YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Turnuvalar Turnuva Modelleri ve Faktörizasyonları

Metin Arabacıoğlu

Yüksek Lisans Tezi

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TURNUVALAR, TURNUVA MODELLERİ VE FAKTÖRİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

METİN ARABACIOĞLU

İSTANBUL 1987

İÇİNDEKİLER

	SAYFA NO
ÖZET	I
SUMMARY	II
BÖLÜM I - TURNUVALARIN FAKTÖRİZASYONU	1
I.1 - Temel Kavramlar	2
I.2 - Turnuva Organizasyonu ve Faktörler	4
Teorem I.2.2	12
I.3 - Turnuva Organizasyon Algoritması	13
BÖLÜM II-TURNUVALARDA GENEL ÖZELLİKLER	23
II.1 - Özel Turnuva Tipleri	23
II.2 - Turnuvalarda Skorlar	24
II.3 - Turnuvaların Sayısı	26
II.4 - Altturnuvalar	28
II.5 - Turnuvaların Otomorfizmi	29
BÖLÜM III - ROTASYONEL TURNUVALAR	31
Teorem III.1.1	32
Teorem III.1.2	33
III.2 - Rotasyonel Turnuvaların Faktörizasyonu	34
Kaynaklar	
Özgeçmiş	

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Bölüm I de, genel anlamda faktörizasyon problemi ele alınmış ve herhangi bir turnuva organizasyonunun, graf modeli kurularak gerçekleştirilmesi incelenmiştir.Ayrıca, turnuvaların faktörizasyonu ile ilgili bir teorem ve faktörizasyonu gerçekleştiren bir algoritma verilmiştir.

Bölüm II de, turnuvaların özellikleri ve bazı önemli teoremleri ele alınmış,

Bölüm III de ise, rotasyonel turnuvaların içerdikleri Hamilton çevrelerinin sayısı ve bulunmasıyla ilgili bir teorem ve bu teorem yardımıyla faktörizasyonu gerçekleştiren bir algoritma verilmiştir.

SUMMARY

This thesis is divided into three chapters.

In the first chapter, the problem of factorization is generally studied and the organization of any tournament is made by constructing its graph model. Furthermore, a theorem and an algorithm which makes the factorization of any tournament is given.

Chapter II is all on the properties and some important theorems of the theory of tournaments.

In the Chapter III, a theorem which determines the Hamilton circuits included by any rotational tournament and finds the number of those circuits is given. Furthermore, in the last section of this chapter, there is an algorithm which makes the factorization of any prime ordered rotational tournament in according to that theorem.

BÖLÜM I

TURNUVALARIN FAKTÖRİZASYONU

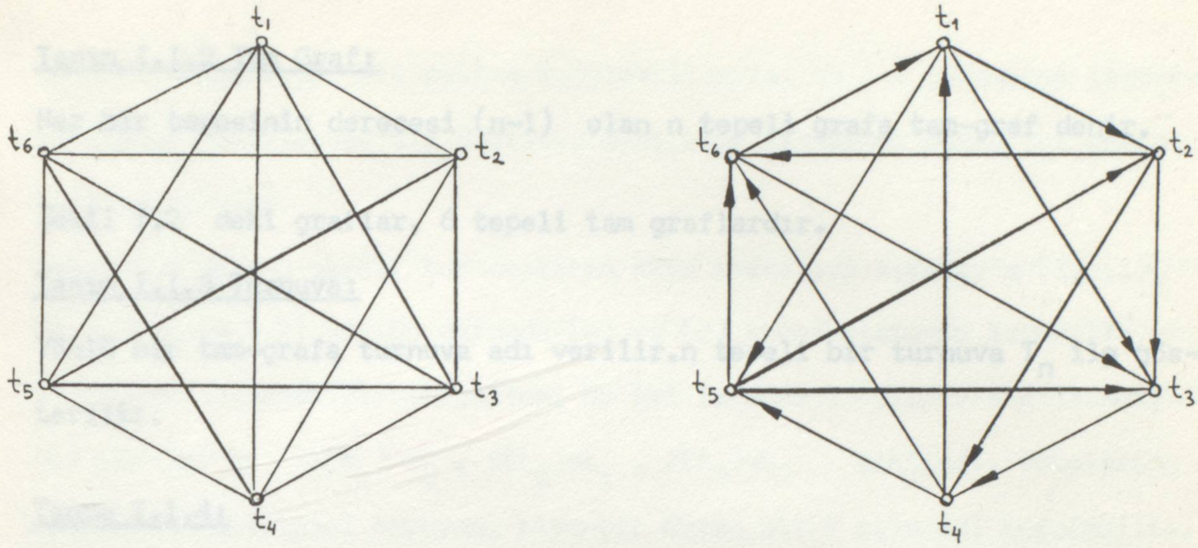
Giriş:

n takımın katıldığı ve her bir takımın, diğer takımlardan her biri ile tam birer kez karşılaştığı bir turnuva düşünülsün. Takımlar $\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ biçiminde indislenip, her bir t_i $(i=1,2,\ldots,n)$ takımı düzlemde, tepe adı verilen içi boş küçük bir yuvarlakla ("o") ve t_i ile t_j arasında yapılacak olan karşılaşma, t_i ve t_j tepelerini birleştiren ayrıt adı verilen bir yay veya doğru parçasıyla gösterilmek suretiyle (Şekil I.1.a), turnuvanın n tepeli ve $\binom{n}{2}$ ayrıtlı bir tam-graf modeli elde edilir (Şekil I.2.a).

(a) (b)

Şekil I.1

Eğer, futbol karşılaşmalarında olduğu gibi, örneğin, t_i takımının t_j ile karşılaşma yapmak için t_j nin bulunduğu kente gitme durumu varsa bu durum, t_i yi t_j ye birleştiren yay üzerinde t_i den t_j ye doğru bir ok konularak belirtilir (Şekil I.1.b). Bu durumda deplasmanlı bir turnuvanın yönlü tam-graf modeli elde edilir. (Şekil I.2.b), 6 takım arasında düzenlenen deplasmanlı bir turnuva modelini göstermektedir.



(a) (b)

Şekil I.2

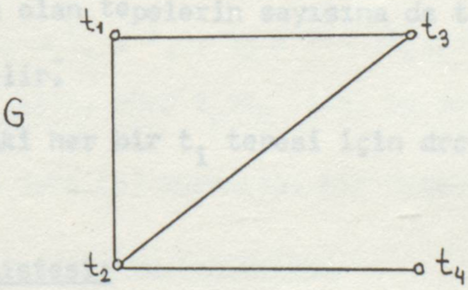
I.1 Temel Kavramlar

Tanım I.1.1 Bir Tepenin Derecesi:

Bir G grafında, bir t tepesini son nokta kabul eden ayrıtların sayısına, t tepesinin derecesi denir ve drc(t) sembolüyle gösterilir.

Örneğin, Şekil I.3 deki G grafında,

$$\mathrm{drc}(t_1)=2\ ,\ \mathrm{drc}(t_2)=3\ ,\ \mathrm{drc}(t_3)=2\ ,\ \mathrm{drc}(t_4)=1\ \text{ dir.}$$



Şekil I.3

Teorem I.1.1:

n tepeli ve m ayrıtlı bir G grafında, t_i $(i=1,2,\ldots,n)$ tepeleri göstermek üzere, $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{drc}(t_i)=2m$ dir.

Tanım I.1.2 Tam Graf:

Her bir tepesinin derecesi (n-1) olan n tepeli grafa tam-graf denir.

Şekil I.2 deki graflar, 6 tepeli tam graflardır.

Tanım I.1.3 Turnuva:

Yönlü bir tam-grafa turnuva adı verilir. n tepeli bir turnuva T_n ile gösterilir.

Tanım I.1.4:

Bir T turnuvasında, t_i ve t_j tepelerini birleştiren ayrıt, t_i den t_j ye doğru yönlendirilmiş ise, t_i tepesi t_j tepesine baskındır denir ve $t_i \longrightarrow t_j$ şeklinde belirtilir.

Bir t_i tepesinin baskın olduğu tepeler kümesi $N(t_i)$, t_i tepesine baskın olan tepeler kümesi ise $N'(t_i)$ ile gösterilir.

Tanım I.1.5 Bir Tepenin Skoru:

Bir T turnuvasında, t_i tepesinin baskın olduğu tepelerin sayısına t_i nin skoru denir ve $s(t_i)$ ile gösterilir.

t_i tepesine baskın olan tepelerin sayısına da t_i nin ko-skoru denir ve $s'(t_i)$ ile gösterilir.

Bir T turnuvasındaki her bir t_i tepesi için $drc(t_i)=s(t_i)+s'(t_i)$ olduğu açıktır.

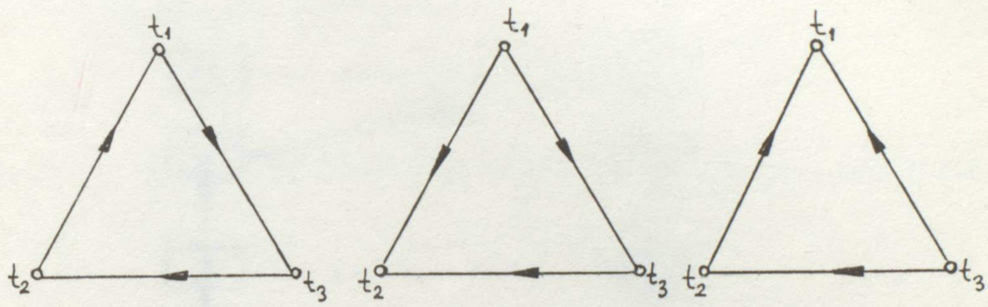
Tanım I.1.6 Skor Listesi:

Bir T turnuvasında, tepelerin skorlarının küçükten büyüğe doğru sıralanmasıyla elde edilen diziye, T turnuvasının skor listesi adı verilir.

Tanım I.1.7 Turnuvalarda İzomorfizm:

Herhangi iki turnuvanın tepeleri arasında, baskınlık özelliklerini koruyan, bire-bir örten bir eşleme kurulabiliyorsa, bu iki turnuvaya izomorfiktirler denir. Diğer bir deyişle, aynı skor listesine sahip iki turnuva izomorfiktir.

Şekil I.4 deki 3 tepeli turnuvaların skor listeleri sırasıyla (1,1,1), (0,1,2) , (0,1,2) dir. Bu durumda (b) ve (c) turnuvalarının izomorfik oldukları söylenebilir. Gerçekten, bu iki turnuvanın tepeleri arasında, (b) den (c) ye $f(t_1)=t_3$, $f(t_2)=t_1$, $f(t_3)=t_2$ şeklinde, tepelerin baskınlık özelliğini koruyan, bire-bir örten bir f eşlemesi kurulabilir.



Şekil I.4

Tanım I.1.8 k-çevre:

$t_o, t_1, \ldots, t_{k-1}$ bir T turnuvasındaki farklı tepeleri göstermek üzere,

$$t_o \to t_1 \; , \; t_1 \to t_2 \; , \; \ldots \; , t_{k-1} \to t_k$$

şeklindeki bir yol için, eğer $t_o=t_k$ ise, bu yola bir k-çevre adı verilir.

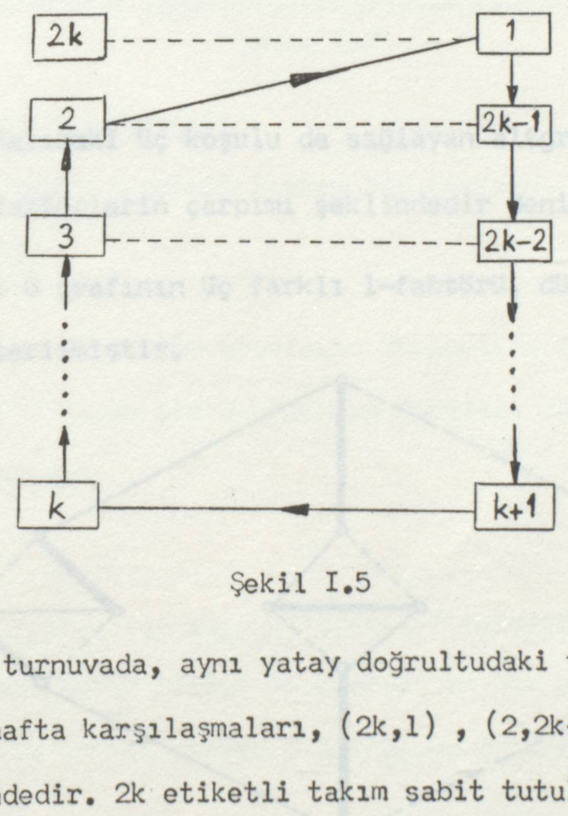
Örneğin, Şekil I.4 deki (a) turnuvası bir 3-çevredir.

I.2 Turnuva Organizasyonu ve Faktörler:

n takım arasında düzenlenen bir turnuvada, bir takımın her hafta bir karşılaşma yaptığı düşünülürse, her bir takım (n-1) karşılaşma yapacağından, turnuvanın tamamlanabilmesi için (n-1) haftaya ihtiyaç vardır. Ancak bu durum, tüm takımları aynı anda karşılaşma yapabilmesi koşulu sağlandığı halde geçerlidir. Eğer n çift değilse, her hafta takımlardan biri karşılaşmaların dışında kalacağından, turnuva n haftada tamamlanabilecektir.

n nin çift olduğu varsayılarak organizasyon yapılabilir. Eğer eldeki problemde, n tek ise, hayali bir takım eklenerek problem (n+1) için çözülür. Böylece her hafta, eklenen hayali takımla eşleşen takım, gerçekte haftayı karşılaşmasız geçiren takım olur.

Şekil I.5 , n=2k takımlı bir turnuva organizasyonunu simgelemektedir.



Şekil I.5

Şekil I.5 deki turnuvada, aynı yatay doğrultudaki takımlar eşleşmiştir. Buna göre ilk hafta karşılaşmaları, (2k,1) , (2,2k-1) , (3,2k-2) , ... , (k,k+1) şeklindedir. 2k etiketli takım sabit tutularak, diğer takımlar ok yönünde birer basamak kaydırıldığında, yine aynı yatay doğrultudaki takımlar 2. hafta karşılaşmalarını oluştururlar. İşlem benzer şekilde sürdürülerek turnuva organizasyonu tamamlanmış olur.

Bu turnuva G grafı ile gösterilirse, her bir haftaya karşı gelen karşılaşmaların grafları, aşağıdaki koşulları sağlayan $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$ altgraflarına karşı gelecektir:

i) Her bir G_i altgrafı G nin tüm tepelerini içerir.

ii) Her bir G_i altgrafındaki tüm tepelerin dereceleri 1 dir.

iii) G nin her bir ayrıtı bir ve yalnız bir G_i altgrafında yer alır.

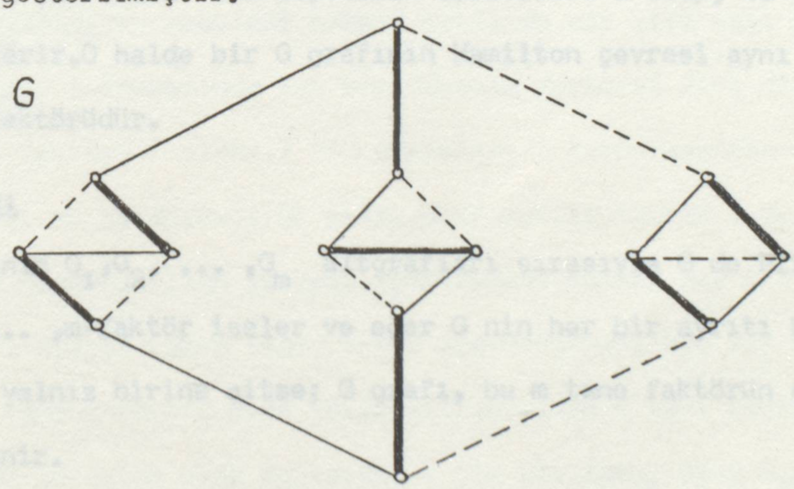
Tanım I.2.1 1-Faktör:

Bir G grafının yukarıdaki (i) ve (ii) koşullarını sağlayan altgrafına, Gnin bir 1-faktörü adı verilir.

Tanım I.2.2:

Bir G grafı yukarıdaki üç koşulu da sağlayan altgraflara ayrılabiliyorsa, G grafı 1-faktörlerin çarpımı şeklindedir denir.

Şekil I.6 daki G grafının üç farklı 1-faktörü, düz, kalın ve kesikli çizgilerle gösterilmiştir.

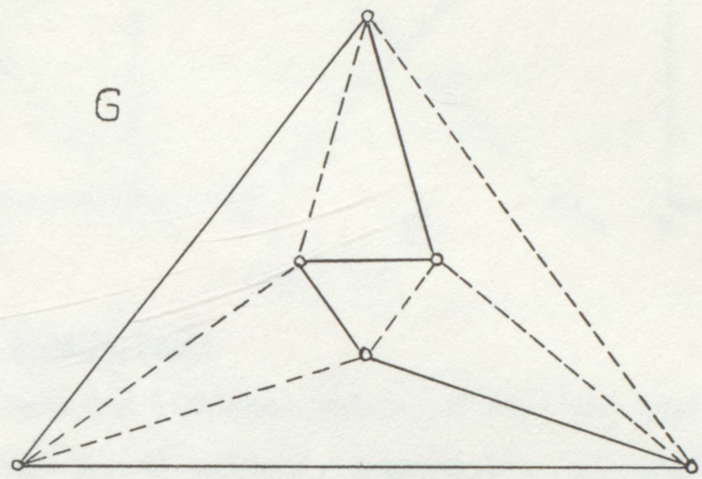


Şekil I.6

Tanım I.2.3 k-Faktör:

Bir G grafının bütün tepelerini içeren bir G' altgrafında, tüm tepelerin dereceleri k $(k \geqslant 1)$ ise, G' altgrafına G nin bir k-faktörü denir.

Şekil I.7 deki G grafının 2-faktörleri düz ve kesikli çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil I.7

Tanım I.2.4 Hamilton Çevresi:

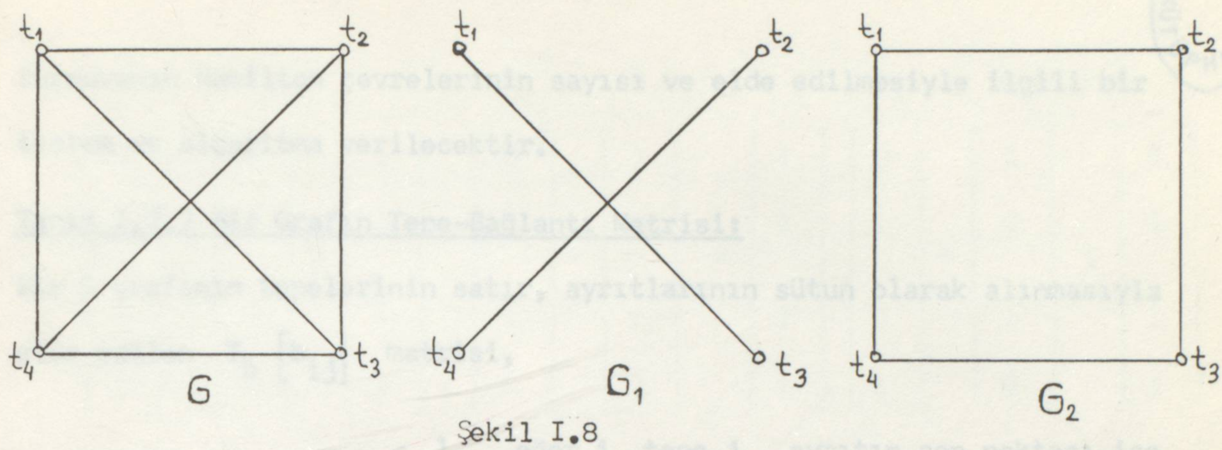
Bir G grafında bütün tepeleri içeren bir çevreye, G nin bir Hamilton çevresi adı verilir.

Bir Hamilton çevresinde tüm tepelerin dereceleri 2 olup, bu çevre bütün tepeleri içerir. O halde bir G grafının Hamilton çevresi aynı zamanda grafın bir 2-faktörüdür.

Tanım I.2.5:

Bir G grafının $G_1, G_2, \ldots, G_m$ altgrafları sırasıyla G de birer 1-faktör, 2-faktör, ... ,m-faktör iseler ve eğer G nin her bir ayrıtı bu altgraflardan bir ve yalnız birine aitse; G grafı, bu m tane faktörün çarpımı şeklindedir denir.

Şekil I.8 , 4 tepeli bir G tam-grafının, 1 ve 2-faktörün çarpımı şeklinde olduğunu göstermektedir.



Şekil I.8

Tanım I.2.6 Düzenli Graf:

Bir G grafındaki tüm tepelerin dereceleri eşit ise grafa düzenlidir denir. Düzenli bir grafda tepelerin dereceleri k ise, graf k-düzenli adını alır.

Örneğin, n tepeli bir T turnuvası (n-1)-düzenli bir grafdır.

Teorem I.2.1:

$k \geqslant 1$ için 2k düzenli bir graf, k tane Hamilton çevresi içerir.

Turnuva organizasyon problemi $n=2k+2$ şeklinde bir çift sayı için ele alınsın. Oluşacak T turnuvasında her bir tepenin derecesi $2k+1$ dir. T turnuvasının bir 1-faktörü F olsun. F nin ayrıtları T turnuvasından silindiğinde, $n=2k+2$ tepeli ve 2k düzenli G' grafı elde edilir. Teorem I.2.1 gereğince G' grafı, k tane Hamilton çevresi içerir. Elde edilen her bir Hamilton çevresi çift sayıda (2k+2 tane) ayrıt içerdiğinden, her bir Hamilton çevresinden 2 tane 1-faktör elde edilebilir. Böylece k tane Hamilton çevresi için 2k tane 1-faktör elde edilerek, F ile birlikte, 2k+2 tepeli T turnuvasının 2k+1 tane 1-faktörü bulunmuş olur.

Bu işlem, bir T turnuvasının organizasyonunun, Hamilton çevrelerinden yararlanılarak yapılabileceğini göstermektedir. Bölüm III de, bir rotasyonel turnuvanın Hamilton çevrelerinin sayısı ve elde edilmesiyle ilgili bir teorem ve algoritma verilecektir.

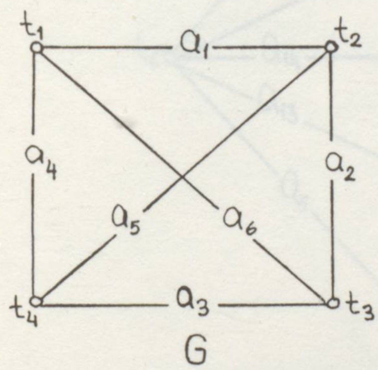
Tanım I.2.7 Bir Grafın Tepe-Bağlantı Matrisi:

Bir G grafının tepelerinin satır, ayrıtlarının sütun olarak alınmasıyla elde edilen $T_b\ [b_{ij}]$ matrisi,

$$b_{ij}=\begin{cases} 1\ , & \text{eğer i. tepe j. ayrıtın son noktası ise} \\ 0\ , & \text{diğer durumda,} \end{cases}$$

koşulunu sağlıyorsa, G grafının tepe-bağlantı matrisi adını alır.

Örneğin, Şekil I.9 da 4 tepeli bir G tam-grafı ve G nin tepe-bağlantı matrisi gösterilmiştir.



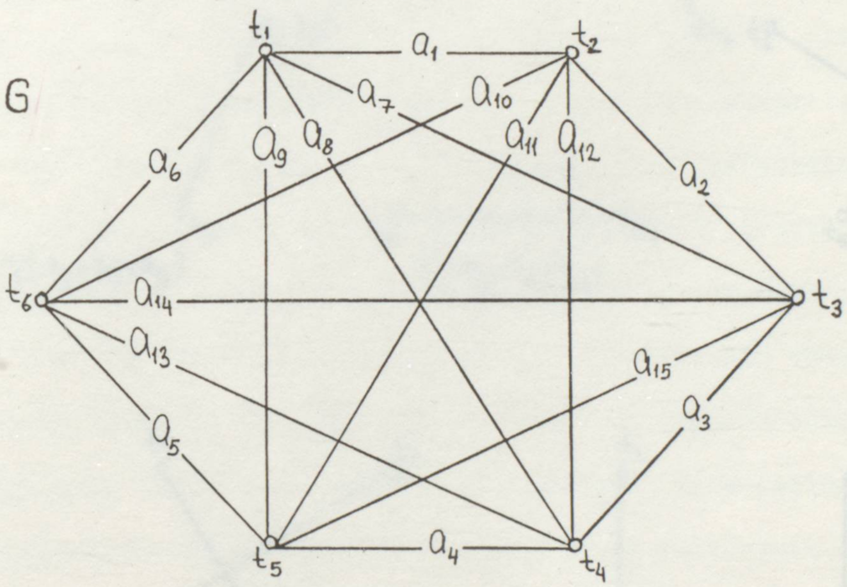
$$T_b=\begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Şekil I.9

Şekil I.9 daki G grafının 1-faktörleri sırasıyla $(a_1,a_3),(a_2,a_4)$ ve (a_5,a_6) ayrıt dizilerinden oluşmuş G_1,G_2 ve G_3 altgraflarıdır. Aynı G grafının tepe-bağlantı matrisinde bu 1-faktörlerin ayrıtlarına karşı gelen sütun vektörleri ele alındığında, bunların GF(2) cismindeki toplamlarının, bileşenleri 1 olan sütun vektörünü verdiği görülür.

$$\overset{a_1}{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}+\overset{a_3}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \overset{a_2}{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}}+\overset{a_4}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \overset{a_5}{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}}+\overset{a_6}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Bu özellik daha büyük boyutlu bir G grafında da görülebilir. Örnek olarak, 6 tepeli bir tam-graf gözönüne alınsın (Şekil I.10).



Şekil I.10

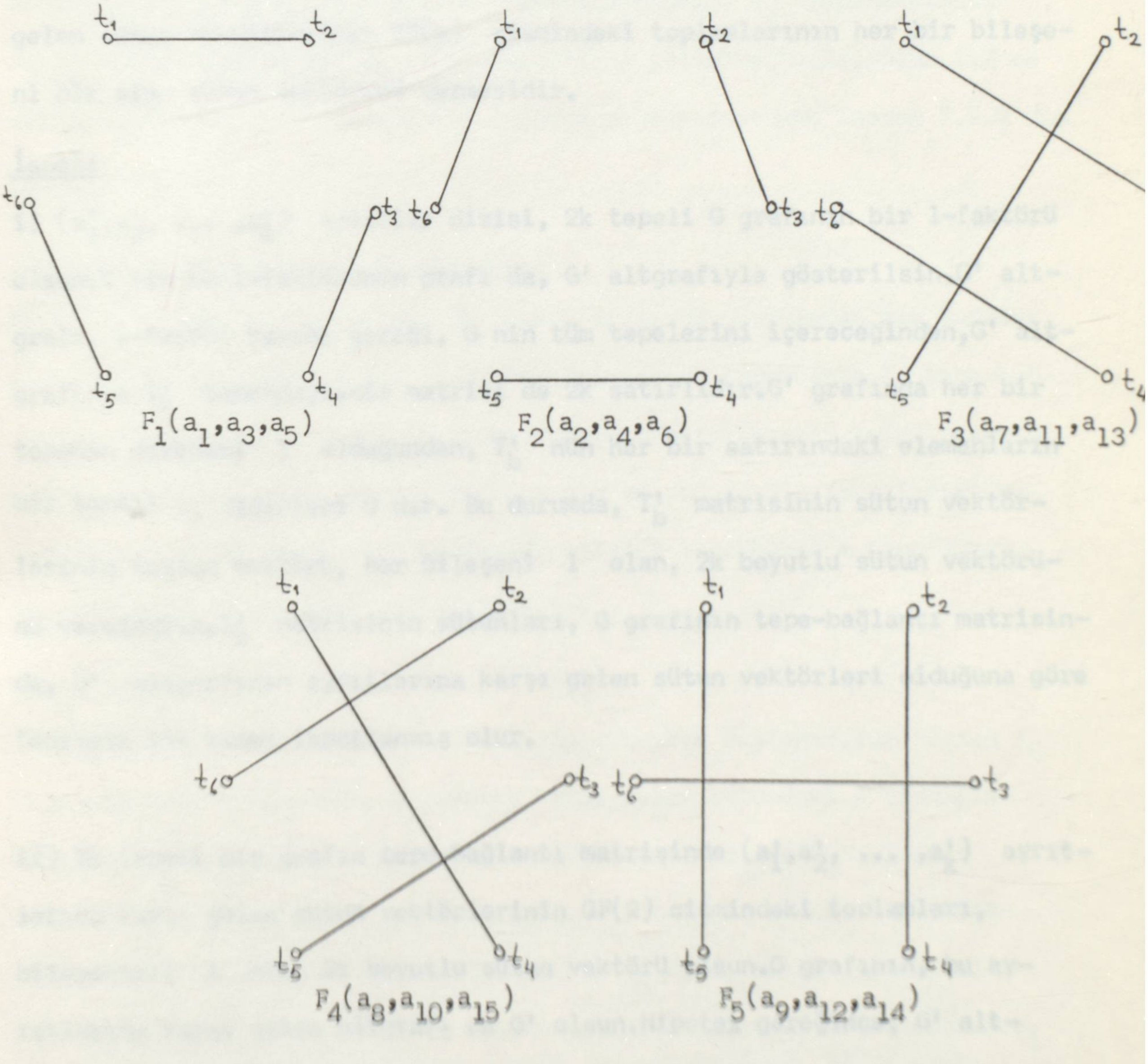
Bu grafın tepe-bağlantı matrisi;

$$T_b=\begin{array}{c}\\ t_1\\ t_2\\ t_3\\ t_4\\ t_5\\ t_6\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccccccccc}a_1&a_2&a_3&a_4&a_5&a_6&a_7&a_8&a_9&a_{10}&a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

dir.

T_b matrisinin (a_1,a_3,a_5) , (a_2,a_4,a_6) , (a_7,a_{11},a_{13}) , (a_8,a_{10},a_{15}) ve (a_9,a_{12},a_{14}) dizilerinde belirtilen sütunları toplamı, her bir dizi için, bileşenleri 1 olan sütun vektörünü vermektedir.

Gerçekten bu dizilerin her biri, G grafının birer 1-faktörüne karşı gelmektedir. Şekil I.11 bu dizilere karşı gelen 1-faktörleri gösterir.



Şekil I.11

n=4 ve n=6 için gösterilen bu durum, aşağıdaki teorem ile genelleştirilir.

Teorem I.2.2:

n=2k tepeli bir grafın k tane ayrıtının bir 1-faktör oluşturması için gerek ve yeter koşul, grafın tepe-bağlantı matrisinde bu ayrıtlara karşı gelen sütun vektörlerinin GF(2) cismindeki toplamlarının her bir bileşeni bir olan sütun vektörünü vermesidir.

İspat:

i) $(a_1', a_2', \ldots, a_k')$ ayrıtlar dizisi, 2k tepeli G grafının bir 1-faktörü olsun. G nin bu 1-faktörünün grafı da, G' altgrafıyla gösterilsin. G' altgrafı, 1-faktör tanımı gereği, G nin tüm tepelerini içereceğinden, G' altgrafının T_b' tepe-bağlantı matrisi de 2k satırlıdır. G' grafında her bir tepenin derecesi 1 olduğundan, T_b' nün her bir satırındaki elemanların bir tanesi 1, diğerleri 0 dır. Bu durumda, T_b' matrisinin sütun vektörlerinin toplam vektörü, her bileşeni 1 olan, 2k boyutlu sütun vektörünü verecektir. T_b' matrisinin sütunları, G grafının tepe-bağlantı matrisinde, G' altgrafının ayrıtlarına karşı gelen sütun vektörleri olduğuna göre teoremin ilk kısmı ispatlanmış olur.

ii) 2k tepeli bir grafın tepe-bağlantı matrisinde $(a_1', a_2', \ldots, a_k')$ ayrıtlarına karşı gelen sütun vektörlerinin GF(2) cismindeki toplamları, bileşenleri 1 olan 2k boyutlu sütun vektörü olsun. G grafının, bu ayrıtlarına karşı gelen altgrafı da G' olsun. Hipotez gereğince, G' altgrafı 2k tepeli ve k ayrıtlı bir grafdır. G' nün tepe-bağlantı matrisinde, her bir satırda en az bir tane 1 olduğundan, her bir t_i tepesi için $drc(t_i) \geqslant 1$ dir.

G' grafında en az bir t_i tepesi için $drc(t_i) > 1$ ise, $\sum_{i=1}^{n} drc(t_i) > n$ olur.Öte yandan, $\sum_{i=1}^{n} drc(t_i)=2m=2k=n$ dir.Bu çelişkiden dolayı,G' grafında her bir t_i tepesi için $drc(t_i)=1$ dir.Bu sonuç ise, G' grafının G de bir 1-faktör olduğunu gösterir.Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu teorem, n takımlı bir turnuva organizasyonunun, T_b tepe-bağlantı matrisinden yararlanılarak yapılabileceğini göstermektedir.Bölüm I.3 de verilen algoritma, n takımlı bir turnuva organizasyonunu Teorem I.2.2 den yararlanarak oluşturmaktadır.

I.3 Turnuva Organizasyon Algoritması:

Bu bölümde verilen algoritma, 2k takım arasında düzenlenen bir turnuva modelini 1-faktörlerine ayırır.Bu faktörizasyon, turnuvanın T_b tepe-bağlantı matrisinin bilinmesi koşuluyla gerçekleştirilmiştir.Temel prensip olarak, bir turnuvada her bir ayrıtın bir ve yalnız bir tane 1-faktörde yer alması ve 2k tepeli bir turnuvada her bir 1-faktörün k tane ayrıttan oluşması prensipleri kullanılmıştır.

Algoritma:

i) İşleme, herhangi bir a_i ayrıtı ele alınarak başlanır.Turnuvanın T_b tepe-bağlantı matrisinde, bu ayrıta karşı gelen sütundaki 1 olan elemanların satır indisleri belirlenir.Bu iki satır t_j ve t_k olsun. Teorem I.2.2 gereğince, T_b matrisinde, a_i nin yer aldığı 1-faktörün diğer ayrıtlarına karşı gelen sütunlarda, t_j ve t_k satır indisli elemanlar 0 olmak zorundadır.Bu koşulu sağlayan ayrıtlar belirlenerek a_i ile birlikte bir F_{a_i} dizisine atanmış olsunlar.

ii) F_{a_i} dizisinin a_i elemanından farklı herhangi bir a_j elemanı için (i) işlemleri aynen uygulanarak, bu ayrıt için bir F_{a_j} dizisi elde edilir.

Dizinin kuruluş koşulundan dolayı a_i ve a_j elemanlarının aynı zamanda F_{a_j} dizisinin de elemanı olacağı açıktır.

iii) Her bir adımda, önceki dizilerin kesişiminin elemanı olan bir ayrıt için işlem benzer şekilde sürdürülerek (k-1) tane dizi elde edilir. Kuruluş koşullarından dolayı, bu dizilerin kesişiminin oluşturduğu dizi, birbirleriyle 1-faktör oluşturabilen en az (k-1) ve en çok k tane ayrıt içerecektir.

iv) Bu durumda, eğer kesişim dizisinin eleman sayısı (k-1) ise, son adımda seçilen ayrıt değiştirilecek ve yerine koşulları sağlayan bir başka ayrıt seçilecektir.Eğer kesişim dizisinin eleman sayısı k ise, bu diziyi oluşturan ayrıtlar, turnuvanın bir 1-faktörünün ayrıtlarıdır.

v) Turnuvada herhangi bir ayrıt, yalnız ve yalnız bir 1-faktörde yer alacaktır.O halde, işlem sürdürülürken, daha önce belirlenmiş olan 1-faktörlerin ayrıtları gözönüne alınmayacaklardır.

<u>Örnek I.3.1:</u>

Algoritmanın bir uygulaması olarak, Şekil I.10 daki 6 tepeli G tam-grafı için işlemler dizisini uygulayalım.

i) İlk olarak a_1 ayrıtı seçilmiş olsun.T_b matrisinde a_1 ayrıtına karşı gelen sütunda, t_1 ve t_2 satır indisli elemanlar 1 dir.Buna göre

$$F_{a_1} = (a_1, a_3, a_4, a_5, a_{13}, a_{14}, a_{15}) \quad \text{dir.}$$

ii) F_{a_1} dizisinin a_1 den farklı bir elemanı olarak a_3 seçilmiş olsun. T_b matrisinde a_3 ayrıtına karşı gelen sütunda t_3 ve t_4 satır indisli elemanlar 1 dir.Buna göre (i) deki işlem a_3 için uygulanırsa,

$$F_{a_3} = (a_3, a_1, a_5, a_6, a_9, a_{10}, a_{11}) \quad \text{bulunur.}$$

iii) $k=3$ olduğundan, yeterli sayıda dizi elde edilmiştir.Bu dizilerin kesişim dizisi alındığında,

$F_1=(a_1,a_3,a_5)$ dizisi elde edilir ki bu dizinin eleman sayısı k ya eşittir.

iv) Bu durumda $\underline{F_1=(a_1,a_3,a_5)}$ ayrıtlar dizisi G grafının bir 1-faktörünü oluşturur.

v) T_b matrisinden a_1,a_3 ve a_5 ayrıtlarına ait sütunlar silinerek işlem (i) adımından itibaren tekrarlanırsa ikinci 1-faktör elde edilecektir.

Bu kez a_2 ayrıtı seçilsin.a_2 ye ait sütundaki 1 elemanlarının satır indisleri t_2 ve t_3 dür.Buna göre,

$F_{a_2}=(a_2,a_4,a_6,a_8,a_9,a_{13})$ bulunur.

Bu dizi içinden a_4 ayrıtı seçilirse, benzer işlem sonucu olarak,

$F_{a_4}=(a_4,a_2,a_6,a_7,a_{10},a_{14})$ elde edilir.

Bu iki dizinin kesişim dizisi,

$F_2=(a_2,a_4,a_6)$ elde edilir.

Bu dizinin eleman sayısı k ya eşit olduğundan,

$\underline{F_2=(a_2,a_4,a_6)}$ ayrıtlar dizisi G grafının ikinci 1-faktörüdür.T_b matrisinden a_2,a_4,a_6 ayrıtlarına ait sütunlar da silinerek işlem sürdürülür.

Kalan ayrıtlar içinden a_7 ayrıtı seçilirse,benzer işlemler sonucunda

$F_{a_7}=(a_7,a_{10},a_{11},a_{12},a_{13})$ dizisi bulunur.

Bu diziden seçilen a_{10} ayrıtı için,

$F_{a_{10}}=(a_{10},a_7,a_8,a_9,a_{15})$ bulunur.Bu iki dizinin kesişim dizisi, $F_3=(a_7,a_{10})$ dir.Görüldüğü gibi bu dizinin eleman sayısı k-1 dir.Algoritma gereğince, son seçilen ayrıt değiştirilecektir.

F_{a_7} dizisinden a_{11} ayrıtı seçilmiş olsun.Bu durumda

$F_{a_{11}} = (a_{11},a_7,a_8,a_{13},a_{14})$ bulunur.Bu iki dizinin kesişim dizisi,

$\underline{F_3=(a_7,a_{11},a_{13})}$ ün eleman sayısı k ya eşit olduğundan bu dizinin ayrıtları G grafının üçüncü 1-faktörüdür.

T_b matrisinden F_3 dizisinin elemanlarına karşı gelen sütunlar da silinerek işlem sürdürülür.

Kalan ayrıtlardan a_8 ayrıtı seçilerek,benzer işlemler uygulanırsa

$F_{a_8}=(a_8,a_{10},a_{14},a_{15})$ bulunur.Bu dizinin a_{10} elemanı için

$F_{a_{10}}=(a_{10},a_8,a_9,a_{15})$ elde edilir.Bu iki dizinin kesişim dizisi,

$\underline{F_4=(a_8,a_{10},a_{15})}$ in eleman sayısı k ya eşit olduğundan bu dizinin ayrıtları G grafının dördüncü 1-faktörüdür.

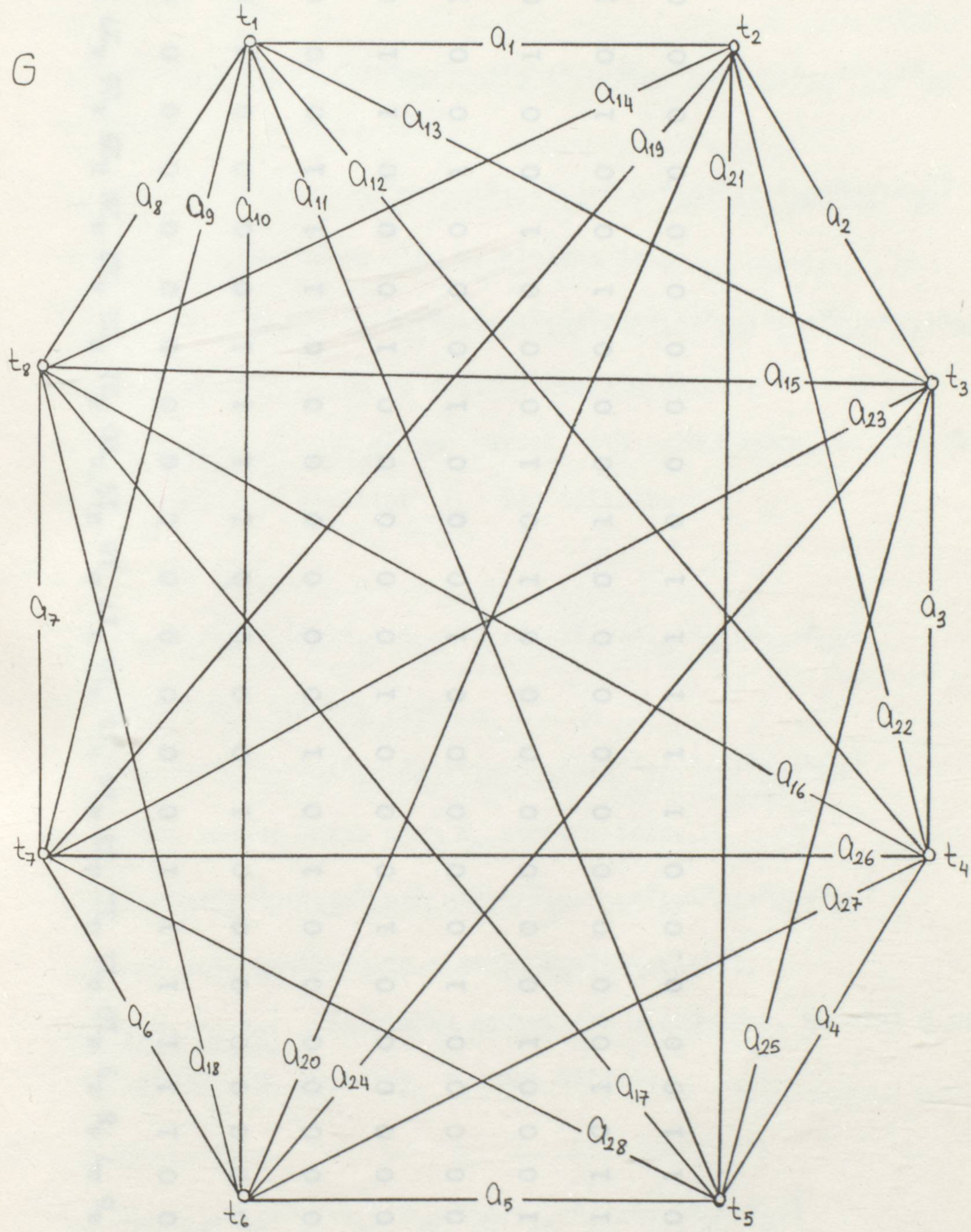
6 tepeli bir tam grafda, 5 tane 1-faktör bulunabileceğinden, geriye kalan ayrıtlar beşinci 1-faktörü oluşturmak zorundadır.Buna göre,

$\underline{F_5=(a_9,a_{12},a_{14})}$ dizisinin ayrıtları G grafının beşinci 1-faktörüdür.

Bulunan bu 1-faktörlere karşı gelen altgraflar Şekil I.11 de gösterilmiştir.

Örnek I.3.2:

Aynı algoritmanın daha karışık bir uygulaması olarak, 8 tepeli tam-graf gözönüne alınsın.Bu graf Şekil I.12 de gösterilmiştir.Bu örnekte,ayrıntıya girmeden, sadece F_{a_i} dizileri ve F_i 1-faktörleri belirlenecektir.



Şekil I.12

G grafına ait T_b tepe-bağlantı matrisi, tablo halinde aşağıda belirtilmiştir.

$$T_b=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \end{array} \\
\begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Problemde k=4 dür ve 7 tane 1-faktör bulunacaktır.

1-) a_1 ayrıtı için,

$F_{a_1} = (a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{28})$,

bu dizinin a_3 elemanı için,

$F_{a_3} = (a_3, a_1, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{14}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{28})$

ve bu iki dizide ortak olan a_5 elemanı için,

$F_{a_5} = (a_5, a_1, a_2, a_3, a_7, a_8, a_9, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{19}, a_{22}, a_{23}, a_{26})$

dizileri belirlenir. Bu üç dizinin kesişim dizisi,

$\underline{F_1 = (a_1, a_3, a_5, a_7)}$ nin eleman sayısı 4=k olduğundan, bu dizi G nin 1-faktörüdür. Bu ayrıtlar T_b den silinir.

2-) a_2 ayrıtı için,

$F_{a_2} = (a_2, a_4, a_6, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{26}, a_{27}, a_{28})$

bu dizinin a_4 elemanı için,

$F_{a_4} = (a_4, a_2, a_6, a_8, a_9, a_{10}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{18}, a_{19}, a_{20}, a_{23}, a_{24})$

ve bu iki dizide ortak olan a_6 elemanı için,

$F_{a_6} = (a_6, a_2, a_4, a_8, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{21}, a_{22}, a_{25})$

dizileri belirlenir. Bu üç dizinin kesişim dizisi,

$\underline{F_2 = (a_2, a_4, a_6, a_8)}$ in eleman sayısı 4=k olduğundan, bu dizi G nin 1-faktörüdür. Bu ayrıtlar T_b den silinir.

3-) a_9 ayrıtı için,

$F_{a_9} = (a_9, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{24}, a_{25}, a_{27})$

bu dizinin a_{14} elemanı için,

$F_{a_{14}} = (a_{14}, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{28})$

ve bu iki dizide ortak olan a_{24} elemanı için

$F_{a_{24}} = (a_{24}, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{14}, a_{16}, a_{17}, a_{19}, a_{21}, a_{22}, a_{26}, a_{28})$

dizileri belirlenir.Bu üç dizinin kesişim dizisi,

$F_3=(a_9,a_{14},a_{24})$ ün eleman sayısı 3=k-1 olduğundan,son seçilen ayrıt değiştirilecektir.Buna göre a_{25} için,

$F_{a_{25}}=(a_{25},a_9,a_{10},a_{12},a_{14},a_{16},a_{18},a_{19},a_{20},a_{22},a_{26},a_{27})$

dizisi üçüncü dizi olarak belirlenir.Kesişim dizisi,

$\underline{F_3=(a_9,a_{14},a_{25},a_{27})}$ nin eleman sayısı 4=k olduğundan,bu dizi G nin 1-faktörüdür. Bu ayrıtlar T_b den silinir.

4-) a_{10} ayrıtı için,

$F_{a_{10}}=(a_{10},a_{15},a_{16},a_{17},a_{19},a_{21},a_{22},a_{23},a_{26},a_{28})$,

bu dizinin a_{15} elemanı için,

$F_{a_{15}}=(a_{15},a_{10},a_{11},a_{12},a_{19},a_{20},a_{21},a_{22},a_{26},a_{28})$

ve bu iki dizide ortak olan a_{19} elemanı için,

$F_{a_{19}}=(a_{19},a_{10},a_{11},a_{12},a_{13},a_{15},a_{16},a_{17},a_{18},a_{24})$

dizileri belirlenir.Bu üç dizinin kesişim dizisi,

$F_4=(a_{10},a_{15},a_{19})$ un eleman sayısı 3=k-1 olduğundan,son seçilen ayrıt değiştirilecektir.Buna göre a_{21} için,

$F_{a_{21}}=(a_{21},a_{10},a_{12},a_{13},a_{15},a_{16},a_{18},a_{23},a_{24},a_{26})$

dizisi üçüncü dizi olarak belirlenir.Kesişim dizisi,

$\underline{F_4=(a_{10},a_{15},a_{21},a_{26})}$ nın eleman sayısı 4=k olduğundan,bu dizi G nin 1-faktörüdür. Bu ayrıtlar T_b den silinir.

5-) a_{11} ayrıtı için,

$F_{a_{11}}=(a_{11},a_{16},a_{18},a_{19},a_{20},a_{22},a_{23},a_{24})$

bu dizinin a_{16} elemanı için,

$F_{a_{16}}=(a_{16},a_{11},a_{13},a_{19},a_{20},a_{23},a_{24},a_{28})$

ve bu iki dizide ortak olan a_{19} elemanı için,

$F_{a_{19}}=(a_{19},a_{11},a_{12},a_{13},a_{16},a_{17},a_{18},a_{24})$

dizileri belirlenir. Bu üç dizinin kesişim dizisi,

$\underline{F_5=(a_{11},a_{16},a_{19},a_{24})}$ ün eleman sayısı 4=k olduğundan,bu dizi G nin 1-faktörüdür. Bu ayrıtlar T_b den silinir.

6-) a_{12} ayrıtı için,

$F_{a_{12}}=(a_{12},a_{17},a_{18},a_{20},a_{23},a_{28})$

bu dizinin a_{17} elemanı için

$F_{a_{17}}=(a_{17},a_{12},a_{13},a_{20},a_{22},a_{23})$

ve bu iki dizide ortak olan a_{20} elemanı için,

$F_{a_{20}}=(a_{20},a_{12},a_{13},a_{17},a_{23},a_{28})$

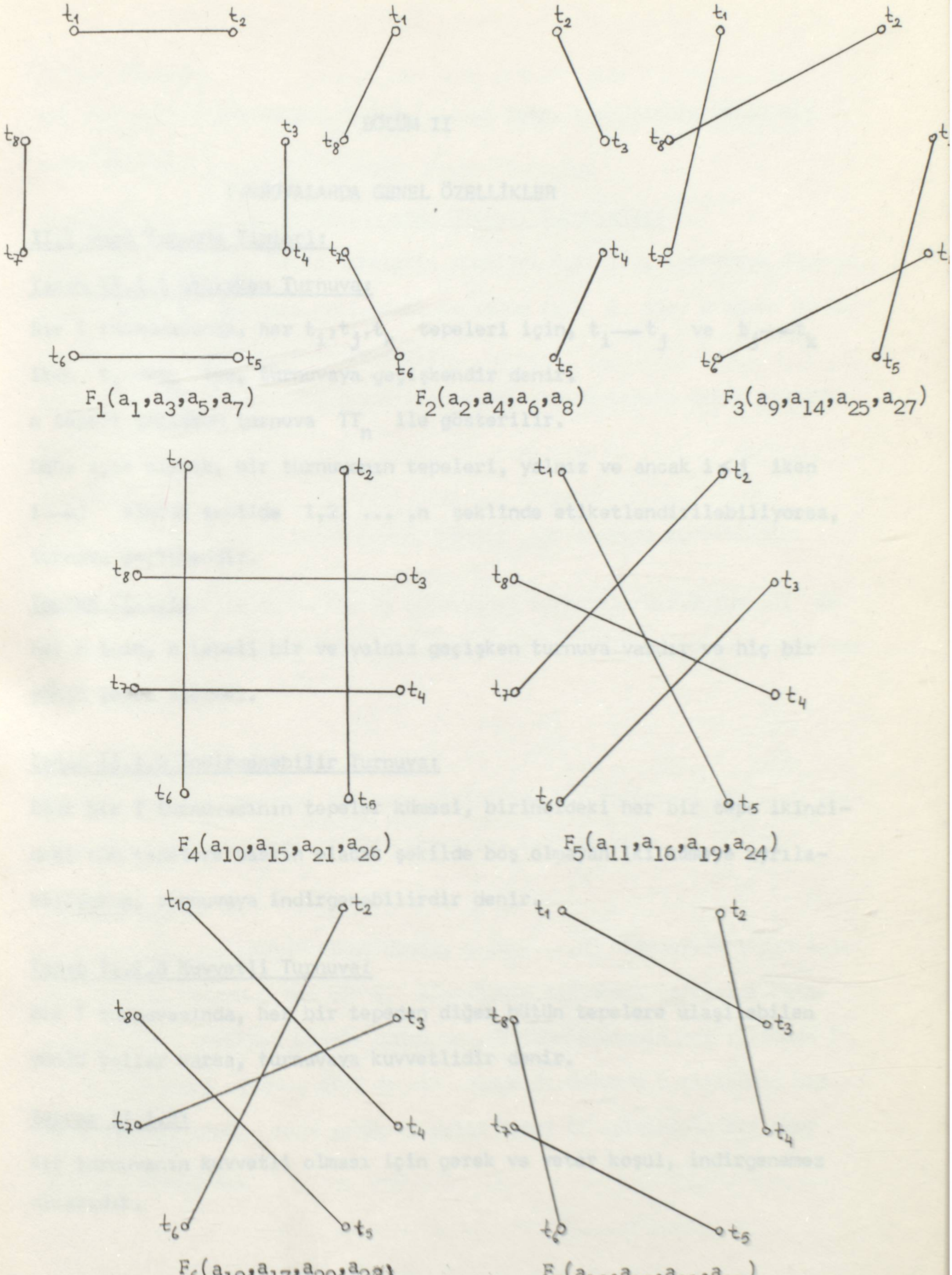
dizileri belirlenir.Bu üç dizinin kesişim dizisi,

$\underline{F_6=(a_{12},a_{17},a_{20},a_{23})}$ ün eleman sayısı 4=k olduğundan,bu dizi G nin 1-faktörüdür. Bu ayrıtlar T_b den silinir.

7-) 8 tepeli G tam-grafının 7 tane 1-faktörü olacağından,geriye kalan ayrıtlar son 1-faktörü oluşturmak zorundadır.O halde

$\underline{F_7=(a_{13},a_{18},a_{22},a_{28})}$ dir.

G grafının, belirlenen bu 1-faktörlere karşı gelen altgrafları Şekil I.13 de gösterilmiştir.


t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8
$F_1(a_1,a_3,a_5,a_7)$
$F_2(a_2,a_4,a_6,a_8)$
$F_3(a_9,a_{14},a_{25},a_{27})$
t_{10}
$F_4(a_{10},a_{15},a_{21},a_{26})$
$F_5(a_{11},a_{16},a_{19},a_{24})$
$F_6(a_{12},a_{17},a_{20},a_{23})$
$F_7(a_{13},a_{18},a_{22},a_{28})$

Şekil I.13

BÖLÜM II

TURNUVALARDA GENEL ÖZELLİKLER

II.1 Özel Turnuva Tipleri:

Tanım II.1.1 Geçişken Turnuva:

Bir T turnuvasında, her t_i, t_j, t_k tepeleri için, $t_i \to t_j$ ve $t_j \to t_k$ iken $t_i \to t_k$ ise, turnuvaya geçişkendir denir.

n tepeli geçişken turnuva TT_n ile gösterilir.

Daha açık olarak, bir turnuvanın tepeleri, yalnız ve ancak $i < j$ iken $i \to j$ olacak şekilde $1, 2, \ldots, n$ şeklinde etiketlendirilebiliyorsa, turnuva geçişkendir.

Teorem II.1.1:

Her n için, n tepeli bir ve yalnız geçişken turnuva vardır ve hiç bir yönlü çevre içermez.

Tanım II.1.2 İndirgenebilir Turnuva:

Eğer bir T turnuvasının tepeler kümesi, birincideki her bir tepe ikincideki tüm tepelere baskın olacak şekilde boş olmayan iki kümeye ayrılabiliyorsa, turnuvaya indirgenebilirdir denir.

Tanım II.1.3 Kuvvetli Turnuva:

Bir T turnuvasında, her bir tepeden diğer bütün tepelere ulaşılabilen yönlü yollar varsa, turnuvaya kuvvetlidir denir.

Teorem II.1.2:

Bir turnuvanın kuvvetli olması için gerek ve yeter koşul, indirgenemez olmasıdır.

Teorem II.1.3:

Her kuvvetli n-turnuvanın, k=3,4, ... ,n için, k uzunluklu yönlü bir yolu vardır.

Tanım II.1.4 Düzenli ve Hemen-hemen Düzenli Turnuvalar:

Bir T turnuvasında, bütün tepelerin skorları eşit ise, turnuvaya düzenli, eğer tepelerin skorları arasındaki maksimum fark 1 ise, o zaman bu turnuvaya hemen-hemen düzenlidir denir.

Koşul gereği, tüm düzenli turnuvaların tek sayıda tepeye sahip olacağı açıktır.

Teorem II.1.4:

$n \neq 2$ için, düzenli ve hemen-hemen düzenli her turnuva kuvvetlidir.

Özel turnuva tiplerinden biri de rotasyonel turnuvalardır. Bölüm III de bu turnuvaların tanım ve özellikleriyle birlikte, bir teorem ve algoritma verilecektir.

II.2 Turnuvalarda Skorlar:

Burada, verilen herhangi bir sayı dizisinin, bir turnuvaya ait skor listesi olup olamayacağına ilişkin kriterler verilecektir.

Teorem II.2.1:

$x_i \in \{0,1,2, \ldots ,n-1\}$ olmak üzere, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ tamsayılarından oluşmuş dizi L olsun. L den bir x_i elemanının silinmesi ve geriye kalan elemanlardan büyükten küçüğe doğru $n-x_i-1$ tane elemanın her birinden 1 eksiltilmesiyle oluşmuş dizi de L' olsun. Bu durumda L dizisinin bir skor listesi olması için gerek ve yeter koşul L' dizisinin bir skor listesi olmasıdır.

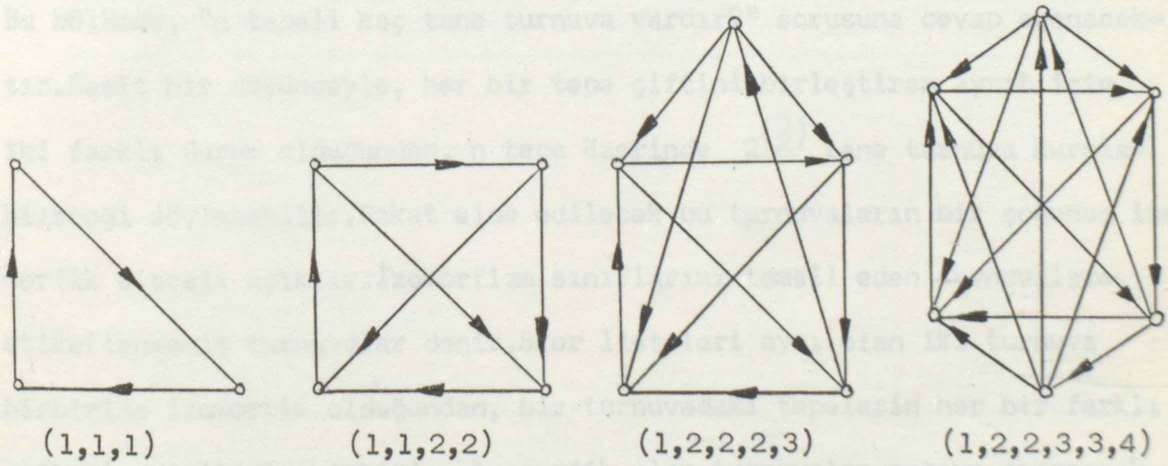
Bu teorem, verilen bir dizinin bir skor listesi olup olmadığını belirleyen ve eğer skor listesi ise karşı gelen turnuvayı bulan bir algoritma sağlar. Bu durum aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek II.2.1:

$L=(1,2,2,3,3,4)$ dizisinin bir skor listesi olduğunun gösterilmesi ve karşı gelen turnuvanın bulunması:

$L=(1,2,2,3,3,4)$ dizisinden $x_4=3$ elemanı silinip, büyükten küçüğe $6-3-1=2$ elemanın her birinden 1 eksiltilirse, $L'=(1,2,2,2,3)$ dizisi elde edilir. Benzer işlem sürdürülerek sırasıyla $(1,1,2,2)$ ve $(1,1,1)$ dizileri bulunur. $(1,1,1)$ dizisi bir skor listesi olduğundan, teorem II.2.1 gereğince, $L=(1,2,2,3,3,4)$ dizisi de bir skor listesidir.

Karşı gelen turnuva ise $(1,1,1)$ skor listeli turnuvadan başlayarak elde edilebilir. Şekil II.1 bu işlemi adım adım göstermektedir.



Şekil II.1

Teorem II.2.2:

$s_i \geqslant 0$ ve $s_i \leqslant s_{i+1}$ olmak üzere, $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ dizisinin bir skor listesi olması için gerek ve yeter koşul, $k=1,2,\ldots,n$ için,

$\sum_{i=1}^{k} s_i \geqslant \binom{k}{2}$ olmasıdır. Eşitlik hali $k=n$ için geçerlidir.

Örnek II.2.2:

$S=(1,2,2,3,3,5,5)$ dizisinin bir turnuvaya ait skor listesi olup olmadığının belirlenmesi:

$k=1,2,\ldots,7$ için, $\sum_{i=1}^{k} s_i \geqslant \binom{k}{2}$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla, teorem II.2.2 gereğince, S dizisi bir skor listesidir.

Gerçekten, teorem II.2.1 de verilen algoritmaya göre indirgeme yapılırsa, $S'=(1,2,2,3,3,4)$ dizisi elde edilir. Bu diziyi skor listesi kabul eden turnuva örnek II.2.1 de gösterilmiştir.

Tanım II.2.1 Frekans:

Bir turnuvaya ait skor listesinde, bir s_i skorunun oluş sayısına, bu skorun frekansı denir. Bir turnuvanın frekans kümesi, skor listesindeki skorların frekanslarının oluşturduğu kümedir.

Örneğin, (1,2,2,3,3,4) skor listeli turnuvanın frekans kümesi $\{1,2\}$ dir.

II.3 Turnuvaların Sayısı:

Bu bölümde, "n tepeli kaç tane turnuva vardır?" sorusuna cevap aranacaktır. Basit bir düşünceyle, her bir tepe çiftini birleştiren ayrıt için iki farklı durum olduğundan, n tepe üzerinde $2^{\binom{n}{2}}$ tane turnuva kurulabileceği söylenebilir. Fakat elde edilecek bu turnuvaların bir çoğunun izomorfik olacağı açıktır. İzomorfizm sınıflarını temsil eden turnuvalara, etiketlenmemiş turnuvalar denir. Skor listeleri aynı olan iki turnuva birbirine izomorfik olduğundan, bir turnuvadaki tepelerin her bir farklı etiketlendirilişi, birbirine izomorfik olan turnuvalar ortaya çıkaracaktır. n tepeli bir turnuvanın tepeleri, en çok $n!$ şekilde etiketlendirilebileceğinden, en az $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ tane etiketlenmemiş n-turnuva vardır sonucuna varılır.

Teorem II.3.1:

$J=(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ dizisi, $j_{2k}=0$ ve $1.j_1+2.j_2+3.j_3+\ldots+n.j_n=n$

koşulunu sağlayan tüm $j\geq 0$ tamsayılarının dizisi ve

$$g(J)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\text{obeb}(i,k)j_i j_k-\sum_{k=1}^{n}j_k\right],$$

$$h(J)=\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k^{j_k}.j_k!)}$$ olmak üzere, n tepeli etiketlenmemiş turnuvaların sayısı,

$$T(n)=\frac{1}{n!}\sum_{J}h(J).2^{g(J)}$$ dir.

Örnek II.3.1:

7 tepeli etiketlenmemiş turnuvaların sayısının, teorem II.3.1 yardımıyla belirlenmesi:

Bu problemde J dizisi için 5 ayrı olasılık vardır. Bu diziler ve karşı gelen g(J) ve h(J) değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

J	g(J)	h(J)
(7,0,0,0,0,0,0)	21	1
(4,0,1,0,0,0,0)	11	70
(1,0,2,0,0,0,0)	7	280
(2,0,0,0,1,0,0)	5	504
(0,0,0,0,0,0,1)	3	720

Böylece, $T(7)=\frac{2^{21}}{5040}+\frac{2^{11}}{72}+\frac{2^{7}}{18}+\frac{2^{5}}{10}+\frac{2^{3}}{7}=456$ bulunur.

$n\leq 12$ için, n tepeli etiketlenmemiş turnuvaların sayısı, J.W.Moon tarafından hesaplanmıştır. Buna göre,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T(n)	1	1	2	4	12	56	456	6880	191536	9733056	903753248	154108311168

dir.

II.4 Altturnuvalar

II.4.1 Kuvvetli Altturnuvalar

Bir T turnuvasının herhangi bir T' altturnuvasında, her bir tepeden,diğer bütün tepelere ulaşılabilen yönlü yollar varsa, T' ye T nin bir kuvvetli altturnuvası denir.

Teorem II.4.1:

$3 \leqslant k \leqslant n$ için, bir n-turnuvanın kuvvetli k-altturnuvalarının maksimum sayısı,

$$S(n,k)=\begin{cases} \binom{n}{k} - n\binom{m}{k-1} & , n=2m+1 \text{ ise}, \\ \binom{n}{k} - m\left[\binom{m}{k-1}+\binom{m-1}{k-1}\right] & , n=2m \text{ ise}, \end{cases}$$

dir.

Kuvvetli altturnuvaların minimum sayısı ise, ancak kuvvetli bir n-turnuva için formüle edilebilmiştir.

Teorem II.4.2:

$3 \leqslant k \leqslant n$ için, kuvvetli bir n-turnuvadaki, kuvvetli k-altturnuvaların minimum sayısı,

$$s(n,k)= n - k + 1$$

dir.

II.4.2 Geçişken Altturnuvalar

Bir T turnuvasının herhangi bir T' altturnuvası, geçişken bir turnuva oluşturuyorsa, T' ye T nin bir geçişken altturnuvası denir.

Geçişken altturnuvaların maksimum sayısı ancak kuvvetli bir n-turnuva için formüle edilebilmiştir.

Teorem II.4.3:

$3 \leqslant k \leqslant n$ için,kuvvetli bir n-turnuvadaki geçişken k-altturnuvaların maksimum sayısı,

$$t(n,k)= \binom{n}{k} - \binom{n-2}{k-2} \qquad \text{dir.}$$

II.5 Turnuvaların Otomorfizmi

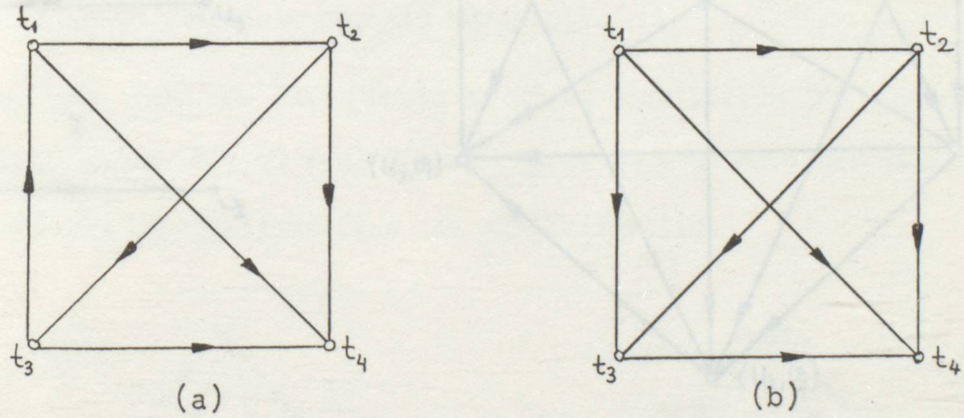
Bir T turnuvasında, tepeler kümesinin baskınlık özelliğini koruyan her bir permütasyonuna, T turnuvasının bir otomorfizmi denir. Daha açık olarak, tepeler kümesinin bir permütasyonunun otomorfizm olabilmesi için, her bir tepeye ait skorlar değişmemelidir.

Tanım II.5.1 Otomorfizm Grubu:

Bir T turnuvasının otomorfizmlerinin oluşturduğu gruba, T nin otomorfizm grubu denir ve $\Gamma(T)$ ile gösterilir.

Örneğin, şekil II.2.a daki 4-turnuvada $(t_1,t_2,t_3)(t_4)$ permütasyonu bir otomorfizmdir. Gerçekten, t_1,t_2,t_3 tepelerinin 3 lü permütasyonları alındığında skorları değişmez. O halde, bu 4-turnuvanın otomorfizm grubu, 3 mertebeli permütasyon grubuna izomorfdur.

Şekil II.2.b deki geçişken 4-turnuvanın ise sadece birim otomorfizmi vardır.



Şekil II.2

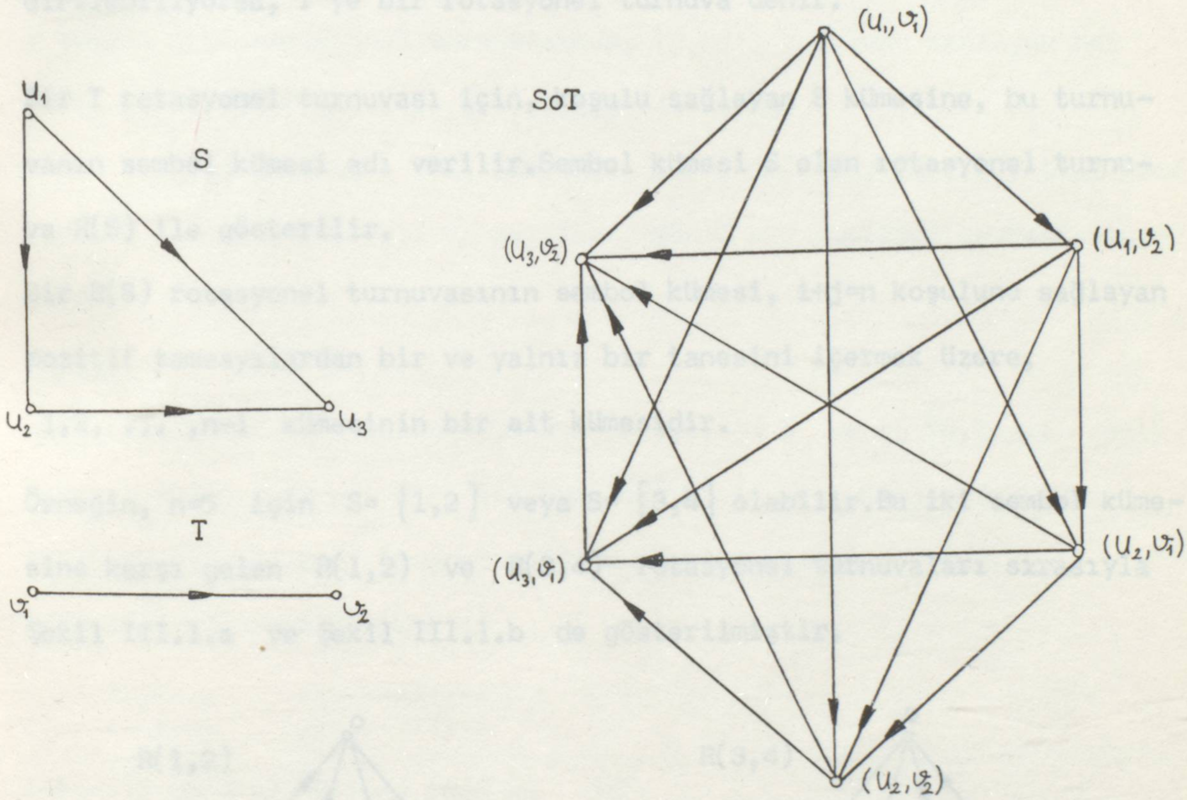
Teorem II.5.1:

Sonlu bir Γ grubunun, bir turnuvanın otomorfizm grubuna izomorf olabilmesi için gerek ve yeter koşul, Γ nın tek mertebeli olmasıdır.

Tanım II.5.2 Bileşke Turnuva:

S, $U=\{u_1,u_2, \ldots ,u_m\}$ tepe kümeli bir m-turnuva ve T, $V=\{v_1,v_2, \ldots ,v_n\}$ tepe kümeli bir n-turnuva olsun. h=i için T turnuvasında $v_j \rightarrow v_k$, $h \neq i$ için ise S turnuvasında $u_i \rightarrow u_h$ iken $(u_i,v_j) \longrightarrow (u_h,v_k)$ olmak üzere, UXV tepe kümeli turnuvaya, S ve T turnuvalarının bileşke turnuvası denir ve SoT ile gösterilir.

Şekil II.3 , geçişken 3-turnuva ile 2-turnuvanın bileşke turnuvasını göstermektedir.



Şekil II.3

Teorem II.5.2:

S ve T turnuvalarının bileşkelerinin otomorfizm grubu, bu turnuvalarının otomorfizm gruplarının bileşkesidir. Yani $\Gamma(SoT)=\Gamma(S)o\ \Gamma(T)$ dir.

BÖLÜM III

ROTASYONEL TURNUVALAR

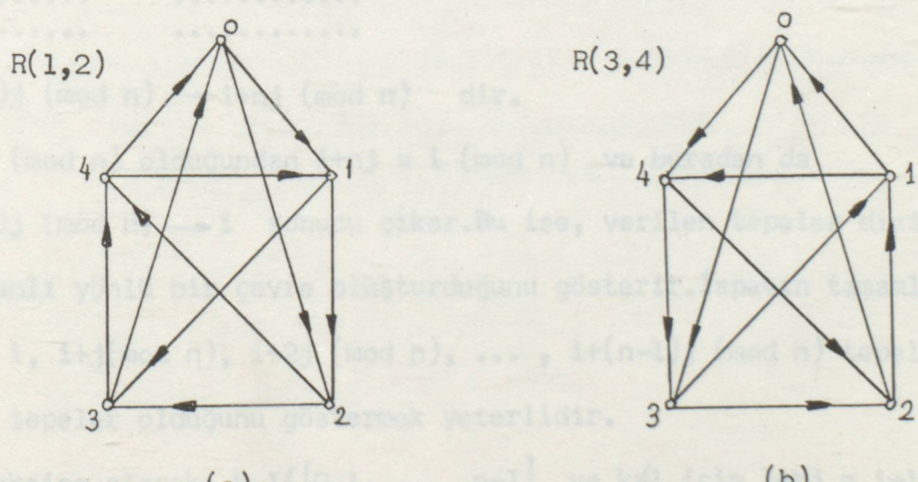
III.1 Tanım ve Özellikler:

T, düzenli bir turnuva ve S kümesi de $\{1,2, \ldots ,n-1\}$ kümesinin bir alt kümesi olsun. T turnuvasının tepeleri, ancak ve ancak $j \in S$ iken $i \longrightarrow i+j \pmod n$ olmak üzere $0,1,2, \ldots ,n-1$ sayılarıyla etiketlendirilebiliyorsa, T ye bir rotasyonel turnuva denir.

Bir T rotasyonel turnuvası için, koşulu sağlayan S kümesine, bu turnuvanın sembol kümesi adı verilir. Sembol kümesi S olan rotasyonel turnuva R(S) ile gösterilir.

Bir R(S) rotasyonel turnuvasının sembol kümesi, $i+j=n$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayılardan bir ve yalnız bir tanesini içermek üzere, $1,2, \ldots ,n-1$ kümesinin bir alt kümesidir.

Örneğin, $n=5$ için $S=\{1,2\}$ veya $S=\{3,4\}$ olabilir. Bu iki sembol kümesine karşı gelen R(1,2) ve R(3,4) rotasyonel turnuvaları sırasıyla Şekil III.1.a ve Şekil III.1.b de gösterilmiştir.



Şekil III.1

Görüldüğü gibi R(1,2) rotasyonel turnuvasında (0,1,2,3,4,0) ve (0,2,4,1,3,0) tepe dizilerini birleştiren ayrıtlar, yönlü birer Hamilton çevresi oluştururlar. Benzer şekilde, R(3,4) rotasyonel turnuvasında da (0,3,1,4,2,0) ve (0,4,3,2,1,0) tepe dizilerini birleştiren ayrıtlar yönlü birer Hamilton çevresi oluştururlar.

Bu özellik aşağıdaki teorem ile tüm rotasyonel turnuvalar üzerine genelleştirilir.

Teorem III.1.1:

n tepeli R(S) rotasyonel turnuvasında, $(j,n)=1$ koşulunu sağlayan her $j \in S$ ve bir $i \in \{0,1, \ldots ,n-1\}$ tamsayısı için,

$$i \; , \; i+j \pmod n \; , \; i+2j \pmod n \; , \; \ldots \; , \; i+(n-1)j \pmod n, \; i+nj \pmod n$$

tepeler dizisini birleştiren ayrıtlar, yönlü bir Hamilton çevresi oluşturur.

İspat:

R(S) rotasyonel turnuvasının tanımı gereği, $j \in S$ ve $i \in \{0,1, \ldots ,n-1\}$ için $i \rightarrow i+j \pmod n$ dir. $i+j \pmod n \in \{0,1, \ldots ,n-1\}$ olduğundan,

$i+j \pmod n \longrightarrow i+2j \pmod n$ olduğu açıktır. Benzer şekilde,

$i+2j \pmod n \longrightarrow i+3j \pmod n$

....
....

$i+(n-1)j \pmod n \longrightarrow i+nj \pmod n$ dir.

$nj \equiv 0 \pmod n$ olduğundan $i+nj \equiv i \pmod n$ ve buradan da

$i+(n-1)j \pmod n \longrightarrow i$ sonucu çıkar. Bu ise, verilen tepeler dizisinin n elemanlı yönlü bir çevre oluşturduğunu gösterir. İspatın tamamlanması için, i, $i+j \pmod n$, $i+2j \pmod n$, ... , $i+(n-1)j \pmod n$ tepelerinin farklı tepeler olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunun aksine olarak, $k,l \in \{0,1, \ldots ,n-1\}$ ve $k \neq l$ için $i+kj \equiv i+lj \pmod n$ olsun. Bu durumda $kj \equiv lj \pmod n$ ve $(j,n)=1$ olduğundan $k \equiv l \pmod n$

elde edilir. k ve l, Z/n kümesine ait olduklarından, bu denklik ancak k=l halinde geçerlidir. Bu çelişkiden dolayı, elde edilen n tane tepenin farklı tepeler oldukları sonucu çıkar.

Dolayısıyla, $i, i+j \pmod n, i+2j \pmod n, \ldots, i+(n-1)j \pmod n, i+nj \pmod n$ tepeler dizisinin, R(S) rotasyonel turnuvasında yönlü bir Hamilton çevresi oluşturduğu gösterilmiş olur.

Aşağıdaki teorem, bir R(S) rotasyonel turnuvasındaki yönlü Hamilton çevrelerinin sayısını belirler:

Teorem III.1.2:

$n>2$ için, n tepeli bir R(S) rotasyonel turnuvasındaki yönlü Hamilton çevrelerinin sayısı $\frac{1}{2}\varphi(n)$ dir. ($\varphi(n)$, Euler φ fonksiyonudur.)

İspat:

$[1,n-1]$ aralığındaki $(j,n)=1$ koşulunu sağlayan tamsayıların sayısı $\varphi(n)$ olduğundan, oluşabilecek yönlü Hamilton çevrelerinin sayısı $\varphi(n)$ dir.

Fakat, $(i,n)=1$ ve $i+j=n$ koşulunu sağlayan i,j tamsayılarının ürettiği yönlü Hamilton çevreleri aynı R(S) rotasyonel turnuvasında bulunamaz.

Çünkü, $(i,n)=1$ ve $i+j=n$ iken $(j,n)=1$ olup, buradan

$$0 \longrightarrow j$$

$$j \longrightarrow i+j \pmod n \Longrightarrow j \longrightarrow 0$$

elde edilir. Bu ise bir ayrıtın farklı iki yönlendirilişini göstermektedir.

$n>2$ için $\varphi(n)$ daima bir çift sayıdır. O halde,

$(i,n)=1$, $1 \leq i \leq n-1$ koşulunu sağlayan $i \in \mathbb{Z}$ sayıları,

$$\begin{array}{cc} \underline{i} & \underline{j} \\ i_1 & n-i_1 \\ i_2 & n-i_2 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

şeklinde ayrık iki kümeye ayrılabilir.Bu kümelerin her birinin eleman sayısının $\frac{1}{2}\varphi(n)$ olduğu açıktır.Bir R(S) rotasyonel turnuvasının sembol kümesinde, yukarıdaki şemada aynı yatay doğrultuya gelen elemanlardan bir ve yalnız bir tanesi yer alabileceğinden, bu turnuvadaki yönlü Hamilton çevrelerinin sayısı $\frac{1}{2}\varphi(n)$ olur.

III.2 Rotasyonel Turnuvaların Faktörizasyonu

Bu bölümde, n takım arasında düzenlenen deplasmanlı bir turnuvanın,aşağıdaki koşulları sağlayan organizasyonu gerçekleştirilecektir:

(i) Her bir takımın içeride ve dışarıda yapacağı maç sayıları eşittir,

(ii) Her bir takımın karşılaşma fikstürü, bir maç içeride bir maç dışarıda şeklindedir.Fakat, karşılaşma yapmadığı bir haftanın öncesi ve sonrası bu kurala uymayabilir.

(i) koşulu , T turnuvasındaki her bir t_i tepesi için $s(t_i)=s'(t_i)$ olmasını gerektirir.

$$drc(t_i)= s(t_i)+s'(t_i)=2s(t_i)$$

$$n-1 = 2s(t_i) \implies n=2s(t_i)+1 \quad \text{dir.}$$

Diğer bir deyişle, bu koşulu sağlayan deplasmanlı T turnuvası, düzenli ve tek mertebeli olmak zorundadır.Bu durumda bir rotasyonel turnuva ele alınabilir.

(ii) koşulu ise, turnuvanın her bir yönlü Hamilton çevresinde iki tane 1-faktör elde edilerek sağlanabilir.

Teorem III.1.2 dolayı, R(S) rotasyonel turnuvasında $\frac{1}{2}\varphi(n)$ tane yönlü Hamilton çevresi vardır.Bu durumda $2.\frac{1}{2}\varphi(n)=\varphi(n)$ tane 1-faktör elde edilecektir.

Görüldüğü gibi, n nin asal olduğu durumda $\ell(n)=n-1$ tane 1-faktör elde edilecektir.Bu ise, ancak asal mertebeli bir rotasyonel turnuvanın organizasyonunun, verilen koşulları sağlayacak şekilde gerçekleştirilebileceğini gösterir.

Aşağıda verilen algoritma, asal mertebeli bir R(S) rotasyonel turnuvasını 1-faktörlerine ayırır:

Algoritma:

i) R(S) turnuvasının, teorem III.1.1 yardımıyla $\frac{1}{2}\ell(n)=\frac{n-1}{2}$ tane yönlü Hamilton çevresi belirlenir.

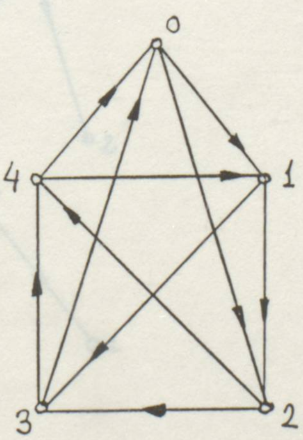
ii) Her bir yönlü Hamilton çevresine, hayali bir takım eklenerek, iki tane 1-faktör elde edilir.Bu 1-faktörlerde, eklenen hayali takımla eşleşen takım, haftayı karşılaşmasız geçiren takımdır.

iii) Elde edilen n-1 tane 1-faktör, R(S) turnuvasından silinerek, n. 1-faktör belirlenmiş olur.

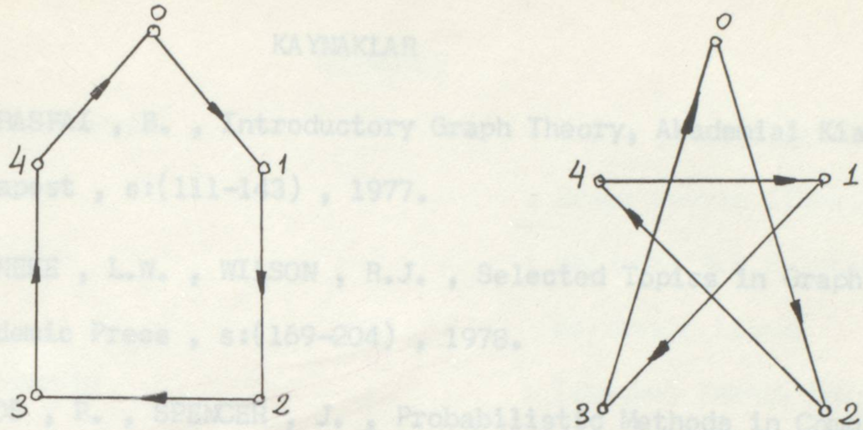
Örnek III.2.1:

R(1,2) rotasyonel turnuvasının, koşullara uygun faktörizasyonunun gerçekleştirilmesi:

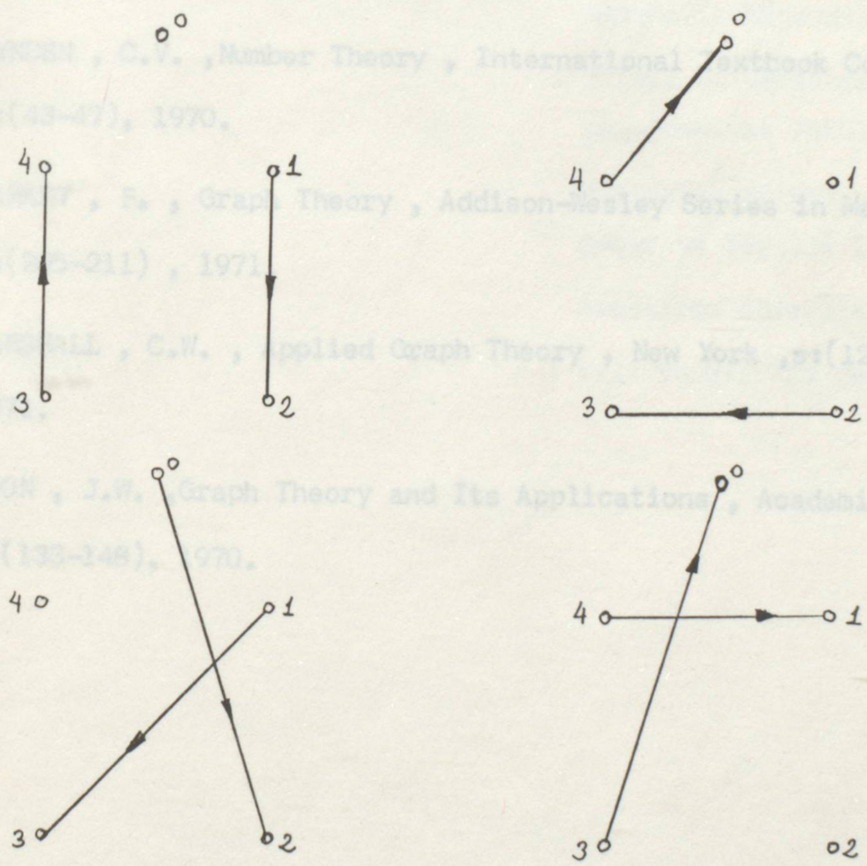
R(1,2)



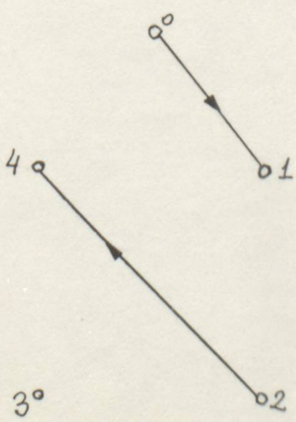
i)



ii)



iii)



KAYNAKLAR

1-) ANDRASFAI , B. , Introductory Graph Theory, Akademiai Kiado , Budapest , s:(111-143) , 1977.

2-) BEINEKE , L.W. , WILSON , R.J. , Selected Topics in Graph Theory, Academic Press , s:(169-204) , 1978.

3-) ERDOS , P. , SPENCER , J. , Probabilistic Methods in Combinatorics, New York , s:(9-13),(40-51),1974.

4-) EYNDEN , C.V. ,Number Theory , International Textbook Company, s:(43-47), 1970.

5-) HARARY , F. , Graph Theory , Addison-Wesley Series in Mathematics, s:(205-211) , 1971.

6-) MARSHALL , C.W. , Applied Graph Theory , New York ,s:(12-17),(99-139), 1971.

7-) MOON , J.W. ,Graph Theory and Its Applications , Academic Press , s:(133-148), 1970.

ÖZGEÇMİŞ

Doğduğu yer ve yıl	: Erdek , 2.1.1964
İlk öğrenim	: Erdek Devrim İlkokulu
Orta öğrenim	: Bandırma Ş.S.B Ortaokulu Balıkesir Lisesi
Yüksek Öğrenim	: İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü
Görevi	: Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi
Medeni Hali	: Evli ve bir kız çocuğu sahibi.