{2} \right) \left( -108I_1 - 108I_2 + \frac{a}{2} \right) \left( -108I_1 - 108I_2 + \frac{a}{2} \right) \left( 108I_1 + 108I_2 - \frac{a}{2} \right) (432I_1 + 2160I_2 - 36a) = 0
\end{aligned}$$

Denklemde  $I_1$  ve  $I_2$  değerleri yerlerine konursa  $a$  değeri, dolayısıyla da  $P_{kr}$  değeri kolaylıkla bulunabilir. Denklemin kontrolü amacıyla,  $I_1$  ve  $I_2$  değerlerinin eşit olması ile sabit kesitli, iki ucu ankastre çubuğun  $P_{kr}$  yükü,

$$a = 7,90817I \rightarrow P_{kr \text{ sonlu eleman}} = \frac{39,5408475EI}{L^2}$$

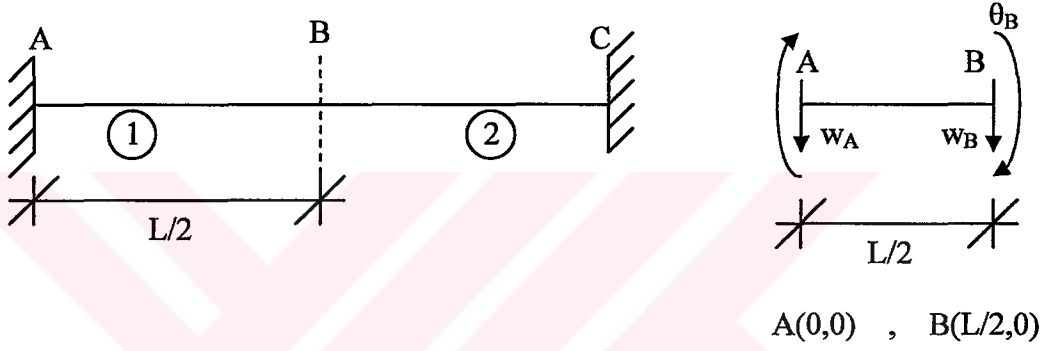
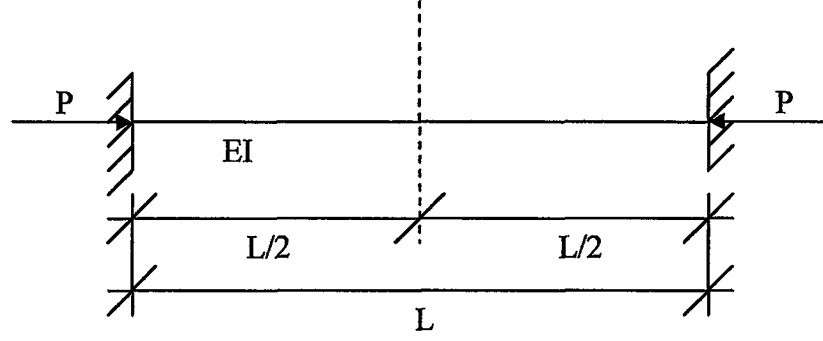
bulunur.

$$P_{kr \text{ kesin çözüm}} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \cong \frac{39,4784EI}{L^2} \quad \text{Hata oranı } \% 0,158$$

#### 4.5 Sonlu Elemanlar Tekniğinde Çubuk Sistemlerin Bölündüğü Eleman Sayısının, Stabilitate Hesabına Etkisi

Sonlu elemanlar metodunda sistemin sonlu sayıda elemana ayrıldığından ve eleman boyutları küçüldükçe problemin hata oranının azalmakta, fakat çözüm süresinin uzamakta olduğundan daha önce de bahsedilmişti. Bu bölümde çubuk elemanlar değişik adetlerde elemanlara bölünerek stabilite hesabında hata oranının nasıl bir değişim gösterdiği incelenecektir. Çubuk sistem 2, 4, 6, 8, ve 10 eşit boydaki elemana bölünerek hesap edilecek; sonuçlar denge yöntemi ile daha önce bulunan kesin  $P_{kr}$  değeriyle karşılaştırılacaktır.

#### 4.5.1 İki Parçaya Bölünerek;



$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$w' = \theta = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

$$d_1 = w_A = w(x=0) = a_1$$

$$d_3 = w_B = w\left(x = \frac{L}{2}\right) = a_1 + a_2 \frac{L}{2} + a_3 \frac{L^2}{4} + a_4 \frac{L^3}{8}$$

$$d_2 = \theta_A = w'(x=0) = a_2$$

$$d_4 = \theta_B = w'\left(x = \frac{L}{2}\right) = a_2 + 2a_3 \frac{L}{2} + 3a_4 \frac{L^2}{4}$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} \\ 0 & 1 & L & \frac{3L^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} \\ 0 & 1 & L & \frac{3L^2}{4} \end{bmatrix} = \frac{L^4}{16}$$

$$[B] = \frac{Adj A}{|A|}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} \\ 1 & L & \frac{3L^2}{4} \end{vmatrix} = \frac{L^4}{16}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} \\ 0 & L & \frac{3L^2}{4} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3L^2}{4}$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ 0 & 1 & L \end{vmatrix} = L$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} \\ 1 & L & \frac{3L^2}{4} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} \\ 0 & L & \frac{3L^2}{4} \end{vmatrix} = \frac{L^4}{16}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{4} \end{vmatrix} = -\frac{L^3}{4}$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ 0 & 1 & L \end{vmatrix} = \frac{L^2}{4}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & \frac{3L^2}{4} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & \frac{3L^2}{4} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{4} \end{vmatrix} = \frac{3L^2}{4} \quad A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & L \end{vmatrix} = -L$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} \end{vmatrix} = 0 \quad A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^3}{8} \end{vmatrix} = -\frac{L^3}{8} \quad A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{vmatrix} = \frac{L^2}{4}$$

$$AdjA = \begin{vmatrix} \frac{L^4}{16} & 0 & -\frac{3L^2}{4} & L \\ 0 & \frac{L^4}{16} & -\frac{L^3}{4} & \frac{L^2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3L^2}{4} & -L \\ 0 & 0 & -\frac{L^3}{8} & \frac{L^2}{4} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} \frac{L^4}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^4}{16} & 0 & 0 \\ -\frac{3L^2}{4} & -\frac{L^3}{4} & \frac{3L^2}{4} & -\frac{L^3}{8} \\ L & \frac{L^2}{4} & -L & \frac{L^2}{4} \end{vmatrix}$$

$$[B] = \frac{AdjA}{|A|} = \frac{1}{\frac{L^4}{16}} \begin{vmatrix} \frac{L^4}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^4}{16} & 0 & 0 \\ -\frac{3L^2}{4} & -\frac{L^3}{4} & \frac{3L^2}{4} & -\frac{L^3}{8} \\ L & \frac{L^2}{4} & -L & \frac{L^2}{4} \end{vmatrix} \rightarrow [B] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{4}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{2}{L} \\ \frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} & -\frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} \end{vmatrix}$$

Şekil fonksiyonlarını hesaplayalım,

$$[N'] = [\phi(x)][B] = [1, x, x^2, x^3][B]$$

$$[N_1, N_2, N_3, N_4] = [1, x, x^2, x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{4}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{2}{L} \\ \frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} & -\frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{12x^2}{L^2} + \frac{16x^3}{L^3}$$

$$N_3 = \frac{12x^2}{L^2} - \frac{16x^3}{L^3}$$

$$N_2 = x - \frac{4x^2}{L} + \frac{4x^3}{L^2}$$

$$N_4 = -\frac{2}{L}x^2 + \frac{4x^3}{L^2}$$

Eleman rijitlik matrisi :

$$\delta^2 V^e = \int_0^{L/2} [EI(w'')^2 - P(w')^2] dx$$

Matris formda yazalım.

$$\delta^2 V^e = \int_0^{L/2} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dx + \int_0^{L/2} \{\beta\}^T [N_0] \{\beta\} dx$$

$$\delta^2 V^e = \{d\}^T [k_e] \{d\} - P \{d\}^T [n_e] \{d\}$$

$$\{d\}^T [k_e] \{d\} = EI \int_0^{L/2} (w'')^2 dx$$

$$\lambda \{d\}^T [n_e] \{d\} = -P \int_0^{L/2} (w')^2 dx$$

$$\delta^2 V^e = \{d\}^T ([k_e] + \lambda [n_e]) \{d\}$$

$$w'' = -2a_3 - 6a_4 x$$

$$\{\varepsilon\} = [F] \{a\} \rightarrow \{\varepsilon\} = [F][B] \{d\} \quad , \quad [F] = [0, 0, -2 - 6x]$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/2} [B]^T [F]^T [F] [B] dx \quad , \quad [H] = EI \int_0^{L/2} [F]^T [F] dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{16}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{L} & \frac{L^2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{16}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{L} & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6x \end{bmatrix} [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{4}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{2}{L} \\ \frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} & -\frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} \frac{24}{L^2} - \frac{96x}{L^3} \\ \frac{8}{L} - \frac{24x}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} + \frac{96x}{L^3} \\ \frac{4}{L} - \frac{24x}{L^2} \end{bmatrix} [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{4}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{2}{L} \\ \frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} & -\frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{48}{L^2} + \frac{192x}{L^3} & -\frac{144x}{L^2} + \frac{576x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{L} + \frac{48x}{L^2} & -\frac{48x}{L} + \frac{144x^2}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{48}{L^2} - \frac{192x}{L^3} & \frac{144x^2}{L^2} - \frac{576x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{L} + \frac{48x}{L^2} & -\frac{8x}{L} + \frac{144x^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{4}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{2}{L} \\ \frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} & -\frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= EI \int_0^{L/2} \left[ -\frac{12}{L^2} \left( -\frac{48}{L^2} + \frac{192x}{L^3} \right) + \frac{16}{L^3} \left( -\frac{144x}{L^2} + \frac{576x^2}{L^3} \right) \right] dx \\ &= EI \left[ -\frac{12}{L^2} \left| -\frac{48x}{L^2} + \frac{192x^2}{2L^3} \right|_0^{L/2} + \frac{16}{L^3} \left| -\frac{144x^2}{2L^2} + \frac{576x^3}{3L^3} \right|_0^{L/2} \right] \\ &= EI \left[ -\frac{12}{L^2} \left( -\frac{48}{L^2} \frac{L}{2} + \frac{192}{2L^3} \frac{L^2}{4} \right) + \frac{16}{L^3} \left( -\frac{144}{2L^2} \frac{L^2}{4} + \frac{576}{3L^3} \frac{L^3}{8} \right) \right] \\ &= \frac{96EI}{L^3} \end{aligned}$$

$$k_{12} = \frac{24}{L^2} EI$$

$$k_{23} = -\frac{24}{L^2} EI$$

$$k_{13} = -\frac{96}{L^3} EI$$

$$k_{24} = \frac{4}{L} EI$$

$$k_{14} = \frac{24}{L^2} EI$$

$$k_{33} = \frac{96}{L^3} EI$$

$$k_{21} = \frac{24}{L^2} EI$$

$$k_{34} = -\frac{24}{L^2} EI$$

$$k_{22} = \frac{8}{L} EI$$

$$k_{44} = \frac{16}{L} EI$$

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & 24L & -96 & 24L \\ 24L & 8L^2 & -24L & 4L^2 \\ -96 & -24L & 96 & -24L \\ 24L & 4L^2 & -24L & 16L^2 \end{bmatrix}$$

Eleman rijitlik matrisi elde edilmiştir. Eleman geometrik yük matrisinin bulunması;

$$w' = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

$$\{\beta\} = [G]\{a\} \quad , \quad \{\beta\} = [G][B]\{d\} \quad , \quad [G] = [0, 1, 2x, 3x^2]$$

$$[n_e] = \int_0^{L/2} [B]^T [G]^T [G][B] dx$$

$$[n_e] = \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{16}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{L^2} & \frac{4}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{16}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{L} & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{4}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{2}{L} \\ \frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} & -\frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(-\frac{24}{L^2}x + \frac{48}{L^3}x^2\right) & \left(-\frac{48}{L^2}x^2 + \frac{96}{L^3}x^3\right) & \left(-\frac{72}{L^2}x^3 + \frac{144}{L^3}x^4\right) \\ 0 & \left(1 - \frac{8}{L}x + \frac{12}{L^2}x^2\right) & \left(2x - \frac{16}{L}x^2 + \frac{24}{L^2}x^3\right) & \left(3x^2 - \frac{24}{L}x^3 + \frac{36}{L^2}x^4\right) \\ 0 & \left(\frac{24}{L^2}x - \frac{48}{L^3}x^2\right) & \left(\frac{48}{L^2}x^2 - \frac{96}{L^3}x^3\right) & \left(\frac{72}{L^2}x^3 - \frac{144}{L^3}x^4\right) \\ 0 & \left(-\frac{4}{L}x + \frac{12}{L^2}x^2\right) & \left(-\frac{8}{L}x^2 + \frac{24}{L^2}x^3\right) & \left(-\frac{12}{L}x^3 + \frac{36}{L^2}x^4\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{4}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{2}{L} \\ \frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} & -\frac{16}{L^3} & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[n_e] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix}$$

$$n_{11} = \int_0^{L/2} \left[ -\frac{12}{L^2} \left( -\frac{48}{L^2}x^2 + \frac{96}{L^3}x^3 \right) + \frac{16}{L^3} \left( -\frac{72}{L^2}x^3 + \frac{144}{L^3}x^4 \right) \right] dx$$

$$= \left[ -\frac{12}{L^2} \left| -\frac{48}{L^2} \frac{x^3}{3} + \frac{96}{L^3} \frac{x^4}{4} \right|_0^{\frac{L}{2}} + \frac{16}{L^3} \left| -\frac{72}{L^2} \frac{x^4}{4} + \frac{144}{L^3} \frac{x^5}{5} \right|_0^{\frac{L}{2}} \right]$$

$$= \left[ -\frac{12}{L^2} \left( -\frac{48}{3L^2} \frac{L^3}{8} + \frac{96}{4L^3} \frac{L^4}{16} \right) + \frac{16}{L^3} \left( -\frac{72}{4L^2} \frac{L^4}{16} + \frac{144}{5L^3} \frac{L^5}{32} \right) \right] = \frac{12}{5L}$$

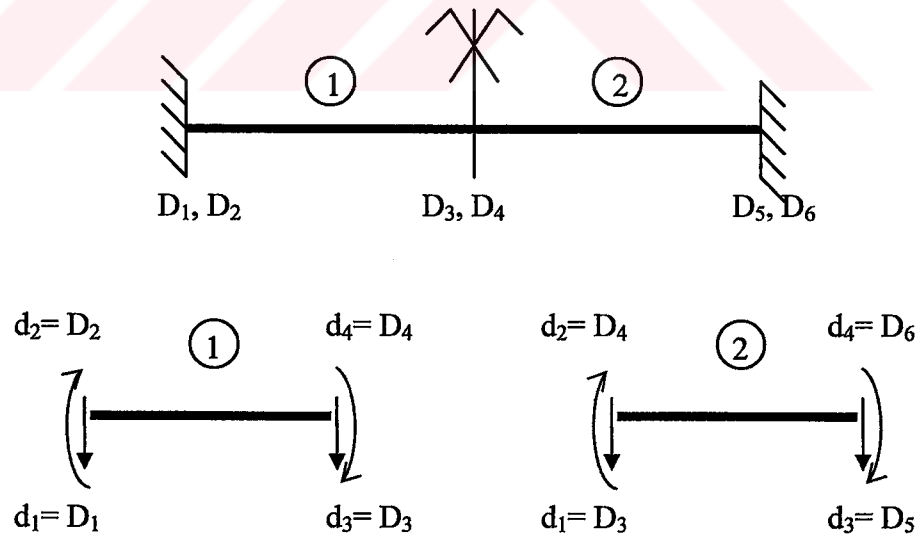
$$n_{12} = \frac{1}{10} \quad n_{23} = -\frac{1}{10}$$

$$n_{13} = -\frac{12}{5L} \quad , \quad n_{24} = -\frac{L}{60} \quad , \quad n_{21} = \frac{1}{10} \quad , \quad n_{34} = -\frac{1}{10}$$

$$n_{14} = \frac{1}{10} \quad , \quad n_{33} = \frac{12}{5L} \quad , \quad n_{22} = \frac{L}{15} \quad , \quad n_{44} = \frac{L}{15}$$

$$[n_e] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{12}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} \\ \frac{12}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{12}{5} & -\frac{L}{10} \\ -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} \end{bmatrix}$$

Eleman rijitlik matrisini ve eleman geometrik yük matrisini çevirme matrisleriyle çarparak sistem rijitlik ve sistem geometrik yük matrisini hesaplayalım.



Birinci eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

$$[C_{e1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İkinci eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

$$[C_{e2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemin rijitlik ve geometrik yük matrislerinin hesabı;

$$[K_{e1}] = [C_{e1}]^T [k_e] [C_{e1}]$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 96 & 24L & -96 & 24L \\ 24L & 8L^2 & -24L & 4L^2 \\ -96 & -24L & 96 & -24L \\ 24L & 4L^2 & -24L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & 24L & -96 & 24L & 0 & 0 \\ 24L & 8L^2 & -24L & 4L^2 & 0 & 0 \\ -96 & -24L & 96 & -24L & 0 & 0 \\ 24L & 4L^2 & -24L & 16L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e2}] = [C_{e2}]^T [k_e] [C_{e2}]$$

$$[K_{e2}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 96 & 24L & -96 & 24L \\ 24L & 8L^2 & -24L & 4L^2 \\ -96 & -24L & 96 & -24L \\ 24L & 4L^2 & -24L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e2}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 96 & 24L & -96 & 24L \\ 0 & 0 & 24L & 8L^2 & -24L & 4L^2 \\ 0 & 0 & -96 & -24L & 96 & -24L \\ 0 & 0 & 24L & 4L^2 & -24L & 16L^2 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e1}] = [C_{e1}]^T [n_e] [C_{e1}]$$

$$[N_{e1}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{L} & \frac{L}{10} & -\frac{12}{L} & \frac{L}{10} \\ \frac{5}{L} & \frac{10}{L^2} & -\frac{5}{L} & \frac{10}{L^2} \\ \frac{10}{L} & \frac{15}{L} & -\frac{10}{L} & -\frac{60}{L^2} \\ -\frac{12}{L} & -\frac{L}{10} & \frac{12}{L} & -\frac{L}{10} \\ -\frac{5}{L} & -\frac{10}{L^2} & \frac{5}{L} & -\frac{10}{L^2} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e1}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L} & \frac{L}{10} & -\frac{12}{L} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{5}{L} & \frac{10}{L^2} & -\frac{5}{L} & \frac{10}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{10}{L} & \frac{15}{L} & -\frac{10}{L} & -\frac{60}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L} & -\frac{L}{10} & \frac{12}{L} & -\frac{L}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{L} & -\frac{10}{L^2} & \frac{5}{L} & -\frac{10}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e2}] = [C_{e2}]^T [n_e] [C_{e2}]$$

$$[N_{e2}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{L} & \frac{L}{10} & -\frac{12}{L} & \frac{L}{10} \\ \frac{5}{L} & \frac{10}{L^2} & -\frac{5}{L} & \frac{10}{L^2} \\ \frac{10}{L} & \frac{15}{L} & -\frac{10}{L} & -\frac{60}{L^2} \\ -\frac{12}{L} & -\frac{L}{10} & \frac{12}{L} & -\frac{L}{10} \\ -\frac{5}{L} & -\frac{10}{L^2} & \frac{5}{L} & -\frac{10}{L^2} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e2}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{12}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{12}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{15} \end{bmatrix}$$

Sistemin rijitlik matrisi :

$$[K] = [K_{e1}] + [K_{e2}]$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & 24L & -96 & 24L & 0 & 0 \\ 24L & 8L^2 & -24L & 4L^2 & 0 & 0 \\ -96 & -24L & 192 & 0 & -96 & 24L \\ 96L & 8L^2 & 0 & 24L^2 & -24L & 4L^2 \\ 0 & 0 & -96 & -24L & 96 & -24L \\ 0 & 0 & 24L & 4L^2 & -24L & 16L^2 \end{bmatrix}$$

Sistemin geometrik yük matrisi :

$$[N] = [N_{e1}] + [N_{e2}]$$

$$[N] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{12}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{12}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{12}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} & 0 & \frac{2L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{12}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{15} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\partial^2 V)}{\partial D_s} = 0 \quad \text{dan;} \quad ([K] - P[N])\{D_s\} = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & 24L & -96 & 24L & 0 & 0 \\ 24L & 8L^2 & -24L & 4L^2 & 0 & 0 \\ -96 & -24L & 192 & 0 & -96 & 24L \\ 96L & 8L^2 & 0 & 24L^2 & -24L & 4L^2 \\ 0 & 0 & -96 & -24L & 96 & -24L \\ 0 & 0 & 24L & 4L^2 & -24L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} =$$

$$-P \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{12}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & 0 & -\frac{12}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} & 0 & \frac{2L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{12}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = 0$$

Sınır şartları ve kritik yükün hesabı;

$$x = 0 \text{ 'da ; } w = 0 \rightarrow D_1 = 0$$

$$x = 0 \text{ 'da ; } w' = 0 \rightarrow D_2 = 0$$

$$x = L \text{ 'da ; } w = 0 \rightarrow D_5 = 0$$

$$x = L \text{ 'da ; } w' = 0 \rightarrow D_6 = 0$$

Deplasman parametrelerinin sıfır olduğu yerlerde satır ve sütun silinip bir konur.

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 192 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$-P \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (192D_3) - P \frac{1}{L} \left( \frac{24}{5} D_3 \right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (24L^2 D_4) - P \frac{1}{L} \left( \frac{2L^2}{15} D_4 \right) = 0$$

$$\left( \frac{EI}{L^3} 192 - \frac{P}{L} \frac{24}{5} \right) D_3 = 0$$

$$\left( 24L^2 \frac{EI}{L^3} - \frac{P}{L} \frac{2L^2}{15} \right) D_4 = 0$$

(Δ) determinantını sıfır yapan kritik yükün bulunması;

$$\Delta = \begin{bmatrix} \left( \frac{EI}{L^3} 192 - \frac{P}{L} \frac{24}{5} \right) & 0 \\ 0 & \left( \frac{24EI}{L} - \frac{2PL}{15} \right) \end{bmatrix} = 0$$

$$0,64P^2L^2 - 140,8PEI + \frac{4608(EI)^2}{L^2} = 0$$

$$P_{kr \text{ sonlueman}} = \frac{40EI}{L^2} \quad ; \quad P_{kr \text{ ke sin çözüm}} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \cong \frac{39,4784EI}{L^2}$$

Hata oranı % 1,32 'dir.

#### 4.5.2 Dört Parçaya Bölünerek;

Daha önce, bölüm 4.2 'de örnek olarak çubuk dört parçaya bölünmüş ve sonuç olarak  $P_{kr}$  yükü,

$$P_{kr \text{ sonlueman}} = \frac{39,766EI}{L^2} \quad P_{kr \text{ ke sin çözüm}} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \cong \frac{39,4784EI}{L^2}$$

olarak bulunmuştu.

Hata oranı % 0,73 'dir.

#### 4.5.3 Altı Parçaya Bölünerek;

Daha önce, bölüm 4.4 'de altı parçaya bölünen değişken kesitli çubuk sistemi denkleminin kontrolü amacıyla,  $I_1$  ve  $I_2$  değerleri eşit alınmış ve sabit kesitli, iki ucu ankastre çubuğun  $P_{kr}$  yükü,

$$P_{kr \text{ sonlueman}} = \frac{39,54EI}{L^2}$$

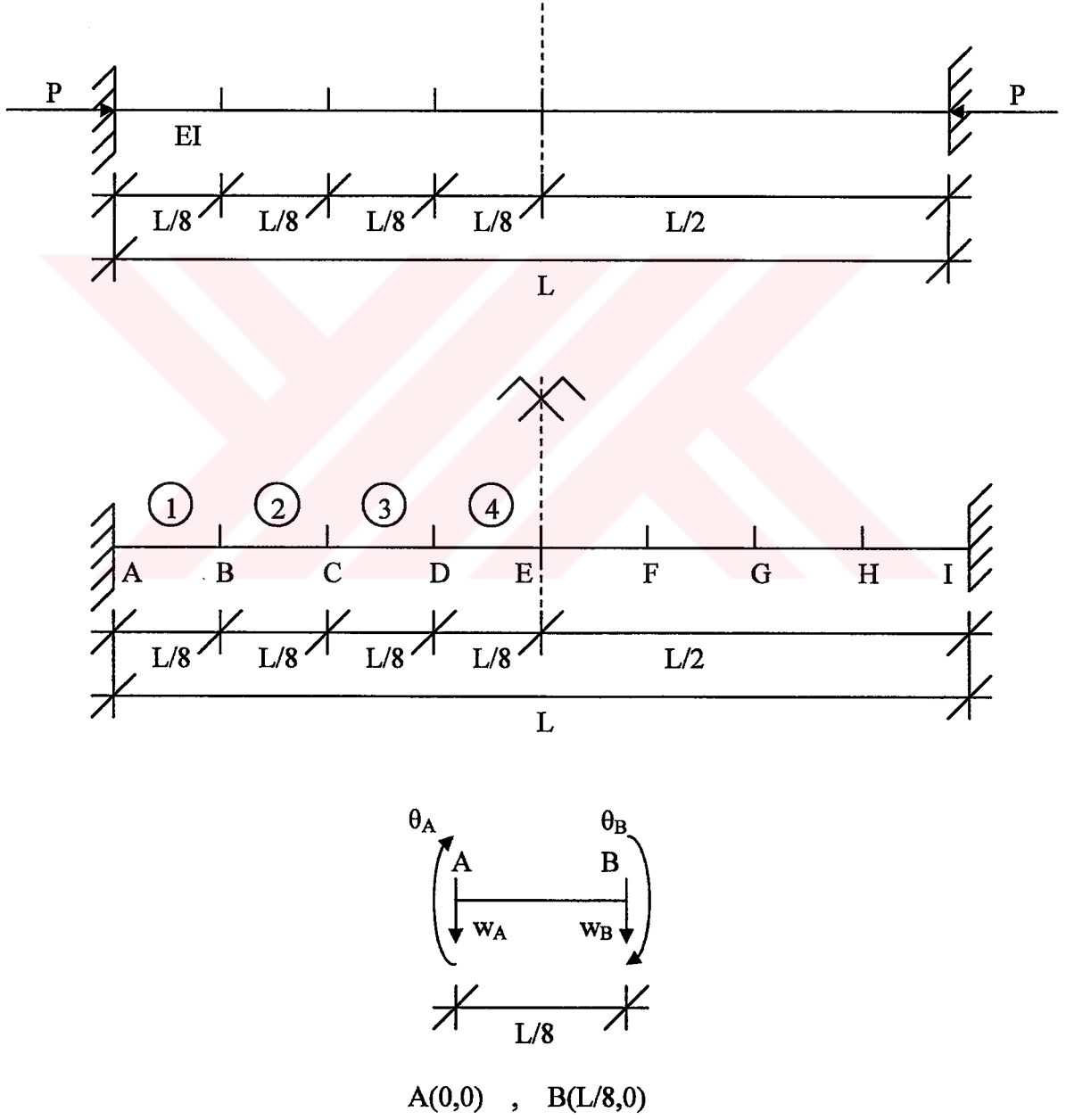
olarak bulunmuştur.

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \cong \frac{39,4784 EI}{L^2}$$

*kesin çözüm*

Hata oranı % 0,158 'dir.

#### 4.5.4 Sekiz Parçaya Bölünerek;



$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3, \quad w' = \theta = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

$$d_1 = w_A = w(x=0) = a_1 \quad , \quad d_3 = w_B = w\left(x = \frac{L}{8}\right) = a_1 + a_2 \frac{L}{8} + a_3 \frac{L^2}{64} + a_4 \frac{L^3}{512}$$

$$d_2 = \theta_A = w'(x=0) = a_2 \quad , \quad d_4 = \theta_B = w'\left(x = \frac{L}{8}\right) = a_2 + 2a_3 \frac{L}{8} + 3a_4 \frac{L^2}{64}$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{8} & \frac{L^2}{64} & \frac{L^3}{512} \\ 0 & 1 & \frac{L}{4} & \frac{3L^2}{64} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{8} & \frac{L^2}{64} & \frac{L^3}{512} \\ 0 & 1 & \frac{L}{4} & \frac{3L^2}{64} \end{bmatrix} = \frac{L^4}{4096}$$

$$[B] = \frac{Adj A}{|A|}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{8} & \frac{L^2}{64} & \frac{L^3}{512} \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{3L^2}{64} \end{vmatrix} = \frac{L^4}{4096} \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{64} & \frac{L^3}{512} \\ 0 & \frac{L}{4} & \frac{3L^2}{64} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{8} & \frac{L^3}{512} \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{64} \end{vmatrix} = -\frac{3L^2}{64} \quad A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{8} & \frac{L^2}{64} \\ 0 & 1 & \frac{L}{4} \end{vmatrix} = \frac{L}{4}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{8} & \frac{L^2}{64} & \frac{L^3}{512} \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{3L^2}{64} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{64} & \frac{L^3}{512} \\ 0 & \frac{L}{4} & \frac{3L^2}{64} \end{vmatrix} = \frac{L^4}{4096}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{8} & \frac{L^3}{512} \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{64} \end{vmatrix} = -\frac{L^3}{256}$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{8} & \frac{L^2}{64} \\ 0 & 1 & \frac{L}{4} \end{vmatrix} = \frac{L^2}{64}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{3L^2}{64} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{4} & \frac{3L^2}{64} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{64} \end{vmatrix} = \frac{3L^2}{64}$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L}{4} \end{vmatrix} = -\frac{L}{4}$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{8} & \frac{L^2}{64} & \frac{L^3}{512} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{64} & \frac{L^3}{512} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{8} & \frac{L^3}{512} \end{vmatrix} = -\frac{L^3}{512} \quad A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{8} & \frac{L^2}{64} \end{vmatrix} = \frac{L^2}{64}$$

$$AdjA = \begin{vmatrix} \frac{L^4}{4096} & 0 & -\frac{3L^2}{64} & \frac{L}{4} \\ 0 & \frac{L^4}{4096} & -\frac{L^3}{256} & \frac{L^2}{64} \\ 0 & 0 & \frac{3L^2}{64} & -\frac{L}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{L^3}{512} & \frac{L^2}{64} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} \frac{L^4}{4096} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^4}{4096} & 0 & 0 \\ -\frac{3L^2}{64} & -\frac{L^3}{256} & \frac{3L^2}{64} & -\frac{L^3}{512} \\ \frac{L}{4} & \frac{L^2}{64} & -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{64} \end{vmatrix}$$

$$[B] = \frac{AdjA}{|A|} = \frac{1}{L^4} \begin{vmatrix} \frac{L^4}{4096} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^4}{4096} & 0 & 0 \\ -\frac{3L^2}{64} & -\frac{L^3}{256} & \frac{3L^2}{64} & -\frac{L^3}{512} \\ \frac{L}{4} & \frac{L^2}{64} & -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{64} \end{vmatrix}$$

$$[B] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{192}{L^2} & -\frac{16}{L} & \frac{192}{L^2} & -\frac{8}{L} \\ \frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} & -\frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} \end{vmatrix}$$

Şekil fonksiyonlarını hesaplayalım,

$$[N'] = [\phi(x)][B] = [1, x, x^2, x^3][B]$$

$$[N_1, N_2, N_3, N_4] = [1, x, x^2, x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{192}{L^2} & -\frac{16}{L} & \frac{192}{L^2} & -\frac{8}{L} \\ \frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} & -\frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{192x^2}{L^2} + \frac{1024x^3}{L^3} \quad , \quad N_3 = \frac{192x^2}{L^2} - \frac{1024x^3}{L^3}$$

$$N_2 = x - \frac{16x^2}{L} + \frac{64x^3}{L^2} \quad , \quad N_4 = -\frac{8}{L}x^2 + \frac{64x^3}{L^2}$$

Eleman rijitlik matrisi :

$$\delta^2 V^e = \int_0^{L/8} [EI(w'')^2 - P(w')^2] dx$$

Matris formda yazalım.

$$\delta^2 V^e = \int_0^{L/8} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx + \int_0^{L/8} \{\beta\}^T [N_0] \{\beta\} dx$$

$$\delta^2 V^e = \{d\}^T [k_e] \{d\} - P \{d\}^T [n_e] \{d\}$$

$$\{d\}^T [k_e] \{d\} = EI \int_0^{L/8} (w'')^2 dx$$

$$\lambda \{d\}^T [n_e] \{d\} = -P \int_0^{L/8} (w')^2 dx$$

$$\delta^2 V^e = \{d\}^T ([k_e] + \lambda [n_e]) \{d\}$$

$$w'' = -2a_3 - 6a_4x$$

$$\{\varepsilon\} = [F]\{a\} \rightarrow \{\varepsilon\} = [F][B]\{d\} \quad , \quad [F] = [0, 0, -2 - 6x]$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/8} [B]^T [F]^T [F][B] dx \quad , \quad [H] = EI \int_0^{L/8} [F]^T [F] dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{192}{L^2} & \frac{1024}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{16}{L} & \frac{L^2}{64} \\ 0 & 0 & \frac{192}{L^2} & -\frac{1024}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{L} & \frac{64}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{192}{L^2} & -\frac{16}{L} & \frac{192}{L^2} & -\frac{8}{L} \\ \frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} & -\frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/8} \begin{bmatrix} \frac{384}{L^2} - \frac{6144x}{L^3} \\ \frac{32}{L} - \frac{384x}{L^2} \\ -\frac{384}{L^2} + \frac{6144x}{L^3} \\ \frac{16}{L} - \frac{384x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{192}{L^2} & -\frac{16}{L} & \frac{192}{L^2} & -\frac{8}{L} \\ \frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} & -\frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{768}{L^2} + \frac{12288x}{L^3} & -\frac{2304x}{L^2} + \frac{36864x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{64}{L} + \frac{768x}{L^2} & -\frac{192x}{L} + \frac{2304x^2}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{768}{L^2} - \frac{12288x}{L^3} & \frac{2304x^2}{L^2} - \frac{36864x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{32}{L} + \frac{768x}{L^2} & -\frac{96x}{L} + \frac{2304x^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{192}{L^2} & -\frac{16}{L} & \frac{192}{L^2} & -\frac{8}{L} \\ \frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} & -\frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = EI \int_0^{L/8} \left[ -\frac{192}{L^2} \left( -\frac{768}{L^2} + \frac{12288x}{L^3} \right) + \frac{1024}{L^3} \left( -\frac{2304x}{L^2} + \frac{36864x^2}{L^3} \right) \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= EI \left[ -\frac{192}{L^2} \left| -\frac{768x}{L^2} + \frac{12288x^2}{2L^3} \right|_0^{\frac{L}{8}} + \frac{1024}{L^3} \left| -\frac{2304x^2}{2L^2} + \frac{36864x^3}{3L^3} \right|_0^{\frac{L}{8}} \right] \\
&= EI \left[ -\frac{192}{L^2} \left( -\frac{768}{L^2} \frac{L}{8} + \frac{12288}{2L^3} \frac{L^2}{64} \right) + \frac{1024}{L^3} \left( -\frac{2304}{2L^2} \frac{L^2}{64} + \frac{36864}{3L^3} \frac{L^3}{512} \right) \right] \\
&= \frac{6144EI}{L^3}
\end{aligned}$$

$$k_{12} = \frac{384}{L^2} EI \quad k_{23} = -\frac{384}{L^2} EI \quad k_{13} = -\frac{6144}{L^3} EI \quad k_{24} = \frac{16}{L} EI$$

$$k_{14} = \frac{384}{L^2} EI \quad k_{33} = \frac{6144}{L^3} EI \quad k_{21} = \frac{384}{L^2} EI \quad k_{34} = -\frac{384}{L^2} EI$$

$$k_{22} = \frac{32}{L} EI \quad k_{44} = \frac{32}{L} EI$$

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6144 & 384L & -6144 & 384L \\ 384L & 32L^2 & -384L & 16L^2 \\ -6144 & -384L & 6144 & -384L \\ 384L & 16L^2 & -384L & 32L^2 \end{bmatrix}$$

Eleman rijitlik matrisi elde edilmiştir. Eleman geometrik yük matrisinin bulunması;

$$w' = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

$$\{\beta\} = [G]\{a\} \quad , \quad \{\beta\} = [G][B]\{d\} \quad , \quad [G] = [0, 1, 2x, 3x^2]$$

$$[n_e] = \int_0^{L/8} [B]^T [G]^T [G][B] dx$$

$$[n_e] = \int_0^{L/8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{192}{L^2} & \frac{1024}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{16}{L} & \frac{L^2}{64} \\ 0 & 0 & \frac{192}{L^2} & -\frac{1024}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{L} & \frac{64}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{192}{L^2} & -\frac{16}{L} & \frac{192}{L^2} & -\frac{8}{L} \\ \frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} & -\frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(-\frac{384}{L^2}x + \frac{3072}{L^3}x^2\right) & \left(-\frac{768}{L^2}x^2 + \frac{6144}{L^3}x^3\right) & \left(-\frac{1152}{L^2}x^3 + \frac{9216}{L^3}x^4\right) \\ 0 & \left(1 - \frac{32}{L}x + \frac{192}{L^2}x^2\right) & \left(2x - \frac{64}{L}x^2 + \frac{384}{L^2}x^3\right) & \left(3x^2 - \frac{96}{L}x^3 + \frac{576}{L^2}x^4\right) \\ 0 & \left(\frac{384}{L^2}x - \frac{3072}{L^3}x^2\right) & \left(\frac{768}{L^2}x^2 - \frac{6144}{L^3}x^3\right) & \left(\frac{1152}{L^2}x^3 - \frac{9216}{L^3}x^4\right) \\ 0 & \left(-\frac{16}{L}x + \frac{192}{L^2}x^2\right) & \left(-\frac{32}{L}x^2 + \frac{384}{L^2}x^3\right) & \left(-\frac{48}{L}x^3 + \frac{576}{L^2}x^4\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{192}{L^2} & -\frac{16}{L} & \frac{192}{L^2} & -\frac{8}{L} \\ \frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} & -\frac{1024}{L^3} & \frac{64}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[n_e] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix}$$

$$n_{11} = \int_0^{L/8} \left[ -\frac{192}{L^2} \left( -\frac{768}{L^2}x^2 + \frac{6144}{L^3}x^3 \right) + \frac{1024}{L^3} \left( -\frac{1152}{L^2}x^3 + \frac{9216}{L^3}x^4 \right) \right] dx$$

$$= \left[ -\frac{192}{L^2} \left| -\frac{768}{L^2} \frac{x^3}{3} + \frac{6144}{L^3} \frac{x^4}{4} \right|_0^{\frac{L}{8}} + \frac{1024}{L^3} \left| -\frac{1152}{L^2} \frac{x^4}{4} + \frac{9216}{L^3} \frac{x^5}{5} \right|_0^{\frac{L}{8}} \right]$$

$$= \left[ -\frac{192}{L^2} \left( -\frac{768}{3L^2} \frac{L^3}{512} + \frac{6144}{4L^3} \frac{L^4}{4096} \right) + \frac{1024}{L^3} \left( -\frac{1152}{4L^2} \frac{L^4}{4096} + \frac{9216}{5L^3} \frac{L^5}{32768} \right) \right] = \frac{48}{5L}$$

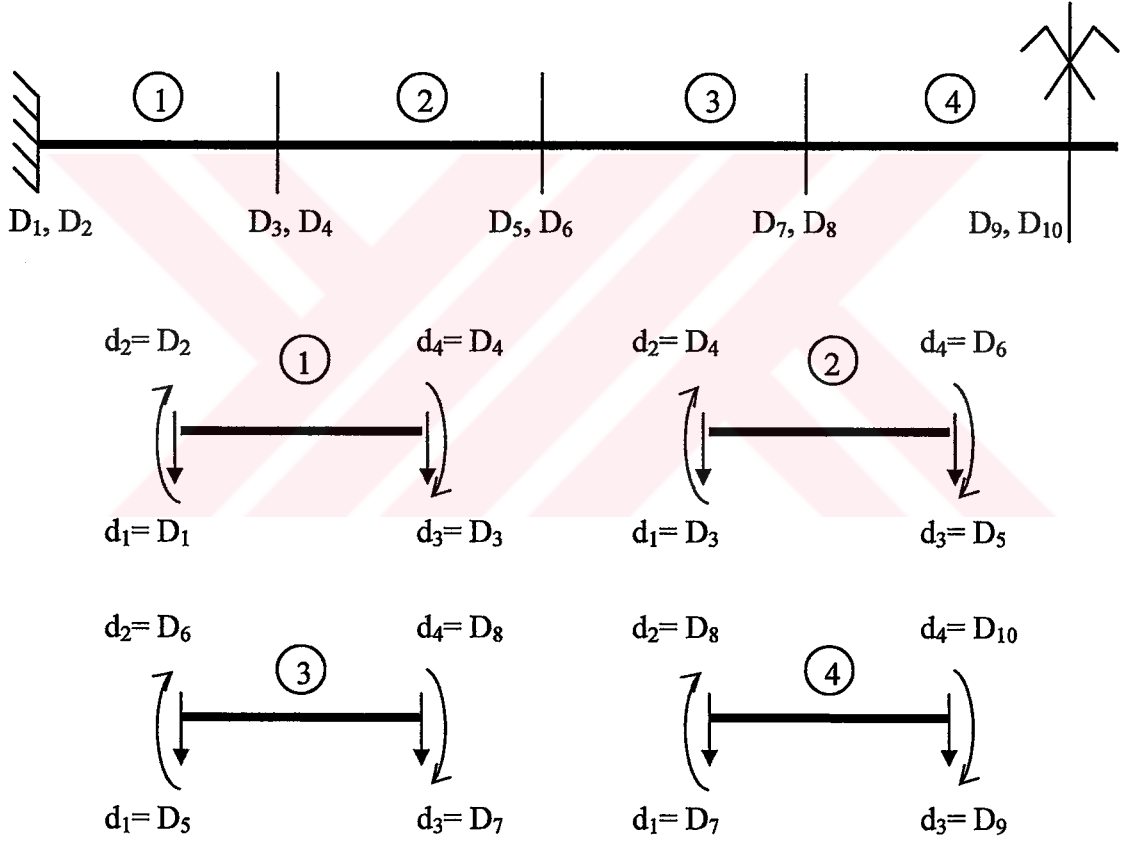
$$n_{12} = \frac{1}{10} \quad , \quad n_{23} = -\frac{1}{10}$$

$$n_{13} = -\frac{48}{5L} \quad , \quad n_{24} = -\frac{L}{240} \quad , \quad n_{21} = \frac{1}{10} \quad , \quad n_{34} = -\frac{1}{10}$$

$$n_{14} = \frac{1}{10} \quad , \quad n_{33} = \frac{48}{5L} \quad , \quad n_{22} = \frac{L}{60} \quad , \quad n_{44} = \frac{L}{60}$$

$$[n_e] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{60}{L^2} & -\frac{L}{10} & -\frac{240}{L^2} \\ -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{240}{L^2} & -\frac{L}{10} & \frac{60}{L^2} \end{bmatrix}$$

Eleman rijitlik matrisini ve eleman geometrik yük matrisini çevirme matrisleriyle çarparak sistem rijitlik ve sistem geometrik yük matrisini hesaplayalım.





Dördüncü eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{bmatrix} \quad [C_{e1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemin rijitlik ve geometrik yük matrislerinin hesabı;

$$[K_{e1}] = [C_{e1}]^T [k_e] [C_{e1}]$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6144 & 384L & -6144 & 384L \\ 384L & 32L^2 & -384L & 16L^2 \\ -6144 & -384L & 6144 & -384L \\ 384L & 16L^2 & -384L & 32L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6144 & 384L & -6144 & 384L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 384L & 32L^2 & -384L & 16L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6144 & -384L & 6144 & -384L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 384L & 16L^2 & -384L & 32L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e2}] = [C_{e2}]^T [k_e] [C_{e2}]$$



$$[K_{e3}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6144 & 384L & -6144 & 384L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 384L & 32L^2 & -384L & 16L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6144 & -384L & 6144 & -384L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 384L & 16L^2 & -384L & 32L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e4}] = [C_{e4}]^T [k_e] [C_{e4}]$$

$$[K_{e4}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6144 & 384L & -6144 & 384L \\ 384L & 32L^2 & -384L & 16L^2 \\ -6144 & -384L & 6144 & -384L \\ 384L & 16L^2 & -384L & 32L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e4}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6144 & 384L & -6144 & 384L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 384L & 32L^2 & -384L & 16L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6144 & -384L & 6144 & -384L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 384L & 16L^2 & -384L & 32L^2 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e1}] = [C_{e1}]^T [n_e] [C_{e1}]$$

$$[N_{e1}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{L^2} & \frac{60}{L^2} & -\frac{L}{L^2} & -\frac{240}{L^2} \\ -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e1}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{L^2} & \frac{60}{L^2} & -\frac{L}{L^2} & -\frac{240}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e2}] = [C_{e2}]^T [n_e] [C_{e2}]$$

$$[N_{e2}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{L^2} & \frac{L^2}{60} & -\frac{L}{L^2} & -\frac{L}{240} \\ -\frac{48}{L} & -\frac{L}{60} & \frac{48}{L} & -\frac{L}{240} \\ \frac{5}{10} & -\frac{10}{240} & \frac{5}{10} & \frac{10}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e2}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{L^2} & \frac{L^2}{60} & -\frac{L}{L^2} & -\frac{L}{240} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{48}{L} & -\frac{L}{60} & \frac{48}{L} & -\frac{L}{240} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{10} & -\frac{10}{240} & \frac{5}{10} & \frac{10}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{10}{240} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e3}] = [C_{e3}]^T [n_e] [C_{e3}]$$

$$[N_{e3}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} \\ -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e3}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e4}] = [C_{e4}]^T [n_e] [C_{e4}]$$

$$[N_{e4}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} \\ -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & -\frac{L}{10} \\ -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e4}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} \end{bmatrix}$$

Sistemin rijitlik matrisi :

$$[K] = [K_{e1}] + [K_{e2}] + [K_{e3}] + [K_{e4}]$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6144 & 384L & -6144 & 384L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 384L & 32L^2 & -384L & 16L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6144 & -384L & 12288 & 0 & -6144 & 384L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 384L & 16L^2 & 0 & 64L^2 & -384L & 16L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6144 & -384L & 12288 & 0 & -6144 & 384L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 384L & 16L^2 & 0 & 64L^2 & -384L & 16L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6144 & -384L & 12288 & 0 & -6144 & 384L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 384L & 16L^2 & 0 & 64L^2 & -384L & 16L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6144 & -384L & 6144 & -384L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 384L & 16L^2 & -384L & 32L^2 \end{bmatrix}$$

Sistemin geometrik yük matrisi :

$$[N] = [N_{e1}] + [N_{e2}] + [N_{e3}] + [N_{e4}]$$

$$[N] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{96}{5} & 0 & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{96}{5} & 0 & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{96}{5} & 0 & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{96}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\partial^2 V)}{\partial D_s} = 0 \quad \text{dan;} \quad ([K] - P[N])\{D_s\} = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6144 & 384L & -6144 & 384L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 384L & 32L^2 & -384L & 16L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6144 & -384L & 12288 & 0 & -6144 & 384L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 384L & 16L^2 & 0 & 64L^2 & -384L & 16L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6144 & -384L & 12288 & 0 & -6144 & 384L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 384L & 16L^2 & 0 & 64L^2 & -384L & 16L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6144 & -384L & 12288 & 0 & -6144 & 384L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 384L & 16L^2 & 0 & 64L^2 & -384L & 16L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6144 & -384L & 6144 & -384L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 384L & 16L^2 & -384L & 32L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{bmatrix} =$$

$$P \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{48}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{96}{5} & 0 & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{96}{5} & 0 & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{96}{5} & 0 & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{96}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{bmatrix} = 0$$

Sınır şartları ve kritik yükün hesabı;

$$x = 0 \text{ 'da ; } w = 0 \rightarrow D_1 = 0$$

$$x = 0 \text{ 'da ; } w' = 0 \rightarrow D_2 = 0$$

$$x = \frac{L}{2} \text{ 'de ; } w' = 0 \rightarrow D_{10} = 0$$

Deplasman parametrelerinin sıfır olduğu yerlerde satır ve sütun silinip bir koyarsak;

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12288 & 0 & -6144 & 384L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64L^2 & -384L & 16L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6144 & -384L & 12288 & 0 & -6144 & 384L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 384L & 16L^2 & 0 & 64L^2 & -384L & 16L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6144 & -384L & 12288 & 0 & -6144 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 384L & 16L^2 & 0 & 64L^2 & -384L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6144 & -384L & 6144 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$P \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{96}{5} & 0 & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{96}{5} & 0 & -\frac{48}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{96}{5} & 0 & -\frac{48}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{240} & 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (12288D_3 - 6144D_5 + 384LD_6) - P \frac{1}{L} \left( \frac{96}{5}D_3 - \frac{48}{5}D_5 + \frac{L}{10}D_6 \right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (64L^2D_4 - 384LD_5 + 16L^2D_6) - P \frac{1}{L} \left( \frac{L^2}{30}D_4 - \frac{L}{10}D_5 - \frac{L^2}{240}D_6 \right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (-6144D_3 - 384LD_4 + 12288D_5 - 6144D_7 + 384LD_8)$$

$$- P \frac{1}{L} \left( -\frac{48}{5}D_3 - \frac{L}{10}D_4 + \frac{96}{5}D_5 - \frac{48}{5}D_7 + \frac{L}{10}D_8 \right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}(384LD_3 + 16L^2D_4 + 64L^2D_6 - 384LD_7 + 16L^2D_8)$$

$$-P\frac{1}{L}\left(\frac{L}{10}D_3 - \frac{L^2}{240}D_4 + \frac{L^2}{30}D_6 - \frac{L}{10}D_7 - \frac{L^2}{240}D_8\right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}(-6144D_5 - 384LD_6 + 12288D_7 - 6144D_9) - \frac{P}{L}\left(-\frac{48}{5}D_5 - \frac{L}{10}D_6 + \frac{96}{5}D_7 - \frac{48}{5}D_9\right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}(384LD_5 + 16L^2D_6 + 64L^2D_8 - 384LD_9) - \frac{P}{L}\left(\frac{L}{10}D_5 - \frac{L^2}{240}D_6 + \frac{L^2}{30}D_8 - \frac{L}{10}D_9\right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}(-6144D_7 - 384LD_8 + 6144D_9) - P\frac{1}{L}\left(-\frac{48}{5}D_7 - \frac{L}{10}D_8 + \frac{48}{5}D_9\right) = 0$$



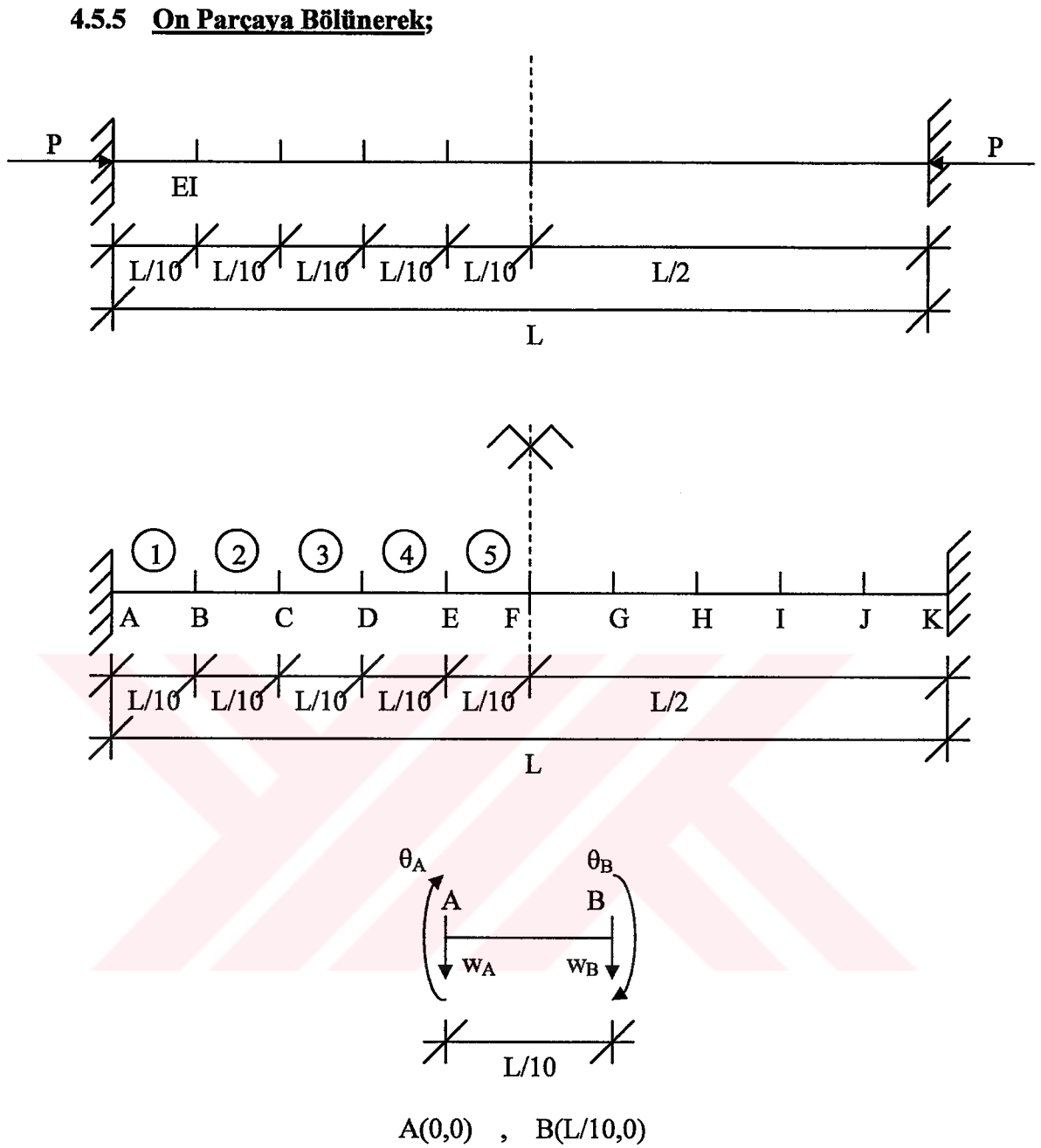
(Δ) determinantını sıfır yapan kritik yükün bulunması;

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(12288 \frac{EI}{L^2} - \frac{96P}{5}\right) & 0 & -\left(6144 \frac{EI}{L^2} - \frac{48P}{5}\right) & \left(384 \frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(64EI - \frac{PL^2}{30}\right) & -\left(384 \frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & \left(16EI + \frac{PL^2}{240}\right) & 0 & 0 \\ -\left(6144 \frac{EI}{L^2} - \frac{48P}{5}\right) & -\left(384 \frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & \left(12288 \frac{EI}{L^2} - \frac{96P}{5}\right) & 0 & \left(384 \frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & 0 \\ \left(384 \frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & \left(16EI + \frac{PL^2}{240}\right) & -\left(384 \frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & \left(12288 \frac{EI}{L^2} - \frac{96P}{5}\right) & \left(16EI + \frac{PL^2}{240}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(6144 \frac{EI}{L^2} - \frac{48P}{5}\right) & -\left(384 \frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & -\left(6144 \frac{EI}{L^2} - \frac{48P}{5}\right) & -\left(384 \frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) \\ 0 & 0 & \left(384 \frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & \left(16EI + \frac{PL^2}{240}\right) & \left(384 \frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & \left(16EI + \frac{PL^2}{240}\right) \end{vmatrix} = 0$$

yukarıdaki determinantın çözümünden kritik yük ;

$$P_{kr}^{\text{sonuclanan}} = \frac{39,4986EI}{L^2} \quad \text{olarak bulunur ;} \quad P_{kr}^{\text{ke sin çözüm}} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \approx \frac{39,4784EI}{L^2}$$

Hata oranı %0.511 'dir.



$$w = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad , \quad w' = \theta = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

$$d_1 = w_A = w(x=0) = a_1 \quad , \quad d_3 = w_B = w\left(x = \frac{L}{10}\right) = a_1 + a_2 \frac{L}{10} + a_3 \frac{L^2}{100} + a_4 \frac{L^3}{1000}$$

$$d_2 = \theta_A = w'(x=0) = a_2 \quad , \quad d_4 = \theta_B = w'\left(x = \frac{L}{10}\right) = a_2 + 2a_3 \frac{L}{10} + 3a_4 \frac{L^2}{100}$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{100} & \frac{L^3}{1000} \\ 0 & 1 & \frac{L}{5} & \frac{3L^2}{100} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{100} & \frac{L^3}{1000} \\ 0 & 1 & \frac{L}{5} & \frac{3L^2}{100} \end{bmatrix} = \frac{L^4}{10000}$$

$$[B] = \frac{Adj A}{|A|}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{100} & \frac{L^3}{1000} \\ 1 & \frac{L}{5} & \frac{3L^2}{100} \end{vmatrix} = \frac{L^4}{10000} \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{100} & \frac{L^3}{1000} \\ 0 & \frac{L}{5} & \frac{3L^2}{100} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{10} & \frac{L^3}{1000} \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{100} \end{vmatrix} = -\frac{3L^2}{100} \quad A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{100} \\ 0 & 1 & \frac{L}{5} \end{vmatrix} = \frac{L}{5}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{100} & \frac{L^3}{1000} \\ 1 & \frac{L}{5} & \frac{3L^2}{100} \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{100} & \frac{L^3}{1000} \\ 0 & \frac{L}{5} & \frac{3L^2}{100} \end{vmatrix} = \frac{L^4}{10000}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{10} & \frac{L^3}{1000} \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{100} \end{vmatrix} = -\frac{L^3}{500} \quad A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{100} \\ 0 & 1 & \frac{L}{5} \end{vmatrix} = \frac{L^2}{100}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{5} & \frac{3L^2}{100} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{5} & \frac{3L^2}{100} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3L^2}{100} \end{vmatrix} = \frac{3L^2}{100}$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L}{5} \end{vmatrix} = -\frac{L}{5}$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{100} & \frac{L^3}{1000} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L^2}{100} & \frac{L^3}{1000} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{10} & \frac{L^3}{1000} \end{vmatrix} = -\frac{L^3}{1000}$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{100} \end{vmatrix} = \frac{L^2}{100}$$

$$AdjA = \begin{vmatrix} \frac{L^4}{10000} & 0 & -\frac{3L^2}{100} & \frac{L}{5} \\ 0 & \frac{L^4}{10000} & -\frac{L^3}{500} & \frac{L^2}{100} \\ 0 & 0 & \frac{3L^2}{100} & -\frac{L}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{L^3}{1000} & \frac{L^2}{100} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} \frac{L^4}{10000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^4}{10000} & 0 & 0 \\ -\frac{3L^2}{100} & -\frac{L^3}{500} & \frac{3L^2}{100} & -\frac{L^3}{1000} \\ \frac{L}{5} & \frac{L^2}{100} & -\frac{L}{5} & \frac{L^2}{100} \end{vmatrix}$$

$$[B] = \frac{AdjA}{|A|} = \frac{1}{10000} \begin{vmatrix} \frac{L^4}{10000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^4}{10000} & 0 & 0 \\ -\frac{3L^2}{100} & -\frac{L^3}{500} & \frac{3L^2}{100} & -\frac{L^3}{1000} \\ \frac{L}{5} & \frac{L^2}{100} & -\frac{L}{5} & \frac{L^2}{100} \end{vmatrix}$$

$$[B] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{300}{L^2} & -\frac{20}{L} & \frac{300}{L^2} & -\frac{10}{L} \\ \frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} & -\frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} \end{vmatrix}$$

Şekil fonksiyonlarını hesaplayalım,

$$[N'] = [\phi(x)][B] = [1, x, x^2, x^3][B]$$

$$[N_1, N_2, N_3, N_4] = [1, x, x^2, x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{300}{L^2} & -\frac{20}{L} & \frac{300}{L^2} & -\frac{10}{L} \\ \frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} & -\frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{300x^2}{L^2} + \frac{2000x^3}{L^3}, \quad N_3 = \frac{300x^2}{L^2} - \frac{2000x^3}{L^3}$$

$$N_2 = x - \frac{20x^2}{L} + \frac{100x^3}{L^2}, \quad N_4 = -\frac{10}{L}x^2 + \frac{100x^3}{L^2}$$

Eleman rijitlik matrisi :

$$\delta^2 V^e = \int_0^{L/10} [EI(w'')^2 - P(w')^2] dx$$

Matris formda yazalım.

$$\delta^2 V^e = \int_0^{L/10} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx + \int_0^{L/10} \{\beta\}^T [N_0] \{\beta\} dx$$

$$\delta^2 V^e = \{d\}^T [k_e] \{d\} - P \{d\}^T [n_e] \{d\}$$

$$\{d\}^T [k_e] \{d\} = EI \int_0^{L/10} (w'')^2 dx$$

$$\lambda \{d\}^T [n_e] \{d\} = -P \int_0^{L/10} (w')^2 dx$$

$$\delta^2 V^e = \{d\}^T ([k_e] + \lambda [n_e]) \{d\}$$

$$w'' = -2a_3 - 6a_4 x$$

$$\{\varepsilon\} = [F] \{a\} \rightarrow \{\varepsilon\} = [F] [B] \{d\} \quad , \quad [F] = [0, 0, -2 - 6x]$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/10} [B]^T [F]^T [F] [B] dx \quad , \quad [H] = EI \int_0^{L/10} [F]^T [F] dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{300}{L^2} & \frac{2000}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{20}{L} & \frac{100}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{300}{L^2} & -\frac{2000}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{L} & \frac{100}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{300}{L^2} & -\frac{20}{L} & \frac{300}{L^2} & -\frac{10}{L} \\ \frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} & -\frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/10} \begin{bmatrix} \frac{600}{L^2} - \frac{12000x}{L^3} \\ \frac{40}{L} - \frac{600x}{L^2} \\ -\frac{600}{L^2} + \frac{12000x}{L^3} \\ -\frac{20}{L} + \frac{600x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{300}{L^2} & -\frac{20}{L} & \frac{300}{L^2} & -\frac{10}{L} \\ \frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} & -\frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1200}{L^2} + \frac{24000x}{L^3} & -\frac{3600x}{L^2} + \frac{72000x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{80}{L} - \frac{1200x}{L^2} & -\frac{240x}{L} + \frac{3600x^2}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{1200}{L^2} - \frac{24000x}{L^3} & \frac{3600x^2}{L^2} - \frac{72000x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{40}{L} + \frac{3600x}{L^2} & -\frac{120x}{L} + \frac{3600x^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{300}{L^2} & -\frac{20}{L} & \frac{300}{L^2} & -\frac{10}{L} \\ \frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} & -\frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= EI \int_0^{L/10} \left[ -\frac{300}{L^2} \left( -\frac{1200}{L^2} + \frac{24000x}{L^3} \right) + \frac{2000}{L^3} \left( -\frac{3600x}{L^2} + \frac{72000x^2}{L^3} \right) \right] dx \\ &= EI \left[ -\frac{300}{L^2} \left| -\frac{1200x}{L^2} + \frac{24000x^2}{2L^3} \right|_0^{\frac{L}{10}} + \frac{2000}{L^3} \left| -\frac{3600x^2}{2L^2} + \frac{72000x^3}{3L^3} \right|_0^{\frac{L}{10}} \right] \\ &= EI \left[ -\frac{300}{L^2} \left( -\frac{1200}{L^2} \frac{L}{10} + \frac{24000}{2L^3} \frac{L^2}{100} \right) + \frac{2000}{L^3} \left( -\frac{3600}{2L^2} \frac{L^2}{100} + \frac{72000}{3L^3} \frac{L^3}{1000} \right) \right] \\ &= \frac{12000EI}{L^3} \end{aligned}$$

$$k_{12} = \frac{600}{L^2} EI \quad k_{23} = -\frac{600}{L^2} EI \quad k_{13} = -\frac{12000}{L^3} EI \quad k_{24} = \frac{20}{L} EI$$

$$k_{14} = \frac{600}{L^2} EI \quad k_{33} = \frac{12000}{L^3} EI \quad k_{21} = \frac{600}{L^2} EI \quad k_{34} = -\frac{600}{L^2} EI$$

$$k_{22} = \frac{40}{L} EI \quad k_{44} = \frac{40}{L} EI$$

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12000 & 600L & -12000 & 600L \\ 600L & 40L^2 & -600L & 20L^2 \\ -12000 & -600L & 12000 & -600L \\ 600L & 20L^2 & -600L & 40L^2 \end{bmatrix}$$

Eleman rijitlik matrisi elde edilmiştir. Eleman geometrik yük matrisinin bulunması;

$$w' = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

$$\{\beta\} = [G]\{a\} \quad , \quad \{\beta\} = [G][B]\{d\} \quad , \quad [G] = [0, 1, 2x, 3x^2]$$

$$[n_e] = \int_0^{L/10} [B]^T [G]^T [G][B] dx$$

$$[n_e] = \int_0^{L/10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{300}{L^2} & \frac{2000}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{20}{L} & \frac{100}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{300}{L^2} & -\frac{2000}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{L} & \frac{100}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{300}{L^2} & -\frac{20}{L} & \frac{300}{L^2} & -\frac{10}{L} \\ \frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} & -\frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(-\frac{600}{L^2}x + \frac{6000}{L^3}x^2\right) & \left(-\frac{1200}{L^2}x^2 + \frac{12000}{L^3}x^3\right) & \left(-\frac{1800}{L^2}x^3 + \frac{18000}{L^3}x^4\right) \\ 0 & \left(1 - \frac{40}{L}x + \frac{300}{L^2}x^2\right) & \left(2x - \frac{80}{L}x^2 + \frac{600}{L^2}x^3\right) & \left(3x^2 - \frac{120}{L}x^3 + \frac{900}{L^2}x^4\right) \\ 0 & \left(\frac{600}{L^2}x - \frac{6000}{L^3}x^2\right) & \left(\frac{1200}{L^2}x^2 - \frac{12000}{L^3}x^3\right) & \left(\frac{1800}{L^2}x^3 - \frac{18000}{L^3}x^4\right) \\ 0 & \left(-\frac{20}{L}x + \frac{300}{L^2}x^2\right) & \left(-\frac{40}{L}x^2 + \frac{600}{L^2}x^3\right) & \left(-\frac{60}{L}x^3 + \frac{900}{L^2}x^4\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{300}{L^2} & -\frac{20}{L} & \frac{300}{L^2} & -\frac{10}{L} \\ \frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} & -\frac{2000}{L^3} & \frac{100}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[n_e] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix}$$

$$n_{11} = \int_0^{L/10} \left[ -\frac{300}{L^2} \left( -\frac{1200}{L^2}x^2 + \frac{12000}{L^3}x^3 \right) + \frac{2000}{L^3} \left( -\frac{1800}{L^2}x^3 + \frac{18000}{L^3}x^4 \right) \right] dx$$

$$= \left[ -\frac{300}{L^2} \left| -\frac{1200}{L^2} \frac{x^3}{3} + \frac{12000}{L^3} \frac{x^4}{4} \right|_0^{\frac{L}{10}} + \frac{2000}{L^3} \left| -\frac{1800}{L^2} \frac{x^4}{4} + \frac{18000}{L^3} \frac{x^5}{5} \right|_0^{\frac{L}{10}} \right]$$

$$= \left[ -\frac{300}{L^2} \left( -\frac{1200}{3L^2} \frac{L^3}{1000} + \frac{12000}{4L^3} \frac{L^4}{10000} \right) + \frac{2000}{L^3} \left( -\frac{1800}{4L^2} \frac{L^4}{10000} + \frac{18000}{5L^3} \frac{L^5}{100000} \right) \right] = \frac{12}{L}$$

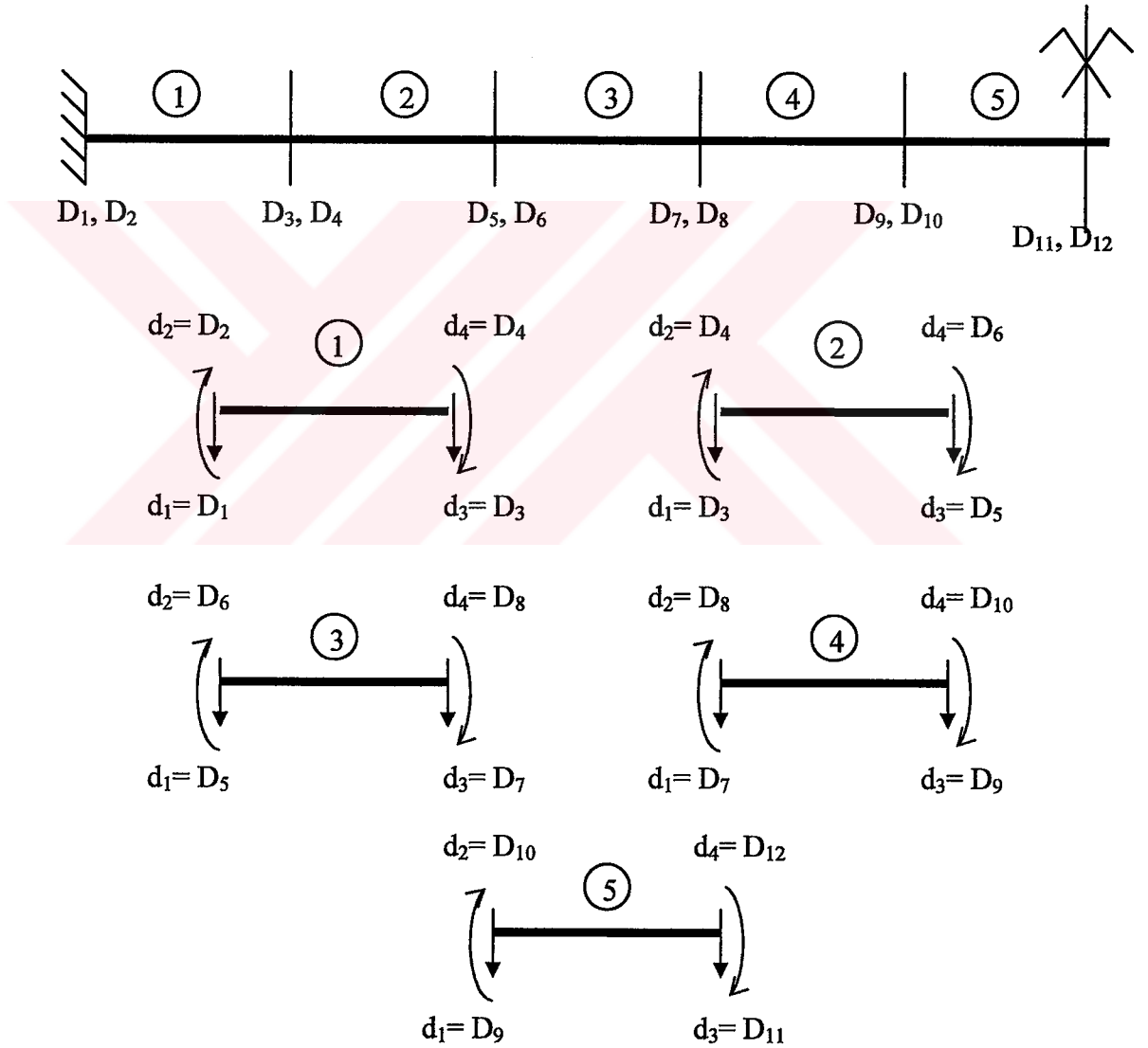
$$n_{12} = \frac{1}{10} \quad , \quad n_{23} = -\frac{1}{10}$$

$$n_{13} = -\frac{12}{L} \quad , \quad n_{24} = -\frac{L}{300} \quad , \quad n_{21} = \frac{1}{10} \quad , \quad n_{34} = -\frac{1}{10}$$

$$n_{14} = \frac{1}{10} \quad , \quad n_{33} = \frac{12}{L} \quad , \quad n_{22} = \frac{L}{75} \quad , \quad n_{44} = \frac{L}{75}$$

$$[n_e] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 12 & \frac{L}{10} & -12 & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} \\ -12 & -\frac{L}{10} & 12 & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} \end{bmatrix}$$

Eleman rijitlik matrisini ve eleman geometrik yük matrisini çevirme matrisleriyle çarparak sistem rijitlik ve sistem geometrik yük matrisini hesaplayalım.



Birinci eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}$$

$$[C_{el}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İkinci eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}$$

$$[C_{e2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Üçüncü eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}$$

$$[C_{e3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dördüncü eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}$$

$$[C_{e4}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beşinci eleman için çevirme matrisi :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}$$

$$[C_{e5}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemin rijitlik ve geometrik yük matrislerinin hesabı;

$$[K_{e1}] = [C_{e1}]^T [k_e] [C_{e1}]$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12000 & 600L & -12000 & 600L \\ 600L & 40L^2 & -600L & 20L^2 \\ -12000 & -600L & 12000 & -600L \\ 600L & 20L^2 & -600L & 40L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[illegible]

$$[K_{e2}] = [C_{e2}]^T [k_e] [C_{e2}]$$

$$[K_{e2}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12000 & 600L & -12000 & 600L \\ 600L & 40L^2 & -12000L & 20L^2 \\ -12000 & -600L & 12000 & -600L \\ 600L & 20L^2 & -600L & 40L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[illegible]

$$[K_{e3}] = [C_{e3}]^T [k_e] [C_{e3}]$$

$$[K_{e3}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12000 & 600L & -12000 & 600L \\ 600L & 40L^2 & -600L & 20L^2 \\ -12000 & -600L & 12000 & -600L \\ 600L & 20L^2 & -600L & 40L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[illegible]

$$[K_{e4}] = [C_{e4}]^T [k_e] [C_{e4}]$$



$$[K_{es}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12000 & 600L & -12000 & 600L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600L & 40L^2 & -600L & 20L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & -600L & 12000 & -600L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600L & 20L^2 & -600L & 40L^2 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e1}] = [C_{e1}]^T [n_e] [C_{e1}]$$

$$[N_{e1}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & \frac{L}{10} & -12 & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} \\ -12 & -\frac{L}{10} & 12 & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e1}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 12 & \frac{L}{10} & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -\frac{L}{10} & 12 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e2}] = [C_{e2}]^T [n_e] [C_{e2}]$$

$$[N_{e2}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & \frac{L}{10} & -12 & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} \\ -12 & -\frac{L}{10} & 12 & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e2}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & \frac{L}{10} & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 12 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_{e3}] = [C_{e3}]^T [n_e] [C_{e3}]$$

$$[N_{e3}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & \frac{L}{10} & -12 & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} \\ -12 & -\frac{L}{10} & 12 & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



[illegible]

$$[N_{e5}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 12 & \frac{L}{10} & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -\frac{L}{10} & 12 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \frac{L}{10} & -12 & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 12 & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} \end{bmatrix}$$

Sistemin rijitlik matrisi :

$$[K] = [K_{e1}] + [K_{e2}] + [K_{e3}] + [K_{e4}] + [K_{e5}]$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12000 & 600L & -12000 & 600L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 600L & 40L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 600L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 600L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 600L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 600L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & -600L & 12000 & -600L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600L & 20L^2 & -600L & 40L^2 \end{bmatrix}$$

Sistemin geometrik yük matrisi :

$$[N] = [N_{e1}] + [N_{e2}] + [N_{e3}] + [N_{e4}] + [N_{e5}]$$

$$[N] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 12 & \frac{L}{10} & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 12 & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\partial^2 V)}{\partial D_s} = 0 \quad \text{dan;} \quad ([K] - P[N])\{D_s\} = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12000 & 600L & -12000 & 600L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 600L & 40L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 600L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 600L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 600L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 600L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & -600L & 12000 & -600L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600L & 20L^2 & -600L & 40L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix} =$$

$$P \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 12 & \frac{L}{10} & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 12 & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix} = 0$$

Sınır şartları ve kritik yükün hesabı;

$$x = 0 \text{ 'da ; } w = 0 \rightarrow D_1 = 0$$

$$x = 0 \text{ 'da ; } w' = 0 \rightarrow D_2 = 0$$

$$x = \frac{L}{2} \text{ 'de ; } w' = 0 \rightarrow D_{12} = 0$$

Deplasman parametrelerinin sıfır olduğu yerlerde satır ve sütun silinip bir koyarsak;

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24000 & 0 & -12000 & 600L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 600L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 600L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 20L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & -600L & 24000 & 0 & -12000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600L & 20L^2 & 0 & 80L^2 & -600L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & -600L & 12000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$P \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 24 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{300} & 0 & \frac{2L^2}{75} & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -\frac{L}{10} & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (24000D_3 - 12000D_5 + 600LD_6) - P \frac{1}{L} \left( 24D_3 - 12D_5 + \frac{L}{10} D_6 \right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (80L^2 D_4 - 600LD_5 + 20L^2 D_6) - P \frac{1}{L} \left( \frac{2L^2}{75} D_4 - \frac{L}{10} D_5 - \frac{L^2}{300} D_6 \right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (-12000D_3 - 600LD_4 + 24000D_5 - 12000D_7 + 600LD_8)$$

$$- P \frac{1}{L} \left( -12D_3 - \frac{L}{10} D_4 + 24D_5 - 12D_7 + \frac{L}{10} D_8 \right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3} (600LD_3 + 20L^2 D_4 + 80L^2 D_6 - 600LD_7 + 20L^2 D_8)$$

$$- P \frac{1}{L} \left( \frac{L}{10} D_3 - \frac{L^2}{300} D_4 + \frac{2L^2}{75} D_6 - \frac{L}{10} D_7 - \frac{L^2}{300} D_8 \right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}(-12000D_5 - 600LD_6 + 24000D_7 - 12000D_9 + 600LD_{10})$$

$$-P\frac{1}{L}\left(-12D_5 - \frac{L}{10}D_6 + 24D_7 - 12D_9 + \frac{L}{10}D_{10}\right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}(600LD_5 + 20L^2D_6 + 80L^2D_8 - 600LD_9 + 20L^2D_{10})$$

$$-P\frac{1}{L}\left(\frac{L}{10}D_5 - \frac{L^2}{300}D_6 + \frac{2L^2}{75}D_8 - \frac{L}{10}D_9 - \frac{L^2}{300}D_{10}\right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}(-12000D_7 - 600LD_8 + 24000D_9 - 12000D_{11})$$

$$-P\frac{1}{L}\left(-12D_7 - \frac{L}{10}D_8 + 24D_9 - 12D_{11}\right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}(600LD_7 + 20L^2D_8 + 80L^2D_{10} - 600LD_{11})$$

$$-P\frac{1}{L}\left(\frac{L}{10}D_7 - \frac{L^2}{300}D_8 + \frac{2L^2}{75}D_{10} - \frac{L}{10}D_{11}\right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}(-12000D_9 - 600LD_{10} + 12000L^2D_{11}) - P\frac{1}{L}\left(-12D_9 - \frac{L}{10}D_{10} + 12D_{11}\right) = 0$$

(Δ) determinantını sıfır yapan kritik yükün bulunması;

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{EI}{L^2} 24000 - 24P\right) & 0 & \left(-\frac{EI}{L^2} 12000 + 12P\right) & \left(\frac{EI}{L} 600 - \frac{PL}{10}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(EI 80 - \frac{2PL^2}{75}\right) & \left(-\frac{EI}{L} 600 + \frac{PL}{10}\right) & \left(\frac{EI 20}{L} + \frac{PL^2}{300}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{EI}{L^2} 12000 + 12P\right) & \left(-\frac{EI}{L} 600 + \frac{PL}{10}\right) & \left(\frac{EI}{L^2} 24000 - 24P\right) & \left(-\frac{EI}{L} 12000 + 12P\right) & \left(\frac{EI}{L} 600 - \frac{PL}{10}\right) & 0 & 0 \\ \left(\frac{EI}{L} 600 - \frac{PL}{10}\right) & \left(EI 20 + \frac{PL^2}{300}\right) & 0 & \left(EI 80 - \frac{2PL^2}{75}\right) & \left(\frac{EI 20}{L} + \frac{PL^2}{300}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{EI}{L^2} 12000 + 12P\right) & \left(-\frac{EI}{L} 600 + \frac{PL}{10}\right) & \left(-\frac{EI}{L^2} 12000 + 12P\right) & \left(\frac{EI}{L} 600 - \frac{PL}{10}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{EI}{L} 600 - \frac{PL}{10}\right) & 0 & \left(\frac{EI}{L} 600 - \frac{PL}{10}\right) & \left(\frac{EI 20}{L} + \frac{PL^2}{300}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

yukarıdaki determinantın çözümünden kritik yük ;

$$P_{kr} = \frac{39,4867EI}{L^2}$$

olarak bulunur ;

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \approx \frac{39,4784EI}{L^2}$$

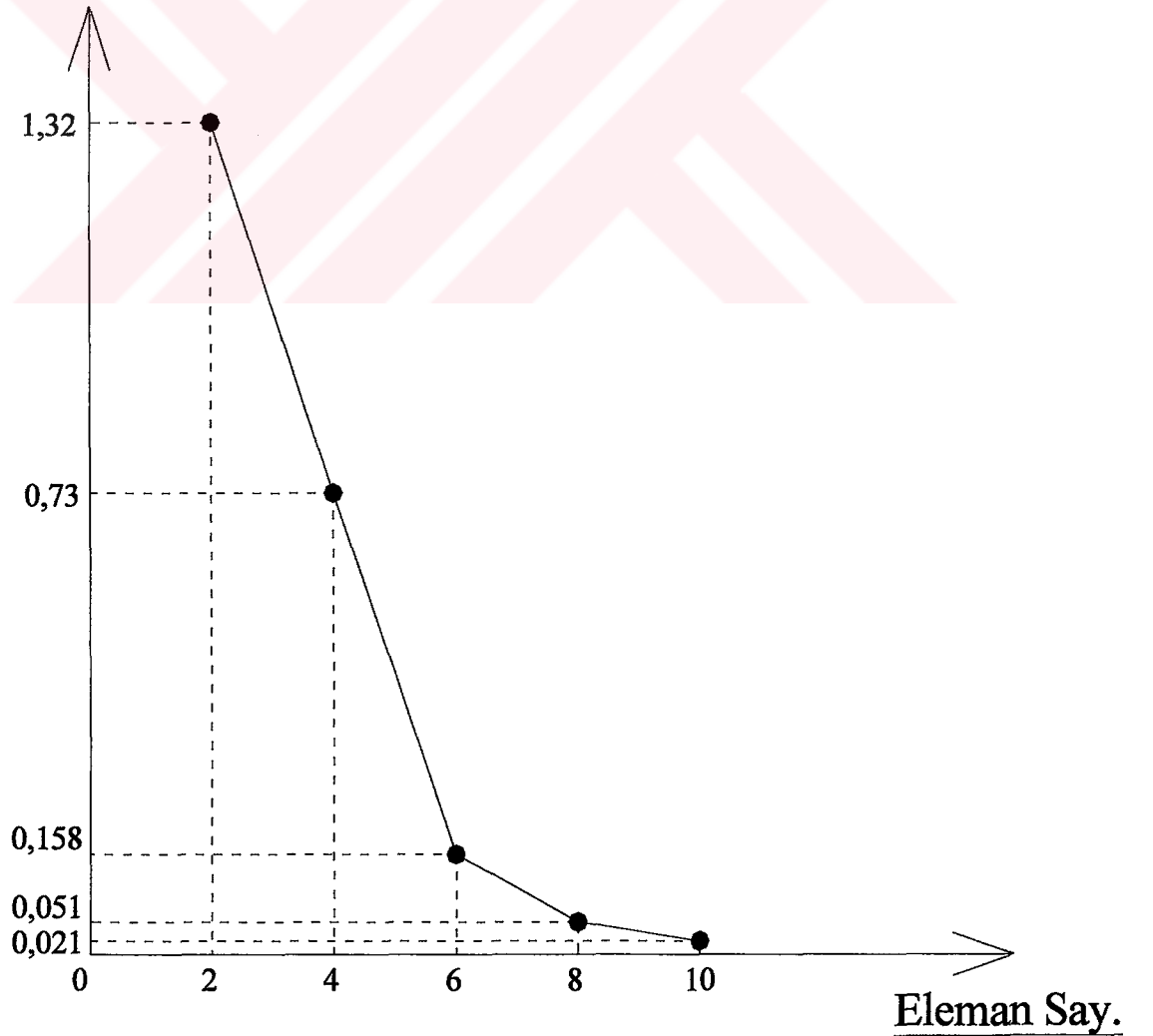
Hata oranı %0.21 ‘dir.

## 5. SONUÇLAR

Daha önceden de bahsi geçtiği üzere sonlu elemanlar metodunda, sistemin ayrıldığı sonlu sayıdaki elemanın çokluğu hata oranını belirgin bir şekilde azaltmakta; bununla beraber çözüm süresi artmaktadır. Önceki bölümde bulunan hata oranlarından karşılaştırmalı bir grafiğinin çizilmesi ile eleman sayısındaki artışla beraber hata oranlarının nasıl azaldığını görmek mümkün olur.

| Eleman Sayısı  | 2    | 4    | 6     | 8     | 10    |
|----------------|------|------|-------|-------|-------|
| Hata Oranı (%) | 1,32 | 0,73 | 0,158 | 0,051 | 0,021 |

Hata Oranı (%)



Şekil 5.1

Şekil 5.1 'den görülebileceği üzere sistemin belli sayının üzerinde elemana ayrılması, hassasiyet üzerinde kritik bir rol oynamamakla birlikte çözüme ulaşma yolunda işlem miktarının artmasına yol açmaktadır. Çubuk sistemlerin elle çözümünde optimum sonlu eleman sayısı olarak bir rakam belirlemek gerekirse, işlem miktarı-makul hata oranı karşılaştırması bakımından altı rakamı seçilebilir. Bu takdirde elle çözüm için hata oranları bakımından oldukça tatminkar bir sonuç elde edilmesinin yanı sıra işlem çokluğu, dolayısıyla sonuca ulaşma zamanı bakımından elverişli bir yol seçilmiş olunacaktır. Grafik, altı eleman sayısından sonra yatay düzlemle arasındaki açığı gözle görülür bir şekilde azaltmaya başlamaktadır.

Bir başka önemli sonuç ise sonlu elemanlar tekniği ile bulunan  $P_{kr}$  değerinin daima, kesin yöntemle (denge yöntemi) bulunan  $P_{kr}$  değerinden büyük oluşudur. Bu gibi durumlarda sonuç üstten yaklaşık denilir. Sonlu elemanlar tekniği, üstten yaklaşık bir metot olması itibari ile daima güvenli tarafta olunmasını sağlar.



## KAYNAKLAR

Bolotin, V.V, (1963), Non-conservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, Elmsford.

Bresler, B., (1960), Design Criteria for R.C. Columns Under Axial Load and Biaxial Bending, Journal of ACI, Vol. 57.

Brush O., Almroth O., (1975), Bucling of Bars Plates and Shells, Mc Graw-Hill.

Çokça, E., (1984), Strength of R/C Columns Under Biaxial Bending, M.S. Thesis, METU.

Gallagher, R.H., (1975), Finite Element Analysis, Prentice-Hall.

İnan, M., (1967), Cisimlerin Mukavemeti, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.

Köksal, E. ve Köksal, T., (1996), Çubuk Plak Kabuk Stabilitesi, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, 309, İstanbul.

Köksal, T., (1995), Sonlu Elemanlar Metodu, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, 304, İstanbul.

Köksal, E. ve Köksal, M.K., (2003), Kabuk ve Plakların Statik Stabilite ve Dinamik Analizi, Literatür Yayınları, 107, İstanbul.

Meek, J., (1963), Ultimate Strength of Columns with Biaxially Eccentric Loads, Journal of ACI, Vol. 60, No. 8.

Pflüger, A., (1970), Elastığın Stabilite Problemleri, İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi, Çeviri, İstanbul.

Zienkiewicz, O.C., (1971), The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw-Hill.

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi 02.11.1978

Doğum yeri İstanbul

Lise 1989-1995 Fenerbahçe Lisesi

Lisans 1996-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fak.  
İnşaat Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2002-2004 Yıldız Teknik Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

**Çalıştığı kurumlar**

2001-Devam ediyor Boğaziçi Üniv. Müşv., Kontr. ve Proje Hizmetleri

