

28470

YILDIZ TEKNİK UNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÖKSEK LİSANS TEZİ

LINEER HOMOGEN İNTEGRAL DENKLEMLER

NİLOFER ŞENOL
(Matematik Anabilim Dalı)

İstanbul, 1993

=== İÇİNDEKİLER ===

BÖLÜM I

İNTEGRAL DENKLEMLERE GİRİŞ

1.1. integral Denklemlerin Sınıflandırılması:	1
1.1.1 Lineer Olan veya Olmayan Integral Denklemler	1
1.1.2 Tekil Olan veya Olmayan Integral Denklemler	1
1.1.3 integral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması	2
1.1.4 Homogen Olan veya Olmayan Integral Denklemler	3
1.1.5 Volterra ve Fredholm Integral Denklemleri	4
1.1.6 Integro-Diferansiel Denklemi	5
1.1.7 Parametrel integral Denklem	6
1.2 integral Denklemlerin Çözümü	6
1.3 Çekirdek Tipleri	8
1.3.1 Çekirdek Fonksiyonu	8
1.3.2 Sabit Çekirdek	9
1.3.3 Dejenere Çekirdek	9
1.3.4 İtere Çekirdek	11
1.3.5 Simetrik Çekirdek	12
1.3.6 Çözücü Çekirdek (Resolvent)	13
1.4 Fredholm'un iki Temel Bağlantısı	17
1.5 Rekürans Bağlantıları	18

BÖLÜM II

LINEER HOMOGEN İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÖZEL OLARAK İNCELENMESİ

2.1 Giriş	19
2.2 Dejenere Çekirdekli Homogen integral Denklem	19
2.3 Simetrik Çekirdekli Homogen integral Denklem	25
2.4 Açılım Teoremi - Schmidt Serisi	25
2.5 Fredholm Alternatifi	29
2.6 Teorem	31
2.7 Özel Değerlerin Dağılımı	33
2.8 Teorem	36
2.9 Teorem	40

BÖLÜM III

LINEER HOMOGEN İNTEGRAL DENKLEMLERİN GENEL OLARAK İNCELENMESİ

3.1 $D(\lambda)=0$ ve $D(\lambda)\neq 0$ Olduğu Durumlarda Homogen integral Denklem Çözümü	42
3.2 Teorem	43
3.3 $D(\lambda)=0$ Olduğunda Homogen integral Denklem Çözümü	46
3.3.1 $D(\lambda)$ 'nin p. minörünü Belirtme	47
3.3.2 Teorem	47
3.3.3 İki Temel Bağlantının Genellemesi	48
3.3.4 $D^{(p)}(\lambda)$ ve $D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ \lambda \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix}$ arasındaki ilişki	51
3.3.5 Teorem	54
3.3.6 Homogen Denklemin q. Bağımsız Çözümü	54

3.3.7 Tamamlanmamış ispat	56
3.4 Teorem	58
3.5 Karakteristik Sabit. Temel Fonksiyonlar	58
3.6 Lineer Homogen Integral Denklemler Arasındaki İlişki	58
3.6.1 ilişkili Çekirdek için Fredholm Determinantı	60
3.6.2 ilişkili Çekirdek için Fredholm Minörleri	61



SUNUŞ

XIX. yüzyılın ilk yarısında ABEL tarafından ortaya çıkarılan integral denklemler , tekniğin gelişmesi içinde uygulamadaki yerini almıştır.

Integral denklemler çok geniş ve kapsamlı bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır. Çalışmalarım sırasında integral denklemlerin bir alt sınıfı olan Lineer Homogen Integral Denklemler konusunda edindiğim bilgileri yeni bir düzenleme ile sunmaya çalıştım. Ancak belirtmek isterim ki bu konunun henüz geniş olarak ele alınmaması, yani kaynakların sınırlı oluşu bazı hususlara kısaca değinmek zorunluluğunu doğurmuştur.

Çalışmam üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde Lineer Homogen Integral Denklemlere geçmeden önce integral denklemlerde bilinmesi gereken genel tanımlar verilmiştir. İkinci bölüm, Lineer Homogen Integral Denklemlerin Özel Olarak incelenmesine ayrılmıştır. Son bölümde, Lineer Homogen Integral Denklemler kuramsal olarak genel bir şekilde incelenmiştir.

NILOFER ŞENOL

=== SUMMARIZE ===

Integral Equations which was invented by ABEL has taken in practice.

Integral Equations is not only wide but extensive subject matter also. I've been studying on Linear Homogen Integral Equations which is substructure of Integral Equations over a year. However I'd like to mention the fact that this subject hasn't thoroughly yet because of unavailability of sources, I did my search briefly.

My thesis contains three parts. At the first part there are general definitions about integral Equations. At the second part I have examined Homogen Integral Equations in particular. At the last part I have examined it in general terms.

NILUFER ŞENOL

BÖLÜM I İNTEGRAL DENKLEMLERE GİRİŞ

1.1 Integral Denklemlerin Sınıflandırılması:

1.1.1 Lineer Olan veya Lineer Olmayan Integral Denklemler:

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1)$$

yapısında bir integral denklemde, $u(x)$ fonksiyonunun lineer olması halinde, integral denklem de lineer denklem adını alır.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u^n(t)dt \quad (2)$$

Integral denkleminde ise $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun n . kuvveti bulunduğundan, lineer olmayan bir integral denklem olmaktadır. Bunun gibi daha genel olarak

$$u(x) = f(x) + \int_a^x g[x,t,u(t)]dt \quad (3)$$

integral denklemi de lineer olmayan integral denklem adını alır. Bizim inceleyeceğimiz integral denklemler lineer integral denklemler olacaktır.

1.1.2 Tekil Olan veya Olmayan Integral Denklemler:

Integral denklemlerin bir sınıflandırılması $K(x,t)$ fonksiyonunun sürekliliği ile ilgilidir. $K(x,t)$ fonksiyonuna Çekirdek Fonksiyon denir. $K(x,t)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$; $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ise integral denklem Tekil (Singüler) olmayan bir integral denklemdir. Eğer $K(x,t)$ bu aralıkta sürekli değilse, integral denklem Tekil integral denklem sınıfına girer.

cektir.

Örneğin; $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha} \quad (4)$$

şeklindeki bir integral denklem bu sınıfa girmektedir. Ayrıca, integral sınırlarının en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, tekil integral denklem sınıfında olacaktır.

$$f(x) = \int_a^\infty \sin x t u(t) dt \quad (5)$$

ve

$$f(x) = \int_a^\infty e^{-xt} u(t) dt$$

denklemleri bu türün birer örneğini oluşturmaktadır.

1.1.3 Integral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması:

Integral denklemler, yapılarına göre üç sınıfa ayrılırlar. Bilinmeyen fonksiyonun $u(x)$, çekirdek fonksiyonun $K(x,t)$ olduğu ,

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (6)$$

şeklindeki bir integral denkleme I.Cins Integral Denklem denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur. Burada $\phi(x)$ fonksiyonu, verilmiş bir fonksiyondur. Benzer şekilde

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (7)$$

şeklindeki bir integral denklem de yine I.Cins Integral Denklem'dir. Burada da $\phi(x)$ ve $f(x)$ verilmiş olan fonksiyonlardır.

Ancak bu denklemler,

$$g(x) - f(x) = \psi(x)$$

olmak üzere,

$$g(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde ifade edilerek, (6) denkleminin yapısında yazılabilirler.

$$x^2 = \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$

ve

$$e^{-x} = x - \int_0^{1/2} x^2 t u(t)dt$$

gibi denklemler, bu cins için bir örnektir.

Bu iki cins integral denklemden başka, $g(x)$, $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları bilindiğine göre

$$g(x) \cdot u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (8)$$

şeklindeki integral denklemlere ise III. Cins Integral Denklem denilmektedir.

Örneğin;

$$x \cdot u(x) = 1 - e^{-x} + \int_0^1 x^2 t^2 u(t)dt$$

denkleminin, III. cins bir integral denklemdir.

1.1.4 Homogen Olan veya Olmayan Integral Denklemler:

Integral denklemler bir de, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonuna göre homogen olup olmadıkları açısından sınıflandırılır. II. cins denklemler için söz konusu böyle bir sınıflandırmada,

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

integral denklemi, Homogen integral denklem olarak adlandırılacaktır. Homogenliği bozucu bir $f(x)$ fonksiyonunun bulunduğu,

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

gibi denklemlere ise Homogen Olmayan Integral Denklemler denilmektedir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

homogen integral denkleminin, kolayca görülebileceği gibi $u(x) \equiv 0$ olan bir çözümü vardır. Buna aşıkâr çözüm veya trivial çözüm denir.

Homogen integral denklemler, daha genel bir yapıya sahip

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki bir integral denklemin, $f(x) \equiv 0$ olması haline uyan özel bir durum olarak da gözönüne alınabilirler.

1.1.5 Volterra ve Fredholm Integral Denklemleri:

Integral denklemlerin bir sınıflandırması da, integral sınırlarının değişken veya sabitlerden oluşmasına göre yapılmaktadır. Lineer ve homogen olup olmadıklarına bakılmaksızın,

$$g(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (9)$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (10)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (11)$$

$$\phi(x).u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (12)$$

gibi denklemlere Volterra Integral Denklemleri denilmektedir. Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında x değişkeni bulunmaktadır.

x değişkeninin, $x=b$ gibi sabit bir değere eşit olması halinde yazılabilecek

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (13)$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (14)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (15)$$

$$\phi(x).u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (16)$$

şeklindeki denklemlere ise Fredholm Integral Denklemleri denilmektedir. Volterra ve Fredholm denklemleri arasındaki yegane fark bu sınır yapısında ortaya çıkmaktadır.

1.1.6 Integro-Diferansiel Denklemler:

$u(x)$ 'in sadece birinci mertebeden türevinin bulunduğu,

$$u'(x) = F(x, u(x), \int_a^x K(x,t, u(t), u'(t))dt) \quad (17)$$

şeklindeki bir denklem, integro-diferansiel denklemlere genel anlamda bir örnek olabilir. Bir başka örneği de, n .mertebeden türevin bulunduğu,

$$u^{(n)}(x) = F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)) + \int_a^x K(x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)) dt \quad (18)$$

denklemini söyleyebiliriz.

1.1.7 Parametrelı Integral Denklemler:

$\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ olan bir parametre olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt \quad (19)$$

ve

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (20)$$

şeklindeki integral denklemlere Parametrelı Integral Denklemler denir.

1.2 Integral Denklemlerin Çözümü:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt$$

denklemini gözönüne alalım. Burada bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ olup, bu integral denklemini çözmek demek, bağıntıyı sağlayan $u(x)$ fonksiyonunu belirtmek demektir. Yani öyle bir $u(x)$ fonksiyonu bulunmalıdır ki, integral denklemde yerleştirip gerekli işlemler yapıldığında, eşitlik sağlanmalıdır.

Örnek:

$$u(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{5/2}} \quad \text{fonksiyonunun}$$

$$u(x) = \frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2} - \int_0^x \frac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2} u(t) dt$$

integral denkleminin çözümü olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Verilen $u(x)$ fonksiyonunun, integral denklemi sağlaması gerektiğinden ve yukarıdaki tanıma göre:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2} - \int_0^x \frac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2} u(t) dt \\ &= \frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2} - \int_0^x \frac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^{5/2}} dt \\ &= \frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2} - \frac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2} \int_0^x \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{5/2}} + \frac{1}{(1+x^2)^2} \int_0^x \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenerek, integraller ayrı ayrı hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{5/2}} dt &= \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \right] \\ \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{5/2}} dt &= \frac{x^3}{3(1+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

bulunacağından, yerlerine yazılarak işlemlere devam edilirse,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2} - \frac{3x+2x^3}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \right] + \\ &\quad \frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{x^3}{3(1+x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{3x+2x^3}{(1+x^2)^2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3(1+x^2)^{3/2}} \right] + \frac{x^3}{3(1+x^2)^{7/2}} \\ &= \frac{3x+3x^3}{3(1+x^2)^{7/2}} = \frac{3x(1+x^2)}{3(1+x^2)^{7/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{5/2}} = u(x) \end{aligned}$$

bulunur.

1.3 Çekirdek Tipleri:

1.3.1 Çekirdek Fonksiyonu:

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (21)$$

integral denklemini gözönüne alalım. Bu integral denklemde mevcut $K(x,t)$ fonksiyonuna Çekirdek Fonksiyon denir. Bu, reel veya kopleks olabilir. Biz reel fonksiyon olması halini gözönüne alacağız. Bu fonksiyonun $a \leq x \leq b$; $a \leq t \leq b$ kare bölgesinde sürekli ve üniform olduğunu farzedeceğiz.

1.3.2 Sabit Çekirdek:

$K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun sabit olduğunu farzedelim. (21) şeklindeki fredholm denkleminde bir parametre olduğuna göre ve çekirdek, c bir sabit göstermek üzere

$$K(x,t) = c$$

ise, (21) denklemi,

$$u(x) = f(x) + \int_a^b cu(t)dt \quad (22)$$

veya $c=\mu$ yine bir parametre olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \mu \int_a^x u(t)dt \quad (23)$$

şeklinde karşımıza çıkar. Burada $f(x)$ verilmiş bir fonksiyondur.

Bu belirli integralin bir sabit değeri olduğu bilinir. Bu gerçekten hareket ederek, (23) de verilen integralin değerinin A olduğunu farzedelim:

$$A = \int_a^b u(t)dt$$

ise, bahsi geçen integral denklem,

$$u(x) = f(x) + \mu.A$$

şeklini alır. Bu integral denklemin çözümü olması gerekir. Denklemleri sağlaması gerektiğinden, (22) de yerine yazılırsa,

$$f(x) + \mu A = f(x) + \mu \int_a^b (f(t) + \mu A) dt$$

$$A = \int_a^b f(t) dt + \mu A(b-a)$$

$$(1 - \mu(b-a))A = \int_a^b f(t) dt$$

ve buradan da A çözülerek,

$$A = \frac{1}{1 - \mu(b-a)} \int_a^b f(t) dt \quad (24)$$

bulunur. $\mu(b-a) \neq 1$ şartının mevcut olduğu bilinir. Buna göre (22) integral denkleminin çözümü olarak, (23) den hareketle,

$$u(x) = f(x) + \frac{\mu}{1 - \mu(b-a)} \int_a^b f(t) dt \quad (25)$$

sonucuna ulaşılır. $\mu = \lambda.c$ olduğu hatırlanırsa,

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda.c}{1 - \lambda.c(b-a)} \int_a^b f(t) dt \quad (26)$$

olur.

1.3.3 Dejenere Çekirdek:

$K(x, t)$ çekirdek fonksiyonunun

$$K(x, t) = r(x).s(t) \quad (27)$$

gibi, değişkenlerine göre çarpanlar şeklinde bulunması haline, dejenere çekirdek denir.

Örneğin,

$$K(x,t) = e^{x+t} = e^x \cdot e^t$$

bir dejenere çekirdektir. (21) denklemi,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b r(x)s(t)u(t)dt \quad (28)$$

veya

$$u(x) = f(x) + \lambda r(x) \int_a^b s(t)u(t)dt \quad (28)$$

şeklinde olur.

$$A = \int_a^b s(t)u(t)dt$$

denilirse, bunun (28)'de yerine yazılmasıyla,

$$u(x) = f(x) + \lambda Ar(x) \quad (29)$$

elde edilir. Çözüm olan bu ifadenin denklemi sağlaması gerekir. Bununla (28) denkleminde gidildiğinde,

$$f(x) + \lambda Ar(x) = f(x) + \lambda r(x) \int_a^b s(t) \{f(t) + \lambda Ar(t)\} dt$$

$$A = \int_a^b s(t)f(t)dt + \lambda A \int_a^b s(t)r(t)dt$$

buradan da

$$(1 - \lambda \int_a^b r(t)s(t)dt)A = \int_a^b f(t)s(t)dt$$

$$\int_a^b r(t)s(t)dt \neq \frac{1}{\lambda}$$

olmak şartıyla, her iki yan bu ifadeye bölünerek;

$$A = \frac{\int_a^b f(t)s(t)dt}{1 - \lambda \int_a^b r(t)s(t)dt}$$

sayısı hesaplanmış olmaktadır. Bulunan bu A değeri (28) denkleminin çözümünü bulmak üzere, (29)'da yerine yazılırsa,

$$u(x) = f(x) + \lambda r(x) \cdot \frac{\int_a^b f(t)s(t)dt}{1 - \lambda \int_a^b r(t)s(t)dt}$$

elde edilir. Burada da, ifadenin sağ yanı tamamem belirlidir. Dolayısıyla sağ yan x'in bir fonksiyonu olarak çözümü verir.

1.3.4 İtere Çekirdek:

Birinci mertebeden itere çekirdek ; çekirdek fonksiyona eşittir.Yani $K_{(1)}(x,t) = K(x,t)$ 'dir.

$K(x,t)$ çekirdeğinin $K_{(2)}(x,t), K_{(3)}(x,t), \dots, K_{(n)}(x,t)$ ile gösterilen 2.mertebeden,3.mertebeden,.....,n.mertebeden itere çekirdek denilen başka şekilleri de tanımlanır.

Örneğin; 2.mertebeden bir itere çekirdek, y bir değişken olmak üzere

$$K_{(2)}(x,t) = \int_a^b K(x,y)K(y,t)dy \quad (30)$$

şeklindedir. 3.mertebeden bir itere çekirdek ise

$$K_{(3)}(x,t) = \int_a^b K(x,y)K_{(2)}(y,t)dy$$

şeklindedir.Bunu şu şekilde yazabiliriz.

$$K_{(3)}(x,t) = \int_a^b K(x,y)K_{(2)}(y,t)dy$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b K(x, y_1) \left\{ \int_a^b K(y_1, y_2) K(y_2, t) dy_2 \right\} dy_1 \\ &= \int_a^b \int_a^b K(x, y_1) K(y_1, y_2) K(y_2, t) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

Bu işlemlere adım adım devam edilirse, nihayet n.merteben itere çekirdek için, (n-1) katlı integralle ifade edilen

$$K^{(n)}(x, t) = \int_a^b \dots (n-1) \dots \int_a^b K(x, y_1) K(y_1, y_2) \dots K(y_{n-1}, t) dy_1 \dots dy_{n-1}$$

bağıntısı yazılır.

İtere çekirdek bir başka şekilde, r ve s pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$K^{(r+s)}(x, t) = \int_a^b K^{(r)}(x, y) K^{(s)}(y, t) dy \quad (31)$$

şeklinde de tanımlanırlar.

1.3.5 Simetrik Çekirdek:

Bir integral denklemin çekirdeği için,

$$K(x, t) = K(t, x)$$

özelligi mevcutsa, çekirdek simetrik çekirdek adını alır.

Örneğin;

$$K(x, t) = x+t \quad \text{simetrik çekirdektir.}$$

Bu tür çekirdekleri bulunduran integral denklemlere simetrik denklem de denilmektedir.

1.3.6 Neumann Serisi :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (32)$$

integral denklemini gözönüne alalım. $u(x)$ için ilk yaklaşım,

$$u_0(x) = f(x)$$

olacaktır. İlk adımda

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u_0(t) dt$$

alınacaktır. Buradan (32) ile

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt$$

bulunur. t yerine t_1 koyarak (32) denklemine gidelim.

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t_1) f(t_1) dt_1 \quad (33)$$

ve buradan yukarıdakine benzer şekilde,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) [f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1) f(t_1) dt_1] dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,t) K(t,t_1) f(t_1) dt_1 dt \quad (34) \end{aligned}$$

elde edilir. (30) 'a göre,

$$K_2(x,t_1) = \int_a^b K(x,t) K(t,t_1) dt$$

yazılabileceğinden (34) ifadesi

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_{(2)}(x,t_1) f(t_1) dt_1 \quad (35)$$

olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde $u_3(x)$ yazılabilir.

$$u_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u_2(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) [f(t) + \lambda \int_a^b K(t, t_1) f(t_1) dt_1 + \\
 &\quad + \lambda^2 \int_a^b K^{(2)}(t, t_1) f(t_1) dt_1] dt \\
 &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x, t) K(t, t_1) f(t_1) dt_1 dt + \\
 &\quad + \lambda^3 \int_a^b \int_a^b K(x, t) K^{(2)}(t, t_1) f(t_1) dt_1 dt
 \end{aligned}$$

olup, (30) ve takibeden bağıntılar gözönüne alınırsa,

$$K_{(2)}(x, t_1) = \int_a^b K(x, t) K(t, t_1) dt$$

$$K_{(3)}(x, t_1) = \int_a^b K(x, t) K_{(2)}(t, t_1) dt$$

yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}
 u_3(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_{(2)}(x, t_1) f(t_1) dt_1 + \\
 &\quad + \lambda^3 \int_a^b K_{(3)}(x, t_1) f(t_1) dt_1
 \end{aligned} \tag{36}$$

olur. Buradaki ifadelerde t_1 yerine t konularak esas ifadelere dönülebilir. İşlemlerin böylece devam ettiği farz olunursa $u_n(x)$ için,

$$\begin{aligned}
 u_n(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_{(2)}(x, t) f(t) dt + \dots + \\
 &\quad + \lambda^n \int_a^b K_{(n)}(x, t) f(t) dt
 \end{aligned}$$

ifadesinin elde edileceği anlaşılmaktadır. Bu şekilde elde edilen fonksiyonda n 'nin sınırsız olarak arttırılması halinde, $u(x)$ fonksiyonuna bir sınır değeri olarak yaklaşılabileceği bilinmektedir. Yani

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

olduğu yazılabilmektedir. Bu durumda

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \dots + \lambda^n \int_a^b K_{(n)}(x,t) f(t) dt \right]$$

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_{(n)}(x,t) f(t) dt \quad (37)$$

elde edilir ki buna Neumann serisi denir. Görüldüğü gibi bu seri itere çekirdekler yardımıyla elde edilmiş olmaktadır.

1.3.7 Resolvanın İtere Çekirdekler Yardımıyla Kurulması:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt$$

Fredholm integral denklemini gözönüne alalım. Ardışık yaklaşım metodunun uygulanmasıyla elde edilen seri

$$u(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots$$

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot \lambda^n \quad (38)$$

şeklindedir. Burada,

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x,t) \varphi_0(t) dt = \int_a^b K_{(1)}(x,t) f(t) dt$$

$$\phi_2(x) = \int_a^b K(x,t) \phi_1(t) dt = \int_a^b K_{(2)}(x,t) f(t) dt$$

$$\phi_3(x) = \int_a^b K(x,t) \phi_2(t) dt = \int_a^b K_{(3)}(x,t) f(t) dt$$

olup, böylece devam edilerek $\phi_n(x)$ fonksiyonları, itere çekirdekler yardımıyla belirtilebilir. Burada,

$$K_{(2)}(x,t) = \int_a^b K(x,t_1) K(t_1,t) dt_1$$

$$K_{(3)}(x,t) = \int_a^b K(x,t_1) K_{(2)}(t_1,t) dt_1$$

ve genel olarak, $n = 2, 3, 4, \dots$ olmak üzere

$$K_{(n)}(x,t) = \int_a^b K(x,t_1) K_{(n-1)}(t_1,t) dt_1$$

dir. $n=1$ için $K_{(1)}(x,t) = K(x,t)$ 'dir.

Resolvanı bulmak üzere (38) serisine gidilirse ve bu seri

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \quad (39)$$

olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \lambda^{n-1} &= \phi_1(x) + \lambda \phi_2(x) + \dots + \lambda^{n-1} \phi_n(x) + \dots \\ &= \int_a^b K_{(1)}(x,t) f(t) dt + \lambda \int_a^b K_{(2)}(x,t) f(t) dt + \dots + \\ &\quad + \lambda^{n-1} \int_a^b K_{(n)}(x,t) f(t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_a^b [K_{(1)}(x,t) + \lambda K_{(2)}(x,t) + \lambda^2 K_{(3)}(x,t) + \dots + \lambda^{n-1} K_{(n)}(x,t) + \dots] f(t) dt$$

olur. Buradaki köşeli parantez içi $\Gamma(x,t;\lambda)$ resolvanı olarak belirir. Buna göre

$$\Gamma(x,t;\lambda) = K_{(1)}(x,t) + \lambda K_{(2)}(x,t) + \lambda^2 K_{(3)}(x,t) + \dots + \lambda^{n-1} K_{(n)}(x,t) + \dots$$

demektir. Bu şekilde (39) bağıntısına gidilirse

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,t;\lambda) f(t) dt$$

elde edilir.

Yukarıda görüldüğü gibi, integral denklemin resolvanı, itere çekirdekler yardımıyla ve

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_{(n)}(x,t) \quad (40)$$

bağıntısıyla tanımlanmıştır. Bunun ikinci yanına $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun Neumann Serisi denir.

1.4 Fredholm'un İki Temel Bağıntısı:

$$D(x,t;\lambda) - K(x,t)D(\lambda) = \lambda \int_a^b D(x,y;\lambda) K(y,t) dy \quad (41)$$

$$D(x,t;\lambda) - K(x,t)D(\lambda) = \lambda \int_a^b K(x,y) D(y,t;\lambda) dy \quad (42)$$

olmak üzere bunlara sırayla Fredholm'un Birinci ve İkinci Temel Bağıntıları denir.

$$A_n = \int_a^b \dots (n) \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

ve

$$B_n(x, t) = \int_a^b \dots (n) \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, t) & \dots & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t) & \dots & \dots & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

olmak üzere

$$B_n(x, t) = A_n K(x, t) - n \int_a^b B_{n-1}(x, y) K(y, t) dy$$

olduğu ispatlanmış olur.

1.5 Rekürans Bağintıları:

$$B_n(x, t) = A_n K(x, t) - n \int_a^b B_{n-1}(x, y) K(y, t) dy$$

bir rekürans bağıntısıdır.

$$A_n = \int_a^b B_{n-1}(x, x) dx$$

ve

$$D'(\lambda) = - \int_a^b D(x, x; \lambda) dx$$

olmak üzere üç rekürans bağıntısı tanımlanmıştır. Burada

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n B_n(x, t)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n A_n$$

fredholm determinantlarından faydalanılarak rekürans bağıntıları ispatlanır.

BÖLÜM II
LINEER HOMOGEN INTEGRAL DENKLEMLERİN ÜZEL OLARAK
İNCELENMESİ

2.1 Giriş:

Bu bölümde, homogen integral denklemlerin çözümleri ile ilgili hususlar üzerinde duracağız.

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

homogen integral denklemini gözönüne alalım. Sabit Çekirdekli homogen integral denklemin sadece $u(x) \equiv 0$ olan çözümü vardır.

2.2 Dejenere Çekirdekli Homogen Integral Denklem:

Dejenere Çekirdeğin genel halinin

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^n r_i(x)s_i(t) \quad \text{şeklinde olduğunu biliyoruz.}$$

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki II.Cins integral denkleminin $u(x) \equiv 0$ olan bir çözümü vardır ve buna aşıkâr çözüm ya da trivial çözüm denir. Bu denklemin özelliği $f(x) \equiv 0$ olmasıdır. Bu özelliği itibarıyla $f(x)$ fonksiyonuna homogenliği bozucu fonksiyon da denir.

$$u(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n r_i(x)s_i(t)u(t)dt \quad \text{şeklinde alalım. Bunu}$$

operatörlerin komutatîf olması özelliğinden yararlanarak,

$$u(x) = \lambda \sum_{i=1}^n r_i(x) \int_a^b s_i(t)u(t)dt \quad \text{şeklinde yazarsak,}$$

$$A_i = \int_a^b s_i(t)u(t)dt$$

varsayarak,

$$u(x) = \lambda \sum_{i=1}^n A_i r_i(x)$$

çözüm için bir model oluşturur. Bununla denkleme gidilirse

$$\lambda \sum_{i=1}^n A_i r_i(x) = \lambda \int_a^b \sum_i r_i(x) s_i(t) [\lambda \sum A_i r_i(t)] dt$$

bu da seriye açılarak yazılırsa,

$$A_1 r_1(x) + A_2 r_2(x) + \dots + A_n r_n(x) + \dots =$$

$$= r_1(x) \int_a^b \lambda s_1(t) [A_1 r_1(t) + A_2 r_2(t) + \dots] dt$$

$$+ r_2(x) \int_a^b \lambda s_2(t) [A_1 r_1(t) + A_2 r_2(t) + \dots] dt \dots$$

$$A_1 = \int_a^b \lambda s_1(t) [A_1 r_1(t) + A_2 r_2(t) + \dots] dt$$

$$A_2 = \int_a^b \lambda s_2(t) [A_1 r_1(t) + A_2 r_2(t) + \dots] dt$$

.....

$$A_n = \int_a^b \lambda s_n(t) [A_1 r_1(t) + A_2 r_2(t) + \dots] dt$$

olur.

$$A_1 = \int_a^b \lambda s_1(t) A_1 r_1(t) dt + \int_a^b \lambda s_1(t) A_2 r_2(t) dt + \dots$$

$$A_1 \left(1 - \underbrace{\lambda \int_a^b s_1(t) r_1(t) dt}_{C_{11}} \right) = \underbrace{A_2 \lambda \int_a^b s_1(t) r_2(t) dt}_{C_{12}} + \dots$$

$$+ \underbrace{A_n \lambda \int_a^b s_1(t) r_n(t) dt}_{C_{1n'}} + \dots$$

$$A2 \left(1 - \underbrace{\int_a^b s2(t)r2(t) dt}_{C22} \right) = A1 \underbrace{\int_a^b s2(t)r1(t) dt}_{C21} + \dots + An \underbrace{\int_a^b s2(t)rn(t) dt}_{C2n} \dots$$

$$A_n \left(1 - \underbrace{\lambda \int_a^b s_n(t) r_n(t) dt}_{C_{nn}} \right) = A_1 \underbrace{\lambda \int_a^b s_n(t) r_1(t) dt}_{C_{n1}} +$$

$$+ A_2 \underbrace{\lambda \int_a^b s_n(t) r_2(t) dt}_{C_{n2}} + \dots$$

Burada

$$\int_a^b \mathbf{e}_i(t) r_j(t) dt = C_{ij} \quad \text{oldugu görölür. Bunları düzenlersek}$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda_{C_{11}})A_1 - \lambda_{C_{12}}A_2 + \dots + \lambda_{C_{1n}}A_n &= 0 \\ \lambda_{C_{21}}A_1 + (1-\lambda_{C_{22}})A_2 + \dots + \lambda_{C_{2n}}A_n &= 0 \\ \dots & \\ \dots & \\ \lambda_{C_{n1}}A_1 - \lambda_{C_{n2}}A_2 - \dots - (1-\lambda_{C_{nn}})A_n &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir.Bu sistem bir cramer sistemi degildir.Ho-
mogen sistemdir.

0 zaman $A_1=A_2=.....=A_n=0$ sistemin aşikar çözümüdür. Bu denklemin incelenmesinde temel amaç , denklemin aşikar çözümü dışında çözümlerinin olup olmadığını araştırmaktır. Bu sistemin çözülebilmesinin ilk koşulu $D \neq 0$ ile göstereceğimiz katsayılar determinantının sıfıra eşit olmasıdır.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda c_{11} & \dots & \dots & \dots & -\lambda c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda c_{n1} & \dots & \dots & \dots & (1-\lambda)c_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

λ 'nın tam kuvvetlerine göre düzenlenmiş bir polinomu olarak $D(\lambda)=0$ cebirsel denkleminde ulaşılır. Burada bu denklemin n .dereceden olduğu söylenebilir. [n , dejenere çekirdekte terim sayısı].Buna göre bu cebirsel denklemin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gibi n tane kökü vardır.Bu kökler,basit ya da katlı olabilir. Bunlar öz değerler adını alır. Bu değerler için yukarıdaki sistem ayrı ayrı düzenlenir.

Örneğin, $\lambda = \lambda_1$ için,

$$\begin{aligned} (1-\lambda_1 C_{11})A_1 - \dots - \lambda_1 C_{1n}A_n &= 0 \\ \dots & \\ -\lambda_1 C_{n1}A_1 - \dots + (1-\lambda_1 C_{nn})A_n &= 0 \end{aligned}$$

olur.Bu sistemin özelliği $D(\lambda)=D(\lambda_i)=0$ olmasıdır.Öyleyse sistemdeki bağıntılar aralarında lineer bağımlıdır. Bu sistemden lineer bağımlılık ilişkisi, lineer cebir kurallarına göre belirlenerek keyfi ve bağlı değişkenler tespit edilerek

$A_1, A_2, \dots, A_n$ bilinmeyen değerleri bu değerlendirmeye göre belirlenmiş olur.Bunların $u(x)$ için önceden tespit edilen modelinde yerlerine konulmasıyla elde edilecek fonksiyonu $u_1(x)$ ile gösterelim.Bu fonksiyon $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ şeklinde n tane fonksiyon için yapılacak işlemleri temsil etmektedir. Bu şekilde elde edilen fonksiyonlara özel ya da has fonksiyonlar denir. Bunlar aşıkâr çözümün dışında integral denklemini sağlayan yegane fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların önemli bir özelliği aralarında ikişer ikişer ortogonal olmalarıdır. Yani bu fonksiyonlar ortogonal fonksiyonlardır.

$$\int_a^b u_1(x) \cdot u_2(x) dx = 0 \quad \text{olması halinde } u_1 \text{ ve } u_2 \text{ ikişer iki-}$$

şer ortogonaldır sonucu ortaya çıkar.

ÖRNEK:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 (x+t)u(t)dt \quad \text{integral denklemini inceleyelim.}$$

Homogen denklemdir.

$u(x) \equiv 0$ çözümü (aşıkâr) vardır.

$$u(x) = \underbrace{\lambda x \int_0^1 u(t)dt}_{A_1} + \underbrace{\lambda \int_0^1 tu(t)dt}_{A_2}$$

$$u(x) = \lambda [A_1 x + A_2]$$

$$\lambda [A_1 x + A_2] = \lambda \int_0^1 (x+t) [\lambda (A_1 t + A_2)] dt$$

$$A_1 x + A_2 = x \int_0^1 [\lambda (A_1 t + A_2)] dt + \int_0^1 \lambda (A_1 t^2 + A_2 t) dt$$

$$A_1 = \int_0^1 \lambda (A_1 t + A_2) dt \quad ; \quad A_2 = \lambda \int_0^1 (A_1 t^2 + A_2 t) dt$$

$$A_1 = \lambda \left[A_1 \frac{t^2}{2} + A_2 t \right]_0^1 = \lambda \left(\frac{A_1}{2} + A_2 \right)$$

$$A_2 = \lambda \left[A_1 \frac{t^3}{3} + A_2 \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \lambda \left(\frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{2} \right) \quad ;$$

$A_1 = A_2 = 0$ aşıkâr çözüm

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) A_1 - \lambda A_2 = 0$$

$$-\lambda \frac{A_1}{3} + \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) A_2 = 0$$

$$\rightarrow D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{3} = 0$$

olur.

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}$$

özel değerler bulunur.

$\lambda = \lambda_1$ için:

$$\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)A_1 - \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}A_2 = 0 \rightarrow \text{1.denklem}$$

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}A_1 + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)A_2 = 0$$

Bunlar lineer bağımlıdır.

1.denkleme alırsak,

$$\frac{2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}A_1 - \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}A_2 = 0 \quad A_1 = \sqrt{3}A_2$$

$A_2 = 1$ olsun (keyfi). $A_1 = \sqrt{3}$ olur.

$$u_1(x) = \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} [\sqrt{3}x + 1]$$

$\lambda = \lambda_2$ için:

$$\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}\right)A_1 + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}\right)A_2 = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}\right)A_1 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}A_2 = 0$$

$A_1 = -\sqrt{3}A_2$ $A_2 = 1$ olsun (keyfi)

$A_1 = -\sqrt{3}$ olur.

$$u_2(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2} [-\sqrt{3}x + 1]$$

Ortogonalite:

$$\int_a^b u_1(x)u_2(x)dx = 0 \quad \text{olmalı.}$$

$$\int_0^1 \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} [\sqrt{3} x + 1] \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2} [-\sqrt{3} x + 1] dx =$$
$$\frac{12}{-1} \int_0^1 (1 - 3x^2) dx = -12(x - x^3) \Big|_0^1 = 0 \quad \text{olur.}$$

Ortogonallik koşulu sağlandığında $u_1(x), u_2(x)$ ortogonaldır.

2.3 Simetrik Çekirdekli Homogen Integral Denklemler:

Bir simetrik çekirdeğin farklı iki özel değerine karşı gelen özel fonksiyonlar birbirinin ortogonalidir.

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1)$$

integral denklemini alalım. Ancak burada $K(x,t) = K(t,x)$ olduğunu hatırlayalım. Eğer λ bir özel değer değilse denklemin yalnız $u(x) \equiv 0$ gibi bir çözümü mevcut olur. $\lambda = \lambda_n$ bir özel değer ve $u_n(x)$ de bunlara sırasıyla karşı gelen özel fonksiyonlar ise, c_i 'ler sabit sayıları göstermek üzere,

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) ,$$

(1) denkleminin bir çözümüdür. Bunun daha iyi bir açıklamasını yapmak üzere aşağıdaki teoremi incelemekte yarar vardır.

2.4 Açılım Teoremi - Schmidt Serisi:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

homogen integral denkleminin $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ özel fonksiyonlarının düzenlenmiş bir ortogonal sistemini gözönüne alalım. $K(x,t) = K(t,x)$ olup, simetrik çekirdektir. $f(x)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$ de sürekli bir fonksiyon ise bu

$$f(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x) \quad (2)$$

şeklinde bir seriye açılabilir. Ancak c_1 katsayılarının hesaplanabilir olması ve c_1 'lerle teşkil edilecek serinin yakınsak olması gerekir.

c_1 katsayıları şu şekilde hesaplanabilir: (2) açılımının her iki yanı $u_1(x)$ ile çarpılıp, a 'dan b 'ye entegre edilirse

$$\int_a^b f(x)u_1(x)dx = c_1 \int_a^b u_1(x)u_1(x)dx + c_2 \int_a^b u_2(x)u_1(x)dx + \dots$$
$$\dots + c_1 \int_a^b [u_1(x)]^2 dx + \dots$$

olur. Burada

$$\int_a^b u_1(x)u_1(x)dx = 0, \int_a^b u_2(x)u_1(x)dx = 0, \dots$$
$$\dots, \int_a^b [u_1(x)]^2 dx = 1, \dots$$

olduğundan

$$c_1 = \int_a^b f(x)u_1(x)dx$$

bulunur. Burada $u_1(x)$ 'ler düzenlemiş bir ortogonal sisteme aittirler. Bu c_1 katsayılarına, $f(x)$ fonksiyonunun $u_1(x)$ sistemine ait Fourier Katsayıları denir.

Genellikle Fourier Serisinden bahsedildiğinde , trigonometrik seri akla gelir. Oysa , oradaki katsayıların yapısına benzemeden ötürü, burada bu isim kullanılmaktadır.

$K(x,t)$ simetrik çekirdeğinin özel fonksiyonlara açılımı yapılırsa,

$$K(x,t) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \quad (3)$$

olarak yazılabilir. Eğer seri $a \leq x \leq b$ 'de düzgün yakınsak ise,

$u_n(x)$ ile her iki yan çarpılarak a 'dan b 'ye entegre edilir-
se,

$$\int_a^b K(x,t)u_n(x)dx = c_1 \int_a^b u_1(x)u_n(x)dx + \dots + c_n \int_a^b u_n^2(x)dx + \dots$$

olup, yukarıdaki özellikler gözönüne alınarak,

$$c_n = \int_a^b K(x,t)u_n(x)dx \quad (4)$$

olarak c_n katsayılarının hesaplanabileceğini görmüş oluyoruz.

$u_n(x)$, $K(x,t)$ 'nin bir özel fonksiyonu olduğundan

$$u_n(t) = \lambda_n \int_a^b K(x,t)u_n(x)dt$$

denklemini sağlanır. Bu iki bağıntı karşılaştırılırsa,

$$c_n = \frac{u_n(t)}{\lambda_n} \quad (5)$$

yazılır. Bu sonuç (3) 'de yerine yazılırsa,

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(t)}{\lambda_n}$$

elde edilir. Buna Çekirdeğin Bilineer Serisi denir. İtere çekirdek için de bilinear seriler verilebilir.

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

$$u(y) = \lambda \int_a^b K(y,t)u(t)dt$$

denkleminde, yerine değerleri konulduğunda,

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda^2 \int_a^b K(x,y) \int_a^b K(y,t)u(t)dt dy \\ &= \lambda^2 \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y)K(y,t)dy \right] u(t)dt \end{aligned}$$

$$= \lambda \int_a^b K_2(x, t) u(t) dt$$

elde edilir. Eğer λ , $K(x, t)$ 'nin bir özel değeri ve $u(x)$ 'de bir özel fonksiyon ise, λ ile $u(x)$ 'de K_2 'nin bir özel değeri ve bir özel fonksiyonudur. Östelik K_2 'nin başka özel değerleri ve özel fonksiyonları da yoktur. $K(x, t)$ 'nin, simetrik olma özelliği $K_2(x, t)$ için de geçerlidir. Gerçekten,

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, y) K(y, t) dy = \int_a^b K(t, y) K(y, x) dy = K_2(t, x)$$

olur. Buna ait bilineer seri hemen yazılabilir. Ancak $K(x, t)$ için olan seriden farklı olarak $K_2(x, t)$ 'ye ait özel değer ve özel fonksiyon, yani λ_n yerine λ_n^2 ve $u(x)$ gelecektir,

$$K_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(t)}{\lambda_n^2}$$

daha genel olarak, itere çekirdek için

$$K_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(t)}{\lambda_n^i} \quad (i=1, 2, \dots)$$

şeklindeki bilineer seri yazılabilir. Bu seri düzgün yakınsaktır. Bununla ilgili olarak Mercer Teoremi 'nin ifadesi şöyledir: Sürekli bir çekirdek sadece pozitif özel değerler içeriyorsa bunun bilineer serisi düzgün yakınsaktır.

Yukarıdaki açılımlar gözönüne alınarak,

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (6)$$

şeklindeki birinci nev'i homogen Fredholm integral denklemi, $K(x, t)$ çekirdeğinin özel fonksiyonlarına göre, mutlak ve düzgün yakınsak olan,

$$f(x) = \sum_{\tau=1}^{\infty} c_{\tau} u_{\tau}(x)$$

gibi bir seriye açılabilir.

2.5 Fredholm Alternatifi:

Homogen olmayan bir integral denklemin çözümü, λ_n bir özel değer ise, $\lambda \neq \lambda_n$ olmak kaydıyla ve b_n 'ler $f(x)$ açılımının katsayıları olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda b_n}{\lambda_n - \lambda} u_n(x) \quad (7)$$

dir. $\lambda = \lambda_n$ olması halinde neler düşünebilir ve ortaya ne gibi durumlar çıkabilir. Şimdi (7) çözümünü açalım:

$$u(x) = f(x) + \lambda \left[\frac{b_1}{\lambda_1 - \lambda} u_1(x) + \frac{b_2}{\lambda_2 - \lambda} u_2(x) + \dots + \frac{b_n}{\lambda_n - \lambda} u_n(x) + \dots \right]$$

$$\lambda = \lambda_n \text{ olması halinde } \frac{b_n}{\lambda_n - \lambda} \text{ terimi, } b_n \neq 0 \text{ olmak şartıyla}$$

sonlu kalamaz. $b_n = 0$ ise,

$$b_n = \int_a^b f(x) u_n(x) dx = 0$$

demektir ki buda $f(x)$ ve $u_n(x)$ 'in ortogonal olduklarını ifade eder. $n=1,2,\dots$ için aynı şeyler tekrarlanabilir.

Homogen olmayan bir integral denklemin λ_n özel değerlerinin herhangi biri ile λ 'nın çakışması halinde , ancak bir tek çözüm vardır. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun λ_n ' e karşı gelen $u_n(x)$ özel fonksiyonuna ortogonal olması gerekmektedir. Aksi halde çözüm yoktur.

$$\lambda = \lambda_n \text{ olması halinde, } \frac{b_n}{\lambda_n - \lambda} \text{ 'li terim olmadan,}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \left[\frac{b_1}{\lambda_1 - \lambda} u_1(x) + \dots + \frac{b_{n-1}}{\lambda_{n-1} - \lambda} u_{n-1}(x) + \frac{b_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda} u_{n+1}(x) + \dots \right]$$

açılımı

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

denklemini sağlar.

Eğer $u(x)$ bu şekilde bulunmuş bir çözüm ise, k bir sabit göstermek üzere,

$$u(x) + k u_n(x)$$

de yine bir çözümdür. Gerçekten:

$$\begin{aligned} f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) [u(t) + k u_n(t)] dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt + \lambda k \int_a^b K(x, t) u_n(t) dt \\ &= u(x) + k \lambda \frac{u_n(x)}{\lambda_n} = u(x) + \frac{\lambda}{\lambda_n} k u_n(x) = u(x) + k u_n(x) \end{aligned}$$

bulunur $\lambda = \lambda_n$ olduğundan, $\frac{\lambda}{\lambda_n} = 1$ 'dir.

Homogen olan ve olmayan iki denklemin çözüm olanakları için şu sonuçlara varılmış olur:

1) λ 'nın herhangi bir değeri için homogen olmayan denklem çözülür, fakat aynı değer için homogen olan denklem çözülemez.

2) λ için homogen olmayan denklemden $f(x)$ 'in kaldırılmasıyla elde edilen homogen denklemin aşikar çözümünden başka bir çözümü varsa, λ özel değer, buna karşı gelen çözümde özel

fonksiyon adını alır. Bu durumda homogen olmayan denklemin çözümü ancak $f(x)$ 'in λ 'nın özel değerine karşı gelen özel fonksiyona ortogonal olması halinde mevcuttur.

Buna Fredholm Alternatifi denilir.

2.6 Teorem:

Reel simetrik bir çekirdeğin özel değerleride reeldir.

$\lambda = \mu + i\tau$ bir özel değer ve $u(x) = \phi(x) + i\psi(x)$ ' de buna karşı gelen bir özel fonksiyon olsun.

$\bar{\lambda} = \mu - i\tau$ ve $\overline{u(x)} = \phi(x) - i\psi(x)$ olur.

$$\phi(x) + i\psi(x) = (\mu + i\tau) \int_a^b K(x, t) [\phi(t) + i\psi(t)] dt \quad (8)$$

integral denklemini gözönüne alalım. Reel ve imajiner kısımların ayrılması halinde,

$$\begin{aligned} \phi(x) + i\psi(x) &= (\mu + i\tau) \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + (\mu + i\tau) i \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt \\ &= \mu \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + i\tau \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt \\ &\quad + i\mu \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt - \tau \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt \\ &= \mu \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt - \tau \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt \\ &\quad + i[\tau \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + \mu \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt] \end{aligned}$$

olup, reel ve imajiner kısımlar karşılaştırılırsa,

$$\phi(x) = \mu \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt - \tau \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt$$

$$\psi(x) = \tau \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + \mu \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt$$

yazılır. $\phi(x) - i\psi(x)$ ifadesini elde edelim:

$$\begin{aligned} \phi(x) - i\psi(x) &= \mu \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt - \tau \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt \\ &\quad - i\tau \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt - i\mu \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt \quad \text{'den,} \end{aligned}$$

$$= (\mu - i\tau) \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt - (\tau + i\mu) \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt$$

$$= (\mu - i\tau) \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + (i\tau + i^2\mu) \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt$$

$$= (\mu - i\tau) \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + (-\mu + i\tau) i \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt$$

$$= (\mu - i\tau) \int_a^b K(x, t) [\phi(t) - i\psi(t)] dt$$

olur. Bu ise

$$\bar{u}(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

demektir.

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \cdot \bar{u}(x) dx &= \int_a^b [\phi(x) + i\psi(x)] [\phi(x) - i\psi(x)] dx \\ &= \int_a^b (\phi^2(x) + \psi^2(x)) dx = 0 \end{aligned}$$

denklemleri yazılabilir. Burada $u(x)$, $\bar{u}(x)$ 'e ortogonal olduğundan ancak $\phi(x) \equiv 0$ ve $\psi(x) \equiv 0$ için $u(x) \equiv 0$ olarak gerçekleştirilebilir. Bu durumda ise λ bir özel değer değildir. (8) 'de gözönüne alınan integral denklemde çekirdek reel, diğer unsurlar komp-

leks alınmıştır. Sonuçta λ 'nın kompleks alınması halinde bir özel değer bulunamayacağı ortaya çıkar. Öyleyse bir özel değer varsa, bunun reel olması gerekir.

2.7 Özel Değerlerin Dağılımı:

Üzerinde önemle durulacak husus, verilen bir sayının altında bir özel değer mevcut olup olmadığı ve verilen iki sayının arasında ne kadar özel değer mevcut olabileceğidir. Önemli olan bir başka husus da, sonlu bir aralıkta sonsuz sayıda özel değer mevcut olup olamayacağıdır.

$-\alpha$ ile $+\alpha$ değerleri tarafından sınırlanan aralıktaki özel değerlerin sayısı n olsun. Bu özel değerler $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise ve bunlardan herbirine en az bir özel fonksiyon karşı geliyorsa, bunlarda $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ olurlar.

$$c_n = \int_a^b K(x, t) u_n(t) dt$$

olup, c_n katsayıları t 'ye bağlı olacaklardır. $c_n(x)$ teşkil edilirse,

$$c_n(x) = \int_a^b K(t, x) u_n(t) dt = \int_a^b K(x, t) u_n(t) dt$$

yazılır. Burada c_n 'ler x 'in fonksiyonudur. λ_n özel değerleri için $c_n(x)$ 'ler

$$u_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t) u_n(t) dt$$

denklemini sağlar. Öyleyse,

$$c_n = \frac{u_n(x)}{\lambda_n}$$

yazılabilir. Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{u_i(x)}{\lambda_i} \right]^2 \leq \int_a^b [K(x,t)]^2 dt$$

olur. $u_i(x)$ özel fonksiyonlarının ortogonallığı ve düzenlenmiş oldukları gözönüne alınırsa, her iki tarafı x 'e göre a 'dan b 'ye integre ederek,

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{u_i(x)}{\lambda_i} \right]^2 dx \leq \int_a^b \int_a^b [K(x,t)]^2 dx dt$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \int_a^b u_i^2(x) dx \leq \int_a^b \int_a^b [K(x,t)]^2 dx dt$$

ve ortogonal oluşlarından ötürü

$$\int_a^b u_i^2(x) dx = 1$$

olacağından,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \leq \int_a^b \int_a^b [K(x,t)]^2 dx dt$$

bulunur. Burada λ_i sayıları $(-\alpha; +\alpha)$ aralığındadır. Yani $|\lambda_i| \leq \alpha$ dır. Öyleyse sol yandaki toplam ifadesindeki n terimin herbirini, daha küçük olan $\frac{1}{(\alpha^2)}$ ile değiştirmek mümkündür. Demek ki,

$$n \cdot \frac{1}{\alpha^2} \leq \int_a^b \int_a^b [K(x,t)]^2 dx dt = A$$

yazılabilir. Burada A , sağ yandaki katlı integralin değeridir.

$$n \leq \alpha^2 A$$

eşitsizliği λ_n özdeğerlerinin sayısı için bir üst sınır vermiş olur. α keyfi bir değer olduğundan, şu yargıya varılabilir: Sonlu aralıkta, sonlu sayıda özel değer bulunabilir. Özel

değerler sonluda yığılmazlar.

Özel değerlerin sıralanabilir ve numaralanabilir olması

$$|\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}|$$

olarak ifade edilebilir.

Bir örnek üzerinde bazı hususları görmek faydalı olacaktır.

$$K(x,t) = \lambda \begin{cases} x(1-t) & x \leq t \text{ için} \\ t(1-x) & x \geq t \text{ için} \end{cases}$$

çekirdek fonksiyonlu

$$u(x) = \int_0^1 K(x,t)u(t)dt$$

integral denklemini alalım. $K(x,t) = K(t,x)$ dir. Bu integral denklem

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

diferansiel denklemi ile $u(0) = u(1) = 0$ başlangıç şartları altında aynı anlamı taşır. Bunun özel değerleri,

$$\lambda_1 = i^2\pi^2$$

sayıları ve özel fonksiyonları ise, düzenlenmiş olarak,

$$u_1(x) = \sqrt{2} \sin(i\pi x)$$

dir. $\sqrt{2}$ düzenleyici çarpandır. Yukarıda verdiğimiz ifadeye göre özel değerlerin terslerinin karelerinden ibaret olan seri yakınsak olup, burada

$$\frac{1}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) = \frac{1}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots\right)$$

yazılacaktır. Bunun toplamı $\frac{\pi^4}{90}$ olup, buraya uygulanırsa

$$\frac{1}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots\right) = \frac{1}{\pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{90}$$

olur. Serinin yakınsaklığında görülmektedir. Diğer taraftan A değeri hesaplanmak suretiyle $(-10, +10)$ aralığındaki özel değerlerin n sayısının limitini bulalım:

$$A = \int_a^b \int_a^b [K(x, t)]^2 dx dt = \int_0^1 \left[\int_0^t x^2(1-t)^2 dx + \int_t^1 t^2(1-x)^2 dx \right] dt = \frac{1}{90}$$

bulunur.

$$n \leq \alpha^2 \cdot A \quad \text{'dan}$$

$$n \leq 10^2 \cdot \frac{1}{90} = \frac{10}{9}$$

olup, $(-10, +10)$ aralığındaki özel değerlerin sayısının 1 tane olduğu anlaşılır. Gerçekten bu aralıkta sadece $\pi^2 = 9,87$ özel değeri mevcuttur.

Burada önemli olan, özel değerlerin ne olduğunu bilmeden belirli bir aralıkta bunların sayısının kaç tane olacağını hesabedebilmektir.

2.8 Teorem:

Her reel simetrik çekirdeğin en az bir özel değeri vardır.

Bu teorem ilk defa Hilbert tarafından ispatlanmışsa da burada Kneserin yaptığı ispat verilecektir.

$$D'(\lambda) = \frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = - \int_a^b D(x, x; \lambda) dx \quad (9)$$

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

ve

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

idi. Diğer taraftan,

$$\Gamma(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda K^{(2)}(x, t) + \dots + \lambda^n K^{(n+1)}(x, t) + \dots$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. (9) bağıntısını $D(\lambda)$ ile bölelim:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = - \int_a^b \frac{D(x, x; \lambda)}{D(\lambda)} dx = - \int_a^b \Gamma(x, x; \lambda) dx$$

olur. λ 'yı yeteri kadar küçük almak suretiyle Γ yerine ona ait seriyi koyabiliriz. Bu seri x, t , λ 'ya nazaran düzgün yakınsak olduğundan, terim terim entegre edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} &= - \int_a^b [K(x, x) + \lambda K^{(2)}(x, x) + \dots + \lambda^n K^{(n+1)}(x, x) + \dots] dx \\ &= - \int_a^b K(x, x) dx - \lambda \int_a^b K^{(2)}(x, x) dx - \dots - \lambda^n \int_a^b K^{(n+1)}(x, x) dx \end{aligned}$$

olur. Bu integralleri sıra ile $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ile gösterelim.

$$A_1 = \int_a^b K(x, x) dx ; A_2 = \int_a^b K^{(2)}(x, x) dx ; \dots ;$$

$$A_{n+1} = \int_a^b K^{(n+1)}(x, x) dx$$

olup, A_i 'ler birer sayıdır. Bunlara Çekirdeğin izleri denir.

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -A_1 - \lambda A_2 - \dots - \lambda^n A_{n+1} - \dots \quad (10)$$

serisinin, λ 'nın her değeri için yakınsak olmadığını göstereceğiz. Yani bu serinin yakınsaklık yarıçapı sonludur. Fonksiyonlar teorisine göre , bu yakınsaklık dairesinde bir tekil nokta vardır. $D'(\lambda)/D(\lambda)$ meromorf olduğundan bunun tekil noktaları $D(\lambda)=0$ 'ın kökleri yani kutuplardır. Böyleyse $D'(\lambda)/D(\lambda)$ serisinin yakınsaklık yarıçapının sonlu olduğunu göstermek

teoremi ispatlamak demek olacaktır.

İspat için , örneğin ; A_{2k} 'yı alalım. k bir keyfi sabit olmak üzere,

$$A_{2k} = \int_a^b K^{(2k)}(x, x) dx$$

$$K^{(2k)}(x, t) = \int_a^b K^{(k)}(x, y) K^{(k)}(y, t) dy$$

$$K^{(2k)}(x, x) = \int_a^b [K^{(k)}(x, t)]^2 dt$$

$$A_{2k} = \int_a^b dx \int_a^b [K^{(k)}(x, t)]^2 dt = \int_a^b \int_a^b [K^{(k)}(x, t)]^2 dt dx$$

işlemleri sıralanabilir. O halde

$$A_{2k} > 0$$

dır. Yukarıdaki ispata göre $A_{2k} \neq 0$ 'dır. diğer taraftan

$K^{(k)}(x, t) \neq 0$ 'dır. Bu sonuca göre,

$$A_2 > 0, A_4 > 0, \dots, A_{2k} > 0, \dots$$

yazılabilir. $a \leq x \leq b$ ve $a \leq t \leq b$ ile sınırlı kare bölgede,

$$f(x, t) = K^{(n+1)}(x, t) ; g(x, t) = K^{(n-1)}(x, t)$$

olarak Schwartz eşitsizliğini uygulayalım:

$$\left[\int_a^b \int_a^b K^{(n+1)}(x, t) \cdot K^{(n-1)}(x, t) dx dt \right]^2 \leq$$

$$\int_a^b \int_a^b [K^{(n+1)}(x, t)]^2 dx dt \cdot \int_a^b \int_a^b [K^{(n-1)}(x, t)]^2 dx dt$$

olur. Sol yandaki integrali I ile gösterelim:

$$I = \int_a^b dx \int_a^b K^{(n+1)}(x, t) K^{(n-1)}(x, t) dt = \int_a^b dx K^{(2n)}(x, x)$$

$$= \int_a^b K^{(2n)}(x, x) dx = A_{2n}$$

demektir. Buna göre sağ yandaki integralleri de değerlendirirsek,

$$A_{2n}^2 \leq A_{2n+2} \cdot A_{2n-2}$$

yazılır. Buradan

$$\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \geq \frac{A_{2n}}{A_{2n-2}}$$

veya daha açık olarak,

$$\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \geq \frac{A_{2n}}{A_{2n-2}} \geq \dots \geq \frac{A_6}{A_4} \geq \frac{A_4}{A_2} > 0$$

olduğu yazılabilir. $A_4/A_2 = q$ olsun. $q > 0$ 'dır.

$$\frac{A_{2n+2}}{A_2} \geq q^n$$

olur.

$$\lambda A_2 + \lambda^3 A_4 + \dots + \lambda^{2n+1} A_{2n+2} + \dots$$

serisini gözönüne alalım. Bu seri (10) serisinden çıkarılmıştır. Bunun ıraksak olduğunu gösterebilirsek, (10) serisi de ıraksaktır.

$$|\lambda^{2n+1} A_{2n+2}| \geq |\lambda|^{2n+1} A_{2n+2} = |\lambda|^{2n+1} A_2 q^n \geq A_2 |\lambda| (q |\lambda|^2)^n = \alpha$$

olsun. $q |\lambda|^2 > 1$ olduğunu farzederseniz $n \rightarrow \infty$ için $\alpha \rightarrow \infty$ olur. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda^{2n+1} A_{2n+2}| \rightarrow \infty$$

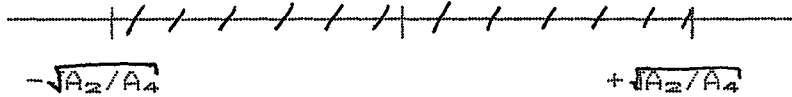
demektir. Öyleyse bu seri,

$$|\lambda| > \frac{1}{\sqrt{q}}$$

için ıraksaktır. Dolayısıyla (10) serisi de

$$|\lambda| > \frac{1}{\sqrt{q}} = \frac{A_2}{\sqrt{A_4}}$$

için ıraksaktır. O halde serinin yakınsaklık yarıçapı sonludur.



Buradaki sekilden $-\sqrt{A_2/A_4}$ ile $+\sqrt{A_2/A_4}$ değerlerinin dışında kalan bölgelerde serinin ıraksak olduğunu bildiğimize göre bu değerler arasına rastlayan taralı kısımda yakınsak olacağı kolayca görülür.

2.9 Teorem:

Bir fonksiyon, özel fonksiyonların hepsine ortogonal ise çekirdeğe de ortogonaldır.

Gözönüne aldığımız fonksiyon $h(x)$, özel fonksiyonlar da $u_n(x)$ 'ler olsun. İddiaya göre

$$\int_a^b h(x) \cdot u_n(x) dx = 0 \quad (11)$$

ise

$$\int_a^b h(x) \cdot K(x, t) dx = 0 \quad (12)$$

dir. Schmidt serisi,

$$K^{(1)}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(t)}{\lambda_n^{-1}} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (13)$$

şeklinde bilineer seri olarak yazılabilir.

$$\int_a^b \int_a^b K^{(2)}(x, t) h(x)h(t) dx dt$$

integralini gözönüne alalım. Burada $i=2$ hali sözkonusudur. (13)

uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b K^{(2)}(x,t) h(x) h(t) dx dt &= \int_a^b \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(t)}{\lambda_n^2} h(x) h(t) dx dt \\ &= \sum \frac{1}{\lambda_n^2} \int_a^b \int_a^b u_n(x) u_n(x) h(x) h(t) dx dt \\ &= \sum \frac{1}{\lambda_n^2} \underbrace{\int_a^b u_n(x) h(x) dx}_0 \underbrace{\int_a^b u_n(t) h(t) dt}_0 = 0 \end{aligned}$$

olur. (11) 'deki hipotez gereğince bu integraller ayrı ayrı sıfır olurlar.

$$K^{(2)}(x,t) = \int_a^b K(x,y) K(y,t) dy$$

idi. Yukarıdaki bağıntıda yerine koyarsak,

$$\int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x,y) K(y,t) h(x) h(t) dx dt dy = 0$$

bulunur. Çekirdek , simetrik olduğundan bu üç katlı integrali biraz değiştirelim:

$$\int_a^b dy \int_a^b K(y,x) h(x) dx \int_a^b K(y,t) h(t) dt = 0$$

olup, üçüncü integral içindeki ifadede t yerine x konursa

$$\int_a^b dy \left[\int_a^b K(y,x) h(x) dx \right]^2 = 0$$

bulunur. Köşeli parantez ifadesinin bütününü $F(y)$ ile gösterirsek,

$$\int_a^b F(y) dy = 0$$

demektir. $F(y) \geq 0$ 'dır. Öyleyse $F(y) \equiv 0$ olmak zorundadır. Bu sonuca göre, $h(x)$ fonksiyonu çekirdeğe ortogonaldır.

BÖLÜM III

LINEER HOMOGEN INTEGRAL DENKLEMLERİN GENEL OLARAK İNCELENMESİ

3.1 $D(\lambda)=0$ ve $D(\lambda)\neq 0$ Olduğu Durumlarda Homogen Denklem Çözümü:

Eğer $D(\lambda) = 0$ ise o zaman

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1)$$

homogen denklemi

$$u(x) \equiv 0 \quad (2)$$

ile verilen sadece bir sürekli çözüme sahiptir.

Şimdi $D(\lambda)=0$ olduğunda (1) homogen denkleminde $D(\lambda_0)=0$ için λ 'nın λ_0 değerini alalım. Bu özel λ değeri için (1) homogen denkleminin çözümünü inceleyelim. Bu durumda

$$u(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (3)$$

olur.

Fredholm 'un ikinci temel bağıntısı

$$D(x,y;\lambda) - \lambda \int_a^b K(x,t)D(t,y;\lambda)dt$$

(3) yardımıyla (2) ' nin bir çözümünü inceleyelim. Bu bağıntı λ 'nın tüm değerleri için doğrudur. Ve $\lambda = \lambda_0$ içinde doğru olacaktır.

Bu λ değeriyle $D(\lambda_0)=0$ yüzünden (3) denklemi

$$D(x,y;\lambda_0) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)D(t,y;\lambda_0)dt$$

haline gelir. $[a,b]$ aralığında y 'nin her değeri için denklem sağlanır. Ve $y=y_0$ 'dır.

$$D(x, y; \lambda_0) = \lambda_0 \int_a^b K(x, t) d(t, y_0; \lambda_0) dt$$

elde edilir.

Fakat $u(x)$ 'in $D(x, y; \lambda)$ ile yer değiştirmesiyle sadece (3) denklemi elde edilir. Byöylece $u(x) = D(x, y_0; \lambda_0)$, (3) 'ün bir çözümüdür. x ve y için $D(x, y; \lambda)$ daima yakınsak ve sürekli olduğu için bu çözümde sürekli dir. Fakat y_0 için diğer bazı değerleri seebilmemiz durumunda ya, y_0 'ın başarısız çözümü nedeniyle y_0 'ı nasıl özdüğümüz önemli olmadan yukarıdaki çözüm basit $u \equiv 0$ çözümüne indirgeme durumunda x ve y 'de $D(x, y; \lambda_0) \equiv 0$ olacağı için $D(x, y_0; \lambda_0)$ sıfır olabilir.

3.2 Teorem:

Eğer $D(\lambda_0) = 0$ ve $D(x, y; \lambda_0) \neq 0$ ise buradan y_0 'ın uygun bir secimi için

$$u(x) = D(x, y_0; \lambda_0) , \quad u(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

denkleminin sürekli bir çözümüdür ve $u(x) \neq 0$ 'dır.

Bu teoremd e ifade edilen $D(x, y; \lambda) \equiv 0$ kosulu $D'(\lambda) \neq 0$ kosuluna dönüřtürülebilir. Bunu göstermek için

$$\int_a^b D(x, x; \lambda) dx = -\lambda D'(\lambda) \quad (4)$$

denklemini ispat edeceđiz. $D'(\lambda)$ ve $D(x, y; \lambda)$ için seri ifadelerini kullanarak (4) 'ü ispatlayalım.

$$A_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

olduğu durumda

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{2!} A_2 - \frac{\lambda^3}{3!} A_3 + \dots$$

eşitliğinden

$$D'(\lambda) = -A_1 + \lambda A_2 - \lambda^2 \frac{A_3}{2!} + \dots$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_{n+1}$$

olur.

$$A_{n+1} = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_{n+1}) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \dots & K(t_2, t_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_{n+1}, t_1) & K(t_{n+1}, t_2) & \dots & K(t_{n+1}, t_{n+1}) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_{n+1}$$

ifadesinde $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, t_{n+1}$ yerine $x, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$ koyarsak

$$A_{n+1} = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, x) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, x) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, x) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dx dt_1 \dots dt_n$$

elde edilir. Bu belirli çarpım integralinde 1. integralin sırasını değiştirirsek

$$A_{n+1} = \int_a^b \left(\int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, x) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, x) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n \right) dx$$

olur.

$$B_n(x, y) = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, y) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, y) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

olduğundan A_{n+1} ifadesinde yerine koyarız ve

$$A_{n+1} = \int_a^b B_n(x, x) dx$$

elde edilir. Bu yüzden

$$D'(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b B_n(x, x) dx$$

olur. Fakat

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b B_n(x, x) dx$$

serisi x 'de düzgün yakınsak bir seridir. Buradan yazılan toplamın ve $D'(\lambda)$ için ifadedeki integrale sırasını değiştirebiliriz ve

$$D'(\lambda) = - \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} B_n(x, x) dx$$

yazabiliriz. Her iki tarafı önce $-\lambda$ ile çarparsak ve

$$D(x, y; \lambda) = \lambda K(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} B_n(x, y)$$

dan

$$\int_a^b D(x, x; \lambda) dx = -\lambda D'(\lambda) \quad (4)$$

deşitliğini görürüz.

Simdi $D(\lambda_0) = 0$ ve $D'(\lambda_0) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Kesinlikle $D(0) = 1$ olduğu için $\lambda_0 \neq 0$ 'dır. Eger (4) 'de $\lambda \neq 0$ yazarsak bu eşitliğin sağ tarafı sıfırdan farklıdır. Bundan dolayı x 'de $D(x, x; \lambda_0) \neq 0$ 'dır. Bunun sonucu olarak x ve y 'de $D(x, y; \lambda_0) \neq 0$ 'dır. Teorem 3.2 'de $D(x, y; \lambda_0) \neq 0$ koşulu $D'(\lambda_0) \neq 0$ ile yer değiştirilebilir.

Eğer $U(x)=D(x,y_0;\lambda_0)$, (3) homogen integral denkleminin bir çözümü ise cu (c , keyfi bir sabit)'da bir çözümdür. Böylece sabit faktörlerle farklı olan çözümlerin sonsuzluğu vardır. Biz başka çözümlerin olmadığını göstereceğiz. Δ determinantı ile

$$u_i - \lambda h \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j = 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

linear denklemlerin sonlu sistemi ile bu benzerliktedir. Eğer $\Delta=0$ ise Δ_{ik} minörlerinin hepsi yok olmuyorken n denklemleri tek olarak $u_1, u_2, \dots, u_n$ oranlarını belirtir ki buda $u_j = c_j u_n$ 'dir. ($j=1, \dots, n; c_n=1$). Yok olmayan Δ_{ik} 'ların hepsi $D(x,y;\lambda_0) \neq 0$ 'a benzediğinde $\Delta=0$, $D(\lambda)=0$ 'a benzer.

3.3 $D(\lambda)=0$ Oldugunda Homogen Integral Denklemin Çözümü:

Δ 'nın yüksek mertebeli minörlerini incelemek için Δ ve bütün birinci minörlerinin sıfır olduğu ve bunun gerekli olduğu yerlerde linear sistemde bu duruma karşılık gelen

$$D(\lambda_0) = 0 , D(x,y;\lambda_0) \equiv 0$$

durumunu incelemeye devam edelim. Biz integral denklemin bu durum içinde h sıfıra yaklaştığı için Δ 'nın yüksek mertebeli minörlerinin limitlerini incelemek zorundayız.

Şimdi Heywood-Frechet notasyonunu kullanalım. Notasyon

$$K \begin{bmatrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(s_1, t_1) & \dots & K(s_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(s_n, t_1) & \dots & K(s_n, t_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

dir.

3.3.1 $D(\lambda)$ 'nin p. Minörünü Belirtme:

$$B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = \int_a^b \dots \int_a^b K \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p, t_1, \dots, t_n \\ y_1, \dots, y_p, t_1, \dots, t_n \end{bmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

$$B_0 \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} \quad (6)$$

olsun. Buradan $D(\lambda)$ 'nin p. minörü

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+p}}{n!} B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$= D_p(x, y; \lambda),$$

şeklindeki sonsuz seri tarafından tanımlanır ki burada $p=1$ için $D(x, y; \lambda)$ 'ya indirgenir.

3.3.2 Teorem:

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} \lambda \quad \text{ için sonsuz serisi tamamen ve daima } \lambda \text{ 'da}$$

sürekli yakınsaktır ve $a \leq x_\alpha \leq b$, $a \leq y_\beta \leq b$ ($\alpha, \beta=1, \dots, p$) için $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ 'de düzgün yakınsaktır.

Sonuç : x 'in $x_i = x_j$ gibi iki eşdeğeri olduğunda veya y 'nin $y_i = y_j$ gibi iki eşdeğeri olduğunda $D_p(x, y; \lambda)$ yok olur.

$$B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} \quad \text{integrali için iki sütun eşitlenir,}$$

Bu yüzden $B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = 0$ dır. Benzer yolla x veya y 'nin

ikisi $D_p(x, y; \lambda)$ 'da değiştirilirse $D_p(x, y; \lambda)$ işaret değişti-
rir.

3.3.3 İki Temel Bağıntının Genellemesi:

y_β sütununun elemanlarına göre B_n $\begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix}$ 'de

determinant belirtilir.

$$B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = \int_a^b \dots \int_a^b \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} (-1)^{\alpha+\beta} x \right.$$

$$K(x_\alpha, y_\beta) K \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t_1, \dots, t_n \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \dots, y_p, t_1, \dots, t_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^{p+1+\beta} K(t_i, y_\beta) x$$

$$K \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p, t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \dots, y_p, t_1, \dots, t_n \end{bmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

olur. Birinci toplamda $K(x_\alpha, y_\beta)$ integral işaretinden önce alı-
nabilir ve (5) 'e göre toplam

$$\sum_{\alpha=1}^p (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, y_\beta) B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \dots, y_p \end{bmatrix}$$

hale gelir. İkinci toplamda notasyon değişikliği yapılır.

$t_1, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n$ yerine $t, t_1, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}$ yazılır. İkinci
toplamın i . terimi

$$(-1)^{p+1+\beta} K(t, y_\beta) \times$$

$$K \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\beta-1}, x_\beta, x_{\beta+1}, \dots, x_p, t_1, \dots, t_{n-1} \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \dots, y_p, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_{n-1} \end{bmatrix}$$

olur. Kolonların $i+p-\beta-1$ transpozeleri ile $y_{\beta-1}$, $y_{\beta+1}$ kolonları arasında t sütununu alalım. İkinci toplamın i . terimi için

$$-K(t, y_\beta) \times K \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\beta-1}, x_\beta, x_{\beta+1}, \dots, x_p, t_1, \dots, t_{n-1} \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, t, y_{\beta+1}, \dots, y_p, t_1, \dots, t_{n-1} \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Buradan $\sum_{i=1}^n$ 'deki bütün terimler eşittir. Ve eğer $t_1, \dots, t_{n-1}$ yönü ile

$$-n \int_a^b K(t, y_\beta) \left(\int_a^b \dots \int_a^b K \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\beta-1}, x_\beta, x_{\beta+1}, \dots, x_p, t_1, \dots, t_{n-1} \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, t, y_{\beta+1}, \dots, y_p, t_1, \dots, t_{n-1} \end{bmatrix} dt_1 \dots dt_{n-1} \right) dt$$

integrasyon uygulanırsa (5) 'e göre

$$-n \int_a^b K(t, y_\beta) \times B_{n-1} \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\beta-1}, x_\beta, x_{\beta+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, t, y_{\beta+1}, \dots, y_p \end{bmatrix} dt$$

toplam yazılabilir. Böylece

$$B_n = \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = \quad (6)$$

$$\sum_{\alpha=1}^p (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, y_\beta) B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \dots, y_p \end{bmatrix}$$

$$-n \int_a^b K(t, y_\beta) B_{n-1} \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, t, y_{\beta+1}, \dots, y_p \end{bmatrix} dt$$

formülüne varırız. Benzer yolla x_α kökünün elemanlarına göre

$$B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} \quad \text{'nin integralini genişleterek}$$

$$B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = \quad (9)$$

$$\sum_{\beta=1}^p (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, y_\beta) B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \dots, y_p \end{bmatrix}$$

$$-n \int_a^b K(x_\alpha, t) B_{n-1} \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, t, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_\beta, y_{\beta+1}, \dots, y_p \end{bmatrix} dt$$

elde ederiz. eğer (31) ve (32) 'nin her iki tarafını

$$(-1)^n \frac{\lambda^{n-p}}{n!} \quad \text{ile çarparsak ve } n=0 \text{ 'dan } n=p \text{ 'a kadar } n \text{ terim-}$$

lerini toplarsak (30) 'da verilen tanımlama dolayısıyla Fred-
holm'un iki temel bağıntılarının

$$D(x, y; \lambda) - \lambda K(x, y) D(\lambda) = \lambda \int_a^b K(t, y) D(x, t; \lambda) dt$$

$$D(x, y; \lambda) - \lambda K(x, y) D(\lambda) = \lambda \int_a^b K(x, t) D(t, y; \lambda) dt$$

genellemelerini

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} \quad \lambda = \quad (10)$$

$$\sum_{\alpha=1}^p (-1)^{\alpha+\beta} \lambda K(x_\alpha, y_\beta) D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \dots, y_p \end{bmatrix} \lambda$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda \int_a^b K(t, y_\beta) D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\beta-1}, x_\beta, x_{\beta+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, t, y_{\beta+1}, \dots, y_p \end{bmatrix} dt \\
 & = \sum_{\beta=1}^p (-1)^{\alpha+\beta} \lambda K(x_\alpha, y_\beta) \quad (11) \\
 & D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \dots, y_p \end{bmatrix} \\
 & + \int_a^b K(x_\alpha, t) D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, t, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\alpha-1}, y_\alpha, y_{\alpha+1}, \dots, y_p \end{bmatrix} dt
 \end{aligned}$$

elde ederiz.

3.3.4 $D^{(p)}(\lambda)$ ve $D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix}$ Arasındaki İlişki:

$D'(\lambda)$ ve $D(x, x; \lambda)$ arasındaki (4) ilişkisi aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

İspat:

$D(\lambda)$ için

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n \quad \text{seri ifadesinden}$$

$$D^{(p)}(\lambda) = \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n-p}}{(n-p)!} A_n$$

elde edilir ki burada $n-p=n'$ notasyonunda bir değişiklik ve

(') atarsak

$$D^{(p)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p} \frac{\lambda^n}{n!} A_{n+p}$$

şeklinde yazılabilir. Fakat,

$$A_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

ile

$$A_{n+p} = \int_a^b \dots \int_a^b K \begin{bmatrix} t_1, \dots, t_{n+p} \\ t_1, \dots, t_{n+p} \end{bmatrix} dt_1 \dots dt_{n+p} \quad \text{'dir.}$$

Eğer $t_1, \dots, t_p, t_{p+1}, \dots, t_{p+n}$ ifadesinde $x_1, \dots, x_p, t_1, \dots, t_n$ ifadesini yazarsak $t_1, \dots, t_n$ 'e göre integrasyon sırasını değiştirirsek

$$A_{n+p} = \int_a^b \dots \int_a^b \int_a^b \int_a^b K \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p, t_1, \dots, t_n \\ x_1, \dots, x_p, t_1, \dots, t_n \end{bmatrix} dt_1 \dots dt_n dx_1 \dots dx_p$$

elde ederiz ki burada (5) yüzünden

$$A_{n+p} = \int_a^b \dots \int_a^b B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ x_1, \dots, x_p \end{bmatrix} dx_1 \dots dx_p$$

halini alır. Bu eşitliğin her iki tarafını $(-1)^n \frac{\lambda^{n+p}}{n!}$ ifade-

siyle çarpalım ve $n=0$ 'dan $n=\infty$ 'a kadar n terimlerini toplayalım. Sonuçta

$$(-1)^p \lambda^p \frac{d^p D(\lambda)}{d\lambda^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \dots \int_a^b (-1)^n \frac{\lambda^{n+p}}{n!} B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ x_1, \dots, x_p \end{bmatrix} dx_1 \dots dx_p$$

elde ederiz. Çarpım integrali işareti altında bu toplamı yerleştirmek mümkündür. Eğer saptanan (7) denklemini kullanırsak

$$(-1)^p \lambda^p \frac{d^p D(\lambda)}{d\lambda^p} = \int_a^b \dots \int_a^b D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ x_1, \dots, x_p \end{bmatrix} \lambda dx_1 \dots dx_p$$

elde ederiz ki saptanan (12) eşitliğidir.

Yok olmayan Fredholm minörlerinin hepsini ispat etmek için bu sonucu kullanalım. $D(\lambda) = 0$ kökünü λ_0 alalım. Burada $D(0) = 1$ için kesinlikle $\lambda_0 \neq 0$ 'dır. Ayrıca $\lambda_0, D(\lambda_0)=0, D'(\lambda_0)=0, \dots, D^{(r-1)}(\lambda_0)=0, D^{(r)}(\lambda_0) \neq 0$ şeklinde tanımlanan r sonlu çarpımının $D(\lambda)$ 'nın bir köküdür. Bu kökün r çarpımı sonlu olmalıdır. Diğer durumda $D(\lambda) \equiv 0$ olur. (12) 'de $\lambda = \lambda_0$ ve $p=r$ yazalım. Buradan bizim hipotezimizin sağ tarafı yok olmaz. Böylece sol tarafta yok olmaz. Buradan $\lambda \neq 0$ olduğu için $x_1, \dots, x_r$ 'de

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_r \\ \lambda_0 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır.

Bunun sonucu olarak $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r$ 'de

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_r \\ y_1, \dots, y_r \\ \lambda_0 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Bundan dolayı

$$D(\lambda_0) = 0, D \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda_0 \end{bmatrix}, D \begin{bmatrix} x_1, x_2 \\ y_1, y_2 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}, D \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}, \dots$$

serisinde $q \leq r$ sayısına gelmeliyiz ki

$$D(\lambda_0) = 0, D(x, y; \lambda_0) \equiv 0, \dots, \dots,$$

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{q-1} \\ y_1, \dots, y_{q-1} \\ \lambda_0 \end{bmatrix} \equiv 0, D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_q \\ y_1, \dots, y_q \\ \lambda_0 \end{bmatrix} \neq 0$$

olacak şekilde λ_0 'ın indexi olarak adlandırılır.

$x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_q$ değişkenleri için $x_1', \dots, x_q', y_1', \dots, y_q'$ özel değer seti varolacak şekilde biz

$$D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_q' \\ y_1', \dots, y_q' \end{bmatrix} \neq 0$$

nümerik eşitsizliğine sahip oluruz.

3.3.5 Teorem:

$D(\lambda)$ 'nın kökünün q indexi λ_0 'ın r çarpımına hemen hemen eşittir.

3.3.6 Homogen Denklemin q Bağımsız Çözümleri:

$$D(\lambda_0) = 0, D(x, y; \lambda_0) \equiv 0, \dots, \dots, \dots,$$

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{q-1} \\ y_1, \dots, y_{q-1} \end{bmatrix} \equiv 0$$

olacak şekilde q indeksinin $D(\lambda) = 0$ 'ın kökünü alalım. Fakat

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_q \\ y_1, \dots, y_q \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. $\lambda = \lambda_0$, $p=q$ için Fredholm un (11) ikinci genelleştirilmiş temel bağıntılarını yazalım.

$$x_1 = x_1', \dots, x_{q-1} = x_{q-1}', x_q = x, x_{q+1} = x_{q+1}', \dots, x_q = x_q'$$

$$y_1 = y_1', \dots, y_{p-1} = y_{p-1}', y_p = y_p, y_{p+1} = y_{p+1}', \dots, y_q = y_q'$$

olur. O zaman

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{q-1}, x_{q+1}, \dots, x_q \\ y_1, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, \dots, y_q \end{bmatrix} \equiv 0 \quad (12)$$

hipotezi ile

$$D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_{\alpha-1}', x, x_{\alpha+1}', \dots, x_q' \\ y_1', \dots, y_{\beta-1}', y_{\beta}', y_{\beta+1}', \dots, y_q' \end{bmatrix} = \lambda_0 \int_a^b K(x, t) D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_{\alpha-1}', t, x_{\alpha+1}', \dots, x_q' \\ y_1', \dots, y_{\beta-1}', y_{\beta}', y_{\beta+1}', \dots, y_q' \end{bmatrix} dt$$

olur. Eger

$$D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_q' \\ y_1', \dots, y_q' \end{bmatrix}$$

ile bölersek ve

$$D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_{\alpha-1}', x, x_{\alpha+1}', \dots, x_q' \\ y_1', \dots, y_{\beta-1}', y_{\beta}', y_{\beta+1}', \dots, y_q' \end{bmatrix} = \lambda_0 \theta_{\alpha}(x, \lambda_0) D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_q' \\ y_1', \dots, y_q' \end{bmatrix} \quad (13)$$

yerleştirirsek

$$\theta_{\alpha}(x, \lambda_0) = \lambda_0 \int_a^b K(x, t) \theta_{\alpha}(t, \lambda_0) dt$$

ye sahip oluruz. Ki bu (2) homogen denkleminin çözümleri olan

$$\theta_1(x, \lambda_0), \theta_2(x, \lambda_0), \dots, \theta_q(x, \lambda_0)$$

q fonksiyonlarını belirtir. Bu çözümler süreklidir ve (7) ve

(5) 'den

$$\theta_{\alpha}(x_{\beta}', \lambda_0) = \begin{cases} 1, & \beta = \alpha \\ 0, & \beta \neq \alpha \end{cases} \quad (14)$$

elde edilir. Bununla beraber bu fonksiyonlar lineer bağımsız-

dir.

$$c_1\theta_1(x) + c_2\theta_2(x) + \dots + c_q\theta_q(x) \equiv 0$$

formunda bir bağıntı varsa $c_1, \dots, c_q$ 'nun sabit olduğu yerlerde $c_1 = c_2 = \dots = c_q = 0$ 'ı elde etmeliyiz. (14) 'den eğer $x=x_\alpha$ ' ise $c_\alpha=0$ 'dır.

(2) 'nin homogenliğinden $c_1, \dots, c_q$ keyfi değerleri için

$$u(x) = c_1\theta_1(x) + \dots + c_q\theta_q(x) \quad (15)$$

(3) 'ün tekrar bir çözümüdür. Böylece çözümlerin bir q-katını elde ederiz.

3.3.7 Tamamlanmamış İspat:

Yapacağımız işlem (3) 'ün tüm çözümlerinin (15) formunda yerleştirilebilirliğini göstermek.

Eğer $v(x)$ (3) 'ün herhangi bir çözümü ise

$$v(x) = \int_a^b K(x,t)v(t)dt$$

dir.

$H(x,t)$ 'nin sürekli olduğu yerlerde

$$0 \equiv \int_a^b H(x,t) \left(v(x) - \lambda_q \int_a^b K(t,s)v(s)ds \right) dt$$

olur. Birinciden ikinci denklemi çıkartarak

$$v(x) = \lambda_q \int_a^b N(x,t)v(t)dt \quad (16)$$

olur. Burada

$$\lambda_q N(x,t) = \lambda_q K(x,t) - \left(H(x,t) - \lambda_q \int_a^b H(x,s)K(s,t)ds \right)$$

dir. $p=q+1$, $x_{q+1}=x$, $y_{q+1}=y$ 'yi (10) 'a uygulayalım ve iki x 'in ve iki y 'nin sırasının değişimi D 'nin işaretini değiştire-

bir.0 zaman

$$D \begin{bmatrix} x, x_1, \dots, x_a \\ y, y_1, \dots, y_a \end{bmatrix} = K(x, y) D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_a \\ y_1, \dots, y_a \end{bmatrix} \\ - \sum_{\alpha=1}^a \lambda K(x_\alpha, y) D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x, x_{\alpha+1}, \dots, x_a \\ y_1, \dots, y_{\alpha-1}, y, y_{\alpha+1}, \dots, y_a \end{bmatrix} \\ + \lambda \int_a^b K(t, y) D \begin{bmatrix} x, x_1, \dots, x_a \\ t, y_1, \dots, y_a \end{bmatrix} dt$$

olur. $x=x_1', \dots, x_a=x_a', y_1=y_1', \dots, y_a=y_a', y=t, =$ olsun ve

$$D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_a' \\ y_1', \dots, y_a' \end{bmatrix}$$

bölelim ve

$$H(x, y) = \frac{D \begin{bmatrix} x, x_1', \dots, x_a' \\ y, y_1', \dots, y_a' \end{bmatrix}}{D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_a' \\ y_1', \dots, y_a' \end{bmatrix}} \quad (17)$$

yazalım ve buradan

$$\sum_{\alpha=1}^a K(x_\alpha', t) \theta(x) = \lambda_0 K(x, t) - H(x, t) \\ + \lambda_0 \int_a^b H(x, s) K(s, t) ds \quad \text{elde ederiz.}$$

(16) denklemi

$$v(x) = \lambda_0 \sum_{\alpha=1}^a \theta(x) \int_a^b K(x_\alpha', t) v(t) dt$$

şeklinde yazılır. Bu gösterir ki

$$c_{\alpha} = \lambda_0 \int_a^b K(x_{\alpha}', t) v(t) dt$$

sabit değerleri ile $v(x)$ (15) formunda yazılabilir.

3.4 Teorem:

Eğer q mertebeli $D(\lambda)=0$ 'ın bir kökü $\lambda = \lambda_0$ ise o zaman

$$u(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (3)$$

lineer homogen integral denklem q lineer bağımsız çözümlere sahiptir. Burada diğer tüm çözümlerin terimleri kesinlikle lineer bağımsızdır. Böyle q bağımsız çözümlerinin bir sistemi

$$\theta(x) = \frac{D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_{\alpha-1}', x, x_{\alpha+1}', \dots, x_q' \\ y_1', \dots, y_{\alpha-1}', y_{\alpha}', y_{\alpha+1}', \dots, y_q' \end{bmatrix}}{D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_q' \\ y_1', \dots, y_q' \end{bmatrix}} \quad (\alpha=1, \dots, q)$$

şeklinde verilir.

3.5 Karakteristik Sabit , Temel Fonksiyonlar , Tanımlar:

Eğer $D(\lambda)$, $K(x, t)$ çekirdeği için Fredholm 'un determinantı ve $D(\lambda_0)=0$ ise $\lambda_0, K(x, t)$ çekirdeğinin karakteristik sabiti olarak adlandırılır. Eğer $\theta(x)$, sürekli ve (ab) aralığında sıfır değilse ve

$$u(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, t) \theta(t) dt$$

şeklinde ise o zaman $\theta(x)$, λ_0 karakteristik sabite ait olan

$K(x,t)$ çekirdeğinin temel fonksiyonudur.

Eğer her çözümün bu q çözümlerindeki terimleri lineer ise
'a ait olan $K(x,t)$ çekirdeğinin temel fonksiyonlarının tam
sistemi $\theta_1(x), \dots, \theta_q(x)$ şeklindedir. Böylece eğer $\psi_1, \dots, \psi_q$
diğer q çözümleri ise

$$\begin{aligned} \psi_1 &= c_{11}\psi_1 + \dots + c_{1n}a \\ &\vdots \\ \psi_n &= c_{n1}\psi_n + \dots + c_{nn}a \end{aligned} \quad (18)$$

elde ederiz ve eğer

$$\begin{array}{c} C_{11} \dots\dots\dots C_{1q} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ C_{q1} \dots\dots\dots C_{qq} \end{array} \neq 0$$

ise $\mathcal{D}_0$ 'a ait olan temel fonksiyonların bir tam sistemin tekrarı $\psi_1, \dots, \psi_d$ şeklindedir.

3.6 Lineer Homogen Denklemler Arasındaki İlişki:

$$u(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (3)$$

integral denklemi ile ilişkili integral denklem olarak adlandırılan

$$v(x) = \lambda \int_a^b K(t, x) v(t) dt \quad (19)$$

homogen integral denklemini araştıracağız.

x ve t argumanlarını değiştirerek $K(x,t)$ orjinal çekirdek tarafından türetilen ilişki denkleminin

$$K(x, t) = K(t, x)$$

çekirdeğini inceleyelim. Burada (19) ile (3) denklemlerinin çözümleri arasında önemli bir ilişki vardır. Onları incelemek için önce $K(x,t)$ çekirdeği için Fredholm minörlerini ve Fred-

holm determinantını hesaplayalım. Gözönüne alınan çizgi notasyonunu inceleyelim.

3.6.1 İlişkili Çekirdek İçin Fredholm Determinantı:

$$A_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

olduğu yerlerde

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n$$

olur. Buradan

$$\overline{A}_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} \overline{K}(t_1, t_1) & \dots & \overline{K}(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{K}(t_n, t_1) & \dots & \overline{K}(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

olduğunda

$$\overline{D}(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \overline{A}_n$$

dir. $\overline{A}_n$ integralinde uygulanan determinant, A_n integralinde uygulanan determinantla değiştirilmiş satır ve sütunlar haric aynıdır. Fakat bu değiştirme, sabit determinant değerlerinden ayrılır. Bu yüzden $\overline{A}_n = A_n$ 'dir. Ve

$$\overline{D}(\lambda) \equiv D(\lambda) \quad (20)$$

olur. Buradan $K(t, x)$ ve $K(x, t)$ 'nin aynı aynı karakteristik sabite sahip olduğu sonucunu çıkartırız.

3.6.2 İlişkili Çekirdek İçin Fredholm Minörleri:

(7) denkleminde

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n-p}}{n!} B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix}$$

sağımız B_n , (5) 'den dolayıdır. Böylece

$$\overline{B}_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} \overline{K}(x_1, y_1) \dots \overline{K}(x_1, y_p) & \overline{K}(x_1, t_1) \dots \overline{K}(x_1, t_n) \\ \dots & \dots \\ \overline{K}(x_p, y_1) \dots \overline{K}(x_p, y_p) & \overline{K}(x_p, t_1) \dots \overline{K}(x_p, t_n) \\ \overline{K}(t_1, y_1) \dots \overline{K}(t_1, y_p) & \overline{K}(t_1, t_1) \dots \overline{K}(t_1, t_n) \\ \dots & \dots \\ \overline{K}(t_n, y_1) \dots \overline{K}(t_n, y_p) & \overline{K}(t_n, t_1) \dots \overline{K}(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

olur. Fakat $\overline{K}(x, t) = K(t, x)$ ise

$$B_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(y_1, x_1) \dots K(y_p, x_1) & K(t_1, x_1) \dots K(t_n, x_1) \\ \dots & \dots \\ K(y_1, x_p) \dots K(y_p, x_p) & K(t_1, x_p) \dots K(t_n, x_p) \\ K(y_1, t_1) \dots K(y_p, t_1) & K(t_1, t_1) \dots K(t_n, t_1) \\ \dots & \dots \\ K(y_1, t_n) \dots K(y_p, t_n) & K(t_1, t_n) \dots K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

dir. Burada

$$\overline{B}_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = \int_a^b \dots \int_a^b K \begin{bmatrix} y_1, \dots, y_p, t_1, \dots, t_n \\ x_1, \dots, x_p, t_1, \dots, t_n \end{bmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

şeklinde yazılabilir. (5) denklemi yardımıyla tanımlanan değer

ile

$$\overline{B}_n \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = B_n \begin{bmatrix} y_1, \dots, y_p \\ x_1, \dots, x_p \end{bmatrix}$$

olduğunu görürüz ve buradan

$$\overline{D} \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} \equiv D \begin{bmatrix} y_1, \dots, y_p \\ x_1, \dots, x_p \end{bmatrix} \quad (21)$$

olur.

q indeksinin $K(x,t)$ çekirdeğinin bir karakteristik sabiti olduğuna göre

$$D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_q' \\ y_1', \dots, y_q' \end{bmatrix} \neq 0$$

iken

$$D \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} \equiv 0 \quad (p=1, \dots, q-1)$$

elde ederiz. Bundan dolayı (21) tarafından $p=1, \dots, q-1$ için $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ 'de

$$\overline{D} \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} y_1, \dots, y_p \\ x_1, \dots, x_p \end{bmatrix} \equiv 0$$

olur. Eger

$$\overline{x}_\alpha' = y_\alpha', \quad \overline{y}_\alpha' = x_\alpha' \quad (22)$$

eşitliklerini yazarsak

$$\overline{D} \begin{bmatrix} \overline{x}_1', \dots, \overline{x}_q' \\ \overline{y}_1', \dots, \overline{y}_q' \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \overline{y}_1', \dots, \overline{y}_q' \\ \overline{x}_1', \dots, \overline{x}_q' \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} x_1', \dots, x_q' \\ y_1', \dots, y_q' \end{bmatrix} \neq 0$$

elde ederiz. Bu tanımdan $K(t,x)$ 'in karakteristik bir sabiti olan λ_0 'in q indeksi, $\overline{q}$ 'dur. Açıkça eğer q indeksli $K(x,t)$ 'nin karakteristik sabiti λ_0 ise, λ_0 aynı indeksli $K(t,x)$ 'in karakteristik sabitidir.

KAYNAKLAR

- LOVITT, William Vernon Linear Integral Equations
Newyork - 1950
- TRICOMI, F, G. Integral Equations
Newyork - 1957
- MIKHLIN, S, G. Integral Equations
London - 1957
- AKSOY, Yavuz integral Denklemler Cilt 1
istanbul - 1983

=== ÖZGEÇMİŞ ===

1976 yılında ilk öğrenimime Ali Olker ilkokulu'nda başladım. 1981 yılında da A.Rıfat Canayakın Lisesi'ne girip orta ve lise öğrenimimi burada tamamladım.Lise son sınıfta Üniversite sınavına girmek üzere başvurdum ve 1987 yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Lisans bölümünü kazandım. 4 yıl öğrenimim sonunda 1991 yılında mezun olduktan sonra yine aynı bölümde Yüksek Lisans yapmaya hak kazandım.Su anda Yüksek Lisans tezimin onaylanması ile mezun olacağım.

NİLUFER ŞENOL