

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Spline Fonk. ile İnt. Den. Say. Çöz.

Yüksek Lisans Tezi

İşim Genç

1990



209

83

T.C.  
YILDIZ UNIVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTUSU

mat

10.0000

SPLINE FONKSİYONLARI İLE  
İNTEGRAL DENKLEMLERİN  
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İşim GENÇ

İSTANBUL - 1990

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON  
DAİRE BAŞKANLIĞI

|              |                    |
|--------------|--------------------|
| Kot          | R 209<br>83        |
| Alındığı Yer | Fen Bilimleri Eas. |
| Tarih        | 17.03.1992         |
| Fatura       |                    |
| Fiyatı       | 10.000.-TL         |
| Ayniyat No   | 1/1                |
| Kayıt No     | 48199              |
| UDC          | 510                |
| Ek           |                    |





T.C.  
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



SPLİNE FONKSİYONLARI İLE  
İNTEGRAL DENKLEMLERİN  
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İşim GENÇ



İSTANBUL - 1990



## T E S E K K Ü R

Görev bilincini tüm mesuliyetleri ile tanıtarak ödevime gereken itinaları göstermekten kaçınmayan çok değerli hocam Prof. Dr. Behiç ÇAĞAL 'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ödevime gereken ilgiyi gösteren sevgili aileme, paylaşmayı ve ortak çalışmayı sağlayan arkadaşlarım Arş.Gör. Nazan ÇAĞLAR ve Arş.Gör. Aydın DEMİRİZ 'e ayrıca teşekkür ederim.

Işım GENÇ

Haziran - 1990



## İÇİNDEKİLER

|               |       |                                                        |
|---------------|-------|--------------------------------------------------------|
| Yüksek lisans | GİRİŞ | İlk olarak hazırlanan bu çalışma İkinci Çeşit Fredholm |
| BÖLÜM 1       | -     | Integral Denklem Nedir? olarak çözmeyi amaçlar. Bu     |
| BÖLÜM 2       | -     | İkinci Çeşit Integral Denklemlerin Çözümü İçin         |
|               |       | Sayısal Yöntemler.                                     |
| İlk           | 2.1   | İteratif Yöntem                                        |
| sinif         | 2.2   | Örnek Problem                                          |
|               | 2.3   | Neumann Serileri (Veya Tekrarlı Fonksiyonlar)          |
| İkinci        | 2.4   | Örnek Problem                                          |
| örnek         | 2.5   | Sonlu Fark Yöntemleri                                  |
| Sonlu         | 2.6   | Örnek Problem                                          |
| BÖLÜM 3       | -     | Kübik Ara Enterpolasyon (Spline) Fonksiyonları         |
| İkinci        | 3.1   | Tanım                                                  |
| Kullan        | 3.2   | Momentler Yardımıyla Kübik Ara Enterpolasyon           |
| Fonks         |       | Polinomunun Bulunması                                  |
| ifade         | 3.3   | Birinci Türevler Yardımıyla Kübik Ara                  |
| Dördüncü      |       | Enterpolasyon Polinomunun Bulunması                    |
| BÖLÜM 4       | -     | Spline Fonksiyonları ile Yaklaşık Integral             |
| BÖLÜM 5       | -     | Spline Fonksiyonları ile İkinci Çeşit Fredholm         |
| Integral      |       | Integral Denklemlerin Çözülmesi                        |
| Denklemin     |       | Bir denklem sistemine dönüştürülerek nasıl             |
| çözül         | 5.1   | Giriş                                                  |
| ayrın         | 5.2   | Örnek Problem                                          |
| da            | 5.3   | Algoritma                                              |
| BÖLÜM 6       | -     | Genel Sonuç                                            |



## Ö Z E T

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma ikinci Çeşit Fredholm Denklemlerini Kübik Ara Enterpolasyon (Spline) Fonksiyonları yardımı ile sayısal olarak çözmeyi amaçlar. Bu konuda geliştirilmiş diğer yöntemlerin örnekleriyle birlikte verildiği bu çalışmam başlıca altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm Integral Denklemlerin kısa bir tanımı ve sınıflandırılmalarını içerir.

İkinci Çeşit Fredholm Denklemlerinin, başta iteratif yöntem olmak üzere, Neumann Serileri (Veya Tekrarlı Fonksiyonlar) ve Sonlu Fark Yöntemi ile nasıl çözüldüğü örnekleriyle birlikte ikinci bölümde ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

İkinci Çeşit Fredholm Integral Denkleminin çözümü için kullanmayı amaçladığım Kübik Ara Enterpolasyon (Spline) Fonksiyonunun Momentler ve Birinci Türevler yardımıyla nasıl ifade edildiği ise üçüncü bölümde verilmiştir.

Dördüncü bölüm de Birinci Türevler yardımıyla bulunan Kübik Ara Enterpolasyon fonksiyonları ile bir integralin yaklaşık hesabı gösterilmiştir.

Önceki bölümde Spline fonksiyonu ile bulunan yaklaşık integral hesabı kullanılarak ikinci Çeşit Fredholm Integral Denkleminin bir denklem sistemine dönüştürülerek nasıl çözülebileceği beşinci bölümde verilmiştir. Ayrıca bu bölümde ayrıntılı bir örnekle birlikte yöntemin bilgisayar uygulaması da hazırlanmıştır.

Son bölümde ise çalışmanın ana hatlarıyla ne şekilde sonuçlandığını ve bu algoritmanın diğer algoritmalara göre ne gibi farklılıklar yada benzerlikler gösterdiği anlatılmıştır.



## S U M M A R Y

This study, which has been prepared as a master degree thesis, purposes to solve The Second Type of Fredholm Integral Equation by means of Piecewise Cubic Polynomials. The different methods developed in this field are presented in this study with their examples, consists of six chapters.

The first chapter contains the brief definition of Integral Equations and the classification of them.

In the second chapter is detaily explained how to solve Integral Equations by firstly Iterative Methods, Nuemann Series (or Rekursive Functions) and Finite Difference Methods with their examples.

In the third chapter is given how to explain The Piecewise Cubic Polynomials that I purposed to use for solving Second Type Fredholm Integral Equations, by using First and Second Derivatives.

In the fourth chapter is shown an approximate solution of an integral by using Piecewise Cubic Polynomials obtained with Fist Derivatives.

How to turn The Second Type Fredholm Integral Equations into an equation system, with approximate solution of an integral obtained in the previous chapter and the way to solve the system are given in the fifth chapter. Furthermore, detailed example together with its computer programme is placed in this chapter.

The last chapter indicates the result of main points of this study and shows differences or similarities of the algorithm, according to the other algorithms.



# İNTEGRAL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tanım: Bu kitap, integral denklemlerinin nümerik çözüm yöntemlerini içeren bir el kitabıdır.

## G İ R İ Ş

Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan problemlerin genel olarak birbiri ile yakın ilişkileri bulunan iki çözüm yolu vardır. Bunlar teorik ve deneysel çalışmalardır. Bilim ve teknikteki gelişmeler ile birlikte karşılaşılan problemlerin karmaşıklığı, teorik yollarla çözümü güçleştirmekte çoğu kez çözüm bu yolla bulunamamaktadır. Bu durumda problemi deneysel çalışmalarda olduğu gibi kesikli değerlerle çözmek yararlı olur. İşte bu yöntem nümerik analiz metodu olarak adlandırılır.

Aynı şekilde integral denklem problemlerinin çözümü için de iki genel yaklaşımdan söz edilebilir. Bunlardan birincisi analitik yaklaşım olup seriler, dönüşümler, özel fonksiyonları içerir. İkinci yaklaşım nümerik yaklaşımdır ve birincisinden daha geneldir. Integral denklemlerin teorik yöntemle çözümleri için genel bir inceleme mevcuttur. Ancak teoriden kaynaklanan, çözümü zorlaştıran etkenler bu tür denklemler için de söz konusudur ve bunları gidermede sayısal çözümlemeye gerek duyulur. Ayrıca bilgisayarlardaki hızlı gelişme de araştırmacıları sayısal çözümlemeye yöneltmiştir.

Integral denklemlerin sayısal çözümleri üzerine çok fazla yöntem geliştirilmemiştir. Ancak sadece pratik olan birkaç yöntem kullanılmaktadır. Kübik Ara Enterpolasyon (Spline) fonksiyonları ile integral denklem çözümünün diğer yöntemlerle benzer özellikler gösterdiğini ve iyi yaklaşım sağladığı gösterilmeye çalışılacaktır.

sekindir. Bu kitap, integral denklemlerinin nümerik çözüm yöntemlerini içeren bir el kitabıdır.

Integral denklemlerinin nümerik çözüm yöntemlerini içeren bir el kitabıdır. Bu kitap, integral denklemlerinin nümerik çözüm yöntemlerini içeren bir el kitabıdır.

Integral denklemlerinin nümerik çözüm yöntemlerini içeren bir el kitabıdır. Bu kitap, integral denklemlerinin nümerik çözüm yöntemlerini içeren bir el kitabıdır.



## B Ö L Ü M I I fonksiyonun sadece integral içinde bulunduğu denklemlerdir.

### İNTEGRAL DENKLEM NEDİR ?

**Tanım :** Integral işareti altında bilinmeyen fonksiyon içeren bağıntılara integral denklem denir. Bunlar;

2. Türden Integral Denklem : Bilinmeyen fonksiyonun hem integral içinde bulunduğu denklemlerdir.

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

$$y(x) = \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

gibi denklemlerdir. Burada  $y(t)$  bilinmeyen fonksiyondur.

Integral denklemler çeşitli şekillerde sınıflandırılmaktadır. Genel olarak

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

şeklindeki integral denklemlerdir.  $m(x)=0$  ise denklem 1. türden integral denklem  $m(x)=1$  ise denklem 2. türden integral denklem olur.

integral denklemi gözönüne alınırsa burada  $y(t)$  fonksiyonunun 1.dereceden olması halinde denklem Lineer Integral Denklem adını alır. Eğer

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y^n(t)dt$$

veya

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \phi[x,t;y(t)] dt$$

şeklinde ise denklem Lineer Olmayan (non-linear) Integral Denklem adını alır.

Integral denklemde  $f(x)$  gibi homojenliği bozucu bir fonksiyon bulunmuyorsa integral denkleme Homojen Integral Denklem denir. Aksi taktirde denklem Homojen Olmayan Integral Denklemdir.

Integral denklemlerin yapılarına göre sınıflandırılmasında üç çeşit integral denklemden söz edilir. denklemlerde değişik bir



1.Türden Integral Denklem : Bilinmeyen fonksiyonun sadece integral içinde bulunduğu denklemlerdir.

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

2.Türden Integral Denklem : Bilinmeyen fonksiyonun hem integral içinde hemde dışında bulunduğu denklemlerdir.

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

3.Türden Integral Denklem :

$$\varphi(x)y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

şeklindeki integral denklemlerdir.  $\varphi(x)=0$  ise denklem 1. türden integral denklem  $\varphi(x)=1$  ise denklem 2.türden integral denklem olur.

Integral denklemlerin bir sınıflandırılması da integral sınırlarına göre yapılır. Ne cins olduğuna bakılmaksızın üst sınırı değişken olan

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

gibi denklemlere Volterra Integral Denklemleri denir. Alt ve üst sınırları sabit olan

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

integral denklemi de Fredholm Integral Denklemi adını alır.

Elemanter anlamda integral denklem teorisi daha çok Fredholm Integral Denklem üzerine kurulmuştur.

Tekil olan veya olmayan integral denklemlerde değişik bir sınıflandırma şekli oluştururlar.







## B Ö L Ü M II

İKİNCİ ÇEŞİT İNTEGRAL  
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN  
SAYISAL YÖNTEMLER

## 2.1 İTERATİF YÖNTEM

İkinci çeşit Fredholm denkleminin

$$y(x) = F(x) + \beta \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (2.11)$$

olduğunu varsayalım.  $F(x)$  ve  $K(x,t)$  fonksiyonları sürekli olsunlar. Bir  $y^{(0)}$  yaklaşımını integral işareti altındaki  $y(t)$  fonksiyonuna koyalım. O zaman denklem

$$y^{(1)}(x) = F(x) + \beta \int_a^b K(x,t)y^{(0)}(t)dt$$

şeklinde  $y^{(1)}$  yaklaşımını belirler.  $y^{(1)}$  yaklaşımının denklemin sağ tarafına konulmasıyla  $y^{(2)}$  yaklaşımı elde edilir. Ve işlem ardışık olarak

$$y^{(n)}(x) = F(x) + \beta \int_a^b K(x,t)y^{(n-1)}(t)dt \quad (2.12)$$

formülü ile devam ettirilir. Geriye, ardışık yaklaşımların denklemin sürekli çözümüne nasıl etki ettiğini göstermek kalır.

Bunun için

$$Ty(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (2.13)$$

denklemiyle tanımlı bir integral operatörü tanımlayalım. O zaman integral denklem

$$y(x) = F(x) + \beta Ty(x) \quad (2.14)$$



şeklinde yazılır. Ve ardışık olarak

$$y^{(n)}(x) = F(x) + \beta Ty^{(n-1)}(x) \quad (2.15)$$

olacaktır. Bundan başka;

$$y(x) = F(x) + \beta \int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

$$* \quad y^{(1)}(x) = F(x) + \beta Ty^{(0)}(x)$$

$$y^{(2)}(x) = F(x) + \beta \int_a^b K(x,t) [F(t) + \beta Ty^{(0)}(t)] dt$$

$$y^{(2)}(x) = F(x) + \beta \int_a^b K(x,t)F(t)dt + \beta^2 \int_a^b K(x,t)Ty^{(0)}(t)dt$$

$$* \quad y^{(2)}(x) = F(x) + \beta TF(x) + \beta^2 T^2 y^{(0)}(x)$$

$$y^{(3)}(x) = F(x) + \beta \int_a^b K(x,t) [F(t) + \beta TF(t) + \beta^2 T^2 y^{(0)}(t)] dt$$

$$* \quad y^{(3)}(x) = F(x) + \beta TF(x) + \beta^2 T^2 F(x) + \beta^3 T^3 y^{(0)}(x)$$

bulunur. Ve daha genel olarak

$$y^{(n)}(x) = F(x) + \beta TF(x) + \beta^2 T^2 F(x) + \dots + \beta^{n-1} T^{n-1} F(x) + R_n$$

bulunur ki burada  $R_n = \beta^n T^n y^{(0)}(x)$  olduğu aşıkardır. Böylece  $n \rightarrow \infty$  olurken integral denklemin çözümü;

$$y(x) = F(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k T^k F(x) \quad (2.16)$$

gibi bir sonsuz seri kullanılarak elde edilir.

$R_n(x)$  'in sıfıra yaklaşması halinde gerçekten yukarıdaki denklemin yakınsaklığını ve bu yakınsamanın hangi koşullarda olduğunun ve integral denklemin bir sürekli çözümünün olduğunun gösterilmesi kalır.

$K(x,t)$  ve  $F(t)$ ,  $(a,b)$  aralığında  $x$  ve  $t$  'nin bütün değerleri için sürekli olduklarından bunların büyüklükleri  $(a,b)$  aralığında sınırlıdır. Öyleki  $M$  ve  $m$  iki pozitif sabitler



olmak üzere  $(a, b)$  de

$$|K(x, t)| \leq M, \quad |F(x)| \leq m$$

dir.  $y^{(0)}(x)$  ilk yaklaşım büyüklüğünün de  $(a, b)$  de sınıflandırılmış olduğu varsayılınsın. Yani

$$|y^{(0)}(x)| \leq C$$

bu aralıkta sağlansın. O zaman;

$$|Ty^{(0)}(x)| \leq \left| \int_a^b K(x, t)y^{(0)}(t)dt \right| \leq \int_a^b MC dt = M(b-a)C$$

dir.

Daha genel olarak;

$$|T^n y^{(0)}(x)| \leq M^n(b-a)^n C$$

ve benzeri olarak;

$$|T^n F(x)| \leq M^n(b-a)^n C$$

bulunur.  $R_n(x) = \beta^n T^n y^{(0)}(x)$  idi. O halde

$$|R_n(x)| \leq |\beta|^n M^n(b-a)^n C$$

olur.  $n \rightarrow \infty$  iken  $R_n(x) \rightarrow 0$  olur ki bu da

$$|\beta| < \frac{1}{M(b-a)} \quad (2.17)$$

ise gerçekleşir.

Bundan başka

$$|F(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\beta|^n |T^n F(x)|$$

serileri

$$m \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |\beta|^n M^n(b-a)^n \right] = s.b.t.$$

serileri ile dominanttır.  $\beta$  yukarıdaki koşulu sağladığında geometrik seriler yakınsak olduğundan

$$y(x) = F(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k T^k F(x)$$

serisi de  $(a, b)$  aralığında mutlak yakınsaktır ve  $y^{(0)}(x)$  çözümünden bağımsız olduğundan çözüm tektir.



## 2.2 ÖRNEK

$$y(x) = 1 + \beta \int_0^1 (1-3xt)y(t)dt \quad \text{Fredholm denklemini}$$

çözelim.  $y^{(0)}(x)=1$  olmak üzere;

$$y^{(1)}(x) = \int_0^1 (1-3xt)y^{(0)}(t)dt$$

$$Ty^{(0)}(x) = \int_0^1 (1-3xt)y^{(0)}(t)dt$$

$$Ty^{(0)}(x) = \int_0^1 (1-3xt)dt$$

$$= t - \frac{3}{2} xt^2 \Big|_0^1 = 1 - \frac{3}{2} x$$

$$Ty^{(1)}(x) = \int_0^1 (1-3xt)\left(1 - \frac{3}{2} t\right)dt$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2} t - 3xt + \frac{9}{2} xt^2\right)dt$$

$$= \left| t - \frac{3}{4} t^2 - \frac{3}{2} xt^2 + \frac{9}{6} xt^3 \right|_0^1$$

$$= 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} x + \frac{9}{6} x$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$Ty^{(2)}(x) = \int_0^1 \frac{1-3xt}{4} dt$$



## 2.3 NEUMANN SERİLERİ (VEYA TEKRARLI FOMÜLLER)

$$= \left| \frac{t}{4} - \frac{3}{8} x t^2 \right|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} x$$

$$y(x) = \frac{1}{4} \cdot \left( 1 - \frac{3}{2} x \right)$$

şeklinde sürdürülür. Ve sonuç olarak;

$$y(x) = 1 + \beta [Ty^{(0)}(x) + \beta Ty^{(1)}(x) + \beta^2 Ty^{(2)}(x) + \dots]$$

$$Ty(x) = \int_0^1 K(x,t)y(t)dt$$

$$= 1 + \beta \left[ \left( 1 - \frac{3}{2x} \right) + \frac{\beta}{4} + \frac{\beta^2}{4} \left( 1 - \frac{3}{2x} \right) + \dots \right]$$

Integral operator

$$= \left[ 1 + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{16} + \dots \right] \left[ 1 + \beta \left( 1 - \frac{3}{2x} \right) \right]$$

$$Ty(x) = \dots$$

yazılır.

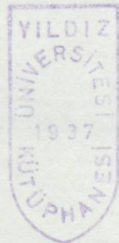
Burada birinci çarpan geometrik seridir ve  $|\beta| < 2$  olduğunda yakınsaktır. Bu serinin toplamı;

$$1 + \left[ \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{16} + \dots \right] \quad a=1, \quad q = \frac{\beta^2}{4}, \quad S_n = \frac{1}{1 - \beta^2/4}$$

gibidir. Ki, o zaman sonuç;

$$y(x) = \frac{4}{4 - \beta^2} \left[ 1 + \beta \left( 1 - \frac{3}{2x} \right) \right]$$

gibi olur.





## 2.3 NEUMANN SERİLERİ (VEYA TEKRARLI FONKSİYONLAR)

$$Ty(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

$$y(x) = F(x) + \beta \int_a^b K(x,t)y(t) dt$$

olduğu kolayca görülür. Burada  $K_n(x,t)$  n. tekrarlı çekirdektir ve

Fredholm integral denkleminde

$$Ty(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

$K_1(x,t) = K(x,t)$  ardışık tekrar bağıntısı ile tanımlanmıştır. Ayrıca  $K(x,t)$  çekirdek fonksiyonu  $(a,b)$  aralığında  $|K(x,t)| \leq M$  olacak şekilde sınırlı ise  $\beta$  zaman  $(a,b)$  integral operatörünü kullanalım. O halde;

$$T^2y(x) = \int_a^b K(x,t_1) Ty(t_1) dt_1$$

$$y(x) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n T^n F(x)$$

$$= \int_a^b K(x,t) \left[ \int_a^b K(t_1,t)y(t)dt \right] dt_1$$

integral denklemdir. Böylece çözüm

$$y(x) = F(x) + \int_a^b \left[ \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t)dt_1 \right] y(t)dt$$

çıkar.

veya

Parantez içindeki ifade tekrarlı olarak,

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,t_1)K_1(t_1,t)dt_1$$

bağıntısı ile tanımlanmış ise o zaman önceki denklem,

$$T^2y(x) = \int_a^b K_2(x,t)y(t)dt$$

(2.32)

halini alır. Bu işlem tekrarlanarak  $K_n(x,t)$  fonksiyonu rekürsif olarak bulunur.



$$T^n y(x) = \int_a^b K_n(x,t) y(t) dt$$

olduğu kolayca görülür. Burada  $K_n(x,t)$  n. tekrarlı çekirdektir ve

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,t_1) K_{n-1}(t_1,t) dt_1 \quad ; n=2,3,4\dots$$

$K_1(x,t)=K(x,t)$  ardışık tekrar bağıntısı ile tanımlanmıştır. Ayrıca  $K(x,t)$  çekirdek fonksiyonu  $(a,b)$  aralığında  $|K(x,t)| \leq M$  olacak şekilde sınırlı ise o zaman  $(a,b)$  aralığında  $x,t$  değerleri için

$$K_n(x,t) \leq M^n (b-a)^{n-1}$$

çıkar. Bilindiği gibi;

$$y(x) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n T^n F(x)$$

integral denklemin  $|\beta| < \frac{1}{M \cdot (b-a)}$  için bir çözümüdür.

Böylece çözüm;

$$y(x) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \int_a^b K_n(x,t) F(t) dt$$

veya

$$y(x) = F(x) + \beta \int_a^b \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n K_n(x,t) \right] F(t) dt$$

olur.  $G(x,t;\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n K_{n+1}(x,t)$  Neumanmn Serileri (2.31)

den,

$$y(x) = F(x) + \beta \int_a^b G(x,t;\beta) F(t) dt \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $G(x,t,\beta)$  fonksiyonu reciprokal veya çözücü çekirdek olarak bilinir.



## 2.4 ÖRNEK

$$y(x) = 1 + \beta \int_0^1 (1-3xt)y(t)dt \quad \text{Fredholm denklemini}$$

çözelim.  $\beta=1$

$$K_1(x,t) = K(x,t) = 1-3xt$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 (1-3xt_1)(1-3t_1t)dt_1$$

$$= \int_0^1 (1 - 3tt_1 - 3xt_1 + 9xtt_1^2) dt_1$$

$$= \left[ t_1 - \frac{3}{2}tt_1^2 - \frac{3}{2}xt_1^2 + 3xtt_1^3 \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}x + 3xt$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 (1-3xt_1) \left( 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}t_1 + 3tt_1 \right) dt_1$$

$$= \frac{1}{4} (1-3xt)$$

$$K_4(x,t) = \frac{1}{4} \int_0^1 (1-3xt_1)(1-3tt_1) dt_1$$

$$= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}x + 3xt \right)$$

$$K_5(x,t) = \frac{1}{4} \int_0^1 (1-3xt_1) \left( 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}t_1 + 3tt_1 \right) dt_1$$

$$= \frac{1}{16} (1-3xt)$$



$$G(x, t; \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n K_{n+1}(x, t)$$

$$= K_1(x, t) + \beta K_2(x, t) + \beta^2 K_3(x, t) + \beta^3 K_4(x, t) + \dots$$

$$= 1 - 3xt + \beta \left( 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}x + 3xt \right) + \frac{\beta^2}{4} (1 - 3xt) + \dots$$

$$= \left[ 1 - 3xt + \beta \left( 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}x + 3xt \right) \right] \left( 1 + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{16} + \dots \right)$$

olarak bulunur. Burada 2. çarpan kuvvet serisidir ve toplamı

$\frac{1}{1 - \beta^2/4}$  olacaktır. Buradan;

$$G(x, t; \beta) = \frac{1 - 3xt + \beta \left( 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}x + 3xt \right)}{1 - \frac{\beta^2}{4}}$$

bulunur.

$$y(x) = F(x) + \beta \int_a^b G(x, t; \beta) F(t) dt$$

denkleminde yerine yazılırsa;

$$y(x) = 1 + \beta \int_a^b \left[ 1 - 3xt + \beta \left( 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}x + 3xt \right) \right] / \left( 1 - \frac{\beta^2}{4} \right) dt$$

$$= \left| 1 + \frac{4\beta}{4 - \beta^2} \left[ t - \frac{3}{2}xt^2 + \beta \left( t - \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}xt + \frac{3}{2}xt^2 \right) \right] \right|_0^1$$

$$= \frac{4 + 2\beta(2 - 3x)}{4 - \beta^2}$$

bulunur.



## 2.5 SONLU FARK YÖNTEMLERİ : Bilindiği gibi

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \text{şeklindeki bir integrale} \quad I = \sum_{i=1}^n d_i f(x_i)$$

şeklindeki bir toplamla yaklaşılr. Burada  $d_i$  ler  $x_i$  noktalarının seçilişine göre verilmiş katsayıları belirtir.  $x_1=a$  ve  $x_n=b$  noktaları belirli ve alt aralıklara ayrılmış yani  $h=(b-a)/n$  ise o zaman trapez kuralı

$$[d_1, d_2, \dots, d_n] = h \left[ \frac{1}{2}, 1, 1, \dots, 1, \frac{1}{2} \right] \quad (2.51)$$

şeklinde katsayıları verir.  $n$  çift ise trapez kuralı uygulanabilir ki o zaman katsayılar

$$[d_1, d_2, \dots, d_n] = h [1, 4, 2, 4, \dots, 2, 4, 1]$$

şeklinde dir. Aynı yolla

$$y(x) = F(x) + \beta \int_a^b K(x,t)y(t) dt \quad (2.52)$$

integral denkleminde  $x_i$  noktaları  $(a,b)$  aralığında  $n$  tane uygun seçilmiş nokta olmak üzere

$$y(x) = F(x) + \beta \sum_{i=1}^n d_i K(x, x_i) y(x_i) \quad (2.53)$$

şeklinde yaklaşılabılır.

Şimdi seçilmiş  $n$  tane noktanın herbirinde yukarıdaki denklemin iki tarafının eşit olması gerektiğinden

$$y(x_i) = F(x_i) + \beta \sum_{j=1}^n d_j K(x_i, x_j) y(x_j) \quad j=1(1)n \quad (2.54)$$

gibi  $n$  tane lineer denklem elde edilir ki bunlar  $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n)$  gibi  $n$  tane bilinmeyen içerirler.  $y(x_i)$ 'ler  $n$  tane noktada bilinmeyen fonksiyonun yaklaşık değerleridir.

$$\begin{aligned} y_i &= y(x_i) \\ f_i &= F(x_i) \\ k_{ij} &= K(x_i, x_j) \end{aligned}$$



alalım. O zaman son denklem

$$y_i = f_i + \beta \sum_{j=1}^n k_{ij} d_j y_j \quad ; i=1(1)n \quad (2.55)$$

veya matris notasyonunda

$$Y = F + \beta K.D.Y \quad (2.56)$$

yazılır. Buradan gerekli denklem sistemleri

$$[I - \beta K.D].Y = F \quad (2.57)$$

şeklini alacaktır.

2.6 ÖRNEK Bu yaklaşıma ait algoritma şöyle kullanılır;

$$y(x) = x + \int_0^1 K(x,t)y(t)dt$$

integral denkleminde çekirdek fonksiyon,

$$K(x,t) = \begin{cases} x < t & x(1-t) \\ x > t & t(1-x) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Gerçek çözüm;

$$y(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} \quad \text{dir.}$$

[0,1] aralığını eşit uzunluklu 5 alt aralığa bölelim.

$$x_1=0, x_2=\frac{1}{4}, x_3=\frac{1}{2}, x_4=\frac{3}{4}, x_5=1 \quad \text{olur.}$$

Buna karşılık gelen  $K_{ij}$  matrisi de aşağıdaki gibi oluşur.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/16 & 1/8 & 1/16 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/16 & 1/8 & 3/16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Eğer trapez kuralının katsayıları kullanılırsa  $h = \frac{1}{4}$ ,  $\beta=1$  alınmakla denklem sistemi

$$Y = F + \beta K.D.Y \Rightarrow [I - \beta K.D] . Y = F$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 61/64 & -1/32 & -1/64 & 0 \\ 0 & -1/32 & 15/16 & -1/32 & 0 \\ 0 & -1/64 & -1/32 & 61/64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sekinde olur ki bu denklemin çözümü

$y_1=0$ ,  $y_2=0.2940$ ,  $y_3=0.5697$ ,  $y_4=0.8100$  ve  $y_5=1$  olarak bulunur.

$Y: Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, Y_n$

olarak verilir.

$S(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $n$  dereceden bir polinomdur.

$1 \leq n \leq N$  için  $S(x)$  alt aralıklarda  $n$  dereceden bir polinomdur.

$n=1$  için  $S(x)$  alt aralıklarda  $1$  dereceden bir polinomdur.

$2 \leq n \leq N$  için  $S(x)$  alt aralıklarda  $n$  dereceden bir polinomdur.

Yukarıda  $S(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $n$  dereceden bir polinomdur.  $S(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $n$  dereceden bir polinomdur.  $S(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $n$  dereceden bir polinomdur.

$S(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $n$  dereceden bir polinomdur.  $S(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $n$  dereceden bir polinomdur.  $S(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $n$  dereceden bir polinomdur.



## B Ö L Ü M III

KÜBİK ARA ENTERPOLASYON  
(SPLINE) FONKSİYONU

## 3.1 TANIM

Ara interpolasyon fonksiyonları polinom tipli fonksiyonların bir sınıfıdır.

$(a,b)$  aralığında bir  $x$  değişkeni ile gösterilen reel sayıların artan sırada verilmiş dizisi

$$a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n=b$$

olsun. Bunlara karşılık gelen bağımlı değişken değerleri de bir  $Y$  vektörü içinde

$$Y: y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$$

olarak verilsin.

$S(x)$  fonksiyonu  $(a,b)$  aralığında aşağıdaki koşulları sağlayan  $m$ . dereceden bir polinomdur.

1 -  $S(x)$  fonksiyonu her  $(x_{i-1}, x_i)$  alt aralığında en fazla  $m$ . dereceden bir polinomdur.

$i=1(1)n$  ve  $x_0=-\infty$ ,  $x_n=+\infty$  olabilir.

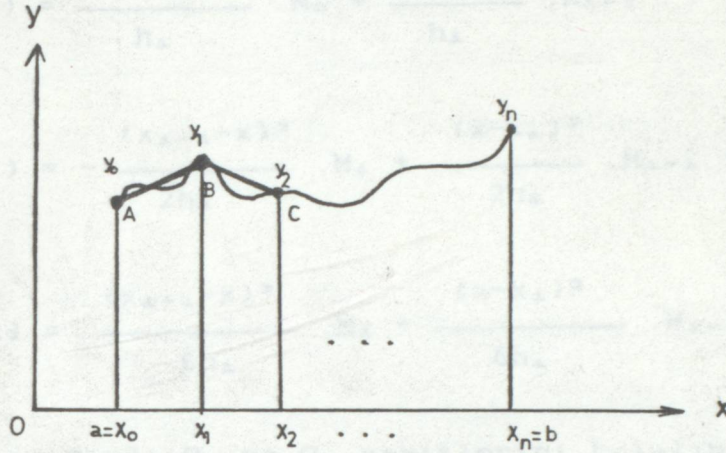
2 -  $S(x)$  ve onun  $(m-1)$  mertebeye kadar türevleri  $(a,b)$  aralığında süreklidir.

Yukarıda verilen ikinci koşul spline fonksiyonun düğüm noktalarında sürekliliği sağlaması için istenmektedir. Genellikle  $S(x)$  fonksiyonu  $(x_{i-1}, x_i)$  ve  $(x_i, x_{i+1})$  gibi komşu alt aralıklarda farklı polinomlar olarak verilir. Çok özel durumlarda  $(a,b)$  aralığında tek polinom olarak verilir.

Ara interpolasyon (spline) fonksiyonu  $S(x)$  için biribirinden biraz farklı sayılabilecek tanımlara literatürde rastlanmaktadır. Biz Ahlberg Nilson Walsh tarafından önerilen  $S(x)$  fonksiyonunu inceleyeceğiz.



### 3.2 MOMENTLER YARDIMIYLA KÜBİK ARA ENTERPOLASYON (SPLINE) POLİNOMUNUN BULUNMASI



Şekil 1

AB doğrusunun denklemi; uç noktalar  $A(x_0, y_0)$  ,  $B(x_1, y_1)$  olduğunda

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \quad \text{'den}$$

$$y = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot y_1$$

bulunur.

Her bir alt aralıkta  $S(x)$  fonksiyonunu kübik polinom olarak seçersek;

$$S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$S'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$S''(x) = 6ax + 2b$$

gibi doğru denklemi çıkar. Bu AB doğrusunun denklemidir. O halde

$$S''_i(x) = \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \cdot y_{i-1} + \frac{x-x_{i-1-1}}{x_i-x_{i-1-1}} \cdot y_i$$

$M_{i-1} = S''(x_{i-1})$  ;  $i=1(1)n-1$  olmak üzere

$$S''_i(x) = \frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} \cdot M_{i-1} + \frac{x-x_{i-1-1}}{x_i-x_{i-1-1}} \cdot M_i$$



yazılır. Bu fonksiyonun ard arda iki kere integrali alınırsa  $S(x)$  fonksiyonu bulunur.

$$S''(x) = \frac{x_{i+1}-x}{h_i} \cdot M_i + \frac{x-x_i}{h_i} \cdot M_{i+1} \quad (3.21)$$

$$S'(x) = -\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} \cdot M_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_i} \cdot M_{i+1} + C_1 \quad (3.22)$$

$$S(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} \cdot M_i + \frac{(x-x_i)^3}{6h_i} \cdot M_{i+1} + C_1 x + C_2 \quad (3.23)$$

elde edilir. Şimdi  $C_1$  ve  $C_2$  sabitlerini bulalım.

$$S(x_0) = y_0$$

$$S(x_1) = y_1$$

.

:

$$S(x_i) = y_i \quad ; \quad i=0(1)n-1 \quad \text{'den}$$

$$S(x_i) = y_i = \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6h_i} \cdot M_i + \frac{(x_i-x_i)^3}{6h_i} \cdot M_{i+1} + C_1 x_i + C_2$$

$$S(x_{i+1}) = y_{i+1} = \frac{(x_{i+1}-x_{i+1})^3}{6h_i} \cdot M_i + \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6h_i} \cdot M_{i+1} + C_1 x_{i+1} + C_2$$

ifadeleri elde edilir. Bunlar daha da sadeleştirilirse;

$$y_i = \frac{h_i^3}{6h_i} \cdot M_i + C_1 x_i + C_2$$

$$y_{i+1} = \frac{h_i^3}{6h_i} \cdot M_{i+1} + C_1 x_{i+1} + C_2$$

denklemleri elde edilir. Şimdi bunları taraf tarafa toplarsak



$$y_i = \frac{h_i^2}{6} \cdot M_i + C_1 x_i + C_2$$

$$y_{i+1} = \frac{h_i^2}{6} \cdot M_{i+1} + C_1 x_{i+1} + C_2$$

$$y_i - y_{i+1} = \frac{h_i^2}{6} \cdot (M_i - M_{i+1}) + C_1 (x_i - x_{i+1})$$

$$C_1 = - \frac{y_i - y_{i+1}}{h_i} + \frac{h_i}{6} \cdot (M_i - M_{i+1})$$

elde edilir. Benzer olarak bu kez denklemleri  $x_{i+1}$ ,  $x_i$  terimleri ile çarparsak;

$$x_{i+1} \cdot y_i = \frac{h_i^2}{6} \cdot M_i + C_1 x_i + C_2$$

$$x_i \cdot y_{i+1} = \frac{h_i^2}{6} \cdot M_{i+1} + C_1 x_{i+1} + C_2$$

$$x_{i+1} \cdot y_i - x_i \cdot y_{i+1} = \frac{h_i^2}{6} \cdot (M_i \cdot x_{i+1} - M_{i+1} \cdot x_i) + C_2 \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$C_2 = \frac{(x_{i+1} \cdot y_i - x_i \cdot y_{i+1})}{h_i} - \frac{h_i}{6} \cdot (M_i \cdot x_{i+1} - M_{i+1} \cdot x_i)$$

bulunur. Elde edilen integral sabitleri (3.23) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S(x) = & \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} \cdot M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} \cdot M_{i+1} \\ & + \left[ - \frac{y_i - y_{i+1}}{h_i} + \frac{h_i}{6} \cdot (M_i - M_{i+1}) \right] \cdot x \\ & + \left[ \frac{(x_{i+1} \cdot y_i - x_i \cdot y_{i+1})}{h_i} - \frac{h_i}{6} \cdot (M_i \cdot x_{i+1} - M_{i+1} \cdot x_i) \right] \end{aligned}$$



şeklinde olur.

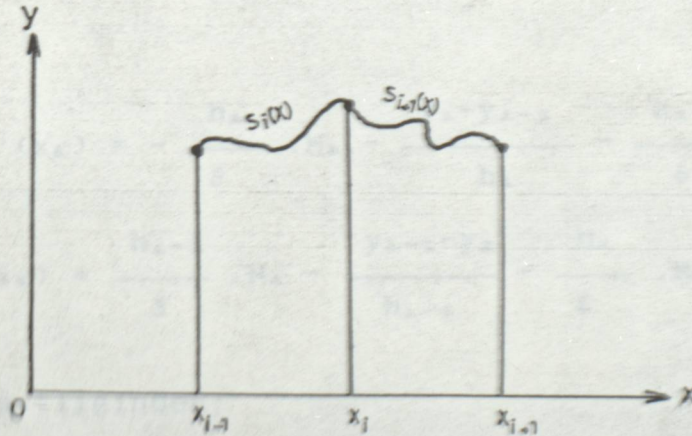
Burada ara işlemler sonucu;

$$\begin{aligned}
 S(x) = & \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} \cdot M_i + \frac{(x-x_i)^3}{6h_i} \cdot M_{i+1} \\
 & + \left[ y_i - \frac{h_i^2 M_i}{6} \right] \left( \frac{x_{i+1}-x}{h_i} \right) + \left[ y_{i+1} - \frac{h_i^2 M_{i+1}}{6} \right] \left( \frac{x-x_i}{h_i} \right)
 \end{aligned}
 \quad (3.24)$$

bulunur. Bu elde ettiğimiz fonksiyon Spline Fonksiyonudur. Bu fonksiyonda bilinmeyenler  $M_i$  ve  $M_{i+1}$  momentleridir. Bunları da bulabilmek için  $C_1$  ve  $C_2$  sabitlerini (3.22) denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
 S'(x) = & - \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} \cdot M_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_i} \cdot M_{i+1} \\
 & - \frac{y_i - y_{i+1}}{h_i} + \frac{h_i}{6} \cdot (M_i - M_{i+1})
 \end{aligned}
 \quad (3.25)$$

Türev ifadesinde de bilinmeyen olarak  $M_i$  ve  $M_{i+1}$  değerleri kalmıştır.



Şekil 2



$x_1$  noktasında  $S_1(x)$  ve  $S_{1+1}(x)$  fonksiyonlarının kendileri ve türevleri aynı değeri alırlar yani  $x=x_1$  için;

$$S_{1+1}'(x_1) = S_1'(x_1) \quad \text{'dir.} \quad (3.26)$$

$$S_{1+1}'(x) = - \frac{(x_{1+1}-x)^2}{2h_1} \cdot M_1 + \frac{(x-x_1)^2}{2h_1} \cdot M_{1+1} - \frac{y_1-y_{1+1}}{h_1} + \frac{h_1}{6} \cdot (M_1-M_{1+1})$$

$$S_1'(x) = - \frac{(x_1-x)^2}{2h_{1-1}} \cdot M_{1-1} + \frac{(x-x_{1-1})^2}{2h_{1-1}} \cdot M_1 - \frac{y_{1-1}-y_1}{h_{1-1}} + \frac{h_{1-1}}{6} \cdot (M_{1-1}-M_1)$$

$S(x)$  fonksiyonunu  $(-\infty, a)$ ,  $(b, \infty)$  aralığında lineer olarak varsaymından

$$S_{1+1}'(x_1) = - \frac{(x_{1+1}-x_1)^2}{2h_1} \cdot M_1 - \frac{y_1-y_{1+1}}{h_1}$$

$$S_1'(x_1) = \frac{(x_1-x_{1-1})^2}{2h_{1-1}} \cdot M_1 - \frac{y_{1-1}-y_1}{h_{1-1}} + \frac{h_{1-1}}{6} \cdot (M_{1-1}-M_1)$$

$$S_{1+1}'(x_1) = - \frac{h_1}{3} \cdot M_1 - \frac{y_1-y_{1+1}}{h_1} - \frac{h_1}{6} \cdot M_{1+1}$$

$$S_1'(x_1) = \frac{h_{1-1}}{3} \cdot M_1 - \frac{y_{1-1}-y_1}{h_{1-1}} + \frac{h_{1-1}}{6} \cdot M_{1-1}$$

(3.27) eşitliğinden;

$$- \frac{h_1}{3} \cdot M_1 - \frac{y_1-y_{1+1}}{h_1} - \frac{h_1}{6} \cdot M_{1+1} = \frac{h_{1-1}}{3} \cdot M_1 - \frac{y_{1-1}-y_1}{h_{1-1}} + \frac{h_{1-1}}{6} \cdot M_{1-1}$$



yazılır. Buradan

$$\frac{h_{i-1}}{6} \cdot M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i-1}}{3} \cdot M_i + \frac{h_i}{6} \cdot M_{i+1} = - \frac{\Delta y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{\Delta y_i}{h_i}$$

$$h_{i-1} \cdot M_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1}) \cdot M_i + h_i \cdot M_{i+1} = 6 \left( - \frac{\Delta y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{\Delta y_i}{h_i} \right) \quad (3.27)$$

olarak bulunur.

Eşit aralıklı veriler için;

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = 6 \left( \frac{\Delta y_i - \Delta y_{i-1}}{h^2} \right) \quad ; i=1(1)n-1 \quad (3.28)$$

yazılır.

$S(x)$  fonksiyonunu  $(-\infty, a)$ ,  $(b, \infty)$  aralığında lineer olması varsayımından

$$S''(a) = S''(b) = 0 \quad \text{veya} \quad M_0 = M_n = 0 \quad (3.29)$$

olur.

O zaman yukarıdaki denklem  $R.M = D$  şeklinde bir denklem sistemi oluşturur. Bu denklem sisteminin çözümü ile aralık boyunca  $M_i$  'ler bulunur. Bulunan bu  $M_i$  değerleri  $S(x)$  fonksiyonunda yerine yazılarak her  $(x_i, x_{i+1})$  aralığı için  $(a, b)$  aralığı boyunca Kübik Spline Fonksiyonları bulunmuş olur.



### 3.3 BİRİNCİ TUREVLER YARDIMIYLA KÜBİK ARA ENTERPOLASYON ( SPLINE ) POLİNOMUNUN BULUNMASI

Teorem :  $n \geq 0$  olmak üzere  $(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$  ayrık noktaları verilsin. O zaman

$$S^n(x_i) = f(x_i) \quad ; \quad i=1(1)n \quad (3.31)$$

bağıntısını sağlayan bir tabii kübik ara enterpolasyon polinomu vardır.

İspat : Tabii ara enterpolasyon polinomunun tanımına göre  $S^n(x)$  kübik polinom parçaları aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} P_{3,0}(x) &= C_{1,0} + C_{2,0}(x-x_1) & ; \quad -\infty < x \leq x_1 \\ P_{3,1}(x) &= C_{1,1} + C_{2,1}(x-x_1) + C_{3,1}(x-x_1)^2 + C_{4,1}(x-x_1)^3 \\ & & ; \quad x_1 \leq x \leq x_{1+1} \quad i=1(1)n-1 \\ P_{3,n}(x) &= C_{1,n} + C_{2,n}(x-x_n) & ; \quad x_n < x \leq \infty \end{aligned} \quad (3.32)$$

ve

$$P_{3,i-1}(x_i) = P_{3,i}(x_i) = f(x_i) \quad ; \quad i=1(1)n \quad (3.33)$$

koşulunun sağlanması istenir. Bu noktalardaki birinci türevlerde

$$m_i = P'_{3,i-1}(x_i) = P'_{3,i}(x_i) \quad ; \quad i=1(1)n \quad (3.34)$$

olursa o zaman  $P_{3,i}$  polinomunun katsayıları kolayca bulunabilir.

$$\begin{aligned} C_{1,0} &= f(x_1) & C_{1,1} &= f(x_1) & ; \quad i=1(1)n \\ C_{2,0} &= m & C_{2,1} &= m_i & ; \quad i=1(1)n \end{aligned} \quad (3.35)$$

$C_{3,1}$  ve  $C_{4,1}$  katsayıları da;

$$\begin{aligned} P_{3,1}(x_{1+1}) &= f(x_{1+1}) \\ P'_{3,1}(x_{1+1}) &= m_{1+1} \end{aligned} \quad (3.36)$$

koşulları ile belirlenir.

$$P_{3,1}(x) = C_{1,1} + C_{2,1}(x-x_1) + C_{3,1}(x-x_1)^2 + C_{4,1}(x-x_1)^3$$

$$P'_{3,1}(x) = C_{2,1} + 2C_{3,1}(x-x_1) + 3C_{4,1}(x-x_1)^2$$

$$P_{3,1}(x) = f(x_{1+1}) = C_{1,1} + C_{2,1}(\Delta x_1) + C_{3,1}(\Delta x_1)^2 + C_{4,1}(\Delta x_1)^3$$

$$P'_{3,1}(x) = m_{1+1} = C_{2,1} + 2C_{3,1}(\Delta x_1) + 3C_{4,1}(\Delta x_1)^2$$



(3.35) eşitliklerinden

$$f(x_1) + m_1(\Delta x_1) + C_{3,1}(\Delta x_1)^2 + C_{4,1}(\Delta x_1)^3 = f(x_{1+1})$$

$$m_1 + 2C_{3,1}(\Delta x_1) + 3C_{4,1}(\Delta x_1)^2 = m_{1+1}$$

$$C_{3,1}(\Delta x_1) + C_{4,1}(\Delta x_1)^2 = \frac{[f(x_{1+1}) - f(x_1)]}{\Delta x_1} - m_1$$

$$2C_{3,1}(\Delta x_1) + 3C_{4,1}(\Delta x_1)^2 = m_{1+1} - m_1$$

$$C_{3,1}(\Delta x_1) + C_{4,1}(\Delta x_1)^2 = f[x_1, x_{1+1}] - m_1$$

$$2C_{3,1}(\Delta x_1) + 3C_{4,1}(\Delta x_1)^2 = m_{1+1} - m_1$$

bulunur.

Bu denklemlerin çözümünden

$$C_{3,1}(\Delta x_1) = 3f[x_1, x_{1+1}] - m_{1+1} - 2m_1$$

$$C_{4,1}(\Delta x_1)^2 = -2f[x_1, x_{1+1}] + m_{1+1} + m_1$$

(3.37)

olarak belirlenir. Bu denklemlerde henüz bilinmeyen durumundaki  $m_1$  eğimleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P''_{3,1}(x_{1+1}) = P''_{3,1+1}(x_{1+1}) ; i=0(1)n-1 \text{ 'dir.}$$

$$P''_{3,1}(x) = 2C_{3,1} + 6C_{4,1}(x-x_1)$$

$$i=0 \text{ için } 0 = C_{3,1}$$

$$i=1 \text{ için } C_{3,1} + 3(\Delta x_1)C_{4,1} = C_{3,2}$$

$$i=2 \text{ için } C_{3,2} + 3(\Delta x_2)C_{4,2} = C_{3,3}$$

:

$$i=n-2 \text{ için } C_{3,n-2} + 3(\Delta x_{n-2})C_{4,n-2} = C_{3,n-1}$$

$$i=n-1 \text{ için } C_{3,n-1} + 3(\Delta x_{n-1})C_{4,n-1} = 0$$

bağıntıları ile gösterilir. Bu bağıntılardaki  $C_{3,1}$  ve  $C_{4,1}$  değerleri yerine (3.36) denklemlerindeki karşılıkları yazılırsa



$$2m_1 + m_2 = 3f[x_1, x_2]$$

$$(\Delta x_1)m_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})m_i + (\Delta x_{i-1})m_{i+1} = 3f[x_{i-1}, x_i] \Delta x_i + 3f[x_i, x_{i+1}] \Delta x_{i-1} \quad ; i=1(1)n$$

$$m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] \quad (3.38)$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sistemi dikkat edilirse üç köşegenli bir bant matristir ve her zaman tek bir çözümü vardır. Böylece bu denklem sisteminin çözümünden  $m_i$ 'ler bulunur ve bunlar yardımı ile  $C_{1,i}, C_{2,i}, C_{3,i}$  ve  $C_{4,i}$ 'ler belirlenir. Sonuçta teorem ispatlanmış olur.

Genellikle yapılan işlemlerde adım uzunlukları eşit olarak alınır. Böylece  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x = h$  'dan

$$2m_1 + m_2 = \frac{3}{h} \cdot [f(x_2) - f(x_1)]$$

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3}{h} \cdot [f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})] \quad ; i=2(1)n-1$$

$$m_{n-1} + 2m_n = \frac{3}{h} \cdot [f(x_n) - f(x_{n-1})] \quad (3.39)$$

şeklindeki bir sisteme dönüşür.  $C_{1,i}, C_{2,i}, C_{3,i}$  ve  $C_{4,i}$ 'lerin bulunması eşit uzunlukta olmayan verilerin kullanılması halinde olduğu gibidir.

Sonuçta her bir  $[x_i, x_{i+1}]$  alt aralığı için

$$P_{3,i}(x) = C_{1,i} + C_{2,i}(x - x_i) + C_{3,i}(x - x_i)^2 + C_{4,i}(x - x_i)^3$$

tabii kübik ara enterpolasyon polinomunda  $C_{1,i}, C_{2,i}, C_{3,i}$  ve  $C_{4,i}$  katsayılarının  $m_i, y_i = f(x_i) \quad ; i=1(1)n-1$  'lere bağlı olan aşağıdaki değerleri konursa

$$C_{1,i} = f(x_i)$$

$$C_{2,i} = m_i$$

$$hC_{3,i} = 3f[x_i, x_{i+1}] - m_{i+1} - 2m_i$$

$$h^2C_{4,i} = -2f[x_i, x_{i+1}] + m_{i+1} + m_i$$



$$\begin{aligned}
 P_{3,i}(x) = & y_i + m_i(x-x_i) + \left[ 3 \frac{y_{i+1}-y_i}{h^2} - \frac{m_{i+1}-2m_i}{h} \right] (x-x_i)^2 \\
 & + \left[ \frac{m_i+m_{i+1}}{h^2} - 2 \frac{y_{i+1}-y_i}{h^3} \right] (x-x_i)^3
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

şeklinde bulunmuş olur.

$S(x)$  kübik ara enterpolasyon polinomlarının bulunuşu

$$S(x_i) = f(x_i) \quad ; \quad i=1(1)n$$

eşitliklerinin sağlanabilmesi şartı ile  $m_1$  ve  $m_n$  eğimlerinin bulunması dışındaki işlemler için,  $S^N(x)$  'in bulunmasına benzer. Bu nedenle  $m_1$  ve  $m_n$  verilmiştir.  $f'(x_1)$  ve  $f'(x_n)$  türev değerleri biliniyorsa o zaman

$$m_1 = f'(x_1) \quad , \quad m_n = f'(x_n)$$

alınır.

$f'(x_1)$  ve  $f'(x_n)$  türevleri bilinmiyorsa, bunların herhangi bir yöntemle elde edilecek yaklaşık değerleri kullanılır.  $m_1, m_2, \dots, m_n$  eğimleri (3.38) sistemini ilk ve son denklemlerinin atılmasıyla elde edilecek ve yine katsayı matrisi üçlü bant matris olan denklem sisteminin çözümünden bulunur.



## B Ö L Ü M İ V

SPLINE FONKSİYONLARI İLE  
YAKLAŞIK İNTEGRAL

$[a, b]$  sonlu aralığında  $x_1, x_2, \dots, x_n$

bulunur. Bu aralıkta her bir  $[x_i, x_{i+1}]$  alt aralığında bir kübik enterpolasyon fonksiyonu olarak ifade eden

eşitsizliğini sağlayan noktalar olduğunda bu ayırık noktalar ve  $S^n(x)$  kübik ara enterpolasyon polinomu ile  $[a, b]$  'de

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b S^n(x) dx + E$$

$$= A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n) + E$$

olsun.

Buradaki sabitler aşağıdaki gibi bulunur:

$[a, b]$  sonlu aralığının, eşit uzunlukta alt aralıklara bölündüğü düşünölsün. Herhangi bir  $[x_i, x_{i+1}]$  alt aralığında integral

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} S^n(x) dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ y_i + m_i (x - x_i) + \left[ 3 \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - \frac{2m_i + m_{i+1}}{h} \right] \cdot (x - x_i)^2 + \left[ \frac{m_i + m_{i+1}}{h^2} - 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{h^3} \right] \cdot (x - x_i)^3 \right] dx$$

$$= \left[ y_i x + \frac{m_i}{2} \cdot (x - x_i)^2 + \left[ 3 \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - \frac{2m_i + m_{i+1}}{h} \right] \cdot \frac{(x - x_i)^3}{3} + \left[ \frac{m_i + m_{i+1}}{h^2} - 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{h^3} \right] \cdot \frac{(x - x_i)^4}{4} \right] \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}}$$







Denklemden anlaşılacağı gibi  $m_1$  ve  $m_n$  değerleri belirlenmemiştir. Eger kübik ara enterpolasyon polinomu periyodik ise  $m_1 = m_n$  olacağından yaklaşık integral trapez kuralından başka birsey değildir.  $m_1 \neq m_n$  ise (3.38) denklem sisteminin çözümü ile  $m_1$  ve  $m_n$  belirlenir. Başka bir durumda  $m_1 = f'(x_1)$  ve  $m_n = f'(x_n)$  şeklinde verilebilir.

Fredholm integral denklemi  $F(x)$  ve  $G(x)$  aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere  $y(x)$  başlangıç koşuluyla verilmektedir.

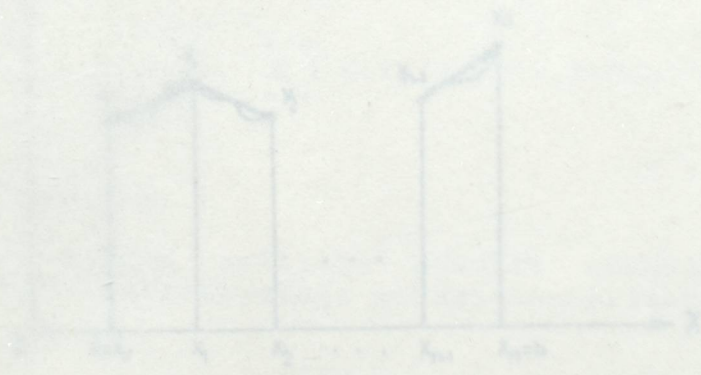
Bilindiği gibi,

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \text{integrali} \quad I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

şeklinde yaklaşık olarak yazılabilir. Bu denklem, aşağıdaki denklemlerde,

$$y(x) = F(x) + G(x) \quad (3.39)$$

olarak yazılabilir. Bu takdirde  $y(x)$  değeri  $F(x)$  ve  $G(x)$  için  $y(x)$  değeri bulunabilir. Yine  $F(x)$  ve  $G(x)$  için  $y(x)$  değeri bulunabilir. Bu şekilde  $y(x)$  değeri bulunabilir. Geriye  $F(x)$  ve  $G(x)$  değerlerini bulmak kalır.



Şekil 3



Simdi  $(a,b)$  aralığı  $x_0=a, x_1=a+h, \dots, x_n=a+nh$  şeklindeki **B Ö L Ü M V** kısmi aralıklarına ayrılabilir.  $h = \frac{b-a}{n}$  nokta  $x_0, x_1, \dots, x_n$  değerleri  $y(x_0)$  başlangıç değeri verildiğinde  $(a,b)$  aralığı için

## SPLINE FONKSİYONLARI İLE İKİNCİ ÇEŞİT İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

$$y(x) = f(x) + \beta \int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

Fredholm integral denklemi  $F(x)$  ve  $K(x,t)$  fonksiyonları  $(a,b)$  aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere bir  $y^{(0)}$  başlangıç koşuluyla verilmiş olsun.

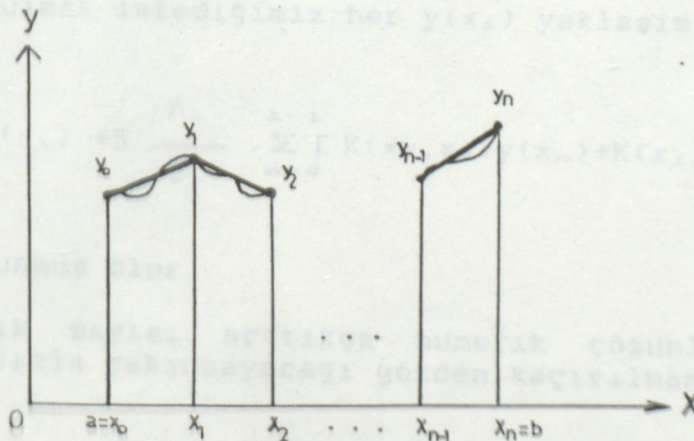
Bilindiği gibi,

$$I = \int_a^b F(x)dx \text{ integrali } I = \int_a^b F(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \cdot [f(a)+f(b)]$$

şeklinde yaklaşık olarak yazılabiliyordu. O halde integral denklemimizde,

$$y(x) = F(x) + \beta \frac{(b-a)}{2} \cdot [K(x,a)y(a)+K(x,b)y(b)]$$

olarak yazılabilir. Bu taktirde  $y(a)$  değeri bilindiğinde  $x=b$  için  $y(b)$  değeri bulunabilir. Yine  $[a,b]$  aralığı içinde olmak koşulu ile  $y(a), y(b)$  bilinirken  $y(c)$  fonksiyon değeri bulunabilir. Ve işlem bu şekilde ardışık olarak devam eder. Geriye bu ardışık yaklaşımların gerçekte integral denklemin çözümüne nasıl yararlı olacağını bulmak kalır.



Şekil 3



Şimdi  $(a,b)$  aralığı  $x_0=a$ ,  $x_1=a+h$ , ...,  $x_i=a+ih$ , ...,  $x_n=a+nh$  şeklindeki noktalarla eşit uzunlukta  $[x_i, x_{i+1}]$ ;  $i=0(1)n-1$  kısmi aralıklarına ayrılınsın. Bu tanımlarla  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  noktalarına karşılık gelen fonksiyon değerleri  $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$  olsun.

$y(x_0)$  başlangıç değeri verildiğinde  $(x_0, x_1)$  aralığı için

$$y(x) = f(x) + \beta \int_{x_0}^{x_1} K(x,t)y(t)dt$$

integral denklemi

$$y(x) = F(x) + \beta \frac{h_1}{2} \cdot [K(x, x_0)y(x_0) + K(x, x_1)y(x_1)] \quad ; i=1(1)n$$

olur. Bulmak istediğimiz her  $y(x_i)$  yaklaşımı için ise

$$y(x_i) = F(x_i) + \beta \frac{h_1}{2} \cdot [K(x_i, x_0)y(x_0) + K(x_i, x_1)y(x_1)] \quad ; i=1(1)n$$

şeklinde içinde birer bilinmeyen bulunduran  $n-1$  tane denklem bulunmuş olur. Bulunmak istenen her  $y(x_i)$  yaklaşımı için önceden bulunan  $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_{i-1})$  değerleri kullanılırsa trapez kuralından denklem

$$y(x) = F(x) + \beta \frac{h_1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{i-1} [K(x, x_n)y(x_n) + K(x, x_{n+1})y(x_{n+1})]$$

olur. Yine bulmak istediğimiz her  $y(x_i)$  yaklaşımı için

$$y(x_i) = F(x_i) + \beta \frac{h_1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{i-1} [K(x_i, x_n)y(x_n) + K(x_i, x_{n+1})y(x_{n+1})] \quad ; i=1(1)n$$

denklemi bulunmuş olur.

Burada aralık sayısı arttıkça nümerik çözümlerin gerçek değere daha fazla yakınsayacağı gözden kaçırılmamalıdır.



INTEGRAL DENKLEMİN SINIRLARINI GİRİNİZ:0,1

LAMDA DEĞERİNİ GİRİNİZ: 3333

ARALIK SAYISINI GİRİNİZ:5

U0 BAŞLANGIÇ DEĞERİNİ GİRİNİZ:0

İkinci Taraf:

-1.566833

-6.667334

-11.66783

-16.66833

-21.66883

Denklemin Katsayıları:

-29.20

1.20

1.50

2.00

2.40

Fonksiyon Değerleri:

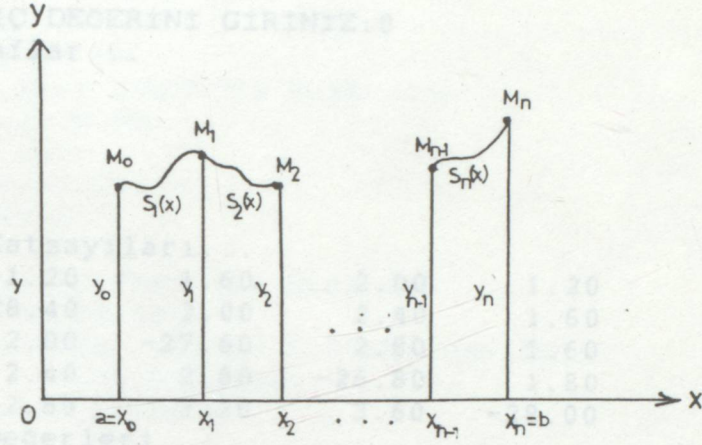
0.203

0.403

0.603

0.804

1.004



Şekil 4

Bulunan bu  $y(x_i)$  değerleri için artık  $(a,b)$  aralığının her  $(x_i, x_{i+1})$  kısmi aralığında integral denklemin çözümü olan  $y(x)$  fonksiyonunu ifade eden piecewise  $S_i(x)$  spline fonksiyonları bulunabilecektir.

```

30 DEF FNM(X)=X*(X-1)
40 INPUT "INTEGRAL DENKLEMİN SINIRLARINI GİRİNİZ: ",A,B
50 INPUT "LAMDA DEĞERİNİ GİRİNİZ: ",D
60 INPUT "ARALIK SAYISINI GİRİNİZ: ",N
70 INPUT "U0 BAŞLANGIÇ DEĞERİNİ GİRİNİZ: ",U(0)
80 H=(B-A)/N
90 FOR I=1 TO B-H STEP H :L=L+1
100 D(L)=-1-FNM(I)/(D+H)-FNM(I,0)+U(0):NEXT I
110 PRINT "İkinci Taraflar..."
120 L=0
130 FOR I=1 TO B-H STEP H:X=X+H
140 FOR J=1 TO B-H STEP H:L=L+1
150 IF L=N THEN GOTO 170
160 A(K,L)=1-FNM(I,J)
170 IF I=J THEN B(K,L)=A(K,L)-1/(D+H)
180 NEXT J:L=0:NEXT I
190 PRINT "Denklemin Katsayıları..."
200 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N
210 PRINT USING "###.##" A(I,J);
220 PRINT " ";
230 NEXT J:PRINT:NEXT I
240 FOR P=1 TO N
250 FOR F=1 TO N
260 NS=N+P:NSS=N+P
270 A(P,NS)=0
280 A(P,NSS)=1
290 NEXT F:NEXT P

```



INTEGRAL DENKLEMIN SINIRLARINI GIRINIZ:0,1

LAMDA DEGERINI GIRINIZ:.3333

ARALIK SAYISINI GIRINIZ:5

Uo BASLANGIC DEGERINI GIRINIZ:0

ikinci Taraflar...

-1.666833

-6.667334

-11.66783

-16.66833

-21.66883

Denklemin Katsayilari...

-29.20 1.20 1.60 2.00 1.20

1.20 -28.40 2.00 2.40 1.60

1.60 2.00 -27.60 2.80 1.60

2.00 2.40 2.80 -26.80 1.80

2.40 2.80 3.20 3.60 -28.00

Fonksiyon Değerleri...

0.203

0.403

0.603

0.804

1.004

10 CLS:DIM U(1000),D(1000),A(100,100)

20 DEF FNF(X)=5\*X/6-1/9

30 DEF FNK(X,T)=(X+T)

40 INPUT "INTEGRAL DENKLEMIN SINIRLARINI GIRINIZ:",A,B

50 INPUT "LAMDA DEGERINI GIRINIZ:",D

60 INPUT "ARALIK SAYISINI GIRINIZ:",N

70 INPUT "Uo BASLANGIC DEGERINI GIRINIZ:",U(0)

80 H=(B-A)/N

90 FOR I=H TO B+H STEP H :L=L+1

:D(L)=-2\*FNF(I)/(D\*H)-FNK(I,0)\*U(0):NEXT I

100 PRINT"Ikinci Taraflar..."

110 FOR L=1 TO N :PRINT D(L):NEXT L

120 L=0

130 FOR I=H TO B+H STEP H:K=K+1

140 FOR J=H TO B+H STEP H:L=L+1

150 IF L=N THEN A(K,L)=FNK(I,J):GOTO 170

160 A(K,L)=2\*FNK(I,J)

170 IF I=J THEN A(K,L)=A(K,L)-2/(D\*H)

180 NEXT J:L=0:NEXT I

190 PRINT"Denklemin Katsayilari..."

200 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N

210 PRINT USING "###.##";A(I,J);

220 PRINT " ";

230 NEXT J:PRINT:NEXT I

240 FOR P=1 TO N

250 FOR F=1 TO N

260 NS=N+F:NSS=N+P

270 A(P,NS)=0

280 A(P,NSS)=1

290 NEXT F:NEXT P



```

300 NN=2*N
310 FOR I=1 TO N
320 BB=A(I,I)
330 KI=I
340 NK=KI+1
350 FOR K=1 TO NN
360 IF A(I,I)=0 THEN 370 ELSE 450
370 FOR IM=1 TO NN
380 S=A(KI,IM)
390 A(KI,IM)=A(NK,IM)
400 A(NK,IM)=S
410 NEXT IM
420 IF (N-NK)>0 THEN 430 ELSE 440
430 NK=NK+1:GOTO 360
440 PRINT"SISTEM, CRAMER SISTEMI DEGILDIR"
    :INPUT " ",K$:GOTO 640
450 A(I,K)=A(I,K)/BB
460 NEXT K
470 FOR M=1 TO N
480 IF (I-M)=0 THEN 530
490 CAR=A(M,I)
500 FOR MK=1 TO NN
510 A(M,MK)=A(M,MK)-A(I,MK)*CAR
520 NEXT MK
530 NEXT M
540 NEXT I
550 FOR L=1 TO N: A(L,1)=0
560 FOR K=1 TO N
570 NL=N+K
580 A(L,1)=A(L,1)+A(L,NL)*D(K)
590 NEXT K: NEXT L
600 PRINT"Fonksiyon Degerleri..."
610 FOR I=1 TO N
620 PRINT USING "####.###";A(I,1)
630 NEXT I
640 END

```



## B Ö L Ü M VI

Integral denklemlerin sayısal çözümleri üzerine çok fazla yöntem geliştirilmemiştir. Ancak sadece pratik olan bir kaç yöntem kullanılmaktadır. İkinci bölümde integral denklemlerin çözümü için kullanılan yöntemlerle beşinci bölümde anlatılan Kübik Ara Enterpolasyon (Spline) fonksiyonları yardımıyla yapılan çözüm ele alınırsa, kısmi aralık sayısı (n) arttıkça nümerik çözümlerin daha iyi sonuçlar vereceği, ardışık yaklaşım metodlarında ise  $[a,b]$  aralığının sonlarına doğru hata oranının artacağı sonuçları çıkarılır.

Yöntemler için verilen algoritmalarda kullanılan integral formüllerinin farklı olması, yaklaşımı etkiler. Kübik Ara Enterpolasyon (Spline) formülleri ile verilen yöntemde integral'in her nekadardır Trapez yöntemi ile çözüldüğü görülse de aslında bu birinci türevler yardımıyla bulunan Kübik Ara Enterpolasyon (Spline) fonksiyonu ile yapılmış bir çözümdür. Dolayısı ile bunlara bağlı olarak çıkan  $Y: (y_1, y_2, \dots, y_n)$  çözüm vektörü için de yine aynı aralıkta momentler yardımıyla bulunan Kübik Ara Enterpolasyon (Spline) fonksiyonları kullanılarak  $y(x)$  yaklaşım fonksiyonu elde edilir.

Sonuçta Kübik Ara Enterpolasyon (Spline) fonksiyonu ile çözülen integral denklem hesabının algoritmasında; integral formüllerinin aynı olması, algoritmasının pratikliğinden (n) aralık sayısını artması halinde işlem süresinin diğer yöntemlere göre daha kısa olmasından ve lineer denklem sistemine dönüştürülerek çözülmesinden dolayı aralık sonlarına doğru herhangi bir hatanın ardışık olarak sürüklenmeyeceğinden yola çıkarak bu yöntemin kolaylıkla kullanılabileceği sonucuna varılır.

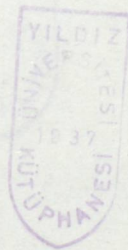
(10) STROUD, A.H., Numerical Quadrature And Solution of Ordinary Differential Equations.

(11) TİMUR, Tekin, Doğru Olmayan Birer Eşitlik Probleminin Integral Denklem Denkleme Algoritması Sayısal Çözümü, Doçentlik Tezi, 1989



## KAYNAKLAR

- (1) AKSOY Yavuz, Ders Notları - 1988
- (2) C.D. GREEN, Integral equations Methods
- (3) ÇAĞAL Behiç, Sayısal Analiz, 1989
- (4) ÇAĞAL Behiç, Nümerik Analiz, 1988
- (5) ÇAĞAL Behiç, Integro Diferansiel Denklemlerin Nümerik Çözümleri, Doçentlik Tezi, 1978
- (6) ÇAĞAL Behiç, Ders Notları, 1988
- (7) FRÖBERG Karl Eric, Introduction to Numerical Analysis, 1974
- (8) J.H.Ahlberg, E.N.Nilson, J.L.Walsh, The Theory of Splines And Their Applications, 1967
- (9) MARON Melvin J., Numerical Analysis, A Practical Apporoach 1982 - 257-272, 309-313
- (10) STROUD A.H., Numerical Quadrature And Solution of Ordinary Differantial Equations.
- (11) TİN Ali Tekin, Doğrusal Olmayan Sınır Değer Probleminin Integral Denklem Dönüşümü Altında Sayısal Çözümü, Doçentlik Tezi, 1989





## Ö Z G E Ç M İ S

Adı Soyadı : Işım GENÇ

Doğum Tarihi : 22 Eylül 1966

Doğum Yeri : İstanbul

İlk Öğrenimi : 1977 yılında İstanbul Bekir Esener ilkokulundan mezun oldu.

Orta Öğrenim : 1977-80 yılları arasında Erenköy Kız Lisesinin orta bölümüne, 1980-83 yılları arasında aynı okulun lise bölümüne devam etti.

Yüksek Öğrenimi : 1984 yılında Yıldız Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı eğitimini 1988 yılında tamamladı.

Görevi : Yıldız Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi

