

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yavaş Değişen Faz ve Genlik Yöntemi

Serpil Öztürk

Yüksek Lisans Tezi

209

74

Met.

T.C.
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

10000 TL

YAVAŞ DEĞİŞEN FAZ ve GENLİK YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serpil ÖZTÜRK

İSTANBUL-1990

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot : R 209
74
Alındığı Yer : Fen Bilimleri Ens.
Tarih : 17.03.1992
Fatura :
Fiyatı : 10.000.-TL
Ayniyat No : 1/1
Kayıt No : 48190
UDC : 510
Ek :



İSTANBUL-1990

Ö Z E T

Çeşitli bilim dallarındaki diferansiyel denklemler lineer değildir. Fakat modern bilimde her tür olay lineer olma eğilimi ile açıklanmaz. Bu durumda non-linear diferansiyel denklemlere başvurulur.

T E Ş E K K Ü R

Bu denklemlerle mühendisler teorik matematiklerde ve özellikle fiziksel problemlerde, ilk çalışmalar Amerika, Rusya ve İngiltere'de yapılmıştır.

Tüm çalışmalarımda bana en büyük desteği veren, yol gösteren, yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Yaşar ÖZDEMİR'e teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Serpil ÖZTÜRK

Ö Z E T

Çeşitli bilim dallarındaki diferansiyel denklemler lineer tiptedir. Fakat modern bilimde her tür olay lineer olma özelliği ile açıklanamaz. Bu durumda non-lineer diferansiyel denklemlere başvurulur.

Bu denklemlerle mühendisler teorik matematikçilerden daha fazla ilgilenmişlerdir. İlk çalışmalar Amerika, Rusya ve İngiltere'de başlatılmıştır.

Non-Lineer denklemler genellikle bilinen fonksiyonlar cinsinden integre edilemez. Bu nedenle başlangıç şartlarına uygun yaklaşık çözümler bulunur.

Bu çalışmada Non-Lineer diferansiyel denklemlerde faz ve genlik metodu incelenmiştir.

S U M M A R Y

Linear Differential Equations is always large studying subject in different science sections. But in modern science, some natural events can not be explain by linear characteristics, therefore necessity to apply Non-Linear differential equations appeared.

Most of the time The Non-Linear Differential Equations are used by Engineers. The solution methods of this equations is neglected by the theoretical mathematics. The first study was started in USA, Russia, England.

That Equations penerally was not integrable as the kind of the know functions. Therefore, approximate solutions are found which is appropriate with physical quality of a problem in that study phose and amplitude methods in the Non-Linear differential equations examined.

YAVAŞ DEĞİŞEN FAZ VE GENLİK YÖNTEMİ

1.1. Giriş

Bir non-lineer diferansiyel denklemin çözümü,

$$y=A(t)\sin[\omega t+\varphi(t)] \quad (1.1)$$

şeklini aldığı zaman bilinen yaklaşım yöntemi non-lineer denklemlere de uygulanabilir. Burada A genliği ve faz açısı t nin fonksiyonlarıdır. ω açısal frekansı ile mukayese edilen, A ve φ nın değişim oranı çok küçüktür. Bazı durumlarda A(t) değişken fakat $\varphi(t)$ sabit olabilir. veya bunun tersi de olabilir. Bir kısa zaman aralığından sonra A(t) uygun bir sabit olabilir. Yani, $t \rightarrow \infty$ giderken A(t), bir a sabitine veya sıfıra asimtotik olarak yaklaşabilir. Buna

$$I=I_0 e^{-Kt} \sin(\omega t+\varphi) \quad (1.2)$$

bağıntısıyla verilmiş olan akım içindeki LCR lineer elektrik devresinin serbest salınım fonksiyonu bir örnek olarak verilebilir. Burada φ sabit bir faz açısı olduğunda $t \rightarrow \infty$ giderken

$$A(t)=I_0 e^{-Kt} \rightarrow 0$$

olur.

$$\ddot{y}+\epsilon g(y,\dot{y})+\omega^2 y=0 \quad (1.3)$$

şeklindeki bir diferansiyel denklem gözönüne alalım. Burada $\epsilon g(y,\dot{y})$ nispeten küçük non-lineer terim olup, g fonksiyonu, $y,\dot{y}$ nın bir fonksiyonudur. $\dot{y}$, y nin zamana göre birinci meriteden türevidir. (1.3) diferansiyel denklemindeki non-lineer terim ihmal edilirse, (1.3) denklemi

$$\ddot{y}+\omega^2 y=0 \quad (1.4)$$

şeklinde bir lineer denkleme indirgenir. Bu denklemin genel çözümü; A_1, B_1 keyfi sabitler olmak üzere

$$y = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \quad (1.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Bir anlamda (1.5) fonksiyonu bir ilk yaklaşım gibi kabul edilebilirse de bu fonksiyon non-lineer olmayan bir özelliğe sahiptir. (1.5) bağıntısı $A = (A_1^2 + B_1^2)^{1/2}$ ve $\varphi = \tan^{-1}(\frac{A_1}{B_1})$ olarak seçilen keyfi sabitler olmak üzere (1.5) bağıntısı (1.1) şeklinde ifade edilebilir $x = (\omega t + \varphi)$ alınırsa çözüm,

$$y = A \sin x \quad (1.6)$$

şeklini alır.

$$\dot{y} = A \omega \cos x \quad (1.7)$$

olur. Şimdi de A ve φ nin t ile yavaş yavaş değiştiğini kabul edelim. Bu halde (1.6) bağıntısından t ye göre türev alınırsa

$$\dot{y} = \dot{A} \sin x + A(\omega + \dot{\varphi}) \cos x \quad (1.8)$$

elde edilir. $\dot{y}$ nin (1.7) bağıntısındaki değeri (1.8) bağıntısında yerine konursa

$$\dot{A} \sin x + A \dot{\varphi} \cos x = 0 \quad (1.9)$$

elde edilir. (1.7) bağıntısının t ye göre türevi alınırsa

$$\ddot{y} = \dot{A} \omega \cos x - A \omega (\omega + \dot{\varphi}) \sin x \quad (1.10)$$

bulunur. (1.6), (1.7), (1.10) bağıntıları (1.3) diferansiyel denklemine götürülürse

$$\dot{A} \cos x - A \dot{\varphi} \sin x = -\frac{\varepsilon}{\omega} g(A \sin x, A \omega \cos x) \quad (1.11)$$

olur. (1.9) bağıntısı $\sin x$ 'le (1.11) bağıntısı da $\cos x$ 'le çarpılır ve toplanır

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon}{\omega} g(A \sin x, A \omega \cos x) \cos x \quad (1.12)$$

elde edilir. Bu defa (1.9) bağıntısı $\cos x$ 'le (1.12) bağıntısı da $-\sin x$ le çarpılır ve toplanır

$$\dot{\varphi} = \frac{\epsilon}{\omega A} g(A \sin x, A \omega \cos x) \sin x \quad (1.13)$$

bulunur. Hipotezlere göre $\frac{2\pi}{\omega}$ peryodu içinde $\dot{A}$ ve $\dot{\varphi}$ fonksiyonları çok küçük değişimler yapar. Bu $\Psi = \omega t$ nin 2π peryoduna karşılık gelir. Ψ de bir 2π peryodu üzerinde $\dot{A}$ ve $\dot{\varphi}$ nin ortalama değerlerinin, düşünülen yaklaşımın derecesine uygun olduğunu varsayıyoruz. Bu taktirde (1.12) ve (1.13) bağıntılarından $\dot{A}$ ve $\dot{\varphi}$ nin ortalama değerleri olarak

$$\dot{A} = - \frac{\epsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} g(A \sin \Psi, A \omega \cos \Psi) \cos \Psi d\Psi \quad (1.14)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\epsilon}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} g(A \sin \Psi, A \omega \cos \Psi) \sin \Psi d\Psi \quad (1.15)$$

bulunur. $x = \omega t + \varphi$ olduğundan

$$\dot{x} = \omega + \frac{\epsilon}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} g(A \sin \Psi, A \omega \cos \Psi) \sin \Psi d\Psi \quad (1.16)$$

olur. Sıkıştırılmış kuvvet yada yay kontrol kuvveti $y^2, y^3, \dots$ ün terimlerini kapsadığı zaman A etkilenmez; çünkü (1.14) bağıntısına karşılık gelen integraller sıfır olur. bu terimler φ yi etkiler. Bundan dolayı karşılık gelen integraller sıfır olmaz. Buna benzer olarak $\dot{y}, \dot{y}^2$ sönüm terimleri A yi etkiler fakat φ yi etkilemez. O halde ilk yaklaşımda non-lineer kontrol terimleri frekansı etkiler fakat genliği etkilemez. Oysa sönüm terimleri genliği etkiler fakat frekansı etkilemez. Daha yüksek yaklaşımlarda bu terimler genlik ve frekansın her ikisini de etkiler.

$$1.2. \quad \ddot{y} - \epsilon(1-y^2)\dot{y} + y = 0 \quad (0 < \epsilon < 1) \quad (1.17)$$

Şeklindeki Termiyonik Osilator Valf Denkleminin
Çözülmesi

Burada

$$g(y, \dot{y}) = -(1-y^2)\dot{y} = -(1-A^2 \sin^2 x) A \omega \cos x \quad (1.18)$$

dir. (1.18) bağıntısı (1.14) bağıntısında yerine koyar, x yerine Ψ yazılırsa

$$\dot{A} = \frac{\epsilon A}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1-A^2 \sin^2 \Psi) \cos^2 \Psi d\Psi = \frac{1}{2} \epsilon A (1 - \frac{1}{4} A^2) \quad (1.19)$$

olur. Sürekli durum etkili olduğu zaman $\dot{A}=0$ dır. Salınımın artması süresince t nin bir fonksiyonu olan A , (1.19) bağıntısından

$$2A\dot{A} = \frac{1}{4} \epsilon (4A^2 - A^4) = \frac{1}{4} \epsilon [4 - (A^2 - 2)^2] \quad (1.20)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$4 \int \frac{d(A^2 - 2)}{4 - (A^2 - 2)^2} = \epsilon \int dt + \log B = \log \left[\frac{A^2}{(4 - A^2)} \right] = \epsilon t + \log B \quad (1.21)$$

veya

$$\frac{A^2}{(4 - A^2)} = B e^{\epsilon t} \quad (1.22)$$

olur. Buradan

$$A^2 = \frac{4B e^{\epsilon t}}{(1 + B e^{\epsilon t})} \quad (1.23)$$

elde edilir. Eğer $t=0$ için $A=A_0$ ise $B = \frac{A_0^2}{(4 - A_0^2)}$ bulunur.

Dolayısıyla bu ve (1.23) bağıntısından

$$A^2 = \frac{A_0^2 e^{\epsilon t}}{[1 + \frac{1}{4} A_0^2 (e^{\epsilon t} - 1)]} \quad (1.24)$$

veya

$$A = \frac{A_0 e^{\frac{1}{2}\epsilon t}}{[1 + \frac{1}{4} A_0^2 (e^{\epsilon t} - 1)]^{1/2}} \quad (1.25)$$

bulunur.

Eğer $t=0$ için $A_0=0$ ise $A=0$ dır. Bu durum salınımın olmadığı anlamına gelir. Burada, $A_0 > 0$ iken salınımın dış vasıta ile başlaması gereklidir. (1.25) denkleminde, t nin artımı ile A nin monoton olarak arttığı görülür ve $t \rightarrow \infty$ giderken en son değer 2 olur. Eğer $A_0 > 2$ olduğu kabul edilirse genlik azalacak ve $t \rightarrow \infty$ giderken $A \rightarrow 2$ gidecektir.

Yukarıda görülen (1.18) bağıntısında x yerine Ψ yazılırsa ve (1.15) bağıntısı gözönüne alınırsa

$$\dot{\varphi} = - \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \sin^2 \Psi) \cos \Psi \sin \Psi d\Psi = 0 \quad (1.26)$$

bulunur. $\omega=1$, $t=0$ için φ_0 , x 'in keyfi bir değeri olduğu zaman

$$x = t + \varphi_0 \quad (1.27)$$

olur. O halde düşünülen yaklaşımın derecesine göre (1.17) denkleminin çözümü; (1.1) denklemi ve yukarıdaki (1.26), (1.27) bağıntılarına göre

$$y = A(t) \sin(t + \varphi_0) \quad (1.28)$$

bulunur. $t \rightarrow +\infty$ giderse

$$y = \frac{A_0 e^{\frac{1}{2}\epsilon t} \sin(t + \varphi_0)}{[1 + \frac{1}{4}A_0^2(e^{\epsilon t} - 1)]^{1/2}} \rightarrow 2 \sin(t + \varphi_0) \quad (1.29)$$

olur.

1.3. a, c, K Sıfır Olmayan Pozitif Sayılar Olmak Üzere

$$\ddot{y} - 2K\dot{y} + c\dot{y}^3 + ay = 0 \quad (1.30)$$

Diferansiyel Denklemin Çözülmesi

Bu denklem elektriki olarak çalışan bir diyapozonun titreşim denklemidir. $-2K\dot{y}$ terimine, bir sürücü kuvvete eşdeğerli bir negatif direnç içeri sokan bir terim gibi bakılabilir. Sonra başlangıç cırcıyanı kesilir ve hareket periyodiktir.

§ 1.1 ve § 1.2 deki gibi

$$\epsilon g(y, \dot{y}) = -gK\dot{y} + c\dot{y}^3 \quad (1.31)$$

kabul edebiliriz. (1.14) bağıntısında $a=\omega^2$ alınırsa

$$\dot{A} = \frac{2k}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} A \omega \cos^2 \Psi d\Psi - \frac{c}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} A^3 \omega^3 \cos^4 \Psi d\Psi \quad (1.32)$$

$$\dot{A} = KA - \frac{3}{8} c \omega^2 A^3 = A(K - \frac{3}{8} c \omega^2 A^2) \quad (1.33)$$

bulunur. 0 zaman $\dot{A}=0$ olup hareket periyodiktir. Böylece son genlik $K - \frac{3}{8} c \omega^2 A^2=0$ ile verilmiştir. Buradan

$$A = \frac{2}{\omega} \left(\frac{2K}{3c} \right)^{1/2} \quad (1.34)$$

bulunur. $A(t)$ yi bulmak için (1.33) bağıntısı bir diferansiyel denklem gibi çözülür. Böylece $p = \frac{4K}{3c\omega^2}$ olmak üzere

$$A\dot{A} = \frac{K}{2p} [p^2 - (A^2 - p)^2] \quad (1.35)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$2p \int \frac{d(A^2 - p)}{[p^2 - (A^2 - p)^2]} = 2K \int dt + \log B \quad (1.36)$$

veya integral hesaplanarak

$$\log \left[\frac{A^2}{(2p - A^2)} \right] = 2Kt + \log B \quad (1.37)$$

bulunur. 0 halde

$$\frac{A^2}{(2p - A^2)} = Be^{2Kt} \quad (1.38)$$

olur. Eğer $t=0$ olduğu zaman $A=A_0$ oluyorsa

$$B = \frac{A_0^2}{(2p - A_0^2)}$$

olarak hesaplanır. (1.38) bağıntısından

$$A^2 = \frac{2pBe^{2Kt}}{(1 + Be^{2Kt})} \quad (1.39)$$

yazılır ve (1.39) bağıntısında B ve p değerleri yerine yazılırsa

$$A^2 = \frac{A_o^2 e^{2Kt}}{\left[1 + \left(\frac{3c}{8K}\right) \omega^2 A_o^2 (e^{2Kt} - 1)\right]} \quad (1.40)$$

olur. Dolayısıyla

$$A(t) = \frac{A_o e^{Kt}}{\left[1 + \left(\frac{3c}{8K}\right) \omega^2 A_o^2 (e^{2Kt} - 1)\right]^{1/2}} \quad (1.41)$$

olarak bulunur.

Eğer $t=0$ için $A_o=0$ oluyorsa hareket yoktur. Böylece çatal başlangıç anında harekete geçmelidir. (1.34) bağıntısından en son genlik

$$A_s = \left(\frac{2}{\omega}\right) \left(\frac{2K}{3c}\right)^{1/2}$$

olur.

Eğer $A_o < A_s$ ise genlik büyür oysa $A_o > A_s$ ise genlik (1.41) bağıntısındaki tanımlanmış tarzda A_s değerine doğru azalır. (1.15) bağıntısından

$$\dot{\varphi} = -\frac{2K}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} A \omega \cos \Psi \sin \Psi d\Psi + \frac{c}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} A^3 \omega^3 \cos^3 \Psi \sin \Psi d\Psi = 0 \quad (1.42)$$

bulunur. Yani,

$$\varphi = \varphi_o \quad (1.43)$$

ve $t=0$ için x in bir keyfi değeri

$$x = \omega t + \varphi_o \quad (1.44)$$

olur. Böylece (1.1) denkleminde ve yukarıdaki (1.41), (1.44) bağıntılarından (1.30) denkleminin bir yaklaşık çözümü olarak

$$y = \frac{A_o e^{Kt} \sin(\omega t + \varphi_o)}{\left[1 + \left(\frac{3c\omega^2}{8K}\right) A_o^2 (e^{2Kt} - 1)\right]^{1/2}} \quad (1.45)$$

bulunur. Sağlanan elektrik enerjisi kesildiği zaman, $K=0$ ve (1.45) bağıntısı $t \rightarrow +\infty$ giderken

$$y = \frac{A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)}{(1 + \frac{3}{4} c \omega^2 A_0^2)^{1/2}} \rightarrow 0 \quad (1.46)$$

şekline indirgenir. Böylece diyapozon hareketsiz hale gelir.

1.4. $2K\dot{y}$ ve by^3 Terimleri Nispeten Küçük ve $a, b, K > 0, a > K^2$ Olmak Üzere

$$\ddot{y} + 2K\dot{y} + ay + by^3 = 0 \quad (1.47)$$

Diferansiyel Denkleminin Çözülmesi

$2K\dot{y}$ ile ifade edilen terim viscous yavaşlatmasına sahiptir. Bu taktirde (1.14) bağıntısında, $\omega = a^{1/2}$ alınarak

$$\dot{A} = -\frac{2K}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} A\omega \cos^2 \Psi d\Psi - \frac{b}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^3 \Psi \cos \Psi d\Psi \quad (1.48)$$

yazılır ve integraller hesaplanırsa

$$\dot{A} = -KA \quad (1.49)$$

bulunur. Buradan

$$\int \frac{dA}{A} = -K \int dt \quad (1.50)$$

yazılır ve integraller hesaplanırsa

$$\log A = -Kt + \log B_1 \quad (1.51)$$

elde edilir. $t=0$ için A nın değeri A_0 ise

$$A = A_0 e^{-Kt} \quad (1.52)$$

yazılır. Bu kez (1.15) bağıntısına göre

$$\dot{\varphi} = \frac{2K}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} A\omega \cos \Psi \sin \Psi d\Psi + \frac{b}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^4 \Psi d\Psi \quad (1.53)$$

yazılır ve integraller hesaplanırsa

$$\dot{\varphi} = \frac{3bA^2}{8\omega} \quad (1.54)$$

elde edilir. A nın sabit olduğu düşünülür ve integral hesaplanırsa

$$\varphi = \frac{3bA^2 t}{8\omega} + \varphi_0 \quad (1.55)$$

bulunur. Bundan dolayı (1.16) bağıntısı ve son bağıntıya göre

$$x = \left(\omega + \frac{3bA^2}{8\omega}\right)t + \varphi_0 \quad (1.56)$$

şeklini alır. Böylece (1.47) denkleminin yaklaşık çözümü için (1.1) çözüm fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ $x = \omega t + \varphi(t)$ yerine x in (1.56) değeri yazılırsa

$$y = A_0 e^{-Kt} \cos \left[\omega + \left(\frac{3bA^2}{8\omega} \right) \right] t \quad (1.57)$$

bulunur. $\omega = a^{1/2}$ konulursa ve (1.52) bağıntısı kullanılırsa

$$y = A_0 e^{-Kt} \cos \left[a^{1/2} + \frac{3bA_0^2 e^{-2Kt}}{8a^{1/2}} \right] t \quad (1.58)$$

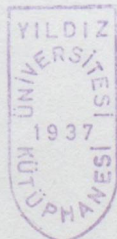
bulunur. Bir t anında başlamış olan hareket üstel olarak yavaş yavaş sönümlenir. Formüldeki e^{-2Kt} den dolayı açısal frekans için t nin artması ile azalır. Bu genlikteki azalmaya karşılık gelir.

$$1.5. \quad \ddot{\theta} + [-2K\dot{\theta} + (\alpha|\dot{\theta}| + \beta\dot{\theta}^3 - \gamma\theta^3)] + \omega^2\theta = 0 \quad (1.59)$$

Diferansiyel Denkleminin Çözülmesi

Köşeli parantez içindeki kısımlar yeterince küçük olacak şekilde α, β, γ, K pozitif sabitlerdir. Bu diferansiyel denklem, saptanan bir donatımla uygun bir geminin yuvarlanış problemi içinde meydana gelir ve bu kontrolün fazı tersine dönüştürüldüğünde uygulanır. Tersine çevrildikten sonra hareketin genliği büyür, salınım periyodik olduğundan bir en son değere uzanır. Bu sadece $K > 0$ olduğunda meydana gelir.

$2K\dot{\theta}$ terimi $\beta_1\dot{\theta} - \alpha_1\dot{\theta}$ olarak yazılabilir. Eğer $K > 0$ olduğunda $\beta_1 > \alpha_1$ ise sönüm negatiftir ve periyodik salınımı sürdürmek için gerekli dengeleyici enerjiye ihtiyaç vardır.



$$\dot{A} = \frac{2k}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} A\omega \cos^2 \Psi d\Psi - \frac{\alpha}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} A^2 \omega^2 |\cos \Psi| \cos^2 \Psi d\Psi -$$

$$- \frac{\beta}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} A^2 \omega^3 \cos^4 \Psi d\Psi + \frac{\gamma}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^3 \Psi \cos \Psi d\Psi \quad (1.60)$$

$$\dot{A} = A \left(K - \frac{4\alpha\omega A}{3\pi} - \frac{3}{8} \beta \omega^2 A^2 \right) \quad (1.61)$$

bulunur.

$\dot{A}=0$ olduğu zaman hareket periyodiktir ve bundan dolayı (1.61) bağıntısı

$$\frac{3}{8} \beta \omega^2 A^2 + \frac{4\alpha\omega A}{3\pi} - K = 0 \quad (1.62)$$

olur. (1.62) bağıntısı çözülür ve pozitif kökü seçilirse,

$$A = \frac{16\alpha}{9\pi\beta\omega} \left[\left(1 + \frac{27\pi^2\beta K}{32\alpha^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (1.63)$$

bulunur. Eğer $\frac{27\pi^2\beta K}{32\alpha^2} \ll 1$ ise (1.63) bağıntısı yaklaşık olarak

$$A \approx \frac{16\alpha}{9\pi\beta\omega} \left[1 + \frac{27\pi^2\beta K}{64\alpha^2} - 1 \right] = \frac{3\pi K}{4\alpha\omega} \quad (1.64)$$

olur. (1.15) bağıntısına göre

$$\dot{\varphi} = - \frac{\gamma}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^4 \Psi d\Psi = - \frac{3\gamma A^2}{8\omega} \quad (1.65)$$

bulunur. Çünkü (1.59) denklemindeki köşeli paranteze karşılık gelen diğer üç integral sıfıra eşittir. Böylece sabit hal süresince

$$\varphi = - \frac{3\gamma A^2 t}{8\omega} + \varphi_0 \quad (1.66)$$

olur. Burada A sabit olup (1.64) bağıntısındaki değerine eşittir ve φ_0 keyfi bir faz açısıdır. Buradan da

$$x = \omega t + \varphi = \left(\omega - \frac{3\gamma A^2}{8\omega} \right) t + \varphi_0 \quad (1.67)$$

bulunur. Peryodik çözüm olarak

$$\Theta = \left(\frac{3\pi K}{4\alpha\omega} \right) \sin \left[\omega \left(\frac{1 - 27\pi^2 K^2 \gamma}{128\alpha^2 \omega^2} \right) t + \varphi_0 \right] \quad (1.68)$$

sonucuna varılır.

Salınımın açısal $\omega_0 = \left[\omega - \left(\frac{3\gamma A^2}{8\omega} \right) \right]$ frekansı A daki büyüme ile azalır.

1.6. § 1.5 de (1.61) Bağıntısıyla Elde Edilen

$$\dot{A} = A \left(K - \frac{4\alpha\omega A}{3\pi} - \frac{3}{8} \beta \omega^2 A^2 \right) \quad (1.69)$$

Diferansiyel Denkleminin Çözülmesi

Çözümü basitleştirmek için $K=0$ alacağız ve pozitif sönümlenen sistem için genliğin azalma konumunu bulacağız.

(1.69) bağıntısında $K=0$ alınır ve düzenlenirse

$$\frac{dA}{dt} = -A^2 \left(\frac{4\alpha\omega}{3\pi} + \frac{3}{8} \beta \omega^2 A \right) \quad (1.70)$$

bulunur $\delta = \frac{16\alpha}{9\pi\beta\omega}$ alınır

$$\frac{dA}{dt} = - \frac{3}{8} \beta \omega^2 A^2 (A + 2\delta) \quad (1.71)$$

yazılır. Buradan

$$\int \frac{dA}{A^2 (A + 2\delta)} = - \frac{3}{8} \beta \omega^2 t + B_1 \quad (1.72)$$

olur. Bu integral

$$\frac{1}{4\delta^2} \int \frac{dA}{(A + 2\delta)} = \frac{1}{4\delta^2} \int \frac{dA}{A} + \frac{1}{2\delta} \int \frac{dA}{A^2} = \frac{1}{4\delta^2} \log \left(\frac{A + 2\delta}{A} \right) - \frac{1}{2\delta A} \quad (1.73)$$

şeklinde yazılabilir. Azalmanın başlangıcında eğer $\frac{2\delta}{A} \ll 1$ ise, yaklaşık olarak

$$\frac{1}{4\delta^2} \log(1 + \frac{2\delta}{A}) - \frac{1}{2\delta A} = \frac{1}{4\delta^2} (\frac{2\delta}{A} - \frac{2\delta^2}{A^2}) - \frac{1}{2\delta A} = -\frac{1}{2A^2} \quad (1.74)$$

bağıntısına sahip oluruz.

(1.72) ve (1.74) bağıntıları

$$\frac{1}{A^2} = \frac{3}{4} \beta \omega^2 t + B \quad (1.75)$$

sonucunu verir. Eğer $t=0$ için $A=A_0$ ise $B = \frac{1}{A_0^2}$ olur ve

$$A(t) \approx \frac{A_0}{(1 + \frac{3}{4} A_0^2 \beta \omega^2 t)^{1/2}} \quad (1.76)$$

bulunur.

Bu suretle eğer sabit hal süresince K sıfır yapılırsa bu kurala bağlı olarak salınım azalır. (1.76) bağıntısı A_0 büyüklüğü genlikteki daha hızlı azalmayı gösterir. (1.67) bağıntısına göre salınımın oranı A daki azalma ile artar. Sönümleyici kuvvetlerden ayrı olarak, geri getirici kuvvet ve basit bir salınımın davranış biçimi yerçekiminden dolayıdır. Sertlik veya kuvvetin türevleri açısal yer değiştirmeye göre genlikteki artımla azalır.

1.7. Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözülmesi

$$\ddot{\phi} - b\dot{\phi} + c\phi^3 + a\phi = 0 \quad (1.77)$$

$$\ddot{\theta} + b_1\dot{\theta} + a_1\theta = -K_1\phi + K_2\phi^3 \quad (1.78)$$

bütün sabitler pozitif ve sıfırdan farklıdır. Bu denklemler gemi stabilization teorisinde meydana gelir ve problem hareketi incelemektir. Eğer $b=2K$ ve $\phi=y$ alınırsa (1.77) denklemi (1.30) de elektriklerle beslenen diyapozon için verilen denklemlerle aynıdır. $t \rightarrow +\infty$ giderken, $a=\omega^2$, $b=2K$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ (keyfi) alınarak periyodik çözüm (1.45) bağıntısından bulunabilir. Bu taktirde

$$A = \left(\frac{4b}{3\omega^2 c} \right)^{1/2}, \quad \Psi = \omega t \text{ olmak üzere}$$

$$\phi = A \cos \Psi \quad (1.79)$$

olur. Genellikle $\frac{K_2}{K_1} \ll 1$ olduğundan (1.78) denklemindeki son terim ihmal edilebilir. (1.79) denkleminden ϕ değeri (1.78) denkleminde yerine yazılırsa

$$\ddot{\Theta} + b_1 \dot{\Theta} + a_1 \Theta = B \sin \Psi \quad (1.80)$$

eşitliği bulunur. Burada $B = K_1 \omega A$ dır.

(1.80) denkleminin çözümünde tamamlayıcı fonksiyon ihmal edilebilir. Çünkü $t \rightarrow \infty$ giderken üstel sönümlenmiş dairesel bir fonksiyondur. O zaman $a_1 = \omega_1^2$, $\epsilon = \tan^{-1} |(\omega_1^2 - \omega^2)/b_1 \omega|$ olmak üzere (1.80) denkleminin belirli integrali,

$$\Theta = - \frac{A \omega K_1 \cos(\Psi + \epsilon)}{[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b_1^2]^{1/2}} \quad (1.81)$$

olur. Böylece en son hareket periyodik olup ve periyod $\frac{2\pi}{\omega}$ dir.

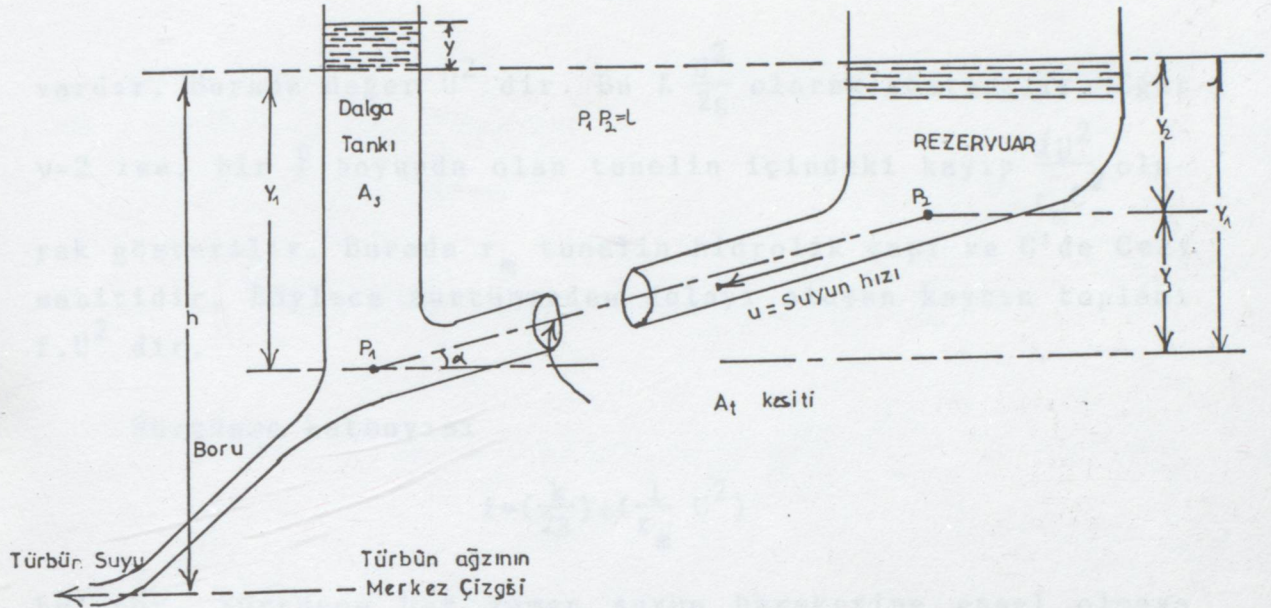
Genlik ise

$$|\Theta_0| = \frac{A \omega K_1}{[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b_1^2]^{1/2}} \quad (1.82)$$

olur.

1.8. Hydro-Elektrik Tesisatında Dalgalanma

Şekil 1 de, hidro elektrik güç santrali için basit bir dalgalanma tankının genel düzenlemesi gösterilmiştir. Burada elektrik jeneratörleri çalıştıran su; bir tunnel ve boru hattı yardımıyla bir rezervuardan sağlanır. Boru hattının en düşük seviyesine yerleştirilen ve arzu edildiği gibi açılıp kapanabilen valfler yardımıyla türbünlere gelen suyun akış oranı kontrol edilir. Fazla miktardaki suyu, vanalar kapatıldığında sistemdeki büyük basınç artışlarına engel olmak için dalga tankı tünelin en alçak bölümüne yerleştirilmiştir.



Şekil 1.

Dalga tankı ile sağlanan hidroelektrik sistemin şeması.

Düzenli akış sırasında tank içindeki su seviyesi yukarı doğru yükselir ve burada basınç emniyetli bir değere kısıtlanmış-
tır. Vanalar açıldığında tankın içindeki su dışarı akar.
Tanktaki suyun artışı rezervuardan sağlanır. Her durumda tu-
nelin içindeki suyun hızı olan U düzenli durumdadır.

Türbüne giden suyun akışı anındaki her hangi bir değişmede tank, tunel ve rezervuardaki değişmelere neden olur. Bu düzgün olmayan kesite sahip olan U tüpünün bir birleşimi olarak adlandırılır.

Sürtünme hakkında uyarı:

Bir tunelde yada boruda su akışı olduğunda bütün kesit kullanılır. Sürtünme kuvveti suyun akış hızı ile orantılı olacağı deneylerle gösterilmiştir. Demir yada çelik boruda bu sürtünme kuvveti 2 den oldukça az olabilir. Bir beton boruda 2'ye yaklaşır.

Sürdünmeden dolayı oluşan basınç kaybı yani; yüksek bir su sütunu aynı basıncı verebilir. Buradaki değişimler U olarak gösterilir. Hatta tunel çıkışında da basınç kaybı

vardır. Burada değer U^2 dir. Bu $K \frac{U^2}{2g}$ olarak gösterilir. Eğer $v=2$ ise, bir l boyunda olan tunnelin içindeki kayıp $\frac{4U^2}{r_m C^2}$ olarak gösterilir. Burada r_m tunnelin hidrolik çapı ve C' de Cezy sabitidir. Böylece sürtünmeden dolayı oluşan kaybın toplamı $f.U^2$ dir.

Sürtünme katsayısı

$$f = \left(\frac{k}{2g} \right) + \left(\frac{1}{r_m} C^2 \right)$$

bulunur. Sürtünme her zaman suyun hareketine engel olmaya çalıştığı için bir diferansiyel eşitlikte $\mp f U^2$ yada onun eş-değeri olan $-f|U|U$ yazılmalıdır.

1.9. Diferansiyel Denklem Türetilmesi

Aşağıdaki varsayımları yapabiliriz.

- (i) Rezervuarın kesiti dalga tankından çok büyüktür ve su seviyesi daima sabittir.
- (ii) Tunnel, tank ve boru hattı her yerde aynı kesite sahiptir.
- (iii) Suyun ataleti ve dalga tanktaki sürtünme ihmal edilebilir.
- (iv) Şekil 1 deki $(h+y)$ esas sabittir. Yani; $y \ll h$ bundan dolayı boru içindeki suyun akış oranı y' den bağımsızdır.

Kuvvet İliřkisi:

Kütle x ivme = (tunnel girişindeki su basıncının kuvveti)
+(tunneldeki suyun ağırlığının bileşenleri)
-(tunnelin sonunda alttaki basınca ait kuvvet)
-(sürtünme kuvveti)

olur.

Böylece eğer ω , suyun bir kubik foot'unun ağırlığı ve g de yerçekimine ait ivme ise

$$Y_3 = f \sin \alpha \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{\omega f A_t}{g} \frac{du}{dt} = A_t P_2 + \omega f A_t \sin \alpha - A_t P_1 + \omega f A_t U^2 / r_m C^2 \quad (1.83)$$

veya

$$\left(\frac{f}{g}\right) \frac{du}{dt} = \frac{1}{\omega} (P_2 - P_1) + Y_3 + \frac{f U^2}{r_m} C^2 \quad (1.84)$$

yazılabilir.

Şimdi $\frac{P_2}{\omega} = (Y_2 + \frac{K U^2}{2g})$; $\frac{P_1}{\omega} = (Y_1 + y)$ alınır ve (1.84) denkleminde götürülürse

$$\left(\frac{f}{g}\right) \frac{du}{dt} = (Y_2 + Y_3 - Y_1) - y + \left[\left(\frac{k}{2g}\right) + \left(\frac{1}{r_m} C^2\right)\right] U^2 \quad (1.85)$$

elde edilir. $(Y_2 + Y_3 - Y_1) = 0$ olduğunda

$$\left(\frac{1}{g}\right) \frac{du}{dt} = -y + f U^2 \quad (1.86)$$

bulunur. Dalga tankın içine akan suyun oranı, tunel ve boru hattı için her bir orandan farklıdır. Böylece eğer Q , boru hattında akış oranı ise

$$A_s \frac{dy}{dt} = A_t U - Q \quad (1.87)$$

bulunur.

(1.86) ile (1.87) denklemleri arasında y yok edilerek hız denkleminde varılır.

Yani;

$$\left(\frac{1}{g}\right) \frac{d^2 u}{dt^2} + 2f |U| \frac{du}{dt} + \frac{A_t}{A_s} U = \frac{Q}{A_s} \quad (1.88)$$

dir. Bu denklem

$$K = \frac{fg}{f} ; a = \frac{A_t g}{A_s f} \text{ ve } d = \frac{Qg}{A_s f}$$

olmak üzere

$$\ddot{U} + 2K|U|\dot{U} + aU = d \quad (1.89)$$

diferansiyel denklemi yazılabilir.

$$1.10. \quad \ddot{U} + 2K|U|\dot{U} + aU = d \quad (1.89)$$

Diferansiyel Denkleminin Tekil Noktası

Eğer türbünlerin suyu sağlanırsa kesinti olur ve $d=0$ dir.

$v = \frac{du}{dt}$, $\ddot{U} = v \frac{dv}{du}$ alınır (1.89) diferansiyel denklemi

$$v \frac{dv}{du} + 2K|U|v + aU = 0 \quad (1.90)$$

veya

$$\frac{dv}{du} = \frac{-(aU + 2K|U|v)}{v} \quad (1.91)$$

şeklinde yazılabilir. $U=v=0$ olduğu zaman (1.91) denkleminin sağ tarafı $\frac{0}{0}$ belirsizliği olur. Dolayısıyla başlangıç noktası bir tekil noktadır. Bu nokta ya merkez yada spiral bir noktadır. $t \rightarrow \infty$ giderken $U, \dot{U} \rightarrow 0$ gider dolayısıyla başlangıç bir stable spiral noktadır.

Sonuç olarak, eğer $d=0$ ise tank, tunel ve rezervuar içindeki su birleşimi, $K>0$ nın herhangi bir değeri için bir sönümlenmiş salınım yapar. Eğer $U \rightarrow 0$ giderken sönüm katsayısı $2K|U| \rightarrow 0$ gitmesi gerçekleştirilirse bu sonuç daha kolay anlaşılır. Bundan başka hareket yaklaşık $\frac{2\pi}{1/2}$ periyodu için yarı periyodiktir. $d>0$ olduğu zaman su türbünlere akar. (1.89) denkleminde $U=(x+c)$ yazılır ve $c = \frac{d}{a}$ alınır

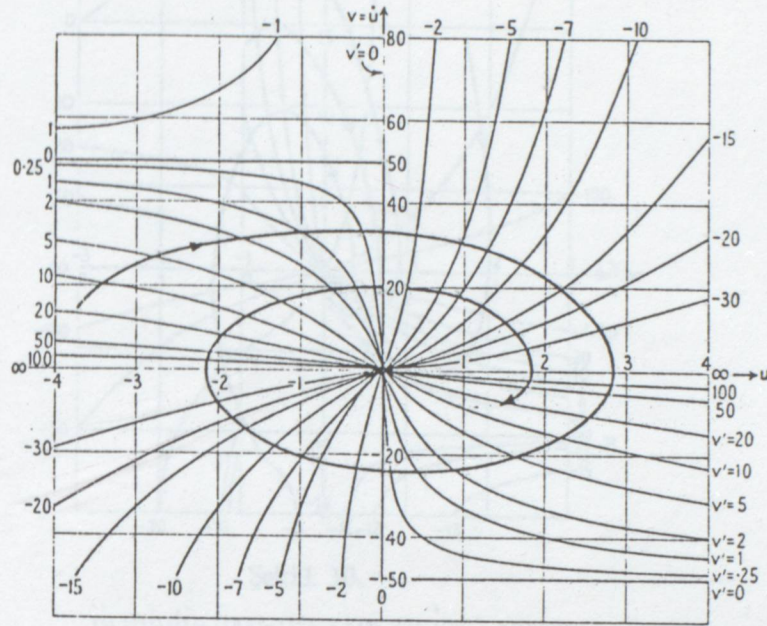
$$\ddot{x} + 2K|x+c|\dot{x} + ax = 0 \quad (1.92)$$

diferansiyel denkleme varılır.

$\frac{dx}{dt} = v_x$; $\ddot{x} = v_x \frac{dv_x}{dx}$ alınır (1.92) diferansiyel denklemi

$$\frac{dv_x}{dx} = \frac{-(ax + 2K|x+c|v_x)}{v_x} \quad (1.93)$$

şeklini alır.

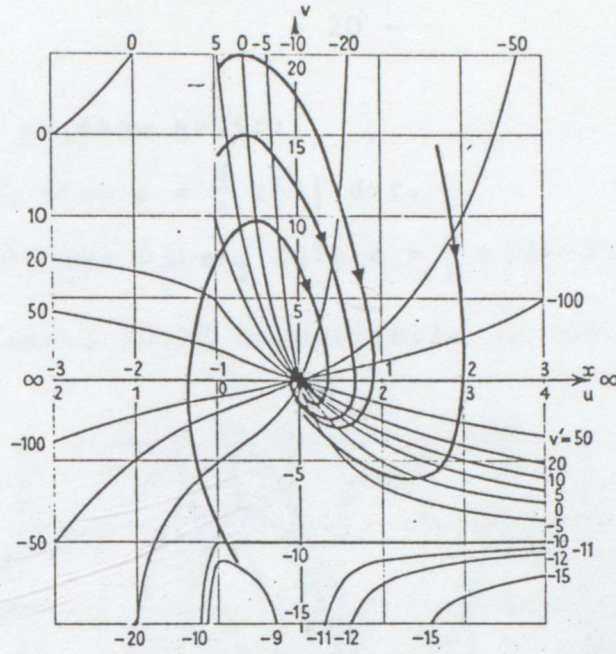


Şekil 1A

$\ddot{U} + 2|U|\dot{U} + 100U = 0$ için $(U, \dot{U}=v)$ integral eğrilerini; $d=0$ için salınım hali. Orjin bir stable spiral noktadır.

$t \rightarrow \infty$ giderken $x, \dot{x} \rightarrow 0$ giderse $t=t_1 > 0$, için $c > |x|$ olur. 0 zaman $t_1 < t < \infty$ aralığında $|x+c|$ ile $(x+c)$ yer değiştirilebilir. Eğer $K_c^2 < a$ ise $x=v=0$ noktası (o zaman $U=C, v=0$ dır) bir stable spiral noktadır. Eğer $K_c^2 \geq 0$ ise bir düğüm noktasıdır.

Birinci halde su sönümlenmiş salınım yapar. Halbuki ikinci halde sönüm salınımsızdır. Genel şekilde $v-y$ eğrileri isoclines yöntemiyle elde edilmişlerdir. Bu üç durum şekil 1A, 1B, 1C de çizilmiştir. İnce eğriler üzerindeki sayılar; geçiş noktalarında $v-y$ eğrisinin eğimini gösterir. Şekil 1A da görüldüğü gibi eğer başlangıç koşulları $|U_0| > 0, |v_0| = \frac{a}{2K}$ olursa, o zaman $(|U_0|, 0)$ kümesi üzerinde $|\dot{U}| = |v| = \frac{a}{2K}$ değerine sahip oluruz. Böylece $|v|$ sabit olur ve suyun U hızı ve zaman arasındaki ilişki lineerdir. U işaret değiştirdiği zaman $U-t$ ilişkisinde lineerlik sona erer.



Şekil 1B.

$\ddot{U} + 10|U|\dot{U} + 100U = 100$ için $(U, \dot{U}=v)$ integral eğrileri.
 $U=(x+1)$ iken $\ddot{x} + 10|x+1|\dot{x} + 100x = 0$ dır.
 $d=100$ ve $K^2 C^2 < a$ için salınım hali
 $U=1, v=0$ bir stable spiral noktadır.

0 zaman U işaret değiştirir; U-t arasındaki ilişki lineer olarak sona erer.

1.11. (1.92) Denkleminin Çözülmesi

Eğer K çok büyük değil ve $K^2 C^2 < a$ ise U-t eğrisi az sönümlenmiş salınmadır ve § 1.1 yöntemi kullanılabilir. Böylece ilk yaklaşımda, $\omega^2 = a$ olmak üzere

$$X = A(t) \sin\{\omega t + \varphi(t)\} \quad (1.94)$$

olduğunu kabul ediyoruz.

0 zaman $\omega t = \Psi$ alınırsa, (1.14) bağıntısı ve (1.92) bağıntılarından

$$\dot{A} = -\frac{KA}{\pi} \int_0^{2\pi} |A \sin \Psi + C| \cos^2 \Psi d\Psi \quad (1.95)$$

yazılır.

$$\dot{\varphi} = \frac{K}{\pi} \int_0^{2\pi} (A \sin \Psi + c) \cos \Psi \sin \Psi d\Psi = 0 \quad (1.98)$$

yazılır. ve böylece φ_0 bir keyfi faz açısı olmak üzere

$$\varphi = \varphi_0 \quad (1.99)$$

olur. $\varphi_0 = (\frac{1}{2}\pi - \phi_0)$ yazarak ve (1.97), (1.99) sonuçları (1.94) bağıntısına götürülürse (1.92) denkleminin şekli çözümü,

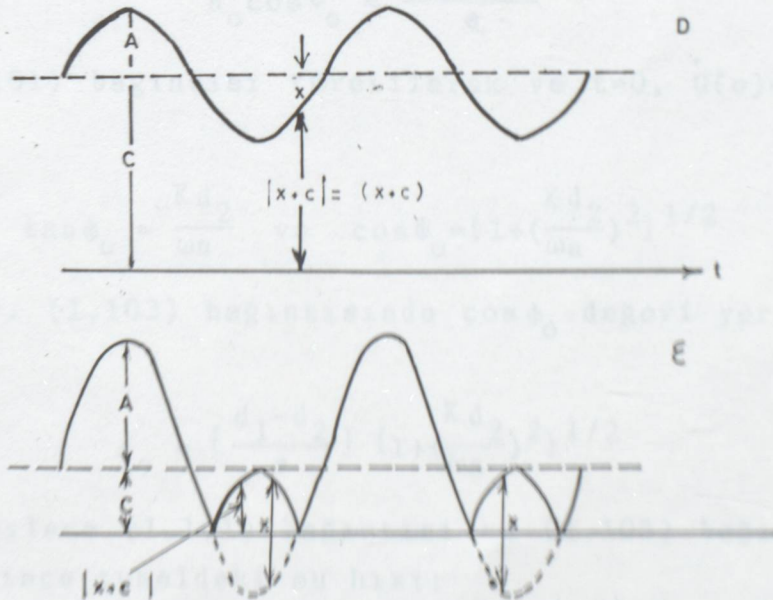
$$X = A_0 e^{-Kct} \sin(\omega t + \varphi_0) = A_0 e^{-Kct} \cos(\omega t - \phi_0) \quad (1.100)$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak ilk yaklaşımda tuneldeki suyun hızı

$$U = x + c = A_0 e^{-kct} \cos(\omega t - \phi_0) + \frac{d}{a} \quad (1.101)$$

dır. Burada A_0 ve ϕ_0 başlangıç koşullarından belirlenebilir yani; bunlar d nin değiştirilmesi ile bir dalganın başlangıcında elde edilirler.



Şekil 1D,E.

D; 1. hali gösterir. Burada tuneldeki suyun ortalama hızı dalgaya uygun salınma hızının genliğine eşit veya bunu aşar. E; 2. hali gösterir. Burada genlik ortalama hızı aşar. Yani, $C = \frac{d}{a} < A$ dir.

1.12. Başlangıç Koşulları

Valflar kapanarak, türbünlerdeki suyun sabit akış oranının Q_1 den Q_2 ye indirgendiğini kabul edelim. İşi basitleştirmek için, saptanmış akış oranı içinde değişim için alınan zamanın dalganın yarı peryodu olan $\frac{2\pi}{\omega}$ ile karşılaştırıldığında çok küçük olduğunu kabul edelim.

0 zaman $t \rightarrow -0$ için $U=c = \frac{d_1}{a}$ dır. Fakat Şekil 1F de gösterildiği gibi $t > 0$ için $c = \frac{d_2}{a}$ dır. Böylece $U(0) = \frac{d_1}{a}$, $\dot{U}(0)=0$ başlangıç koşullarıdır. (1.101) bağıntısında $C = \frac{d_2}{a}$ alınır. Bunlara göre

$$\left[A_0 e^{-Kd_2 t/a} \cos(\omega t - \phi_0) \right]_{t=0} + \frac{d_2}{a} = \frac{d_1}{a} \quad (1.102)$$

denklemine varılır. ve

$$A_0 \cos \phi_0 = \frac{(d_1 - d_2)}{a} \quad (1.103)$$

bulunur. (1.101) bağıntısı türetilerek ve $t=0$, $\dot{U}(0)=0$, $c = \frac{d_2}{a}$ konulursa

$$\tan \phi_0 = \frac{Kd_2}{\omega a} \quad \text{ve} \quad \cos \phi_0 = \left\{ 1 + \left(\frac{Kd_2}{\omega a} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (1.104)$$

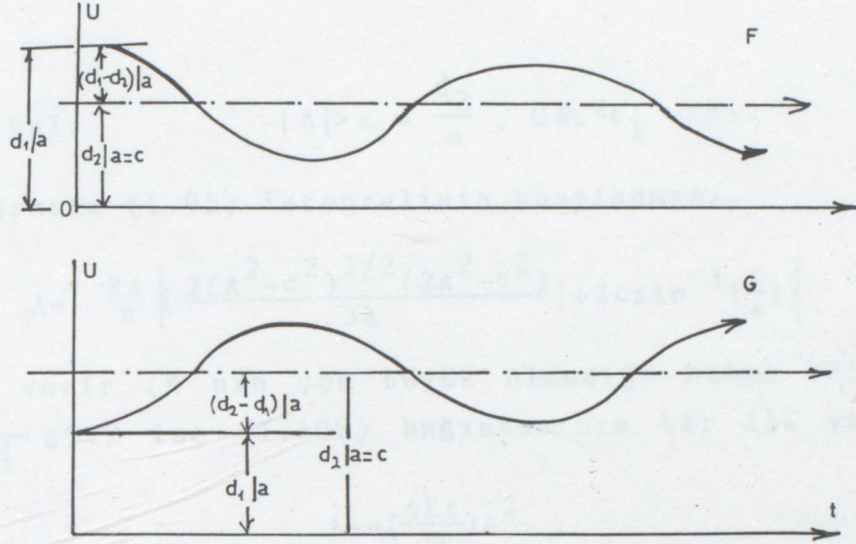
elde edilir. (1.103) bağıntısında $\cos \phi_0$ değeri yerine yazılırsa

$$A_0 = \left\{ \frac{d_1 - d_2}{a} \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{Kd_2}{\omega a} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (1.105)$$

bulunur. Böylece (1.101) bağıntısı ve (1.105) bağıntısından dalga süresince tuneldeki su hızı;

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left(\frac{Kd_2}{\omega a} \right) \text{ olmak üzere}$$

$$U = \left\{ \left(\frac{d_1 - d_2}{a} \right) \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{Kd_2}{\omega a} \right)^2 \right\}^{1/2} e^{-Kd_2 t/a} \cos(\omega t + \phi_0) + \frac{d_2}{a} \quad (1.106)$$



Şekil 1F,1G

olur. (1.106) bağıntısından da görüldüğü gibi dalganın çökmesinden sonra sabit hız, $t \rightarrow \infty$ giderken $U \rightarrow \frac{d_2}{a}$ gider. Hipoteze göre $C = \frac{d_2}{a} \geq A$ dır.

Dolayısıyla

$$\frac{d_1}{\left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{K d_2}{\omega a} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}} < d_2 < d_1$$

olmalıdır. Valfların açılmasıyla türbünlere akan suyun sabit oranı Q_1 den Q_2 ye arttığını kabul edelim (Şekil 1G bak.). 0 zaman $d_1 < d_2$ ve eğer $\frac{d_2}{a} \geq A_0$ ise (1.106) bağıntısı geçerlidir.

$$U = - \left\{ \left(\frac{d_2 - d_1}{a} \right) \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{K d_2}{\omega a} \right)^2 \right\}^{1/2} e^{-K d_2 t / a} \cos(\omega t + \phi_0) + \frac{d_2}{a} \quad (1.107)$$

elde edilir. Önceki gibi $t \rightarrow \infty$ gittiği zaman $U \rightarrow \frac{d_2}{a}$ gider. Sonuçta tuneldeki suyun hızı tek yönlüdür.

1.13. 2° hal: $|A| > c = \frac{d_2}{a}$, $0 \leq t < t_1$ idi.

Bu örnekte (1.95) integralinin hesaplanması,

$$\dot{A} = -\frac{KA}{\pi} \left\{ \frac{2(A^2 - c^2)^{1/2}(2A^2 - c^2)}{3A} \right\} + 2c \sin^{-1}\left(\frac{c}{A}\right) \quad (1.108)$$

sonucunu verir (K'nın çok büyük olmadığı kabul edilerek). Eğer $\frac{c}{|A|} \leq 0.2$ ise (1.108) bağıntısının bir ilk yaklaşımı

$$\dot{A} = -\left(\frac{4Kt}{3\pi}\right)A^2 \quad (1.109)$$

olur. Böylece

$$A^{-1} = \left(\frac{4Kt}{3\pi}\right) + B \quad (1.110)$$

bulunur. Eğer $t=0$ için $A=A_0$ ise o zaman $B = \frac{1}{A_0}$ ve

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + \left(\frac{4A_0 K t}{3\pi}\right)} \quad (1.111)$$

ve de bir keyfi faz açısı olarak $\varphi = \varphi_0$ bulunur. Böylece $\varphi_0 = \left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right)$ olmak üzere (1.94) bağıntısı ve (1.111) bağıntısından

$$U = x + c = \frac{A_0}{(1 + \gamma t)} \cos(\omega t - \phi_0) + c \quad (1.112)$$

bağıntısı $\gamma = \frac{4A_0 K}{3\pi}$ ve $\frac{A_0}{1 + \gamma t} > c = \frac{d}{a}$, $0 \leq t \leq t_1$ koşuluyla elde edilir. Türbünlere gelen su çok küçük değere kadar azaldığı zaman $d_1 \gg d_2$ olur.

Başlangıç koşulları $U(0) = \frac{d_1}{a}$, $\dot{U}(0) = 0$ dır ve $c = \frac{d_2}{a}$ alınır. Böylece

$$A_0 = \frac{\frac{(d_1 - d_2)}{a}}{\left(1 - \left[\frac{4K(d_1 - d_2)}{3\pi\omega a}\right]^2\right)^{1/2}} \quad (1.113)$$

bulunur. Eğer $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)$ ise $\frac{A_0}{(1+\gamma t)} > \frac{d_2}{a}$ ve $0 \leq t < t_1 = \left(\frac{3\pi}{4K}\right) \cdot (a/d_2 - 1/A_0)$ olmak koşuluyla

$$U = \frac{A_0}{(1+\gamma t)} \cos(\omega t - \theta) + \frac{d_2}{a} \quad (1.114)$$

yazılır. $t > t_1$ olduğu zaman çözüm (1.101) bağıntısı şeklinde olur. Yani,

$$U = A_1 e^{-Kc t} \cos(\omega t - \phi_1) + c \quad (1.115)$$

bulunur. Burada A_1 ve ϕ_1 ; $t = t_1$ için U ve $\dot{U}$ nın değerlerinden hesaplanabilir. (1.112) bağıntısından

$$U(t_1) = \frac{A_0}{(1+\gamma t_1)} \cos(\omega t_1 - \phi_0) + c \quad (1.116)$$

ve

$$\dot{U}(t_1) = - \frac{A_0}{(1+\gamma t_1)} \left[\frac{\gamma \cos(\omega t_1 - \phi_0)}{(1+\gamma t_1)} + \omega \sin(\omega t_1 - \phi_0) \right] \quad (1.117)$$

elde edilir. (1.115), (1.117) bağıntılarından

$$A_1 = \frac{A_0 e^{Kc t_1} \cos(\omega t_1 - \phi_0)}{(1+\gamma t_1) \cos(\omega t_1 - \phi_1)} \quad (1.118)$$

ve

$$\phi_1 = \omega t_1 + \tan^{-1} \left[\frac{Kc}{\omega} - \frac{\gamma}{\omega(1+\gamma t_1)} - \tan(\omega t_1 - \phi_0) \right] \quad (1.119)$$

olduğu bulunur.

$|A| > C = 0$, $t \geq 0$ Hızın $\frac{d_1}{a}$ olduğunu ve türbünlerin su ile dolduğu zaman tamamıyla durduğunu kabul edelim. Şimdi başlangıç koşulları $U(0) = \frac{d_1}{a}$, $\dot{U}(0) = 0$, $C = 0$ olmak üzere ve istenen sonuçlar; $d_2 = 0$ konarak (1.112), (1.113) bağıntılarından bulunabilir. Böylece

$$A_o = \frac{\left(\frac{d_1}{a}\right)}{\left[1 - \left(\frac{4KD_1}{3\pi\omega a}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (1.120)$$

ve tuneldeki suyun hızı olarak

$$U = \frac{A_o}{(1+\gamma t)} \cos(\omega t - \theta) \quad (1.121)$$

bulunur. (1.106) ile (1.121) bağıntısını karşılaştırırsak salınım azalmasının ikinci durumda daha hızlı olduğunu gösterir. $\frac{1}{1+\gamma t}$ ve $e^{-Kd_2 t/a}$ çarpanları sebebiyle. Bir su akışı $d_2 > 0$ olmasını gerektirir. bu yüzden (1.92) denkleminde $d_2 > 0$ ve $d_2 = 0$ için sönümleme katsayıları sırasıyla $2K |X+C|$ ve $2K |X|$ dır. En sonundakinin ilkinine göre daha büyük enerji kaybı olur.

1.14. Dalga Tankındaki Su Sevyesi

Dalga tankındaki su seviyesini veren

$$y = -\left(\frac{f}{g}\right) \frac{du}{dt} - f |U| U \quad (1.122)$$

denklemini (1.86) bağıntısıyla verilmişti. $d=0$ kapama hali ve 2° hal için: (1.121) bağıntısı kullanılırsa

$$y = \left(\frac{f}{g}\right) \left\{ \frac{\omega A_o \sin(\omega t - \theta)}{(1+\gamma t)} - \frac{\gamma A_o \cos(\omega t - \theta)}{(1+\gamma t)^2} \right\} - \frac{f A_o^2}{(1+\gamma t)^2} |\cos(\omega t - \theta)| \cos(\omega t - \theta) \quad (1.123)$$

$$y = \left(\frac{A_o f}{g(1+\gamma t)}\right) \left\{ \omega \sin(\omega t - \theta) - \frac{\gamma \cos(\omega t - \theta)}{(1+\gamma t)} \right\} - \frac{f A_o^2}{(1+\gamma t)^2} |\cos(\omega t - \theta)| \cos(\omega t - \theta) \quad (1.124)$$

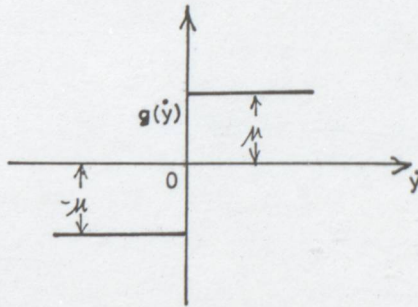
bulunur. $t=0$ olduğu zaman

$$y = \frac{-fA_o^2 \omega^2}{(\omega^2 + \gamma^2)} = -f\left(\frac{d_1}{a}\right)^2 = -f[U(o)]^2 \quad (1.125)$$

bulunur. Bu, dalga tankı ve rezervuar arasındaki sürtünme ile ilgili kayıptır.

1.15. Klomb Sönümlemesi

Bu durumda sönüm sıfırdan büyük olduğu zaman; hızın bağımsız olduğu kabul edilir. Fakat hızla beraber sifıra eşitlenir. Bağımsız hareketin yönü her zaman kuvvete karşı gelir. bu noktalar Şekil 2 de gösterildi.



Şekil 2.

Örnek: $\ddot{y} + g(\dot{y}) + \omega^2 y = 0 \quad (1.126)$

$\dot{y} > 0$, $\dot{y} < 0$ iken $g(\dot{y}) = +\mu$ olmak üzere (1.126) denkleminin çözümü bir sabittir. Fakat Şekil 2 dekiye benzer olarak $\dot{y} = 0$ olduğu zaman $g(\dot{y}) = 0$ olur. (1.14) bağıntısı ve Şekil 2 ye uygun olarak $(0, 2\pi)$ aralığı

$$\dot{A} = -\frac{\mu}{2\pi\omega} \int_0^{\pi/2} \cos\Psi d\Psi + \frac{\mu}{2\pi\omega} \int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} \cos\Psi d\Psi - \frac{\mu}{2\pi\omega} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos\Psi d\Psi \quad (1.127)$$

şeklinde bölünür ve integraller hesaplanırsa

$$\dot{A} = \frac{-2\mu}{\pi\omega} \quad (1.128)$$

bulunur. Böylece

$$|A| = A_0 - \frac{2\mu t}{\pi\omega} \quad (1.129)$$

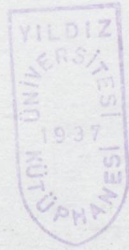
başlangıç yerdeğişimi olan $|A|$ negatif olamaz. Dolayısıyla $|A|$ sıfıra eşitlendiği zaman hareket durur. Yani;

$$t = \frac{\pi\omega A_0}{2\mu}$$

olur. Bazı durumlarda $\varphi=0$, $\varphi=\varphi_0$ olduğunda $\frac{\pi}{2}$ dir;

K A Y N A K L A R

1. McLACHLAN, N.W. Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences.
2. SANSONE, G. and CONTI, R. Non-Linear Differential Equations.
3. DAVIES, T.V. and JAMES, E.M. Non-Linear Differential Equations.
4. INCE, E.L. Ordinary Differential Equations.



TEZ YAZARININ ÖZGEÇMİŞİ

Serpil ÖZTÜRK 1964 de Erzincan'da doğdu. İlköğrenimini İstanbul Gürsel İlkokulu, orta öğrenimini İstanbul Namık Kemal Ortaokulu ve Şişli 50. yıl Çalğyan Lisesinde yaptı. 1984 yılında yüksek öğrenime başladığı, Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Lisans'dan 1988'de mezun oldu.

1988-89 öğretim yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyenler Teorisi Anabilim Dalında araştırma görevlisi oldu. Aynı yıl yüksek lisans sınavını kazanarak Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrenimine başladı.

Halen Yıldız Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görevine devam etmektedir.



